

# 高周波制御とビーム操作

## 原研 3 GeV シンクロトロングループ

山本 昌亘

### はじめに

この講義ノートは、大強度陽子加速器施設の陽子シンクロトロンにおける高周波加速制御と縦方向ビーム操作について述べたものである。陽子シンクロトロンの高周波加速にまつわる一般的な話は先人の方々の手による良書が存在するため [1, 2, 3]、それらの事柄は簡潔にまとめる程度にしてある。本施設の高周波加速制御に関しては、特に大強度ビームを加速するためにビーム負荷対策が不可欠となり、また縦方向ビーム操作に関しては空間電荷効果やビーム不安定性の抑制のため、パンチングファクターの改善とエミッタンスの増大がキーポイントとなる。

## 1 高周波制御

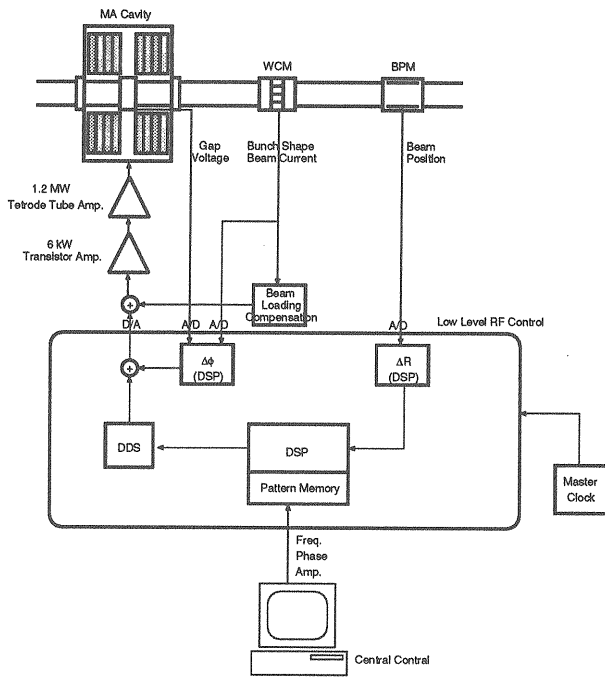


図 1.1: 高周波制御系ブロック図.

ビームにエネルギーを与える高周波加速空洞は、高周波増幅器より電力を供給されて電圧を発生する [4]。その増幅器に入力される低レベルの信号 (数 V 程度の sin 波) は、ビームの周回周波数の変化やビームの重心運動のずれに応じて周波数、振幅、位相を調節されたものが用意されなければならない。

これらの処理を行う低レベル信号部を高周波制御系と呼ぶ。

図 1.1 に高周波制御系の概略ブロック図を示す。高周波制御系は大きく分けて周波数基準信号発生器、ビームの進行方向の重心回りの振動を抑える  $\Delta\phi$  フィードバック、ビームの運動量と加速周波数のずれを抑える  $\Delta R$  フィードバック、そして大強度のビーム加速においてはさらにビーム負荷補償の系統からなる。これらについては後で詳しく述べる。シンクロトロンの高周波制御系を設計するには、ビームの縦方向 (進行方向) の運動について知っておかなければならないので、次の節で簡単に述べる。

### 1.1 ビームの縦方向運動

ビームの縦方向運動については、OHO のテキスト [1, 2, 3] のみならず、加速器全般を取り扱った教科書 (例えば [5, 6]) には「シンクロトロン振動」として必ず載っているの、詳しくはそれらを参照のこと。

シンクロトロンリング内でビームはパンチと呼ばれる塊になって加速される (図 1.2)。本施設のシンクロトロンでは、一つのパンチあたり最大  $4.3 \times 10^{13}$  個の陽子が詰められる予定で、3 GeV シンクロトロンは 2 パンチで、50 GeV シンクロトロンは 8 パンチで運転される。ビームの運動を解析的に調べるにあたっては、このパンチの重心の運動を調べると便利であるので、この節では特に断らない限りパンチの重心にある点電荷について述べる。

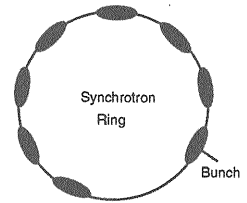


図 1.2: リング内にパンチが詰められた様子。図の例は 50 GeV の場合。

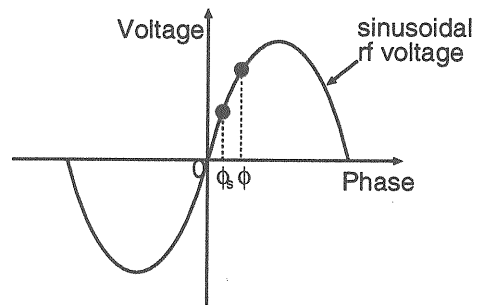


図 1.3: 任意の粒子の位相  $\phi$  とシンクロトロン粒子の位相  $\phi_0$  を示す図。加速電圧のゼロクロスからの位相で測られる。

さて、縦方向の粒子の位置を加速空洞が加えている  $\sin$  波の位相を使って表すことにする。図 1.3 のような  $\sin$  波の高周波電圧に対して、任意の粒子が位相  $\phi$  に、リングの中心を回る理想的な粒子 (シンクロナス粒子) が位相  $\phi_s$  にあるとする。それぞれの粒子が 1 周回ったときに、Lattice の設計によって決まる slippage factor  $\eta$  によって、運動量  $p = p_s + \Delta p$  を持つ任意の粒子と運動量  $p = p_s$  を持つシンクロナス粒子との間には、以下のような位相差  $\Delta\phi$  がつく。

$$(\phi - \phi_s)_{\text{turn}} = (\Delta\phi)_{\text{turn}} = -2\pi h \eta \frac{\Delta p}{p} \quad (1.1)$$

ここで  $h$  はハーモニック数と呼ばれ、周回周波数  $f_{\text{revs}}$  と加速高周波電圧の周波数  $f_{\text{rf}}$  を  $f_{\text{rf}} = h f_{\text{revs}}$  で関係づける。以下、断りがない限り通常  $h$  は整数である。

また、それぞれの粒子が得るエネルギーに関しては、1 周回ったときに以下のようなエネルギー差  $\Delta E$  がつく。

$$(E - E_s)_{\text{turn}} = (\Delta E)_{\text{turn}} = eV \sin \phi - eV \sin \phi_s \quad (1.2)$$

ここで、 $e$  は素電荷、 $V$  は加速電圧の振幅である。この式 (1.1) と (1.2) の 2 つの差分方程式がビームの縦方向運動の基礎となる式であるが、解析的に扱うために 1 周あたりの諸量の時間変化はその時刻での微分で表せるとして

$$\frac{d\Delta\phi}{dt} \simeq \frac{(\Delta\phi)_{\text{turn}}}{T_{\text{revs}}}, \quad \frac{d\Delta E}{dt} \simeq \frac{(\Delta E)_{\text{turn}}}{T_{\text{revs}}} \quad (1.3)$$

という関係を持ち込み、結果として以下のシンクロトン振動の微分方程式を得る。

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta E}{h\omega_{\text{revs}}} \right) = \frac{eV}{2\pi h} (\sin \phi - \sin \phi_s) \quad (1.4)$$

$$\frac{d\Delta\phi}{dt} = -h^2 \omega_{\text{revs}}^2 \frac{\eta}{\beta^2 E_s} \left( \frac{\Delta E}{h\omega_{\text{revs}}} \right) \quad (1.5)$$

式 (1.4) を式 (1.5) に代入すると位相に関する微分方程式が得られる。

$$\frac{d^2 \Delta\phi}{dt^2} + \frac{eV h \eta \omega_{\text{revs}}^2}{2\pi \beta^2 E_s} (\sin \phi - \sin \phi_s) = 0. \quad (1.6)$$

この方程式は非線型であるため解析的な解は導けないが、 $W = \Delta E / h\omega_{\text{revs}}$  と  $\Delta\phi$  の位相平面で軌道を描くと図 1.4 のようになる。

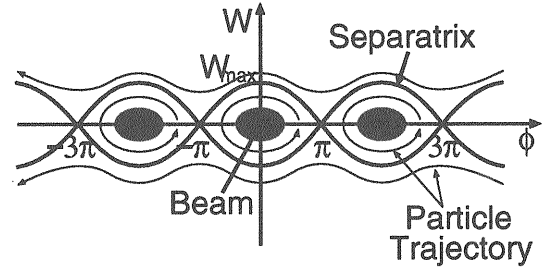


図 1.4: 位相空間での粒子の軌道。  $\phi_s = 0$  の場合について書いてある。

太い実線はセパトリクスと呼ばれ、任意の粒子はセパトリクスの中でシンクロナス粒子を中心にして位相空間を周回運動する。このセパトリクス内の領域を高周波加速においては高周波バケツと呼んでいる。セパトリクスの外にある粒子はシンクロナス粒子から遠く離れて失われる。

シンクロナス粒子付近の小振幅の粒子の運動 ( $\phi - \phi_s \ll 1$ ) に対しては、式 (1.6) は展開できて

$$\frac{d^2 \Delta\phi}{dt^2} + \omega_s^2 \Delta\phi = 0 \quad (1.7)$$

$$\omega_s = \sqrt{\frac{h\omega_{\text{revs}}^2 \eta eV \cos \phi_s}{2\pi \beta^2 E_s}} \quad (1.8)$$

という単振動の式を得る。ここで  $\omega_s$  はシンクロトン振動数と呼ばれ、シンクロナス粒子近傍の粒子が位相空間を 1 周する周期が分かる。

## 1.2 周波数基準信号発生器

話を高周波制御に戻す。高周波加速電圧の種となる最も基本的な  $\sin$  波を発生する部分が、周波数基準信号発生器である。多くの加速器では信号発生器には Phase Lock Loop を持つ VCO (Voltage Controlled Oscillator) が使われてきたが、本施設では空洞に大振幅の高周波磁場のもとでも負荷変動のほとんどない金属磁性体を使用しているため [4]、VCO よりもより高い周波数確度 ( $\sim 10^{-6}$ ) を持つ DDS (Direct Digital Synthesis) を採用して安定した加速電圧発生を目指している。図 1.5 に DDS の簡単な周波数発生原理を載せる。

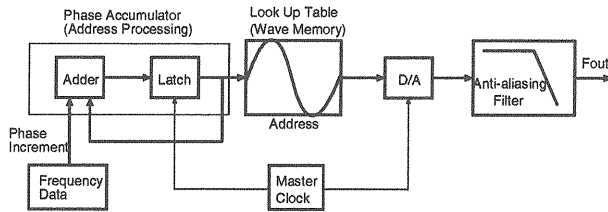


図 1.5: Direct Digital Synthesis.

DDS には 1 周期分の波形を記録した波形メモリーがあり、波形メモリーのアドレスは波形の位相に相当する。基準クロックに同期して波形メモリーからデータを読み出し D/A 変換したのち Low Pass Filter 通してアナログ波形が得られる。周波数はアドレスの増加分をコントロールすることによって変更できる。

DDS を使うことによるメリットは、

1. 高い周波数確度
2. DDS 部の周波数の変更が速い (数十クロック)
3. 周波数が変わったときの位相の連続性が保たれる

などである。逆にデメリットとしては、

1. 周波数に限界がある (クロック / 4 程度)
2. 周波数更新レート
3. 波形ひずみ

などがある。本施設の高周波加速の周波数は 1.3~3.7 MHz 程度であり、40 MHz のクロックで動作させる予定なのでクロック数からくる周波数の制約は特に問題はないが、DDS 以外の部分も含んだ基準信号発生系での周波数更新レートは 5  $\mu$ sec 程度である。

図 1.6 に本施設用に検討された周波数基準信号発生部のブロック図を示す。周波数と同時に位相も制御可能な DDS チップを使い、また後で述べるように 3 GeV シンクロトロンでは 1 台の高周波加速空洞で基本波と 2 倍高調波を同時に発生するので、2 倍周波数の出力も備えている。

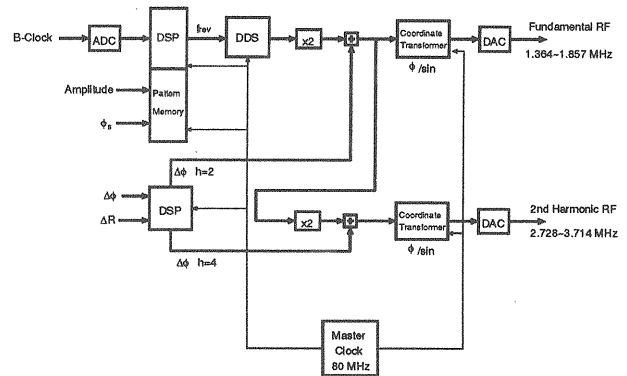


図 1.6: 周波数基準信号発生部ブロック図。

## 1.3 フィードバック

陽子シンクロトロンのフィードバック制御については過去の OHO [1, 3] や [7] で、またフィードバック制御の一般的な概念については [8] で述べられているため、ここでは説明に必要なことについて簡潔に述べる。

### 1.3.1 $\Delta\phi$ フィードバック

加速電圧は、理想的にはシンクロナス位相  $\phi_s$  のところにパンチの重心がくるようにつけられるべきであるが、種々のエラーやビームが加速空洞に誘起する電圧 (Wake Voltage) によって図 1.7 のように理想的な位相から外れた状態で加速電圧がかかっているとす。この場合、図 1.8 のように位相平面でみたときには、位相平面の中心にあるべきパンチの重心が別の位相に移動することを意味しており、位相平面内を軌道を描いて運動することになる。これを実際のパンチ波形で見ていると図 1.9 のように、パンチ波形全体が左右に振動する現象 (ダイポール振動) として観測される。

このような振動を抑えるのが  $\Delta\phi$  フィードバックの働きである。具体的には図 1.10 のようにパンチ波形をビームラインに設置した壁電流モニターで観測しパンチの中心 (ビーム電流の基本波成分) を割り出す。そのパンチの中心と加速電圧の位相を比較し、ズレているようであれば加速電圧の位相をずらしてパンチの重心位相に近づける。

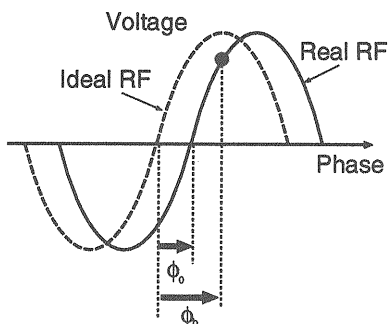


図 1.7: 位相のずれ。

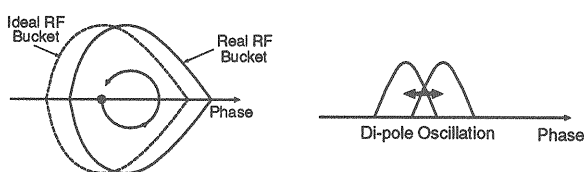


図 1.8: 位相平面のずれ。

図 1.9: バンチ重心のダイポール振動。

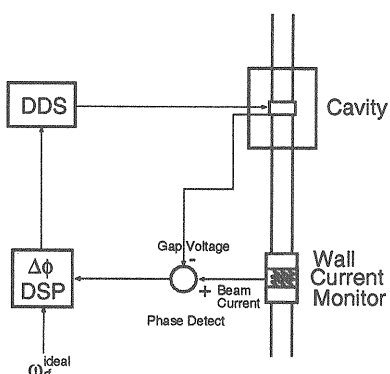


図 1.10:  $\Delta\phi$ フィードバックの概念図。

さて、制御系の解析にはラプラス変換を用いた伝達関数による解析を行うのが一般的である。図 1.7 のような位相誤差が  $\Delta\phi$  フィードバック系でどのように伝達されるか、また、加速空洞を通じてどのようにビームの位相に伝達されるかを簡潔にまとめる。

**ビーム伝達関数** まず、図 1.7 のように理想的な加速電圧と実際の加速電圧の間に位相誤差  $\phi_0$  がある場合、それがどのようにビームの位相誤差  $\delta\phi_b$  につながるかを調べる。加速電圧に位相誤差  $\phi_0$  があった場合、時間変化の観点でビームから見るとそれは加速電圧の周波数が速くなった／遅くなった」として感

じられる。つまり、

$$\frac{d\phi_0}{dt} = \omega_{\text{rf}}^{\text{real}} - \omega_{\text{rf}}^{\text{ideal}} = \delta\omega_{\text{rf}} \quad (1.9)$$

この周波数誤差  $\delta\omega_{\text{rf}}$  は、式 (1.4)(1.5) を通してビームの伝えられる。  $\phi_s$  にいるシンクロナス粒子が周波数誤差  $\delta\omega_{\text{rf}}$  によって  $\delta\phi_b$  だけ位相がずれたとして、式 (1.4)(1.5) で  $\phi = \phi_s + \delta\phi_b$  を代入し  $\delta\phi_b \ll 1$  の微小な運動を考えて

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta E}{h\omega_{\text{revs}}} \right) \cong \frac{eV}{2\pi h} \cos \phi_s \cdot \delta\phi_b \quad (1.10)$$

$$\frac{d\delta\phi_b}{dt} = -h^2 \omega_{\text{revs}}^2 \frac{\eta}{\beta^2 E_s} \left( \frac{\Delta E}{h\omega_{\text{revs}}} \right) + \delta\omega_{\text{rf}} \quad (1.11)$$

式 (1.10) に (1.11) を代入し、両辺をラプラス変換することにより、加速電圧の位相誤差  $\delta\omega_{\text{rf}}$  からビームの位相誤差  $\delta\phi_b$  への伝達関数  $B_\phi(s)$  が次のように求まる。

$$\delta\phi_b(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_s^2} \delta\omega_{\text{rf}}(s) \quad (1.12)$$

ここで、 $\omega_s$  は式 (1.8) である。この伝達関数  $B_\phi(s)$  のボード線図を書いてみると図 1.11 のように  $\omega_s$  のところでゲインが無限大に向うことが分かる。つまり、周波数誤差  $\delta\omega_{\text{rf}}$  にシンクロトロン振動の周波数成分がある場合、バンチの運動が増大し不安定になることを示している。

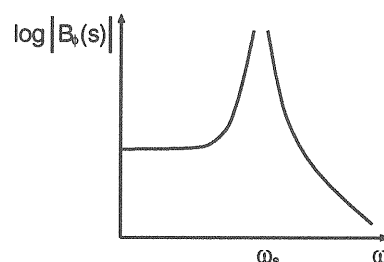


図 1.11: ビームの伝達関数のボード線図。

**$\Delta\phi$  フィードバックの伝達関数**  $\delta\phi_{\text{rf}}$  に対して  $\delta\phi_b$  が安定になるようなフィードバックを考える。図 1.12 のように、ビームの位相と加速電圧の位相を比較してそれに  $G_\phi(s)$  という制御要素を入れる。

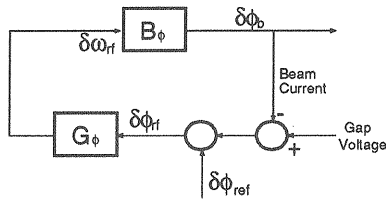


図 1.12:  $\Delta\phi$ フィードバックのブロック図。

$G_\phi(s)$  を例えば比例積分要素として

$$G_\phi(s) = K_\phi \frac{1 + T_\phi s}{T_\phi s} \quad (1.13)$$

とすると、図 1.12 の閉ループの伝達関数は

$$\frac{\delta\phi_b(s)}{\delta\phi_{rf}(s)} = \frac{\frac{K_\phi}{T_\phi} (1 + T_\phi s)}{s^2 + K_\phi s + \omega_s^2 + \frac{K_\phi}{T_\phi}} \quad (1.14)$$

閉ループの極を  $p = \omega_n(-\zeta \pm j\sqrt{1-\psi^2})$  と指定すると、 $K_\phi$ 、 $T_\phi$  を

$$K_\phi = 2\zeta\omega_n \quad (1.15)$$

$$T_\phi = \frac{2\zeta\omega_n}{\omega_n^2 - \omega_s^2} \quad (1.16)$$

と選べばよい。この  $\Delta\phi$  制御ループはシンクロトロン振動を抑制することが目的であるので、 $\omega_n \rightarrow \omega_s$  とすると、式 (1.16) より  $T_\phi \rightarrow \infty$  となり、式 (1.13) より  $G_\phi(s)$  は比例動作  $K$  となればよい。

結局、 $\Delta\phi$  制御ループの伝達関数は、

$$\frac{\delta\phi_b(s)}{\delta\phi_{rf}(s)} = \frac{K_\phi s}{s^2 + K_\phi s + \omega_s^2} \quad (1.17)$$

$$K_\phi = 2\zeta\omega_s \quad (1.18)$$

となる。

この  $\Delta\phi$  フィードバックループ込みのボード線図を書いてみると図 1.13 のように  $\omega_s$  のところでのゲインが抑えられていることがわかり、パンチの運動が抑制されていることを示している。

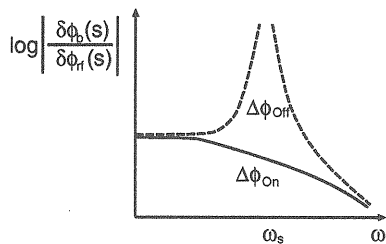


図 1.13:  $\Delta\phi$  フィードバック時のボード線図。

**位相検出器**  $\Delta\phi$ フィードバックで最も重要なのは、加速電圧とビームの位相差を検出する装置である。本施設の高周波加速制御系は基本的にデジタルで組んでいるため、位相検出器に関してデジタルで検出することを目指して開発を行っている。図 1.14 に開発中のデジタル位相検出器のブロック図を載せる。加速ギャップ電圧とビーム電流波形をリファレンスとなる DDS の信号と掛け合わせてヘテロダイン検波を行っている。本講義ノートでは特にデジタル制御のことについては述べないので、デジタル制御に興味のある方は [8] を参照されたい。

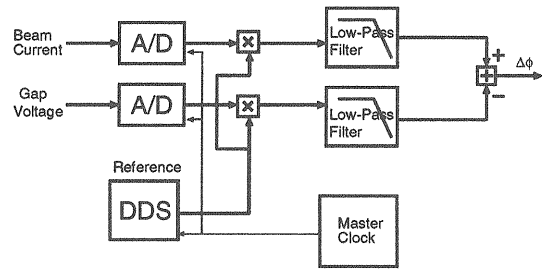


図 1.14: デジタル位相検出器のブロック図。

### 1.3.2 $\Delta R$ フィードバック

$\Delta\phi$  フィードバックは、ビームの位相と加速電圧の位相を近づけるためのフィードバックであるが、 $\Delta\phi$  フィードバックの結果得られる加速電圧の周波数が本来目指すべき偏向電磁石の磁場から求まる粒子の周回周波数の  $h$  倍から大きくズレしまった場合、粒子の軌道が理想的な中心軌道からズレて最終的には粒子がビームダクトに当たって損失を招く。このため、図 1.15 ビームライン内に設置されたビームポジションモニター(横方向)によって、粒子の軌道の中心からのズレを検出し  $\Delta\phi$  フィードバックの目的値を補正する  $\Delta R$  フィードバックするループが設けられる。

粒子のもつ運動エネルギーと中心軌道からのズレ  $\Delta R$  は、Lattice 設計からきまるディスパージョン関数  $x$  から

$$\Delta R = x \frac{\Delta E}{\beta^2 E} \quad (1.19)$$

で求められる。得られた  $\Delta R$  の値に  $\Delta R$  フィードバック制御  $G_R$  をかけて  $\delta\omega_R = G_R \Delta R$  という周波数の修正を式 (1.11) を加えて、

$$\frac{d\delta\phi_b}{dt} = -h^2 \omega_{\text{revs}}^2 \frac{\eta}{\beta^2 E_s} \left( \frac{\Delta E}{h \omega_{\text{revs}}} \right) + \delta\omega_{rf} + \delta\omega_R \quad (1.20)$$

となる。本講義ノートでは特に  $\Delta R$  フィードバックについては述べないので、詳しくは [1, 3] を参照されたい。

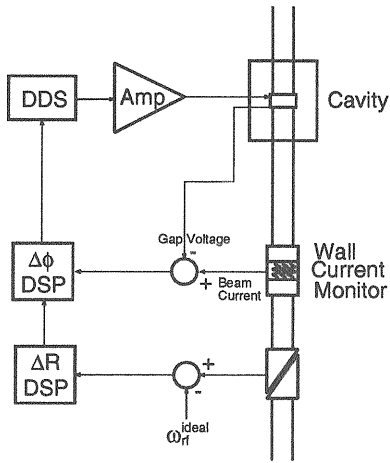


図 1.15:  $\Delta R$  フィードバックの概略図。

## 2 ビームローディング

加速空洞は加速電場を通してビームにエネルギーを与えるが、大強度ビームを加速する際にはビームによってビームダクト誘起される鏡像電流が加速空洞や増幅器に与える影響を無視できなくなる。具体的には図 2.1 のように、ビームの電荷によって生じる電場が加速空洞のビームダクト上に鏡像電荷を誘起しビームダクトに電流が流れる。ビーム電流は加速空洞を励振している真空管からみると空洞のインピーダンス以外に新たな負荷を抱えることになりビームローディングと呼ぶ。

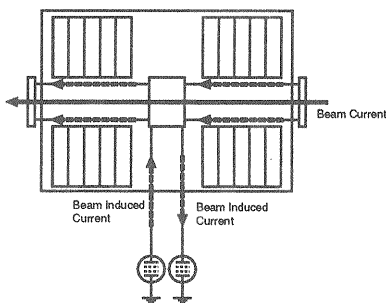


図 2.1: ビームローディング。

真空管から供給する駆動電流  $I_G$  によって発生する加速電圧  $V_0$  とビーム電流の基本波成分  $I_B$  との位相関係は図 2.2 であり、駆動電流とビーム電流は 90 度以上違った角度で空洞を励振する。その結果加

速電圧は乱され  $V_T$  のように振幅も位相も理想的な状態とは異った電圧が粒子に加えられることになってしまう。それぞれの電流値の振幅と位相の関係に注目して図 2.3 のようなフェザーダイアグラムが使われる。

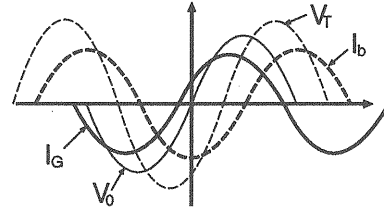


図 2.2: 駆動電流とビーム電流の位相関係。

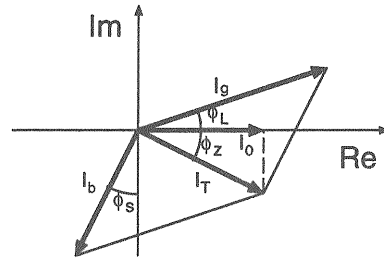


図 2.3: フェザーダイアグラム。

このダイアグラムでは、理想的な加速電圧の位相を実軸上にとり、加速空洞のインピーダンスの位相角  $\phi_z$  を考慮して  $I_T$  という電流が空洞に供給されないといけない場合、ビーム電流  $I_b$  が空洞に流れ込む場合、真空管からの駆動電流  $I_G$  は  $I_T$  よりも大きな振幅で  $\phi_L$  という位相差をつけて流さなければならないことを示している。

本施設のシンクロトロンにおいても、加速システムにおけるビーム負荷は非常に重要な問題である。ただし 3 GeV と 50 GeV においては一番問題とされる点が若干異っている。そのことについては後で詳しく述べる。

### 2.1 ビームローディングの解析

ビームローディングがある場合に、図 1.1 の高周波制御系が安定に動作するかどうかについては、初めにフィードバックループがない場合について Robin-

son [10]が、フィードバックループがある場合について Pedersen [11]が解析を行い、OHO でも過去に解説が行われているので [1, 3]、ここではこの後のビームローディング補償の説明に必要なことを述べる。

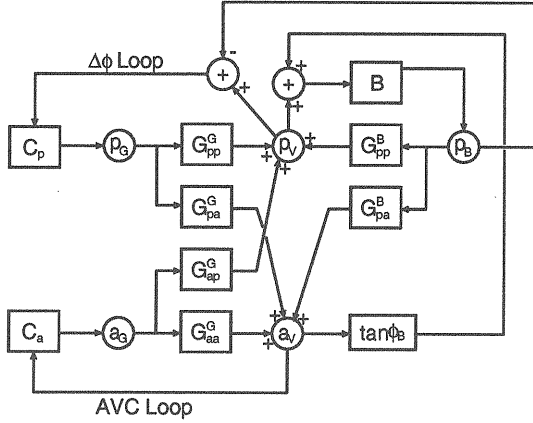


図 2.4: Pedersen モデル [11]。

図 2.4 は、フィードバックループがある場合のビームローディングを解析するために Pedersen が用いたモデルである。図中の  $p^G, a^G$  がそれぞれ、真空管からの駆動電流の位相と振幅を示し、 $p^V, a^V$  というのが加速電圧の位相と振幅を示している。 $p^B$  はビームの位相である。 $G^G$  で表されているのが駆動電流から加速電圧への伝達関数、 $G^B$  で表されているのが加速電圧からビームへの伝達関数である。 $G$  サフィックスの  $pp, aa, pa, ap$  は、位相から位相へ、振幅から振幅へ、位相から振幅へ、振幅から位相への伝達関数を表すのに使われている。その他  $B$  はビームの伝達関数、 $C_p, C_a$  は  $\Delta\phi$  フィードバックの伝達関数と AVC (Automatic Voltage Control) の伝達関数である。なお、 $Q$  値が高く加速周波数をカバーするほどの周波数帯域を持たない加速空洞に対しては図 2.4 の他に共振周波数同調ループが付け加えられるが、本施設の金属磁性体を用いた加速空洞では共振周波数同調は行わないので [4]、外してある。

伝達関数  $G$  を求める前に、図 2.3 のフェザーダイアグラムより

$$\tan \phi_L = \frac{I_0 \tan \phi_z - I_B \cos \phi_B}{I_0 + I_B \sin \phi_B} = \frac{\tan \phi_z - Y \cos \phi_B}{1 + Y \sin \phi_B} \quad (2.1)$$

$$I_G = \frac{I_0 + I_B \sin \phi_B}{\cos \phi_L} = \frac{I_0(1 + Y \sin \phi_B)}{\cos \phi_L} \quad (2.2)$$

$$Y = \frac{I_B}{I_0} \quad (2.3)$$

という関係が求まる。 $Y$  はビーム電流と駆動電流の比で relative loading factor と呼ばれる。

それぞれの伝達関数  $G$  は、ある電流  $i(t)$  に振幅と位相のズレ  $a(t), p(t)$  がかかっていたとして

$$i(t) = \text{Re}\{I(1 + a(t))e^{j(\omega_{rf}t + p(t))}\} \quad (2.4)$$

とし、これがインピーダンス  $Z(j\omega)$  を通してどのように電圧  $V(t)$  の振幅  $a_v(t)$  と位相  $p_v(t)$  に伝えられるかを計算して求める。

$$v(t) = \text{Re}\{V(1 + a_v(t))e^{j(\omega_{rf}t + \phi_z + p_v(t))}\} \quad (2.5)$$

その際、振幅と位相のズレが調和振動的に変化するものとし

$$a(t) = \hat{a} \cos \omega_{AM} t \quad (2.6)$$

$$p(t) = \hat{p} \sin \omega_{PM} t \quad (2.7)$$

さらに、これらの変調の振幅は微小である ( $\hat{a}, \hat{p} \ll 1$ ) として展開すると、

$$i(t) \cong \text{Re}\left\{I \left[ e^{j\omega_{rf}t} + \frac{\hat{a}}{2} \left( e^{j(\omega_{rf} + \omega_{AM})t} + e^{j(\omega_{rf} - \omega_{AM})t} \right) + \frac{\hat{p}}{2} \left( e^{j(\omega_{rf} + \omega_{PM})t} - e^{j(\omega_{rf} - \omega_{PM})t} \right) \right] \right\} \quad (2.8)$$

これをインピーダンス  $Z(j\omega)$  と掛け合わせて整理すると、

$$V(t) = I \cdot \text{Re}\left\{ Z(j\omega_{rf}) e^{j\omega_{rf}t} \left[ 1 + \hat{a} [\text{Re}\{G_S(j\omega_{AM})e^{j\omega_{AM}t}\}] + \hat{p} [\text{Im}\{G_C(j\omega_{PM})e^{j\omega_{PM}t}\}] - j\hat{a} [\text{Re}\{G_C(j\omega_{AM})e^{j\omega_{AM}t}\}] + j\hat{p} [\text{Im}\{G_S(j\omega_{PM})e^{j\omega_{PM}t}\}] \right] \right\} \quad (2.9)$$

ここで、

$$G_S(s) = \frac{1}{2} \left[ \frac{Z(s + j\omega_{rf})}{Z(j\omega_{rf})} + \frac{Z(s - j\omega_{rf})}{Z(-j\omega_{rf})} \right] \quad (2.10)$$

$$G_C(s) = \frac{1}{2} \left[ \frac{Z(s + j\omega_{rf})}{Z(j\omega_{rf})} - \frac{Z(s - j\omega_{rf})}{Z(-j\omega_{rf})} \right] \quad (2.11)$$

である。インピーダンス  $Z(s)$  を  $L, C, R$  の並列共振回路であるとして、空洞の damping rate  $\sigma = \omega_{rf}/2Q$  をつかって、

$$Z(s) = \frac{2\sigma R_s}{s^2 + 2\sigma s + \omega_r^2} \quad (2.12)$$

また、加速周波数  $\omega_{rf}$  と空洞の共振周波数  $\omega_r$  との差  $\omega_d$  より、

$$\omega_d = \omega_r - \omega_{rf} = \sigma \tan \phi_z \quad (2.13)$$

式 (2.12)(2.13) を (2.10)(2.11) に代入して

$$G_S(s) = \frac{\sigma^2(1 + \tan^2 \phi_z) + \sigma s}{s^2 + 2\sigma s + \sigma^2(1 + \tan^2 \phi_z)} \quad (2.14)$$

$$G_C(s) = \frac{\sigma \tan \phi_z s}{s^2 + 2\sigma s + \sigma^2(1 + \tan^2 \phi_z)} \quad (2.15)$$

式 (2.9) より

$$G_{pp}^G = G_S \frac{I_G}{I_T} \cos(\phi_L + \phi_z) + G_C \frac{I_G}{I_T} \sin(\phi_L + \phi_z) \quad (2.16)$$

ほかの  $G$  についても同様の操作をして最終的に

$$G_{pp}^G(s) = \frac{\sigma^2(1 + \tan^2 \phi_z + Y(\sin \phi_B - \tan \phi_z \cos \phi_B)) + \sigma(1 + Y \sin \phi_B)}{s^2 + 2\sigma s + \sigma^2(1 + \tan^2 \phi_z)} \quad (2.17)$$

$$G_{pa}^G(s) = \frac{-\sigma^2 Y(\cos \phi_B + \tan \phi_z \sin \phi_B) + \sigma(\tan \phi_z - Y \cos \phi_B)s}{s^2 + 2\sigma s + \sigma^2(1 + \tan^2 \phi_z)} \quad (2.18)$$

$$G_{aa}^G(s) = G_{pp}^G(s) \quad (2.19)$$

$$G_{ap}^G(s) = -G_{pa}^G(s) \quad (2.20)$$

$$G_{pp}^B(s) = \frac{Y(\sigma^2(\tan \phi_z \cos \phi_B - \sin \phi_B) - \sigma \sin \phi_B s)}{s^2 + 2\sigma s + \sigma^2(1 + \tan^2 \phi_z)} \quad (2.21)$$

$$G_{pa}^B(s) = \frac{Y(\sigma^2(\tan \phi_z \sin \phi_B + \cos \phi_B) + \sigma \cos \phi_B s)}{s^2 + 2\sigma s + \sigma^2(1 + \tan^2 \phi_z)} \quad (2.22)$$

を得る。

図 2.4 でのビーム伝達関数  $B$  は、式 (1.12) と異なり、加速電圧位相からビームの位相への伝達関数であるので、

$$p_B(s) = B(s)p_v(s) = \frac{\omega_s^2}{s^2 + \omega_s^2} p_v(s) \quad (2.23)$$

である。

**Robinson Stability Criteria** Robinson [10] が行った解析は、図 2.4 で  $\Delta\phi$  のループと AVC のループを省き、加速電圧の振幅と位相からビームの位相への応答を調べたものである。このとき特性方程式は

$$1 - B(s)(G_{pp}^B + \tan \phi_B G_{pa}^B(s)) = 0 \quad (2.24)$$

$$s^4 + 2\sigma s^3 + (\omega_s^2 + \sigma^2(1 + \tan^2 \phi_z))s^2 + 2\sigma\omega_s^2 s + \sigma^2\omega_s^2(1 + \tan^2 \phi_z - Y \frac{\tan \phi_z}{\cos \phi_B}) = 0 \quad (2.25)$$

この特性方程式に Routh-Hurwitz の判別式をつかって安定な領域を求めると、

$$\frac{Y \sin 2\phi_z}{\cos \phi_B} < 2 \quad (2.26)$$

$$\tan \phi_z > 0 \quad (2.27)$$

が得られる。式 (2.26)(2.27) を  $\phi_z$  と Relative Loading Factor  $Y$  についてグラフを書くと図 2.5 のようになる。図はシンクロナス位相  $\phi_B = 0$  の場合についてプロットしてある。この図からすぐに分かることは、空胴の共振周波数を加速周波数よりも低くとるとビームは不安定になるということである。

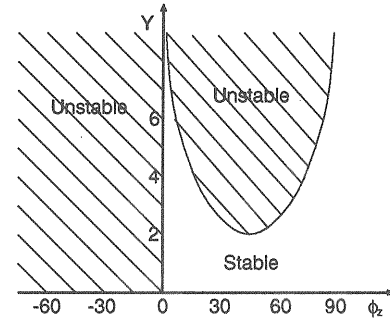


図 2.5: Robinson Stability Condition.

**Stability Criteria with  $\Delta\phi$  Feedback** 次に図 2.5 の場合に  $\Delta\phi$  フィードバックループを加えた場合について考えてみる。 $\Delta\phi$  フィードバックループの伝達関数  $C_p$  として  $C_p = \omega_p/s$  を仮定する。このときの特性方程式は、

$$(s^2 + \omega_s^2)(s^2 + 2\sigma s + \sigma^2(1 + \tan^2 \phi_z)) - \omega_s^2 \sigma^2 Y \tan \phi_z - \omega_p s(\sigma^2(1 + \tan^2 \phi_z - Y \tan \phi_z) + \sigma s) = 0 \quad (2.28)$$

となる。この特性方程式に Routh-Hurwitz の判別式をつかって安定な領域を求めると、

$$\phi_z > 0 \quad Y < \frac{2}{\sin 2\phi_z} \quad (2.29)$$

$$\phi_z < 0 \quad Y < \frac{2}{|\tan 2\phi_z|} \quad (2.30)$$



が得られる。式(2.29)(2.30)を $\phi_z$ と Relative Loading Factor  $Y$  についてグラフを書くと図 2.6 のようになる。図はシンクロナス位相 $\phi_B = 0$  の場合についてプロットしてある。

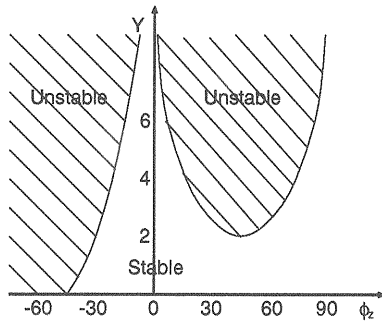


図 2.6: Stability Condition with  $\Delta\phi$  Feedback.

この図から分かることは、空胴の共振周波数を加速周波数よりも低くしたところでも、安定性が回復されていることである。

以上の議論は実際の高周波加速システムを種々の近似を用いて定量的に評価したものであり、実際にはそれぞれのループの帯域幅やゲインなどによって安定領域は変わってくる。実際の加速器での測定からは  $Y \sim 1$  程度に抑えた運転が推奨されている。

## 2.2 ビームローディング補償

本施設の 3 GeV シンクロトロンにおける高周波加速のパラメータを表 2.1 に示す。この表を見て分かるように、入射と取り出しに置いては後述する Bucket Matching のため加速電圧を低く抑えなければならない。そのため、ビーム電流が真空管からの駆動電流を大幅に上回ることとなり、取り出し時には Relative Loading  $Y$  は 7 を越えてくるのをはじめ、軒並  $Y > 1$  となる。

このため、ビームが不安定になることが予想されるため、ビームローディングを補償することが考えられている。その方法には主に、

1. 空胴のインピーダンスを下げる
2. 直接 RF Feedback 法
3. RF Feedforward 法
4. AVC

の 4 つが挙げられる。1. については、空胴と並列に抵抗を入れ空胴の駆動電流を増やして相対的に Relative Loading  $Y$  を下げる手法で、2. については、加速ギャップの電圧をピックアップして真空管

を励振する入力段に直接ビーム電流の基本波成分を位相を反転させて入力する方法で、これはビームの周波数成分のところのみの実効的なインピーダンスを下げる操作に等しい。これらについては、過去の OHO [1, 3, 9] を参照されたい。今回は、本施設で使用予定の RF Feedforward 法について述べる。

RF Feedforward 法の原理は単純で、図 2.7 のように、ビーム電流成分  $I_b$  と全く逆位相の電流  $-I_b$  を真空管に加えビームローディングの効果を消してしまう方法である [13, 14]。

Freq. (MHz)	$V_{rf}$ (kV)	$\phi_s$ (deg)	$I_{b1}$ (A)	$I_g$ (A)	$I_t$ (A)	$Y$
1.36	173.0	0.0	14.401	8.352	15.412	1.748
1.41	333.0	12.7	16.102	20.594	27.630	1.015
1.52	403.0	20.1	17.955	25.752	28.694	0.936
1.63	421.0	27.0	19.738	29.028	25.977	0.985
1.72	411.0	33.1	21.216	31.715	22.880	1.084
1.78	383.0	38.0	22.253	33.187	20.130	1.220
1.82	339.0	41.5	22.952	33.255	17.257	1.422
1.84	303.0	43.1	23.072	31.779	15.212	1.599
1.85	259.0	42.7	22.782	28.964	12.920	1.847
1.86	183.0	38.5	22.243	25.067	9.075	2.552
1.86	60.0	0.0	19.696	19.101	2.827	7.256

表 2.1: 3 GeV PS の各電流値の変化と Relative Loading Factor.

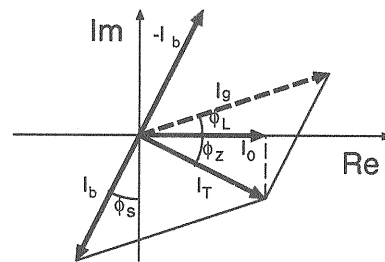


図 2.7: RF Feedforward 時のフェーザダイアグラム。

ちなみに、真空管から流れる全電流  $I_T$  は、RF Feedforward 法を使わない場合ビーム電流  $I_b$  と駆動電流  $I_g$  の和  $I_T$  であり、RF Feedforward 法を使う場合はビーム電流  $I_b$  と Feedforward 電流  $-I_b$  と駆動電流  $I_T$  の和  $I_T$  であり、真空管の電力消費は全く同じ値である。RF Feedforward システムの概略を図 2.8 に示す。

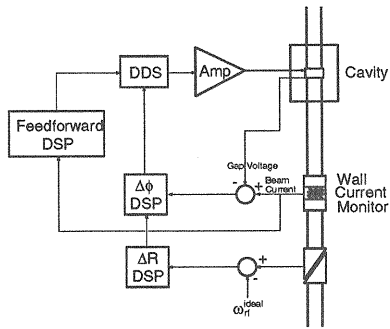


図 2.8: RF Feedforward の概略図。

ビーム電流は壁電流モニターによってピックアップされ、一つは  $\Delta\phi$  フィードバック用に、もう一つを RF Feedforward 用に使用する。壁電流モニターは帯域幅は広く (数十 kHz ~ 数 GHz は可能) ビーム電流の生信号はほぼパルスの形を再現した波形なので、いろいろな周波数成分が混ざっている。それを図 2.9 の信号処理装置によって加速周波数の基本波とその高調波成分 (3 GeV シンクロトロンの場合には 2 倍まで) に分けて、真空管においてビーム電流と同じ振幅をもち逆位相になるようなローレベルの信号として DDS に入力可能のように処理される。

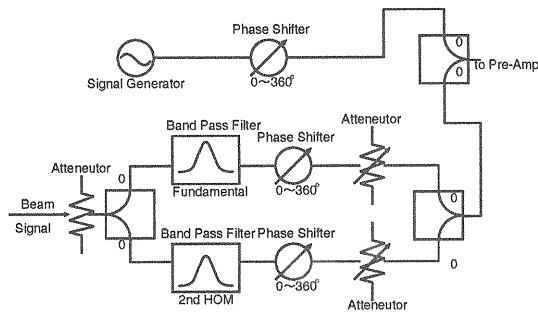


図 2.9: RF Feedforward 用信号処理システム。

過去、RF Feedforward は CERN-PS [15] や KEK-PS [13] で使われていたが、現在運転中の陽子シンクロトロンでは ISIS で使用されている [16]。本施設の高周波加速空洞 R & D 機においてもビームローディング補償の実験が電子ビームを用いたテストベンチで行われており [17]、図 2.10 の上が補償前のビームが加速ギャップに誘起している電圧で下が補償後のビームが誘起している電圧がほとんど無くなっている測定結果である。図 2.11 はビームが誘起した電圧の FFT を見たもので、基本波成分については 1/100 まで落とすことに成功している。

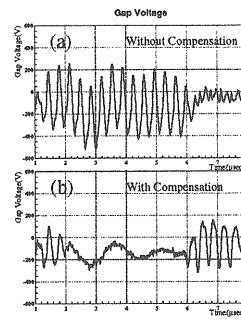


図 2.10: ビームローディング補償の結果 (ギャップ電圧)。ゆっくりとした成分は計測器のグラウンドレベルの変化。

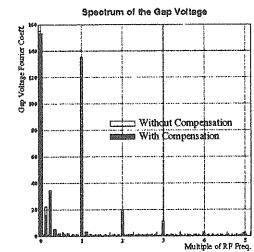


図 2.11: ビームローディング補償の結果 (スペクトラム)。

さて、図 2.4 の Pedersen モデルにおいて、RF Feedforward はどのような効果を示すか見てみる。簡単のため加速電圧からビームへの応答は無視し、AVC と  $\Delta\phi$  のループが働いている場合の駆動電流から加速電圧への応答を調べる。RF Feedforward が完全に働いているとして  $Y = 0$  とすると式 (2.17)(2.18)(2.20)(2.21) は  $Y$  に関する項が消える。さらに、空洞の応答が十分に早い ( $\sigma \rightarrow 0$ ) とすると、Feedforward の効果がすぐに分かる。

$$G_{pp}^G \rightarrow 1 \quad (2.31)$$

$$G_{pa}^G \rightarrow 0 \quad (2.32)$$

$$G_{ap}^G \rightarrow 0 \quad (2.33)$$

$$G_{aa}^G \rightarrow 1 \quad (2.34)$$

つまり、RF Feedforward によって電圧から位相へ、位相から電圧への Cross Coupling が解かれ、 $\Delta\phi$  および AVC のループがそれぞれ安定であればビーム強度に関係なく加速システム全体は安定に働く。ただし、これはもちろん理想的な場合であり、実際の RF Feedforward においては、補償する電流値が必ずしも  $-I_b$  にならず、その位相もずれている場合がある。その際には  $Y \neq 0$  として特性方程式を解き安定性を議論しなければならない。

### 2.3 周期的過渡ビームローディング

これは、大強度で高エネルギーのシンクロトロンに特有の問題である。粒子をシンクロトロンで最終的なエネルギーまで加速する場合、使用する偏向電磁石の磁場の範囲が限定されることから、あるシン

クトロロンで加速できる入射から取り出しまでのエネルギー範囲というのは限定されてしまう。そこで、図 2.12 のように線形加速器からのビームを一旦ある程度のエネルギーまで引き上げる (Boost) シンクロトロンを用意し、その降段にさらに目的となる最終エネルギーまで加速できるシンクロトロンが用意される。

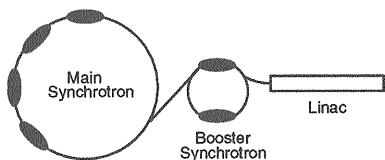


図 2.12: シンクロトロンのカスケード。

この際前段のシンクロトロンのバンチ数というのは、通常後段のシンクロトロンのバンチ数よりも少ないため、後段のシンクロトロンへバンチを全て詰め終わるまでに、前段のシンクロトロンは何度か加速サイクルを繰り返さなければならない。本施設の場合は、3 GeV シンクロトロンは 2 バンチ運転で、50 GeV シンクロトロンは 8 バンチ運転である。その時、図 2.14 のように、後段のシンクロトロンには入射のある一定の時間、つまり前段のシンクロトロンからバンチを全て受け取り終わるまでの間、リング内にバンチが全て詰まっていない状態で運転されることがある。本施設の場合、3 GeV シンクロトロンの繰り返しが 25 Hz で加速サイクルを 4 回繰り返さないといけないので、少なくとも 160 ms はバンチが完全に詰まっていない状態ができる。

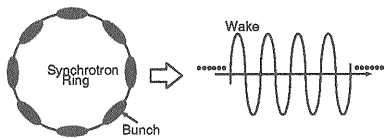


図 2.13: 静的ビームローディング。

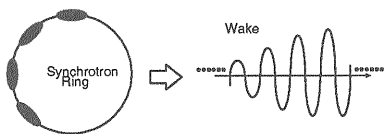


図 2.14: 周期的過渡ビームローディング。

通常リングにバンチが全て詰まっている状態で

は、それぞれのバンチが引き起こす wake field が重なりあって図 2.13 のような定常状態となる。このような状態を静的ビームローディングと呼ぶ。それに対して、図 2.14 のようにリングにバンチが一部しか詰まっていない場合、それぞれのバンチが起こす wake field が重なりあってのように始めのバンチから後のバンチにいくに従って受ける wake field の大きさが変わっていき、しかもその状態が数十 ms を越えて存在することになる。このような状態を周期的過渡ビームローディングと呼ぶ。特に陽子シンクロトロンにおいては、空洞にフェライトや Magnetic Alloy といった磁性体を装荷しているため [4] 空洞の  $Q$  値が 1 ~ 数十程度と小さく、Wake Field が数ターン以内に大きくその振幅を大きく変えるため、周期的過渡ビームローディングの影響が大きい。一番影響を大きく受けるのは  $\Delta\phi$  フィードバックである。周期的過渡ビームローディングによって各バンチごとの加速ギャップでの電圧が変わってくるため、 $\Delta\phi$  フィードバックの目標値が各バンチについてバラバラになることになる。 $\Delta\phi$  フィードバックでは全てのバンチの平均した目標値に近づける操作を行うので、結果としてダイポール振動を抑えられるバンチと抑えられずに振動を続けるバンチとが存在する。

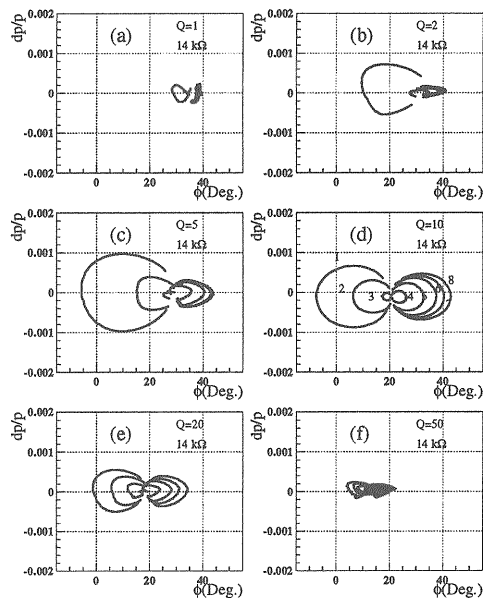


図 2.15: 周期的過渡ビームローディングのシミュレーション。

図 2.15 は 1997 年当時の JHF [28] での 50 GeV リ

ングについて周期的過渡ビームローディングの効果  
を計算したもので、 $h=17$ で、そのうち8バンチが  
片寄って詰められた場合について粒子追跡計算コード  
によってシミュレーションした結果である。結果  
は位相平面上のバンチの重心の軌道を示すことで評  
価している。図の左上から  $Q = 1 \sim 50$  の場合につ  
いて計算した結果である。この結果から、 $Q = 10$   
を中心としてバンチの重心の運動が大きくばらつく  
 $Q$  の領域があることが分かる。そして、Very Low  
 $Q$  か Very High  $Q$  にすることによって周期的過渡  
ビームローディングの効果はある程度抑えられるこ  
とが分かる。種々の条件について計算してみたところ、  
 $Q \sim h/2$  の値をもつ空洞を使用すると周期的過渡  
ビームローディングの効果が大きくなることが分  
かっている [17]。なお、3 GeV リングでは2バンチ  
しかないので、周期的過渡ビームローディングが問  
題になることは基本的にはないが、1 番目のバンチ  
と2番目のバンチとで粒子数が大きく異なるときは  
やはり周期的過渡ビームローディングが起こる。

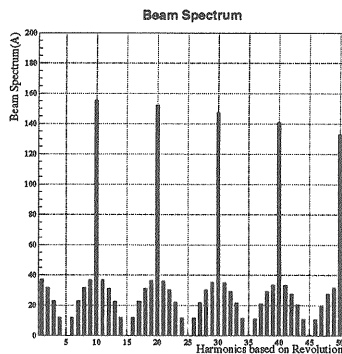


図 2.16: 50 GeV 取り出し時のビームスペクトラム。

また、バンチの重心運動以外にも RF バケツの歪  
みという点からも周期的過渡ビームローディングは  
問題となる。本施設の場合、特に 50 GeV リングの  
取り出し付近では、Bunching Factor が非常に小さく  
0.056 程度になると予想されている。このときビー  
ムは多くの高調波を持ち、さらにバンチが片寄って  
詰められている場合には RF 周波数以外にもビーム  
の周回周波数成分が現れる。図 2.16 は、50 GeV リ  
ングの取り出しでのビームのスペクトラムである。

ただし、50 GeV の高周波加速空洞は  $Q = 10$  程  
度を採用する予定であるため、ハーモニクナン  
バー 10 とほぼ同程度であるため周期的過渡ビーム  
ローディングの影響は小さくなるように選ばれてい

る。また、帯域幅もそれほど広くなく半値幅で 191  
kHz 程度なので、強く影響を及ぼすサイドバンドは  
 $h = 9$  と  $h = 11$  のビームの成分である。このため、  
RF バケツの歪みを気にするときにはこの  $h = 9$  と  
 $h = 11$  のビームローディングを先に示した方法で  
補償する必要がある。

### 3 ビーム操作

通常の高周波加速においては、ビームの周回周波  
数の  $h$  倍の周波数を持つ連続の  $\sin$  波が使われる。  
得られるバンチ波形は加速電圧によって作られる  
Potential Well によって決められるので、単一周波  
数の  $\sin$  波によって得られるバンチ波形は  $\cos$  波に  
近いものとなる。しかし、大強度の陽子ビームを加  
速する場合にはバンチ内の粒子同士の相互作用やリ  
ングの持つインピーダンスによって生じる不本意な  
電磁場によってビームは乱されビームロスを招く。  
その強さは、1つのバンチの粒子数が同じとしても  
ビームのピーク電流値、つまりバンチ内の電荷密度  
分布によって変化する。

このため、様々なビーム不安定性を解決する一つ  
の方法としてビーム進行方向の電荷密度分布を高周  
波加速電圧波形を変化させたり加速周波数、振幅、  
位相に変調を加えて改善する方策が取られる。以下  
の節でそれを述べる。

#### 3.1 高周波バケツ操作

1.1 節で述べた高周波バケツについては以前の  
OHO で詳しく述べられているので [1, 3] ここでは、  
必要なことを簡潔に述べる。

図 3.1 のような RF バケツがあるとき高周波バケ  
ツの高さ  $W_{bk} = \Delta E / \omega_{rf}$  は加速電圧の振幅やリ  
ングパラメータによって以下のように決まる。

$$W_{bk} = Y(\phi_s) \frac{L}{\pi c} \sqrt{\frac{eVE_s}{2\pi h^3 |\eta|}} \quad (3.1)$$

ここで  $Y(\phi_s) = \sqrt{2 \cos \phi_s + 2 \phi_s \sin \phi_s - \pi \sin \phi_s}$   
で示されるシンクロナス位相とバケツ高さの縮小率  
で、 $L$  はリングの周長である。この高周波バケツの  
高さはビームエミッタンスが高周波バケツ内で占め  
る最大のエネルギー幅  $W_b$  と

$$W_b = kW_{bk} \quad (3.2)$$

という関係で表され、 $k$  を Filling Factor と呼ぶ<sup>1</sup>。

<sup>1</sup>高周波バケツの面積に対するビームエミッタンスを Filling Factor と呼ぶこともある

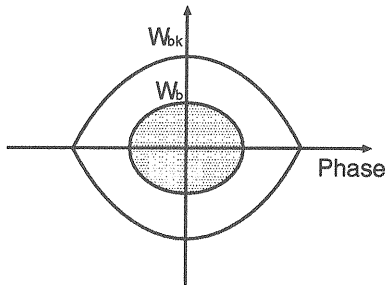


図 3.1: RF バケツとビームエミッタンス。

通常加速電圧パターンというのは、入射から取り出しまでビームエミッタンスを一定に保つような加速電圧とシンクロナス位相が選ばれる。例えば 3 GeV リングの場合は 3.2 eV·s を保つような加速電圧パターンになっている。

3 GeV リングから 50 GeV リングへは Bucket to Bucket でバンチが受け渡されるため、ビームエミッタンスを保つためには 3 GeV リングと 50 GeV リングとで高周波バケツの高さを揃えて置かなければならない。図 3.2 や 3.3 のようにバケツ高が 3 GeV リングのそれとは違っていた場合、バンチは 4 極振動を始めビームエミッタンスの不本意な増大を招く。

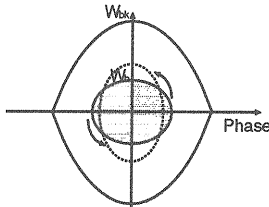


図 3.2: 高周波バケツのミスマッチ。バケツ高が高すぎる場合。

ただし、ビームの入射が終わった後、種々の事情からビームエミッタンスを増大させなければならない場合、バケツ高さを徐々に上げていってビームエミッタンスを増大させることはある。そのとき、バケツ高さを変化させる速さが重要になってくるが、通常 Adiabatic と呼ばれるのは少なくともシンクロトロン振動の周期に比べて十分長い時間を書けてパラメータを変化させることであるが、その指標として典型的には

$$\epsilon = \frac{1}{\omega_s^2} \left| \frac{d\omega_s}{dt} \right| < 0.1 \quad (3.3)$$

程度が使われる [18]。

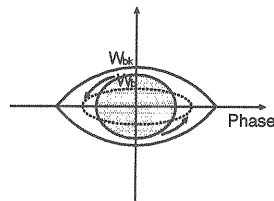


図 3.3: 高周波バケツのミスマッチ。バケツ高が低すぎる場合。

空間電荷効果による高周波バケツの減少 大強度の陽子ビームを加速する際に忘れてはならないのが、空間電荷効果 [19] による高周波バケツの減少である。

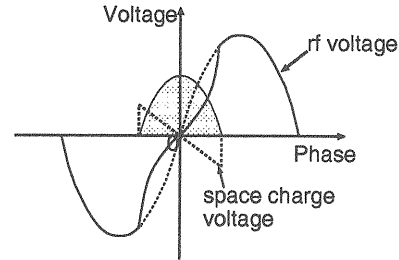


図 3.4: 空間電荷効果による電圧の低下。

これについては [20] に詳しく述べられており、空間電荷分によって失われた加速電圧を余計に見込んで加速電圧をかけておくことが必要である。例えば、3 GeV リングの入射付近では空間電荷効果による電圧は 20 kV 程度にも達するため、加速空洞 1 台の定格加速電圧 43 kV [4] のほぼ半分に相当する。空間電荷効果を含んだ加速電圧の計算には RAMA [21] のような便利な計算コードが存在する。

### 3.2 高調波重畳

空間電荷効果 [19] は縦方向のビームに影響を及ぼすだけでなくもちろん横方向のビームダイナミクスにも大きな影響力を持ち、ビームロスの原因となる。空間電荷効果はバンチのピーク電荷密度/平均電荷密度、つまりバンチングファクターに反比例して大きくなるため、バンチ形状を平滑化してバンチの電荷密度を抑えることが空間電荷効果を抑えるためには重要になってくる。このため縦方向のバンチ形状を平滑化するために、通常の単一の加速周波数 sin 波にその高調波成分を加えてバンチ波形を平滑化することが大強度のシンクロトロンではよく行われている [22, 23, 24]。

例えば、基本波に 2 倍高調波を加えた場合、加速電圧  $V_{\text{gap}}$  とポテンシャル  $U$  は

$$V_{\text{gap}}(\phi) = V_1 \sin \phi + V_2 \sin 2(\phi - \phi_s) \quad (3.4)$$

$$U(\phi) = \int_{\phi_s}^{\phi} (V_{\text{gap}}(\phi) - V_1 \sin \phi_s) d\phi \\ = -V_1 \{ (\cos \phi - \cos \phi_s) + (\phi - \phi_s) \sin \phi_s \} \\ + \frac{1}{2} V_2 [\cos \{ 2(\phi - \phi_s) - 1 \}], \quad (3.5)$$

となる。ここで、 $V_1$  と  $V_2$  はそれぞれ基本波と 2 倍

高調波の振幅である。図 3.5 は基本波 (点線) のみの場合と 2 倍高調波を加えた場合 (太い実線) について  $\phi_s = 0$  のときの加速電圧とポテンシャルについて比べたものである。 $\phi_s = 0$  のとき、 $V_2/V_1 = 0.5$  に選ぶとポテンシャルが最も平滑化され、ポテンシャルに比例するバンチ形状も平滑化される。

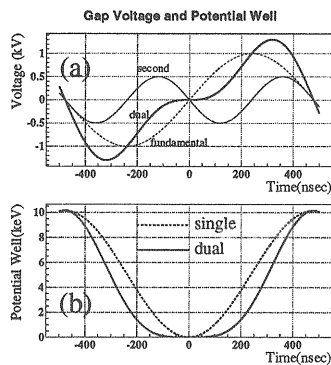


図 3.5: 加速電圧とポテンシャルの 2 倍高調波ありなしの比較。

図 3.6 は HIMAC で行われた実験の結果で [25]、(a) 基本波のみの場合に比べて (b) 2 倍高調波を混ぜた場合にバンチ形状が改善されていることが分かる。

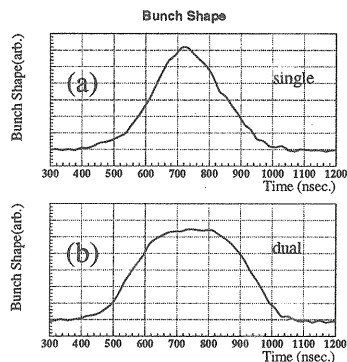


図 3.6: 2 倍高調波の実験結果の比較。

本施設の 3 GeV リングでは、入射時と取り出し時にバンチングファクターを 0.3 以上に、また 50 GeV リングにおいても入射時にバンチングファクターを 0.3 以上に改善するために 2 倍高調波を加えることを検討している。詳しい計算結果については 3.3 節で述べる。

### 3.3 オフセット入射

400 MeV Linac から 3 GeV リングへは  $1.2 \times 10^{11}$  個の陽子が入射される。最終的に  $8.3 \times 10^{13}$  個の陽子を貯めるために 337 ターン (約 500  $\mu\text{sec}$ ) かけて入射が行われる。Linac からくるバンチのパラメータはバンチフル幅 396 ns、 $\Delta p/p \sim \pm 0.1\%$  を予定している。

3 GeV の磁場は図 3.7 のように Sin 波で励磁されており入射のフラットボトムがないため、Linac から来るビームのエネルギーと 3 GeV リングの磁場から得られる中心エネルギーは図 3.8 のように入射の始めと最後に向かうにつれてズれてくる。これは、位相空間上にビームエミッタンスを分散させる効果があるので、一種のペインティングが行われている。ただし、磁場の変動だけではもちろん不十分で、借りてこの状態で多重回入射を行った場合には図 3.9、3.10 のように中心付近に粒子が集まり過ぎてハンチングファクターは非常に悪く 0.1 を少し越える程度である。

そこで、さらに押し進めて、図 3.11 のように積極的に高周波バケツを入射エネルギーからズラした位置で待ち構えておき、運動量方向にオフセットを設けた多重回入射が考えられている。こうすることで、位相平面で見ると図 3.12 エミッタンスのコアの部分がなくなったビームが形成され、そのときのバンチ形状を見ると図 3.13 のようにピーク電流値がかなり抑えられたバンチ形状を実現できる。このときバンチングファクターは 0.25 程度である。

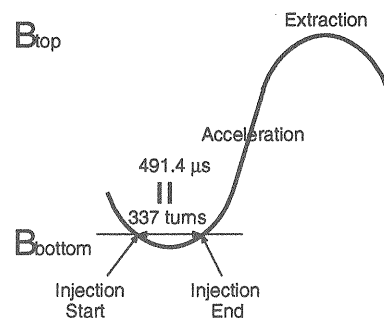


図 3.7: 多重周回入射の区間。

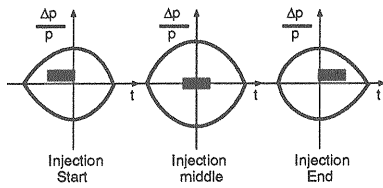


図 3.8: 入射位置の変動。

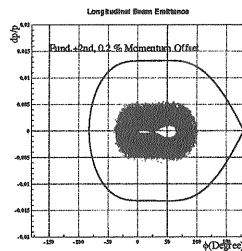


図 3.14: 基本波+2倍高調波で、オフセットありのエミッタンス。

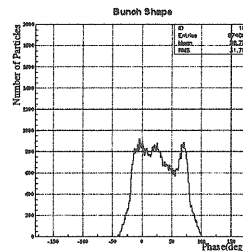


図 3.15: 基本波+2倍高調波で、オフセットありのバンチ形状。

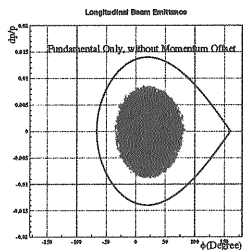


図 3.9: 基本波のみでのエミッタンス。

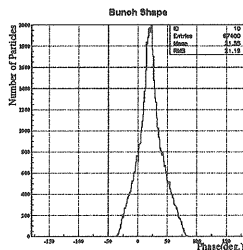


図 3.10: 基本波のみでのバンチ形状。

これによりかなりバンチが平滑化され、このときバンチングファクターは 0.32 程度を達成している。また、空間電荷効果によるチューンシフトがそれでも厳しい場合はさらにオフセット入射や 2 倍高調波のかけかたを工夫することによって、バンチングファクター 0.4 以上を達成したシミュレーション結果も出ている。

このオフセット入射時に注意することは、オフセットをつけ過ぎて高周波バケツからはみ出させてしまわないようにするのはもちろん、大強度の陽子シンクロトロンではリング内にコリメーターと呼ばれる運動量の大きな粒子を一カ所で纏めて捨てる装置を設置してあり [29]、 $\Delta p/p \sim \pm 1.0\%$  を越えた粒子はコリメーター部でビームロスし放射化が懸念されるので、オフセットを設けて入射した場合に加速途中で  $\Delta p/p \sim \pm 1.0\%$  を越えないという条件がオフセット入射には課せられる。この際にも図 3.14 をみて分かる通り、2 倍高調波を加えるとビームの運動量拡がり基本波のみの場合 (図 3.12) の場合に比べて低く抑えられるため、有力な手段である。

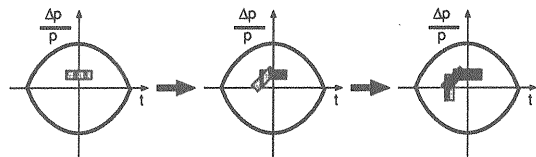


図 3.11: オフセット入射。

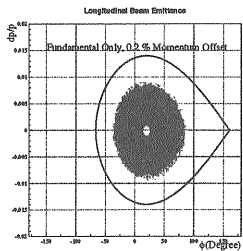


図 3.12: 基本波のみで、オフセットありのエミッタンス。

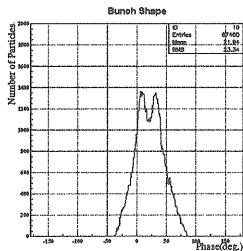


図 3.13: 基本波のみで、オフセットありのバンチ形状。

それでもまだ 3.2 節で述べた入射時にバンチングファクター 0.3 以上の達成は難しいため、これにさらに 2 倍高調波を基本波の 0.5 倍の振幅で加えたのが図 3.14 と 3.15 である。

### 3.4 位相変調

空間電荷効果や結合バンチ不安定性とともに、特に 50 GeV リングの遅い取り出し時に問題となる Microwake Instability [26, 27] を避けるために、取り出しまでにビームエミッタンスを増大させておくことが求められている [28]。ただし、この場合ビームが持つ不安定性を利用してエミッタンスを増大させるのでは、エミッタンスの値もビームロスも制御することが不可能であるので、加速電圧の制御下に置かれたエミッタンスの増大が望ましい。

一つの方法は 3.1 節で述べたように高周波バケツの大きさを Adiabatic に変化させていく方法である

が、シンクロトン振動が加速時間に対して非常に遅く Adiabatic な変化に期待している時間がない場合は種々の変調を加速電圧の振幅もしくは位相に加えてパラメトリック励振 [30] を起こさせてバンチの重心の運動を増大させ、結果としてエミッタンスを増大させる方法が取られる。

もともとこの種の変調の問題は、加速電圧の振幅にノイズが乗ったときのビームの振る舞いを理解することがきっかけとしてあり [31]、その後積極的に変調を加えてビーム操作に利用することが理論的にも実験的にも詳細な解析が進んでいる [32]。この内、位相変調については過去に KEK-PS の Main Ring において、トランジションを越える際にバンチが短くなることによってビームをロスしていることを抑えるために使用されていた例 [33] があり、また近年では電子蓄積リングにおいてビーム不安定性を抑えビーム寿命を改善することにも成功している [34]。本施設でもエミッタンスの増大を目指して位相変調の導入を検討している。

### 3.4.1 Mathieu 方程式

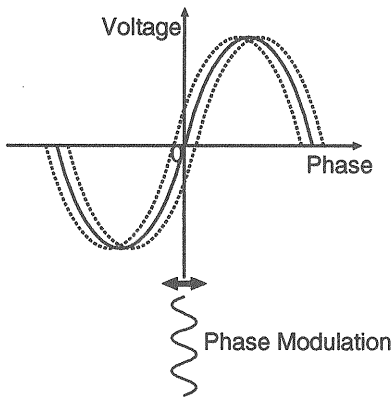


図 3.16: 位相変調。

位相変調の原理は図 3.16 のように、加えている加速電圧の位相をある周期を持った関数で揺らすことである。つまり、式 (1.4) において  $\phi \rightarrow \phi + \phi_m$  とし、

$$\phi_m = \phi_{m0} \sin(\omega_m t) \quad (3.6)$$

として、位相振幅  $\phi_{m0}$  で振動数  $\omega_m$  の調和的な振動を与えることになる。前にやったように  $\Delta\phi = \phi - \phi_s \ll 1$ 、また位相変調の振幅も  $\phi_{m0} \ll 1$  として解析的に調べてみる。

$$\frac{d\Delta E}{dt} = \frac{eV}{2\pi h} \{ \sin(\phi + \phi_m) - \sin \phi_s \}$$

$$\begin{aligned} &\cong \frac{eV}{2\pi h} (\sin \phi - \sin \phi_s + \phi_m \cos \phi) \\ &= \frac{eV}{2\pi h} \{ \sin(\phi_s + \Delta\phi) - \sin \phi_s + \phi_m \cos(\phi_s + \Delta\phi) \} \\ &\cong \frac{eV}{2\pi h} (\cos \phi_s \cdot \Delta\phi + \phi_m \cos \phi_s - \phi_m \sin \phi_s \cdot \Delta\phi) \end{aligned} \quad (3.7)$$

式 (1.5) を代入して最終的に

$$\frac{d^2 \Delta\phi}{dt^2} + \omega_s^2 (1 + \varepsilon \sin \omega_m t) \Delta\phi = -\omega_s^2 \phi_{m0} \sin \omega_m t \quad (3.8)$$

ここで、 $\varepsilon = -\phi_{m0} \tan \phi_s$  である。式 (3.8) は右辺に強制振動項があり、 $\omega_m = \omega_s$  のとき  $\Delta\phi$  は発散するが、強い共鳴であるのでとりあえず  $\omega_m \neq \omega_s$  として話を進める。このとき、右辺の項は影響を及ぼさないとして、

$$\frac{d^2 \Delta\phi}{dt^2} + \omega_s^2 (1 + \varepsilon \sin \omega_m t) \Delta\phi = 0 \quad (3.9)$$

を得る。これは、有名な Mathieu 方程式の形をしている。

Mathieu 方程式は、パラメーターによって解が安定な振動解を持つ場合と、発散する不安定な場合とがある。その条件は Mathieu 方程式を

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + (\delta + \varepsilon \cos z) u = 0 \quad (3.10)$$

と書くと、図 3.17 のような  $\delta$  と  $\varepsilon$  の斜線の部分で安定、それ以外の部分で不安定となる。

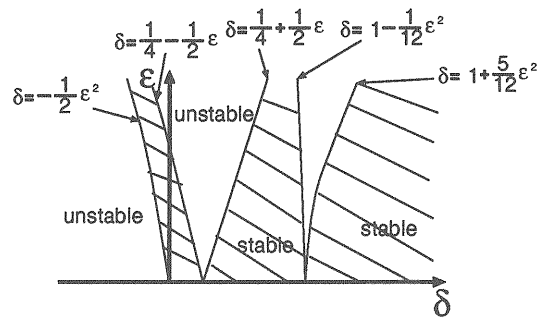


図 3.17: Mathieu 方程式の解の安定領域。

$\varepsilon \ll 1$  のとき  $\delta = n^2/4$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  のところで不安定になりやすい。これは、式 (3.10) で  $z = \omega t + \text{Const.}$ ,  $\omega^2 \delta = \omega_0^2$ ,  $\omega^2 \varepsilon = \alpha$  (ただし、 $\omega_0$  は固有振動数) としたとき

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + (\omega_0^2 - \alpha \sin \omega t) u = 0 \quad (3.11)$$

で、式 (3.11) は  $\omega = 2\omega_0, \omega_0, \frac{2}{3}\omega_0, \dots$  のとき不安定になりやすいことを示している。図 3.17 より、 $\omega = 2\omega_0$  のときもつとも不安定になりやすい。



解  $\Delta\phi(t)$  の様子を見るために、 $\Delta\phi = a(t)\sin\omega_s t + b(t)\cos\omega_s t$  を仮定し、 $\dot{a}(t)\sin\omega_s t + \dot{b}(t)\cos\omega_s t = 0$  の条件を設けて式 (3.9) に整理すると、

$$\dot{a}\omega_s = -\omega_s^2 \varepsilon \sin\omega_m t \cdot \cos\omega_s t \times \{a(t)\sin\omega_s t + b(t)\cos\omega_s t\} \quad (3.12)$$

$$\dot{b}\omega_s = \omega_s^2 \varepsilon \sin\omega_m t \cdot \sin\omega_s t \times \{a(t)\sin\omega_s t + b(t)\cos\omega_s t\} \quad (3.13)$$

となる。ここで、 $a(t), b(t)$  に関しては、シンクロトロン振動程度の周期の細かな運動については興味を持たず、長い時間でどのように値が変化するかを見たいので、シンクロトロン振動の周期  $T_s = 2\pi/\omega_s$  で以下のような平均操作を行う。

$$\frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} \sin\omega_s t dt = \overline{\sin\omega_s t} = 0 \quad (3.14)$$

$$\frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} \cos\omega_s t dt = \overline{\cos\omega_s t} = 0 \quad (3.15)$$

$$\frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} \sin^2\omega_s t dt = \overline{\sin^2\omega_s t} = \frac{1}{2} \quad (3.16)$$

$$\frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} \cos^2\omega_s t dt = \overline{\cos^2\omega_s t} = \frac{1}{2} \quad (3.17)$$

また、変調の周波数に最も不安定となりやすいシンクロトロン振動の2倍を選んで  $\phi_m = 2\omega_s$  とすると、式 (3.12)(3.13) は、

$$\dot{a}(t) = -\frac{1}{2}\varepsilon\omega_s \cdot a(t) \quad (3.18)$$

$$\dot{b}(t) = \frac{1}{2}\varepsilon\omega_s \cdot b(t) \quad (3.19)$$

これより、 $a(t), b(t)$  は

$$a(t) = A_0 e^{-\frac{1}{2}\varepsilon\omega_s t} = A_0 e^{\frac{1}{2}\phi_{m0}\omega_s \tan\phi_s \cdot t} \quad (3.20)$$

$$b(t) = B_0 e^{\frac{1}{2}\varepsilon\omega_s t} = B_0 e^{-\frac{1}{2}\phi_{m0}\omega_s \tan\phi_s \cdot t} \quad (3.21)$$

となり、 $t \rightarrow \infty$  のとき  $b(t) \rightarrow 0$  に向かい、 $a(t)$  が発散する方向に向かう。これが位相変調によるバンチの運動の増大を招く。ただし、これまで解いてきた式は  $\omega_s$  で振動する線形な調和振動子について解いたものであり、式 (3.7) を導く仮定での  $\Delta\phi \ll 1$  でない大振幅の運動のときには、図 1.4 でセパトリクス内の外側の軌道を回る粒子は  $\omega_s$  よりも小さなシンクロトロン振動数しか持っておらず、だんだんとパラメトリック励振の不安定の条件から外れてくるので  $a(t)$  は無限に大きくなるわけではなく、ある値に落ち着くことになる [34]。

### 3.4.2 位相変調によるエミッタンスの増大

位相変調を使って実際に本施設の 3 GeV リングについてエミッタンスの増大をさせた例を載せる。ただし、式 (3.21) を見ても分かるようにエミッタンス増大のレートは高々シンクロトロン振動の周期のオーダーなので、あまりシンクロトロン振動の速くないリングではエミッタンスの増大は期待できない。50 GeV リングの取り出しまでに 10.75 eVs までエミッタンスを増大させることが望まれているが [28]、3 GeV リングでは図 3.18 のように 5.5 kHz  $\sim$  500 Hz 程度と加速時間 20 ms に比べてあまりシンクロトロン振動は速くないので、エミッタンスの増大は 3 GeV リングでもできる限り行い、50 GeV リングに入射後もさらに増大させることが検討されている。

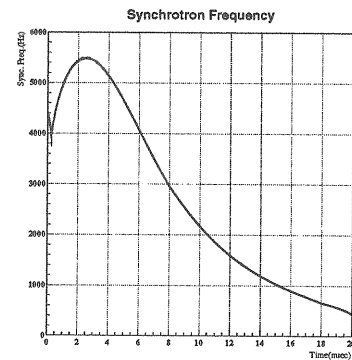


図 3.18: 3 GeV のシンクロトロン振動数の加速中の変化。

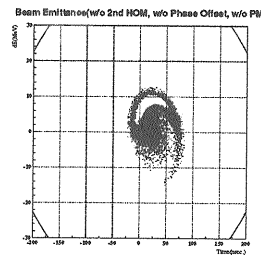


図 3.19: 基本波のみ、位相変調なしのエミッタンス。

まず、3 GeV リングの入射において 3.3 節で述べたようなオフセット入射と 2 倍高調波を使い、その後徐々に 2 倍高調波を立ち下げ位相変調を行わなかった場合の取り出し付近でのエミッタンス (図 3.19) とバンチ形状 (図 3.20) を載せる。計算の結果、

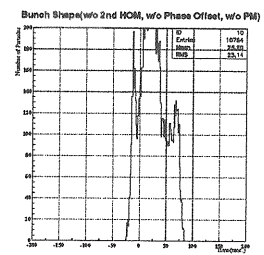


図 3.20: 基本波のみ、位相変調なしのバンチ形状。

エミッタンスは 2.5 eVs、バンチングファクターは 0.12 程度で非常に悪い。

次に入射から取り出しまで  $V_2 = 0.5V_1 \cos \phi_s$  のように 2 倍高調波電圧をかけ続けた場合の取り出し付近でのエミッタンス (図 3.21) とバンチ形状 (図 3.22) を載せる。このときエミッタンスは基本波のみの場合とあまり変わらず 2.5 eVs 程度、しかしバンチングファクターは 0.2 程度まで改善されている。

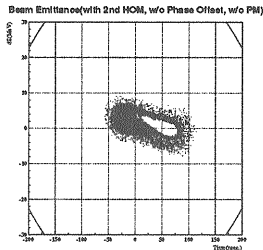


図 3.21: 基本波+2 倍高調波、位相変調なしのエミッタンス。

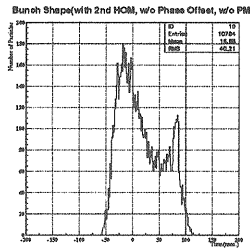


図 3.22: 基本波+2 倍高調波、位相変調なしのバンチ形状。

さらに、入射において運動量方向にオフセットをつけるだけでなく、位相方向にもオフセットを加えた場合のエミッタンス (図 3.23) とバンチ形状 (図 3.24) を載せる。これは、エミッタンスを広げバンチの電荷密度分布をさらに最適にする効果があり、エミッタンスで 4 eVs 程度、バンチングファクターも 0.25 程度まで改善される。

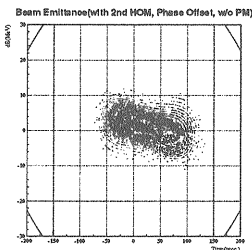


図 3.23: 基本波+2 倍高調波、位相オフセットあり、位相変調なしのエミッタンス。

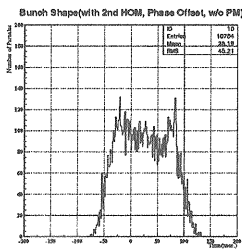


図 3.24: 基本波+2 倍高調波、位相オフセットあり、位相変調なしのバンチ形状。

最後に、さらに位相変調を加えた場合の取り出し付近でのエミッタンス (図 3.25) とバンチ形状 (図 3.26) を載せる。ちなみに位相変調の振幅は  $\phi_{m0} = 0.05\text{rad}$ 、変調の周波数は  $2\omega_s$  である。変調の振幅については、加速途中にビームが高周波バケツからこぼれないことを条件に決めたものであり、エミッ

タンスの増大の速さから決めたわけではない。このときエミッタンスは基本波のみの場合とあまり変わらず 5 eVs 程度、しかしバンチングファクターは 0.3 程度まで改善された。

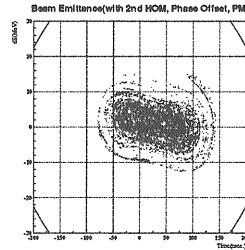


図 3.25: 基本波+2 倍高調波、位相オフセットあり、位相変調ありのエミッタンス。

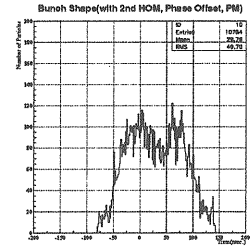


図 3.26: 基本波+2 倍高調波、位相オフセットあり、位相変調ありのバンチ形状。

以上のことから、加速時間に対してシンクロトロン振動の遅い 3 GeV リングのような場合には入射時に電荷密度をできるだけ下げ、エミッタンスを増やす努力を可能な限り行い、さらに位相変調を使うとエミッタンスについては多少フィラメンテーションがあるものの 5 eVs まで増大させることができ、2 倍高調波も加えてバンチングファクターを 0.3 まで上げることができた。

特にこのバンチングファクターについては、50 GeV の入射時では空間電荷効果が原因となるビーム不安定性のためビームが数百  $\mu\text{sec}$  のオーダーで失われてしまうことがあり、50 GeV に入射したのちにそのような短い時間でバンチングファクターを改善することはできない。そのため、3 GeV の取り出し時までバンチングファクターを改善しておかなければならないのだが、図 3.22 を見て分かるようにただ単に 2 倍高調波をかけただけではなかなかよいバンチングファクターが得られない。これは、2 倍高調波が基本的にあまりバンチの長さを変えずにその形状だけを変えることが行われるため、もともとエミッタンスが小さくバンチが短いと 2 倍高調波だけで改善できる余地は限られているからである。

そこで、オフセット入射や位相変調を加えてエミッタンスの増大をはかり、バンチ長をある程度伸ばすことを導入するとバンチ内の電荷密度が下がりそれを 2 倍高調波でバンチ形状を平滑化することによって、バンチングファクターを改善することができる。

以上のように位相変調の効果が見られたが、3 GeV リングのように加速の途中でシンクロナス位相が 45 度程度まで上がり、バケツの面積がかなり小さくな

る場合には位相変調によってビームがバケツから失われかねないので注意が必要である。

現在のところ、3 GeV リングでの取り出しまでの検討が行われており、50 GeV リングに入ってから取り出しまでにエミッタンスを 10.75 eVs に増やすことについては現時点では検討課題である。

## おわりに

以上、駆け足で大強度陽子シンクロトロンにおける高周波加速について、高周波制御とビーム操作の観点から起りうる問題点とその解決策について述べました。大強度の場合は、ビームローディングとビーム不安定性をいかに抑えるかがポイントになってくるのですが、高周波空洞は磁石に比べてビームに対して速い時間で操作を加えることができ、かつ縦方向のビームを操作できる限られた装置なので、大強度陽子加速の大きな鍵を握っていると言えます。

過去 OHO では、陽子シンクロトロンに関するテーマで 2 度ほど開催され、その度に第一線で活躍されている講師の方々が微に入り細に渡って高周波加速システムについて解説をされていました。3 度目となる今回は、過去にあまり触れられていなかった点で本施設で重要な問題と位置づけられていることについてできるだけ分かりやすく解説を試みたのですが、著者の力量不足のため多分に至らぬところがあると思います。また、あきらかに大強度の加速時に取り上げるべき事柄でも、まだ詳細を検討中のところもあり、時間がなく今回は掲載を見送った内容もあります。読者の皆さんのご批判を仰ぐ次第です。

しかし何よりも、加速器を勉強し始めたとき最初に読んだ教科書的なものの一つがこの OHO の講義ノートだったのですが、まさか自分が書くことになるとは思いませんでした。

## 謝辞

本講義ノートを纏めるにあたって吉井正人氏、大森千広氏には多大な助言をいただきました。また、上杉智教氏、田村文彦氏とは爽りのある議論させていただきました。この場を借りて厚く御礼申し上げます。

また、このような機会を与えて下さいました鎌田進氏、山崎良成氏に心から感謝申し上げます。

## 参考文献

- [1] 二宮重史、陽子シンクロトロンの高周波加速装置、OHO '89
- [2] 吉井正人、高周波加速空洞、OHO 1996
- [3] 大森千広、高周波システム、OHO 1996
- [4] 上杉智教、高周波加速システム I、OHO 2001
- [5] Mario Conte and William W. Mackay, An Introduction to the Physics of Particle Accelerators, World Scientific, 1991
- [6] S. Y. Lee, Accelerator Physics, World Scientific, 1999
- [7] W. Schnell, Equivalent Circuit Analysis of Phase-Lock Beam Control Systems, CERN 68-27, 1968
- [8] 飛山真理、ビームフィードバックによるビームの安定化、OHO 1994
- [9] 絵面栄二、RF フィードバック、OHO 1994
- [10] K. W. Robinson, Stability of Beam in Radiofrequency System, CEAL-1010, CEA, 1964
- [11] F. Pedersen, Beam Loading Effects in the CERN PS Booster, IEEE Trans. Nucl. Sci., Vol. NS-22, No.3, p1906, 1975
- [12] A. Chao, Physics of collective Beam Instabilities in High Energy accelerators, Wiley Interscience, 1993
- [13] E. Ezura *et al.*, Longitudinal Behavior of the Beam in KEK Booster, IEEE Trans. Nucl. Sci. Vol. NS-26, No.3, 1979
- [14] D. boussard *et al.*, Collective Effects at Very High Intensity in the CERN-PS, IEEE Trans. Nucl. Sci. Vol. NS-26, No.3, 1979
- [15] F. Pedersen, A Novel RF Cavity Tuning Feedback Scheme for Heavy Beam Loading, IEEE Trans. Nucl. Sci., Vol. NS-32, No.5, 1985
- [16] P. Barratt, RF System and Beam Loading Compensation on the ISIS synchrotron, Proc. of EPAC 90, 1990
- [17] M. Yamamoto *et al.*, Beam Loading Effects on High Gradient MA-Loaded Cavity, Proc. of PAC 99, 1999

- [18] Handbook of Accelerator Physics and Engineering, World Scientific, p.283, 1998
- [19] 町田慎二、空間電荷効果、OHO 2000
- [20] A. Hofmann and F. Pedersen, Bunches with Local Elliptic Energy Distributions, IEEE Trans. Nucl. Sci., Vol. NS-26, No.3, p.3526, 1979
- [21] R. Baartman and H. Schönauer, A Computer Code Useful for Designing Synchrotrons, TRI-DN-86-15, 1986
- [22] A Second Harmonic RF System with Feedback-Reduced Gap Impedance for Accelerating Flat-Topped Bunches in the CERN PS Booster, IEEE Trans. Nucl. Sci., Vol. NS-30, No.4, p.3499, 1983
- [23] R. D. Cohaupt, The experimental Study of a Higher Harmonic RF System in PETRA, DESY M-83-07, 1983
- [24] A. Schnase *et al.*, Experience with a Broadband Cavity at COSY, Proc. of EPAC 2000, Vienna, p.2002, 2000
- [25] Multi-Harmonic Acceleration with High Gradient MA Cavity at HIMAC, Proc. of PAC 99, New York, 1999
- [26] F. J. Sacherer, Bunch Lengthening and Microwave Instability, IEEE Trans. Nucl. Sci., Vol. NS-24, No.3, p.1393, 1977
- [27] 鈴木敏郎、ビーム不安定性の理論、OHO 1985
- [28] JHF Accelerator Design Study Report, KEK Report 97-16, 1998
- [29] 山本風海、ビームトランスポート II、OHO 2001
- [30] 戸田盛和、振動論、培風館
- [31] I. Gumowski, Synchrotron Equation with an Amplitude-Modulated Accelerating Voltage, CERN SI/Int. EL/68-1, 1968
- [32] S. Y. Lee *et al.*, Effects of RF Voltage Modulation on Particle Motion, Nucl. Inst. Meth. in Phys. Res. A 364(1995), p.205, 1995
- [33] Y. Mizumachi and K. Muto, RF Phase Shake and Counterphasing at Phase Transition, IEEE Trans. Nucl. Sci., Vol. NS-28, No.3, p. 2563, 1981
- [34] S. Sakanaka *et al.*, Improvement in the Beam Lifetime by means of an RF Phase Modulation at the KEK Photon Factory Storage Ring, Phys. Rev. ST-AB, Vol. 3(2000), 2000