

はじめに

当初、この講義の題名は「リニアコライダーにおけるビームインスタビリティ」となっていたが、内容に合うように変えさせていただいた。しかしより正確に内容を表せば、「高エネルギー、低エミッタンスの長い電子リニアックでの加速管の wakefield の影響」ということになる。リニアコライダーにおいては、wakefield はリニアック以外に、ダンピングリング内で大きな問題となりうる。しかし、「KEKB のビームインスタビリティ」の講義で、円形加速器のインスタビリティは詳しく述べられると思うので、ここでの議論はリニアックに限る。コリメーター等の wakefield も重要と思われるが、(準備の時間の問題もあり) あまり話を広げず加速管の wakefield のみに集中することにした。

まず1章では、wakefield、wakefunction とは何か、又、多重極展開等について述べる。

2章では、2粒子モデルを使って、wakefield がある場合のビームの振る舞いを調べる。この結果は、3、4章でも使われる。

3章ではバンチ内で働く短距離の wakefield の影響を、4章では、バンチ間で働く長距離の wakefield の影響を調べる。ここでは、X-バンドのリニアコライダーの設計パラメーターを使った定量的議論もする。

さきに「長い電子リニアック」と書いたが、これは、「加速管が多数あり、統計的取扱いが意味を持つ」ということである。本項でも「エミッタンス増大量の期待値」等を議論している。

2～4章では、ビーム振動の発生源として、「入射エラー」と「加速管のアライメントエラー」にわけて、各々について、wakefield の影響を議論している。リニアコライダーでは4極磁石のアライメントも非常に重要だがここでは議論していない。4極磁石がリニアックの途中で横方向にずれていれば、そこでビーム振動が始まる。従って、話を wakefield の影響に限れば4極磁石のアライメントエラーは(リニアックがそこから始まるとみなして)「入射エラー」と同様に扱うことができるであろう。

1 Wakefield

Wakefield については、OHO'91 でも述べているが、ここで再度まとめてみる。[1][6]

1.1 Wakefunction

ビームを構成する電子は常にそのまわりに電磁場を伴って加速器内を移動しているが、そこに抵抗や構造物があると、電子が通過した後も残るような電磁場が励起される。この電磁場を wakefield と言ひ、後からくる荷電粒子が力を受けるためビームの運動に影響をあたえる。

加速器中のある短い部分を考え、点電荷 q (leading particle) が光速でビーム軸に平行に通過し、その後距離 s だけ遅れて微少電荷 e (test particle) がやはり光速でビーム軸に平行に通過した時に、 e の受ける力を考える。この力は一般に電荷の積 eq に比例し、 s と leading particle と test particle 両方の横方向の位置に依存する。以下、ビーム軸方向を z とする円柱座標系 (r, θ, z) を使う。

時刻 t , 位置 (r, θ, z) での電場、磁場を

$$\begin{aligned} \vec{E}(r, \theta, z, t) \\ \vec{B}(r, \theta, z, t) \end{aligned} \quad (1.1)$$

とすると、test particle の受ける力は、縦方向に

$$F_z = eE_z \quad (1.2)$$

横方向には c を光速、 \vec{z} をビーム軸方向の単位ベクトルとして、

$$\vec{F}_\perp = e(\vec{E} + c\vec{z} \times \vec{B}) \quad (1.3)$$

である。又、電荷 e のこの部分の通過による運動量変化は、

$$\Delta \vec{p} = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{F}(r, \theta, z, t = \frac{s+z}{c}) \frac{dz}{c} \quad (1.4)$$

となる。ただし、時刻の原点の取り方として、 $t=0$ に leading particle が $z=0$ にあるものとした。leading particle の横方向の位置を (r_0, θ_0) とする

と、

$$\Delta \bar{p} = eq \bar{W}(r_0, \theta_0, r, \theta, s) \quad (1.5)$$

と書ける。

加速管を含め、加速器のビームが通る部分の構造の多くはほぼビーム軸に対する回転対称になっているので、電磁場を多重極展開すると便利である。すなわち、

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \sum_{m=0}^{\infty} \bar{E}_m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (\bar{E}_{mc} \cos m\theta + \bar{E}_{ms} \sin m\theta) \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \bar{B} &= \sum_{m=0}^{\infty} \bar{B}_m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (\bar{B}_{mc} \cos m\theta + \bar{B}_{ms} \sin m\theta) \end{aligned} \quad (1.7)$$

とすると、回転対称という条件から、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} E_{mz}(r, \theta, z, t = \frac{s+z}{c}) \frac{dz}{c} \\ = -\frac{q}{c} W_{zm}(s) r_0^m r^m \cos m\theta \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\bar{E}_{m\perp} + c \bar{z} \times \bar{B}_m) \frac{dz}{c} = \left\{ \begin{array}{l} \bar{0} \quad (m=0) \\ \frac{q}{c} W_{\perp m}(s) r_0^m r^{m-1} \\ \quad \times (\bar{r} \cos m\theta - \bar{\theta} \sin m\theta) \quad (m \geq 1) \end{array} \right\} \quad (1.9)$$

のように書ける。 \bar{r} 、 $\bar{\theta}$ 、 \bar{z} は各方向の単位ベクトルである。又、 $\theta_0 = 0$ とした（こうしても一般性を失わない）。

$W_{zm}(s)$ 、 $W_{\perp m}(s)$ が s のみの関数であり、 r, r_0, θ に依らないことが重要である。

式(1.8) の $W_{zm}(s)$ によって、 m 次の縦方向 (longitudinal) wakefunction を、式(1.9) の $W_{\perp m}(s)$ によって、 m 次の横方向 (transverse) wakefunction を定義する(式(1.5)の \bar{W} とは別の

もの)。wakefunction には、以下のような一般的な性質がある。

$$\begin{aligned} W_{zm}(s < 0) &= 0 \\ W_{\perp m}(s < 0) &= 0 \\ W_{zm}(0) &= \frac{1}{2} \lim_{s \rightarrow +0} W_{zm}(s) \\ W_{zm}(s) &= \frac{d}{ds} W_{\perp m}(s) \end{aligned} \quad (1.10)$$

つまり、wakefield は、それを励起した粒子より前の粒子には影響を与えない。第3式は、自分自身はその直後の field の半分を感じることを意味する。第4式は、「Panofsky-Wenzel の定理」から導かれる、縦方向と横方向の wakefunction の間の関係式である。

wakefunction の持つ単位は (例えば)、

$$\begin{aligned} W_{zm}(s) &: \text{V/C/m}^{2m} \\ W_{\perp m}(s) &: \text{V/C/m}^{2m-1} \end{aligned} \quad (1.11)$$

で表わせる。

式(1.8)、(1.9)から、 r, r_0 が小さい場合には、 m の大きな項の寄与が小さいことがわかる。リニアコライダーの主リニアックでは特にビームサイズ、軌道のずれ (ミクロン単位) が加速管などの大きさ (センチメートル単位) に比べて非常に小さいので、以下、縦方向については W_{z0} (monopole)、横方向については $W_{\perp 1}$ (dipole) のみを考える。このような近似のもとでは、以下のようなことが言える。

「test particle の受ける縦方向の運動量変化は、leading particle と test particle とのどちらの横方向の位置にも依存しない。」

「test particle の受ける横方向の運動量変化の大きさは、leading particle の通過する位置の対称軸からのずれの大きさに比例し、test particle の横方向の位置には依存しない。運動量変化の方向は、leading particle の位置の対称軸からのずれの方向に平行である。」

運動量変化の式は、

$$\begin{aligned}\Delta p_z &= -\frac{eq}{c} W_{z0}(s) \\ \Delta \bar{p}_\perp &= \frac{eq}{c} W_{\perp 1}(s) \bar{r}_0\end{aligned}\quad (1.13)$$

である。ここで \bar{r}_0 は、ビーム軸に垂直な平面内で原点から leading particle の横方向の位置へ向かうベクトルである。

この式は、点電荷である leading particle が通過した時の test particle の運動量変化であるが、実際のビームは多数の点電荷の集合である。複数の電荷の励起する電磁場は、重ね合わせができる(電磁場を記述するマクスウェル方程式が線形である)。従って、電子ビーム(バンチ)内の縦方向の相対位置 s' にある電子の受ける運動量変化は、全ての電子について和をとって、

$$\begin{aligned}\Delta p_z(s') &= -\sum_i \frac{e^2}{c} W_{z0}(s'-s_i) \\ \Delta \bar{p}_\perp(s') &= \sum_i \frac{e^2}{c} W_{\perp 1}(s'-s_i) \bar{r}_i\end{aligned}\quad (1.14)$$

となる。ただし、 s_i は電子 i の縦方向の相対位置で、後方を正とする。ビームを連続体とみなせば、

$$\begin{aligned}\Delta p_z(s') &= -\frac{e}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(s'') W_{z0}(s'-s'') ds'' \\ \Delta \bar{p}_\perp(s') &= \frac{e}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\bar{r}'', s') W_{\perp 1}(s'-s'') \bar{r}'' d\bar{r}'' ds''\end{aligned}\quad (1.15)$$

等と書ける。ここで $\lambda(s'')$ は線電荷密度、 $\rho(\bar{r}'', s')$ は体電荷密度、 $\int_{-\infty}^{\infty} d\bar{r}'' ds''$ は3次元の積分である。

1.2 インピーダンス

電気(子)回路では、インピーダンスは電圧を電流で割ったもので、コンデンサーやコイル等のため一般に周波数に依存する。加速器でもインピーダンスを同様に定義できる。

式(1.15)の第一式から、ある s' における電圧が、

$$V(s') = -\int_{-\infty}^{\infty} \lambda(s'') W_{z0}(s'-s'') ds''\quad (1.16)$$

であると解釈できる。又、ある s' における電流は、電子が光速で通過しているので

$$I(s') = c\lambda(s')\quad (1.17)$$

である。これらの周波数成分、

$$\tilde{V}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(s) e^{i\omega s/c} \frac{ds}{c}\quad (1.18)$$

$$\tilde{I}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} I(s) e^{i\omega s/c} \frac{ds}{c}\quad (1.19)$$

から、周波数 ω でのインピーダンスを、

$$Z(\omega) \equiv \frac{\tilde{V}(\omega)}{\tilde{I}(\omega)}\quad (1.20)$$

と定義すると(16)~(20)から、

$$Z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{z0}(s) e^{i\omega s/c} \frac{ds}{c}\quad (1.21)$$

つまり、インピーダンスは、wakefunction のフーリエ変換になる。

横方向のインピーダンスについても

$$\tilde{V}_\perp(s') = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\bar{r}'', s') W_{\perp 1}(s'-s'') \bar{r}'' d\bar{r}'' ds''$$

$$\tilde{I}_\perp(s') = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\bar{r}', s') \bar{r}' d\bar{r}'$$

$$\tilde{V}_\perp(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{V}_\perp(s) e^{i\omega s/c} \frac{ds}{c}\quad (1.22)$$

$$\tilde{I}_\perp(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{I}_\perp(s) e^{i\omega s/c} \frac{ds}{c}$$

$$Z_\perp(\omega) \equiv -i \frac{\tilde{V}_\perp(\omega)}{\tilde{I}_\perp(\omega)}$$

とすると、

$$Z_\perp(\omega) = -i \int_{-\infty}^{\infty} W_{\perp 1}(s) e^{i\omega s/c} \frac{ds}{c}\quad (1.23)$$

となり、やはりインピーダンスは、wakefunction のフーリエ変換(に $-i$ をかけたもの)になる。

逆変換して、

$$\begin{aligned} W_{z0}(s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(\omega) e^{-i\omega s/c} d\omega \\ W_{\perp 1}(s) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z_{\perp}(\omega) e^{-i\omega s/c} d\omega \end{aligned} \quad (1.24)$$

である。

インピーダンスの単位は、wakefunction の単位に時間を掛けたものだから以下のようになる。

$$\begin{aligned} Z(\omega) &: [\text{secV/C}] = [\text{V/A}] = [\Omega] \\ Z_{\perp}(\omega) &: [\text{secV/C/m}] = [\text{V/A/m}] = [\Omega/\text{m}] \end{aligned}$$

マルチバンチのビームの発散の場合のように、加速管などの長距離にわたる wakefield を考える場合には、wakefunction を共振モードの和として扱うのが便利である。

$$\begin{aligned} W_{z0}(s) &= \sum_m \frac{\omega_m R_m}{2 Q_m} e^{-\frac{\omega_m s}{2Q_m c}} \\ &\times \left\{ \cos(\omega'_m s/c) + \frac{\omega_R}{2Q_m \omega'_m} \sin(\omega'_m s/c) \right\} \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$W_{\perp 1}(s) = \sum_n \frac{\omega_n^2 R_n}{2\omega'_n Q_n} e^{-\frac{\omega_n s}{2Q_n c}} \sin(\omega'_n s/c) \quad (1.26)$$

縦方向 W_{z0} については、 m は m 番目の monopole mode、で、 ω_m は共振周波数、 R_m はシャントインピーダンス、 Q_m は Q 値で、

$$\omega'_m \equiv \omega_m \sqrt{1 - \frac{1}{4Q_m^2}} \quad (1.26)$$

である。横方向についても全く同様である。また、インピーダンスは、

$$Z(\omega) = \sum_m \frac{\frac{R_m}{2}}{1 + iQ_m \left(\frac{\omega}{\omega_m} - \frac{\omega_m}{\omega} \right)} \quad (1.27)$$

$$Z_{\perp}(\omega) = \sum_n \frac{\frac{R_n \omega_n}{2 \omega}}{1 + iQ_m \left(\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega_n}{\omega} \right)} \quad (1.28)$$

となる。

1.3 長さ当たりの wakefunction

リニアックの加速管のように、長距離にわたって同じような構造が続いている場合には、構造全体の wakefunction でなく、長さ当たりの wakefunction を使うのが便利な場合が多い。これは、単に wakefunction をその構造の長さで割ったもので定義される。長さ当たりのインピーダンスも全く同様である。

以下では、特に断らない限り長さ当たり wakefunction を使い、 W_z と W_{\perp} を各々 W_{z0} と $W_{\perp 1}$ を構造の長さで割ったものという意味で使う。

2 2 粒子モデル

ここでは、簡単のため2つのマクロな荷電粒子からなるビームでリニアックでの wakefield の影響を考えてみる。

2.1 運動方程式

独立変数として、リニアックのビーム軸方向の位置 s をとり、各々の粒子の横方向の位置を (1次元だけ考える) を $x_1(s)$ 、 $x_2(s)$ とする。 s でのビームのローレンツファクターを γ 、収束を $K(s)$ で表す。横方向の運動量は、超相対論的な場合、 $p_x \ll p$ として、

$$p_x \approx p \frac{dx}{ds} = mc\gamma \frac{dx}{ds} \quad (2.1)$$

と表せるので (p は運動量の大きさ)、各粒子の運動方程式は、

$$\frac{d^2 x_1}{ds^2} + K(s)x_1 = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{d^2 x_2}{ds^2} + K(s)x_2 = \frac{F_x(s)}{m_2 c^2 \gamma} \quad (2.3)$$

となる。ここで、ビームエネルギーの長さ当たりの変化が小さいと近似した。 m_2 は、粒子 2 の静止質量である。また、 $F_x(s)$ は、粒子 2 が、wakefield によって受ける力であり、粒子 1 と 2 の電荷を q_1 、 q_2 、2 粒子の間隔を z 、長さ当たりの wakefunction を W_{\perp} として、

$$F_x(s) = q_2 q_1 (x_1 - x_a) W_{\perp}(z) \quad (2.4)$$

となる。ただし、 x_a は、 s での加速管のアライメントエラーで、 $x_1 - x_a$ はビームの加速管に対する相対的なずれになる。

ビームエネルギーが一定の場合、 x_1 の解はよく知られているように、

$$x_1(s) = \sqrt{\beta(s)} \{a_1 \cos \psi(s) + b_1 \sin \psi(s)\} \quad (2.5)$$

となる。 a_1 、 b_1 は初期条件で決まる定数、 β はベータ関数で

$$\psi(s) = \int_0^s \frac{ds}{\beta(s)}$$

$$\frac{\beta \beta''}{2} - \frac{\beta'^2}{4} + \beta^2 K - 1 = 0 \quad (2.6)$$

である。また、粒子 2 の解は、

$$\begin{aligned} x_2(s) &= \sqrt{\beta(s)} \{a_2 \cos \psi(s) + b_2 \sin \psi(s)\} \\ &+ \int_0^s R_{12}(s' \rightarrow s) \frac{F_x(s')}{m_2 c^2 \gamma} ds' \\ &= \sqrt{\beta(s)} \{a_2 \cos \psi(s) + b_2 \sin \psi(s)\} \\ &+ \sqrt{\beta(s)} \int_0^s \sqrt{\beta(s')} \sin(\psi(s) - \psi(s')) \frac{F_x(s')}{m_2 c^2 \gamma} ds' \end{aligned} \quad (2.7)$$

となる。 a_2 、 b_2 は初期条件で決まる定数であり、 $R_{12}(s' \rightarrow s)$ は、 s' から s へのトランスファ行列の 1-2 成分を表す。

2.2 入射エラー

アライメントエラーのない場合 x_a は 0 で、 x_2 の運動方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_2}{ds^2} + K(s)x_2 &= \frac{q_2 q_1 W_{\perp}(z)}{m_2 c^2 \gamma} x_1(s) \\ &= \frac{e q_1 W_{\perp}(z)}{m c^2 \gamma} \sqrt{\beta(s)} \{a_1 \cos \psi(s) + b_1 \sin \psi(s)\} \end{aligned} \quad (2.8)$$

となる。ただし e を電子の電荷、 m を電子質量として

$$\frac{q_2}{m_2} = \frac{e}{m}$$

を使った。

実際のリニアックは、収束、発散 4 極磁石と加速管の組み合わせなので、 W_{\perp} 、 $K(s)$ は s に伴って変化する。しかし、ここでは簡単のため W_{\perp} が s によらないとし、さらに。

$$K(s) \rightarrow \frac{1}{\bar{\beta}^2} \quad (2.9)$$

で $\bar{\beta}$ が s に依らないと近似する。 $\bar{\beta}$ はベータatron振動の周期を 2π で割ったものである。

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_2}{ds^2} + \frac{1}{\bar{\beta}^2} x_2 &= \frac{q_2 q_1 W_{\perp}(z)}{m_2 c^2 \gamma} x_1(s) \\ &= \frac{eq_1 W_{\perp}(z)}{mc^2 \gamma} \sqrt{\beta} \{a_1 \cos \psi(s) + b_1 \sin \psi(s)\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

なので、この解は、 $\beta \approx \bar{\beta}$ として

$$\begin{aligned} x_2(s) &= \sqrt{\beta} \left[\{a_2 \cos \psi(s) + b_2 \sin \psi(s)\} \right. \\ &\left. + \frac{eq_1 W_{\perp}(z)}{2mc^2 \gamma} \beta s \{a_1 \sin \psi(s) - b_1 \cos \psi(s)\} \right] \end{aligned} \quad (2.11)$$

となる。 a_2 、 b_2 は、初期条件から決まる定数である。括弧内第2項が wakefield によって励起される振動で、振幅は s に比例して増大していく。

ここまではエネルギーが変化しないとしてきたが、実際は加速され、微小区間でのエネルギー変化 ΔE にとまない

$$\frac{dx}{ds}(E + \Delta E) = \frac{E}{E + \Delta E} \frac{dx}{ds}(E) \quad (2.12)$$

のように、振動が減少する。振動の周期に比べて加速が緩やか（通常正しい）で、 β 関数も緩やかに変化する場合、

$$x_1(s) = \sqrt{\frac{\gamma(0)}{\gamma(s)}} \sqrt{\beta(s)} \{a_1 \cos \psi(s) + b_1 \sin \psi(s)\} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} x_2(s) &= \sqrt{\frac{\beta(s)\gamma(0)}{\gamma(s)}} \left[\{a_2 \cos \psi(s) + b_2 \sin \psi(s)\} \right. \\ &\left. + \frac{eq_1 W_{\perp}}{2mc^2} \left(\int_0^s \frac{\beta(s')}{\gamma(s')} ds' \right) \{a_1 \sin \psi(s) - b_1 \cos \psi(s)\} \right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

のように、振幅が $\sqrt{\gamma}$ に反比例して小さくなる。括弧内第2項をみると、やはり励起される振動

は、

$$\text{振幅の比} \propto \int_0^s \frac{\beta(s')}{\gamma(s')} ds \quad (2.15)$$

のように s に伴って増大する。

加速勾配がリニアック全体で一定、 $\gamma(s) \propto s$ (s の、従ってエネルギーの大きいところでの近似)、 β 関数が一定の場合は、

$$\text{振幅の比} \propto \log s$$

となるので、あまり急には増大しない。しかし、 β 関数を一定にするためにはビームエネルギーの増加とともに収束磁場を強くしていかなければならず、リニアコライダーのように長いリニアックでは現実的でない。

現実に近いモデルとして、長さ当たりの収束磁場の強さが一定、従って β 関数がビームエネルギーの平方根に比例する場合には、

$$\text{振幅の比} \propto \sqrt{s}$$

となる。

2.3 BNS ダンピング

粒子1と粒子2のエネルギーがわずかに異なっている場合を考える。粒子1のエネルギーを E_1 、2のエネルギーを

$$E_2 = (1 + \delta) E_1 \quad (2.16)$$

とすると、磁場による角度変化はエネルギーに反比例するので、式(2.3)は、

$$\frac{d^2 x_2}{ds^2} + \frac{K(s)}{1 + \delta} x_2 = \frac{F_x(s)}{m_2 c^2 \gamma} = \frac{eq_1}{mc^2 \gamma} W_{\perp}(z) x_1 \quad (2.17)$$

と書ける。もし、

$$\frac{K(s)}{1 + \delta} = K(s) + \frac{eq_1}{mc^2 \gamma} W_{\perp} \quad (2.18)$$

であれば、運動方程式は、

$$\frac{d^2 x_2}{ds^2} + K(s)x_2 + \frac{eq_1}{mc^2\gamma} W_{\perp}(x_2 - x_1) = 0 \quad (2.19)$$

となり、 $x_2 = x_1$ はこの方程式の解であることがわかる。つまり、この場合には粒子1と2の初期状態が同じならば、粒子2は1と全く同じように運動し、振動の増大はない。しかし、実際は、 $K(s)$ は収束4極磁石で負、発散4極磁石で正というように変化するので、このような条件にはなり得ないであろう。そこで、ビーム振動を大局的にみて、式(2.17)を、

$$\frac{d^2 x_2}{ds^2} + \left(\frac{1}{(1+\delta)\bar{\beta}(s)} \right)^2 x_2 = \frac{eq_1}{mc^2\gamma} W_{\perp}(z)x_1 \quad (2.20)$$

のように近似する(付録参照)。 $\bar{\beta}(s)$ はs付近でのベータatron振動の周期を 2π で割ったものである。従って

$$\left(\frac{1}{(1+\delta)\bar{\beta}(s)} \right)^2 = \frac{1}{\bar{\beta}^2(s)} + \frac{eq_1}{mc^2\gamma} W_{\perp} \quad (2.21)$$

であれば、 $x_2 = x_1$ がこの方程式の解となり、粒子2は1と同じよう運動するであろう。このような状況を「auto-phasing」と呼んでいる。定性的には、式(2.17)右辺は $x_2 = x_1$ とすると $\frac{eq_1}{mc^2} W_{\perp}$ が正か負かによって発散または収束力となっているので、 δ による収束の違いによってこれが打ち消されると解釈できる。

「auto-phasing」の条件式(2.21)は、

$$(1+\delta)^2 = \frac{1/\bar{\beta}^2}{1/\bar{\beta}^2 + eq_1 W_{\perp}/mc^2\gamma} \quad (2.22)$$

であり、 $|eq_1\bar{\beta}^2 W_{\perp}/mc^2\gamma| \ll 1$ の場合には、

$$\delta \approx -\frac{eq_1\bar{\beta}^2 W_{\perp}}{2mc^2\gamma} \quad (2.23)$$

となる。dipoleモードのwakefunctionは短距離では正なので、通常、バンチ内の作用を考える場合には、 $\delta < 0$ である。なお、 W_{\perp} が一定で、前項でも考えた長さ当たりの収束磁場の強さが一定の場合には、「auto-phasing」の条件を

みたす δ はリニアックの全長にわたって一定である。

次に、 δ によって、粒子2のふるまいはどう変わるかを見てみる。簡単のため、 W_{\perp} 、 β が一定、 δ の絶対値が小さいがゼロでないとし、粒子1の初期状態として $b_1 = 0$ とする。(2.20)の一般解は、

$$x_2 = x_{2,free} + x_{2,excite} \quad (2.24)$$

$$x_{2,free} = \sqrt{\bar{\beta}(1+\delta)} \{a_2 \cos \psi_2(s) + b_2 \sin \psi_2(s)\} \quad (2.25)$$

$$x_{2,excite} = -a_1 \frac{eq_1}{2mc^2\gamma\delta} \bar{\beta}^{5/2} W_{\perp} \cos \psi(s) \quad (2.26)$$

$$\psi_2(s) \equiv \int_0^s \frac{1}{\bar{\beta}(1+\delta)} ds = \frac{s}{\bar{\beta}(1+\delta)} \quad (2.27)$$

である。 a_2 、 b_2 は定数で $x_{2,free}$ は自由振動、 $x_{2,excite}$ は強制振動の項である。初期状態が、粒子1と同じであるとすると、

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \left(1 + \frac{eq_1}{2mc^2\gamma\delta} \bar{\beta}^2 W_{\perp} \right) \\ b_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

従って、

$$\begin{aligned} x_2 &= a_1 \left(1 + \frac{eq_1}{2mc^2\gamma\delta} \bar{\beta}^2 W_{\perp} \right) \sqrt{\bar{\beta}(1+\delta)} \cos \psi_2(s) \\ &\quad - a_1 \frac{eq_1}{2mc^2\gamma\delta} \bar{\beta}^{5/2} W_{\perp} \cos \psi(s) \end{aligned} \quad (2.29)$$

となる。

これから、まず(当然であるが)「auto-phasing」の条件(2.23)が $a_2 = 0$ の条件と一致することがわかる。また、 $a_2 \neq 0$ の場合は、波長が $2\pi\bar{\beta}(1+\delta)$ の自由振動と $2\pi\bar{\beta}$ の強制振動との和になる。 $|\delta| \ll 1$ と仮定したので、この振動の様子はゆっくりしたビート(うなり)となる。振動の位相差を、

$$\Delta\psi = \psi_2(s) - \psi(s) = \frac{s}{\beta} \left(\frac{1}{(1+\delta)} - 1 \right) \quad (2.30)$$

と書き、第1項の係数の $\sqrt{\beta(1+\delta)}$ を $\sqrt{\beta}$ で近似すると、

$$\cos\psi(s) = \cos\Delta\psi \cos\psi_2(s) + \sin\Delta\psi \sin\psi_2(s) \quad (2.31)$$

であるから、

$$x_2 = a_1 \sqrt{\beta} \left[\left\{ 1 + \frac{eq_1}{2mc^2\gamma\delta} \bar{\beta}^2 W_{\perp} (1 - \cos\Delta\psi) \right\} \cos\psi_2 - \frac{eq_1}{2mc^2\gamma\delta} \bar{\beta}^2 W_{\perp} \sin\Delta\psi \sin\psi_2 \right] \quad (2.32)$$

従ってこの振動の振幅を A_2 と書くと、

$$A_2^2 = a_1^2 \bar{\beta} \left[\left\{ 1 + \frac{eq_1}{2mc^2\gamma\delta} \bar{\beta}^2 W_{\perp} (1 - \cos\Delta\psi) \right\}^2 + \left(\frac{eq_1}{2mc^2\gamma\delta} \bar{\beta}^2 W_{\perp} \sin\Delta\psi \right)^2 \right] \\ = a_1^2 \bar{\beta} \left[1 + \frac{2eq_1}{mc^2\gamma} \bar{\beta}^2 W_{\perp} \left(1 + \frac{eq_1}{2mc^2\gamma\delta} \bar{\beta}^2 W_{\perp} \right) (1 - \cos\Delta\psi) \right] \quad (2.33)$$

となる。s が小さく、

$$\Delta\psi = \frac{s}{\beta} \left(\frac{1}{(1+\delta)} - 1 \right) \approx -\frac{s\delta}{\beta} \ll 1 \quad (2.34)$$

と近似できる領域では、

$$(1 - \cos\Delta\psi) \approx \frac{s^2\delta^2}{2\beta^2} \quad (2.35)$$

であり、

$$A_2^2 \approx a_1^2 \bar{\beta} \left[1 + s^2 \frac{eq_1\delta^2}{mc^2\gamma} W_{\perp} \left(1 + \frac{eq_1}{2mc^2\gamma\delta} \bar{\beta}^2 W_{\perp} \right) \right] \quad (2.36)$$

となる。従って、 $W_{\perp} > 0$ の場合、

$$\delta > -eq_1 \bar{\beta}^2 W_{\perp} / 2mc^2\gamma = \delta_{ap} \quad : \text{振幅増大}$$

$$\delta < -eq_1 \bar{\beta}^2 W_{\perp} / 2mc^2\gamma = \delta_{ap} \quad : \text{振幅減少}$$

であることがわかる。つまり、粒子2が粒子1と同じ状態 ($x_2 = x_1$, $x'_2 = x'_1$) であった直後には、「auto-phasing」の条件、 δ_{ap} を境に振幅が増大または減少する。 δ が負で絶対値が大きい場合の振幅の減少を、これを提唱した人たちの頭文字をとって「BNS ダンピング」と呼んでいる。

もちろん、振幅が減少するかどうかは、その時の粒子1と粒子2の振動の位相関係によって異なる。上のようなことが言えるのは、二つの粒子の振動の位相が等しい場合である。粒子2の運動は、2つの異なる周波数の振動の重ね合わせであるから、いずれ振幅が増大していく位相になるはずである。実際、式(2.33)からわかるように、振幅の2乗は、周期 $\bar{\beta}/\delta$ で、

$$a_1^2 \bar{\beta} \left[1 + \frac{4eq_1}{mc^2\gamma} \bar{\beta}^2 W_{\perp} \left(1 + \frac{eq_1}{2mc^2\gamma\delta} \bar{\beta}^2 W_{\perp} \right) \right] \\ < A_2^2 < a_1^2 \bar{\beta} \quad (2.37)$$

の間を振動する。

図2.1に $x_1(s)$ と、 $\delta = 0$ 、 $\delta = 0.5\delta_{ap}$ 、 $\delta = \delta_{ap}$ 、 $\delta = 1.5\delta_{ap}$ 、 $\delta = 2\delta_{ap}$ の場合の $x_2(s)$ を式(2.20)を使い(2.28)の初期条件で、 $s = 0$ から逐次数値的にもとめた結果を示す。ただし、

wake function	: $W_{\perp} = 2 \times 10^{16} \text{ V/C/m}^2$
粒子1の電荷	: $q_1 = 5 \times 10^9 e$
β 関数	: $\beta(s) = 7\sqrt{E(s)/E(0)} \text{ m}$
ビームエネルギー	: $E(s) = E(0) + gs$ $E(0) = 20 \text{ GeV}$

加速勾配 : $g = 50 \text{ MeV/m}$
 初期条件 : $a_1 = 1$

とした。

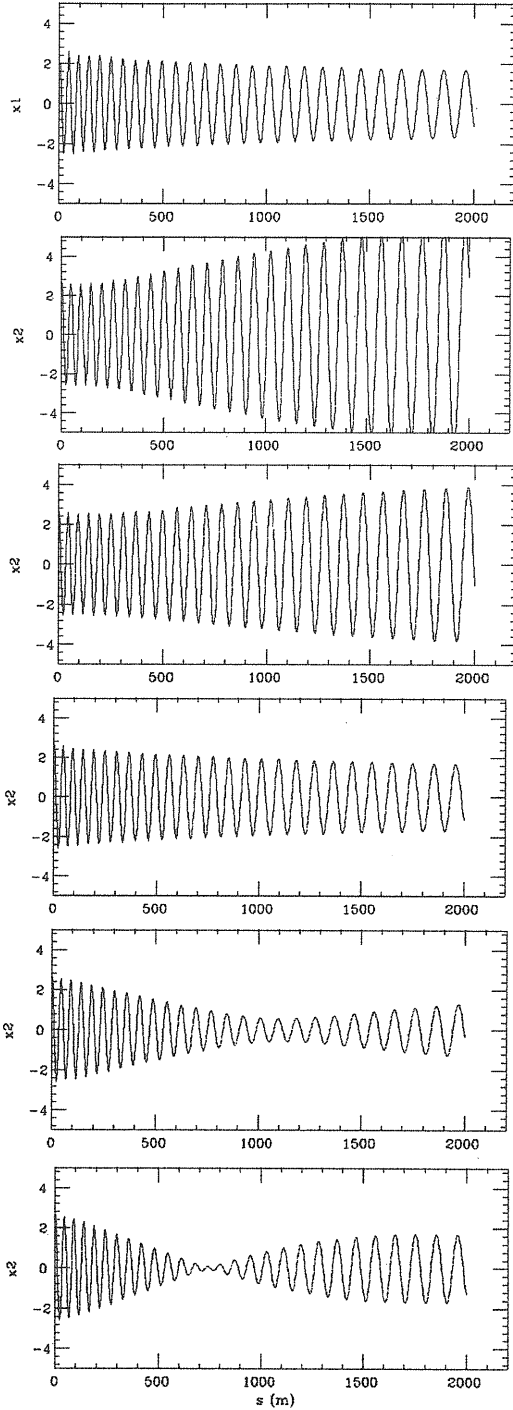


図 2.1、上から $x_1(s)$ 、 $\delta = 0$ 、 $\delta = 0.5 \delta_{ap}$ 、 $\delta = \delta_{ap}$ 、 $\delta = 1.5 \delta_{ap}$ 、 $\delta = 2 \delta_{ap}$ の場合の $x_2(s)$

2.4 ランダムな設置誤差の影響

これまでの、粒子 2 の運動方程式、

$$\frac{d^2 x_2}{ds^2} + K(s)x_2 = \frac{q_2 q_1 W_{\perp}(z)}{m_2 c^2 \gamma} (x_1(s) - x_a(s)) \quad (2.38)$$

で、加速管の設置誤差のない、 $x_a = 0$ の場合を考えたが、ここでは加速管が横方向にずれているが、粒子 1 は振動していない、 $x_1 = 0$ の場合を考える。この場合運動方程式は、

$$\frac{d^2 x_2}{ds^2} + K(s)x_2 = -\frac{eq_1 W_{\perp}(z)}{mc^2 \gamma} x_a(s) \quad (2.39)$$

となり、 $x_2(0) = 0$ 、 $x_2'(0) = 0$ の初期条件に対する解は式(2.7)に緩やかなエネルギー変化を考慮して、

$$x_2(s) = -\sqrt{\beta(s)} \int_0^s \frac{\gamma(s')}{\gamma(s)} \sqrt{\beta(s')} \times \sin(\psi(s) - \psi(s')) \frac{eq_1 W_{\perp}}{mc^2 \gamma(s')} x_a(s') ds' \quad (2.40)$$

である。

ここで、加速管のアラインメントの単位 (以下、加速管単位と呼ぶ) の長さを l とし、各加速管単位が独立にランダムな設置誤差を持っているとして、 $x_2(s)$ の確率的な分布を考えてみる。この場合、各加速管単位ごとの和をとり、

$$x_2(s) = -\frac{eq_1 \sqrt{\beta(s)}}{mc^2 \sqrt{\gamma(s)}} \times \sum_i x_{a,i} \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\beta_i} \sin(\psi(s) - \psi(s')) \frac{W_{\perp}}{\sqrt{\gamma}} ds' \quad (2.41)$$

$$= l \sum_i x_{a,i} f_i(s)$$

$$f_i(s) \equiv -\frac{eq_1 \sqrt{\beta(s)}}{mc^2 l \sqrt{\gamma(s)}} \times \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\beta_i} \sin(\psi(s) - \psi(s')) \frac{W_{\perp}}{\sqrt{\gamma}} ds' \quad (2.42)$$

と書ける。 $x_{a,i}$ は*i*-番目の加速管単位の設置誤差で、積分範囲(s_1, s_2)は各加速管の長さである。 l が十分小さく、加速管単位内では β 、 ψ 、 γ 、 W_{\perp} が一定としてよい場合は、

$$f_i(s) = -\frac{eq_1\sqrt{\beta(s)}}{mc^2\sqrt{\gamma(s)}}\sqrt{\beta_i}\sin(\psi(s)-\psi_i)\frac{W_{\perp,i}}{\sqrt{\gamma_i}} \quad (2.43)$$

β_i 、 ψ_i 、 γ_i 、 $W_{\perp,i}$ はそこでの β 関数、ベータatron振動の位相、 γ ファクター、wakefunctionである。

設置誤差は、ゼロの周りに分布するであろうから、 $\langle \rangle$ が期待値を表すとして、

$$\langle x_{a,i} \rangle = 0 \quad (2.44)$$

であろう。また、各加速管単位が独立とは、

$$\langle x_{a,i}x_{a,j} \rangle = 0 \quad (i \neq j) \quad (2.45)$$

ということである。

従って、 $x_2(s)$ の期待値はゼロ、

$$\langle x_2 \rangle = \left\langle l \sum_i x_{a,i} f_i \right\rangle = l \sum_i f_i \langle x_{a,i} \rangle = 0 \quad (2.46)$$

又、 $x_2(s)$ の2乗の期待値は、

$$\begin{aligned} \langle x_2^2 \rangle &= \left\langle l^2 \sum_{i,j} x_{a,i} x_{a,j} f_i f_j \right\rangle \\ &= l^2 \sum_{i,j} f_i f_j \langle x_{a,i} x_{a,j} \rangle = l^2 \sigma_a^2 \sum_i f_i^2 \end{aligned} \quad (2.47)$$

である。ただし、

$$\langle x_{a,i}^2 \rangle = \sigma_a^2 \quad (2.48)$$

とした。これは、全ての加速管単位が、標準偏差 σ_a の(例えば)ガウス分布である場合に相当する。この場合、ある場所での粒子2の横方向の位置のずれは標準偏差が σ_a に比例するガウス分布になり、その比例係数は $l^2 \sum_i f_i^2$

である。

ここで、リニアックの全長を L とし、リニアッ

クの最後での $\langle x_2^2 \rangle$ と、加速管単位の長さ(アラインメントの単位となる長さ)との関係を試みる。まず、 W_{\perp} が全長にわたって一定、 β が長さ l の範囲では一定、加速勾配が大きくなり、 γ も長さ l の範囲では一定とすると、式(2.42)の積分で、 $s_1 \rightarrow s_i$ 、 $s_2 \rightarrow s_i + l$ とすると、

$$\psi(s_i + s'') \approx \psi(s_i) + s''/\beta_i \quad (2.49)$$

だから、

$$\begin{aligned} f_i &= -\frac{eq_1 W_{\perp} \sqrt{\beta(L)} \sqrt{\beta_i}}{mc^2 l \sqrt{\gamma(L)} \sqrt{\gamma_i}} \\ &\times \int_0^l \sin(\psi(L) - \psi(s_i) + s''/\beta_i) ds'' \\ &= \frac{eq_1 W_{\perp} \sqrt{\beta(L)} \sqrt{\beta_i}}{mc^2 l \sqrt{\gamma(L)} \sqrt{\gamma_i}} \\ &\times \beta_i \{ \cos(\psi(L) - \psi(s_i) + l/\beta_i) - \cos(\psi(L) - \psi(s_i)) \} \end{aligned} \quad (2.50)$$

となる。

加速管単位が多数あるとして、 f_i^2 の平均(位相の部分平均して)をかながえる。

$$\psi(L) - \psi(s_i) \equiv \theta_i \quad (2.51)$$

とおいて θ_i について平均すると、

$$\begin{aligned} &\{ \cos(\theta_i + l/\beta_i) - \cos\theta_i \}^2 \\ &= \{ \cos(l/\beta_i)\cos\theta_i - \sin(l/\beta_i)\sin\theta_i - \cos\theta_i \}^2 \\ &\rightarrow 1 - \cos(l/\beta_i) \end{aligned} \quad (2.52)$$

ただし、 $\sin^2\theta_i \rightarrow 1/2$ 、 $\cos^2\theta_i \rightarrow 1/2$ 、 $\sin\theta_i \rightarrow 0$ 、 $\cos\theta_i \rightarrow 0$ を使った。従って、

$$f_i^2 \rightarrow \frac{e^2 q_1^2 W_{\perp}^2 \beta(L) \beta_i^3}{m^2 c^4 l^2 \gamma(L) \gamma_i} \{ 1 - \cos(l/\beta_i) \} \quad (2.53)$$

となる。

もし、 $l/\beta_i \ll 1$ であれば、

$$f_i^2 \rightarrow \frac{e^2 q_1^2 W_{\perp}^2 \beta(L) \beta_i}{2m^2 c^4 \gamma(L) \gamma_i} \quad (l/\beta_i \ll 1) \quad (2.54)$$

だから、 $\langle x_2^2 \rangle$ は、

$$\langle x_2^2 \rangle = l^2 \frac{e^2 q_1^2 W_{\perp}^2 \sigma_a^2 \beta(L)}{2m^2 c^4 \gamma(L)} \sum_i \frac{\beta_i}{\gamma_i} \quad (2.55)$$

となる。最後の和の数は、 L/l 個あるので、これは全体として l に比例する。つまり、加速管のアラインメント単位が短いほど（独立にアラインメントする数が増えるほど）ビームの横方向のずれが小さくなる。また、 β 関数がビームエネルギーの平方根に比例する場合には、

$$\langle x_2^2 \rangle \propto \sum_i \gamma_i^{-1/2} \quad (2.56)$$

であるから、ある長さあたりに期待されるリニアック終点での $\langle x_2^2 \rangle$ の増大への寄与はビームエネルギーの $1/2$ 乗に反比例し、ビームエネルギーの低いところ程大きい。加速勾配を g とし、 s での γ ファクターを

$$\gamma(s) = \gamma_0 + gs/mc^2 \quad (2.57)$$

と書くと、

$$\begin{aligned} l \frac{\beta(L)}{\gamma_f} \sum_i \frac{\beta_i}{\gamma_i} &\rightarrow \\ \beta_0 \sqrt{\frac{\gamma_f}{\gamma_0}} \frac{1}{\gamma_f} \int_0^L \beta_0 \sqrt{\frac{\gamma(s)}{\gamma_0}} \frac{1}{\gamma(s)} ds &\quad (2.58) \\ = \frac{2mc^2 \beta_0^2}{g} \frac{\sqrt{\gamma_f - \sqrt{\gamma_0}}}{\gamma_0 \sqrt{\gamma_f}} \end{aligned}$$

(2.55)より、

$$\langle x_2^2 \rangle = l \frac{e^2 q_1^2 W_{\perp}^2 \sigma_a^2 \beta_0^2}{mc^2} \frac{\sqrt{\gamma_f - \sqrt{\gamma_0}}}{8 \gamma_0 \sqrt{\gamma_f}} \quad (2.59)$$

となる。 β_0 、 γ_0 はリニアック入り口での β 関数と γ ファクター、 γ_f はリニアック出口での γ ファクターである。従って、ある決まったビームエネルギーでの $\langle x_2^2 \rangle$ は、加速勾配に反比例し、はじめの β 関数の 2 乗に比例する。又図

2.2に、ファクター $\frac{\sqrt{\gamma_f - \sqrt{\gamma_0}}}{\gamma_0 \sqrt{\gamma_f}}$ を電子のエネルギーの関数として示す。

l が小さい場合は、 $\langle x_2^2 \rangle \propto l$ であったが、 l が大きい場合、つまり、アラインメント単位の長い場合はどうか。

$$\begin{aligned} \langle x_2^2 \rangle &\propto l^2 \sum_i f_i^2 \propto l^2 \sum_i \frac{1}{l^2} \{1 - \cos(l/\beta_i)\} \\ &\propto \sum_i \{1 - \cos(l/\beta_i)\} \end{aligned} \quad (2.60)$$

である。これは、 $l/\beta_i \ll 1$ でなければ l に比例しては大きくなる。粒子 2 の振動の位相がアラインメント単位の中で変化して、wakefield の効果が相殺されるためである。

図 2.3 に $\{1 - \cos(l/\beta)\}$ を $\beta = 1/2\pi$ とし、 l を横軸にとって示す。これは、 β 関数が一定の場合に対応する。また、図 2.4 に $\sum_i \{1 - \cos(l/\beta_i)\}$ を示す。ただし、

β 関数	: $\beta(s) = 5.5 \sqrt{E(s)/E(0)}$ m
ビームエネルギー	: $E(s) = E(0) + gs$
	: $E(0) = 10$ GeV
	: $E(L) = 500$ GeV
加速勾配	: $g = 56.7$ MeV/m

とした。

$\langle x_2^2 \rangle$ ははじめ l とともに増大するが、 $l = 2.3\beta$ あたりが最大でそれ以上では減少していく。

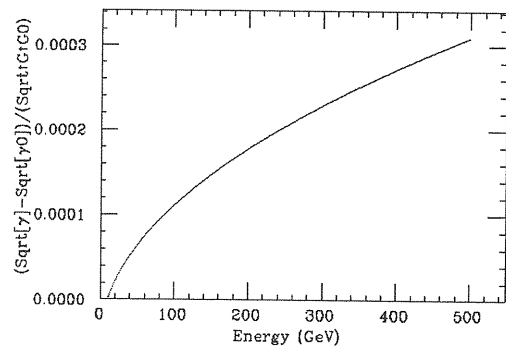


図 2.2、ファクター $\frac{\sqrt{\gamma_f - \sqrt{\gamma_0}}}{\gamma_0 \sqrt{\gamma_f}}$ を電子のエネルギーの関数として示す。

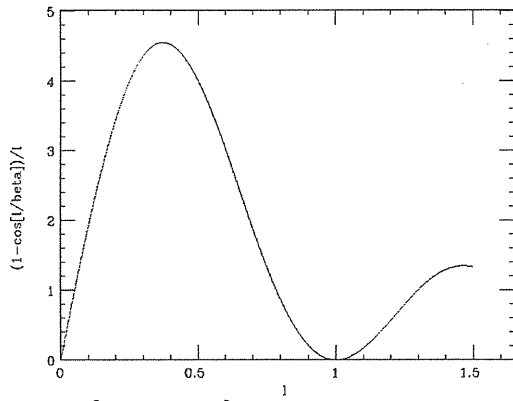


図 2.3、 $\{1 - \cos(l/\beta)\}$ を l の関数として示す。
 $(\beta = 1/2\pi)$

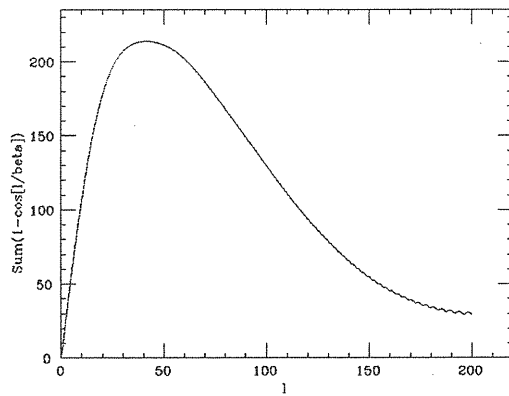


図 2.4、JLC に近いパラメーターで、
 $\sum_i \{1 - \cos(l/\beta_i)\}$ を l の関数として示す。

3 バンチ内の wakefield の影響

これまでは、wakefield の影響を解析的に取り扱うために、簡単な2粒子モデルを使った。この結果は大雑把にどのような様子かを見るのに役立つが、もちろん正確ではない。実際のビームは、多数の電子の集まりであり、wakefield によって横方向の振動を励起された電子がさらに wakefield を作り、後方の電子に影響を与えといった連鎖がある。ここでは、点電荷ではなくビームにひろがりがある場合を、リニアコライダーの設計パラメーターに基づいて見てみる。

3.1 X-バンド加速管の wakefunction

加速管の短距離の wakefunction は、その開口部の大きさによってほぼ決まってしまう。開口部が狭い程 wakefunction は大きくなる。実際の加速管は200個の加速セルを持ち、入り口の開口部は大きく、出口に近づく程小さくなっている (constant gradient)。しかし、このような構造の短距離の wakefunction を計算することは困難なので、同じ形の加速セルが無限に続く場合 (constant impedance) の wakefunction をいろいろな形状について計算し、開口部の大きさについては平均をとることで近似している。[3] 800 ミクロンまでの縦方向の長さ当たりの wakefunction を図 3.1 に、横方向の長さ当たりの wakefunction を図 3.2 に示す。

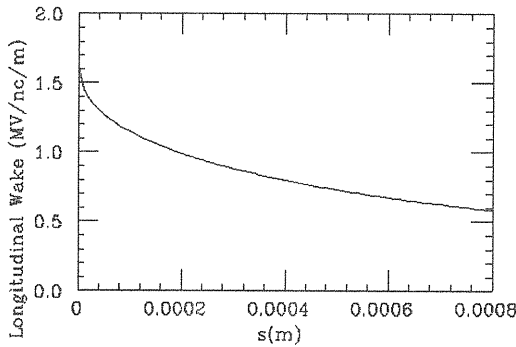


図 3.1、縦方向の短距離 wakefunction

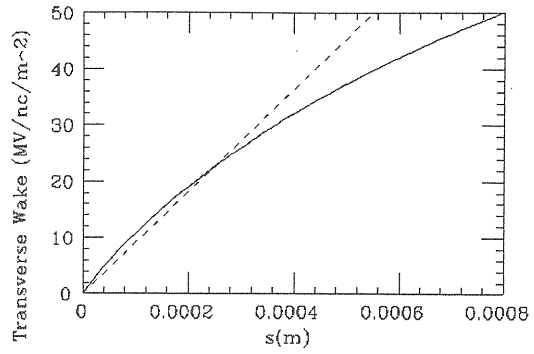


図 3.2、横方向の短距離 wakefunction (実線) と直線による近似 (破線)。

縦方向の wakefunction は $s \rightarrow 0$ で最大 (これは一般的に成り立つ性質である。) で、 s と共に減少していく。横方向の wakefunction は $s \rightarrow 0$ でゼロ (これも一般的に成り立つ性質である。) で、 s と共に増大していく。

wakepotential、すなわち z の位置にある電子が wakefield のため失うエネルギーは、

$$U(z) = e \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(z') W_{z0}(z-z') dz' \quad (3.1)$$

である。

又、バンチ中心から z の位置にある電子の横方向の運動量の変化は、

$$\Delta p_x(z) = \sum_i \frac{e^2}{c} W_{\perp}(z-z_i) (x_i - x_a) \quad (3.2)$$

と書ける。 z_i 、 x_i は i 番目の縦と横方向の位置、 x_a は加速管の横方向のアライメント誤差である。 $W_{\perp}(z-z_i)$ は、 $z-z_i < 0$ ではゼロだから、和は、 $z_i < z$ つまり、 z より前方についてのみとればよい。これはまた、

$$\Delta p_x(z) = \frac{e}{c} \int_{-\infty}^z \lambda(z') W_{\perp}(z-z') (x(z') - x_a) dz' \quad (3.3)$$

とも書ける。 $\lambda(z')$ は線密度、 $x(z')$ は z' での横方向の位置の平均である。

3.2 入射エラー

3.2.1 エネルギー幅のない場合

まず、(現実にはあり得ないが) バンチ内の全

電子のエネルギーが常に等しい(単一エネルギー)場合に横方向の wakefield の影響をシミュレーションでみている。図3.3は、入射時(入射エネルギーは10GeV)のずれが1ミクロンあったときのバンチ内の振動の様子を1バンチを縦方向に40個にスライスしてみたものである。ここでは、ビームエネルギー約250 GeV 付近、入射から約5 kmでの各スライスの横方向の位置のずれを約25 m毎にプロットした。バンチの後方は先頭の10倍程度の振幅で振動していることがわかる。

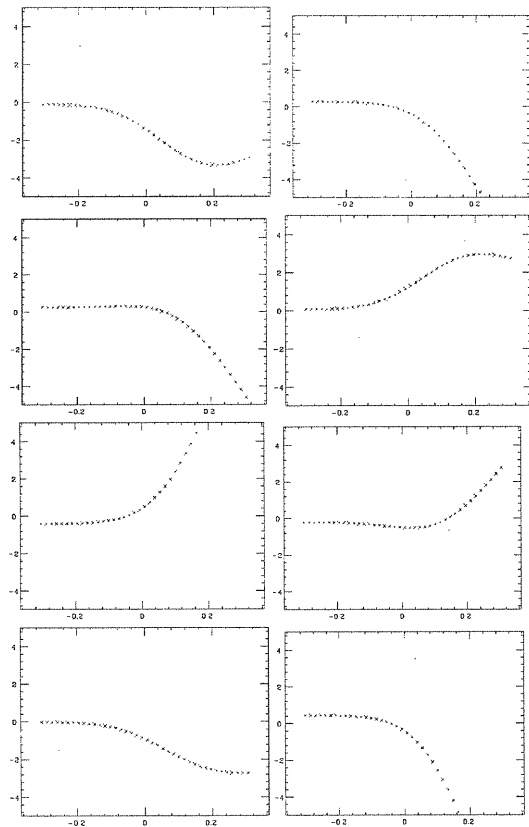


図3.3、z (mm 横軸)対 x (μm 縦軸)。z の負がバンチ前方。入射エラー $1\ \mu\text{m}$ 、単一エネルギー、250 GeV 付近

又、この場合の重心の位置の振動と、規格化エミッタンス(初期値 $3 \times 10^{-8}\text{m-rad}$)の変化の様子をs(リニアック入り口からの距離)に対して図3.4、3.5に示す。重心の振幅が最後(エネルギー500GeV)には入射時の2倍以上になっている。 β 関数は大体エネルギーの平方根に比例するようにしてあるので、加速による「減衰」を考えるとバンチ先頭の振幅はエネルギーの1/4乗に反比例する。つまり、500GeVでは

バンチ先頭の振幅 $\sim 1/\sqrt{5}\ \mu\text{m}$ に対し重心は $\sim 2\ \mu\text{m}$ 従って、5倍程度になる。(ここでは全ての話が線形なので、この比は入射エラーの大きさに依らない)。又、規格化エミッタンスは、初めの4倍程度になる。(エミッタンスの増加分は、入射エラーの大きさの2乗に比例する。)

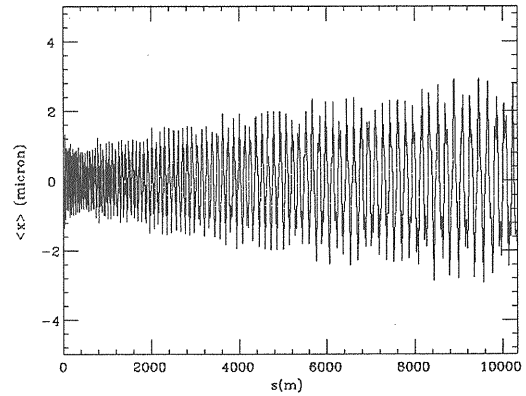


図3.4、s 対 $\langle x \rangle$ (重心位置)。入射エラー $1\ \mu\text{m}$ 、単一エネルギー。

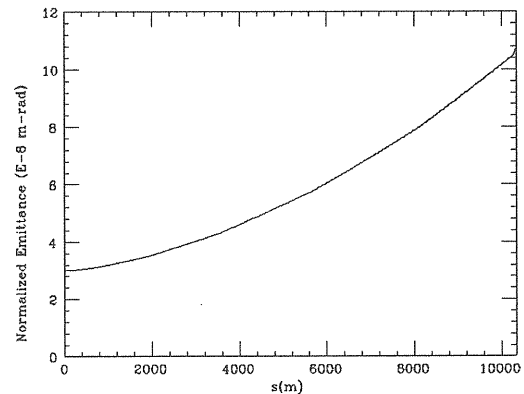


図3.5、s 対 規格化エミッタンス。入射エラー $1\ \mu\text{m}$ 、単一エネルギー。

3.2.2 バンチ内のエネルギー分布

バンチのエネルギーが単一の場合には、入射エラーが大きく増幅されてしまうことが分かった。しかしエネルギー分布をうまく利用する「BNS ダンピング」により、これを抑えることができる。つまり、2粒子モデルでも見たように、バンチの後方を前方よりも低いエネルギーにする。

バンチ内のエネルギー分布をきめる主な要因は、入射時の分布、縦方向の wakefield、加速

電場の時間的な変化である。このうち入射時の分布は、加速によってビームエネルギーが大きくなるにつれて相対的に影響が小さくなっていく。縦方向の wakefield は、加速管の構造とバンチの電荷分布から決まる。加速電場から受けるエネルギーは、粒子の通過する時刻での加速電場の位相によって変わるので、この位相を変えることにより、ある程度バンチ内のエネルギー分布をコントロールすることができる。

図 3.6 に、バンチ長 (正規分布) $\sigma = 125 \mu\text{m}$ 、バンチ当たり 1×10^{10} 個の電子の場合の wakepotential、すなわち wakefield のため失う長さ当たりエネルギーを示した。横軸 z はバンチ中心に対する縦方向の相対位置で、バンチ前方を負とした。

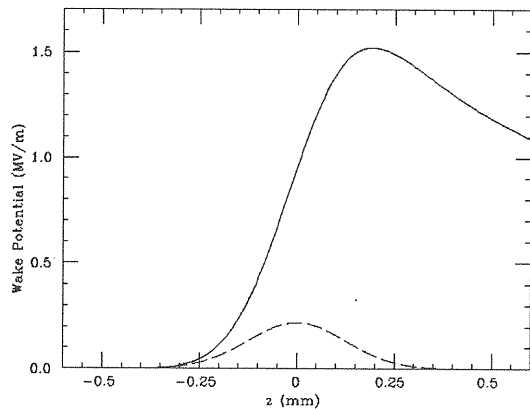


図 3.6、電荷が正規分布の場合の wakepotential (実線) と電荷分布の形状 (破線)

wakefield と加速電圧の両方の効果によってうける正味の長さ当たりのエネルギーを図 3.7 に示した。図は上から、バンチ中心を加速電圧のピークから 0 度、5 度、10 度、15 度ずらした場合に対応している。この図で、破線は参考のために示した電荷分布であり、点線は wakefield の無い場合の加速電場を表す。wakefield の影響により、位相 15 度ではほぼ受け取るエネルギーの分散が最小になり、位相 0 ではバンチ後方のエネルギーが前方より低くなっていることがわかる。この z と相関のあるエネルギー分布が「BNS ダンピング」をもたらす。

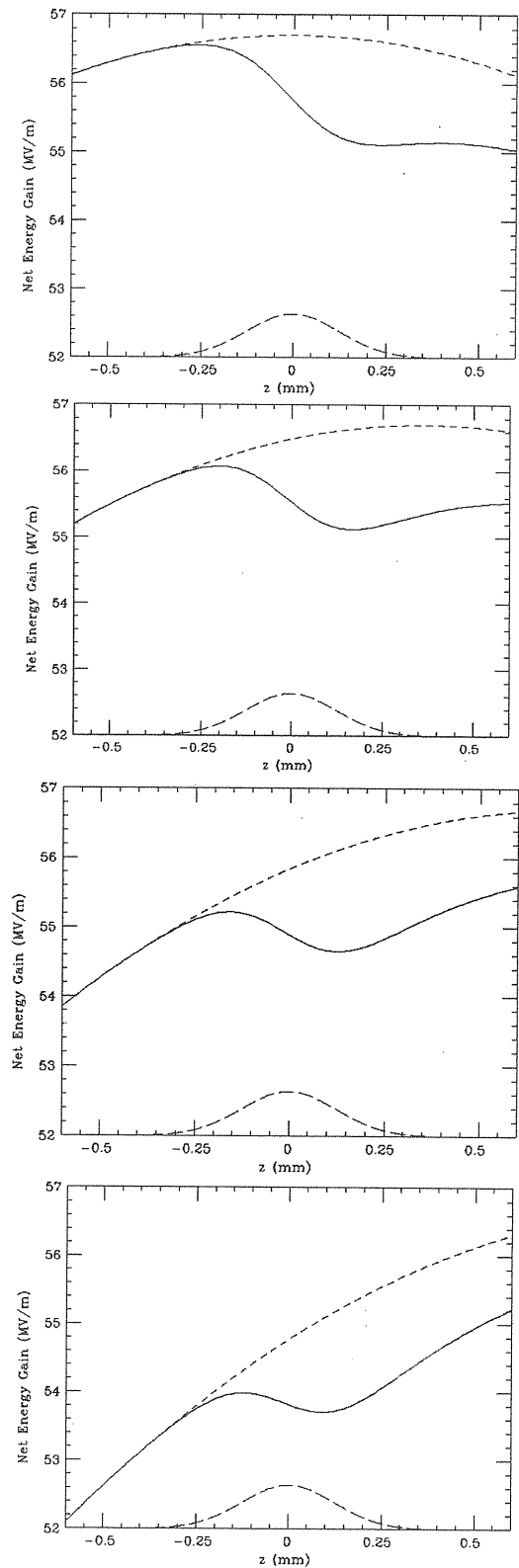


図 3.7、wakefield を含めた正味のエネルギーゲイン (実線) と wakefield なしでの加速電場 (点線)。破線は電荷分布の形。上から、バンチ中心と加速高周波の位相 0 度 5 度、10 度、15 度。

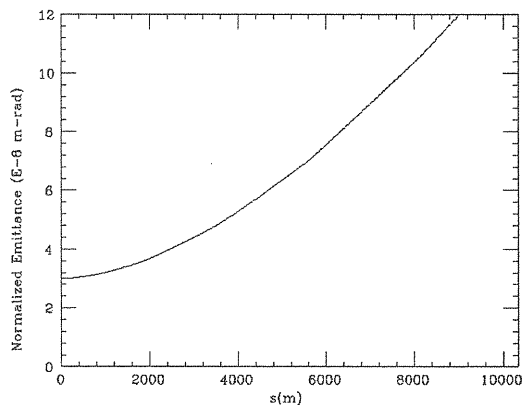
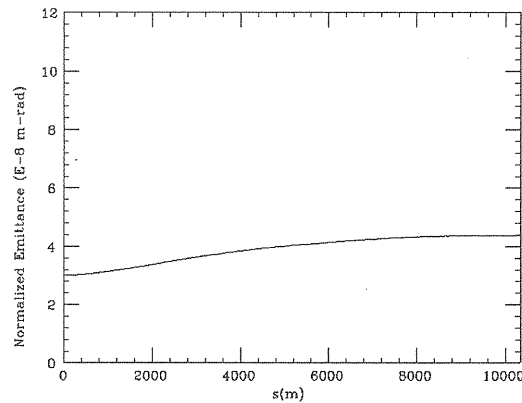
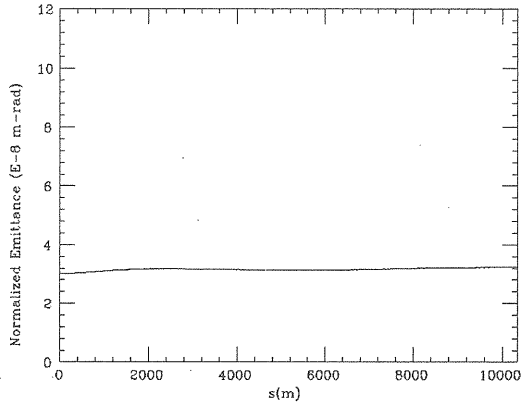
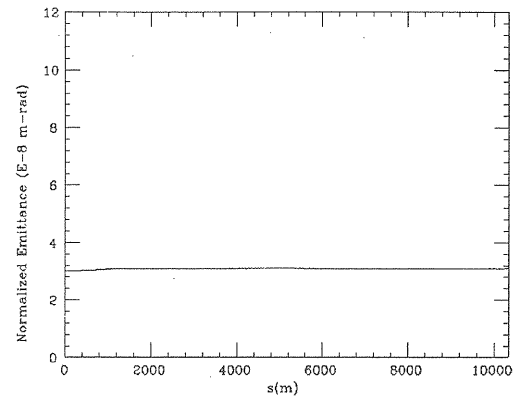
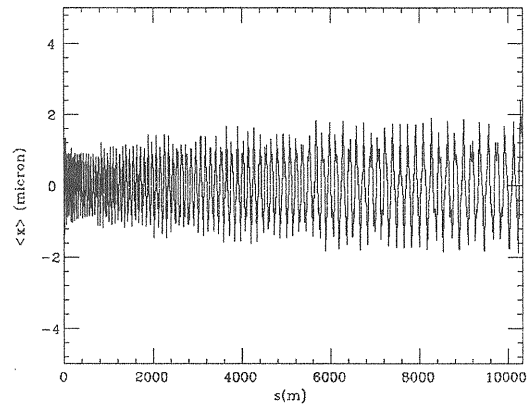
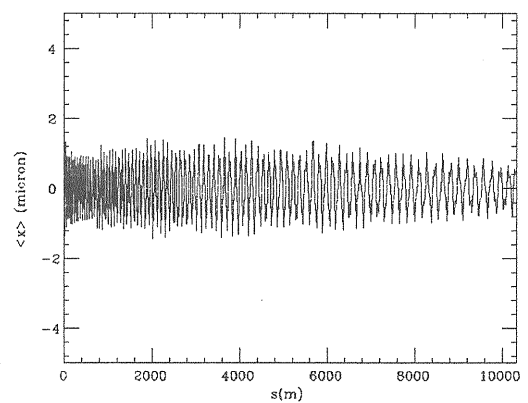
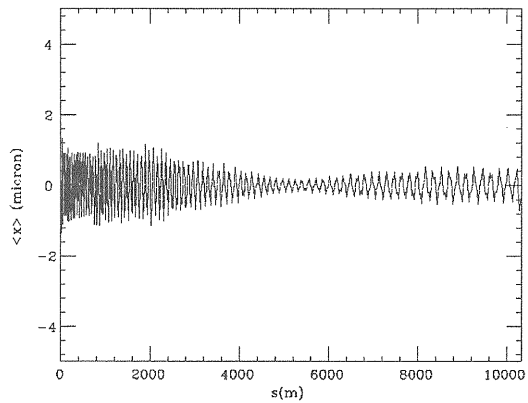
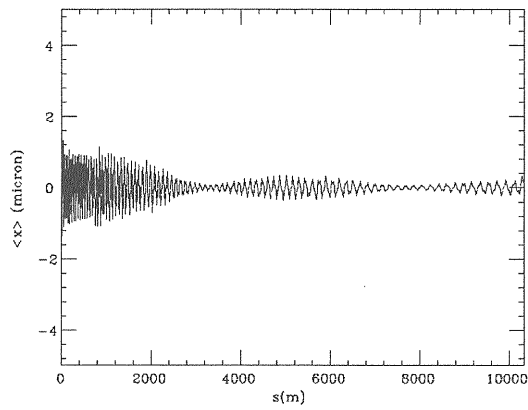


図 3.8、 s 対 $\langle x \rangle$ 。上から、バンチ中心と加速高周波の位相のずれ 0、5、10、15 度。入射エラー $1 \mu\text{m}$ 。

図 3.9、 s 対 規格化エミッタンス。上から、バンチ中心と加速高周波の位相のずれ 0、5、10、15 度。入射エラー $1 \mu\text{m}$ 。

3.2.3 E-z 相関のある場合のビーム振動

$$\delta E/E = \delta/2$$

シミュレーションによって得られた、バンチ中心と加速電圧のピークとの位相差を0度、5度、10度、15度の場合の、重心の位置の振動と規格化エミッタンス（初期値 3×10^{-8} m-rad）の変化の様子を、s（リニアック入り口からの距離）に対して各々図3.8、3.9に示す。これらを単一エネルギーの場合の図と比べることにより BNS ダンピングの効果は明らかであろう。ただし入射時のエネルギーは単一としているので、入射直後は振動が増大し、エミッタンスも少し大きくなる。

ここで、エネルギーと縦方向位置との相関の効果を定量的にみるため、 「E-z 相関」という無次元の量をを以下のように定義しよう。

$$\delta E/E \equiv \frac{1}{\sigma_z q} \int \Delta(z) z \rho(z) dz$$

$$\Delta(z) \equiv \frac{E(z) - E}{E} \quad (3.4)$$

E は平均ビームエネルギー、 σ_z はバンチ長、 q は全電荷、 $E(z)$ は z でのビームエネルギーの局所的な平均、 $\rho(z)$ は線電荷密度である。もし、 $E(z)$ が z の線形な関数になっていれば、 a を定数として、 $\Delta(z) = az$ と書けるので、

$$\delta E/E = \frac{1}{\sigma_z \int \rho(z) dz} \int az^2 \rho(z) dz = a \sigma_z \quad (3.5)$$

である。さらに、電子のエネルギーが z のみにより一意的に決まる場合には、

$$\sigma_E/E = \sqrt{\frac{\int \Delta^2(z) \rho(z) dz}{\int \rho(z) dz}} = a \sigma_z \quad (3.6)$$

であり、 $\delta E/E$ とエネルギーの相対的な広がり σ_E/E が等しくなる。

現実的な条件で、 「E-z 相関」 をバンチ中心と加速電圧のピークとの位相差の関数として図3.10に示した。0度の場合 -0.009 程度である。これを、2粒子モデルの場合と比較してみよう。粒子1と2のエネルギーを $E(1 \pm \delta/2)$ (E は平均エネルギー)、電荷は等しいとして

となる。また σ_z は2粒子間の距離の半分である。これらから、2粒子モデルから得られる auto-phasing の条件は、

$$\delta E/E(\text{auto phasing}) \approx \frac{\delta}{2}$$

$$\approx -\frac{eq\bar{\beta}^2 W_{\perp}(2\sigma_z)}{8E} \approx -0.009 \quad (3.7)$$

となる。ただし、シミュレーションで使ったパラメータを用い、 $\bar{\beta} \approx 5$ m (at 10 GeV)、cell 当たり $\pi/2$ の phase advance（付録参照）とした。これは、位相が0度の場合とほぼ同じ値である。実際には「E-z 相関」が2粒子モデルから求める auto-phasing の条件より小さい、位相が5度の場合にも「BNS ダンピング」の効果があることがわかる。

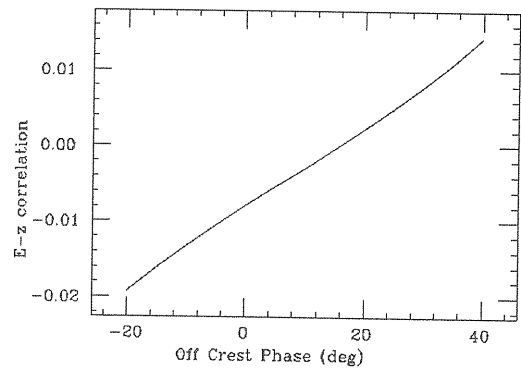


図 3.10、バンチ中心の加速高周波位相 対 E-z 相関

3.2.4 実際的な位相の選び方

前節では「E-z 相関」の絶対値を大きくすることにより、ビーム振動、エミッタンスの増大を抑えることができることをみた。しかし、実際のリニアコライダーでビームのエネルギー分布をどうするか、従って、加速高周波の位相をどう選ぶかにあたっては他にも考慮すべきことがある。

前節でみた「BNS ダンピング」は完全なアライメントを仮定して、エラーとしては入射のずれのみを考えた場合である。「BNS ダンピング」は、4極磁石や加速管のアライメント誤差

によって引き起こされるバンチの振動やエミッタンスの増大に対しては必ずしも効果的でない。しかも4極磁石等のアラインメント誤差によるエミッタンスの増大は、ビームのエネルギー幅の2乗に比例する。エネルギー幅 σ_E/E は「E-z 相関」を大きくするとやはり大きくなってしまいますので、「E-z 相関」の絶対値をむやみに大きくすることは、エミッタンスを小さく保存するという観点からもよくない。

さらに、最終収束(Final focus)系の限られたエネルギーアクセプタンス、物理実験からの要請などから、リニアック出口でのビームエネルギーの幅はなるべく小さい方がよい。

また、「E-z 相関」の絶対値を大きくするために加速高周波のピークをバンチ中心からあまり大きくずらすと、同じピーク電圧で加速される量が減少してしまう。加速の効率という点からも現実的な「E-z 相関」には限度がある。

JLC のデザインでは、リニアックを高周波の位相の異なる(例えば)3つの部分に分ける。そして初めの部分で「E-z 相関」の絶対値を大きくしていき、2番目の部分ではそれをほぼ一定に保ち、最後の部分でビームエネルギーの幅を最小に(従って「E-z 相関」の絶対値も小さく)するようにしている。図 3.11 に $-\delta E/E$ と σ_E/E の例を示す。ただし、入射時の $\delta E/E$ はゼロ、 σ_E/E を2%と仮定している。

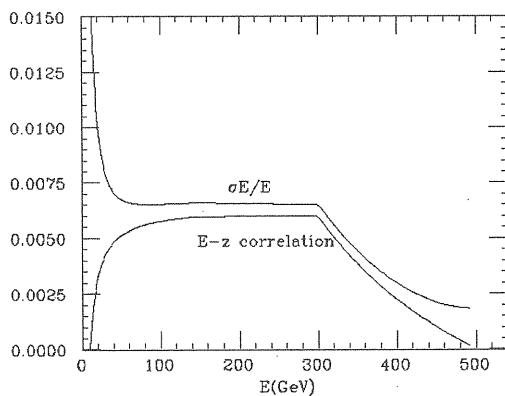


図 3.11、JLC デザインでの $-\delta E/E$ と σ_E/E の例。横軸はビームエネルギー

バンチ中心に対する加速高周波のピークからの位相のずれは、0~150 GeV で 2.6°、150~300 GeV で 3.4°、300 GeV 以上で 30.9°に設定した。これは、詳しいシミュレーションによって決め

られたものである。リニアック出口の σ_E/E を小さくしながら、入射エラーやアラインメントエラー等によるエミッタンスの増大を抑えるという要求を満たしている。リニアック中央部分での σ_E/E と $\delta E/E$ は0.0065 と-0.0060 程度、リニアック出口の σ_E/E は0.18%である。

3.3 アラインメントエラー

これまでは、加速管のアラインメントエラーのない場合に、特にBNS ダンピングについて見たが、ここでは、加速管のランダムなアラインメントエラーによる wakefield の影響を見ていく。

3.3.1 短距離 wakefield の影響の概算

最終的には、シミュレーションによって、要求されるアラインメントの精度などは見積もらなければならないが、その前に大雑把に計算することを考えてみる。

リニアコライダーでは、ビームの横方向(得に垂直方向)のサイズは極めて小さくなければならない。垂直方向の規格化エミッタンスは 3×10^{-8} m-rad と設計されているので $E=10$ GeV で約 $3 \mu\text{m}$ 、250 GeV では $0.6 \mu\text{m}$ 程度である。横方向の wakefield によってバンチ内の相対的な縦方向位置 z に依存した横方向の位置のずれがひき起こされるが、その大きさは、このビームサイズよりも十分小さくなければならない。加速管の設置誤差をミクロン以下にするのは困難と思われるので、式(3.3)で、 $x(z') \ll x_d$ であるから、

$$\Delta p_x(z) \approx \frac{e}{c} \int_{-\infty}^z \lambda(z') W_{\perp}(z-z') x_d dz' \quad (3.8)$$

と仮定してみよう。するとこれは電子の縦方向の分布と(ビームの重心の軌道に対する)加速管のアラインメントエラーのみに依存し、電子の横方向の分布に依らなくなる。

こうすると、2粒子モデルの式(2.41)(2.42)等が

$$q_1 W_{\perp} \rightarrow \int_{-\infty}^z \lambda(z') W_{\perp}(z-z') dz' \quad (3.9)$$

とすれば使える。つまり、

$$x(z, s) = l \sum_i x_{a,i} h_i(z, s) \quad (3.10)$$

$$h_i(z, s) \equiv -\frac{\sqrt{\beta(s)}}{mc^2 l \sqrt{\gamma(s)}} U_{\perp}(z) \times \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\beta_i} \sin(\psi(s) - \psi(s')) \frac{1}{\sqrt{\gamma(s')}} ds' \quad (3.11)$$

$$U_{\perp}(z) \equiv e \int_{-\infty}^z \lambda(z') W_{\perp}(z - z') dz' \quad (3.12)$$

である。ここで $x(z, s)$ は、入射から s の距離での、 z (バンチ中心からの相対的な縦方向の位置) での横方向の局所的な平均位置である。加速管のアラインメント単位内で β 、 ψ 、 γ 、 W_{\perp} が一定としてよい場合は、

$$h_i(z, s) = -\frac{\sqrt{\beta(s)}}{mc^2 \sqrt{\gamma(s)}} \frac{\sqrt{\beta_i}}{\sqrt{\gamma_i}} \sin(\psi_i - \psi(s')) U_{\perp}(z) \quad (3.13)$$

となる。 s における、wakefield による横方向の位置のばらつきを

$$\sigma_{Wx}^2(s) \equiv \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \lambda(z') x^2(z', s) dz'}{q} \quad (3.14)$$

で定義する。 q は全電荷である。この期待値 (ランダムなアラインメントエラーを持つ多くのリニアックがあった時の平均) は、

$$\langle x^2(z, s) \rangle = \left\langle \left(l \sum_i x_{a,i} h_i(s) \right)^2 \right\rangle = l^2 \sigma_a^2 \sum_i h_i^2(z, s) \quad (3.15)$$

だから、

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{Wx}^2(s) \rangle &= \frac{l^2 \sigma_a^2 \sum_i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(z') h_i^2(z', s) dz'}{q} \\ &= \frac{l^2 \sigma_a^2 \beta(s)}{m^2 c^4 q \gamma(s)} \sum_i \beta_i \sin^2(\psi_i - \psi(s')) \frac{1}{\gamma_i} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(z') U_{\perp}^2(z') dz' \end{aligned} \quad (3.16)$$

となる。さらに、2粒子モデルの時と同じように、加速管単位が多数あるとして位相の部分を平均し、 $l/\beta_i \ll 1$ とすると、

$$\sin^2(\psi_i - \psi(s')) \rightarrow \frac{1}{2} \quad (3.17)$$

とできるので、

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{Wx}^2(s) \rangle &= \frac{l^2 \sigma_a^2 \beta(s)}{m^2 c^4 q \gamma(s)} \sum_i \frac{\beta_i}{2 \gamma_i} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(z') U_{\perp}^2(z') dz' \end{aligned} \quad (3.18)$$

である。

wakefield による規格化エミッタンスの増大は、

$$\Delta \varepsilon_n \approx \gamma(s) \frac{\sigma_{Wx}^2(s)}{\beta(s)} \quad (3.19)$$

だから、結局、

$$\langle \Delta \varepsilon_n \rangle \approx \frac{l^2 \sigma_a^2}{m^2 c^4 q} \sum_i \frac{\beta_i}{2 \gamma_i} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(z') U_{\perp}^2(z') dz' \quad (3.20)$$

となる。これは、3つの部分に分けられる。 $l^2 \sigma_a^2$ はアラインメントの仕方で決まる量、 $\sum_i \frac{\beta_i}{2 \gamma_i}$ は Lattice から決まる量、 $\frac{1}{q} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(z') U_{\perp}^2(z') dz'$ は wakefunction と縦方向の電荷分布によって決まる量である。 $l/\beta_i \ll 1$ 、 $\beta \propto \sqrt{\gamma}$ の場合には、2粒子モデルと同じように、リニアック出口での規格化エミッタンスの増加の期待値は、

$$\langle \Delta \varepsilon_n \rangle \approx \frac{l \sigma_a^2 \beta_0}{m c^2 q g} \left(\frac{\sqrt{\gamma_f} - \sqrt{\gamma_0}}{\sqrt{\gamma_0}} \right) \int \lambda(z') U_{\perp}^2(z') dz' \quad (3.21)$$

と書ける。これは、アラインメント単位の長さ、誤差の2乗、初めの β 関数に比例し、加速勾配に反比例することがわかる。又、図 3.12 にファクター $\frac{\sqrt{\gamma_f} - \sqrt{\gamma_0}}{\sqrt{\gamma_0}}$ を電子のエネルギー

の関数として示す、ただし、入射エネルギーは $\gamma_0 = 10 \text{ GeV}/mc^2$ とした。

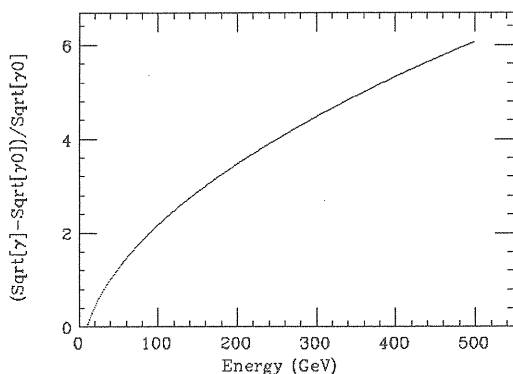


図 3.12、ファクター $\frac{\sqrt{\gamma_f} - \sqrt{\gamma_0}}{\sqrt{\gamma_0}}$ を電子のエネルギーの関数として示す。入射エネルギー 10 GeV ($\gamma_0 = 10 \text{ GeV}/mc^2$)

次に、 $\frac{1}{q} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(z') U_{\perp}^2(z') dz'$ をみてみよう。まず、

(3.12)から、バンチの電荷分布の形が同じならば、 $U_{\perp}(z)$ は、 q に比例するので、これは q^2 、つまり全電荷の2乗に比例することがわかる。次に、バンチが縦方向に正規分布で σ_z が $75 \mu\text{m}$, $125 \mu\text{m}$, $175 \mu\text{m}$ の場合について、x-バンドの加速管について $U_{\perp}(z)$ を数値計算で求めたのが、図3.13である。ただし、 $\pm 3\sigma_z$ の外側は電荷がないとした。バンチが長い程 $U_{\perp}(z)$ も大きくなることがわかる。さらに、 $q = 10^{10} e$ の場合の $\frac{1}{q} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(z') U_{\perp}^2(z') dz'$ を σ_z の関数として 図 3.14 に示す。 $\sigma_z = 125 \mu\text{m}$ では、 $2.02 \times 10^{14} \text{ eV}^2/\text{m}^4$ になる。

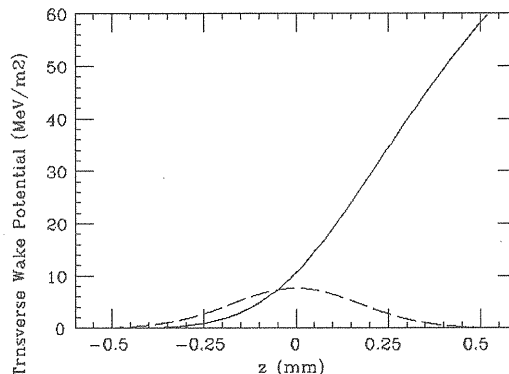
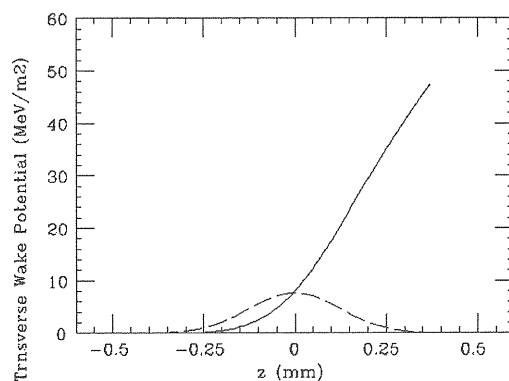
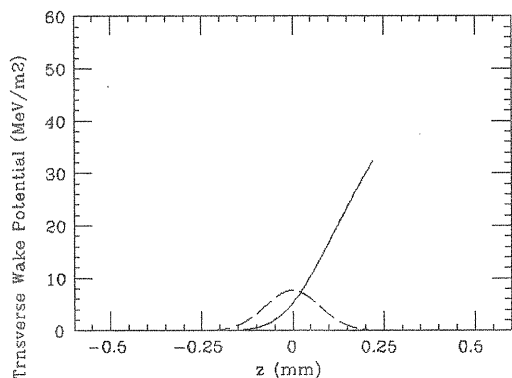


図 3.13、 $U_{\perp}(z)$ を z の関数として示す。上から、 σ_z が $75 \mu\text{m}$, $125 \mu\text{m}$, $175 \mu\text{m}$ の場合。ただし、 $\pm 3\sigma_z$ の外側は電荷がないとした。

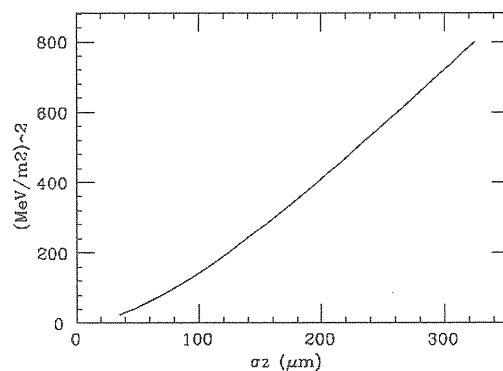


図 3.14、 $\frac{1}{q} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(z') U_{\perp}^2(z') dz'$ を σ_z の関数として示す。 $q = 10^{10} e$ 。

$W_{\perp}(z)$ がほぼ z に比例する場合、つまり、

$$W_{\perp}(z) \approx z W'_{\perp} \quad (3.22)$$

の場合には、 $\zeta = z/\sigma_z$ 、 $\zeta' = z'/\sigma_z$ として、

$$\begin{aligned}
U_{\perp}(z) &= \frac{qW'_{\perp}}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \int_{-\infty}^z (z-z') \exp\left[-\frac{z'^2}{2\sigma_z^2}\right] dz' \\
&= \frac{eqW'_{\perp}\sigma_z}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\zeta} (\zeta-\zeta') \exp\left[-\frac{\zeta'^2}{2}\right] d\zeta' \quad (3.23)
\end{aligned}$$

等となるので、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{q} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(z') U_{\perp}^2(z') dz' &\approx \frac{e^2 q^2 W_{\perp}^2 \sigma_z^2}{(2\pi)^{3/2}} \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2}\right) \left[\int_{-\infty}^{\zeta} (\zeta-\zeta') \exp\left(-\frac{\zeta'^2}{2}\right) d\zeta' \right]^2 d\zeta \\
&= F q^2 W_{\perp}^2 \sigma_z^2 \quad (3.24)
\end{aligned}$$

である。従ってこの場合には規格化エミッタンスの増大は、バンチ長の2乗に比例することがわかる。なお、

$$\begin{aligned}
F &\equiv \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2}\right) \\
&\quad \left[\int_{-\infty}^{\zeta} (\zeta-\zeta') \exp\left(-\frac{\zeta'^2}{2}\right) d\zeta' \right]^2 d\zeta \quad (3.25) \\
&\approx 0.6
\end{aligned}$$

である。

$W'_{\perp} = 0.907 \times 10^{20} [\text{V/C/m}^3]$ 、 $\sigma_z = 125 \mu\text{m}$ では、 $1.97 \times 10^{14} \text{ eV}^2/\text{m}^4$ になり、近似 $W_{\perp}(z) \approx z W'_{\perp}$ を使わない場合の計算値との違いは約 2.5% である。

(3.21)に (JLC の設計に近い) パラメーター

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= 5.5 \text{ m} \\
q &= 10^{10} e \\
g &= 56.7 \text{ MeV/m} \\
\gamma_0 &= 10 \text{ GeV}/mc^2 \\
\gamma_f &= 500 \text{ GeV}/mc^2 \\
\int \lambda(z') U_{\perp}^2(z') dz' &= 202 \text{ MeV}^2/\text{m}^2
\end{aligned}$$

を入れてみると、

$$\langle \Delta \varepsilon_n [\text{m-rad}] \rangle \approx 240 \times l [\text{m}] \sigma_a^2 [\text{m}] \quad (3.26)$$

である。 l を加速管の長さ 1.8 m とし、 $\langle \Delta \varepsilon_n \rangle$ を入射時の設計エミッタンス $\varepsilon_{n,0} = 3 \times 10^{-8} \text{ m-rad}$

の 25% より小さいという要求をすると、

$$\sigma_a < \sqrt{\frac{3 \times 10^{-8} \times 0.25}{1.8 \times 240}} [\text{m}] = 4.2 \mu\text{m} \quad (3.27)$$

となり、許されるアラインメントエラーの値を見積もることができる。

(3.3)から(3.8)とすることで、 $x(z') \ll x_a$ と近似したことの妥当性を調べてみよう。 $\langle \Delta \varepsilon_n \rangle$ が $\varepsilon_{n,0}$ の 25% より小さいとすると、wakefield による電子の横方向のずれは、

$$x^2 \approx \frac{\beta \langle \Delta \varepsilon_n \rangle}{\gamma} \quad (3.28)$$

であるから、(3.26)から、

$$\frac{x^2}{\sigma_a^2} \approx \frac{\beta [\text{m}]}{\gamma} \times 1.8 \times 240 \approx \begin{cases} 0.12 & (10 \text{ GeV}) \\ 0.017 & (500 \text{ GeV}) \end{cases} \quad (3.29)$$

となり、 $|x| \ll \sigma_a$ とは必ずしも言えない微妙なところである。

3.3.2 シミュレーション

ここでは、シミュレーションの結果を示し、さらに上の結果と比べてみる。

$\sigma_a = 5 \mu\text{m}$ 、 $l = 1.8 \text{ m}$ として、乱数の種を変えて $\Delta \varepsilon_n / \varepsilon_{n,0}$ を 400 個の異なる乱数の組みについて求めた。その分布を図 3.15 のヒストグラムで示す。この分布の平均は 0.38 である。

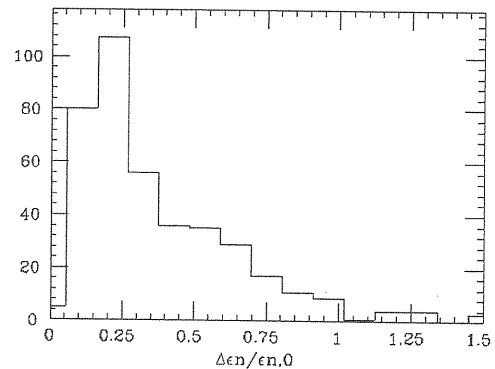


図 3.15、 $\Delta \varepsilon_n / \varepsilon_{n,0}$ の分布。シミュレーションによる。 $\sigma_a = 5 \mu\text{m}$ 。乱数の種 400 個。

シミュレーションは $W_{\perp}(z) \approx zW'_{\perp}$ 、 $W'_{\perp} = 0.907 \times 10^{20} [\text{V/C/m}^3]$ という近似を使っている。これを(3.21)と比べてみると、

$$\begin{aligned} \text{シミュレーション: } & \langle \Delta \varepsilon_n / \varepsilon_{n,0} \rangle = 0.38 \\ (3.21)\text{式より: } & \langle \Delta \varepsilon_n / \varepsilon_{n,0} \rangle \approx 0.34 \end{aligned}$$

となる。さらに、シミュレーションと(3.21)式から得られる $\sigma_a = 5 \mu\text{m}$ の場合の $\langle \Delta \varepsilon_n / \varepsilon_{n,0} \rangle$ を W'_{\perp} の関数として図 3.16 に示した。シミュレーションでは、バンチ中心と加速高周波の位相のずれが 0 度の場合と 15 度の場合を示した (リニアック全長にわたって一定)。0 度の場合にエミッタンスの増大が小さいのは、エネルギー幅が大きく BNS ダンピング等の効果が少しあるためである。(3.21)式が、15 度の場合 (エネルギー幅が小さい) よりも小さいエミッタンスの増大を与えるが、その差は $x(z') \ll x_a$ という近似の悪さを反映しているであろう。参考のため、図 3.17 にシミュレーションで得られた $\langle \Delta \varepsilon_n / \varepsilon_{n,0} \rangle$ と(3.21)式から得られる $\langle \Delta \varepsilon_n / \varepsilon_{n,0} \rangle$ の比を示す。wakefunction が大きくなる程、相対的にも差が大きくなっていることがわかる。

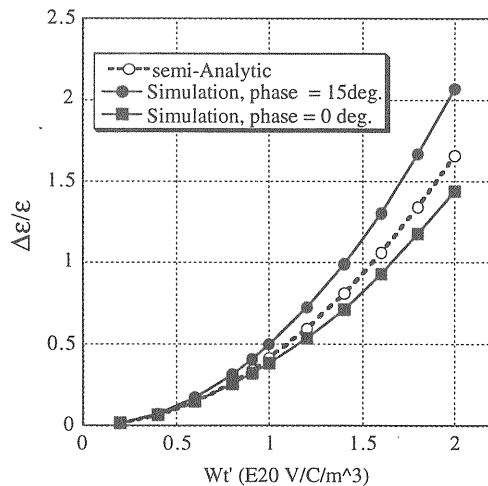


図 3.16、 $W_{\perp}(z) \approx zW'_{\perp}$ とした場合の $\langle \Delta \varepsilon_n / \varepsilon_{n,0} \rangle$ を W'_{\perp} の関数として示す。シミュレーション (黒丸: RF phase = 15°, 黒四角 RF phase = 0°) と(3.21)式からの計算 (白丸)。 $\sigma_a = 5 \mu\text{m}$ 。

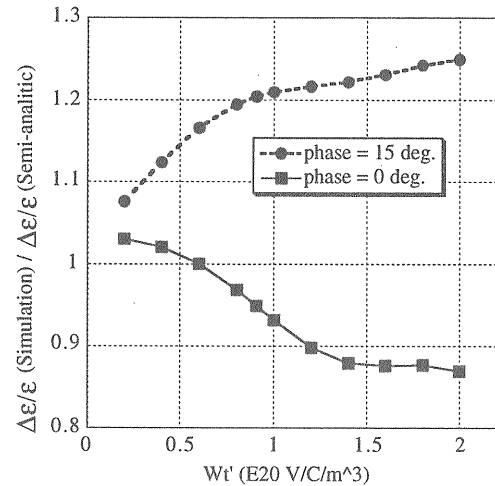


図 3.17、シミュレーションで得られた $\langle \Delta \varepsilon_n / \varepsilon_{n,0} \rangle$ と(3.21)式から得られる $\langle \Delta \varepsilon_n / \varepsilon_{n,0} \rangle$ の比。(黒丸: RF phase = 15°, 黒四角 RF phase = 0° でのシミュレーション)

4 バンチ間の wakefield の影響

JLC のデザインでは約 100 バンチからなるバンチトレインを 1 回のパルスで加速する。バンチの間隔は、x-バンドの加速波長の 32 倍の約 2.8 nsec (オプションとして 16 倍の約 1.4 nsec) で、全体の長さは、280nsec 程度になる。ここではこのようなマルチバンチのビームの発散を考える。この節では、バンチ内の変形などはないとして、各バンチを点電荷として扱う。

4.1 バンチ間のエネルギーの違い

縦方向の wakefield (beam loading と言ってもよい)、加速高周波の加速管内での伝播や減衰などによって、バンチ毎にエネルギーが異なる可能性がある。最終収束系や物理実験の要請から、全てのバンチのエネルギーは (リニアック出口では) よく揃っていないなければならない。バンチの間隔、各バンチの電荷が一定であれば、wakefield の影響は固定されたものであり、加速高周波の入カタイミングや位相をコントロールすることによってある程度補正することができる。もちろん全てのバンチのエネルギーを完全に等しくはできない。簡単ではないがバンチ内のエネルギーの広がりと比べて同程度または小さくできるとされている。一方、バンチ内の wakefield の影響に有効であった「BNS ダンピング」をバンチ間の wakefield の影響にも応用することは原理的には可能であろう。n 番目のバンチのエネルギーを E_n とし、

$$E_n = E_1(1 + \delta_n) \quad (n \geq 2) \quad (4.1)$$

とすると、

$$\delta_n \approx -\frac{eq\beta^2}{2E} \sum_{m=1}^{m<n} W_{\perp}(ms_B) \quad (4.2)$$

が「auto-phasing」の条件である。ここで s_B はバンチの間隔である。しかし、長距離の wakefield は、バンチ内での短距離の場合のように単調に増加するわけではなく、 δ_n は n によって大きく変わる (正にも負にもなる)。従って、バンチ間のエネルギーの違いを利用するためには、各バンチ毎のエネルギーを細かくコント

ロールしなければならず、リニアコライダーのようにバンチ数が多い場合には現実的でない。

以下では、バンチ毎のエネルギーの違いはないものとして議論する。

4.2 長距離 wakefield の影響の概算

4.2.1 入射エラー

ここでは、2 粒子モデルで述べたことを少しだけ拡張して長距離 wakefield の影響を見積もってみる。

まずアラインメントが完全であり入射エラーがあるとき、リニアック出口で最後のバンチの振幅がどの程度になるかを大雑把にみてみよう。

まず、簡単のため wakefunction $W_{\perp}(z)$ が $z > s_B$ でゼロになる場合、つまり wakefield が次のバンチまでしか届かないと仮定してみる。連鎖的な振動の励起であり、n+1 番目のバンチの振動は n 番目のバンチの振動のみによって励起される。

2 番目のバンチの振動は 2 粒子モデルの式 (2.14) から直接得られるが、3 番目以降は複雑になるので、まず加速がない場合を考える。2 番目のバンチの振動は、式 (2.11) で与えられ、入射の時に 2 番目のバンチが振動していない場合には、

$$x_2(s) = \sqrt{\beta} \frac{eqW_{\perp}}{2mc^2\gamma} \beta s \{a_1 \sin \psi(s) - b_1 \cos \psi(s)\} \quad (4.3)$$

である (W_{\perp} は $W_{\perp}(s_B)$ の意味)。

次に、3 番目のバンチが 2 番目のバンチによって励起される振動は、

$$\begin{aligned} x_3(s) = & -\frac{1}{4} \left(\frac{eqW_{\perp}}{2mc^2\gamma} \right)^2 \beta^2 s^2 \\ & \times \sqrt{\beta} \{a_1 \cos \psi(s) + b_1 \sin \psi(s)\} \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{eqW_{\perp}\beta}{2mc^2\gamma} \right)^2 \beta^3 s \sqrt{\beta} \{a_1 \sin \psi(s) - b_1 \cos \psi(s)\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

s の最高次のみとることとし、n+1 番目のバン

チの振幅を $A_n(s)$ と書くと、

$$A_1(s) \approx A_0 \frac{eqW_{\perp}(s_B)\beta}{2mc^2\gamma} s \quad (4.5)$$

$$A_2(s) \approx A_0 \frac{1}{2} \left(\frac{eqW_{\perp}(s_B)\beta}{2mc^2\gamma} s \right)^2 \quad (4.6)$$

さらに、2粒子モデルと同様の微分方程式を帰納的に解くことにより、 $n+1$ 番目のバンチの振動の振幅は、

$$A_n(s) \approx A_0 \frac{1}{n!} \left(\frac{eqW_{\perp}(s_B)\beta}{2mc^2\gamma} s \right)^n \quad (4.7)$$

であることがわかる。

加速のある場合には、

$$A_o(s) = \sqrt{\frac{\gamma(0)\beta(s)}{\gamma(s)\beta(0)}} A_o$$

と書いて、 $\beta \propto \sqrt{\gamma}$ と仮定すると、式(4.7)で

$$\begin{aligned} A_o \frac{\beta}{\gamma} s &\rightarrow \int_0^s A_o(s') \sqrt{\frac{\gamma(s')}{\gamma(s)}} \frac{\sqrt{\beta(s')\beta(s)}}{\gamma(s')} ds' \\ &= A_o(s) \int_0^s \frac{\beta(s')}{\gamma(s')} ds' \approx A_o(s) \frac{2mc^2\beta_0}{g} \sqrt{\frac{\gamma(s)}{\gamma(0)}} \end{aligned} \quad (4.8)$$

としてよいであろう。従って、

$$A_n(s) \approx A_0(s) \frac{1}{n!} \left(\frac{eqW_{\perp}(s_B)\beta_0}{g} \sqrt{\frac{\gamma(s)}{\gamma(0)}} \right)^n \quad (4.9)$$

となる。バンチ振動の発散が起きないためには、(大雑把に言って)

$$A_n(s) \leq A_0(s) \quad (4.10)$$

従って、

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n!} \left(\frac{eqW_{\perp}(s_B)\beta_0}{g} \sqrt{\frac{\gamma(s)}{\gamma(0)}} \right)} \leq 1 \quad (4.11)$$

でなくてはならないであろう。この条件は、 $n=1$ に対して最もきびしく、

$$\left(\frac{eqW_{\perp}(s_B)\beta_0}{g} \sqrt{\frac{\gamma(s)}{\gamma(0)}} \right) \leq 1 \quad (4.12)$$

となる。

JLCのパラメーター

$$\begin{aligned} q &\approx 1 \times 10^{10} e \\ \beta_0 &\approx 5.5 \text{ m} \\ g &= 56.7 \text{ MeV/m} \\ \frac{\gamma(s)}{\gamma(0)} &\approx 50 \end{aligned}$$

使うと、この条件は、

$$W_{\perp}(s_B) \leq 1 \times 10^{15} \text{ V/C/m}^2 \quad (4.13)$$

となる。ただしこれは、「 $W_{\perp}(z)$ が $z > s_B$ でゼロ」、「 s の最高次のみとる」、等という簡単化をしており、非常に大雑把なものであることを断っておく。

次に、「 $W_{\perp}(z)$ が $z > s_B$ でゼロ」という仮定を止め、そのかわりの簡単化として連鎖的な振動の励起を考えない。つまり「 n バンチ目まではwakefieldの影響を受けない」ときに $n+1$ 番目のバンチがwakefieldによって励起される振動を考える。1- n バンチが、入射エラーによって、

$$\begin{aligned} x_m(s) &= \sqrt{\frac{\gamma(0)}{\gamma(s)}} \sqrt{\beta(s)} a_1 \cos \psi(s) \\ &= A_0(s) \cos \psi(s) \end{aligned} \quad (4.14)$$

のように振動しているとしよう。すると、2粒子モデルの結果(2.14)の簡単な拡張から($\beta \propto \sqrt{\gamma}$)として、

$$x_{n+1} \approx \sum_{j=1}^n A_0 \frac{eqW_{\perp}(js_B)\beta_0}{g} \sqrt{\frac{\gamma(s)}{\gamma(0)}} a_1 \sin \psi(s) \quad (4.15)$$

であり、振幅は

$$A_{n+1}(s) \approx A_0(s) \frac{eq\beta_0}{g} \sqrt{\frac{\gamma(s)}{\gamma(0)}} \sum_{j=1}^n W_{\perp}(js_B) \quad (4.16)$$

のようになる。従って $A_n \leq A_0$ であるためには、

$$\frac{eq\beta_0}{g} \sqrt{\frac{\gamma(s)}{\gamma(0)}} \sum_{j=1}^n W_{\perp}(js_B) \leq 1 \quad (4.17)$$

でなければならない。この条件は、 $n=2$ のときは(4.12)と同じである。先ほどと同じリニアコライダーのパラメーターでは、

$$\sum_{j=1}^n W_{\perp}(js_B) \leq 1 \times 10^{15} \text{ V/C/m}^2 \quad (4.18)$$

でなければならない。実際には、連鎖的な励起もあるのでやはりこれもかなり大雑把な数値である。

4.2.2 アライメントエラー

次に、3.3 節と同様に、ランダムなアライメントエラーがあるときビームのずれがアライメントエラーに対して無視できるほど小さいとして、バンチ毎の横方向の位置のばらつきがどうなるかをみる。

2 粒子モデルの式(2.41) (2.50)を拡張して、 $n+1$ 番目のバンチについて、

$$x_{n+1}(s) = l \sum_i x_{a,i} f_{i,n}(s) \quad (4.19)$$

$$f_{i,n}(L) \approx \frac{eq \sum_{j=1}^n W_{\perp}(js_B) \sqrt{\beta(L)}}{mc^2 l \sqrt{\gamma(L)}} \frac{\sqrt{\beta_i}}{\sqrt{\gamma_i}} \times \beta_i \left\{ \cos(\psi(L) - \psi(s_i) + l/\beta_i) - \cos(\psi(L) - \psi(s_i)) \right\} \quad (4.20)$$

となる。wakefunction はどこでも一定として (W_{\perp} が i によらない) 、

$$x_{n+1}(s) = l \sum_i x_{a,i} k_i \sum_{j=1}^n W_{\perp}(js_B) = BS_n \quad (4.21)$$

$$k_i \equiv \frac{eq \sqrt{\beta(L)}}{mc^2 l \sqrt{\gamma(L)}} \frac{\sqrt{\beta_i}}{\sqrt{\gamma_i}} \times \beta_i \left\{ \cos(\psi(L) - \psi(s_i) + l/\beta_i) - \cos(\psi(L) - \psi(s_i)) \right\} \quad (4.22)$$

$$S_n \equiv \sum_{j=1}^n W_{\perp}(js_B) \quad (4.23)$$

$$B \equiv l \sum_i x_{a,i} k_i \quad (4.24)$$

と書くと、バンチ毎の位置の分散は、

$$x_{rms}^2 = \frac{\sum x_{n+1}^2}{N} - \left(\frac{\sum x_{n+1}}{N} \right)^2 = B^2 \left\{ \frac{\sum S_n^2}{N} - \left(\frac{\sum S_n}{N} \right)^2 \right\} = B^2 S_{rms}^2 \quad (4.25)$$

となる。ただし N はバンチ数、 S_{rms}^2 は、wakefunction の和 S_n の分散である。

2 粒子モデルの場合と同様の近似をして、(2.59)を導いたのと同様に B^2 の期待値は、

$$\langle B^2 \rangle = l \frac{e^2 q^2 \sigma_a^2 \beta_0^2}{mc^2 g} \frac{\sqrt{\gamma_f} - \sqrt{\gamma_0}}{\gamma_0 \sqrt{\gamma_f}} \quad (4.26)$$

となる。従って、

$$\langle x_{rms}^2 \rangle = \langle B^2 \rangle S_{rms}^2 \approx l \frac{e^2 q^2 \sigma_a^2 \beta_0^2}{mc^2 g} \frac{\sqrt{\gamma_f} - \sqrt{\gamma_0}}{\gamma_0 \sqrt{\gamma_f}} S_{rms}^2 \quad (4.27)$$

マルチバンチの規格化エミッタンスは、

$$\langle \Delta \varepsilon_n \rangle \approx \frac{\gamma}{\beta} \langle x_{rms}^2 \rangle \approx l \frac{e^2 q^2 \sigma_a^2 \beta_0^2}{mc^2 g} \frac{\sqrt{\gamma_f} - \sqrt{\gamma_0}}{\sqrt{\gamma_0}} S_{rms}^2 \quad (4.28)$$

となる。

前と同じ JLC でのパラメーターで、 $l=1.8 \text{ m}$ 、 $\langle \Delta \varepsilon_n \rangle$ の許容値を入射時 ($3 \times 10^{-8} \text{ m-rad}$) の 25% とすると、

$$\sigma_a S_{rms} < 3.7 \times 10^{10} \text{ V/C/m} \quad (4.29)$$

となる。仮に $\sigma_a = 5 \mu\text{m}$ であれば、

$$S_{rms} < 7.4 \times 10^{15} \text{ V/C/m}^2 \quad (4.30)$$

である。

バンチ数 N が大きい場合、バンチ間隔の整数倍での wakefunction $W_{\perp}(js_B)$ が、 j に対してランダムになっていて、大きさがほぼ、 σ_W であるとする。

$$S_n^2 = \left\{ \sum_{j=1}^n W_{\perp}(js_B) \right\}^2 \approx n \sigma_W^2 \quad (4.31)$$

従って、

$$S_{rms}^2 = \frac{\sum S_n^2}{N} - \left(\frac{\sum S_n}{N} \right)^2 \approx \frac{\sigma_W^2 \sum n}{N} \approx \frac{N \sigma_W^2}{2} \quad (4.32)$$

であるから、JLC の $N \approx 100$ の場合には、

$$\sigma_a \sigma_W < 5.2 \times 10^9 \text{ V/C/m} \quad (4.33)$$

$\sigma_a = 5 \mu\text{m}$ であれば、

$$\sigma_W < 1.0 \times 10^{15} \text{ V/C/m}^2 \quad (4.34)$$

である。

以上をまとめると、大雑把ではあるが、バンチ間で働く wakefunction に対する要求として、

$$W_{\perp} < 1.0 \times 10^{15} \text{ V/C/m}^2 \quad (4.35)$$

と見積もることができる。

4.3 加速管の長距離 wakefunction

バンチ内の影響を考える時は、加速管の wakefunction を、constant impedance で近似したが、長距離の wakefunction では、共振周波数のわずかな違いがビームに大きく結果に影響するので、各セル毎の形状の違いを真面目に考慮する必要がある。しかし、ここではとりあえず constant impedance (全てのセルが同じ形) の場合はどうなるかを見てみる。

長距離の wakefunction はいくつかの共振モードの和として表すのが便利である。バンチの間隔程度以上の距離では周波数の低いモードの

みが強く影響するからである。

x-バンドの加速管では、バンチ間で働く横方向の wakefield は TM₁₀ モードが支配的である。同じ形の x-バンドのセルが続いている場合の wakefunction は

$$W_{\perp}(z) \approx 2k \sin(\omega z/c) \quad (4.36)$$

と書け、 k はキックファクター、 ω は周波数で、

$$k \approx 4.5 \times 10^{16} \text{ V/C/m}^2 \quad (4.37)$$

$$\omega \approx 15 \text{ GHz} \quad (4.38)$$

と計算されている [ref.山本]。

これを、式(4.35)と比べてみると約 100 倍であり、とても許容できないことがわかる。

これを解決するために、wakefield の「ダンピング」と「デチューニング」が考えられている。

4.3.1 wakefield のダンピング

wakefield の「ダンピング」とは、なんらかの方法で、励起された dipole モードの wakefield を取り出すか吸収させて次のバンチがくるまでに減衰させる方法である。Q 値を使って書くと、

$$W_{\perp}(z) \approx 2k \sin\left(\frac{\omega z}{c}\right) \exp\left[-\frac{\omega z}{2Q c}\right] \quad (4.39)$$

であるから、ダンピングだけで 1/100 に減衰させるためには、

$$\exp\left[-\frac{\omega z}{2Q c}\right] < \frac{1}{100} \quad (4.40)$$

$\omega \approx 15 \text{ GHz}$ 、 $z/c \approx 2.8 \text{ ns}$ であるから、

$$Q < 29 \quad (4.41)$$

でなくてはならない。Q < 29 は非常に小さい値である。このような構造を「Damped Structure」あるいは、「Heavy Damped Structure」と呼んでいる。これを実現するものとして KEK の新竹氏の考えた「チョークモードキャビティ」がある。

4.3.2 wakefield の「デチューニング」

「デチューニング」とは、加速管のセル毎の形状の違いによって dipole モードのセル毎の周波数をコントロールし、互いの相殺によって wakefunction を小さくしようとするものである。

wakefunction は、各モードからの寄与を足して、

$$W_{\perp}(z) \approx \sum_{n=1}^N 2k_n \sin\left(\frac{\omega_n z}{c}\right) \quad (4.42)$$

と書けるであろう。ここで、 k_n 、 ω_n は n 番目のモードのキックファクターと周波数である。TM10 のみ考えるとすれば、モードの数 N はセル数に等しい。

全てのモードのキックファクターがほぼ等しく、 N が大きく、隣り合うモードの周波数の差が小さい場合には、

$$W_{\perp}(z) \approx 2k \int \rho(\omega) \sin\left(\frac{\omega z}{c}\right) d\omega \quad (4.43)$$

と書ける。ここで、 $\rho(\omega)$ はモードの密度、つまり $\rho(\omega)d\omega$ は $\omega \sim \omega + d\omega$ にあるモードの数である。wakefunction がモードの密度のフーリエ変換になっていることがわかる。

例えば、長方形の分布

$$\rho(\omega) = \begin{cases} \frac{N}{2\Delta} & (\omega_0 - \Delta < \omega < \omega_0 + \Delta) \\ 0 & (\omega < \omega_0 - \Delta, \omega_0 + \Delta < \omega) \end{cases}$$

の場合には、

$$W_{\perp}(z) \approx 2Nk \frac{\sin(\Delta z/c)}{(\Delta z/c)} \sin\left(\frac{\omega_0 z}{c}\right) \quad (4.43)$$

である。これは振幅が $\frac{\sin(\Delta z/c)}{(\Delta z/c)}$ のように変動する周波数 ω_0 の波になる。この振幅は、 $\frac{\Delta z}{c} \approx \pi$ 付近で小さくなる（バンチ間隔 2.8 nsec でこうなる条件は、 $\Delta \approx 180$ MHz）。しかし、wakefunction は再び大きくなって

$\frac{\Delta z}{c} \approx 3\pi/2$ では、周波数の広がりのない場合の

$2/3\pi \approx 0.2$ 倍になっているだけである（要求されているのは 1/100）。従って、精度よく $\frac{\Delta z}{c} \approx \pi$ でないとこのような分布は使えないであろう。

次に、 $\rho(\omega)$ が

$$\rho(\omega) = \frac{N}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\omega}} \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\sigma_{\omega}^2}\right) \quad (4.44)$$

の場合は、正規分布のフーリエ変換は正規分布であって、

$$W_{\perp}(z) \approx 2Nk \exp\left(-\frac{\sigma_{\omega}^2(z/c)^2}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_0 z}{c}\right) \quad (4.45)$$

となる。バンチ間隔 2.8 nsec で周波数の広がりのない場合の 1/100 以下にするためには、

$$\exp\left(-\frac{\sigma_{\omega}^2(z/c)^2}{2}\right) < \frac{1}{100} \quad (4.45)$$

すなわち、

$$\sigma_{\omega} \approx 170 \text{ MHz} \quad (4.46)$$

であればよい。

このようなデチューニングを得るための加速管の構造を「Detuned Structure」と呼んでいる。

4.3.3 デチューニングの問題点

図 4.1. に $\sigma_{\omega} = 170$ MHz で、 $\pm 2\sigma_{\omega}$ の範囲で正規分布に乗るように 180 個のモードを分布させた場合の $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{\omega_n z}{c}\right)$ （周波数の広がりがなくない場合の振幅との比）を 6 nsec 切りまで示す。又、 $\pm \sigma_{\omega}$ の範囲で正規分布に乗るように 200 個のモードを分布させた場合を図 4.2 に示す。 $\pm 2\sigma_{\omega}$ の範囲の場合には、2.4 nsec 切りでかなりデチューニングの効果がみられるが、 $\pm \sigma_{\omega}$ では、バンチ間隔である 2.8 nsec までに十分なデチューニングが得られないことがわかる。

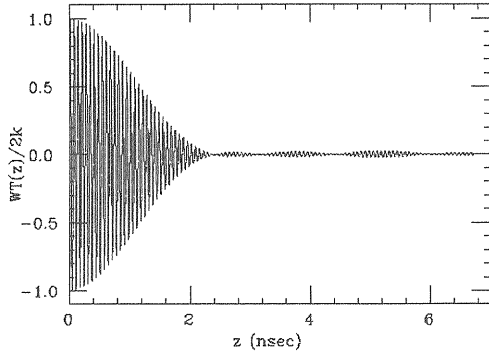


図 4.1、 Detuned Structure, $\sigma_\omega = 170$ MHzで、 $\pm 2\sigma_\omega$ の範囲で正規分布に乗るように 200 個のモードを分布させた場合の $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{\omega_n z}{c}\right)$ (周波数の広がりががない場合の振幅との比)。

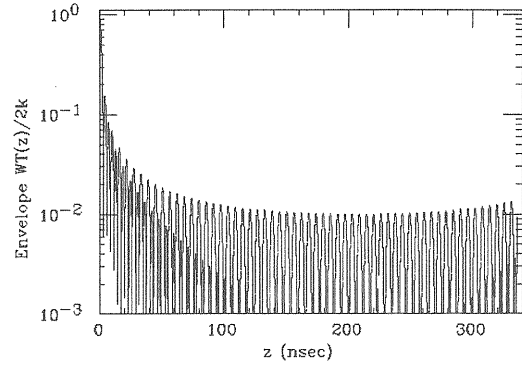


図 4.4、 Detuned Structure, $\sigma_\omega = 170$ MHzで、 $\pm \sigma_\omega$ の範囲で正規分布に乗るように 200 個のモードを分布させた場合の $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{\omega_n z}{c}\right)$ の envelope。

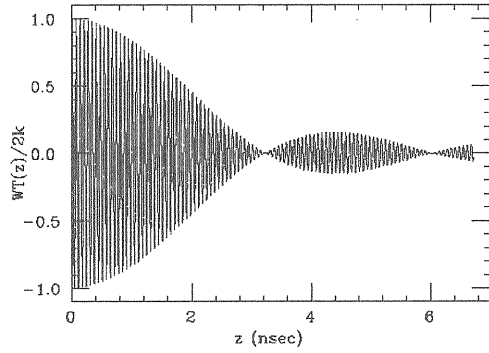


図 4.2、 Detuned Structure, $\sigma_\omega = 170$ MHzで、 $\pm \sigma_\omega$ の範囲で正規分布に乗るように 200 個のモードを分布させた場合の $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{\omega_n z}{c}\right)$ 。

一方、より長距離までの wakefunction の envelope (ピークを結んだ線) を $\pm 2\sigma_\omega$ の範囲の場合と $\pm \sigma_\omega$ の範囲の場合に図 4.3、4.4 に示す (log scale)。 $\pm 2\sigma_\omega$ の範囲の場合には 30 nsec 辺りで最小になった後再び増加してしまう。 $\pm \sigma_\omega$ の範囲の場合には増加し始めるのは 200 nsec 辺りからで、変化も緩やかである。

定性的には、wakefield のモードの周波数の全体の広がり と 初めのデチューニングまでの時間 (距離) が反比例する。一方、隣り合うモード周波数の差と wakefunction が再び増加し始めるまでの時間が反比例する。大雑把にいて、全体の周波数の広がり幅を Δ 、隣り合うモード周波数の差を δ とすると、

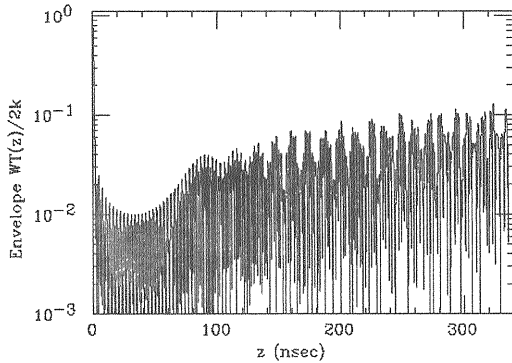


図 4.3 Detuned Structure, $\sigma_\omega = 170$ MHzで、 $\pm 2\sigma_\omega$ の範囲で正規分布に乗るように 200 個のモードを分布させた場合の $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{\omega_n z}{c}\right)$ の envelope。

$$\begin{aligned} \text{デチューニングまでの時間} &\approx \Delta^{-1} \\ &\quad (4.48) \\ \text{再び増加し始めるまでの時間} &\approx \delta^{-1} \end{aligned}$$

である (周波数分布のかたちによってこれにファクターがつくであろう)。従って、すぐ次のバンチがくるまでに wakefunction を小さくするためには Δ はなるべく大きくしたいが、ずっと後方のバンチへの影響を考えると δ はなるべく小さくしたい。しかし、この 2 つは加速管のセル数 (モード数) がバンチ数に比べて十分大きくなければ成立しない。JLC のパラメーターでは、2.8~280 nsec の範囲 (バンチ間隔 2.8 nsec、バンチ数 100) で、wakefunction が周波数の広がりががない場合の 1/100 程度以下でなければならないが、セル数 200 の図 4.1~4.4 の例では、

それが満たされないことがわかる。

4.3.4 複数の加速管でのデチューニング

これを解決するための1つの方法として、モードの数を増やすことが考えられる。1つの加速管は、200セルからなっているので、支配的であるTM10モードの数は200だが、いくつかの種類、形状のわずかに異なる加速管を使うことによってモードの数を増やすことができる。実際4種類の加速管によって、長距離でのwakefunctionを抑えることが考えられた。しかし、wakefunctionを式(4.42)のようにしてよいのは、考えている加速管(の組)が、

β 関数に比べて短く

ビーム軌道に平行に設置されている

場合のみである。なぜなら、各モードのwakefieldは、加速管の中のある限られた領域に分布するが、もしも、加速管(の組)が β 関数に比べて短くなければ、励起されたり蹴られたりする場所でのベータatron振動の位相がモードによって異なってしまふ。又、加速管(の組)がビーム軌道に平行でなければ、構造の横方向の中心位置がモードによって異なることになり、モードによって励起される強さが違ってしまう。いずれの場合もwakefieldを各モードの単純な足し合わせとすることができない。

この事情をランダムアラインメントエラーの場合の数式でみてみよう。長いアラインメント単位(ビーム軸に完全に平行と仮定)のwakefieldが、多数のモードからなっていると、各モードは短い長さに局在しているとす。そのk番目のモードのwakefunctionを W_k 、局在している長さを l_k とすると、式(4.20)、(4.21)のかわりにi番目のアラインメント単位(加速管の組)について、

$$f_{i,n} \approx \sum_k \frac{eq \sum_{j=1}^n \frac{l_k}{l} W_k(js_B) \sqrt{\beta(L)}}{mc^2 l \sqrt{\gamma(L)}} \frac{\sqrt{\beta_{ik}}}{\sqrt{\gamma_i}} \times \beta_{ik} \left\{ \cos(\psi_L - \psi(s_{ik}) + l_k / \beta_{ik}) - \cos(\psi_L - \psi(s_{ik})) \right\} \\ \approx - \sum_k \frac{eq \sum_{j=1}^n W_k(js_B) \sqrt{\beta(L)}}{mc^2 \sqrt{\gamma(L)}} \frac{\sqrt{\beta_{ik}}}{\sqrt{\gamma_i}} \sin(\psi_L - \psi(s_{ik})) \quad (4.49)$$

$$x_{n+1}(L) \approx l \sum_i x_{a,i} \frac{-eq \sqrt{\beta(L)}}{mc^2 \sqrt{\gamma(L)} \gamma_i} \times \sum_{j=1}^n \sum_k W_k(js_B) \sqrt{\beta_{ik}} \sin(\psi_L - \psi(s_{ik})) \quad (4.50)$$

でなければならない。ここで、 s_{ik} はi番目のアラインメント単位の中でk番目のモードのある場所、 β_{ik} はそこでの β 関数である。アラインメント単位が短ければ、 $\sqrt{\beta_{ik}} \sin(\psi_L - \psi(s_{ik}))$ はほとんどkによらないので、

$$\sum_{j=1}^n \sum_k W_k(js_B) \sqrt{\beta_{ik}} \sin(\psi_L - \psi(s_{ik})) \\ \rightarrow \sqrt{\beta_i} \sin(\psi_L - \psi(s_i)) \sum_{j=1}^n \sum_k W_k(js_B) \quad (4.51)$$

とでき、

$$W_{\perp}(js_B) = \sum_k W_k(js_B) \quad (4.52)$$

として、式(4.20)、(4.21)と同じになる。従って、この場合には全モードのwakefunctionの和を小さくする、というデチューニングが有効である。しかし、アラインメント単位が長い場合には、 $x(L)$ を小さくするためには、

$$\sum_k W_k(js_B) \sqrt{\beta_{ik}} \sin(\psi_L - \psi(s_{ik})) \quad (4.53)$$

を小さくしなければならない。リニアック出口では横方向の位置 $x(L)$ だけでなく角度 $x'(L)$ も小さくしたいはずで、そのためには、ここでは詳しく述べないが

$$\sum_k W_k(j s_B) \sqrt{\beta_{ik}} \cos(\psi_L - \psi(s_{ik})) \quad (4.54)$$

も小さくなければならない。この2つをモード周波数のデチューニングによって実現することは、 $\psi(s_{ik})$ がkに大きく依存する場合（ β 関数に比べてデチューニングに必要な長さが長い場合）には不可能である。

4本の加速管を並べると約8mになり入射直後の β 関数よりも大きくなってしまふ。wakefieldの影響は入射直後の低エネルギー部分で大きいので、このようにしてモードの数を増やすことはあまり効果的でない。また、組み合わせる加速管の本数が多くなれば、それらを精度よくアラインメントすることも簡単でなくなる。

4.3.5 デチューニング+ダンピング

デチューニングだけでは十分でなければ、それに緩やかなダンピング（減衰）を加えればよいであろう。図 4.3 の例では、100 nsec 辺りで wakefunction が大きくなるので、Q-値を

$$Q = \omega \times 100 \text{ [ns]} \approx 10^4 \quad (4.55)$$

程度以下にすればよいと考えられる。

$Q = 6500$ として、 $\sigma_\omega = 170 \text{ MHz}$ で、 $\pm 2\sigma_\omega$ の範囲で正規分布に乗るように 200 個のモードを分布させた場合の

$$\sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{\omega_n z}{c}\right) \exp\left(-\frac{1}{2Q} \frac{\omega_n z}{c}\right) \quad (4.56)$$

の envelope を図 4.5 に示す。

図 4.3 と比較すればダンピングの効果がわかる。これは、ダンピングのみを使う場合（ $Q < 29$ ）と比べればはるかに緩やかな減衰である。このようなデチューニングとダンピングを得るための加速管の構造を「Damped Detuned Structure」と呼んでいる。

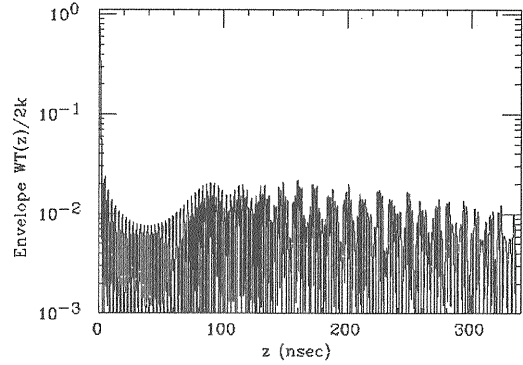


図 4.5、Damped-Detuned structure, $Q = 6500$, $\sigma_\omega = 170 \text{ MHz}$ で、 $\pm 2\sigma_\omega$ の範囲で正規分布に乗るように 200 個のモードを分布させた場合の $\sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{\omega_n z}{c}\right) \exp\left(-\frac{1}{2Q} \frac{\omega_n z}{c}\right)$ （周波数の広がりが無い場合の振幅との比）の envelope。

4.4 現実的加速管の wakefunction

JLC の加速管の設計では 200 個の dipole モード TM10 の周波数分布を正規分布に近くなるようにしている。実際の wakefunction の計算は、セル間のカップリングや、TM10 より高次のモードなども考慮しなければならず単純ではない。JLC の設計研究では、等価回路モデルによって計算されている。このモデルでは、各セルの field を 6 個のモードで展開し、同じセル内及び隣り合うセルでのモード間のカップリングを求める。そのようにしてできる 1200 個のカップリングを持つ共振回路を解いて、1200 個の独立なモードの周波数と大きさが求められている。[4]

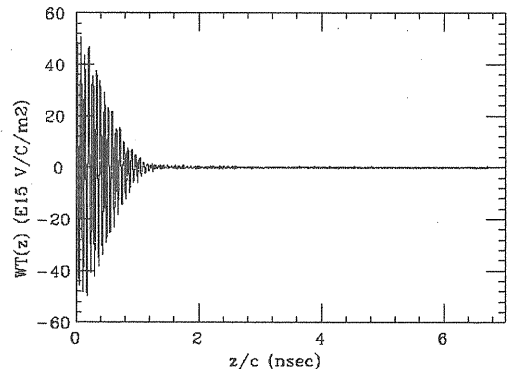


図 4.6、x-band 加速管の長距離 wakefunction の例。

1つの加速管の構造の例について、ダンピング無しと仮定した時の wakefunction を図4.6に、wakefunction の envelope を図4.7に、全てのモードについて $Q=6500$ と仮定した時の wakefunction の envelope を4.8に示す。

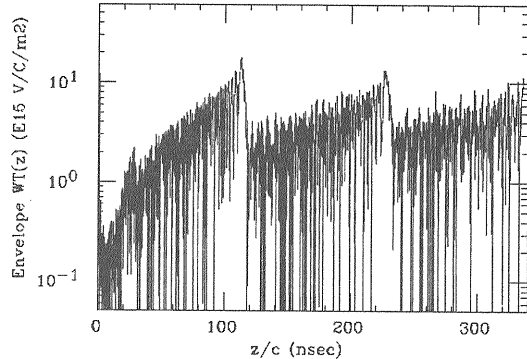


図4.7、x-band 加速管の wakefunction の envelope の例。減衰なしと仮定した場合。

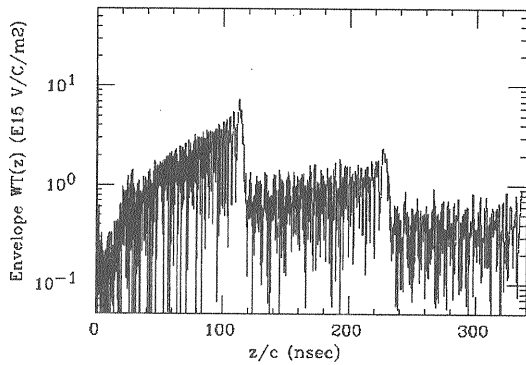


図4.8、x-band 加速管の wakefunction の envelope の例。全てのモードで $Q=6500$ と仮定。

この wakefunction が、式(4.18)や、(4.30) (4.34) の条件(これらの数値はかなり大雑把なものだが)を満たしているかどうかをしてみる。ダンピング無しの場合、図4.9に $W_{\perp}(js_B)$ をバンチ番号 j の関数として、図4.10に $\sum_{j=1}^n W_{\perp}(js_B)$ を n の関数として示した。又、 $Q=6500$ と仮定した場合を図4.11、4.12に示す。又、これらの分布から、

	σ_w (10^{15} V/C/m ²)	S_{rms} (10^{15} V/C/m ²)
no damp	2.7	12
$Q=6500$	0.9	3.8

であり、4.2節の結果と比べてみると、ダンピング無しでは wakefield が大きくなり過ぎるが、 $Q=6500$ ならばほぼ許容できる程度と思われる。

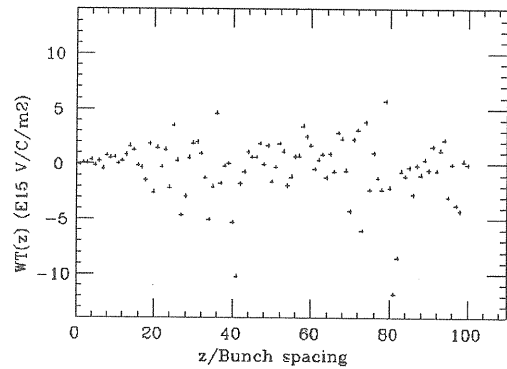


図4.9、x-band 加速管の $W_{\perp}(js_B)$ の例。減衰なしと仮定した場合。

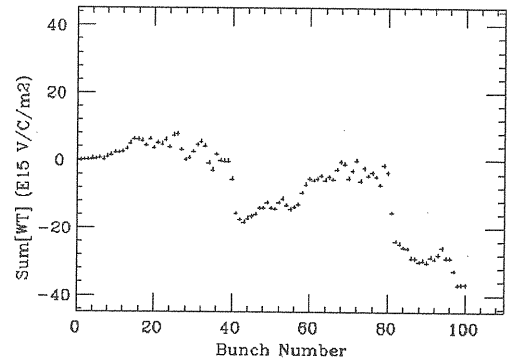


図4.10、x-band 加速管の $\sum_{j=1}^n W_{\perp}(js_B)$ の例。減衰なしと仮定した場合。

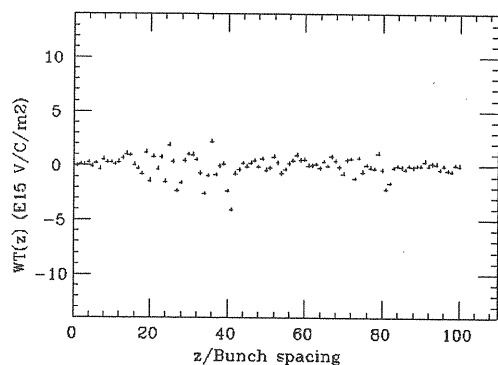


図4.11、x-band 加速管の $W_{\perp}(js_B)$ の例。全てのモードで $Q=6500$ と仮定した場合。

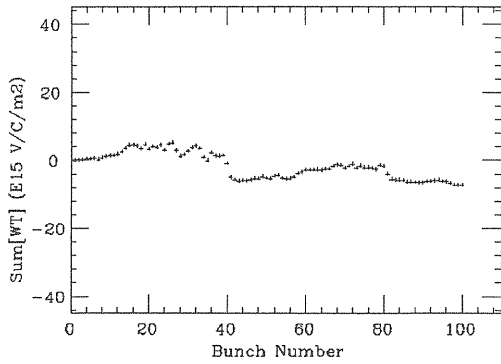


図 4.12、x-band 加速管の $\sum_{j=1}^n W_{\perp}(js_B)$ の例。全てのモードで $Q = 6500$ と仮定した場合。

最後に、JLC のパラメーターを使ったシミュレーションで長距離 wakefield の影響を見た。入射エラーがビームサイズの 0.5 倍であり、アラインメントが完全である時の長距離 wakefield によるエミッタンスの増大は、

	$\Delta\varepsilon_n/\varepsilon_{n,0}$
no damp	70 %
$Q = 6500$	4 %

又、入射エラーなしで、各加速管が独立に $5\mu\text{m}$ のランダムなアラインメントエラーを持つ場合には、

	$\langle \Delta\varepsilon_n/\varepsilon_{n,0} \rangle$
no damp	90 %
$Q = 6500$	6 %

であった。シミュレーションの結果もやはり、デチューニングだけでは十分でなく、さらにダンピングを加えることが効果的であることを示している。

最後に

はじめに書いたように、「高エネルギー、低エミッタンス、長距離の電子リニアックでの加速管の wakefield の影響」についてあまり話を広げずに問題を絞って、式の変形過程もなるべく省略しないで述べてきたつもりである。

ここで述べてきた数式の多くは、過去の文献やノートにあまり頼らないであらためて導いたものがほとんどである。筆者自身としては新たな発見もあり、よい勉強になったと思っている。しかし解りやすいものになったかどうかは疑問であるし、誤りもあるかと思うので指摘していただきたい。

参考文献

- [1] A.Chao, 「Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators」 John Wiley & Sons, INC.,1993.
- [2] 「JLC Design Study」,1997.
- [3] 短距離 wakefunction の計算式は横谷馨氏 (KEK)による。計算式は文献[2]を参照。
- [4] 山本昌志、「リニアック加速管の長距離ウェーク場の研究」、KEK Report 94-9.
- [5] 肥後寿泰、OHO'95
- [6] 久保浄、OHO'91、OHO'95.

付録1 FODOでのChromaticity

本文中、式(2.20)のところで、ベータatron振動の周期を 2π で割ったものを $\bar{\beta}$ と定義した。そこでエネルギーを $E \rightarrow E(1+\delta)$ とした時、 $\bar{\beta} \rightarrow \bar{\beta}(1+\delta)$ と近似したが、簡単なFODOラティスの場合にこれを検討してみる。

薄い4極磁石とドリフト空間からなるFODOラティスで、発散と収束の磁石の強さ k が等しく、間の距離 l も全て等しい場合を考える。[神谷OHO'84参照]FODO cell 1つのトランスファー行列は、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -k/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -k/2 & 1 \end{bmatrix}$$

となり、cell 当たりの phase advance μ_c は、

$$\sin \frac{\mu_c}{2} = \frac{kl}{2} \quad (\text{A.1})$$

となる。又、 $\bar{\beta}$ の定義より、

$$\bar{\beta} = \frac{l}{2\pi\mu_c} = \frac{l}{4\pi \arcsin\left(\frac{kl}{2}\right)} \quad (\text{A.2})$$

である。以上が、エネルギーが E の粒子に対するものとする、エネルギーが $E(1+\delta)$ の粒子に対しては、

$$k \rightarrow \frac{k}{1+\delta} \quad (\text{A.3})$$

とすればよいので、

$$\bar{\beta} \rightarrow \frac{l}{4\pi \arcsin\left(\frac{kl}{2(1+\delta)}\right)} \quad (\text{A.4})$$

である。一般に $\Delta \ll 1$ では、

$$\arcsin(x+\Delta) \approx \arcsin(x) + \frac{\Delta}{\cos(\arcsin(x))} \quad (\text{A.5})$$

であるから、 $\delta \ll 1$ の時、

$$\arcsin\left(\frac{kl}{2(1+\delta)}\right) \approx \arcsin\left(\frac{kl}{2}\right) - \frac{kl\delta/2}{\cos\left(\arcsin\left(\frac{kl}{2}\right)\right)} \quad (\text{A.6})$$

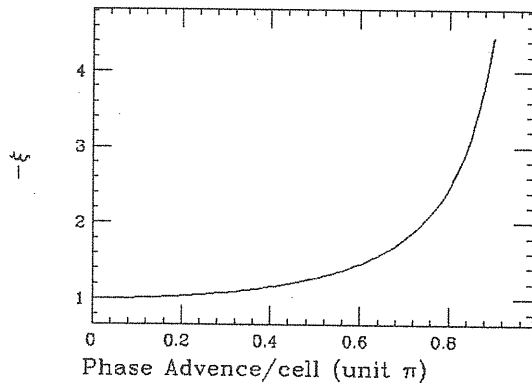
従って、

$$\begin{aligned} \bar{\beta} &\rightarrow \frac{l}{4\pi \arcsin\left(\frac{kl}{2(1+\delta)}\right)} \\ &\approx \bar{\beta} \left(1 + \frac{kl\delta}{2\arcsin\left(\frac{kl}{2}\right)\cos\left(\arcsin\left(\frac{kl}{2}\right)\right)} \right) \\ &= \bar{\beta} \left(1 + \frac{kl}{\mu_c \cos\left(\frac{\mu_c}{2}\right)} \delta \right) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

である。 δ にかかるファクター、

$$\frac{kl}{\mu_c \cos\left(\frac{\mu_c}{2}\right)}$$

は、エネルギーの差による、波長の相対的な変化であるから、これは「Chromaticity」と呼ばれるものの符号を反対にしたものである。このChromaticityを図A.1にcell当たりのphase advanceの関数として示す。



図A.1、FODO LatticeでのChromaticity $\times (-1)$ をcell 当たりの phase advance の関数として示す。

本文中で使った $\bar{\beta} \rightarrow \bar{\beta}(1+\delta)$ は cell 当たりの phase advance が小さい時の近似である。JLC では、cell 当たり約 $\pi/2$ の phase advance であるから、

$$\bar{\beta} \rightarrow \bar{\beta} \left(1 + \frac{4}{\pi} \delta\right) \quad (\text{A.8})$$

となる。

付録2 JLC のパラメーター

本項では、リニアコライダーのパラメーターとして以下の表のものを仮定した。結果を示したシミュレーションでは、特に断らないかぎりこれを用いた。なお、これは基本的に JLC の設計パラメーターに近いものであるが完全に一致するわけではない。（詳しくは参考文献[1]を参照）。

Initial beam energy	10 GeV
Final beam energy	500 GeV
Bunch charge	1.01×10^{10}
Bunch length	125 μm
Nominal normalized vertical emittance	3×10^{-8} m-rad
Frequency of RF	11.424 GHz
Acceleration gradient with loading	56.7 MV/m
Number of acc. structures	4788/linac
Acc. structure length	1.8 m
Averaged structure iris	0.18 λ
Length of a FODO cell	8.6 m at 10GeV
Phase advance/ FODO cell	90° at 10GeV

付録3 短距離 wakefunction の Scaling

ここでは、加速空洞のような構造の大きさを相似形を保ったままで変えた時に短距離の wakefunction がどのように変わるかをみる。これは、例えば加速高周波の周波数（大きさに反比例する）と、wakefield の影響の scaling 等を与える。ある空洞 1 と、それと相似形で大きさ（長さ）が a 倍の空洞 2 を考える。

まず、monopole モードの電磁場を考える。相似形であるから、空洞 1 を点電荷が通過した場合と、空洞 2 を、点電荷が通過した場合とで、励起される電磁場もやはり相似形であろう。その強さは通過する電荷に比例するはずで、各々の wakefunction を

$$\begin{aligned} W_{z,1} &\equiv \lim_{s \rightarrow +0} W_{z0}(s)_{\text{Cavity1}} \\ W_{z,2} &\equiv \lim_{s \rightarrow +0} W_{z0}(s)_{\text{Cavity2}} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

とし、空洞 1 を q_1 、空洞 2 を q_2 が通過した時に励起される電圧を V_1 、 V_2 とすると、

$$\begin{aligned} V_1 &= q_1 W_{z,1} \\ V_2 &= q_2 W_{z,2} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

となる。 q_2 、 q_1 を選んで電磁場の強さが等しくなるようにしたとする。電圧は長さに比例するので、

$$V_2 = a V_1 \quad (\text{A.11})$$

又、この時空洞内 1、2 に与えられたエネルギーを U_1 、 U_2 とすると、これは体積に比例するので、

$$U_2 = a^3 U_1 \quad (\text{A.12})$$

となる。

空洞内に与えられたエネルギーは通過した電荷が失ったエネルギーに等しいから、(1.10) の第 3 式より、

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2} q_1 V_1 = \frac{1}{2} q_1^2 W_{z,1} \\ U_2 &= \frac{1}{2} q_2 V_2 = \frac{1}{2} q_2^2 W_{z,2} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

である。

(A.10)~(A.13)から、

$$\begin{aligned} q_2 &= a^2 q_1 \\ W_{z,2} &= a^{-1} W_{z,1} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

であることがわかる。

ここでの wakefunction は空洞全体に対するものであったことに注意。長さ当たりの wakefunction の比はこれに a^{-1} を掛けたものになる。従って、

「monopole モードの長さ当たりの短距離 wakefunction は空洞の大きさの 2 乗に反比例する(相似形の場合)」

次に dipole モードの電磁場を、monopole の場合と同様に考える。

空洞 1 を点電荷 q_1 が中心軸から x ずれて通過した場合と、空洞 2 を点電荷 q_2 が中心軸から ax ずれて(相対的に同じだけ中心軸からずれて)通過した場合で、励起される電磁場の強さが等しくなったとする。monopole の場合の議論と同じように、dipole モードの縦方向の wakefunction を

$$\begin{aligned} W_{z,1}^d &\equiv \lim_{s \rightarrow +0} W_{z,1}(s)_{\text{Cavity1}} \\ W_{z,2}^d &\equiv \lim_{s \rightarrow +0} W_{z,1}(s)_{\text{Cavity2}} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

相似形だから、空洞 1 の電荷 q_1 が通過した位置 (x) と空洞 2 を q_2 が通過した位置 (ax) の電場は同じ強さで、その位置で励起された電圧を V_1^d 、 V_2^d とすると、

$$\begin{aligned} V_1^d &= q_1 x^2 W_{z,1}^d \\ V_2^d &= q_2 a^2 x^2 W_{z,2}^d \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

$$V_2^d = a V_1^d \quad (\text{A.17})$$

となる。

この時空洞内 1、2 に与えられたエネルギーを U_1^d 、 U_2^d とすると、これは体積に比例するので、

$$U_2^d = a^3 U_1^d \quad (\text{A.18})$$

空洞内に与えられたエネルギーは通過した電荷が失ったエネルギーに等しいから、(1.10) の第 3 式より、

$$\begin{aligned} U_1^d &= \frac{1}{2} q_1 V_1^d = \frac{1}{2} q_1^2 x^2 W_{z,1}^d \\ U_2^d &= \frac{1}{2} q_2 V_2^d = \frac{1}{2} q_2^2 a^2 x^2 W_{z,2}^d \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

以上より、

$$\begin{aligned} q_2 &= a^2 q_1 \\ W_{z,2}^d &= a^{-3} W_{z,1}^d \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

(A.15) と(1.10)第 4 式より、dipole モードの横方向の wakefunction に対して、

$$\left. \frac{d}{ds} W_{\perp 1}(s)_{\text{Cavity1}} \right|_{s=0} = a^{-3} \left. \frac{d}{ds} W_{\perp 1}(s)_{\text{Cavity2}} \right|_{s=0} \quad (\text{A.21})$$

が成り立つ。

ここでの wakefunction は空洞全体に対するものであったので、長さ当たりの wakefunction の比はこれに a^{-1} を掛けたものになる。従って、

「dipole モードの長さ当たりの横方向の短距離 wakefunction の傾きは空洞の大きさの 4 乗に反比例する(相似形の場合)」