

## 1 はじめに

電子陽電子円形加速器内で、電子陽電子ビームのエミッタンスは円形加速器への入射時の値に関係なく、円形加速器自身で決定される値に落ち着く。電子陽電子ビームのエミッタンスが決まる過程の代表的なものとして、シンクロトロン放射によるもの、バンチ内電子陽電子散乱によるもの、そして、加速器内の残留ガスとの散乱によるものが挙げられる。本稿では、それらの3つの過程を通して、円形加速器内で電子陽電子ビームのエミッタンスが決定される過程を KEK-ATF ダンピングリングの例を交えて考えていく。KEK-ATF ダンピングリングは水平方向の設計エミッタンスが  $1 \times 10^{-9}$  m、垂直方向エミッタンスに関しても目標値が  $1 \times 10^{-11}$  m と非常に小さい電子円形加速器である。このような低エミッタンスリングにおいては、ビーム内電子陽電子散乱の影響が大きくなる。また、わずかな残留ガス散乱の影響がエミッタンス増大につながる。よって KEK-ATF ダンピングリングは本稿の内容を説明する上で恰好の例となる。

また、ここでの議論はやや一般性を損なうように感じられるかも知れないが、電子陽電子円形加速器に限った議論に終始する。つまり LHC のような超高エネルギーの陽子加速器の場合を除く大部分の陽子ビームや重イオンビーム加速器の場合、シンクロトロン放射による運動量損失が少ないため放射減衰機構を基にした本稿の議論が適応できない。本稿では、このような場合については取り扱わないことにする。また電子陽電子円形加速器の場合でもビーム不安定性現象等が起こる場合には、電子陽電子ビームのエミッタンスは他の要因により決定されることがある。しかし、この場合についても、ここでは触れないことも初めに断りおく。

## 2 電子陽電子の横方向運動の基礎

ここでは簡単に本稿の後述のエミッタンスに関する議論に必要な言葉や概念の説明のみをおこなう。詳しい議論は、本セミナーの大西幸喜氏の単粒子力学を参考にされたい [1]。

### 2.1 ベータトロン振動

電子陽電子のビームとしての集団的な振る舞いを考える前に、一粒子としての横方向の運動について考える。ビームライン上での電子陽電子の横方向の運動に関する

ハミルトニアンは、

$$H_s = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + \frac{1}{2} \left( k_1 + \frac{1}{\rho_0^2} \right) x^2 - \frac{1}{2} k_1 y^2 - \frac{\Delta p}{p} \left[ \frac{x}{\rho_0} + \frac{1}{2} \left( k_1 + \frac{1}{\rho_0^2} \right) x^2 - \frac{1}{2} k_1 y^2 \right] \quad (2.1)$$

と表せる。ここで、 $\Delta p/p$  は設計運動量からの運動量のずれ、 $\rho_0$  は偏向電磁石の曲率半径、および、 $k_1$  は四極電磁石のビーム集向強度で、

$$k_1 = \frac{1}{B\rho} \frac{\partial B_y}{\partial x}, \quad E [\text{GeV}] \approx 0.3 B [\text{T}] \rho [\text{m}] \quad (2.2)$$

と定義される。簡単のため、ここでは偏向電磁石は水平方向 ( $x$  方向) のみに存在しているとする。また、この式 (2.1) において、

- ドリフト空間に対しては、 $\rho_0 = \infty, k_1 = 0$
- 偏向電磁石に対しては、 $k_1 = 0, \rho_0$  を有限値
- 四極電磁石に対しては、 $\rho_0 = \infty, k_1$  を有限値

と置くことにより、それぞれの電磁石に対応するハミルトニアンを求めることができる。また、電子陽電子の横方向の運動方程式は、ハミルトニアン形式で以下のように表せる。

$$\frac{d}{ds} \vec{X} = S \frac{\partial}{\partial \vec{X}} H_s(\vec{X}) \quad (2.3)$$

$$\vec{X} \equiv \begin{pmatrix} x \\ p_x \\ y \\ p_y \end{pmatrix}, \quad S \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

まず理想的な運動量の電子陽電子の運動を考える。つまり、 $\Delta p/p = 0$  と置くと、電子陽電子の横方向の運動は、

$$\frac{d^2 z}{ds^2} + k_z z = 0, \quad (z = x, y) \quad (2.5)$$

$$k_x = k_1 + 1/\rho_0^2 \quad (2.6)$$

$$k_y = -k_1 \quad (2.7)$$

といった単純な運動方程式で表すことができる。よって、式 (2.5) の解は積分定数  $a, \psi_0$  を使って、

$$z(s) = a\omega(s) \cos(\psi(s) + \psi_0) \quad (2.8)$$

$$z'(s) = a[\omega'(s) \cos(\psi(s) + \psi_0) - \omega(s)\psi'(s) \sin(\psi(s) + \psi_0)] \quad (2.9)$$

と表せる。この時の  $\omega$  をベータトロン振動の振幅、 $\psi$  をベータトロン位相と呼ぶ。また、式 (2.8)、(2.9) から、

ビームライン上の位置  $s_1$  と  $s_2$  での電子陽電子の横方向位置の関係を以下のような行列表示で表すことができる。

$$\begin{pmatrix} z(s_2) \\ z'(s_2) \end{pmatrix} = M(s_2, s_1) \begin{pmatrix} z(s_1) \\ z'(s_1) \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

$$M_{11} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \Delta\psi - \frac{\omega_1' \omega_2}{\omega_1^2 \psi_1'} \sin \Delta\psi \quad (2.11)$$

$$M_{12} = \frac{\omega_2}{\omega_1 \psi_1'} \sin \Delta\psi \quad (2.12)$$

$$M_{21} = \left[ \frac{\omega_2'}{\omega_1} - \frac{\omega_1'}{\omega_2} \right] \cos \Delta\psi - \left[ \frac{\omega_2 \psi_2'}{\omega_1} + \frac{\omega_1' \omega_2'}{\omega_1^2 \psi_1'} \right] \sin \Delta\psi \quad (2.13)$$

$$M_{22} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cos \Delta\psi + \frac{\omega_2'}{\omega_1 \psi_1'} \sin \Delta\psi \quad (2.14)$$

ここで 接尾辞  $_{1,2}$  は、それぞれの値が  $s_1, s_2$  での関数値であることを示しており、 $\Delta\psi = \psi_2 - \psi_1$  である。また、ここで用いた  $M(s_2, s_1)$  は、Transfer Matrix と呼ばれている。

次に  $\omega$  および  $\psi$  の関係を考える。式 (2.8)、(2.9) を式 (2.5) に代入することによって、以下の関係式が導かれる。

$$\begin{aligned} & \left[ 2 \frac{d\omega}{ds} \frac{d\psi}{ds} + \omega \frac{d^2\psi}{ds^2} \right] \sin(\psi + \psi_0) \\ & + \left[ \frac{d^2\omega}{ds^2} - \omega \left( \frac{d\psi}{ds} \right)^2 + k_z \omega \right] \cos(\psi + \psi_0) = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

上記の恒等式が全ての初期条件  $\psi_0$  に対して成り立つためには、

$$2 \frac{d\omega}{ds} \frac{d\psi}{ds} + \omega \frac{d^2\psi}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left[ \omega^2 \frac{d\psi}{ds} \right] = 0 \quad (2.16)$$

$$\frac{d^2\omega}{ds^2} - \omega \left( \frac{d\psi}{ds} \right)^2 + k_z \omega = 0 \quad (2.17)$$

とならねばならない。ここで、式 (2.16) から  $\omega$  と  $\psi$  の関係式

$$\omega^2(s) \frac{d\psi(s)}{ds} = (\text{constant}) = 1 \quad (2.18)$$

が導かれる。ここで式 (2.18) の右辺は任意の定数をとることができるが、ここでは慣例的に 1 とした。この式 (2.18) を式 (2.17) に代入することにより  $\omega$  に関する微分方程式

$$\frac{d^2\omega(s)}{ds^2} - \frac{1}{\omega^3(s)} + k_z(s)\omega(s) = 0 \quad (2.19)$$

を導くことができる。この微分方程式は非線形微分方程式であるため、その一般解を解くことは難しい。また本稿の内容とも外れるため、ここでは式 (2.19) の一般解についての議論には触れずにおく [2]。

## 2.2 Twiss Parameter と Courant-Snyder Invariant

前節では、 $\omega$ 、 $\psi$  を用いて電子陽電子の横方向運動の議論を進めてきた。これらの変数を使った議論は、電子陽電子の振る舞いを写實的に捉える際に有用であった。しかし、位相空間内での電子陽電子の振る舞いを考えるときには、以下のように定義された変数を用いた方が便利な場合が多い。

$$\beta(s) \equiv \omega^2(s) \quad (2.20)$$

$$\alpha(s) \equiv -\omega(s) \frac{d\omega(s)}{ds} = -\frac{1}{2} \frac{d\beta(s)}{ds} \quad (2.21)$$

$$\gamma(s) \equiv \frac{1 + \alpha^2(s)}{\beta(s)} \quad (2.22)$$

このように表された  $\alpha, \beta, \gamma$  を Twiss parameter と呼ぶ。ここで、式 (2.20)-(2.22) を式 (2.8)、(2.9) に代入すると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \cos \psi \\ a \sin \psi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\beta_z} & 0 \\ -\alpha_z/\sqrt{\beta_z} & -\sqrt{\beta_z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix} \\ &\equiv T \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.23)$$

となり、電子陽電子の横方向の運動  $z, z'$  は、Twiss parameter を使った適当な一次変換を施すことにより、 $(u, v)$  という位相空間で運動を記述することができる。この  $(u, v)$  空間では半径  $a$  と位相  $\psi$  の 2 個の parameter のみで、その運動を記述することができる。また、振幅  $a$  は式 (2.23) から、

$$a^2 = \gamma_z z^2 + 2\alpha_z z z' + \beta_z z'^2 \equiv W_z \quad (2.24)$$

として表すことができる。ここで  $W_z$  を Courant-Snyder Invariant と呼び、一粒子の位相空間内での運動の振幅の大きさを表す指標として広く使われている。また、Twiss parameter を使って式 (2.11)-(2.14) の Transfer Matrix 要素を書き下すと、

$$M_{11} = \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} (\cos \Delta\psi + \alpha_1 \sin \Delta\psi) \quad (2.25)$$

$$M_{12} = \sqrt{\beta_1 \beta_2} \sin \Delta\psi \quad (2.26)$$

$$M_{21} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} \cos \Delta\psi - \frac{1 + \alpha_1 \alpha_2}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} \sin \Delta\psi \quad (2.27)$$

$$M_{22} = \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} (\cos \Delta\psi - \alpha_2 \sin \Delta\psi) \quad (2.28)$$

となる。これらの式 (2.25)-(2.28) から、 $(\beta_1, \alpha_1, \gamma_1)$  と  $(\beta_2, \alpha_2, \gamma_2)$  の関係を求めることができる。

$$\begin{pmatrix} \beta_2 \\ \alpha_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11}^2 & -2M_{11}M_{12} & M_{12}^2 \\ -M_{21}M_{11} & 1 + 2M_{12}M_{21} & -M_{12}M_{22} \\ M_{21}^2 & -2M_{22}M_{21} & M_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \alpha_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

また、式 (2.25)-(2.28) の Transfer Matrix を整理することにより、

$$M(s_2, s_1) = T^{-1}(s_2) \begin{pmatrix} \cos \Delta\psi & \sin \Delta\psi \\ -\sin \Delta\psi & \cos \Delta\psi \end{pmatrix} T(s_1) \quad (2.30)$$

と書き改めることができる。このことは、ビームライン上の2つの位置  $s_1, s_2$  での  $(u, v)$  の関係が、

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Delta\psi & \sin \Delta\psi \\ -\sin \Delta\psi & \cos \Delta\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

のように単なる回転角の違いにより表記できることを意味する。つまり、電子陽電子がビームライン上を進んでいるということを位相空間  $(u, v)$  で表現すると、原点からの距離  $\sqrt{W_z}$  を保ちながら、回転角が  $\Delta\psi$  だけ変化したということになる。ここで、 $\Delta\psi$  もまた式 (2.18) から Twiss parameter を使って、

$$\Delta\psi = \int_{s_1}^{s_2} ds \frac{1}{\beta(s)} \quad (2.32)$$

と表すことができる。

### 2.3 運動量分散関数

これまでの、電子陽電子の運動量が理想的な値として、即ち  $\Delta p/p = 0$  のときの電子陽電子の横方向運動を考えてきた。しかし一般には、電子陽電子の運動量が理想的であるとは限らない。そこで、電子陽電子の運動量が電磁石等の設定値からずれている場合を考えていく。式 (2.1)、(2.3) より、 $\Delta p/p \neq 0$  のときの運動方程式は、

$$\frac{d^2x}{ds^2} + k_x x - \frac{\Delta p}{p} \left( k_x x + \frac{1}{\rho_0} \right) = 0 \quad (2.33)$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} + k_y y - \frac{\Delta p}{p} k_y y = 0 \quad (2.34)$$

とおける。更に  $x, y$  をベータatron振動と運動量のずれから規定される位置のずれとに分離して、

$$x(s) = x_\beta(s) + \eta_x(s) \frac{\Delta p}{p} \quad (2.35)$$

$$y(s) = y_\beta(s) + \eta_y(s) \frac{\Delta p}{p} \quad (2.36)$$

と置くことにする。ここで、 $\eta_x, \eta_y$  は、設定運動量からずれた電子陽電子のベータatron運動からのずれを表す関数で、運動量分散関数と呼ばれている。式 (2.35)、(2.36) を使い、運動方程式を  $\Delta p/p$  の一次の項までを書き下すと、

$$\left( \frac{d^2x_\beta}{ds^2} + k_x x_\beta \right) + \frac{\Delta p}{p} \left( \frac{d^2\eta_x}{ds^2} + k_x \eta_x - \frac{1}{\rho_0} \right) = 0 \quad (2.37)$$

$$\left( \frac{d^2y_\beta}{ds^2} + k_y y_\beta \right) + \frac{\Delta p}{p} \left( \frac{d^2\eta_y}{ds^2} + k_y \eta_y \right) = 0 \quad (2.38)$$

となる。 $x_\beta, y_\beta, \eta_y$  は、ベータatron運動と同じ運動方程式に従って運動することがわかる。この結果として  $\eta_y$  は  $\eta_y = \eta'_y = 0$  の初期条件を与えると、以後は常に  $\eta_y = 0$  となることがわかる。

それに対して  $\eta_x$  は、 $1/\rho_0$  の項のため、その他の関数とは違った運動をおこなう。そこで  $\eta_x$  の運動について考えてみる。まず、 $\eta_x(0) = \eta'_x(0) = 0$  の電子陽電子の運動を考えることにする。この時の運動量分散関数を  $D_x(s) = \eta_x(s)$ 、 $D'_x(s) = \eta'_x(s)$  とおく。この  $D_x(s), D'_x(s)$  が満たすべき運動方程式は、

$$\begin{aligned} \cdot k_x > 0; D_x(s) &= \frac{1 - \cos \sqrt{k_x} s}{\rho_0 k_x}, D'_x(s) = \frac{\sin \sqrt{k_x} s}{\rho_0 \sqrt{k_x}} \\ \cdot k_x = 0; D_x(s) &= \frac{s^2}{2\rho_0}, D'_x(s) = \frac{s}{\rho_0} \\ \cdot k_x < 0; D_x(s) &= \frac{\cosh \sqrt{|k_x|} s - 1}{\rho_0 |k_x|}, D'_x(s) = \frac{\sinh \sqrt{|k_x|} s}{\rho_0 \sqrt{|k_x|}} \end{aligned}$$

となる。よって一般に、ビームライン上の位置  $s_1$  と  $s_2$  での運動量分散関数の関係は、

$$\begin{pmatrix} \eta_x(s_2) \\ \eta'_x(s_2) \end{pmatrix} = M(s_2, s_1) \begin{pmatrix} \eta_x(s_1) \\ \eta'_x(s_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_x(s_1) \\ D'_x(s_1) \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

または、

$$\begin{pmatrix} \eta_x(s_2) \\ \eta'_x(s_2) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & D_x \\ M_{21} & M_{22} & D'_x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_x(s_1) \\ \eta'_x(s_1) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

と表せる。ここで、 $M(s_2, s_1)$  は、Transfer Matrix で、その行列要素は式 (2.25)-(2.28) で表されている。

### 2.4 周期的境界条件を含む場合

周期的境界条件がある場合の Twiss parameter や運動量分散関数の振る舞いを考えていく。特に、円形加

速器を周回する電子陽電子の場合は、後に説明するシンクロトン放射の過程を経て、この節で説明する周期解に自動的に落ち着くことになる。まず、はじめに Twiss parameter について考える。境界条件を持つ1つの区間(円形加速器の場合は円周)の長さを  $C$  とすると、ビームライン上の  $s, s+C$  間での Transfer Matrix は、式 (2.25)-(2.28) より、

$$M(s+C, s) = \begin{pmatrix} \cos \psi + \alpha \sin \psi & \beta \sin \psi \\ -\gamma \sin \psi & \cos \psi - \alpha \sin \psi \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

とおける。これより、周期的境界条件を持つ場合の Twiss parameter  $\alpha, \beta$  は Transfer Matrix の行列要素を使って、

$$\beta(s) = \frac{4 \operatorname{sgn}(M_{12}) M_{12}}{\sqrt{4 - (M_{11} + M_{22})^2}} \quad (2.42)$$

$$\alpha(s) = \frac{2 \operatorname{sgn}(M_{12}) (M_{11} - M_{22})}{\sqrt{4 - (M_{11} + M_{22})^2}} \quad (2.43)$$

と書くことができる。ここで、 $\operatorname{sgn}(M_{12})$  を使うことにより、 $\beta > 0$  という条件をつけた。また、これらの Twiss parameter の値を安定に保つための条件

$$(M_{11} + M_{22})^2 < 4 \quad (2.44)$$

が与えられる。Twiss parameter と同様に、運動量分散関数に関する周期解も式 (2.39) から導ける。

$$\begin{pmatrix} \eta_x(s+C) \\ \eta'_x(s+C) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_x(s) \\ \eta'_x(s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_x \\ D'_x \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

周期的境界条件から  $\eta_x(s+C) = \eta_x(s)$ ,  $\eta'_x(s+C) = \eta'_x(s)$  と置き、式 (2.45) を  $\eta_x, \eta'_x$  に関して整理すると、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \eta_x(s) \\ \eta'_x(s) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 - M_{11} & -M_{12} \\ -M_{21} & 1 - M_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} D_x \\ D'_x \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2 - M_{11} - M_{22}} \begin{pmatrix} (1 - M_{22})D_x + M_{12}D'_x \\ M_{21}D_x + (1 - M_{11})D'_x \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.46)$$

となり、運動量分散関数の周期解を導くことができる。

## 2.5 エミッタンス

これまでの議論の全ては電子陽電子を一粒子として考えてきた。しかし、実際の電子、陽電子ビームは、多数の粒子の集合体であり、必ずしも一粒子に対しての議論で充分であるとは言えない。そこで、この節では電子

陽電子のビームとしての特性を考えていく。2.2 節において、電子陽電子のビームライン上の横方向運動は、その位置やその微分値 ( $z, z'$ ) が、行列  $T$  による一次変換をおこなうことにより ( $u, v$ ) 空間での運動として記述できることを学んだ。そして、この ( $u, v$ ) 空間において、電子陽電子の横方向運動は振幅が  $\sqrt{W_z}$  の回転運動、つまり、

$$u^2 + v^2 = W_z \quad (2.47)$$

で定義される円運動をすることを学んだ。ここで、電子陽電子を一粒子ではなく、分布を持った電子陽電子ビームとして扱うことにする。そこで、 $u, v$  をそれぞれ  $\sigma_u = \sigma_v = \sigma_{\sqrt{W_z}}$  のガウス分布をしているとし、 $u$  と  $v$  との間には相関が無いとする。つまり、ある時間での電子陽電子ビームの分布を

$$\varphi(u, v) du dv = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{W_z}} \exp\left[-\frac{u^2 + v^2}{2\sigma^2\sqrt{W_z}}\right] du dv \quad (2.48)$$

という分布関数によって記述できると考える。また、 $z, z'$  と  $u, v$  との間関係は式 (2.23) より

$$z = \sqrt{\beta_z} u, \quad z' = -\frac{v + \alpha_z u}{\sqrt{\beta_z}} \quad (2.49)$$

であった。この関係式と式 (2.48) の確率分布関数から、

$$\sigma_z = \sqrt{\langle z^2 \rangle - \langle z \rangle^2} = \sqrt{\beta_z \varepsilon_z} \quad (2.50)$$

$$\sigma_{z'} = \sqrt{\langle z'^2 \rangle - \langle z' \rangle^2} = \sqrt{\gamma_z \varepsilon_z} \quad (2.51)$$

$$\langle z z' \rangle = -\alpha_z \varepsilon_z \quad (2.52)$$

$$\varepsilon_z \equiv \sigma_{\sqrt{W_z}}^2 = \frac{1}{2} \langle W_z \rangle \quad (2.53)$$

といった電子陽電子ビームの横方向の拡がりを記述することができる。ここで  $\varepsilon_z$  は、エミッタンスと呼ばれる量で、加速器内を運動する電子陽電子のビームとしての横方向の特性はエミッタンスと Twiss parameter とで記述されることが一般的である。また、ビーム輸送系ではそれぞれの各電子陽電子の Courant-Snyder Invariant が保存しているため、エミッタンスも時間と共に変化せず一定である。

## 3 シンクロトン放射

### 3.1 シンクロトン振動

前章では、電子陽電子、および、電子陽電子ビームの横方向運動について論議した。これらの横方向振動と同

様に、電子陽電子円形加速器においては、電子陽電子、および、電子陽電子ビームはビームの進行方向（縦方向）にも振動している。本章では、シンクロトロン放射過程を通して電子陽電子の縦方向振動について考えていく。また、ここでも電子陽電子を一粒子として考えることから話を進めていくことにする。更に、本稿では電子陽電子のエネルギーが電子陽電子の静止質量に比べ十分に大きい場合についての論議をする。シンクロトロン放射を考えるとき、以下の放射積分と呼ばれる値がしばしば使われる。

$$I_1 \equiv \oint ds \frac{\eta_x(s)}{\rho_0(s)} \quad (3.1)$$

$$I_2 \equiv \oint ds \frac{1}{\rho_0^2(s)} \quad (3.2)$$

$$I_3 \equiv \oint ds \frac{1}{|\rho_0(s)|^3} \quad (3.3)$$

$$I_4 \equiv \oint ds \frac{\eta_x(s)}{\rho_0^2(s)} \left( \frac{1}{\rho_0(s)} + 2\rho_0(s) k_x(s) \right) \quad (3.4)$$

$$I_5 \equiv \oint ds \frac{H_x(s)}{|\rho_0(s)|^3} \quad (3.5)$$

ここで、 $H_x$  は Lattice parameter と呼ばれる値で

$$H_x \equiv (\gamma_x \eta_x^2 + 2\alpha_x \eta_x \eta_x' + \beta_x \eta_x'^2) \quad (3.6)$$

である。これらの放射積分は、電子陽電子の状態に係わりなく、電子陽電子円形加速器の電子光学設計によってのみ決定される。電子陽電子が円形加速器を周回すると、シンクロトロン放射により、

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2 r_e c^3}{(mc^2)^3} E^2 B_y^2 \quad (3.7)$$

の電力損失がおこる。この電力損失を通して、電子陽電子の縦方向振動は、電子陽電子の理想運動量からのずれと平衡位相からのずれにより励起される。まず、電子陽電子の理想運動量から運動量が  $\Delta p/p$  だけずれた電子陽電子は、

$$\Delta x = \eta_x \frac{\Delta p}{p} \quad (3.8)$$

だけ水平方向に軌道がずれる。そのためエネルギーは  $E \cong E_0(1 + \Delta p/p)$ 、磁場は、

$$B_y \cong B_{y,0} + \frac{dB_y}{dx} \eta_x \frac{\Delta p}{p} = \frac{E_0}{qc} \left( \frac{1}{\rho_0} + \eta_x k_1 \frac{\Delta p}{p} \right) \quad (3.9)$$

だけの違いが生じる。また同様に、軌道のずれにより電子陽電子が偏向電磁石中を通過する距離も

$$dl = \frac{\rho_0 + \Delta x}{\rho_0} ds = \left( 1 + \frac{\eta_x \Delta p}{\rho_0 p} \right) ds \quad (3.10)$$

だけ違ってくる。よって、運動量が  $\Delta p/p$  だけずれた電子陽電子が円形加速器を一周通過するごとにおこるエネルギー損失は式 (3.7)-(3.10) より、

$$\begin{aligned} U \left( \frac{\Delta p}{p} \right) &= \int_0^C \frac{dl}{c} P = \frac{2}{3} \frac{q^2 r_e c^2}{(mc^2)^3} \int_0^C dl E^2 B_y^2 \\ &= \frac{2}{3} \frac{q^2 r_e c^2 E_0^2}{(mc^2)^3} \frac{E_0^2}{q^2 c^2} \oint ds \left( 1 + \frac{\eta_x \Delta p}{\rho_0 p} \right) \\ &\quad \times \left( 1 + \frac{\Delta p}{p} \right)^2 \left( \frac{1}{\rho_0} + \eta_x k_1 \frac{\Delta p}{p} \right)^2 \\ &\cong \frac{2}{3} r_e \gamma^3 E_0 \left[ I_2 + (2I_2 + I_4) \frac{\Delta p}{p} \right] \\ &\equiv U_0 + U_1 \frac{\Delta p}{p} \end{aligned} \quad (3.11)$$

と表される。また、シンクロトロン放射により電子陽電子が円形加速器内でエネルギーを損失する一方、加速空洞で加速されることにより、電子陽電子はエネルギーを供給される。ここで、 $V_{RF}$ ,  $f_{RF}$  をそれぞれ加速空洞の加速電圧および周波数、 $\tau$  を平衡位相

$$\phi_0 = \sin^{-1} \left( \frac{U_0}{qV_{RF}} \right) \quad (3.12)$$

からの時間的な変位としたとき、電子陽電子がこの加速空洞を一回通過したときのエネルギー利得は、

$$\begin{aligned} E_{RF}(\tau) &= qV_{RF} \sin(\phi_0 - 2\pi f_{RF}\tau) \\ &\cong U_0 - \tau 2\pi f_{RF} qV_{RF} \sqrt{1 - \left( \frac{U_0}{qV_{RF}} \right)^2} \\ &\equiv U_0 - E_1 \tau \end{aligned} \quad (3.13)$$

と表される。よって、式 (3.11)、(3.13) から、電子陽電子が円形加速器を一周したときのエネルギー変化が求められる。

$$\Delta E = E_{RF}(\tau) - U \left( \frac{\Delta p}{p} \right) = -E_1 \tau - U_1 \frac{\Delta p}{p} \quad (3.14)$$

通常の円形加速器では、エネルギーの変化は、電子陽電子ビームが円形加速器を周回する周期に比べてゆっくりと起こるため、

$$\frac{d \Delta p}{dt} \frac{p}{E_0} = \frac{1}{E_0} \frac{dE}{dt} \cong \frac{1}{E_0} \frac{c \Delta E}{C} = -\frac{c}{CE_0} \left( E_1 \tau + U_1 \frac{\Delta p}{p} \right) \quad (3.15)$$

同様に  $\tau$  の時間変化を考えると、

$$\frac{d\tau}{dt} \cong \frac{\Delta C}{C} = \frac{1}{C} \left[ \oint dl - \oint ds \right] = \frac{I_1}{C} \frac{\Delta p}{p} \equiv \alpha_M \frac{\Delta p}{p} \quad (3.16)$$

という関係が得られる。ここで、 $\alpha_M$  は運動量の変化がリングの周長に与える影響を表す因子で Momentum Compaction Factor と呼ばれている。よって、式 (3.15)、(3.16) から、

$$\frac{d^2}{dt^2} \left[ \frac{\Delta p}{p} \right] + \frac{2}{\tau_s} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\Delta p}{p} \right] - (2\pi f_s)^2 \frac{\Delta p}{p} = 0 \quad (3.17)$$

$$\frac{d^2 \tau}{dt^2} + \frac{2}{\tau_s} \frac{d\tau}{dt} - (2\pi f_s)^2 \tau = 0 \quad (3.18)$$

$$f_s^2 = \frac{\alpha_M c f_{RF}}{2\pi C} \frac{q V_{RF}}{E_0} \sqrt{1 - \left( \frac{U_0}{q V_{RF}} \right)^2} \quad (3.19)$$

$$\frac{1}{\tau_s} = \frac{c U_1}{2 C E_0} = \frac{r_e c \gamma^3}{3 C} (2 I_2 + I_4) \quad (3.20)$$

といった電子陽電子の縦方向の運動方程式が導くことができる。この運動方程式は減衰率  $\tau_s$  が振動周波数  $f_s$  に比べて緩やかであるとき、減衰振動として振る舞う。このような円形加速器内での電子陽電子の縦方向振動をシンクロトロン振動とよぶ。

## 3.2 放射減衰

前節では、シンクロトロン放射の過程を通して電子陽電子のシンクロトロン振動の振幅が減衰していくことを示した。円形加速器内ではベータトロン振動に対しても同様のことがおこる。ここでは再びベータトロン振動に戻り話を進めよう。電子陽電子の従うべきベータトロン振動の運動方程式は式 (2.24) から、

$$W_z = \gamma_z z^2 + 2\alpha_z z z' + \beta_z z'^2 \quad (z = x, y) \quad (3.21)$$

であった。さらにある決まった Courant-Snyder Invariant を持った粒子の  $z^2, z z', z'^2$  の位相平均は、

$$\langle z^2 \rangle = \frac{W_z \beta_z}{2} \quad (3.22)$$

$$\langle z z' \rangle = -\frac{W_z \alpha_z}{2} \quad (3.23)$$

$$\langle z'^2 \rangle = \frac{W_z \gamma_z}{2} \quad (3.24)$$

となる。ベータトロン振動に対する振動減衰の機構は、この Courant-Snyder Invariant の変化を考えることにより説明を進める。ベータトロン振動の減衰率について論議するには、2つの機構を理解する必要がある。1つ目は、電子陽電子が加速空胴を通過する時に  $z'$  が変化することから起こる減衰機構で、2つ目は、電子陽電子がシンクロトロン放射をおこなう際の  $z'$  の変化に起因

するものである。ベータトロン振動の減衰は前者により起こるのに対して、後者は振動振幅を増幅させる効果がある。しかし一般には、後者の振動の増幅率に対して、前者の減衰率が大きくなるように実際の加速器は設計されているので、結果として振動は減衰するようになる。

まず、電子陽電子が加速空胴を通過する時におこるベータトロン振動の減衰過程を考えよう。電子陽電子が加速空胴を通過するとき、電子陽電子の進行方向の運動量が加速空胴で増加するため、運動量は、

$$c p_{s,1} = c p_s + E_{RF}(\tau) \quad (3.25)$$

$$c p_1 \cong c p + E_{RF}(\tau) \quad (3.26)$$

のように変化する。一方、加速空胴では横方向の運動量  $p_z$  ( $z = x, y$ ) は変化しない。しかし、縦方向の運動量が変化するため  $z, z'$  は、

$$\Delta z = 0 \quad (3.27)$$

$$\Delta z' = \left( \frac{p_z}{p_1} - \frac{p_z}{p} \right) \cong -z' \frac{E_{RF}(\tau)}{c p} \quad (3.28)$$

だけ加速空胴の前後で変化することになる。円形加速器を周回する電子陽電子は、その周回毎に加速空胴を通過し、それぞれの周回では違ったベータトロン位相で加速空胴を通過するので、加速空胴を通過したときの電子陽電子の  $z'$  の変化率は、ベータトロン振動の位相平均をとって、

$$\begin{aligned} \frac{dW_{z,RF}}{dt} &= 2 (\gamma_z z \Delta z + \alpha_z (z \Delta z' + \Delta z z') + \beta_z z' \Delta z') \frac{c}{C} \\ &= -2 (\alpha_z \langle z z' \rangle + \beta_z \langle z'^2 \rangle) \frac{U_0}{p C} \\ &= -\frac{(\beta_z \gamma_z - \alpha_z^2) U_0}{p C} W_z = -\frac{2 r_e c \gamma^3}{3 C} I_2 W_z \end{aligned} \quad (3.29)$$

となる。ここで、 $C$  は円形加速器の周長を表し、 $I_2$  は放射積分である。このようにして、電子陽電子は加速空胴を通過する際にベータトロン振動の減衰を起こす。

次に、電子陽電子がシンクロトロン放射光を放射する際に引き起こされる Courant-Snyder Invariant の変化率を考える。この過程は、シンクロトロン放射光を放射した際の電子、陽電子の運動量の変化が、運動量分散関数を通してベータトロン振動に回り込む過程である。これまで垂直方向に関しては偏向磁場が無いと仮定して議論を進めてきたので、この効果は水平方向にのみ影響を与える。運動量分散関数が有限の位置で電子陽電子がシンクロトロン放射光を放射したとき、運動量が  $\Delta p_\eta$  だけ変化するとすると、シンクロトロン放射光を放射する

前 ( $x_{\beta,0}$ ) と後 ( $x_{\beta,1}$ ) では、

$$x_{\beta,1} + \eta_x \left( \frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta p_\eta}{p} \right) = x_{\beta,0} + \eta_x \frac{\Delta p}{p} \quad (3.30)$$

$$x'_{\beta,1} + \eta'_x \left( \frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta p_\eta}{p} \right) = x'_{\beta,0} + \eta'_x \frac{\Delta p}{p} \quad (3.31)$$

という関係が成り立つ。よって、シンクロトロン放射光を放射する前と後では、ベータトロン振動が、

$$\Delta x_\beta \equiv x_{\beta,1} - x_{\beta,0} = -\eta_x \frac{\Delta p_\eta}{p} \quad (3.32)$$

$$\Delta x'_\beta \equiv x'_{\beta,1} - x'_{\beta,0} = -\eta'_x \frac{\Delta p_\eta}{p} \quad (3.33)$$

だけ変化する。このときの Courant-Snyder Invariant の変化量もまた、

$$\begin{aligned} \Delta W_{x,\eta} &= -2 \{ \gamma_x x_\beta \Delta x_\beta + \alpha_x (x_\beta \Delta x'_\beta + x'_\beta \Delta x_\beta) + \beta_x x'_\beta \Delta x'_\beta \} \\ &= -2 \{ (\gamma_x \eta_x + \alpha_x \eta'_x) x_\beta + (\alpha_x \eta_x + \beta_x \eta'_x) x'_\beta \} \frac{\Delta p_\eta}{p} \end{aligned} \quad (3.34)$$

と表せる。次に電子陽電子が円形加速器を周回する際のシンクロトロン放射による運動量の変化を考える。シンクロトロン放射による運動量の変化は電子陽電子の水平方向位置  $x_\beta$  に依存し、電子陽電子が  $\Delta s$  進む間に、

$$\begin{aligned} \Delta p(x_\beta) &= -\frac{P}{c} \Delta l = -\left( P_0 + \frac{\partial P}{\partial B_y} \frac{dB_y}{dx} x_\beta \right) \left( 1 + \frac{x}{\rho_0} \right) \frac{\Delta s}{c} \\ &= -\frac{P_0}{c} \left\{ 1 + \left( \frac{1}{\rho_0} + 2\rho_0 k_x \right) x_\beta + 2k_x x_\beta^2 \right\} \Delta s \end{aligned} \quad (3.35)$$

だけ変化する。よって、電子陽電子が  $\Delta s$  進む間の Courant-Snyder Invariant の変化量は、

$$\begin{aligned} \Delta W_{x,\eta} &= \frac{2P_0}{cp} \left\{ 1 + \left( \frac{1}{\rho_0} + 2\rho_0 k_x \right) x_\beta + 2k_x x_\beta^2 \right\} \\ &\quad \times \{ (\gamma_x \eta_x + \alpha_x \eta'_x) x_\beta + (\alpha_x \eta_x + \beta_x \eta'_x) x'_\beta \} \Delta s \\ &= o(x_\beta, x'_\beta) + o^3(x_\beta, x'_\beta) + \frac{\Delta s 2P_0}{cp} \left( \frac{1}{\rho_0} + 2\rho_0 k_x \right) \\ &\quad \times \{ (\gamma_x \eta_x + \alpha_x \eta'_x) x_\beta^2 + (\alpha_x \eta_x + \beta_x \eta'_x) x_\beta x'_\beta \} \end{aligned} \quad (3.36)$$

と表すことができる。以上から、シンクロトロン放射による運動量の変化により引き起こされる Courant-Snyder Invariant の変化率は、

$$\begin{aligned} \frac{dW_{x,\eta}}{dt} &= \frac{4r_e \gamma^3}{3} \oint ds \frac{1}{\rho_0^2} \left( \frac{1}{\rho_0} + 2\rho_0 k_1 \right) \frac{\eta_x W_x}{2} \frac{c}{C} \\ &= \frac{2r_e c \gamma^3}{3C} I_4 W_x \end{aligned} \quad (3.37)$$

となる。よって、

$$\frac{dW_x}{dt} = \frac{dW_{x,\text{RF}}}{dt} + \frac{dW_{x,\eta}}{dt} = -\frac{2r_e c \gamma^3}{3C} (I_2 - I_4) W_x \quad (3.38)$$

$$\frac{dW_y}{dt} = \frac{dW_{y,\text{RF}}}{dt} = -\frac{2r_e c \gamma^3}{3C} I_2 W_y \quad (3.39)$$

と Courant-Snyder Invariant に関する変化率を求めることができた。ここで、ベータトロン振動の振幅は  $z = \sqrt{\beta_z W_z}$  であるので、ベータトロン振動に関する減衰率は、

$$\begin{aligned} \frac{dz_\beta}{dt} &= \sqrt{\beta_z} \frac{d\sqrt{W_z}}{dt} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta_z}{W_z}} \frac{dW_z}{dt} \\ &= -\frac{r_e c \gamma^3}{3C} I_2 J_z z_\beta \equiv -\frac{1}{\tau_z} z_\beta \end{aligned} \quad (3.40)$$

となり、前節で求めたシンクロトロン振動の減衰率と併せて、

$$\frac{1}{\tau_i} = \frac{r_e c \gamma^3}{3C} I_2 J_i \quad (i = x, y, s) \quad (3.41)$$

$$J_x = 1 - \frac{I_4}{I_2}, \quad J_y = 1, \quad J_s = 2 + \frac{I_4}{I_2} \quad (3.42)$$

と3つの軸の減衰率をまとめて表せる。上記の  $J_i$  の値から、 $J_x + J_y + J_s = 4$  という関係が成り立つことがわかる。これまでの話は簡単のため、電子陽電子を垂直方向へ偏向させる磁場の存在を無視して議論を進めたが、この  $J_i$  に関する関係式は垂直方向へ偏向磁場が存在する場合も常に成り立つ関係式である。

### 3.3 量子励起と中心極限定理

前節までは、シンクロトロン放射を通してシンクロトロン振動およびベータトロン振動が減衰する過程を述べてきた。このようなこれまでの放射減衰の議論は、偏向磁場の存在する場所で粒子の運動量は連続的に失われるという立場をとって考えてきた。しかしながら、実際の電子陽電子の運動量変化は、ある有限な運動量を持つ光子を放出する都度、量子的に起こる。このような量子的な運動量変化により振動が励起されることを量子励起と呼ぶ。この量子励起はこれまでのように一粒子に対する振動として考えるのではなく、確率的に放出される光子の運動量変化により記述される。そのため、今までのような一粒子についての運動方程式で考えるよりも、電子陽電子ビーム内の電子陽電子の縦方向や横方向位置の存在確率として考える方が自然である。よって、以後の議論は、これまでのように電子陽電子を一粒子として考えるのではなく、電子陽電子の存在確率分布、または、ビーム内には多数の電子陽電子が存在するので、電子陽電子の位置の分布の振る舞いとして考えていく。

まず、はじめにシンクロトロン振動から考えよう。電子陽電子ビームが円形加速器を一周するような短い時間の間では、振動の減衰はほとんど考える必要が無い。そ

ここで、式 (3.17)、(3.18) で振動の減衰項を無視すると、電子陽電子の運動量や縦方向位置の振動は単振動の式で表せる。また、シンクロトロン放射により放出される個々の光子の運動量が独立であり、その運動量分布が  $n(p_\gamma)$  であるとする、電子陽電子ビームが円形加速器を一周する度に、電子陽電子ビーム内の個々の電子陽電子の運動量、および、縦方向位置の振動振幅の分布は、

$$\Delta \left( \frac{\sigma_{p,\text{ex}}}{p} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_i \left( \frac{\Delta p_\gamma}{p} \right)_i^2 = \frac{1}{2p^2c} \oint ds \int_0^\infty dp_\gamma n(p_\gamma) p_\gamma^2 \quad (3.43)$$

$$\Delta \sigma_{r,\text{ex}}^2 = \frac{\alpha_M}{2\pi f_s} \Delta \left( \frac{\sigma_{p,\text{ex}}}{p} \right)^2 \quad (3.44)$$

だけ拡がりをもつようになる。このように、ガウス分布に従う互いに独立な確率変数の和も近似的にガウス分布に従うことを中心極限定理と呼ぶ。これは、本稿で述べる全ての場合に成り立つものではなく、ある一定の条件の下に成り立つ定理である。この反例については、後の残留ガス散乱の章で詳しく述べる。ここで、

$$\int_0^\infty dp_\gamma n(p_\gamma) p_\gamma^2 = \frac{55}{24\sqrt{3}} r_e \hbar mc^2 \frac{\gamma^7}{|\rho|^3} \quad (3.45)$$

であるため [2]、電子陽電子が円形加速器を一周する毎の縦方向位置の拡がりは、

$$\Delta \left( \frac{\sigma_{p,\text{ex}}}{p} \right)^2 = \frac{55 r_e \hbar \gamma^5}{48\sqrt{3} mc} \oint ds \frac{1}{|\rho|^3} = \frac{2 r_e}{3} C_q \gamma^5 I_3, \quad C_q \equiv \frac{55}{32\sqrt{3}} \frac{\hbar}{mc} \quad (3.46)$$

$$\Delta \sigma_{r,\text{ex}}^2 = \frac{r_e \alpha_M}{3\pi f_s} C_q \gamma^5 I_3 \quad (3.47)$$

と表せる。これは電子陽電子ビームが円形加速器を一周する毎に  $(\sigma_p/p)^2$  が一定の割合で増加することを意味する。

上記に述べたシンクロトロン振動と同様に、ベータトロン振動に対しても量子励起は起こる。このベータトロン振動に対する量子励起の原因として以下の二つの過程が考えられる。

- シンクロトロン放射光を放出するときの角度分布のばらつきによる量子的な効果
- 運動量分散関数が有限のところではシンクロトロン放射光を放出したときの運動量分散関数を通した量子的なベータトロン振動の変化

上記の2つの過程のうち、後者の方が圧倒的に大きな効果を及ぼすが、前者の過程も垂直方向 (y 方向) エミッタンスの原理的な限界値を考える上で興味深い過程である。

まず前者のシンクロトロン放射光を放出するときの量子的な角度分布による効果について考えていこう。シンクロトロン放射により、 $\Delta p_z(z=x, y)$  の横方向の運動量を持った光子を放出したとき、シンクロトロン放射光の放射後に発生する電子陽電子の Courant-Snyder Invariant は、

$$\Delta W_{z,\gamma} = \beta_z \left( \frac{\Delta p_z}{p} \right)^2 = \beta_z \left( \frac{\Delta p \theta_z}{p} \right)^2 \quad (3.48)$$

となる。ここで、放出される光子の角度分布は放出される光子の運動量に係わりなく  $\theta_z^2 = 1/\gamma^2$  のガウス分布をしていると考えると、電子陽電子ビームが円形加速器を一周まわった時に生成される Courant-Snyder Invariant の広がり、

$$\Delta \left( \sigma_{\sqrt{W_z}} \right)_{\text{ex},\gamma}^2 = \frac{1}{2p^2c\gamma^2} \oint ds \beta_z(s) \int_0^\infty dp_\gamma n(p_\gamma) p_\gamma^2 = \frac{55 r_e \hbar \gamma^3}{48\sqrt{3} mc} \oint ds \frac{\beta_z(s)}{|\rho|^3} = \frac{2 r_e}{3} C_q \gamma^3 I_{\beta,z} \quad (3.49)$$

$$I_{\beta,z} \equiv \oint ds \frac{\beta_z}{|\rho|^3} \quad (3.50)$$

となる。同様に運動量分散関数が有限のところではシンクロトロン放射光を放出したときの横方向運動の振幅とその微分値は、

$$\Delta x = -\eta_x \frac{\Delta p}{p} \quad (3.51)$$

$$\Delta x' = -\eta'_x \frac{\Delta p}{p} \quad (3.52)$$

であるため、運動量分散関数が有限のところではシンクロトロン放射光を放出したときに生成される電子陽電子の Courant-Snyder Invariant は、

$$\Delta W_{x,\eta} = \left( \gamma_x \eta_x^2 + 2\alpha_x \eta_x \eta'_x + \beta_x \eta_x'^2 \right) \left( \frac{\Delta p_\gamma}{p} \right)^2 = H_x(s) \left( \frac{\Delta p_\gamma}{p} \right)^2 \quad (3.53)$$

となる。よって、電子陽電子ビームが円形加速器を一周したときに生成される Courant-Snyder Invariant の拡がり、

$$\Delta \left( \sigma_{\sqrt{W_x}} \right)_{\text{ex},\eta}^2 = \frac{1}{2p^2c} \oint ds H_x(s) \int_0^\infty dp_\gamma n(p_\gamma) p_\gamma^2$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{55 r_e \hbar \gamma^5}{48 \sqrt{3} m c} \oint ds \frac{H_x(s)}{|\rho_0|^3} \\
&= \frac{2 r_e}{3} C_q \gamma^5 I_5 \quad (3.54)
\end{aligned}$$

となる。これらをまとめると、電子陽電子ビームが円形加速器を周回する毎に生成される水平方向 (x 方向)、垂直方向 (y 方向) のエミッタンスは、それぞれ、

$$\Delta \varepsilon_{x,\text{ex}} = \Delta \left( \sigma_{\sqrt{W_x}}^2 \right)_{\text{ex}} \equiv \frac{2 r_e}{3} C_q \gamma^3 (\gamma^2 I_5 + I_{\beta,x}) \quad (3.55)$$

$$\Delta \varepsilon_{y,\text{ex}} = \Delta \left( \sigma_{\sqrt{W_y}}^2 \right)_{\text{ex}} \equiv \frac{2 r_e}{3} C_q \gamma^3 I_{\beta,y} \quad (3.56)$$

となる。水平方向に対しては偏向磁場により軌道が曲げられるため、エミッタンスを生成する2つの効果が共に存在している。しかし、高エネルギーの電子陽電子円形加速器では  $\gamma^2$  の係数により、第一項のエミッタンスがより大きな影響を与えることがわかる。

### 3.4 平衡エミッタンスと運動量拡がり

電子陽電子ビームが円形加速器内を周回する間に、量子的な効果により運動量の広がりやエミッタンスが生じることが 3.3 節でわかった。一方で、円形加速器内を周回する電子陽電子ビームには、そのシンクロトロン振動およびベータトロン振動を減衰させようとする効果があることを 3.2 節で学んだ。それぞれの減衰率は、それぞれ既に式 (3.41)、(3.42) にまとめられている。これから、電子陽電子が円形加速器を一周した後のそれぞれの振動に対する減衰率を考えると、

$$\Delta \left( \frac{\Delta p_{\text{damp}}}{p} \right)^2 = - \frac{2C}{c\tau_s} \left( \frac{\Delta p}{p} \right)^2 \quad (3.57)$$

$$\Delta W_{x,\text{damp}} = - \frac{2C}{c\tau_x} W_x \quad (3.58)$$

$$\Delta W_{y,\text{damp}} = - \frac{2C}{c\tau_y} W_y \quad (3.59)$$

となり、円形加速器一周あたりの減衰率は、それぞれ電子陽電子の運動量や Courant-Snyder Invariant に比例する。同様に、運動量拡がりやエミッタンスもまた、それぞれ運動量の分散や Courant-Snyder Invariant の平均値に比例することになる。つまり、

$$\Delta \left( \frac{\sigma_{p,\text{damp}}}{p} \right)^2 = - \frac{2C}{c\tau_s} \left( \frac{\sigma_p}{p} \right)^2 \quad (3.60)$$

$$\Delta \varepsilon_{x,\text{damp}} \equiv \frac{\Delta \langle W_{x,\text{damp}} \rangle}{2} = - \frac{2C}{c\tau_x} \varepsilon_x \quad (3.61)$$

$$\Delta \varepsilon_{y,\text{damp}} \equiv \frac{\Delta \langle W_{y,\text{damp}} \rangle}{2} = - \frac{2C}{c\tau_y} \varepsilon_y \quad (3.62)$$

となる。ここで、式 (3.60)-(3.62) と式 (3.46)、(3.55)、(3.56) から、最終的に平衡状態に達したときの運動量拡がりやエミッタンスは、

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\sigma_p}{p} \right)^2 &= \frac{c\tau_s}{2C} \Delta \left( \frac{\sigma_{p,\text{ex}}}{p} \right)^2 \\
&= \frac{c}{2C} \frac{3C}{r_e c \gamma^3 I_2 J_s} \frac{2 r_e C_q}{3} \gamma^5 I_3 = \frac{C_q \gamma^2 I_3}{I_2 J_s} \quad (3.63)
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_x = \frac{c\tau_x}{2C} \Delta \varepsilon_{x,\text{ex}} = \frac{C_q}{I_2 J_x} (\gamma^2 I_5 + I_{\beta,x}) \quad (3.64)$$

$$\varepsilon_y = \frac{c\tau_y}{2C} \Delta \varepsilon_{y,\text{ex}} = \frac{C_q}{I_2 J_y} I_{\beta,y} \quad (3.65)$$

という値に自動的に落ち着くことになる。

### 3.5 垂直方向エミッタンス

前節の議論では、ビームエネルギーが GeV オーダーの電子陽電子円形加速器では、垂直方向と水平方向のエミッタンスの比が 6 桁以上も違うことになる。しかしながら、実際の電子陽電子円形加速器では、このような理想的な垂直方向エミッタンスの値を実現していない。それらの原因として、垂直方向の運動量分散関数とベータトロンカップリングが挙げられる。また垂直方向の運動量分散関数とベータトロンカップリングは加速器を構成する電磁石の設置位置誤差に起因して生成される。

これまでは垂直方向へ電子陽電子を偏向させる磁場が無いと仮定して議論を進めてきた。しかしながら、そのように設計された電子陽電子円形加速器でも、電磁石の設置誤差と軌道補正用電磁石による磁場等により、実際にはわずかに垂直方向への偏向磁場が存在する。また、これらの偏向磁場により、電子陽電子ビームは、COD (Closed Orbit Distortion) と呼ばれるある決まった軌道を中心としたベータトロン振動を繰り返す。この COD と四極電磁石の磁場中心との変位により、電子陽電子ビームが四極電磁石を通過するときに付加的な偏向磁場を感じる。これらの偏向磁場により、垂直方向への偏向磁場が無いように設計されている電子陽電子円形加速器でも、実際には垂直方向の運動量分散関数が生成される [3]。この効果により、実際の電子陽電子円形加速器での平衡エミッタンスは、式 (3.64)、(3.65) から、

$$\varepsilon_x = \frac{C_q}{I_2 J_x} (\gamma^2 I_{5,x} + I_{\beta,x}) \quad (3.66)$$

$$\varepsilon_y = \frac{C_q}{I_2 J_y} (\gamma^2 I_{5,y} + I_{\beta,y}) \quad (3.67)$$

$$I_{5,z} \equiv \oint ds \frac{\gamma_z \eta_z^2 + 2\alpha_z \eta_z \eta'_z + \beta_z \eta'_z{}^2}{|\rho_{0,z}|^3} \quad (z = x, y) \quad (3.68)$$

と変更される。通常の電子陽電子円形加速器では、垂直方向に関して第一項の寄与が第二項の寄与に比べて大きくなるのが少なくない。

KEK-ATF ダンピングリングの例を使って、電磁石の設置位置誤差の垂直方向の運動量分散関数、垂直方向エミッタンスへの影響を考えていこう。まずはじめに円形加速器の全電磁石がランダムに  $\sigma = 20 \mu\text{m}$  の設置位置誤差を持っていたとする。そのような条件の下で、全てのビーム位置モニター的位置 (KEK-ATF では円形加速器全周にわたり 96 個のビーム位置モニターが設置されている) において垂直方向の運動量分散関数が最小になるように軌道補正電磁石でビーム位置調整をすることを考える。2000 回の違った電磁石の設置位置誤差の初期条件に対し、上記の調整をおこなったときの KEK-ATF ダンピングリングで達成し得る垂直方向エミッタンスをシミュレーションで考えてみた [4]。その結果を図 3.1 に示す。横軸は曲線部での垂直方向の運動量分散関数の平均値で、縦軸は KEK-ATF ダンピングリングで達成し得る垂直方向エミッタンスである。このように電磁石が  $20 \mu\text{m}$  程度の設置位置誤差を持っているだけで、結果的に軌道調整では消し切れない  $1 - 5 \times 10^{-11} \text{ m}$  程度の垂直方向エミッタンスが生成されることになる。また、垂直方向の運動量分散関数とエミッタンスとの間にはきれいな相関関係があるので、垂直方向エミッタンスの主要因として垂直方向の運動量分散関数が大きく関与していることもわかる。

垂直方向エミッタンスを生成する他の要因として、ベータatronカップリングが挙げられる。一般にスキュー四極電磁石磁場  $k_s$  が存在するときの運動方程式 (2.5) は、

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + k_x x = -k_s y \quad (3.69)$$

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + k_y y = -k_s x \quad (3.70)$$

となる。このようなスキュー四極電磁石磁場の存在により、水平方向と垂直方向の運動が独立ではなくなる。このことは、水平方向と垂直方向エミッタンスの間の独立性も壊すことになる。この結果、スキュー四極電磁石磁場が無いとき、水平方向と垂直方向エミッタンスがそれぞれ式 (3.66)、(3.67) で表されているような電子陽電子ビームのエミッタンスは最終的に、

$$\varepsilon_x = \frac{C_q}{I_2} \left\{ \frac{\gamma^2 I_{5,x} + I_{\beta,x}}{J_x(1+\kappa)} + \frac{\kappa(\gamma^2 I_{5,x} + I_{\beta,x})}{J_y(1+\kappa)} \right\} \quad (3.71)$$

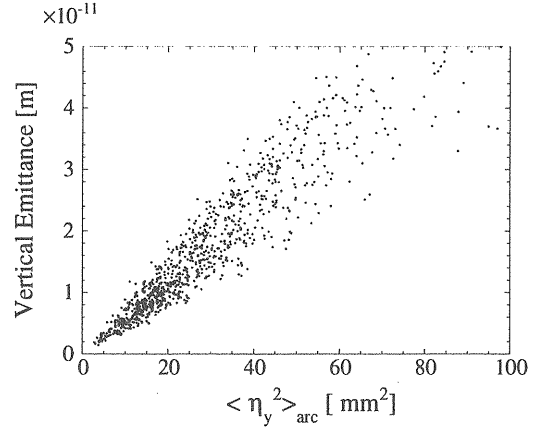


図 3.1: 垂直方向の運動量分散関数とエミッタンスの関係。シミュレーションには  $\sigma = 20 \mu\text{m}$  の電磁石の設置位置誤差とビーム位置モニターでの運動量分散関数の補正が考慮されている。

$$\varepsilon_y = \frac{C_q}{I_2} \left\{ \frac{\kappa(\gamma^2 I_{5,x} + I_{\beta,x})}{J_x(1+\kappa)} + \frac{\gamma^2 I_{5,x} + I_{\beta,x}}{J_y(1+\kappa)} \right\} \quad (3.72)$$

$$\kappa = \frac{1}{16C} \frac{J_x}{J_y} \oint ds \left[ \sum_{\pm} \frac{|\kappa_{\pm}|^2}{\sin^2 \pi \nu_{\pm}} + \frac{2 \text{Re} \{ \kappa_{+}^* \kappa_{-} \}}{\sin \pi \nu_{+} \sin \pi \nu_{-}} \right] \quad (3.73)$$

$$\kappa_{\pm}(s) = \int_s^{s+C} ds' k_s(s') \sqrt{\beta_x(s') \beta_y(s')} e^{i[\psi_{\pm}(s') - \psi_{\pm}(s) + \pi \nu_{\pm}]} \quad (3.74)$$

となる [5]。ここで  $\nu_{x,y}$  はチューンと呼ばれ、電子陽電子ビームが円形加速器を一周したときのベータatron位相進度を意味する。また、式中の  $\nu_{\pm}, \psi_{\pm}$  は、それぞれ  $\nu_{\pm} = \nu_x \pm \nu_y$ 、 $\psi_{\pm} = \psi_x \pm \psi_y$  である。また  $\kappa$  は、ベータatronカップリングと呼ばれてる値である。

それでは、電磁石の設置位置誤差が垂直方向エミッタンスに与える影響を考えていこう。四極電磁石に小角度の回転設置誤差  $\theta$  が存在するとき、電子陽電子がこの四極電磁石を通過するときの横方向運動のハミルトニアンは、

$$H_s = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + \frac{k_1 \{ (x \cos \theta - y \sin \theta)^2 - (x \sin \theta + y \cos \theta)^2 \}}{2} \quad (3.75)$$

$$\cong \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + \frac{k_1}{2} (x^2 - y^2) + k_{s,4} xy \quad (3.76)$$

となり、スキュー四極電磁石磁場成分  $k_{s,4}$  が生成される。また、一般に円形加速器には、chromaticity (色収差) を補正するために六極電磁石と呼ばれる電磁石を配

置する。この六極電磁石を電子陽電子が通過するときの横方向運動のハミルトニアンは、

$$H_s = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + \frac{k_2}{6}(x^3 - 3xy^2) \quad (3.77)$$

となる。ここで、六極電磁石の垂直方向の設置位置誤差  $\Delta y$  や六極電磁石での電子陽電子ビームの COD  $y_{\text{COD}}$  が存在するとき、電子陽電子が六極電磁石を通過した際の横方向運動のハミルトニアンは、

$$H_s = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + \frac{k_2}{6} \{x^3 - 3x(y - \Delta y + y_{\text{COD}})^2\} \\ \cong \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + \frac{k_2}{6}(x^3 - 3xy^2) + k_{s,6} xy \quad (3.78)$$

$$k_{s,6} = k_2(\Delta y - y_{\text{COD}}) \quad (3.79)$$

となる。よって、この場合もスキュー四極電磁石磁場成分  $k_{s,6}$  が生成される。このようなスキュー四極電磁石磁場を相殺するために、実際の円形加速器では随所にスキュー四極電磁石を配置することは少なくない。円形加速器内の全ての電磁石が理想的に配置されている場合にはスキュー四極電磁石は必要とされない。しかし、実際には電磁石の設置誤差に対する許容値に見合うだけのスキュー四極電磁石磁場を想定して設置される。

次にベータトロンカップリングの実際の加速器への影響についても KEK-ATF ダンピングリングでのシミュレーションで考えていこう。ここでは実際に測定された KEK-ATF ダンピングリングの電磁石設置位置誤差 (電磁石は水平方向約  $40 \mu\text{m}$ 、垂直方向約  $20 \mu\text{m}$ 、進行方向約  $100 \mu\text{m}$ 、回転設置誤差  $0.2 \text{ mrad}$  程度の誤差で架台上に設置されている) を基に考えることにする。さらに今回はビーム位置モニターがランダムに  $\sigma=300 \mu\text{m}$  の設置位置誤差を持っているとし、このビーム位置モニターを信用して軌道補正をおこなうとこと考える。このビーム位置モニターの設置位置の初期条件を変えながら、軌道補正後の垂直方向エミッタンスを調べた結果を図 3.2(a) に示す。次に水平方向の軌道補正電磁石 (ベータトロン位相が約  $270^\circ$  離れている 2 個の軌道補正電磁石) を変化させたときに、ビーム位置モニターでの垂直方向の軌道の変位が最小になるような補正を円形加速器に配置されているスキュー四極電磁石でおこなうことを考える。この結果を図 3.2(b) に示す。この結果、明らかにベータトロンカップリングを小さくすれば、垂直方向エミッタンスも小さくできることがわかる。

このように、実際の加速器での垂直方向エミッタンスは、加速器の電磁石の設置位置誤差から生成される垂直方向の運動量分散関数やベータトロンカップリングか

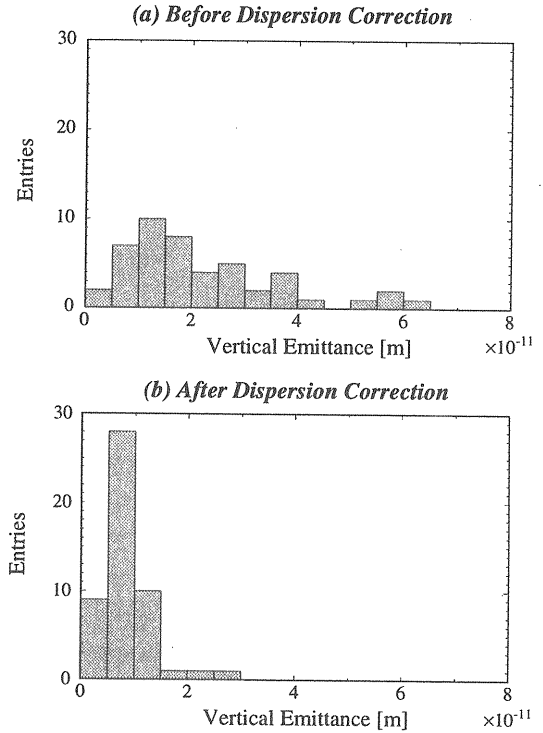


図 3.2: 垂直方向エミッタンスのシミュレーション結果。(a) カップリング補正前、(b) カップリング補正後。

ら決まっいて、その値は電磁石の設置位置誤差が無いとしたときの理想的な垂直方向エミッタンスに比べて遥かに大きな値になる。

## 4 バンチ内電子陽電子散乱

### 4.1 Coulomb散乱の集団的效果と二粒子散乱

電子陽電子ビームの中には多数の電子陽電子が存在しており、それらの電子陽電子は電場、磁場等の外場により、ビームとしてのまとまりを保っている。しかし一方で、個々の電子陽電子は全て同じ符号の電荷を持っているため互いに反発しあう。電子陽電子が低エネルギーのときは、自分以外のビーム内の電子陽電子がつくる Coulomb 場と自分自身の電荷と反発によりエミッタンス増大が引き起こされる。このような効果は空間電荷効果と呼ばれ、線形加速器の電子銃直後で特に問題になってくる。しかし、この空間電荷効果はビームエネルギーが高くなるにつれ、実験室系での電子間の距離がローレンツ因子に比例して長くなるため、その影響が小さくなっていく。

電子陽電子加速器において、このような空間電荷効果の他にも電子陽電子ビーム内での散乱がビームに影響を及ぼす効果は存在する。それは、ビーム内の電子と電子、陽電子と陽電子の2粒子間の Møller 散乱や陽電子陽電子散乱の量子的な影響である。この Møller 散乱や陽電子陽電子散乱の効果は、ビームの運動量の変化に現れる。つまり、散乱を起こす2粒子の重心系でにおいて動径方向に  $p_r$  という運動量を持った1つの粒子対に注目する。この粒子が散乱により、ビームの進行方向に  $\theta$  だけの運動量変化を受けたとき、散乱後の電子陽電子の運動量は実験室系で、

$$\begin{pmatrix} p_r \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Møller}} \begin{pmatrix} p_r \sin \theta \\ p_r \cos \theta \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Lorentz}} \begin{pmatrix} p_r \sin \theta \\ \gamma p_r \cos \theta \end{pmatrix}$$

となる。ここで、後述の議論との整合性のため、 $\theta$  は重心系におけるビームの進行方向と散乱後の粒子の運動量の方向のなす角とした(この定義では、大角度散乱は  $\theta$  が小さく、小角度散乱は  $\theta$  が大きい)。よって、散乱の前後での運動量の変化は、

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\gamma p_r \sin \theta}{\gamma m c} = \frac{p_r}{m c} \cos \theta \quad (4.1)$$

と表せる。この散乱後の運動量の変化はローレンツ因子に関係なく、動径方向の運動量のみで決定される。しかしながら、この効果もビームエネルギーが大きくなると、重心系でのビームの体積が大きくなり、Møller 散乱や陽電子陽電子散乱自身が起こる確率が低くなるため、長い間 GeV を超えるような高エネルギー電子陽電子加速器では無視されてきた。しかし、近年、第三世代の放射光加速器やリニアコライダのためのダンピングリング等の低エミッタンス加速器の設計、建設がおこなわれるようになり、再び注目を浴び出てきた。このような低エミッタンスの加速器では、ローレンツ因子は大きいエミッタンスが小さいため、電子陽電子の静止系でもビームの体積が小さくなり、Møller 散乱や陽電子陽電子散乱の散乱確率も大きくなる。

## 4.2 大角度二粒子散乱と Touschek 寿命

前節で示したように Møller 散乱や陽電子陽電子散乱のようなビーム内二粒子散乱のビームへの効果は、動径方向の運動量が粒子の進行方向へ変化することに起因する。それらの効果のうち、散乱の結果、粒子の実験室系での運動量が変化し、散乱粒子の運動量が円形加速器内の

運動量の許容値を超えてしまい、その結果としてビーム損失を起こす現象が Touschek 効果として知られている。つまり、式 (4.1) から、 $\Delta p/p$  の許容値を  $(\Delta p/p)_{\text{Acc}}$  と置くと、重心系で

$$\theta_{\text{Acc.}} = \cos^{-1} \left[ \frac{m c}{p_r} \left( \frac{\Delta p}{p} \right)_{\text{Acc.}} \right] \quad (4.2)$$

以下の角度に散乱された粒子は、円形加速器内を安定に周回することができないことになる。この効果によるビーム寿命を Touschek 寿命と呼ぶ。通常  $(\Delta p/p)_{\text{Acc.}}$  は RF bucket height か、運動量分散関数が有限のところでの横方向の位置の許容値などで決定される。また RF bucket height は、

$$\left( \frac{\Delta p_{\text{RF}}}{p} \right)^2 = \frac{2U_0}{\pi \alpha_M h p c} \left[ \sqrt{\left( \frac{e V_{\text{RF}}}{U_0} \right)^2 - 1} - \cos^{-1} \frac{U_0}{e V_{\text{RF}}} \right] \quad (4.3)$$

と表せる。ここで  $U_0$  は円形加速器1周あたりのシンクロトロン放射による粒子のエネルギー損失で、 $V_{\text{RF}}$  は加速電圧、 $h$  は harmonic number をあらわす。

重心系での Møller 散乱や陽電子陽電子散乱のような2粒子散乱の微分断面積は、散乱角を  $\psi$  と置くと、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4r_e^2}{(v_r/c)^2} \left( \frac{4}{\sin^4 \psi} - \frac{3}{\sin^2 \psi} \right) \quad (4.4)$$

となる。ここで、ビームの進行方向を  $s$ 、散乱に関わる粒子の運動量の方向(動径方向)を  $r$ 、更にこの2軸と直行する軸を  $q$  とした座標系を考える。この座標系において、任意の三次元位置は  $r$  軸とのなす角を  $\psi$  とする座標系と、 $s$  とのなす角を  $\theta$  とするような2種類の表現方法が可能である。即ち、

$$\begin{pmatrix} r \\ q \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cos \psi \\ A \sin \psi \cos \chi \\ A \sin \psi \sin \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \sin \theta \cos \varphi \\ A \sin \theta \sin \varphi \\ A \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

というような複数の位置の表し方がある。よって、 $\psi$  と  $\theta$  との関係は、

$$\cos \psi = \sin \theta \cos \varphi \quad (4.6)$$

として表せる。以上から式 (4.4)、(4.6) より、

$$\frac{d\sigma}{d\theta d\varphi} = \frac{r_e^2 \sin \theta}{4} \left( \frac{m c}{p_r} \right)^4 \left( \frac{4}{(1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi)^2} - \frac{3}{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi} \right) \quad (4.7)$$

と微分断面積を表すことができる。また、散乱によるビーム損失の断面積は散乱角度が  $\theta_{\text{Acc.}}$  以下の断面積の和で

あるので、

$$\sigma = 2 \int_0^{\theta_{\text{Acc.}}} d\theta \int_0^\pi d\varphi \frac{d\sigma}{d\theta d\varphi} = \frac{\pi r_e^2}{4} \left( \frac{mc}{p_r} \right)^4 (2u - 2 - \ln u) \quad (4.8)$$

ただし  $u$  は、

$$u = \left[ \frac{p_r}{mc} \left( \frac{\Delta p}{p} \right)_{\text{Acc.}}^{-1} \right]^2 \quad (4.9)$$

で定義され、 $\gamma p_r \geq \Delta p_{\text{Acc.}}$  でないとビーム損失は起こり得ないので  $u \geq 1$  の条件がつく。ここで一般的にビーム内の位置  $(x, y, s)$  にいる 1 個の粒子の衝突による損失の発生率は、

$$\frac{dN(x, y, z; s)}{dt} = N_0 \rho(x, y, z; s) \frac{2p_r \sigma}{m} \quad (4.10)$$

で定義される。そこで、空間のそれぞれの位置には  $N_0 \rho$  個の粒子が存在している、重心系における動径方向運動量  $p_r$  の粒子のビームライン上での位置  $s$  でのビーム寿命は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_{\text{Tau}}(p_r, s)} &= 2 \int dx dy dz \left( \frac{1}{N_0} \frac{dN}{dt} N_0 \rho(x, y, z; s) \right)_{\text{C.M.}} \\ &= \frac{4p_r N_0 \sigma}{m \gamma^2} \int dx dy dz \rho_{\text{lab.}}^2(x, y, z; s) \end{aligned} \quad (4.11)$$

となる。ここで、係数 2 は 1 回の散乱で 2 個の粒子が損失することに起因しており、 $1/\gamma^2$  は散乱確率を実験室系の粒子密度で表した際に現れる Lorentz 因子である。また、ビームの分布をガウシアン分布であると仮定すると、

$$\int dx dy dz \rho_{\text{lab.}}^2 = \frac{1}{8\pi^{3/2} \sigma_x \sigma_y \sigma_z} \equiv \frac{1}{V_{\text{beam}}} \quad (4.12)$$

であり、 $\sigma$  は式 (4.8) により定義されているため、動径方向運動量  $p_r$  の粒子のビーム寿命を表す式 (4.11) は、

$$\frac{1}{\tau_{\text{Tau}}(p_r, s)} = \frac{\pi r_e^2 N_0}{\gamma^2 m V_{\text{beam}} (\Delta p/p)_{\text{Acc.}}^4} \frac{p_r}{u^2} (2u - 2 - \ln u) \quad (4.13)$$

となる。ここでビーム中の任意の 2 粒子の相対運動  $p_r$  は一定ではなく、

$$p_r = \frac{p_{r,1} - p_{r,2}}{2}, \quad \sigma_{p_r} = \frac{\gamma m c \sigma_{r'}}{\sqrt{2}} \quad (4.14)$$

のようにビーム内の粒子の  $r'$  分布に依存している、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{p_r}} \int_{\Delta p_{\text{Acc.}}}^\infty dp_r p_r \frac{2u - 2 - \ln u}{u^2} \exp \left[ -\frac{p_r^2}{2\sigma_{p_r}^2} \right] \\ = \frac{mc (\Delta p/p)_{\text{Acc.}}^2}{\sqrt{\pi} \gamma \sigma_{r'}} F(\varepsilon_{\text{Acc.}}) \end{aligned} \quad (4.15)$$

となる。ここで  $F(\varepsilon_{\text{Acc.}})$  は、

$$F(\varepsilon_{\text{Acc.}}) = \int_1^\infty du \frac{2u - 2 - \ln u}{2u^2} \exp(-\varepsilon_{\text{Acc.}} u) \quad (4.16)$$

$$\varepsilon_{\text{Acc.}} = \frac{m^2 c^2}{2\sigma_{p_r}^2} \left( \frac{\Delta p}{p} \right)_{\text{Acc.}}^2 = \frac{1}{\gamma^2 \sigma_{r'}^2} \left( \frac{\Delta p}{p} \right)_{\text{Acc.}}^2 \quad (4.17)$$

と定義した。以上からビームライン上の位置  $s$  における Touschek 寿命は、

$$\frac{1}{\tau_{\text{Tau}}(s)} = \frac{\sqrt{\pi} r_e^2 c N_0}{\gamma^3 V_{\text{beam}} \sigma_{r'} (\Delta p/p)_{\text{Acc.}}^2} F(\varepsilon_{\text{Acc.}}) \quad (4.18)$$

と求めることができる。更に、式 (4.18) をビームライン一周にわたり平均することにより、最終的な円形加速器内での Touschek 寿命は、

$$\frac{1}{\tau_{\text{Tau}}} = \frac{\sqrt{\pi} r_e^2 c N_0}{\gamma^3 (\Delta p/p)_{\text{Acc.}}^2 C} \oint ds \frac{F(\varepsilon_{\text{Acc.}})}{V_{\text{beam}} \sigma_{r'}} \quad (4.19)$$

として求めることができる。

実際の加速器の Touschek 寿命の例として、KEK-ATF ダンピングリングを考える。KEK-ATF ダンピングリングは、水平方向エミッタンスが約  $1 \times 10^{-9}$  m と非常に小さく設計されているため、それに伴いビームの体積も非常に小さい。このことは式 (4.19) から Touschek 寿命も非常に短くなることを意味する。図 4.1 には、バンチ内粒子数が  $1 \times 10^{10}$  のときの KEK-ATF ダンピングリングの Touschek 寿命の計算値を示した。このとき、バンチ長の計算には RF 空洞電圧を  $V_{\text{RF}} = 280$  kV とした。この空洞電圧では RF bucket height は約 0.0124 であるが、縦方向の Acceptance が RF bucket height で決まらない場合もあるため、ここでは Touschek 寿命を縦方向の Acceptance の関数として示した。また  $\kappa$  は垂直方向と水平方向のエミッタンスの比を表し、縦方向の Acceptance が RF bucket height で決まっているとき、KEK-ATF ダンピングリングの目標値である  $\kappa = 0.01$  では Touschek 寿命は約 200 秒となる。

### 4.3 小角度二粒子散乱による量子励起

前節では、ビーム内での Møller 散乱や陽電子陽電子散乱のような 2 粒子散乱によりビーム損失をおこす Touschek 寿命について考えてきた。このような散乱の結果ビーム損失にまで結び付くような過程は、比較的大角度に散乱された場合である。しかし、散乱は起こすがビーム損失にまでは達しないような小角度散乱の起こる頻度は、このような大角度散乱に比べて遥かに高く、こ

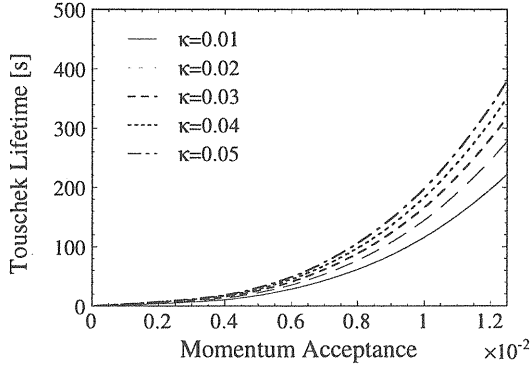


図 4.1: バンチ内粒子数が  $1 \times 10^{10}$  のときの KEK-ATF ダンピングリングの Touschek 寿命。

のような小角度散乱はビームに対して量子励起のところ  
で述べたような付加的な運動量拡がりやエミッタンスを  
生成する。ここで、式 (4.4) から  $\psi$  が小さいときの微分  
方程式は、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2 m^4 c^4}{p_r^4 \sin^4 \psi} \equiv \frac{r_e^2 m^4 c^4}{p_T^4} \quad (4.20)$$

とおける。ここで  $p_r \sin \psi \equiv p_T$  と置いた。更に、式 (4.20)  
および  $dp_T = p_r \cos \psi d\psi \simeq p_r d\psi$  より

$$d\sigma = \frac{2\pi r_e^2 m^4 c^4}{p_T^4} \sin \psi d\psi \simeq 2\pi \left[ \frac{r_e m^2 c^2}{p_r} \right]^2 \frac{1}{p_T^3} dp_T \quad (4.21)$$

となるので、動径方向運動量  $p_r$  を持つ 2 粒子間の一回  
のビーム内散乱による  $p_T$  の拡がりの平均値は、

$$\sigma_{p_T}^2 = \frac{1}{2} \frac{\int d\sigma p_T^2}{\int d\sigma} = \frac{\pi}{\sigma} \left[ \frac{r_e m^2 c^2}{p_r} \right]^2 \int dp_T \frac{1}{p_T} \quad (4.22)$$

として表せる。ところで  $p_T = p_r \sin \psi$  であるので  $p_T$  の  
取り得る範囲の上限は  $p_r$  と自明であるが下限はさほど  
自明ではない。そのため、ここではビーム内で隣接する  
粒子の重心系での平均距離よりも離れている粒子同士は  
散乱していないとする。つまり  $p_T$  を impact parameter  
 $b$  を使って、

$$p_T = \frac{r_e m^2 c^2}{p_r b} \quad (4.23)$$

と表し、この impact parameter  $b$  が

$$b > 2\sqrt{\pi(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \gamma^2 \sigma_z^2)} \simeq 2\gamma\sqrt{\pi}\sigma_z \quad (4.24)$$

の関係にある粒子は散乱していないとする。このように  
考えると  $p_T$  の取り得る範囲は、

$$\frac{r_e m^2 c^2}{2\gamma\sqrt{\pi}\sigma_z p_r} < p_T < p_r \quad (4.25)$$

となる。よって、式 (4.22) は、

$$\sigma_{p_T}^2 = \frac{\pi}{\sigma} \left[ \frac{r_e m^2 c^2}{p_r} \right]^2 \ln \left[ \frac{2\gamma\sqrt{\pi}\sigma_z p_r^2}{r_e m^2 c^2} \right] \quad (4.26)$$

となる。また、この  $p_T$  と散乱後の運動量変位  $p_{\text{intra}}$  と  
の間には統計的に、

$$\sigma_{p_{\text{intra}}}^2 = \frac{\gamma}{2} \sigma_{p_T}^2 = \frac{\gamma\pi}{2} \sigma \left[ \frac{r_e m^2 c^2}{p_r} \right]^2 \ln \left[ \frac{2\gamma\sqrt{\pi}\sigma_z p_r^2}{r_e m^2 c^2} \right] \quad (4.27)$$

の関係がある。ここで Lorentz 因子  $\gamma$  は実験室系に変  
換した際に、 $1/2$  は  $r$  軸に関して一様な散乱角をビーム  
の進行方向に射影した際に現れる。

また、中心極限定理より円形加速器を一周したとき  
の運動量拡がりは、

$$\Delta\sigma_{p_{\text{intra}}}^2 = \frac{1}{c} \oint ds \left\langle \frac{dN_{\text{Scat.}}}{dt} \sigma_{p_{\text{intra}}}^2 \right\rangle_{x,y,z,p_r} \quad (4.28)$$

と表せる。ここで  $\langle \rangle$  は平均を示す。更に、重心系で  
動径方向運動量  $p_r$  の粒子対が円形加速器の位置  $s$  で散  
乱を起こす頻度は、

$$\frac{dN_{\text{Scat.}}(x, y, z; s)}{dt} = N_0 \rho(x, y, z, s) \text{C.M.} v_r \sigma \quad (4.29)$$

$$\left\langle \frac{dN_{\text{Scat.}}(s)}{dt} \right\rangle_{x,y,z} = \frac{N_0}{8\gamma\pi^{3/2}\sigma_x\sigma_y\sigma_z} \frac{2p_r\sigma}{m} \quad (4.30)$$

であるので、

$$\left\langle \frac{dN_{\text{Scat.}}}{dt} \sigma_{p_{\text{intra}}}^2 \right\rangle_{x,y,z} = \frac{N_0 r_e^2 m^3 c^4}{8\sqrt{\pi}\sigma_x\sigma_y\sigma_z} \frac{1}{p_r} \ln \left[ \frac{2\gamma\sqrt{\pi}\sigma_z p_r^2}{r_e m^2 c^2} \right] \quad (4.31)$$

となる。ところで  $p_r$  は Touschek 寿命を考えたときと  
同様にビーム内で拡がりを持っているため、ビーム全体  
の運動量拡がりを考えるときには式 (4.31) に実際の  $p_r$   
の存在確率で重さをかけて平均するのが妥当であろう。  
また、この  $p_r$  も impact parameter を考えたときと同  
様に式 (4.25) から

$$p_r > mc\sqrt{\frac{r_e}{2\gamma\sqrt{\pi}\sigma_z}} \equiv p_{\text{min}} \quad (4.32)$$

と下限値が与えられるので、ビーム内での動径方向運動  
量  $p_r$  の分布がガウス分布であるとする、

$$\left\langle \frac{dN_{\text{Scat.}}}{dt} \sigma_{p_{\text{intra}}}^2 \right\rangle_{x,y,z,p_r} = \frac{N_0 r_e^2 m^3 c^4}{8\sqrt{\pi}\sigma_x\sigma_y\sigma_z} f(p_{\text{min}}) \quad (4.33)$$

$$f(p_{\text{min}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{p_r}} \int_{p_{\text{min}}}^{\infty} \frac{1}{p_r} \ln \left[ \frac{p_r}{p_{\text{min}}} \right]^2 \exp\left(-\frac{p_r^2}{2\sigma_{p_r}^2}\right) dp_r \quad (4.34)$$

となる。また、式 (4.14) および

$$\chi = \left[ \frac{p_r}{\gamma m c \sigma_{r'}} \right]^2, \quad \chi_{\min} = \left[ \frac{p_{\min}}{\gamma m c \sigma_{r'}} \right]^2 \quad (4.35)$$

といった変数変換により式 (4.34) は、

$$f(p_{\min}) \equiv \frac{g(\chi_{\min})}{2\gamma\sqrt{\pi}m c \sigma_{r'}} \quad (4.36)$$

$$g(\chi_{\min}) = \int_{\chi_{\min}}^{\infty} d\chi \frac{e^{-\chi}}{\chi} \ln \left[ \frac{\chi}{\chi_{\min}} \right] \quad (4.37)$$

となる。以上から式 (4.33) は、

$$\left\langle \frac{dN_{\text{Scat.}}}{dt} \sigma_{p_{\text{intra}}}^2 \right\rangle_{x,y,z,p_r} = \frac{N_0 r_e^2 m^2 c^3}{16\gamma\pi\sigma_x\sigma_y\sigma_z\sigma_{r'}} g(\chi_{\min}) \quad (4.38)$$

となり、式 (4.28) から、円形加速器を一周したときに生成される運動量拡がり<sup>2</sup>

$$\Delta \left( \frac{\sigma_{p_{\text{intra}}}}{p} \right)^2 = \frac{N_0 r_e^2 m^2 c^2}{16\gamma^3\pi} \oint ds \frac{g(\chi_{\min})}{\sigma_x\sigma_y\sigma_z\sigma_{r'}} \quad (4.39)$$

となることがわかる。また同様の議論でビーム内電子陽電子散乱により、ビームが円形加速器を一周した際に生成されるエミッタンスは、

$$\Delta \varepsilon_{x,\text{intra}} = \frac{N_0 r_e^2 m^2 c^2}{16\gamma^3\pi} \oint ds \frac{H_x g(\chi_{\min})}{\sigma_x\sigma_y\sigma_z\sigma_{r'}} \quad (4.40)$$

$$\Delta \varepsilon_{y,\text{intra}} = \frac{N_0 r_e^2 m^2 c^2}{16\gamma^3\pi} \oint ds \frac{H_y g(\chi_{\min})}{\sigma_x\sigma_y\sigma_z\sigma_{r'}} \quad (4.41)$$

であることも容易に証明できる。ここで  $H_{x,y}$  はシンクロトロン放射の説明で使った lattice parameter で、運動量分散関数が有限のところ粒子に運動量変化が起こった際にエミッタンスが生成されることを意味する。このことより、シンクロトロン放射の章で述べた量子励起の他にビーム内散乱による運動量拡がりおよびエミッタンスが生成される過程の存在がわかった。これらはシンクロトロン放射のときに考えてきた運動量拡がりやエミッタンスと違い、電磁石の配置等によるビーム光学系によってのみ決定される訳ではなく、ビーム強度等のビーム光学系以外の要素にも依存する量となっているのが大きな特徴である。

#### 4.4 平衡状態とエミッタンス増大

これまで述べてきたビーム内散乱により生成される運動量拡がりやエミッタンスと、前章に議論を進めたシンクロトロン放射による運動量拡がりやエミッタンスを統一的に考えてみよう。つまり、ビーム内散乱による量

子励起による運動量拡がりやエミッタンスの平衡値は、シンクロトロン放射の場合と同様に、放射減衰による式 (3.60)-(3.62) とビーム内散乱による量子励起を表す式 (4.39)-(4.41) から、

$$\left( \frac{\sigma_p}{p} \right)_{\text{intra}}^2 = \frac{N_0 r_e^2 m^2 c^3 \tau_s}{32\gamma^3\pi C} \oint ds \frac{g(\chi_{\min})}{\sigma_x\sigma_y\sigma_z\sigma_{r'}} \quad (4.42)$$

$$\varepsilon_{x,\text{intra}} = \frac{N_0 r_e^2 m^2 c^3 \tau_x}{32\gamma^3\pi C} \oint ds \frac{H_x g(\chi_{\min})}{\sigma_x\sigma_y\sigma_z\sigma_{r'}} \quad (4.43)$$

$$\varepsilon_{y,\text{intra}} = \frac{N_0 r_e^2 m^2 c^3 \tau_y}{32\gamma^3\pi C} \oint ds \frac{H_y g(\chi_{\min})}{\sigma_x\sigma_y\sigma_z\sigma_{r'}} \quad (4.44)$$

と求められる。また、式 (3.63)、(3.66)、(3.67) には、シンクロトロン放射により決定される平衡エミッタンスが定義されている。

$$\left( \frac{\sigma_p}{p} \right)_{\text{sync}}^2 = \frac{C_q}{I_2 J_s} \gamma^2 I_3 \quad (4.45)$$

$$\varepsilon_{x,\text{sync}} = \frac{C_q}{I_2 J_x} (\gamma^2 I_{5,x} + I_{\beta,x}) \quad (4.46)$$

$$\varepsilon_{y,\text{sync}} = \frac{C_q}{I_2 J_y} (\gamma^2 I_{5,y} + I_{\beta,y}) \quad (4.47)$$

更に、ベータトロンカップリングを  $\kappa$  と仮定すると、シンクロトロン放射およびビーム内散乱の両方の効果を考慮にいた平衡エミッタンスは、

$$\left( \frac{\sigma_p}{p} \right)^2 = \left( \frac{\sigma_p}{p} \right)_{\text{sync}}^2 + \left( \frac{\sigma_p}{p} \right)_{\text{intra}}^2 \quad (4.48)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_{x,\text{sync}} + \varepsilon_{x,\text{intra}}}{1 + \kappa} + \frac{\kappa(\varepsilon_{y,\text{sync}} + \varepsilon_{y,\text{intra}})}{1 + \kappa} \quad (4.49)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\kappa(\varepsilon_{x,\text{sync}} + \varepsilon_{x,\text{intra}})}{1 + \kappa} + \frac{\varepsilon_{y,\text{sync}} + \varepsilon_{y,\text{intra}}}{1 + \kappa} \quad (4.50)$$

として求められる。またビーム内散乱の平衡エミッタンスに使われている項  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\sigma_{r'}$ 、 $\sigma_z$  は、

$$\sigma_x = \sqrt{\beta_x \varepsilon_x + \eta_x \left( \frac{\sigma_p}{p} \right)^2} \quad (4.51)$$

$$\sigma_y = \sqrt{\beta_y \varepsilon_y + \eta_y \left( \frac{\sigma_p}{p} \right)^2} \quad (4.52)$$

$$\sigma_{x'} = \sqrt{\frac{\varepsilon_x [\beta_x \varepsilon_x + \{\eta_x^2 + (\alpha_x \eta_x + \beta_x \eta_x')^2\} (\sigma_p/p)^2]}{\beta_x (\beta_x \varepsilon_x + \eta_x^2 (\sigma_p/p)^2)}} \quad (4.53)$$

$$\sigma_{y'} = \sqrt{\frac{\varepsilon_y [\beta_y \varepsilon_y + \{\eta_y^2 + (\alpha_y \eta_y + \beta_y \eta_y')^2\} (\sigma_p/p)^2]}{\beta_y (\beta_y \varepsilon_y + \eta_y^2 (\sigma_p/p)^2)}} \quad (4.54)$$

$$\sigma_{r'} = \sqrt{\sigma_{x'}^2 + \sigma_{y'}^2} \quad (4.55)$$

$$\sigma_z = \frac{c \alpha_M \sigma_p}{2\pi f_s p} \quad (4.56)$$

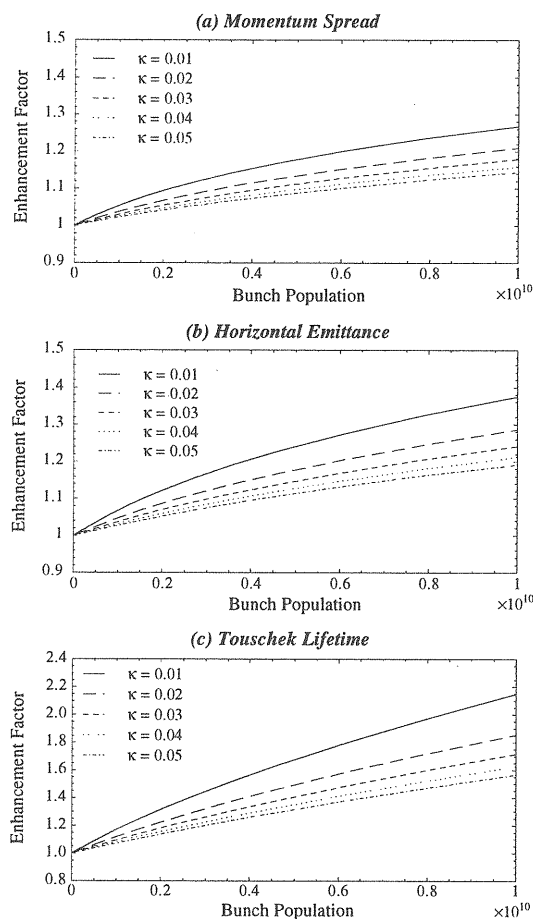


図 4.2: KEK-ATF ダンピングリングのビーム内散乱による (a) 運動量拡がり、(b) 水平方向エミッタンス、(c)Touschek 寿命の Enhancement 因子。

とそれぞれ  $\sigma_p/p$ ,  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  の関数であるので、運動量拡がりの平衡状態、平衡エミッタンスを求める式 (4.48)-(4.50) は独立な式ではなく、 $\sigma_p/p$ ,  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  は式 (4.48)-(4.50) の連立方程式の解として求められる。

また式 (4.42)-(4.44) から、ビーム内電子陽電子散乱により生成される運動量拡がり、エミッタンスはビーム強度の関数である。更に、その特性はビーム強度にほぼ比例するので (ビームサイズも同時に変化するので正確には比例ではない)、ビーム強度が微弱のときにはシンクロトロン放射で決まるエミッタンスで平衡エミッタンスは決まり、ビーム強度が強くなるにつれ、平衡エミッタンスはビーム強度と共に増大することがわかる。

ここで再び KEK-ATF ダンピングリングを例にとり計算をしてみることにする。ここでは簡単のために、垂直方向エミッタンスはベータトロンカップリングのみで

決まるとした。つまり垂直方向の運動量分散関数は無いと仮定した。この仮定は実際の場合と違うが、実際の垂直方向の運動量分散関数は電磁石の設置誤差等により規定されるため、実際の垂直方向の運動量分散関数を知るためには、実際の電磁石のアライメントの情報をより精度でわかっていないければならない。このことはベータトロンカップリングに関しても同様である。しかし、ここでは定性的な情報を知るための一つのモデルとして、垂直方向の運動量分散関数が無く、ベータトロンカップリングが有限の値を持つといった場合を考える。

この仮定のもとでは、 $\kappa$  は垂直方向と水平方向のエミッタンス比となるので、ビーム内散乱の影響を知るためには式 (4.48) と式 (4.49) 2式からなる連立方程式を解けば良いことになる。連立方程式の解として求めた KEK-ATF ダンピングリングのビーム内散乱による運動量拡がり、水平方向エミッタンスに対するシンクロトロン放射により決定されるエミッタンスからの Enhancement 因子を図 4.2 (a),(b) に示す。計算の結果、 $\kappa$  が小さい程、バンチの体積が小さくなるため、ビーム内散乱の影響が大きくなることがわかる。

またバンチの体積、エミッタンスがビーム内散乱により大きくなると、式 (4.19) から Touschek 寿命もまた長くなることがわかる。この Touschek 寿命に関する Enhancement 因子も図 4.2(c) に併せて示す。この図 4.2(c) から  $\kappa = 0.01$  でバンチ内の粒子数が  $1 \times 10^{10}$  のとき Touschek 寿命は前節で計算した値の約 2 倍になることがわかる。

## 5 残留ガス散乱

### 5.1 代表的な残留ガス散乱

ビームが円形加速器を周回する際に、シンクロトロン放射、ビーム内電子陽電子散乱と並び残留ガスとの散乱もビームに大きな影響を及ぼす。この残留ガスの散乱の代表的な過程として、Rutherford 散乱、Møller 散乱 (陽電子の場合 Bhabha 散乱)、制動放射が挙げられる。

通常、残留ガス散乱を考える際には定常的に存在する残留ガスとの散乱過程を考える。電子と陽電子が同一のリングを周回するコライダーや、低電流の電子または陽電子蓄積リングの場合は、この過程のみを考えればよい。しかし、放射光リングのように大電流の電子または陽電子のみが円形加速器を周回するような加速器の場合、イオン化された残留ガスがビーム軌道上に引き寄せ



られ、残留ガスとの散乱の効果が増大し、時にはビーム不安定性を引き起こす。また、シンクロトン放射の光が真空チェンバーに当たり、光電効果で真空チェンバーから発生する電子がビーム軌道に電子雲をつくる。この電子雲とビーム中の陽電子の Bhabha 散乱が大きな問題になってくる。しかしながら、これらの不安定性に関する内容は本稿の内容を超えるので、ここでは触れず、本稿では定常的に存在する残留ガスとの散乱過程のみを考えていく。

## 5.2 残留ガス散乱によるビーム寿命

ビーム損失を引き起こす代表的な残留ガスとの散乱過程 Rutherford 散乱、Møller 散乱(陽電子の場合 Bhabha 散乱)、制動輻射によるビーム損失の散乱断面積を  $\sigma_R$ ,  $\sigma_M$ ,  $\sigma_B$  とおくと、ビーム寿命は、

$$\frac{1}{\tau_{\text{gas}}} = -\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = cn(\sigma_R + \sigma_M + \sigma_B) \quad (5.1)$$

と表せる [7]。また、ここで  $n$  は残留ガス密度を表し、ビームラインの真空度を使って書き表すと、

$$n [\text{m}^{-3}] = 2.42 \times 10^{20} P [\text{Pa}] \quad (5.2)$$

となる。それでは以下に順をおって、それぞれの散乱過程の散乱断面積を考えていくことにしよう。

### 5.2.1 Rutherford 散乱

まず、電子ビームの Rutherford 散乱を考える。Rutherford 散乱は歴史的には Rutherford が金の箔膜に  $\alpha$  線を当て、 $\alpha$  線の散乱角度の分布から原子の内部構造を解明したところから、その名前が付けられた。これが現在では、原子核と荷電粒子との散乱を一般的に Rutherford 散乱と呼ぶようになってきている。今回考える Rutherford 散乱は、ビーム中の電子陽電子と残留ガスの原子核との散乱のことを指す。

Rutherford 散乱の取り扱いには実験室系での弾性散乱として取り扱う。その理由はガス中の原子核の重さにある。代表的な残留ガスである CO を例にとると、その静止質量は約  $26 \text{ GeV}/c^2$  と非常に大きい。このため、一般的な電子陽電子ビームの場合、散乱は実験室系における弾性散乱として取り扱っても差し支えない。よって、Rutherford 散乱による主な散乱粒子への影響は、粒子の軌道を変えることである。

電荷量  $Z$  の原子核と電子陽電子の Rutherford 散乱の微分断面積は、

$$\frac{d\sigma_R}{d\theta} = \pi \left( \frac{r_e Z}{\gamma} \right)^2 \cot^3 \frac{\theta}{2} \quad (5.3)$$

で与えられる。よって、散乱角が  $\theta_0$  以上の全散乱断面積は、

$$\begin{aligned} \sigma_R &= \pi \left( \frac{r_e Z}{\gamma} \right)^2 \int_{\theta_0}^{\pi} d\theta \cot^3 \frac{\theta}{2} \\ &= \pi \left( \frac{r_e Z}{\gamma} \right)^2 \left( \cot^2 \frac{\theta_0}{2} + 2 \ln \left| \sin \frac{\theta_0}{2} \right| \right) \\ &\simeq \frac{4\pi r_e^2 Z^2}{\gamma^2} \frac{1}{\theta_0^2} \end{aligned} \quad (5.4)$$

となる。ここで、円形加速器の横方向の Acceptance  $A_x$ ,  $A_y$  を使って、ビーム損失を起こさない水平方向の散乱角の制限値を  $\theta_x = \sqrt{A_x/\beta_x}$ 、垂直方向の制限値を  $\theta_y = \sqrt{A_y/\beta_y}$  とおくと、Rutherford 散乱によるビーム損失の全散乱断面積はビームライン上の位置  $s$  において、

$$\sigma_R(s) = \frac{4\pi r_e^2 Z^2}{\gamma^2} \frac{1}{2} \left[ \frac{\beta_x(s)}{A_x} + \frac{\beta_y(s)}{A_y} \right] \quad (5.5)$$

となる。ここで、係数  $1/2$  は、水平、垂直各方向に射影をとるために乗じた。よって、円形加速器全体を平均すると、最終的な Rutherford 散乱によるビーム損失の全散乱断面積が、

$$\sigma_R = \frac{2\pi r_e^2 Z^2}{\gamma^2 C} \oint ds \left[ \frac{\beta_x}{A_x} + \frac{\beta_y}{A_y} \right] \quad (5.6)$$

と求めることができる。

### 5.2.2 Møller 散乱、Bhabha 散乱

次に以下の二つの条件下で Møller 散乱、Bhabha 散乱を考えることにしよう。1) 散乱の後の電子陽電子の運動量変化は微小である(通常の加速器では、運動量が 1-2% 変化すると、その粒子は加速器の許容値を超える)。2) ビームエネルギーは非常に高いとする ( $\gamma \gg 1$ )。これらの条件下では、Møller 散乱、Bhabha 散乱の微分断面積は近似的に、

$$d\sigma_m = \frac{2\pi r_e^2 mc}{q^2} dq \quad (5.7)$$

と表せる。ここで  $q$  は入射電子陽電子のエネルギー損失を示す。

また実験室系で考えると、この散乱はビームのエネルギーを持った電子陽電子と静止している電子との散乱である。しかし、散乱する2粒子の重心系では、

$$\gamma_{\text{C.M.}} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} \approx \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \quad (5.8)$$

の Lorentz boost をして考える必要があることを頭に入れてなければならない。重心系での散乱角を  $\theta$  とおくと、散乱後の電子陽電子の運動量の変位、実験室系での散乱角はそれぞれ、

$$q \approx -\frac{\gamma mc \theta^2}{4}, \quad r' \approx \theta \sqrt{\frac{1}{2\gamma}} \quad (5.9)$$

となる。このように Møller 散乱、Bhabha 散乱の場合、Rutherford 散乱と違い、ターゲットとする電子の質量が小さいため、散乱により角度と運動量の両方が変化する。そして、上記の  $q$ 、 $r'$  のいずれかが加速器の許容値を超えたときにビーム損失が起こる。つまり、加速器のパラメーターによって、ビーム損失に関する許容値の制限の取り方が変わってくる。

まず運動量の許容値 (RF bucket height か運動量分散関数の有限なところでの横方向の Acceptance のどちらか小さい方) によりビーム損失を起こす場合を考える。つまり、

$$\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_{\text{Acc.}} < \min_{i=x,y} \sqrt{\frac{\gamma A_i}{2}} \frac{\nu_i}{C} \quad (5.10)$$

の時を考える。上式で  $\nu_{x,y} = \oint ds(1/\beta_{x,y})$  は、betatron tune である。このときのビーム損失の全断面積は式 (5.28) より、

$$\sigma_M = Z\sigma_m = Z \int_{\Delta p_{\text{Acc.}}}^p dq \frac{2\pi r_e^2 mc}{q^2} = \frac{2\pi r_e^2 Z}{\gamma} \frac{1}{(\Delta p/p)_{\text{Acc.}}} \quad (5.11)$$

となる。ここで、 $Z$  個の電子が一個の残留分子には含まれているので、一残留分子あたりの Møller 散乱によるビーム損失の散乱断面積を  $\sigma_M$  として表した。また、散乱による角度の変化が横方向の Acceptance の許容値を超えることによりビーム損失が起こる場合、ビーム損失を起こす運動量の下限値は、

$$q_{\min} = \frac{\gamma mc \nu_i}{C} \sqrt{\frac{\gamma A_i}{2}} \quad (i = x, y) \quad (5.12)$$

である。また、この場合は Rutherford 散乱のときと同様に  $x, y$  それぞれの平面への射影となるので、係数  $1/2$  をかけて、

$$\sigma_M = \frac{\sqrt{2}\pi r_e^2 Z C}{\gamma^{3/2}} \left[ \frac{1}{\nu_x \sqrt{A_x}} + \frac{1}{\nu_y \sqrt{A_y}} \right] \quad (5.13)$$

と散乱断面積を表すことができる。ここで、式 (5.6) と式 (5.13) が  $Z = 1$  としたときに一致しないのは Rutherford 散乱は完全に弾性散乱であるとし、Møller 散乱、Bhabha 散乱は散乱される2粒子の重心が boost しているとしたからで、これらはターゲットとなる原子核と電子の質量の違いから起因するものであることを再度ここに断りおく。

### 5.2.3 制動輻射

更に残留ガスとの散乱で、ビーム損失と結び付く過程に制動輻射がある。この過程では制動輻射による光子の放出に伴った電子の運動量の減少がビーム損失の要因となる。よって、ビーム損失は運動量の許容値のみに依存する。ビーム内の電子陽電子と電荷量  $Z$  の粒子との間の制動輻射で運動量  $k$  の光子を放出する過程の微分断面積は近似的に、

$$d\sigma_b(Z) = 4\alpha r_e^2 Z^2 \ln \frac{183}{Z^{1/3}} \left[ \frac{4}{3} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{p} \right) + \frac{k}{p^2} \right] dk \quad (5.14)$$

と表せる。ここで  $\alpha$  は微細構造定数で、運動量が  $\Delta p_{\text{Acc.}}$  以上の光子が放出されたときビーム損失が起こるとすると、ビーム損失が起こる散乱断面積は、

$$\sigma_b(Z) = \int_{\Delta p_{\text{Acc.}}}^p dk \approx 4\alpha r_e^2 Z^2 \ln \frac{183}{Z^{1/3}} \left[ \frac{4}{3} \ln \frac{p}{\Delta p_{\text{Acc.}}} - \frac{5}{6} \right] \quad (5.15)$$

となる。また、残留ガスは電荷量  $Z$  の原子核と  $Z$  個の電子から構成されているので、一個の残留ガスに対する制動輻射によるビーム損失の散乱断面積は、

$$\begin{aligned} \sigma_B &= \sigma_b(Z) + Z\sigma_b(1) \\ &= 4\alpha r_e^2 \left[ Z^2 \ln \frac{183}{Z^{1/3}} + Z \ln 183 \right] \left[ \frac{4}{3} \ln \frac{p}{\Delta p_{\text{Acc.}}} - \frac{5}{6} \right] \end{aligned} \quad (5.16)$$

として表すことができる。

### 5.2.4 KEK-ATF での残留ガス散乱のビーム寿命

現在、KEK-ATF ダンピングリングはビームエネルギー 1.3 GeV で運転している。また、簡単化して  $\sqrt{\langle \beta_{x,y} \rangle} = 3 \text{ m}^{1/2}$  として計算をすることにする。一方、残留ガスの成分としては、一般に水素、窒素、CO 等が多く含まれている。ここでも、単純化して1個の残留ガスは  $Z=7$  の原子核が2個、電子が14個含まれている1種類のガスのみで構成されていると想定する。このような条件の下で計算した残留ガス散乱によるビーム寿命を図 5.1

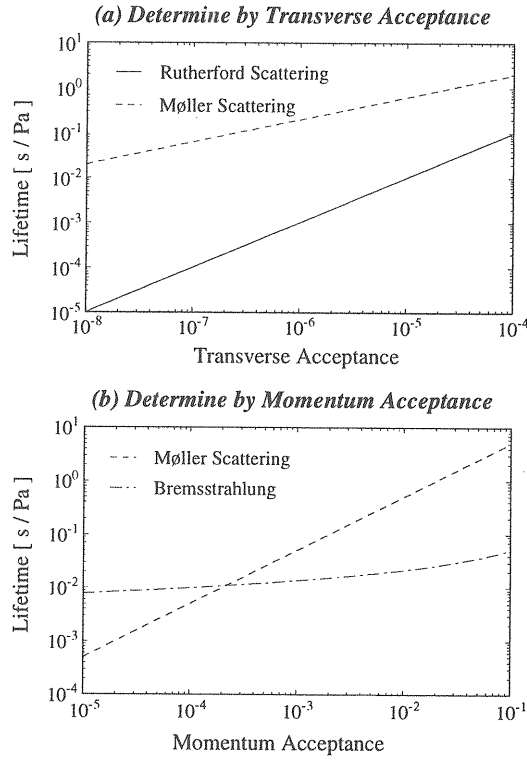


図 5.1: KEK-ATF ダンピングリングにおける残留ガス散乱によるビーム寿命。(a) 寿命が横方向の Acceptance により規定されるプロセス。(b) 寿命が運動量の許容値で規定されるプロセス。

に示す。代表的な運動量の許容値や横方向 Acceptance は  $\Delta p/p_{\text{Acc.}} = 0.01$ 、 $A_{x,y} = 10^{-6}\text{m}$  程度であるため、 $1 \times 10^{-6}$  程度の真空度では、最も影響の大きい過程である Rutherford 散乱の場合でもビーム寿命は約 1000 秒とビーム内電子陽電子散乱のときに計算したビーム寿命よりも長くなる。つまり KEK-ATF ダンピングリングの場合は、ビーム寿命の立場だけでは  $1 \times 10^{-6}$  程度の真空度で構わないことになる。しかし、一般的な放射光リングでは数十時間のビーム寿命を要求されているため、より高い真空度が要求されるのが常である。また KEK-ATF ダンピングリングの場合でも後述の議論で示されるように、エミッタンスへの影響を考えると、ビーム寿命の観点から考えた真空度よりも更に高い真空度で加速器を運転することが望ましくなる。

### 5.3 中心極限定理によるエミッタンス評価

次にビーム内散乱の時と同様に小角度散乱の場合を考えよう。前述のように Rutherford 散乱は電子陽電子の角度に変化を与え、Møller 散乱、Bhabha 散乱は電子陽電子の角度と運動量の双方に変化を与える。また、制動輻射は光子を放出するときの  $1/\gamma$  の拡がりを見れば、運動量のみに変化をあたえる。よって、残留ガス散乱による量子励起でのエミッタンス、および、運動量拡がりの変化率は中心極限定理により、

$$\frac{d\varepsilon_{\text{ex},i}}{dt} = cn \left[ \frac{\langle \beta_i \rangle}{2} (\sigma_R \sigma_{\theta_R}^2 + \sigma_M \sigma_{\theta_M}^2) + \langle H_i \rangle \left\{ \sigma_M \left( \frac{\sigma_{pM}}{p} \right)^2 + \sigma_B \left( \frac{\sigma_{pB}}{p} \right)^2 \right\} \right] \quad (5.17)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\sigma_{p_{\text{ex}}}}{p} \right)^2 = cn \left[ \sigma_M \left( \frac{\sigma_{pM}}{p} \right)^2 + \sigma_B \left( \frac{\sigma_{pB}}{p} \right)^2 \right] \quad (5.18)$$

となる。ここで  $\sigma_R, \sigma_M, \sigma_B$  は、ビーム損失を起こさない程度の散乱を起こす散乱断面積で、ビーム損失を議論した前節の断面積とは違うものである。また、散乱による角度変化が  $i = x, y$  それぞれの方向のエミッタンスに与える影響は、それぞれの平面への射影であるので係数  $1/2$  を乗じてある。更に、シンクロトロン放射による放射減衰によるエミッタンスおよび運動量拡がりの変化率は、

$$\frac{d\varepsilon_{\text{damp},i}}{dt} = -\frac{2}{\tau_i} \varepsilon_{i,\text{gas}} \quad (5.19)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\sigma_{p_{\text{damp}}}}{p} \right)^2 = -\frac{2}{\tau_s} \left( \frac{\sigma_{p_{\text{gas}}}}{p} \right)^2 \quad (5.20)$$

であるため、最終的に残留ガス散乱によるエミッタンスおよび運動量拡がりは中心極限定理により、

$$\varepsilon_{i,\text{gas}} = \frac{cn\tau_i}{2} \left[ \frac{\langle \beta_i \rangle}{2} (\sigma_R \sigma_{\theta_R}^2 + \sigma_M \sigma_{\theta_M}^2) + \langle H_i \rangle \left\{ \sigma_M \left( \frac{\sigma_{pM}}{p} \right)^2 + \sigma_B \left( \frac{\sigma_{pB}}{p} \right)^2 \right\} \right] \quad (5.21)$$

$$\left( \frac{\sigma_{p_{\text{gas}}}}{p} \right)^2 = \frac{cn\tau_s}{2} \left[ \sigma_M \left( \frac{\sigma_{pM}}{p} \right)^2 + \sigma_B \left( \frac{\sigma_{pB}}{p} \right)^2 \right] \quad (5.22)$$

となることがわかる。

では次に、それぞれの散乱過程を個別に考えていこう。まず Rutherford 散乱について考える。小角度散乱のときの Rutherford 散乱の微分断面積は式 (5.3) より、

$$d\sigma_R = \frac{8\pi r_e^2 Z^2}{\gamma^2} \frac{1}{\theta^3} d\theta \quad (5.23)$$

であった。よって  $\sigma_R \sigma_{\theta_R}^2$  は、

$$\sigma_R \sigma_{\theta_R}^2 = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} d\theta \theta^2 = \frac{8\pi r_e^2 Z^2}{\gamma^2} \ln \frac{\theta_{\max}}{\theta_{\min}} \quad (5.24)$$

となる。ここで  $\theta_{\max}$  はビーム損失をおさない限界の角度、 $\theta_{\min}$  は散乱を起こしたとみなす最小散乱角で、原子内電子の原子核への電場シールドを考えると、原子半径程度の物体による電子の回折角程度を最小散乱角と考えることができる。よって、

$$\theta_{\max} \approx \sqrt{\frac{A_i}{\langle \beta_i \rangle}} \quad (5.25)$$

$$\theta_{\min} \approx \frac{\hbar Z^{1/3}}{pa_0}, \quad a_0 = 5.29 \times 10^{-11} \text{m} \quad (5.26)$$

となり、式 (5.25)、(5.26) を式 (5.24) に代入することにより Rutherford 散乱に関して、

$$\sigma_R \sigma_{\theta_R}^2 = \frac{8\pi r_e^2 Z^2}{\gamma^2} \ln \frac{pa_0 \sqrt{A_i}}{\hbar Z^{1/3} \langle \beta_i \rangle} \quad (5.27)$$

となる。次に Møller 散乱、Bhabha 散乱について考える。Møller 散乱、Bhabha 散乱の微分断面積は、式 (5.28) より、

$$d\sigma_M = \frac{2\pi r_e^2 mcZ}{q^2} dq \quad (5.28)$$

であった。また、ここではビーム損失は運動量の許容値で決まる場合について考える (横方向の Acceptance で決まる場合も上限値が変わるだけで同様の取り扱いができる)。このとき、

$$\sigma_M \left( \frac{\sigma_{pR}}{p} \right)^2 = \frac{2\pi r_e^2 Z \Delta p_{\text{Acc.}}}{\gamma^3 p} \quad (5.29)$$

となる。また、式 (5.9) から実験室系での散乱角度と入射電子陽電子が失う運動量との間には、

$$q \approx \frac{\gamma^2 mc \theta^2}{2} \quad (5.30)$$

という関係があり、最小散乱角のときの入射電子陽電子が失う運動量は、

$$q_{\min} \approx \frac{\gamma^2 mc}{2} \left( \frac{\hbar Z^{1/3}}{pa_0} \right)^2 = \frac{\gamma^2 mc \hbar^2 Z^{2/3}}{2p^2 a_0^2} \quad (5.31)$$

となる。ここで  $\theta_{\min}$  は Rutherford 散乱のときと同様に考えた。よって、

$$\sigma_M \sigma_{\theta_M}^2 = \int_{q_{\min}}^{\Delta p_{\text{Acc.}}} d\sigma_M \theta^2 = \frac{4\pi r_e^2 Z}{\gamma^2} \ln \left( \frac{2p^2 a_0^2 \Delta p_{\text{Acc.}}}{\gamma \hbar^2 Z^{2/3} p} \right) \quad (5.32)$$

となる。最後に制動輻射の場合は式 (5.14) より、

$$\frac{d\sigma_B}{dk} = 4\alpha_M r_e^2 \left[ Z^2 \ln \frac{183}{Z^{1/3}} + Z \ln 183 \right] \left[ \frac{4}{3} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{p} \right) + \frac{k}{p^2} \right] \quad (5.33)$$

と微分断面積が与えられているので、

$$\sigma_B \left( \frac{\sigma_{pR}}{p} \right)^2 \approx \frac{8\alpha_M r_e^2}{3} \left[ Z^2 \ln \frac{183}{Z^{1/3}} + Z \ln 183 \right] \left( \frac{\Delta p_{\text{RF}}}{p} \right)^2 \quad (5.34)$$

として表すことができる。

ここで、実際の加速器に対する影響を KEK-ATF ダンピングリングを例にとり考えることにする。KEK-ATF ダンピングリングのパラメーターを先の例で示したように、簡単化して  $\sqrt{\langle \beta_{x,y} \rangle} = 3 \text{ m}^{1/2}$ 、ビームエネルギー 1.3 GeV とおく。また、代表的な運動量の許容値や横方向 Acceptance として  $\Delta p/p_{\text{Acc.}} = 0.01$ 、 $A_{x,y} = 10^{-6} \text{m}$  とする。更に、残留ガス成分としても、1 個の残留ガスは  $Z=7$  の原子核が 2 個、電子が 14 個含まれている 1 種類のガスのみで構成されていると想定すると、

$$\sigma_R \sigma_{\theta_R}^2 = 1.25 \times 10^{-32} \text{ m}^2 \quad (5.35)$$

$$\sigma_M \sigma_{\theta_M}^2 = 2.71 \times 10^{-33} \text{ m}^2 \quad (5.36)$$

$$\sigma_M \left( \frac{\sigma_{pM}}{p} \right)^2 = 1.08 \times 10^{-36} \text{ m}^2 \quad (5.37)$$

$$\sigma_B \left( \frac{\sigma_{pB}}{p} \right)^2 = 8.00 \times 10^{-33} \text{ m}^2 \quad (5.38)$$

となる。これを式 (5.21)、(5.22) に代入すると、

$$\varepsilon_{x,\text{gas}} [\text{m}] = 4.96 \times 10^{-4} P [\text{Pa}] \quad (5.39)$$

$$\varepsilon_{y,\text{gas}} [\text{m}] = 7.44 \times 10^{-4} P [\text{Pa}] \quad (5.40)$$

$$\left( \frac{\sigma_{p,\text{gas}}}{p} \right)^2 = 5.81 \times 10^{-4} P [\text{Pa}] \quad (5.41)$$

と残留ガス散乱による影響がわかる。ここで、計算には  $\langle H_x \rangle = 0.003 \text{ m}$ 、 $\langle H_y \rangle = 0 \text{ m}$ 、 $\tau_x = 20 \text{ ms}$ 、 $\tau_y = 30 \text{ ms}$ 、 $\tau_s = 20 \text{ ms}$  といった値を使った。また、KEK-ATF ダンピングリングのパラメーターは  $\varepsilon_x = 1 \times 10^{-9} \text{m}$ 、 $\varepsilon_y = 1 \times 10^{-11} \text{m}$ 、 $\Delta p/p < 10^{-3}$  であるので、 $10^{-6} - 10^{-7} \text{Pa}$  程度の加速器の真空度では運動量拡がりには残留ガス散乱の影響は大きく反映せず、エミッタンス、特に垂直方向エミッタンスに大きな影響を与えることがわかる。また Rutherford 散乱による入射電子陽電子の角度変化がエミッタンスに大きな影響を与えることもわかる。

## 5.4 残留ガス散乱による分布関数の変化

前節では、シンクロトロン放射やビーム内散乱における量子励起と同様の方法で、中心極限定理を用いて残留ガス散乱により生成されるエミッタンスや運動量拡がりを評価した。その結果、垂直方向エミッタンスには残留ガス散乱の影響が強く現れ、その原因として Rutherford 散乱が挙げられることが導かれた。しかし、式 (5.27) から、残留ガス散乱により生成される垂直方向エミッタンスには、垂直方向の Acceptance が影響することがわかる。つまり、このことは残留ガス散乱の場合是一回一回の散乱により、垂直方向の Courant-Snyder Invariant が Acceptance と比較できる位の大きな変化を生じていることを示唆している。

また残留ガス散乱の場合、散乱が起こる頻度もシンクロトロン放射やビーム内散乱に比べて非常に少ない。Rutherford 散乱の場合、ビーム損失にまで至らないような小角度散乱を起こす頻度は、式 (5.23) より

$$f = cn \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} d\sigma_R \simeq \frac{4\pi r_e^2 Z^2 cn}{\gamma^2} \frac{1}{\theta_{\min}^2} \quad (5.42)$$

となる。ちなみに先の KEK-ATF ダンピングリングのパラメータを使い、この頻度を計算すると、

$$f [\text{Hz}] = 3.66 \times 10^6 P [\text{Pa}] \quad (5.43)$$

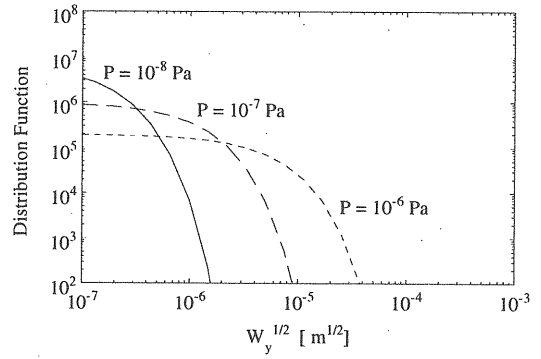
となり、 $1 \times 10^{-6}$  Pa 程度の真空度で、1 個の粒子は 1 秒間に数回程度しか散乱を起こさない計算になる。

シンクロトロン放射やビーム内散乱の場合、個々の量子励起は比較的小さいが、その散乱回数が多いため、結果としてエミッタンスや運動量拡がりが生成されると考えた。それに対して残留ガス散乱の場合、散乱の頻度は低いが 1 回の散乱での変化量が大きいので、結果的に  $\langle W_y \rangle$  が変化する。このようにして生成された垂直方向の Courant-Snyder Invariant の分布は、シンクロトロン放射やビーム内散乱により決まるエミッタンスよりも遥かに裾の広い分布になっている。このような場合に、前節のように中心極限定理を用いてエミッタンスや運動量拡がりを評価するのは適当では無いと考えられる。

そこで最後に、残留ガス散乱による Courant-Snyder Invariant の分布を紹介しよう。ここでも残留ガス散乱の代表して、最も影響の大きい Rutherford 散乱による垂直方向の Courant-Snyder Invariant の分布について紹介する。Cambell の定理より Courant-Snyder Invariant の分布は、

$$\psi(\sqrt{W_y}) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \varphi(\omega) e^{-i\omega\sqrt{W_y}} \quad (5.44)$$

(a) Beam Distribution by Beam-gas Scattering



(b) Effect on the Beam Profile

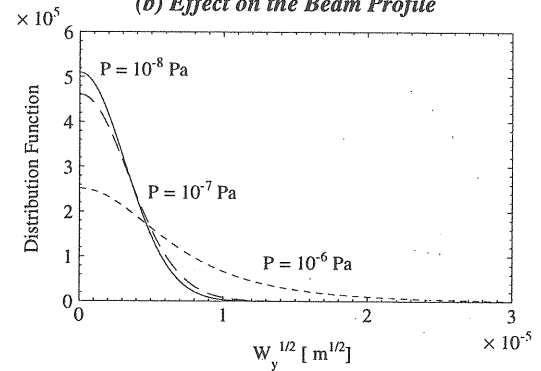


図 5.2: KEK-ATF ダンピングリングにおける残留ガス散乱のビームプロファイルへの影響。(a) 残留ガス散乱自体で発生するビームプロファイル。(b) 垂直方向エミッタンスが  $1 \times 10^{-11}$  m のときの残留ガス散乱によるビームプロファイルの変化。

$$\frac{\ln \varphi(\omega)}{f \tau_y \theta_{\min}^2} = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \frac{1}{\theta^3} \int_0^{\theta} d\varphi \frac{J_0^2(\omega < \beta_y > \varphi/2) - 1}{\varphi} \quad (5.45)$$

と表せる。ここで KEK-ATF ダンピングリングに対する計算結果を図 5.2 にしめす。ビームの中心部の分布を考えると、 $10^{-7}$  Pa 程度の真空度ではあまり影響が無く、 $10^{-6}$  Pa 程度の真空度でエミッタンスが 2 倍程度に膨らむ様子が見える。一方、中心極限定理を用いて計算した結果では、 $10^{-7}$  Pa の真空度で、垂直方向エミッタンスは  $7.44 \times 10^{-11}$  m と、およそ 7 倍になってしまう結果であった。これらの相違はエミッタンスをビームの分布関数の 2 次のモーメントから計算したときに、非常に広いビームの裾野がエミッタンスに多大な影響を与えることから起こると考えられる。

## 6 まとめ

ビーム内電子陽電子散乱や残留ガス散乱のエミッタンスへの影響をシンクロトロン放射と同様に中心極限定理を用いて考えることができる。その結果、ビーム内電子陽電子散乱ではエミッタンスは加速器のパラメーターだけではなく、ビーム強度等のビーム自身のパラメーターに依存することがわかる。また残留ガス散乱では中心極限定理を用いて考えると、低エミッタンス加速器ではかなりの超高真空にしなければその影響が大きいという結論が導き出せる。しかし、残留ガス散乱により散乱される粒子の分布関数を計算してみると、これらの影響の多くは、大角度に散乱された粒子によるものであり、その中心部分のみを考えれば、その影響は中心極限定理で考えていた程大きくはないことがわかる。

## 謝辞

本稿を通して、再度、加速器に関する勉強をする機会ができました。このような機会を頂いた木原加速器施設長および鎌田進教授に感謝いたします。また、本稿執筆に関わる時間を頂いた浦川順治助教授、早野仁司助教授をはじめとする KEK-ATF 全スタッフ、本稿を書くにあたり様々な助言を頂いた久保浄氏に、この場を借りて感謝を申し上げます。

## 参考文献

- [1] 大西幸喜, “単粒子力学”, OHO 2000.
- [2] 鎌田 進, “ビーム物理学入門”, OHO '97.
- [3] 黒田 茂, “電磁石の磁場精度と設置精度”, OHO '91.
- [4] K. Kubo *et al.*, *Proc. of the 1999 PAC* (1999) 3432.
- [5] T. Raubenheimer, *Particle Accelerator* **36** (1991) 75.
- [6] J. Le Duff, *CERN* 95-06 (1995) 573.
- [7] J. Le Duff, *Nucl. Instr. Meth.* **A239** (1985) 83.
- [8] T. Raubenheimer, *KEK Report* 92-7 (1992).