

[このテキストはOHO'96で筆者が作成した講義録を元に、大幅な加筆、修正をおこなったものです。今回の改訂を機に、最新版を次のWebページからダウンロードできるようにしました。

<http://hadron.kek.jp/member/machida/text/contents.html>
製本の締め切りに間に合わなかったために省略された項目、および不十分な説明についても、随時Webページ上で内容を整備する予定です。ご参照ください。なお、本講義録掲載のバージョンはver.2.0です。]

1. はじめに

空間電荷効果とは、ビームを構成する同種類の粒子間に働くクーロン力の影響により、外部集束系が定める粒子の運動が、ビーム強度の関数として変化する効果を指す。

加速器の設計をする際には、すべての加速粒子がある大きさの真空チャンバーのなか、通常その中心付近にまとまって運動するように、電磁石を配置し集束系を定める。この段階では、運動を規定する対象は、粒子の集団であるビームというよりも、一つ一つの粒子に着目している。集束系の評価は、粒子が持つ振幅と振動数、言い換えればベータ関数とベータatron振動数（またはチューン）の大きさによってなされる。

ビーム強度が大きくなると、ビームの運動はそれを構成する粒子の単なる集合ではなくなり、互いの相互作用を考慮しなければならなくなる。一つ一つの粒子のチューンが変化を受けるとともに、ビーム全体として個々の粒子が持つ振動とは別の振動が起こり得る。個々の粒子の振動をインコヒーレント振動、またそのチューンをインコヒーレントチューン、それに対してビーム全体の振動をコヒーレント振動、そのチューンをコヒーレントチューンという。ビーム全体の振動は、実験的に容易に観測されるコヒーレント二極振動、つまりビーム重心の振動のほか、重心の位置は一定に保ちながらビームの形状が振動する高次のコヒーレント振動が起こり得る。例えば、位相空間で円形の形を持ったビームであれば、時間の経過とともにビームの占める領域は変化しない状況を考える。円形から多少ずれた楕円形のビームが入射されると楕円の長軸と短軸は回転を始める。これはコヒーレント四極振動と呼ばれる。同様に、位相空間で周方向に三回対称性を持つビームが入射されるとコヒーレント六極振動が起こるといいうように、高次振動が定義される。

粒子間の相互作用が無視できる場合には、個々の粒

子が持つインコヒーレントチューンの値は一定である。ただし、ここでは外部集束系が持つ非線形成分は無視した。またコヒーレント振動の振動数もインコヒーレント振動の整数倍となる。例えばコヒーレント二極振動は、インコヒーレント振動数の一倍、四極振動は二倍などである。粒子間に相互作用がなく、ビームと言えどもそれを構成する粒子の単なる重ね合わせと見なせる場合には、コヒーレント振動が整数倍となるのは当然の帰結である。ビーム強度が大きくなると、インコヒーレント振動数が変化し、通常の場合振幅によって異なる値を持つ。ビームを構成する個々の粒子のインコヒーレント振動をチューンダイアグラム上にプロットすると、ある広がりを持つ領域となり、チューンスプレッドと呼ばれる。一方、コヒーレント振動の振動数は、もはやインコヒーレント振動数の整数倍とはならない。

空間電荷効果の説明と言うと、特に円形加速器における場合にはチューンシフト量の計算に重きが置かれがちである。自由空間でのインコヒーレントチューンシフトおよびビームを取り巻く境界条件（真空チャンバーやラティスを構成する電磁石）によって、如何にインコヒーレントチューンとコヒーレント二極振動がビーム強度の関数となるかがLaslettにより公式化され、ラスレットチューンシフトと呼ばれている[1]。ラスレットチューンシフトの計算は空間電荷力を数値化するのに便利な量であるが、ビームのエミッタンス増大やビームロスといった、より具体的なビームの性質を議論するためには、後で示すように定量性に欠ける。そういった意味合いから、ラスレットパラメーターと呼ぶ方が自然である。

ここでは、チューンシフトの計算のみならず、ビームの安定性と言う点から、空間電荷効果を議論する。さらに、空間電荷効果を低減する工夫とシミュレーションによる計算方法についても説明する。内容の多くは円形加速器における空間電荷効果を仮定しているが、かなりの部分は直線型加速器においても通用するはずである。歴史を見ると、むしろ直線型加速器で最初に発展された議論が、円形加速器に応用された面が少なからず見受けられる。

2. 空間電荷力とチューンシフト

2.1 自由空間でのチューンシフト

まずはじめに、横方向の空間電荷力を計算する。縦方向には一様分布していると仮定する。つまり、縦方

向には、対称性から電場は生じない。横方向の粒子密度分布を $\rho(r)$ とすると、マックスウェルの方程式から

$$\Delta \cdot \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rE_r) = \frac{q}{\epsilon_0} \rho(r)$$

$$(\nabla \times \vec{B})_s = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rB_\theta) = \mu_0 q v \rho(r)$$

ここで、 q は単位電荷、 ϵ_0 は誘電率、 μ_0 は透磁率、 v はビームの速度、また、図1に示すように円柱座標系をとった。これらの式は積分されて

$$E_r = \frac{q}{\epsilon_0} \frac{1}{r} \int_0^r r_1 \rho(r_1) dr_1$$

$$B_\theta = \frac{\mu_0 q v}{r} \int_0^r r_1 \rho(r_1) dr_1$$

粒子は、これらの電磁場からローレンツ力を受ける。

$$F(r) = q(E_r - \beta c B_\theta)$$

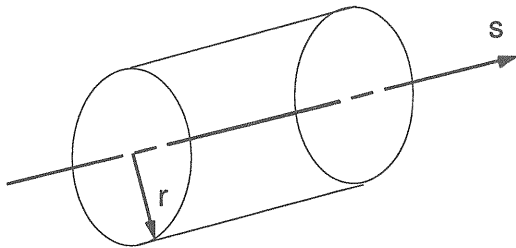


図1： 縦方向には無限に長い円柱を考え、粒子密度は半径のみの関数とする。

β や γ はローレンツファクターである。粒子の横方向の分布が一様の時、すなわち、

$$\rho(r) = \frac{n_e}{\pi a^2}$$

(ここで、 n_e は、単位長さあたりの粒子の線密度、 a は、ビームサイズ) ローレンツ力は半径に比例するようになり、

$$F_r = \frac{q^2 n_e}{2\pi \epsilon_0} (1 - \beta^2) \frac{r}{a^2} = \frac{q^2 n_e}{2\pi \epsilon_0 \gamma^2} \frac{r}{a^2}$$

この式からわかることの一つは、粒子のエネルギーが増加し、ローレンツファクター β が1に近づくほど空間電荷力は弱まる。ただし、力の符号まで変わることは無いので発散力が収束力に変化することはない。シンクロトロンでは、入射エネルギー付近で空間電荷効果は最も顕著に現れる。

空間電荷力によって、粒子のベータトロン振動がどう変わるかを次に見る。ベータトロン振動の運動方程式は、右辺に上で求めた力が加わり、

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} + v_y^2 y = \frac{R^2}{\beta^2 \gamma m_0 c^2} F(r)$$

ここで、

$$\theta = \frac{s}{R}$$

を用いて、縦方向の変数を定義し直した。 R は平均半径、 m_0 は陽子の静止質量、 c は光速、 v_y は垂直方向のチューンである。ビームは円柱であり、水平と垂直方向は対称としたので、垂直平面のみの運動を考えた。

力は線形なので、 y でくり出すことができ

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} + \left(v_y^2 - \frac{2n_e r_p R^2}{a^2 \beta^2 \gamma^3} \right) y = 0$$

ここで、

$$r_p = \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 m_0 c^2}$$

とおいた。いわゆる陽子の古典半径である。さらに、近似的に

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} + (v_y + \Delta v_{sc})^2 y = 0$$

ここで

$$\Delta v_{sc} = -\frac{n_e r_p R^2}{v_y a^2 \beta^2 \gamma^3}$$

$$= -\frac{n_t r_p}{2\pi \epsilon_y \beta^2 \gamma^3}$$

ただし、 $a^2 = \beta_y \epsilon_y$ 、 $\beta_y = R/v_y$ 。また $n_t = 2\pi R n_e$ として全電流を定義した。

以上をまとめると、一様分布のビームは線形の空間電荷力を生み出し、それがチューンシフトをおこす。なお、ここまでは、縦方向は一様分布であるとしてきたが、ビームがバンチしている場合には、空間電荷力の最大値は、平均の線密度の代わりにピークの線密度がきめると便宜的に考えて、バンチングファクターを次のように定義する。

$$B_f = \frac{I_{average}}{I_{peak}}$$

これはゼロと1の間の値をとる。これを用いると、チューンシフトは

$$\Delta v_{sc} = -\frac{n_l r_p}{2\pi\epsilon_y \beta^2 \gamma^3} \frac{1}{B_f}$$

となる。

この値を、ラスレットチューンシフト[Laslett tune shift]と呼ぶことがある[1]。ただしこれは厳密な意味では正しくない。本来、ラスレットの仕事は、上に求めた自由空間での空間電荷効果によるチューンシフトではなく、真空チャンバーや電磁石のイメージカレントやイメージチャージを考慮した境界条件のある場合のチューンシフトを公式化した点にある。上で求めた式に、フォームファクターとしてそうした効果を取り入れる。極端な場合、ラスレットチューンシフトとして、自由空間からの寄与以外を指すこともあるので注意が必要である。

2.2 KV分布

では次に、実空間で一様分布を与える粒子分布が現実であり得るのか。そうだとしたら、位相空間ではどんな関数になるかを求める。水平、垂直の実空間で二次元の一様分布に対応する四次元位相空間の位相変数を (x, x', y, y') と置く。分布の対称性を考慮して、四次元の球面の関数として位相分布関数 f を表すと、

$$\int_{x^2+x'^2+y^2+y'^2 \leq 1} f(x^2+x'^2+y^2+y'^2) dx' dy' = const.$$

x と y を固定して、次のような新しい変数を用いると

$$x' = r \cos \theta$$

$$y' = r \sin \theta$$

前式は、

$$\int_{x^2+y^2+r^2 \leq 1} f(x^2+y^2+r^2) r dr d\theta = const.$$

さらに変数を変換して、

$$q = r^2$$

$$dq = 2r dr$$

と置くと、

$$\int_0^{1-x^2-y^2} f(x^2+y^2+q) dq = const.$$

となり、解は、

$$f(x^2+y^2+q) = const \cdot \delta(x^2+y^2+q-1) = const \cdot \delta(x^2+y^2+x'^2+y'^2-1)$$

という、位相空間内の δ 関数となる。これを、最初に提唱した Kapchinskij と Vladimirkij の名前をとって KV 分布と呼ぶ[2]。空間電荷力を計算する上では最も簡単な一様分布ではあるが、位相空間では特異な関数である δ 関数となる。つまり、現実的には別の分布について見てみる必要がある。

2.3 非一様分布とチューンスプレッド

今度は、ガウス分布の時、スペースチャージ力とそれによって引き起こされるチューンシフトを計算する。ガウス分布では、

$$\rho(r) = \frac{n_e}{2\pi\sigma_r^2} e^{-r^2/2\sigma_r^2}$$

ここで、 σ_r はガウス分布における標準偏差である。このときのローレンツ力は、

$$F_r = \frac{q^2 n_e}{2\pi\epsilon_0 \gamma^2} \frac{1 - e^{-r^2/2\sigma_r^2}}{r}$$

つまり、運動方程式は、

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} + v_y^2 y = \frac{2n_e r_p R^2}{\beta^2 \gamma^3} \frac{1 - e^{-y^2/2\sigma_y^2}}{y}$$

右辺を展開すると、

$$\frac{1 - e^{-y^2/2\sigma_y^2}}{y} = \frac{y}{2\sigma_y^2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n-1}}{2^n n! \sigma_y^{2n}}$$

$$= \frac{y}{2\sigma_y^2} - \frac{y^3}{8\sigma_y^4} + \dots$$

つまり、チューンシフトをおこす第一項の線形部分に加えて、それ以外の非線形項が加わる。粒子分布の対称性から、最低次の非線形項はオクタポール[octupole]成分となる。この非線形項の効果を見るにはハミルトニアンを用いるのが考えやすい。ガウス分布の場合に、最低次の非線形性を取り入れてチューンシフトを次に導く。ハミルトニアンは、

$$\begin{aligned} \Delta H_{sp} = & \frac{r_p n_e}{\beta^2 \gamma^3 B_f} \left[-\frac{2}{\sqrt{2\sigma_x}(\sqrt{2\sigma_x} + \sqrt{2\sigma_y})} x^2 \right. \\ & - \frac{2}{\sqrt{2\sigma_y}(\sqrt{2\sigma_y} + \sqrt{2\sigma_x})} y^2 \\ & + \frac{2\sqrt{2\sigma_x} + \sqrt{2\sigma_y}}{3(\sqrt{2\sigma_x})^3(\sqrt{2\sigma_x} + \sqrt{2\sigma_y})^2} x^4 \\ & + \frac{2}{\sqrt{2\sigma_x}\sqrt{2\sigma_y}(\sqrt{2\sigma_x} + \sqrt{2\sigma_y})^2} x^2 y^2 \\ & \left. + \frac{2\sqrt{2\sigma_y} + \sqrt{2\sigma_x}}{3(\sqrt{2\sigma_y})^3(\sqrt{2\sigma_y} + \sqrt{2\sigma_x})^2} y^4 + \dots \right] \end{aligned}$$

アクション J 、アングル ψ に変数変換する。

$$x = \sqrt{2J_x \beta_x} \cos \psi_x$$

$$y = \sqrt{2J_y \beta_y} \cos \psi_y$$

ここで、 $\beta_{x,y}$ はベーター関数。ハミルトニアン H の時、アングルの変化 ψ は、次の様に表されるから、

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{\partial H}{\partial J}$$

空間電荷力によるチューンシフトは、

$$\Delta v_x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi R} \frac{\partial \Delta H_{sp}}{\partial J_x} ds$$

$$\Delta v_y = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi R} \frac{\partial \Delta H_{sp}}{\partial J_y} ds$$

アクションの次数ごとにチューンシフトを計算する。ハミルトニアンでアクションの1次の部分からは、

$$\begin{aligned} \Delta v_x &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi R} -\frac{r_p n_e}{\beta^2 \gamma^3 B_f} \frac{2\beta_x \cos^2 \psi_x}{\sigma_x(\sigma_x + \sigma_y)} ds \\ &= -\frac{r_p n_e \beta_x}{2\pi \beta^2 \gamma^3 B_f} \frac{1}{\sigma_x(\sigma_x + \sigma_y)} \end{aligned}$$

ここで、

$$\int_0^{2\pi R} \cos^2 \psi_x ds = \pi R$$

とした。 $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ の時、

$$\Delta v_x = -\frac{r_p n_e}{4\pi \beta^2 \gamma^3 B_f} \frac{\beta_x}{\sigma^2} = -\frac{r_p n_e}{4\pi \beta^2 \gamma^3 \epsilon B_f}$$

となる。さらに、ハミルトニアンでアクションの二次の部分から、

$$\begin{aligned} \Delta v_x &= \frac{r_p n_e}{2\pi \beta^2 \gamma^3 B_f} \left[\frac{2\sigma_x + \sigma_y}{4\sigma_x^3(\sigma_x + \sigma_y)^2} \beta_x^2 J_x \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\sigma_x \sigma_y (\sigma_x + \sigma_y)^2} \beta_x \beta_y J_y \right] \end{aligned}$$

$\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ の時、

$$\begin{aligned} \Delta v_x &= \frac{r_p n_e}{2\pi \beta^2 \gamma^3 B_f} \left[\frac{3\beta_x^2 J_x}{16\sigma^4} + \frac{\beta_x \beta_y J_y}{8\sigma^4} \right] \\ &= \frac{r_p n_e}{2\pi \beta^2 \gamma^3 B_f} \left[\frac{3J_x}{16\epsilon^2} + \frac{J_y}{8\epsilon^2} \right] \end{aligned}$$

つまり、チューンがベーターatron振動の振幅の関数となる。

また、パラボラ分布の時には、

$$\rho(r) = \frac{2n_e}{\pi a^2} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]$$

このときのローレンツ力は、

$$F_r = \frac{q^2 n_e}{\pi a^2 \epsilon_0 \gamma^2} \left(r - \frac{r^3}{2a^2} \right)$$

これを、ガウス分布の場合と比べる。 $a = 2\sigma_r$ と置いてみると、線形部分はパラボラ分布とガウス分布で共に等しくなり、一様分布の場合の二倍である。最低次の非線形部分であるオクタポール成分はパラボラ分布の場合、ガウス分布の半分になる。明らかなことではあるが、ガウス分布が無限の非線形成分を持つのに対して、パラボラ分布はオクタポール成分以外の非線形性を持たない。

いずれにせよ、ひとたび分布が一様分布とは異なり、空間電荷力が非線形成分を持つと、粒子のチューンはベータートロン振動の振幅の関数になる。粒子集団としてのビームは、粒子ごとに個別のチューンを持ち、チューンスペース上で図2に示すようなチューンスプレッドと呼ばれる領域をつくる。

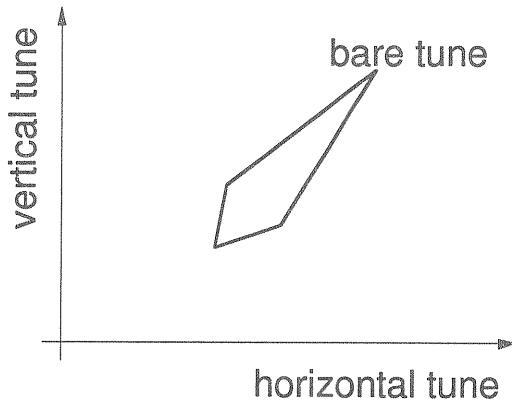


図2： 空間電荷力によるチューンシフトの大きさがベータートロン振動の振幅の関数になるとき、各粒子は個別のチューンを持ち、チューンスペース上でチューンスプレッドと呼ばれる領域をつくる。

2.4 ラスレット係数

ここまではビームを取り囲む真空チャンバーの影響を無視し、ビームは自由空間を走ると仮定した。実際には、真空チャンバーが存在すること、さらにはその周りにラティスを構成する電磁石がある。そういった加速器を構成する機器にイメージチャージおよびイメージカレントを作り出す。自由空間とは異なる境界条件は、チューンシフトにも変化をもたらす。

結果のみ記すと、境界の影響により先に求めたチューンシフトは次のファクターだけ変化する。ここでは垂直方向のチューンシフトを計算する。

$$F = 1 + \left[\frac{b(a+b)}{h^2} \right] \left\{ \epsilon_1 \left[1 + B_f(\gamma^2 - 1) \right] + \epsilon_2 B_f(\gamma^2 - 1) \frac{h^2}{v^2} \right\}$$

ここで、 a は水平方向のビームサイズ、 b は垂直方向のビームサイズ、 $2h$ は真空チャンバーの垂直方向のサイズ、 $2v$ は垂直方向の電磁石のギャップサイズである。 ϵ_1 と ϵ_2 はラスレット係数と呼ばれ、 ϵ_1 は円形の真空チャンバーの時0、平行平板の時0.206、 $\epsilon_2=0.411$ となる。

ビームを取り囲む真空チャンバーや電磁石の影響を考慮すると、境界に対して原点が決まりビームのコヒーレント二極振動が、イメージチャージやイメージカレントによって受けるコヒーレントチューンシフトが計算できる。

$$\Delta v_{coh,y} = - \frac{n_t r_p}{\pi \beta^2 \gamma^3 B_f} \frac{R}{v_{y,o}} \frac{F}{h^2}$$

ここで、チューンが整数に近いときには、

$$F = \xi_1 \left[1 + B_f(\gamma^2 - 1) \right] + \xi_2 B_f(\gamma^2 - 1) \frac{h^2}{v^2}$$

また、チューンが半整数に近い際には

$$F = \xi_1 + \epsilon_1 B_f(\gamma^2 - 1) + \epsilon_2 B_f(\gamma^2 - 1) \frac{h^2}{v^2}$$

ここで、 ξ_1 と ξ_2 もラスレット係数と呼ばれ前者は円形の真空チャンバーの時0.5、平行平板の時0.617、後者は0.617となる。チューンの違いによって二つの場合があり得るのは、真空チャンバーをビームが作る電磁波が

通り抜けるかどうかによる。加速器のある点でコヒーレント二極振動を観測すると、チューンの小数部と周回振動数のかけ算によって決まる振動数を持つ電磁波が放出される。チューンが整数に近いときには、振動数が低くなりそれに対応する表皮厚が厚くなる。逆にチューンが半整数に近いときには、振動数が高くなり表皮厚が薄くなる。二つの条件の境目は、ある振動数に対応する表皮厚 δ と、真空チャンバーの厚さ t と真空チャンバーの半径 b の積の平方根の大小関係による[3]。

$$\delta_{skin} < \sqrt{bt}$$

の時、半整数値に近い近似が成り立つ。真空チャンバーの厚さそのものとの大小関係ではないことに注意を要する。

3. チューンシフトと共鳴

一般に、空間電荷効果を説明する際には、以上見てきたようにビームを構成する粒子間のクーロン斥力の効果としてゼロカレントのときに比べてどの程度チューンがシフトするかを計算する。また、空間電荷力が線形以外の成分を持つ際にはどの程度のチューンスプレッドとなるかを計算する。空間電荷効果の寄与が大きな低エネルギーシンクロトロンの入射エネルギー付近（数MeVから数100MeV）では、それほど大きな寄与とはならないが、ビームを取り巻く境界条件も、ラスレット係数という形で考慮される。

さて、チューンシフトの値が計算されたところで、これがビームに対してどんな影響があるのか、またはチューンシフトの値がどれほどであれば空間電荷効果を考慮しなければいけないのか。多くの本や加速器スクールの教科書では、チューンシフトの計算値を求めることで空間電荷効果の評価はすべてのような印象を与えているが、この時点ではビームに対する影響は何も評価されていない。

最もよくある記述は、ラスレットチューンシフトを-0.25よりも小さく保てば、空間電荷効果は問題にならないというものである。逆に言えば、チューンシフトが-0.25以上になると、低い次元の共鳴である、1, 2, 3, 4次のどれかの条件を満たす。特にチューンスプレッドがある場合、ゼロカレントでのチューンとチューンシフトが最大値の粒子のチューンとが、ともに隣り合う4次の共鳴線の間に入るためには、チューンシフトの最大値が-0.25以下でなければならないというのが一つの根拠となっている。これらの記述は不正確であることを以下に示す。

3.1 よく見られる間違っただけ

R. Baartmanの論文[4]にそって、間違っただけ空間電荷効果の取り扱いから始める。空間電荷効果のない場合に、粒子の運動は単純な単振動の方程式で記述できると仮定する。はじめに整数共鳴の共鳴源として二極誤差磁場がある時に

$$\frac{d^2x}{ds^2} + k_{ex}x = F_2 \cos\left(2\pi p \frac{s}{C}\right)$$

ここで、 F_2 はハーモニック成分 p を持つ二極誤差磁場であり、横方向の座標 x によらない。これに空間電荷効果を付け加える。今、空間電荷効果は線形な力を仮定すると、

$$\frac{d^2x}{ds^2} + k_{ex}x = F_2 \cos\left(2\pi p \frac{s}{C}\right) + k_{sc}x$$

または、

$$\frac{d^2x}{ds^2} + (k_{ex} - k_{sc})x = F_2 \cos\left(2\pi p \frac{s}{C}\right)$$

つまり、空間電荷力は外部収束力を弱める力として働き、合計の収束力が、

$$k_{ex} - k_{sc} = \left(\frac{2\pi p}{C}\right)^2$$

を満たすときに共鳴がおきて、ビームは発散する。チューンという言葉で表せば、空間電荷力を取り入れたチューンが整数となる。この議論は、正しくない。

この議論の問題点は空間電荷力の導入の際に、横方向の座標 x を基準に力を評価した点にある。正しくは、ビームの重心からの距離の関数として定めなければならない。二極誤差磁場がある場合、ビーム中の粒子の運動はベータatron振動を表す一般解の部分と、振動の中心を表す特殊解に分けることができるが、特殊解の部分の位相はもとの二極磁場誤差が持つ s 依存性により一意に決まる。つまり、ビーム全体としてはじめに定めた横方向の原点 $x=0$ からずれた点を中心にベータatron振動がおきる。

それでは、正しい空間電荷効果を導くために、はじめにビームの重心の運動を求めることにする。空間電荷力を入れた一粒子の運動方程式は、

$$\frac{d^2x}{ds^2} + k_{ex}x = F_2 \cos\left(2\pi p \frac{s}{C}\right) + k_{sc}(x - \bar{x})$$

上式でビームを構成する粒子全体にわたって座標の平均を求めることにより、

$$\frac{d^2\bar{x}}{ds^2} + k_{ex}\bar{x} = F_2 \cos\left(2\pi p \frac{s}{C}\right)$$

が成り立つ。ここで得られる結論の一つは、重心の運動は空間電荷力の影響がないということである。また、二つの式の差を取ること、ビームの重心に対する一粒子の運動は、

$$\frac{d^2(x - \bar{x})}{ds^2} + (k_{ex} - k_{sc})(x - \bar{x}) = 0$$

つまり、もう一つの重要な結論は、ビームの重心を基準にした運動方程式では外部の二極誤差磁場の影響がないということである。言い換えれば、空間電荷力によって変化した一粒子のチューンが、整数共鳴に近づいたとしても、共鳴を起こすことはない。

繰り返しになるが、空間電荷力によって粒子の持つチューンが整数になったとしてもそうした粒子は二極誤差磁場の影響を受けない。二極誤差磁場による整数共鳴は重心の運動（コヒーレント運動）のチューンが整数になると起きるが、重心の運動は空間電荷力によって影響を受けない。従って整数共鳴に関する限り、空間電荷力が無視できない加速器でもなにも状況は変わらない。もっとも、境界を考慮すると重心の運動がもつ（コヒーレント二極）チューンはビーム強度の関数として変化するので、この効果を通じて空間電荷力による整数共鳴が起こる可能性はある。ただし、コヒーレント二極チューンシフトは自由空間中の運動では出てこない量であり、値は小さい。なお、チューンが整数となる場所では整数共鳴のみならず、すべての高次のオーダーの共鳴条件が満たされる。ここでは、空間電荷力によってチューンが整数に近づいたとしても整数共鳴が起きないと言っているのであって、高次の共鳴については以下に説明する。

次に、横方向の座標 x に比例する四極誤差磁場が存在する場合に、空間電荷力によって半整数共鳴の付近で粒子の運動がどのようになるかを見てみる。簡単のために空間電荷力が重心からの座標 x に対し比例関数として

$$\frac{d^2x}{ds^2} + k_{ex}x = xF_2 \cos\left(2\pi p \frac{s}{C}\right) + k_{sc}(x - \bar{x})$$

一方重心の運動は、上式の x において平均を取ること、

$$\frac{d^2\bar{x}}{ds^2} + k_{ex}\bar{x} = \bar{x}F_2 \cos\left(2\pi p \frac{s}{C}\right)$$

二つの式の差を取ることにより、

$$\begin{aligned} \frac{d^2(x - \bar{x})}{ds^2} + (k_{ex} - k_{sc})(x - \bar{x}) \\ = (x - \bar{x})F_2 \cos\left(2\pi p \frac{s}{C}\right) \end{aligned}$$

空間電荷力が増加すると、外部収束力を弱め、半整数共鳴の条件を満たすとビームが失われる。

この説明はそれ自身なにも問題がないように思われるが、一つだけ注意する点がある。空間電荷力を導入する際に定義した k_{sc} は、もちろんビーム強度の関数であると同時にビームサイズの関数でもある。半整数共鳴の近くではビームサイズが変化するためその効果を取り入れる必要がある。はじめに述べた空間電荷力によるチューンシフトの計算の際には、そうしたビームサイズの変化は考慮されていない。例えば、ゼロカレントでのチューンが 7.75 で、チューンシフトが -0.25 の時半整数共鳴が起きるという考えは正しくない。前に述べた整数共鳴の場合と異なり、空間電荷力により実効的な収束力が弱まった粒子は四極誤差磁場による半整数共鳴を起こす可能性はあるが、それが起きるビーム強度は、上記のような単純なモデルでは説明できない。空間電荷力によって実効的な収束力の修正を受けた系ではビームサイズがゼロカレントの場合と異なり、また逆にビームサイズが変化すれば空間電荷力が異なる。ここでは、セルフコンシステントな取り扱いが不可欠である。

3.2 ブラゾフ - ポアソン方程式

空間電荷効果を評価する際には、平均場のみを考慮し、衝突項のない系を仮定する。同じような問題で、ビームを構成する粒子間の衝突項によるビームへの効果を評価するのが、intra-beam scattering である（これに対する日本語名があるのか知らない）。衝突項のない系でセルフコンシステントに扱うためにブラゾフ方程式およびポアソン方程式が用いられる。ブラゾフ方程式は次のように書き表せる。

$$\frac{df}{dt} + [f, H] = \frac{df}{dt} + \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{df}{dp_x} \frac{dp_x}{dt} = 0$$

ここで、 $[f, H]$ はポアソnbracketで、 f は分布関数、 H はハミルトニアンを表す。一方、ポアソン方程式は、

$$\Delta\phi = \frac{1}{\epsilon_0} \int f dp_x$$

空間電荷効果の問題は、境界条件のもとでこの二つの方程式の解として分布関数 f が求められればそれで解決であるが実際にはそう簡単に答は得られない。もっとも、粒子シミュレーションは二つの方程式を時間的および空間的に差分方程式に置き換え、解を求めている。ただし、多くの場合、ブラゾフ方程式を数値的に解く代わりに一粒子の運動方程式を数値積分によって解く。

ブラゾフ方程式を解析的に解く一つの方法として、定常状態の分布関数からのずれを1次のオーダーで展開する。ただし、問題は、特殊な場合を除き定常状態の分布関数がそもそも見つかっていない。特殊な場合とは、外部の集束系が一様集束の場合、およびAG集束系ではKV分布の場合である。

外部の集束系が一様集束の場合（例えば、ソレノイドを使った集束系の場合）では、ハミルトニアン関数として書き表せるすべての分布関数は定常状態となりうる。つまり、

$$f = f(H)$$

のとき、ポアソnbracketは、つねにゼロである。従って

$$\frac{df}{dt} = 0$$

実際の加速器が使うAG集束系では、唯一KV分布だけが定常分布となり得る。

3.3 エンベロップ方程式

ブラゾフ方程式を用いる代わりに、粒子分布の二次のモーメントだけに着目した方程式がエンベロップ方程式と呼ばれる。ビームエンベロップ（ビームサイズ）をビーム電流とビームエミッタンスを使って一様分布の場合に定式化したのが、先にKV分布を導いた際に登場したKapchinskijとVladimirskijである。KV分布では、セルフコンシステントに解けることが彼らによって示された。その後、一様分布でなくても、エミッタンスの変化が事前に予測できる場合には、ビームエンベ

ロップのrmsの値はKV分布の時と同じ微分方程式に従うことをSachererが示した[5]。以下にはKVと一般の分布の場合について、エンベロップ方程式を導く。

はじめに粒子分布の二次までのモーメント方程式をつくる。ここでも、縦方向にビームは一様であるとし、水平方向と垂直方向はカップリングが無く、別々に考えることができるとする。粒子の水平方向 x の運動方程式を以下のように書くことから始める。

$$\frac{dx}{ds} = p_x$$

$$\frac{dp_x}{ds} = F_{ex}(x, s) + F_{sp}(x, s)$$

垂直方向 y についても同様である。ここで、 $F_{ex}(x, s)$ はラティスの磁石による収束および発散力であるとし、 $F_{sp}(x, s)$ は、空間電荷力を表す。また、いずれの力も粒子の運動量の微小変化にはよらないとした。一般的な粒子分布 $f(x, p_x, s)$ に対して、一次のモーメントは次の式を満たす。

$$\frac{d\bar{x}}{ds} = \frac{d}{ds} \int x f(x, p_x, s) dx dp_x = \bar{p}_x$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{p}_x}{ds} &= \frac{d}{ds} \int p_x f(x, p_x, s) dx dp_x \\ &= \overline{F_{ex} + F_{sp}} = -k(s)\bar{x} \end{aligned}$$

最後の部分では、ニュートンの第三法則から、 $\overline{F_{sp}} = 0$ とし、また外力は線形であると仮定した。二次のモーメントについても同様に、

$$\frac{d\overline{x^2}}{ds} = 2\overline{x \frac{dx}{ds}} = 2\overline{x p_x}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{x p_x}}{ds} &= \overline{\frac{dx}{ds} p_x} + \overline{x \frac{dp_x}{ds}} \\ &= \overline{p_x^2} - k(s)\overline{x^2} + \overline{x F_{sp}} \end{aligned}$$

$$\frac{d\overline{p_x^2}}{ds} = 2\overline{p_x \frac{dp_x}{ds}} = -2k(s)\overline{x p_x} + 2\overline{p_x F_{sp}}$$

rms ビームサイズの一次と二次の微分は次のようにな

る。

$$\frac{d\sqrt{x^2}}{ds} = \frac{\overline{xp_x}}{\sqrt{x^2}}$$

$$\frac{d^2\sqrt{x^2}}{ds^2} = -k(s)\sqrt{x^2}$$

$$+ \frac{(\overline{x^2})(\overline{p_x^2}) - (\overline{xp_x})^2}{(\sqrt{x^2})^3} + \frac{\overline{xF_{sp}}}{\sqrt{x^2}}$$

ここで、 $\overline{p_x^2}$ を評価する代わりにrmsエミッタンスを次のように導入する。

$$\epsilon_{rms} = \sqrt{(\overline{x^2})(\overline{p_x^2}) - (\overline{xp_x})^2}$$

これを用いるとrmsエンベロップ方程式は、

$$\frac{d^2\tilde{x}}{ds^2} + k(s)\tilde{x} - \frac{\epsilon_{rms}^2}{\tilde{x}^3} - \frac{\overline{xF_{sp}}}{\tilde{x}} = 0$$

ここで、 \tilde{x} は $\sqrt{x^2}$ を書き換えたものである。空間電荷力は以前導いたように、電場 E_x を使って表すと、

$$F_{sp} = \frac{q}{m_0c^2\beta^2\gamma^3}E_x$$

これを用いてエンベロップ方程式を書き直すと、

$$\frac{d^2\tilde{x}}{ds^2} + k(s)\tilde{x} - \frac{\epsilon_{rms}^2}{\tilde{x}^3} - \frac{q}{m_0c^2\beta^2\gamma^3} \frac{\overline{xEx}}{\tilde{x}} = 0$$

最後の項は、線形部分の空間電荷力が最小2乗法で決まっていると解釈できる。つまり、電場を線形部分とそのほかに分けて、

$$E_x(x,s) = k_{sp}(s)x + \dots$$

このとき、線形部分の取り方として

$$0 = \frac{d}{d(k_{sp})} \int [k_{sp}(s)x - E_x(x,s)]^2$$

$$\times f(x, p_x, s) dx dp_x$$

とすると、

$$k_{sp}(x,s) = \frac{\overline{xEx}}{\tilde{x}^2}$$

となる。さて次に、この最後の項は、粒子分布の詳細によらないことを示す。

まず、一様分布(KV分布)の時には、空間電荷力は線形部分のみで、上の最小2乗法できめたものと何ら変わらない。すなわち、

$$E_x(x,s) = k_{sp}(s)x = \frac{qn_e}{2\pi\epsilon_0} \frac{x}{4\tilde{x}^2}$$

となり、エンベロップ方程式は

$$\frac{d^2\tilde{x}}{ds^2} + k(s)\tilde{x} - \frac{\epsilon_{rms}^2}{\tilde{x}^3} - \frac{r_p n_e}{\beta^2 \gamma^3} \frac{1}{2\tilde{x}} = 0$$

ただし、ビームの断面積は円と仮定している。

一般の粒子分布の時は複雑になる。ここでは、次のように実空間で楕円の対称性があるものと仮定する。

$$f(x, p_x, y, p_y, s) = f\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, p_x, p_y, s\right)$$

実空間での分布関数は運動量方向で積分して、

$$n\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, s\right)$$

$$= \frac{1}{ab} \int dp_x dp_y f\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, p_x, p_y, s\right)$$

これから、電場はポアソン方程式の解として、

$$E_x = \frac{qn_e abx}{2\epsilon_0} \int_0^\infty dt \frac{n\left(\frac{x^2}{a^2+t} + \frac{y^2}{b^2+t}, s\right)}{(a^2+t)^{3/2} (b^2+t)^{1/2}}$$

同様に垂直方向の電場も決まる。エンベロップ方程式の最後の項は、

$$\overline{xEx} = \frac{qn_e ab}{2\epsilon_0} \int_0^\infty dt \int_{-\infty}^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dy$$

$$\times \frac{x^2 n\left(\frac{x^2}{a^2+t} + \frac{y^2}{b^2+t}, s\right)}{(a^2+t)^{3/2} (b^2+t)^{1/2}} n\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, s\right)$$

途中の計算は付録を参照。結局、

$$\overline{xE_x} = \frac{qn_e}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{a+b} = \frac{qn_e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tilde{x}}{\tilde{x} + \tilde{y}}$$

エンベロップ方程式は、

$$\frac{d^2\tilde{x}}{ds^2} + k(s)\tilde{x} - \frac{\epsilon_{x,rms}^2}{\tilde{x}^3} - \frac{r_p n_e}{\beta^2 \gamma^3} \frac{1}{\tilde{x} + \tilde{y}} = 0$$

$$\frac{d^2\tilde{y}}{ds^2} + k(s)\tilde{y} - \frac{\epsilon_{y,rms}^2}{\tilde{y}^3} - \frac{r_p n_e}{\beta^2 \gamma^3} \frac{1}{\tilde{y} + \tilde{x}} = 0$$

つまり、rms ビームサイズが同じビームは同じエンベロップ方程式に従う。

3.4 セルフコンシステントな扱い[6]

エンベロップ方程式を用い、セルフコンシステントに共鳴の条件を求める。はじめに一次元の問題を取り扱う。一次元のエンベロップ方程式は、

$$\frac{d^2\tilde{x}}{ds^2} + k(s) - \frac{\epsilon_{x,rms}^2}{\tilde{x}^3} - \frac{\pi r_p n_1}{\beta^2 \gamma^3} = 0$$

これを、次のように変数変換して $k(s)$ の s 依存性を消し去る。

$$x = \tilde{x}(s)/x_p(s)$$

$$\phi = \int ds/v\beta$$

ここで、

$$x_p = \sqrt{\epsilon_{x,rms} \beta(s)}$$

さらに、巾 Δv_s を持ち n のハーモニック成分を持つ四極誤差磁場を付け加えて、

$$\frac{d^2x}{d\phi^2} + (v^2 + 2v \cdot \Delta v_s \sin n\phi)x - \frac{v^2}{x^3} - 2v \cdot \Delta v_{sc} = 0$$

ただし、

$$2v \cdot \Delta v_{sc} = \frac{2\pi r_p n_1 R^2}{\beta^2 \gamma^3 2a}$$

ここで、 $a = \sqrt{\epsilon_{x,rms} \frac{R}{v}}$ とにおいて、平均のビームサイズ

でベータ関数の s 依存性を置き換えた。 Δv_s がゼロの時、上のエンベロップ方程式の解は、

$$x = 1 + \frac{\Delta v_{sc}}{2v}$$

と表せるので、ゼロでないときの解は、

$$x = 1 + \frac{\Delta v_{sc}}{2v} + \delta$$

と仮定して、 δ に関する方程式をたてる。結局、

$$\frac{d^2\delta}{d\phi^2} + (4v^2 - 6v \cdot \Delta v_{sc})\delta = -2v \cdot \Delta v_s \sin n\phi$$

となり、共鳴が起きる条件は、

$$2\left(v - \frac{3}{4}\Delta v_{sc}\right) = n$$

または、言い換えると、

$$v - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}\Delta v_{sc}$$

この結果は、空間電荷効果によるチューンシフトが、ゼロカレントのチューンと半整数共鳴の距離の3/4倍に達したときはじめて半整数共鳴が起きることを示している。

二次元の場合には、エンベロップ方程式は、

$$\frac{d^2\tilde{x}}{ds^2} + k_x(s) - \frac{\epsilon_{x,rms}^2}{\tilde{x}^3} - \frac{r_p n_2}{\beta^2 \gamma^3} \frac{1}{\tilde{x} + \tilde{y}} = 0$$

$$\frac{d^2\tilde{y}}{ds^2} + k_y(s) - \frac{\epsilon_{y,rms}^2}{\tilde{y}^3} - \frac{r_p n_2}{\beta^2 \gamma^3} \frac{1}{\tilde{x} + \tilde{y}} = 0$$

であるが、一次元の場合と同様に変数変換を行い、

$$\frac{d^2x}{d\phi^2} + (v_x^2 + 2v_x \cdot \Delta v_{sx} \cos n\phi)x - \frac{v_x^2}{x^3} - \frac{b\omega_p^2}{ax + by} = 0$$

$$\frac{d^2y}{d\phi^2} + (v_y^2 + 2v_y \cdot \Delta v_{sy} \cos n\phi)y - \frac{v_y^2}{y^3} - \frac{a\omega_p^2}{ax + by} = 0$$

ここで、

$$\omega_p^2 = \frac{2n_2 r_p R}{\pi B_f ab \beta^2 \gamma^3} \cdot 1$$

水平、垂直方向のエミッタンスとチューンが等しい場合には、

$$v_x = v_y = v$$

$$\Delta v_{scx} = \Delta v_{scy} = \Delta v_{sc} = \frac{\omega_p^2}{4v}$$

とおいて、

$$\frac{d^2 x}{d\phi^2} + (v^2 + 2v \cdot \Delta v_s \cos n\phi)x - \frac{v_x^2}{x^3} - \frac{4v \cdot \Delta v_{sc}}{x+y} = 0$$

$$\frac{d^2 y}{d\phi^2} + (v^2 + 2v \cdot \Delta v_s \cos n\phi)y - \frac{v_y^2}{y^3} - \frac{4v \cdot \Delta v_{sc}}{x+y} = 0$$

二極誤差磁場の無いときの解、 $x = y = 1 + \frac{\Delta v_{sc}}{2v}$ に対し

て微小変位を、 $\delta x, \delta y$ において共鳴の条件を求めると、次の二つの場合が考えられる。一つはシンメトリックモード ($\delta_x = \delta_y$) と呼ばれるもので、

$$2\left(v - \frac{\Delta v_{sc}}{2}\right) = n$$

もう一つは、アンタインメトリックモード

($\delta_x = -\delta_y$) と呼ばれるもので、

$$2\left(v - \frac{3\Delta v_{sc}}{4}\right) = n$$

つまり、シンメトリックモードの場合、チューンシフトがゼロカレントのチューンと半整数共鳴の距離の二倍まで大きくなって初めて共鳴条件を満たすこと。またアンタインメトリックモードの場合には、4/3倍まで大きくなりうる事が示される。ただし、通常はビーム強度のより低い方の条件（アンタインメトリックモード）で許容できるビーム強度は決まる。

水平と垂直のチューンが異なる場合には、共鳴条件はどちらの方向についても独立に決まると考えられ、

ともに

$$2\left(v - \frac{5\Delta v_{sc}}{8}\right) = n$$

が共鳴条件となる。

3.5 半整数共鳴のシミュレーション[7]

上記の解析を、多粒子シミュレーションによって確かめた結果が以下ようになる。

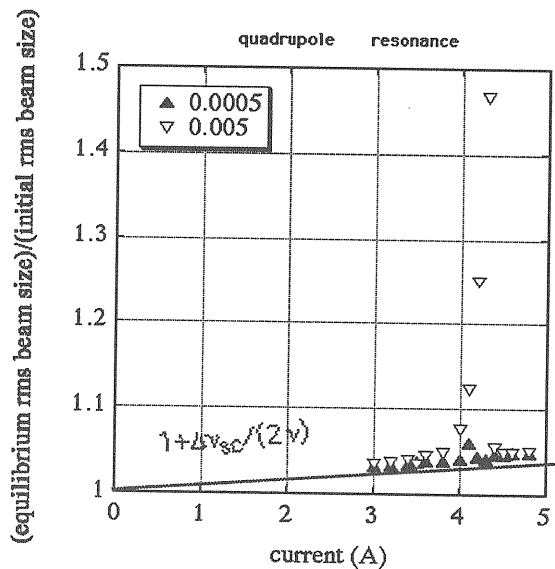


図3：空間電荷力の関数として、定常状態のビームサイズ。二種類の半整数共鳴の強さを仮定している。

まず、図3に空間電荷力の関数として、定常状態のビームサイズをプロットした。ほぼ予想される直線の上ののっているが、電流値が4A付近で、ビームサイズの大増幅増加がみられる。ここで、半整数共鳴が起きている。上向きと下向きの三角印の違いは、仮定している半整数共鳴の強さの違いである。

次に、空間電荷力の関数として、rmsサイズの振動数、つまりコヒーレント四極振動の振動数をプロットしたのが、図4である。

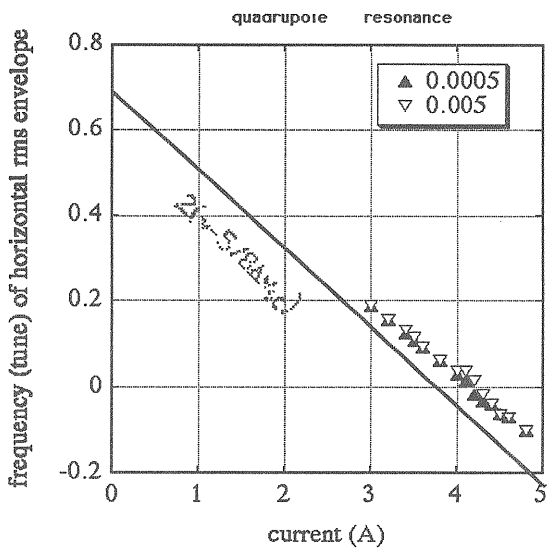


図4：空間電荷力の関数として、rmsサイズの振動数、つまりコヒーレント四極振動の振動数。エンベロップ解析によれば、インコヒーレントチューンシフトの5/8倍のシフトが見られるはずであり、それを直線で示した。縦軸は、四極振動であることから通常のチューンの二倍になっており、その小数数部分を取った。

二次元の非対称ビームに予期される通り、ビームエンベロップ振動の空間電荷力によるシフトは、ほぼインコヒーレント振動のシフトの5/8倍になっている。さらに、図3で半整数共鳴が起きるビーム強度では、エンベロップ振動の振動数が整数値になっていることが確かめられる。

同様のことは、三次共鳴についてもいえる。図5は、三次のモーメントを持つコヒーレント振動数をインコヒーレントチューンシフトの関数(ビーム強度に比例)としてプロットしたものである。コヒーレントチューンシフトの傾きは、インコヒーレントの三倍に比べ0.69倍小さくなっていることがこのシミュレーションから示された。

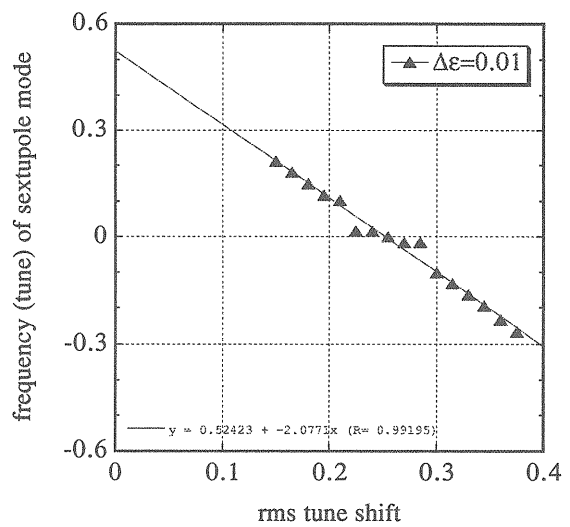


図5：インコヒーレントチューンシフト(空間電荷力)の関数として、コヒーレント六極振動の振動数。

そして、コヒーレント六極振動が整数値を取る付近で、rmsビームエミッタンスは増加する(図6)。つまり、三次の共鳴についても、ビームに対する共鳴の影響がみられるのは、インコヒーレントチューンが共鳴の条件を満たすときではなく、コヒーレント六極振動の振動数が整数値をとるときであることがシミュレーションによって確かめられた。

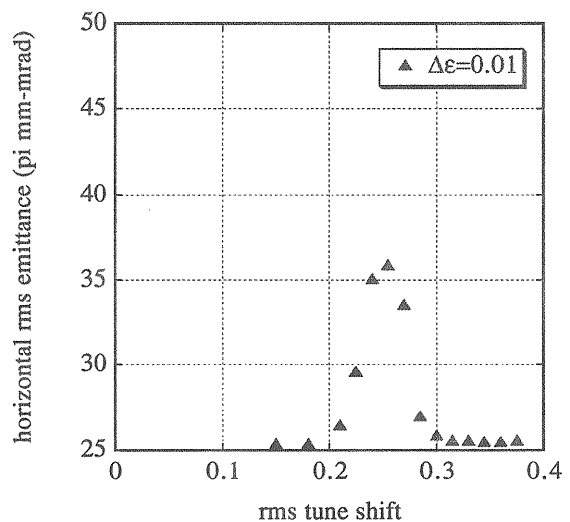


図6：インコヒーレントチューンシフト

(空間電荷力) の関数として、あるターン後の rms エミッタンス。

$$\times \int_0^{2\pi R} \frac{2\sigma_y + \sigma_x}{12\sigma_y^3(\sigma_x + \sigma_y)^2} \beta_y^2 e^{-i4\psi_y} ds$$

また、シミュレーションのみならず、実験的にも半整数共鳴付近のビームサイズの変化とビームロスの振る舞いについて、エンベロップ方程式の解析に一致する結果が出されている[8]。

3.6 共鳴の源としての空間電荷効果

ここまでは、空間電荷効果は粒子のチューンを変化させる源として扱い、これとは別にラティスの磁場エラーによって決まる共鳴条件を満たしたときにビームロスやエミッタンス増加がおきるといった見方をしてきた。ここでは、空間電荷力が共鳴の源となりうることを示す。その前に、まずは一般的に共鳴の強さを表す目安となる、共鳴の巾を定義する。ラティスの磁場成分を次のようにハミルトニアンで表す。

$$H_{mg} = \frac{1}{B\rho} \left[\frac{1}{2!} \frac{\partial B_y}{\partial x} (x^2 - y^2) + \frac{1}{3!} \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} (x^3 - 3xy^2) + \frac{1}{4!} \frac{\partial^3 B_y}{\partial x^3} (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + \dots \right]$$

ここで、 $B\rho$ はリジディティ [rigidity] である。このとき、例えば4次の共鳴 $4\nu_y = n$ の巾は次のように定義される。

$$\Delta e_{mg} = \frac{2J_y}{4\pi B\rho} \int_0^{2\pi R} \frac{1}{4!} \frac{\partial^3 B_y}{\partial x^3} \beta_y^2 e^{-i4\psi_y} ds$$

なお、上の値は位相と振幅を持つベクトル量であるので、これの大きさをとる必要がある。

同様に、前出の空間電荷力のハミルトニアンから、空間電荷力がつくる共鳴の巾が定義できて、例えば四次の共鳴 $4\nu_y = n$ の巾は次のように表される。

$$\Delta e_{sc} = \frac{2J_y}{4\pi} \frac{r_p n_e}{\beta^2 \gamma^3 B_f}$$

ラティスの磁場の非線形性は、クロマティンディーを補正する六極磁場を除けば、システムティックには存在しない。それに対して、空間電荷力がつくる非線形性は、例えば上に示したガウス分布の場合、すべての偶数項 (二極、八極、十二極、...) がシステムティックにでてくる。特に、最低次の非線形性である8極成分は、大強度シンクロトロンでは無視できない[9]。しかも、ラティスがどんなに理想的につくられていても、システムティック成分である限りこの共鳴条件を消すことはできず、究極的な空間電荷リミットを与える。

また、ラティスの対称性とは別のハーモニック成分を持つ非線形性が、空間電荷力から生まれる可能性もある。つまり、空間電荷力がつくる共鳴の巾を定義する式で、ベーター関数やビームサイズが何らかのエラーで変調を受けている場合、全周で積分するとラティスの対称性とは別のハーモニックが残る。これは、ラティスの磁場が持つ同様のハーモニック成分よりもはるかに大きくなる場合があり、無視できない[10]。この場合、空間電荷自身がつくる共鳴に、空間電荷力でチューンシフトを起こした粒子がひっかかるといった現象が起きる。

3.7 ビームハローの生成

ビームのコアからはずれた部分の大振幅粒子をハローよぶ。ビームハローが生成されると、直接のビームロスの原因となりこの生成メカニズムの解明が急がれている。一つのモデルとして90年代半ばに提唱されたものは、粒子-核 (particle-core) とよばれるもの[11]で、はじめはリニアックにおけるハロー生成を説明する試みとして発展したが、同じ現象が円形加速器でも起こり得る[7]。

粒子-核モデルでは、ハローとなる粒子とビームのコアである核を別々に取り扱う。つまり、以前強調したセルフコンシステントな条件は満たしていない。しかしながら、定義によりハロー粒子の割合はビームコアに比べて十分少ないと仮定し、この寄与は無視できるとする。例えば、ビームハローの量は高々コアの数%であるとする。

このモデルではビームハロー粒子の振幅増加の源はビームコアとのパラメトリック共鳴であるとする。はじめに考えられたリニアックでのモデルでは、ビーム

コアが何らかの入射ミスマッチによりコヒーレントに振動する。このコヒーレント振動の振動数はビーム強度による。

具体的に考えるためにビームシェープのミスマッチによるコヒーレント四極振動を考えよう。前の議論にあったように空間電荷力が無視できなくなると、コヒーレント四極振動の振動数は、インコヒーレント振動数の二倍よりは高くなる。この様子を図7に示す。

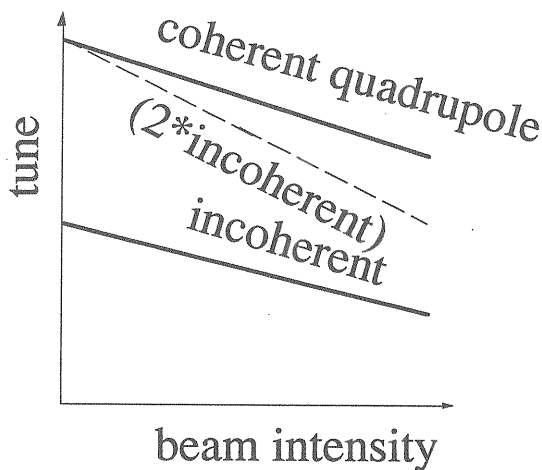


図7：ビーム電流の関数として、インコヒーレントチューンとコヒーレントチューン（ここでは四極）の関係。

ここでは簡単のためにKV分布を仮定し、インコヒーレントチューンに広がりはないものとした。

さて、今度は見方を変えてビーム強度は一定の状況で粒子の振幅によるインコヒーレントチューンの変化を見てみる。ここではビームコアを作る粒子とは別にそれ自身は空間電荷力の大きさに寄与しないが影響を受ける仮想的なテスト粒子を考える。KV分布の場合には、ビームコアの内側ではテスト粒子の受ける空間電荷力は振幅に比例し、従ってチューンシフトは一定である。ビームコアよりも外側にテスト粒子を置いてみると、そこではもはや空間電荷力の源となる粒子は存在しないので、力は $1/r$ に従って減少し、インコヒーレントチューンは、振幅が大きくなるに従いゼロカレントの値に近づく。一方、ビームコアは全体としてコヒーレント振動を起こし周辺の電場を揺さぶっている。図

8に示すようにビームコアの領域では、インコヒーレント振動の振動数の二倍はコヒーレント振動数よりも低く、振幅の大きな遠方では逆転するので、どこかの振幅で二倍のインコヒーレント振動数がコヒーレント振動数と一致する。この振幅の大きさが2:1のパラメトリック共鳴を起こす安定な不動点に対応し、テスト粒子はこの不動点の回りを振動する。

一度、ビームコアから離れた粒子が大振幅を持つハロー粒子となり得ることは、このように説明が付く。大振幅粒子の最大振幅は、ビームコアのrmsサイズの四倍程度になることも計算機シミュレーションの結果等からわかっている。また、こうした結果は、円形加速器のように空間電荷力によるチューンシフトが、ゼロカレントチューンの数%の場合でも、直線型加速器のように50%以上の場合でも同じであることは興味深い。ただし、そもそもハローとなりうる粒子がビームコアからどのようなメカニズムで出てくるか、またその生成量や時間スケールなど、明らかでない点も多い。

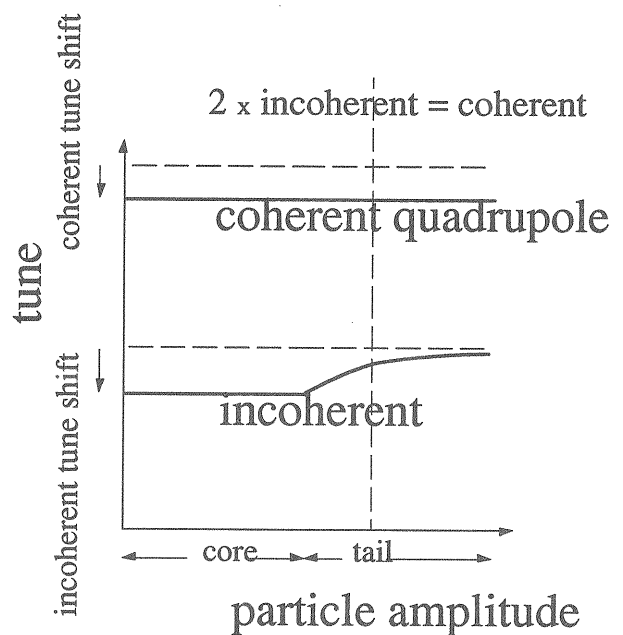


図8：ビーム電流を固定した際に、粒子の振幅の関数としてインコヒーレントチューンとコヒーレントチューン（ここでは四極）の関係。

4. シミュレーションの方法[12,13,14]

空間電荷効果のシミュレーションを行う際には、いかに正確に、いかに高速に空間電荷力を計算するかがカギとなる。ここでは、通常行われている電場の計算法を取り上げる。

4.1 粒子-粒子法

すぐに思いつくシミュレーションの方法の一つは、一つの粒子に対して、そのほかすべての粒子とのクーロン力を計算し足し合わせるという、いわゆる粒子-粒子法である。

$$F_i = \frac{q_i}{2\pi\epsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2}$$

ここでは、例として実空間で二次元の場合を考える。もちろん、現実の加速器が持つ 10^{12-14} といった粒子数について計算を行うのは現実的ではない。シミュレーションでは、ある一つの粒子に対してそのほかの粒子の影響を考える場合に、そのほかの粒子一つ一つは、現実の粒子が持つよりもずっと大きな電荷（（現実の粒子数）/（シミュレーションで使う粒子数）の割合）を持つとし、その代わりに軌道を追う粒子の数を減らす。こうしたシミュレーション上の粒子をマクロ粒子と呼ぶ。マクロ粒子は、現実にはその近傍にある多数の粒子を一つの粒子で代表させたと考えられる。ちなみに、周りの影響を受ける側の粒子の電荷は、現実と一致させる。あくまでも周りの粒子が作る電場ポテンシャルの中で、1つの現実の電荷を持つ粒子がどのように運動するかを知りたいわけである。具体的なシミュレーションの過程では、1からnまで番号を付けたn個（ 10^3 ）のマクロ粒子を用意し、番号1の粒子に対するそのほかの粒子の影響、番号2の粒子に対するそのほかの粒子の影響、・・・として計算を行うわけであるが、影響を受ける側と与える側では、このような役割の違い（電荷の違い）を仮定している。

粒子-粒子法は、現実には起きている粒子間のクーロン相互作用をそのままシミュレートしている点でもっとも理解しやすいシミュレーションといえるが、問題点もある。その最も大きな一つは、計算量および計算時間がマクロ粒子の数nの二乗に比例するという点があ

られる。そもそも現実の加速器が持つ粒子数をそのままシミュレーションに取り入れることは不可能であるとしても、粒子数を一桁あげると計算時間が二桁多くなるかかるとなると、粒子数に対する制限が大きく、以下の述べるほかの方法に比べ粒子数を減らさざるを得ない。これは粒子-粒子法の最大の問題点である。

もう一つの問題点は、二つの粒子が接近した場合に現実以上に大きなクーロン力を受ける可能性である。前に述べたように、マクロ粒子は現実にはその近傍にある多数の粒子を、一つの粒子で代表させている。本来、現実の一つ一つの粒子が接近することはあっても、多くの粒子が一つの点にまとまりしかもそのように大きくゆがんだクーロン場の影響を、ソースに近い位置で直接受けることは考えられない。別の言葉で言えば、マクロ粒子を用いた粒子-粒子法は、クーロン力のソースの微細分布が無視でき、一つの点（マクロ粒子）で置き換えることができるほど距離が離れた場所でのみ有効である。そうであれば、マクロ粒子にある分布を持たせ、一つの点で電荷を表す代わりに空間的に広がった電荷分布をクーロン力のソースとすることである程度の解決は可能になる。これを有限サイズ粒子と呼ぶ。有限サイズを表す関数として、よくガウス分布が用いられる。

$$S(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta_r} \exp\left(-\frac{(r-r_0)^2}{2\Delta_r^2}\right)$$

有限なサイズをどの程度に取るか、また、サイズを表す分布としてほかにどんな関数型が適当であるかなど、経験的に決める。

4.2 粒子-メッシュ法

空間電荷効果は、荷電分布が作る平均場による影響を表すのであれば、粒子-粒子間の相互作用を直接計算する代わりに、マクロ粒子が作るポテンシャルまたは力を、空間を均等に区切ったメッシュの交点であるグリッド上で計算し、各粒子が受ける力はグリッド上の値を内挿することで求めることができる。これを、粒子-メッシュ法と呼ぶ。この方法では、グリッド上の値を計算する過程は一度だけであり、しかもメッシュの数はマクロ粒子の数に比べて小さい数を取るため、粒子-粒子法に比べ計算時間は短縮される。

粒子-メッシュ法は、以下の三つの過程に分けることができる。まず、マクロ粒子をグリッド上の点に割り付ける。次に、グリッド上の電荷をソースとしてポア

ソルブ方程式を解きグリッド上のポテンシャルおよびその微係数として電場を求める。最後に、グリッド上の電場を元に、マクロ粒子の位置での電場を求める。第一過程でマクロ粒子をグリッド上の点に割り付ける方法と、第三過程でグリッド上の電場を元にマクロ粒子の位置での電場を求める方法は、通常同じで次のような方法がある。最も簡単には、マクロ粒子の位置に最も近いグリッドにマクロ粒子の電荷すべてを割り付け、電場もマクロ粒子に最も近いグリッドでの値をそのまま使う。ただし、これではマクロ粒子の位置に関する情報がメッシュサイズ以下にならないので、それを改善する方法としてよく行われるのが次に述べる Area Weighting 法である。例として二次元の直交座標系にメッシュを作成した場合を考える。この方法では図9に示すようにマクロ粒子の座標を交点とする二つの直線を引き四つのグリッドで囲まれた平面を四つに分割する。

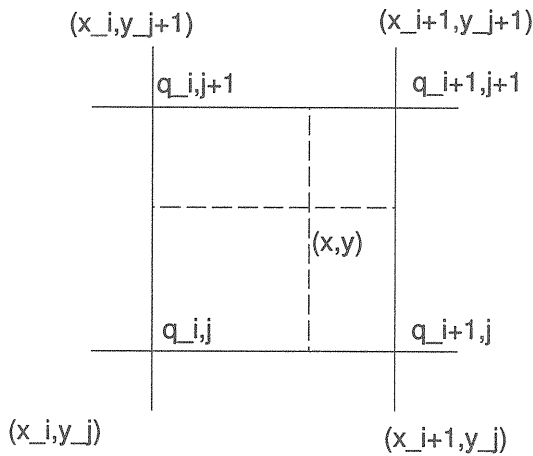


図9：Area Weighting 法。近接する四カ所のグリッドに四分割された面積の比で電荷を割り当てる。また、四カ所のグリッド上で計算された電場は、同じ面積比の割合でマクロ粒子の場所に移される。

マクロ粒子の電荷を近くの四つのグリッドに割り当てる際に、グリッドの反対に位置する面積がメッシュ全体に占める割合を用いる。

$$q_{i,j} = \frac{(x_{i+1} - x)(y_{j+1} - y)}{(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)}$$

$$q_{i+1,j} = \frac{(x - x_i)(y_{j+1} - y)}{(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)}$$

$$q_{i,j+1} = \frac{(x_{i+1} - x)(y - y_j)}{(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)}$$

$$q_{i+1,j+1} = \frac{(x - x_i)(y - y_j)}{(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)}$$

マクロ粒子に最も近いグリッドには、当然ながら最も多くの電荷が配分される。

四つのグリッドでの電場が計算された際に、マクロ粒子の位置での電場を求める際には、同じく4つの面積に比例した割合でおのおのの電場を足しあわせる。Area-Weighting法は、二次元メッシュに適応する場合には文字通り分割されたメッシュの面積に比例配分される方法であるが、一次元メッシュの場合には面積の代わりにグリッドとマクロ粒子の座標との距離に、また三次元メッシュの場合にはマクロ粒子近傍の8つのグリッドが作る立方体が分割された体積に比例配分させる。

直交座標系ではArea-Weighting法による配分の計算は明らかであるが、ほかの座標系、たとえば2次元の極座標、または3次元の円筒座標系では特に原点付近の面積を計算する際に注意が必要である[13]。

グリッド上に電荷が与えられた後に、ポアソン方程式を解く方法として、フーリエ変換を用い、k空間で解く方法は次のようになる。まず、グリッド上の電荷分布をハーモニック成分に変換し、同時にポテンシャルもハーモニック成分の和として表す。

$$\phi = \frac{L}{2\pi} \sum \phi_m \exp(ik_m x_g)$$

$$\rho = \frac{L}{2\pi} \sum \rho_m \exp(ik_m x_g)$$

ここで、 $k_m = 2\pi m / L$ 、 $m = 0, 1, \dots, L/2$ 。Lは今考えている領域の長さである。k空間で、ポアソン方程式は

次のようになる。

$$k_m^2 \phi_m = \rho_m$$

k空間でのポテンシャルが求まれば、グリッド上の電場はその微分として求められる。フーリエ変換を高速に行うために、通常グリッドの数を2nに取り高速フーリエ変換(FFT)のアルゴリズムを用いる。こうした方法により原理的には実空間で一次元から三次元までの電場分布が計算できるはずであるが、現在得られる計算機の能力をもってしても二次元までの計算が実用上の限度である。三次元のメッシュを、例えば128x128x128に区切れば、メッシュの情報だけで1M以上の点が必要になる。

ビームの形状と真空チャンバーの形状を考慮すれば、直交座標系の代わりに3次元の計算では円筒座標系、また2次元の計算では極座標系を取る方がより自然であるようにも思われる。この場合、周方向のハーモニック成分を低次の項だけに限りしかも境界条件としてビームを取り囲む真空チャンバーの形状が円であるとすれば、各ハーモニック成分について電荷分布の積分としてポテンシャルを求めることが可能である。具体的には次のようになる[15]。

ローレンツゲージのもとで、スカラーポテンシャルは次の式を満たす。

$$\Delta\phi - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

ハドロンビームの場合には、縦方向のビーム長は横方向のビームサイズに比べ何桁も大きいことを考慮して次の条件を使う。

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi \sim \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \ll \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \phi \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \phi$$

その結果ポアソン方程式は、

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \phi \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

極座標で表された方程式を解くために、電荷およびポテンシャルを周方向でフーリエ展開する。

$$\phi = \sum_m \phi_m \exp(im\varphi)$$

$$\frac{\rho}{\epsilon_0} (\equiv n) = \sum_m n_m \exp(im\varphi)$$

逆変換は、

$$\phi_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(r, z, \varphi) \exp(-im\varphi) d\varphi$$

$$n_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} n(r, z, \varphi) \exp(-im\varphi) d\varphi$$

ここで、座標zはビーム中で、縦方向のある位置でのスライスを取っていることを明示している。各モードごとに次の式が成り立つ。

$$n_m(r, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \phi_m(r, z) \right) - \frac{m^2}{r^2} \phi_m(r, z)$$

ここで、 $n_{-m} = n_m^*$ の関係を使う。

さて、mがゼロまたは正值の時に上式の一般解は、

$$\phi_m = \alpha \left(\frac{r}{b} \right)^m + W(r) - \left(\frac{r}{b} \right)^m W(b)$$

真空チャンバー(半径bの円)のところでポテンシャルがゼロになるという境界条件から、

$$\phi_m = W(r) - \left(\frac{r}{b} \right)^m W(b)$$

ここで、 $m=0$ の時、

$$W(r, z) = \int_0^r \ln \frac{r}{r'} n_m(r', z) r' dr'$$

$m=0$ 以外の時、

$$W(r, z) = \frac{r^m}{2m} \int_0^r r'^{(1-m)} n_m(r', z) dr'$$

$$- \frac{r^{-m}}{2m} \int_0^r r'^{(1+m)} n_m(r', z) dr'$$

ただし、mが負値の場合を計算するために、 $\phi_{-m} = \phi_m^*$ なる関係を用いた。以上から、グリッド上での電場は、

$$E_r = \sum_m \frac{\partial}{\partial r} \phi_m \exp(im\varphi)$$

$$E_\varphi = \sum_m \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \phi_m \exp(im\varphi)$$

$$E_z = \sum_m \frac{\partial}{\partial z} \phi_m \exp(im\varphi)$$

として求められる。さきに述べたように、ビームの断

面積はほぼ楕円で、高いモード m は空間電荷力の成分として微小量と見なせるので、 m は高々4程度まで取れば十分である。

5. 対処法

以上、空間電荷効果をもたらす現象について述べてきた。それでは大強度シンクロトロンを設計し運転する際に、少しでも効果を下げるにはどんなことができるか、を次に見てみる。大きく分けて、共鳴条件を弱くする方法と、スペースチャージ力を弱くする二つの方法に分けることができる。

5.1 共鳴を弱くする方法

5.1.1 補正磁石

ビームロスやエミッタンス増加が、ラティス自身が持つ共鳴条件によって起こるとすれば、共鳴の強さを何らかの方法で弱めればよい。ビームロス等が起きる原因となっている共鳴の次数とハーモニクスがあらかじめ知られている場合には、その共鳴の次数と同じ極を持つ補正磁石を励磁する事により、共鳴を打ち消すことができる。

原理的には、ラティスの磁場の非線形性を共鳴の中として定義した際に出てきた、位相と振幅を持つベクトル量を、補正磁石がつくる反対向きのベクトル量によってゼロにする。実際には、複数の補正磁石を置く位置（位相）関係、励磁の大きさなどを調整する。

図10に、ブルックヘブン研究所にあるAGSで、共鳴補正を施した前と後で、蓄積されるビーム強度が改善された様子を示す。

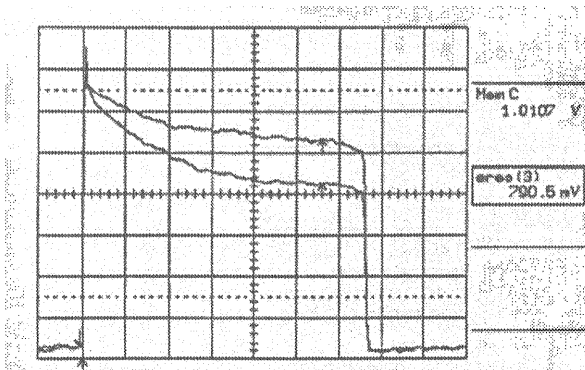


図10：ブルックヘブンのAGSでの共鳴補正。時間（10ms/div.）に対するビーム強度の変化を表す。共鳴補正を行うと、下のグラフが上のよう生き残り率が上がる。

5.1.2 ビームエンベロープの補正

空間電荷力自身が共鳴の源となる場合を説明した際に、ベーター関数やビームエンベロープに変調があると、ラティスの持つ周期性以外のハーモニクスが生まれることを述べた。これはどんな次数の共鳴にも当てはまるが、八極成分が通常、支配的である。もし、これがビームロス等の原因になっている場合には、1つの方法としては、ラティスによりつくられた共鳴を補正するように八極補正磁石を励磁する事も考えられるが、もう一つの方法として、ベーター関数やビームエンベロープ自身からの変調分をなくすことが考えられる。非線形成分のハーモニクスを消すために線形磁石で補正するこうした試みが高エネルギー研究所で行われている[16]。

5.2 空間電荷力を弱くする方法

5.2.1 入射エネルギー

空間電荷力を抑えるには、原理的に上で定義されたチューンシフトまたはチューンスプレッドを小さくするように加速器のパラメーターを決めればよい。まずはじめに気づくのは、粒子のエネルギーであり、これはローレンツファクターで表されているように、 β の三乗、 γ の二乗と、大きくエネルギーに依存する。具体的には、シンクロトロンの入射器の取り出しエネルギーをなるべく上げたいわけであるが、以下の様な問題点が生ずる。

まず、入射器として、通常使われる陽子リニアックのシステムは、エネルギーを上げるにつれ複雑になるし、コストは当然高くなる。もう少し、システムを具体的に考えてみる。例えば取り出しエネルギーが200MeVあたりまでならば、ドリフトチューブリニアックで実現可能であるが、それ以上のエネルギーを狙う場合には、高エネルギー側で別の加速空洞のタイプを取らない限り、加速の効率、すなわちシャントインピーダンスが落ちる。サイドカップルドリニアックやアンニュラーカップルドリニアック等が使われて、また設計されている。高エネルギー側では、加速空洞の周波

数も変わり、複数の高周波源が必要になる。

今一つの問題点は、シンクロトロンの入射付近でのロスによる残留放射線である。速い繰り返しのシンクロトロンでよく行われているような、アディアバティックキャプチャーでは、入射付近での粒子の捕獲効率、高々90%程度である。一方、シンクロトロンに入射するタイミングで、すでに十分な大きさのrfバケツを作り、入射器のどこかの段階でチョップしたビームを、バケツの中心付近に入れるようにした場合でも、数パーセントのビームロスは避けられない。さらにいずれの場合にも、H⁻イオンの電子をストリッピングホイールではぎ取る際に、H⁰として残る割合は1%に達することもありこれらの中性粒子はビームロスとなる。

問題は、そうした入射エネルギーでのビームロスは、入射エネルギーを高くするほど残留放射線を発生する割合を多くすることである。大強度陽子シンクロトロンでは残留放射線をなるべく下げるような運転をするのが第一条件であり、この点のみからいえば低いエネルギーでの入射が望ましい。

5.2.2 アパーチャー

入射エネルギーと並んでもう一つあきらかにチューンシフトを抑える要因は、アパーチャーを広げビームのエミッタンスをアパーチャーいっぱい大きくすることである。チューンシフトはエミッタンスに逆比例し、またビームサイズはエミッタンスの平方根で大きくなるので、例えば、真空チャンバーのサイズを二倍大きくすれば、チューンシフトは四分の一になる。

無論、それだけアパーチャーを大きくするには、電磁石のサイズも大きくせざるを得ないわけで、製作のコストと運転のための電気代など考慮すべき点は数多くある。

しかしながら、繰り返し述べているように、大強度加速器ではパーセント以下のビームロスがすでに大きな問題となるわけであり、そもそも真空チャンバーの大きさとエミッタンスの比をどの程度見込むべきであるかの考え方が、今までと大きく違う可能性がある。つまり、空間電荷力によるチューンシフトを押さえる目的とは別に、真空チャンバーに余裕を持つ必要がある。

5.2.3 横方向のペインティング

空間電荷力を計算した際に、一様分布に比べ、ガウ

ス分布やパラボラ分布の場合には、ビーム軸の中心付近での粒子密度が大きく、空間電荷力の線形成分が大きくなることが示された。これは、すなわち、たとえ粒子数が同じでもチューンシフトは粒子分布の関数であることを示している。では、粒子分布をコントロールする手段を考える。

ブースターシンクロトロンから、さらに次のシンクロトロンへビームを受け渡す際には、通常いわゆるバンチバケツ受け渡し[bunch to bucket transfer]が行われるため、コントロールのしようがない。これに対して、リニアックなどの入射器から初段のシンクロトロンに入射する際には、H⁻からH⁺への荷電交換を行いつつ、数10から数1000ターンにわたってビームを蓄積した後、または蓄積しながら同時に加速を開始する。H⁻の荷電交換入射方式は、位相空間上で同じ場所に、後から来た粒子が、すでに存在する粒子の存在に左右されないで入射されることにある。

しかし、だからといって位相空間上の一点に集中して入射すれば、その粒子密度が他に比べて極端に高くなり、空間電荷効果の点から考えれば、不利である。もちろん、衝突型加速器のように、最終的にビームサイズが小さくルミノシティを上げなければならない加速器ではそうしたビームが必要であるが、大強度を目指すような加速器では、むしろ、位相空間上にまんべんなく粒子を入射する。いかにも、使える位相空間を塗りつぶす様に粒子を入れるという意味で、こうしたコントロールをペインティング[painting]と称する。

具体的には、例えば、位相空間上でわざと入射点を中心からずらしておく。ひとたび加速器内を回り始めた粒子は、チューンの小数部に対応して位相空間内を回転し始める。このままでは、ベータートロン振動の振幅が等しいので、入射のタイミングによって回転角度の違う粒子がホロー状の[hollow]分布をつくる。入射の時間と共に、中心から入射点までの振幅を変えると、今度は、次々に入射される粒子はスパイラルを描く。十分に時間をかけて入射すれば、位相空間内が一様に粒子で満たされる。時間と共に変える入射点の振幅として、いろいろな関数を仮定することにより原理的にはいかような粒子分布もつくりことができる。ただし、ここでは、入射器から入射されるビーム自身のエミッタンスはシンクロトロンのアクセプタンスに比べ十分に小さいと仮定した。

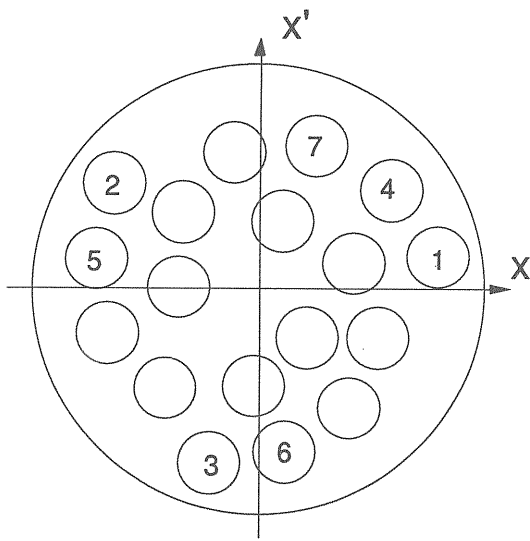


図 1 1 : 水平方向のペインティングの例。
 例えばチューンの端数部が 1/3 に近いとき、位相空間の中心からわざとずらした入射ビームは、位相空間上にとびとびに入る。同時に、中心から入射点までの距離を変えると、位相空間上を埋め尽くす。

細かくいえば、ここでは次のようなことに気をつけなければいけない。空間電荷力は実空間の粒子分布の関数であり、ペインティングをする際に、水平方向と垂直方向の位相分布のカップリングを考慮する必要がある。具体的には、水平方向の位相空間で、ベータートロン振動の振幅の小さい場所に入射する時には、垂直方向の位相空間で、振幅の大きな場所に入るようにする。こうすることによりどちらの方向でも振幅の大きな粒子、または、どちらの方向でも振幅の小さな粒子というように、分布に偏りができるのを避ける。

5.2.4 ピーク電流を下げる方法

縦方向についても、横方向と同様に位相空間内で粒子がまんべんなく分布するような入射を行うことができる。ここで、縦方向の位相空間内で入射点を変えるには、バケツに対して、入射のタイミングを変える、または、エネルギーを若干ずらせばよい。なお、入射ビ-

ームは入射器のどこかの段階でチョップされているものと仮定し、また、シンクロトロンバケツはすでに必要な大きさに形成されているとした。

縦方向でのペインティングの効用は、バンチングファクターを大きくすることといえる。通常よく見られるようなバンチの波形は、中心付近で局所的にビーム電流が大きく、端にいくに従って次第に局所的な電流が下がっていく。ペインティングをすることにより、バケツの中心付近の粒子密度を下げ、ピーク電流を下げる。

横方向の時と異なり、縦方向ではバケツの形自身を変形することによりバンチングファクターを下げる操作も行われる。以下に、そうした試みのいくつかを試してみる。

2倍 (3倍) 高調波を加えたバケツ

通常、バケツは一つの rf 成分によって形作られるので位相空間では、図 1 2(a) のようになる。このようなバケツに粒子が一様に分布していたとすると、実空間への射影を取ればわかるように、そもそも中心付近でピーク電流が高くなる。

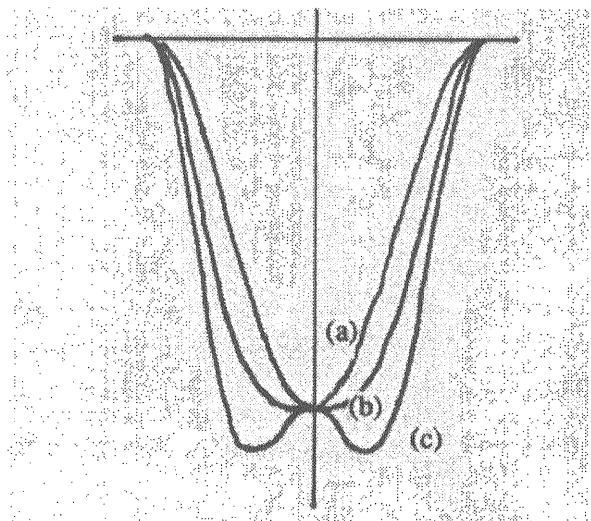


図 1 2 : 縦方向のバケツに 2 倍の高調波を混ぜるとポテンシャルの形がゆがみ、中心付近で平坦な部分ができる。(a) 2 倍の高調波がゼロの場合。(b) 2 倍の高調波を、基本周波数の大きさの半分入れた場合。この

ときバケツに平坦な部分ができる。(c)2倍の高調波を、基本周波数と同じ大きさだけ入れた場合。

ここに、2倍または3倍の高調波を混ぜると、加速電圧の形は図12(b)のようになり、中心付近に平坦な部分ができる。バケツを見てもわかるように、井戸型ポテンシャルに近づき、中心付近で粒子は自由に振る舞い、端に行くとたんに急激な収束力を受けるようになる。こうした分布を実空間に射影してみると、ピーク電流は下がり、バンチの長さが長いビームとなる。このようなバケツによる運転は例えばブルックヘブン研究所のAGS Boosterですで行われている[17]。

バリアーバケツ(barrier bucket)

極端な話、コースティングビームでは、ピーク電流と平均電流の比は1、つまりバンチングファクターが最も大きくなる。もちろん加速するためにはrfバケツが必要で、その中に粒子がバンチされている必要があるが、エネルギーが一定のもとで粒子をリングにためるには原理的にビームがバンチしている必要はない。

しかし、ブースターから主リングへの入射のように、下のリングの幾パルスをとめるにはバケツでバンチを保ち、入射のエネルギーで1秒近くの間、ビームを蓄積しておく必要がある。荷電交換入射ではなく、しかもブースターからはある間隔を置いていくつかのパルスが入射されるので、後から入射されるパルスのために位相空間に隙間が必要であるからである。

さてそれでは、バンチングファクターがほぼ1であるという、コースティングビームの利点と、後からくるビームのために隙間を残しておくというバンチビームの両方の利点を実現するにはどうすればよいか。バリアーバケツとはまさにこれに対する答えであり、すでにフェルミ研究所[18]やブルックヘブン研究所[19]で実験が行われ、実際に使われている。

バリアーバケツの原理を以下に見てみる。ビーム1週の周期ごとにrfを1波長分だけ励起する様な空洞がシンクロトロンのある1カ所にあるとする。これは、図13に示されるように、シンクロトロンの縦方向の位相空間にバリアーをつくる。ここでブースターからビームを入射すると、通常のrfバケツがないコースティングビームとほとんど同様の状況で粒子は全周にわたって広がる。ただし、バリアーがあるので、バリアーの近くまでドリフトしてきた粒子は反対方向に戻される。このままでは、次にブースターから来るビームが入る隙間がない。

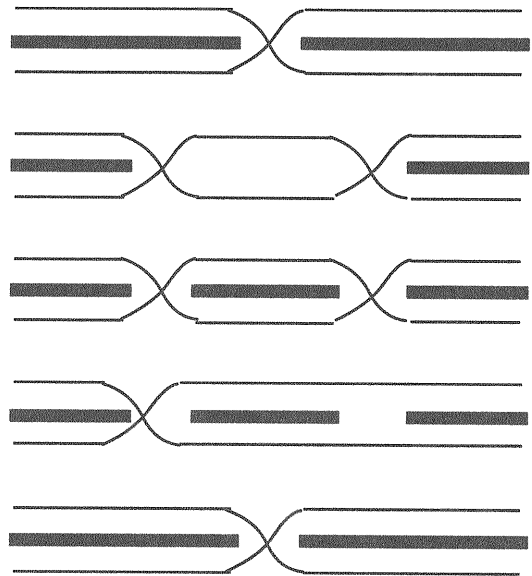


図13： 縦方向の位相空間でのバリアーバケツの原理図。バケツの中のビームを太線で表す。

次のブースタービームが来るまでに、一波長分だけ隙間をあけるために、二つの空洞を使って、始めには同じタイミングで立てていたバリアーの間隔を徐々に広げる。左にあるバリアーの左から右に粒子が流れ込むことはなく、また右にあるバリアーの右から左に粒子が流れ込むことはないので、2つのバリアーの間には隙間ができ、ここにブースターから来る新しいビームを入射する。

ひとたび入射されたビームは、コースティングビームの様に全周にわたってなるべく一様に分布させたいので、片方のバリアーの高さを徐々に下げていく。はじめから回っていた粒子と後から入射された粒子は、片側のバリアーが消滅した時点で混ざりあう。ただし、もう一方のバリアーは一カ所に存在する。

さらに次のブースターからのビームが来るときには、同じ手順を繰り返す。つまり、二つのバリアーを使って隙間をあけ、新しいビームを入射した後に1つのバリアーを消滅して全体を一様に分布させる。これらの過程では、原理的にバンチングファクターはほぼ1であ

り、しかも入射を何回でも繰り返すことができる。バリアーバケツを使わない入射に比べバンチングファクターの分だけ空間電荷力によるチューンシフトが小さくできるか、または同じ空間電荷力によるチューンシフトでビーム強度を増やせる。

ビームを蓄積した後はアディアバティックキャプチャー[adiabatic capture]を行う。ここでの、rfの周波数は、前段のシンクロトロンとは全く別々に決めることができるのも大きな利点である。AGSで行われた広帯域高周波空洞を使ったバリアーバケツの実験については、文献[20]に詳しい。

帯域を制限した白色雑音による縦方向分布の平坦化

本来高周波バケツの持つ非線形性により、シンクロトロン振動数は大きな振幅依存性を持つ。中心付近ではほぼ一定の周波数がセパトリクスに近づくにつれ急激に振動数が低くなり、セパトリクス上では原理的にゼロになる。

こうした非線形性を積極的に利用して、バケツの中心付近の粒子のみ拡散が起きるように選択的に外部から白色雑音を加え、縦方向の分布を平坦化する試みがKEK-PSで行われ、ビーム強度の増強に役立っている[21]。

この方法では、拡散によって振幅が大きくなった粒子は、振動数が低くなるために自動的に拡散過程が止まる。つまり、フルのバンチ長をほとんど変えることなく、分布を平坦化できるという大きな利点を持っている。

6. 縦方向の空間電荷力

6.1 シンクロトロン振動数の変化

ここまでは、横方向の空間電荷効果を見てきたが、ここで縦方向の空間電荷効果を考える。ビームが縦方向に一樣分布の際には、空間電荷力は横方向にしか存在しなかったが、ひとたびビームがバンチし縦方向に粒子密度の濃淡ができると縦方向の電場が生じる。

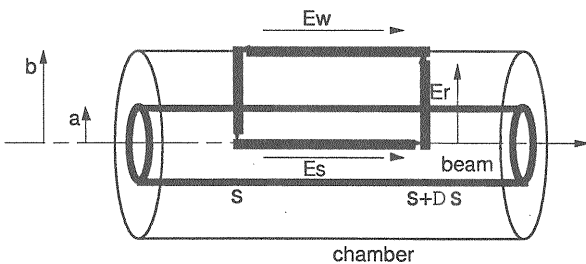


図14： 縦方向の空間電荷力を計算するために、上の様な積分路をとる。

図14の様な線路を考え、積分形のマックスウェル方程式を使って計算する。

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} d\sigma$$

ビームの横方向の粒子分布が一樣だとすると、径方向の電場は、

$$E_r = \frac{qn_e}{2\pi\epsilon_0} \frac{r}{a^2} \quad r \leq a$$

$$E_r = \frac{qn_e}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad r > a$$

従って、左辺の電場の積分は、

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = (E_s - E_w) \Delta s + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(1 + 2 \log \frac{b}{a}\right) \Delta s \frac{\partial n_e}{\partial s}$$

ここで、

$$n_e(s + \Delta s) - n_e(s) = \Delta s \frac{\partial n_e}{\partial s}$$

と置き換えた。

また、周方向の磁場は、

$$B_\theta = \frac{qn_e v \mu_0}{2\pi} \frac{r}{a^2} \quad r \leq a$$

$$B_\theta = \frac{qn_e v \mu_0}{2\pi} \frac{1}{r} \quad r > a$$

従って、右辺の磁場の積分の時間微分は、

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} d\sigma = \frac{\partial n_e}{\partial t} \Delta s \frac{qv\mu_0}{4\pi} \left(1 + 2 \log \frac{b}{a}\right)$$

ここで、

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = -\frac{ds}{dt} \frac{\partial n_e}{\partial s} = -v \frac{\partial n_e}{\partial s}$$

であるから、

$$E_s - E_w = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(1 + 2\log\frac{b}{a}\right) (1 - \beta^2) \frac{\partial n_e}{\partial s}$$

なお、

$$g_0 = 1 + 2\log\frac{b}{a}$$

と置き換えて、 g_0 ファクターと呼ぶ。最も簡単な例として、壁が完全導体の場合を考える。壁中の電位はゼロなので、縦方向の空間電荷力は、

$$F_s = -\frac{q^2 g_0}{4\pi\epsilon_0} (1 - \beta^2) \frac{\partial n_e}{\partial s} = -\frac{q^2 g_0}{4\pi\epsilon_0 \gamma^2} \frac{\partial n_e}{\partial s}$$

ビームの横方向の粒子分布がパラボラ分布の時には、 g_0 ファクターが、

$$g_0 = \frac{3}{2} + 2\log\frac{b}{a}$$

となる以外は上と同様である。

さて、空間電荷力がわかったので、横方向の場合と同様に、縦方向の運動方程式がどのように変わるかを見てみる。縦方向の分布関数として、パラボラ分布をとる。

$$n_e(s) = \frac{3n_l}{4l} \left[1 - \left(\frac{s}{l}\right)^2 \right]$$

ここで、 l はバンチの半幅である。このとき、力は線形となり、

$$F_s = \frac{q^2 g_0}{4\pi\epsilon_0} (1 - \beta^2) \frac{3n_l}{2l^3} s$$

if 位相の相対的な関数 $\varphi = \phi - \phi_s$ として書き換える。

$$\varphi = -\frac{h}{R} s$$

を用いて、

$$F_s = -\frac{q^2 g_0}{4\pi\epsilon_0} (1 - \beta^2) \frac{3n_l R}{2l^3 h} \varphi$$

つまり、空間電荷力による、1周あたりのエネルギー増加は、

$$\delta U = \int_0^{2\pi R} F_s ds = -\frac{3q^2 g_0 n_l R^2}{4\epsilon_0 \gamma^2 l^3 h} \varphi$$

これにより、シンクロトロン振動の方程式は、

$$\frac{dW}{dt} = \frac{qV}{2\pi h} (\sin\phi_s - \sin\phi) + \frac{3q^2 g_0 n_l R^2}{8\pi\epsilon_0 \gamma^2 l^3 h^2} \varphi$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\omega_s^2 h^2 \eta}{\beta^2 \gamma m_0 c^2} W$$

の二式を組み合わせることで、

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{\Omega_s^2}{\cos\phi_s} (\sin\phi - \sin\phi_s) - \kappa\varphi = 0$$

ただし、

$$\Omega_s = \omega_s \sqrt{\frac{h\eta \cos\phi_s qV}{2\pi\beta^2 \gamma m_0 c^2}}$$

$$\kappa = \frac{3g_0 n_l r_0 \eta c^2}{2l^3 \gamma^3}$$

振動の振幅が小さい部分では、

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + (\Omega_s^2 - \kappa)\varphi = 0$$

となり、空間電荷力によるシンクロトロン振動のチューンの変化が求められる。

6.2 縦方向空間電荷効果の補正

縦方向の空間電荷力は、バンチ長を伸ばす向きに働く。ある種のアプリケーションでは、非常に短いバンチ、例えば1nsといったバンチ長が要求される場合があり空間電荷力が大きな障害となる。

これを克服するために、真空チャンバーのある部分にインダクタンスの大きな物質を巻き付け、このインダクタンスがもたらす逆向きの力によって空間電荷力をキャンセルしようというアイデアがかなり古くから出されていた。

つい最近になって、KEKPS[22]およびロスアラモス研究所のPSR[23]でこれを確かめる実験的研究が行われた。何れの実験も、空間電荷力を完全にキャンセルできたわけではないが、外部に取り付けたインダクタ

ンスが働いている実験的な検証がなされている。

付録

$$\overline{xE_x} = \frac{qn_e ab}{2\epsilon_0} \int_0^\infty dt \int_{-\infty}^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dy$$

$$\times \frac{x^2 n\left(\frac{x^2}{a^2+t} + \frac{y^2}{b^2+t}, s\right)}{(a^2+t)^{3/2} (b^2+t)^{1/2}} n\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, s\right)$$

の積分を実行するために、次のような変数変換を行う。

$$u = \frac{x}{\sqrt{a^2+t}}$$

$$v = \frac{y}{\sqrt{b^2+t}}$$

$$p^2 = t$$

$$dxdydt = \frac{\partial(x,y,t)}{\partial(u,v,p)} du dv dp$$

このとき、

$$\overline{xE_x} = \frac{qn_e ab}{2\epsilon_0} \int_{-\infty}^\infty du \int_{-\infty}^\infty dv u^2 (u^2 + v^2)$$

$$\times \int_0^\infty dp 2pn \left[u^2 + v^2 + \left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \right) p^2 \right]$$

さらに、変数を変換する。

$$\rho^2 = u^2 + v^2 + \left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \right) p^2$$

最後の積分は、

$$\int_0^\infty dp 2pn \left[u^2 + v^2 + \left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \right) p^2 \right]$$

$$= \frac{1}{\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}} \int_{u^2+v^2}^\infty d\rho 2\rho n(\rho^2)$$

従って、

$$\overline{xE_x} = \frac{qn_e a^3 b}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^\infty du$$

$$\times \int_{-\infty}^\infty dv \frac{\frac{u^2}{a^2}}{\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}} n(u^2 + v^2) \int_{u^2+v^2}^\infty d\rho 2\rho n(\rho^2)$$

さらに変数を変換する。

$$u = r \cos \theta$$

$$v = r \sin \theta$$

積分は、

$$\overline{xE_x} = \frac{qn_e a^3 b}{2\pi\epsilon_0} \int_0^\infty r dr$$

$$\times \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\frac{\cos^2 \theta}{a^2}}{\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2}} n(r^2) \int_r^\infty 2\rho d\rho n(\rho^2)$$

$$= \frac{qn_e a^3 b^2}{2\pi\epsilon_0 a + b} \int_0^\infty 2\pi r dr n(r^2)$$

$$\times \left[\int_0^\infty 2\pi \rho d\rho n(\rho^2) - \int_0^r 2\pi \rho d\rho n(\rho^2) \right]$$

ここでは、次の積分を行った。

$$\int_0^{2\pi} d\theta \frac{\frac{\cos^2 \theta}{a^2}}{\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2}} = \frac{2\pi b}{a + b}$$

ここで、半径の中に含まれる粒子を次の様に定義し直す。

$$q(r) = ab \int_0^r 2\pi \rho d\rho n(\rho^2)$$

定義から、 $q(\infty) = 1$ 。これを使うと、

$$\overline{x E_x} = \frac{q n_e}{2\pi \epsilon_0} \frac{a}{a+b} \int_0^\infty \frac{dq(r)}{dr} dr [1 - q(r)]$$

積分は簡単に実行できて、

$$\int_0^\infty \frac{dq(r)}{dr} dr [1 - q(r)] = \frac{1}{2}$$

従って、

$$\overline{x E_x} = \frac{q n_e}{2\pi \epsilon_0} \frac{a}{a+b} = \frac{q n_e}{2\pi \epsilon_0} \frac{\tilde{x}}{\tilde{x} + \tilde{y}}$$

以上から、rms のエンベロープ方程式は、

$$\frac{d^2 \tilde{x}}{ds^2} + k_x(s) \tilde{x} - \frac{\epsilon_{x,rms}^2}{\tilde{x}^3} - \frac{r_p n_e}{\beta^2 \gamma^3} \frac{1}{\tilde{x} + \tilde{y}} = 0$$

$$\frac{d^2 \tilde{y}}{ds^2} + k_y(s) \tilde{y} - \frac{\epsilon_{y,rms}^2}{\tilde{y}^3} - \frac{r_p n_e}{\beta^2 \gamma^3} \frac{1}{\tilde{y} + \tilde{x}} = 0$$

参考文献

- [1] L. J. Laslett, "On Intensity Limitations Imposed by Transverse Space-charge Effects in Circular Particle Accelerators", Proceedings of 1963 Summer Study on Storage Rings, BNL-7534, pp.324-367, 1963.
- [2] I. M. Kapchinskij and V. V. Vladimirkij, "Limitations of Proton Beam Current in a Strong Focusing Linear Accelerator Associated with the Beam Space Charge", Proceedings of the Second International Conference on High Energy Accelerators, pp. 274-288, 1959.
- [3] B. Zotter, "Betatron Frequency Shifts due to Image and Self Fields", CAS, CERN 85-19, pp. 253-266, 1985.
- [4] R. Baartman, "Betatron Resonances with Space Charge", AIP Conference Proceedings 448, pp.56-72, 1998.
- [5] F. J. Sacherer, "RMS Envelope Equations with Space Charge", IEEE Transactions on Nuclear Science, Vol. NS-18, No. 3, pp.1105-1107, 1971.
- [6] F. J. Sacherer, "Transverse Space-Charge Effects in Circular Accelerators", Ph. D. Thesis, UCRL-18454, 1968.
- [7] S. Machida, "Simulation of Space Charge Effects in a Synchrotron", AIP Conference Proceedings 448, pp.73-84, 1998.
- [8] T. Uesugi, et. al., to be published in Proceedings of EPAC2000.
- [9] S. Machida, "Space-charge effects in low-energy proton synchrotrons", Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A309 (1991), pp.43-59.
- [10] S. Machida, "Space charge induced resonances in a synchrotron", Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A384 (1996), pp316-321.
- [11] T. P. Wangler, et. al, "Space Charge in Proton Linacs", AIP Conference Proceedings 448, pp.3-14, 1998.
- [12] R. W. Hockney and J. W. Eastwood, "Computer Simulation Using Particles", Adam Hilger, 1988.
- [13] C. K. Birdsall and A. B. Langdon, "Plasma Physics via Computer Simulation", MacGraw-Hill, 1985.
- [14] T. Tajima, "Computational Plasma Physics: With Applications to Fusion and Astrophysics", Addison-Wesley, 1989.
- [15] P. M. Morse and H. Fechback, "Methods of Theoretical Physics", MacGraw-Hill, 1953.
- [16] Y. Shoji, private communications.
- [17] M. Blaskiewicz, et. al., "High Intensity Proton Operation at Brookhaven", Proceedings of the 1995 Particle Accelerator Conference and International Conference on High-Energy Accelerators, pp. 383-385, 1995.
- [18] J. E. Griffin, "Isolated bucket RF systems in the FAF", IEEE NS-30, (1983), p. 3502.
- [19] M. Blaskiewicz and J. M. Brennan, "A Barrier Bucket Experiment for Accumulating De-bunched Beam in the AGS", to be published in the proceedings of EPAC 96, 1996.
- [20] M. Fujieda, et.al, "Barrier Bucket Experiment at the AGS", Phys. Rev. ST, Vol.2, 122001, 1999.
- [21] T. Toyama, "Uniform bunch formation by RF voltage modulation with a band limited white signals", Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A447 (2000), pp.317-327.
- [22] K. Koba, et. al., "Longitudinal impedance tuner using new material FINEMET", Review of Scientific Instruments, Vol.70, No.7, pp.2988-2992, 1999.
- [23] M. A. Plum, et. al., "Experimental study of passive compensation of space charge at the Los Alamos National Laboratory Proton Storage Ring", Phys. Rev. ST, Vol.2, 064201, 1999.