

1 はじめに

大強度陽子加速器施設の入射器では、高周波四重極リニアック (RFQ) によって 3MeV まで加速されたビームは、ドリフトチューブリニアック (DTL)、機能分離型ドリフトチューブリニアック (SDTL)、環結合型結合空洞リニアック (ACS) の 3 種類の常伝導加速器によって、3GeV リングへの入射エネルギーである 400MeV まで加速される。これらのリニアックはいずれも定在波型 (standing-wave type) とよばれるタイプのもので、高周波空洞内に励振された定在波をビームの加速に用いるタイプのリニアックである。本講義では、DTL、SDTL、ACS の特徴を述べるとともに、本加速施設の入射器がこのような異なるタイプのリニアックを組み合わせた構成となっている背景についても概説する。

この講義テキストでは、基礎的な加速器用語 (デューティ、エミッタンスなど) についての知識を前提としている。これらの用語になじみのない読者は、まず本テキストの「入射器施設の概要」の Appendix-A に目を通してから本文を読むことをおすすめする。

2 DTL

大強度陽子加速器施設の入射器として用いられる DTL はアルバレ型 (Alvarez type) とよばれるタイプのものである。アルバレ型 DTL は、図 1 に示すように、タンクとよばれる円筒空洞の中心軸状にドリフトチューブ (drift tube) とよばれる中空の円筒形導体を並べた構造をしている。この空洞内に高周波電力を供給することにより、隣り合うドリフトチューブ間のギャップ (加速ギャップ) に高周波電場が励起される。加速ギャップに励起される電場の向きは高周波の周期で変化するが、DTL では、ある瞬間に時間をとめたときの各加速ギャップに励起される電場の向きはすべて同じである。隣り合うドリフトチューブの中心間 (これをセルとよぶ) の距離は、ちょうど高周波の 1 周期の間に粒子が進む距離と同じになるようにつくられており、粒子は高周波の 1 周期おきにギャップに現れて、加速電場により加速される。電場の向きが逆向きの時には粒子はドリフトチューブ内にあり、高周波電場からは遮蔽される。このように粒子の運動と高周波電場の同期をとって粒子の加速を行うためには、セルの長さは $\beta\lambda$ に等しくなければならない。ここで、 β はこの間を運動する粒子の平均速度を光速 c でスケールした値、 $\lambda = c/f$ は高周波の波長、 f は周波数である。

DTL では、ギャップ間に電場が励起されるだけでな

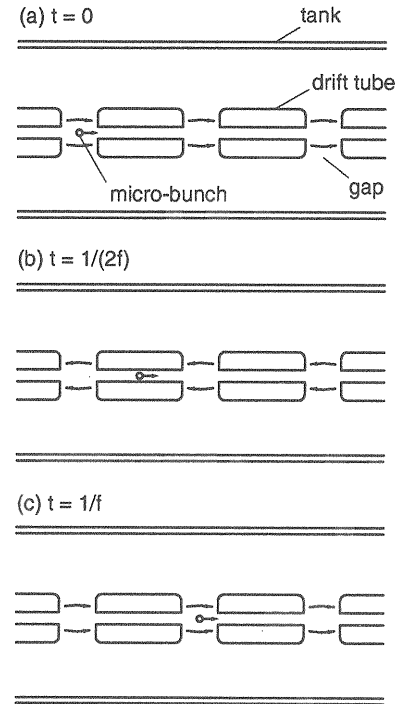


Figure 1: DTLによる加速の原理

く、同時に導体表面に高周波の電流が流れ、空洞内に磁場が励起される。この様子を、ごくおおざっぱに表したものが図 2 である。このとき電流は、表皮効果により、導体表面から深さ δ 程度より浅いところに集中して流れる。この δ を表皮の厚さ (skin depth) といい、次のような関係式を満たすことが知られている [1]。

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu\omega}} \quad (1)$$

ここで、 $\omega = 2\pi f$ は高周波の角振動数、 σ は導体の電気伝導度、 μ は導体の透磁率である。空洞の導体の材質としてはふつう電気伝導度のよい銅が用いられるが、324MHz における銅の表皮の厚さはおよそ $3.0\mu\text{m}$ 、972MHz の場合はおよそ $1.7\mu\text{m}$ である。このことから、空洞の壁電流は、導体表面のほんのわずかな厚みの部分にしか流れないことがわかる。このことから DTL では、鉄でつくったタンクの内面に電鍍によって銅の層をつくることによって、必要な電気伝導度を確保している。

DTL におけるビームの横方向の収束は、ドリフトチューブ内に組み込まれた四重極磁石によって行われる。組み込む四重極磁石としては、永久磁石を用いる方法 [2] と電磁石を用いる方法がある。永久磁石を用い

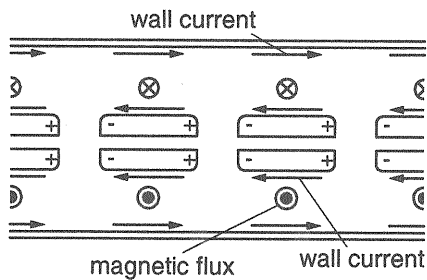


Figure 2: DTLにおける壁面電流

た場合、四重極磁石がコンパクトにできるため、高周波電力の周波数として高い周波数を選択でき、高い加速効率を実現できる。一方、電磁石を用いた場合には、四重極磁石の強さを調節できるというメリットがある。大強度陽子加速器施設の入射器として用いるDTLでは、電鍍で四重極電磁石のコイルをつくることにより、四重極電磁石を小型化し、電磁石を用いたDTLとしては324MHzという比較的高い周波数を実現している。

ドリフトチューブは、実際には図1のように中空に浮かしておくことはできないので、ステムとよばれる導体でできたロッドによって図3のように支持されている。ステムはふつうドリフトチューブの電気的な中心を下から支えるか、もしくは上から吊すかたちで支持する。これは、この位置には動径方向の電場がないため、ステムに電場による電流が流れないからである。電場による電流が流れる位置にステムをたてると、この電流によって熱損失が生じ、空洞性能の低下につながる。ただし、この位置にステムをたてても熱損失がまったくなくなるわけではなく、高周波磁場によってステム表面に生じる渦電流による熱損失は避けられない。

また、図1~図3ではセルの長さをすべて同じに描いてあるが、現実には粒子が加速されるにしたがって β は大きくなるので、下流ほどセルの長さは長くする必要はある。

ここまでで、DTLがおおよそどのようなものであるかはわかっていただけたことと思う。実際にDTLの設計をするとなると、細部の形状の最適化が必要であり、このような作業にはSUPERFISH[3]のような電磁場解析コードの力を借りることが不可欠である。図4に、SUPERFISHによるDTLの計算結果の例を示した。図4では、DTLを横から見た断面(ビーム軸を含む鉛直断面)のうちビーム軸より上の半分、かつ1セルの下流側の半分だけが表されている。これは、ス

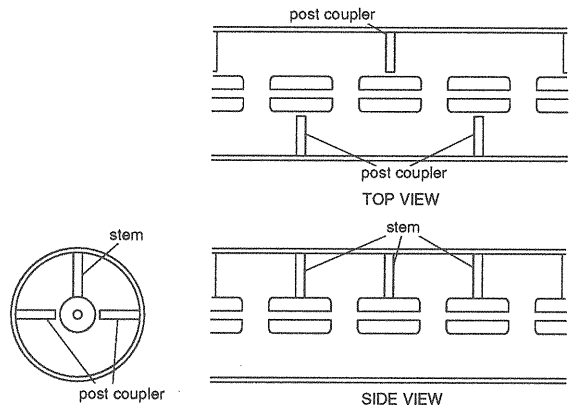


Figure 3: ステムとポストカップラー

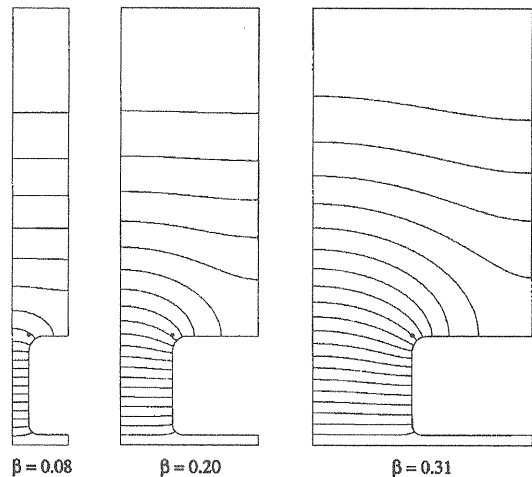


Figure 4: SUPERFISHによるDTLの電磁場解析の例

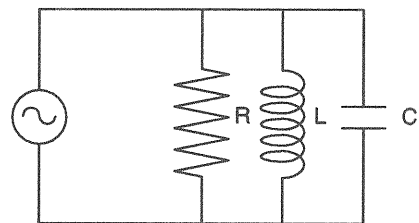


Figure 5: DTL1セルの等価回路

テムや後述するポストカップラーの効果を除けば、この部分の計算だけを行えば、空洞のもつ対称性から、他の部分の電磁場も求めることができるからである。電磁場コードを用いた解析結果を表示するときにはこのような表示のしかたがよく用いられる。図4中の曲線は電気力線を表しており、この図からDTLでは加速ギャップに電場が集中していることがわかる。実際に電磁場解析コードを用いて計算してみることも理解を深める上で重要だが、ここではSUPERFISHの使い方等には深入りせず、単純なモデルを用いて、「DTLの主要な形状パラメータを変えたときに空洞の高周波性能がどのように変化するのか」を定性的に理解することをこころみる。主要な形状パラメータとしては、タンク内径 D 、ドリフトチューブ直径 d 、ギャップ間隔 g を考える。

加速ギャップには高い加速電場が励起されるため、この部分はコンデンサ的な働きをするものと考えられる。また、ドリフトチューブとタンク内壁の間の空間は壁電流によって磁場が励起されるため、コイルのような働きをするものと考えられる。すると、加速空洞の極めて単純なモデルとして、図5のような等価回路を用いる方法が考えられる。

まず、図5の等価回路のコイルの自己インダクタンスを求めよう。ここでは、ごくごくおおざっぱな近似を用いることにする。いま、ギャップ間隔がセルの長さよりも十分小さいとする($g/\beta\lambda \ll 1$)と、DTLの空洞は同軸的に配置された2つの円筒状導体で近似できる。いま、表皮の厚さは D や d に比べて十分小さいので、各円筒状導体の厚みは無視してよい。そうすると、この2重の円筒状導体で形成される往復回路の自己インダクタンスは、次のように求められる。

$$L_0 \sim \frac{\mu_0 \beta \lambda}{2\pi} \ln \frac{D}{d} \quad (2)$$

ここで、 μ_0 は真空の透磁率である。一方、加速ギャップの静電容量は、半径 d 、ギャップ g の円形平行平板コンデンサで近似し、 g が d に比べて十分小さいと仮定すると、次のように求められる。

$$C_0 \sim \frac{\epsilon_0 \pi d^2}{g} \quad (3)$$

ここで、 ϵ_0 は真空の誘電率である。空洞の共振周波数は、上で求めたインダクタンスと静電容量を用いて次のようにかける。

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L_0 C_0} \sim \frac{2gc^2}{\beta \lambda d^2 \ln \frac{D}{d}} \quad (4)$$

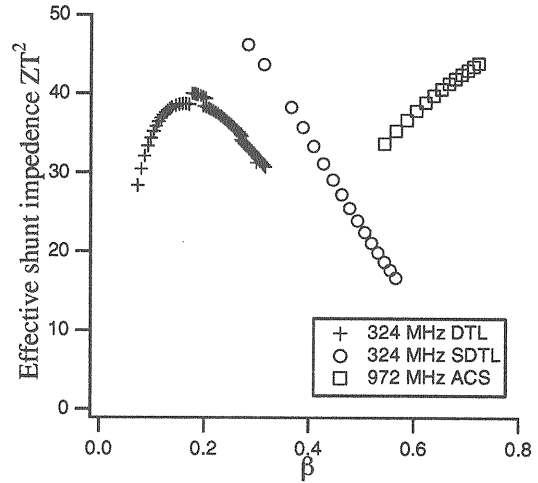


Figure 6: 有効シャントインピーダンスと β の関係

ここで、光速 c と、 μ_0 、 ϵ_0 の間に成り立つ次の関係式を用いた。

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (5)$$

このあたりの式の導出については、電磁気学のテキスト[1]または演習書[4]をあたってほしい。

エネルギーが高くなるにしたがって β が大きくなるため、セルの長さは長くなるが、上のような単純な近似では、 $g/\beta\lambda$ を一定に保つことによって、 d や D を変えなくても空洞の周波数を一定に保つことができる。しかし、実際には、 d に比べて g が大きくなるにしたがって、電場のしみだしがおこり、上の計算よりも加速ギャップの静電容量が大きくなる。したがって、 d や D を一定に保ったまま周波数を一定に保つためには、 $g/\beta\lambda$ を大きくする必要が生じ、これはトランジットタイムファクターの低下を招く。 $g/\beta\lambda$ を大きくせずに周波数を一定に保つには、 β が大きくなるにつれて D を小さくする方法と d を小さくする方法があるが、 D を小さくする方法は対数でしかかきかないことからあまり効果的ではない。 d を小さくすることは、ドリフトチューブ内に四重極磁石を納めるスペースを確保する必要があるのでネックとなって実現が難しい。このことから、 β が大きい領域では、DTLのトランジットタイムファクターはどうしても小さくなり、加速効率(有効シャントインピーダンス)の低下は避けられない。図6に、DTLの有効シャントインピーダンスと β の関係の例を示す。

以上から、DTLの長所と短所をまとめると次のよう

Table 1: DTL の主要なパラメータ

	第1タンク	第2タンク	第3タンク
入射エネルギー (MeV)	3	19.7	36.7
出射エネルギー (MeV)	19.7	36.7	50
周波数 (MHz)	324	324	324
セル数	76	43	27
平均加速電場 (MV/m)	2.5	2.7	2.9
同期位相 (deg)	-30	-26	-26
高周波消費電力 (MW)	1.9	2.0	1.7
クライストロン数	1	1	1
全長 (m)	9.9	9.4	7.3
タンク内径 D (mm)	561	561	561
ドリフトチューブ外径 d (mm)	140	140	140
ビーム孔直径 (mm)	13, 18	22	26
$g/\beta\lambda$	0.29~0.35	0.35~0.40	0.40~0.43

になる。まず DTL の長所としては、「各セル間を隔てる壁面がないためその分熱損失が小さいこと」と「ドリフトチューブ内に四重極磁石を備えることにより、強い横方向の収束力が得られること」が上げられる。特に、2番目の点は、低い β のビームを加速する上で非常に重要である。逆に、DTL の短所としては、ドリフトチューブ内に四重極磁石を納めるスペースを確保する必要があり、このことがとくに高 β 部で高い高周波性能を実現する妨げとなることがあげられる。

このような観点から、大強度加速器施設の入射器では、その低 β 部に DTL を用いている。表 1 に、この DTL の主要なパラメータをまとめておく。各ドリフトチューブには、水平方向収束（鉛直方向発散）と水平方向発散（鉛直方向収束）の四重極電磁石が交互に入っており、それによってビームの横方向の収束を行う。四重極電磁石のこのような配置（ラティス）を FODO ラティスとよぶ。この DTL の最大の特色は、324MHz という、電磁石を収束に用いた DTL としては高い周波数を選択していることにある。

3 SDTL

前章で、DTL について、「横方向の強い収束を得られることは、低い β のビームを加速する上で有利である」という趣旨のことを述べたが、これはどうしてであろうか。SDTL の特色を理解するために、まずこの点から考えていきたいと思う。

ビーム軸から水平方向への変位を x 、鉛直方向の変位を y とし、ビーム軸に沿った移動距離 s を独立変数にとる。ビームの進行方向を z の正の向き、ビームの進行方向に向かって右を x の正の向き、上を y の正の

向きとする。いま、非常に単純なケースとして、 s 依存性をもたない軸対称な外部収束系を輸送される直流 (DC) ビームを考える。すると、ビームを構成する粒子の運動方程式は、次のようにかける。

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\kappa^2x + \frac{q}{\gamma m(\beta c)^2} [E_x^{SC} + \beta c B_y^{SC}] \quad (6)$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = -\kappa^2y + \frac{q}{\gamma m(\beta c)^2} [E_y^{SC} - \beta c B_x^{SC}] \quad (7)$$

ここで、 q は粒子の電荷、 m は粒子の静止質量、 βc は粒子の速度、 $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ 、 κ は外部収束力の強さを表すパラメータである。 E_x^{SC} 、 E_y^{SC} はビームがつくる電場の x 成分と y 成分、 B_x^{SC} 、 B_y^{SC} はビームがつくる磁場の x 成分と y 成分である。

ここでさらに、ビームの実空間分布が軸対称な場合を考える。いま、ビーム電流を I とすると、単位長さあたりのビームに含まれる電荷は $I/\beta c$ であることから、ガウスの法則を用いて、ビームによって生じる電場が次のように求められる。

$$E_r^{SC}(r; s) = \frac{I}{2\pi\epsilon_0(\beta c)r} \int_0^r n(r') 2\pi r' dr' \quad (8)$$

ここで、 $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$ である。また、式中の r' はダミーの変数であり、 r の s 微分を表すものではない。 $n(r)$ はビームの実空間の分布関数であり、次のように正規化されているものとする。

$$\int_0^\infty n(r) 2\pi r dr = 1 \quad (9)$$

同様に、ビームによって生じる磁場は、アンペールの法則を用いて次のように求められる。

$$r B_\theta^{SC}(r; s) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \int_0^r n(r') 2\pi r' dr' \quad (10)$$

粒子がビームによって生じる電場から受ける力と磁場から受ける力が常に逆向きになることは、フレミングの左手の法則を用いて簡単に確かめられる。また、その大きさの比は、式(8)と式(10)を用いて、

$$\frac{|(\beta c)rB_{\theta}^{SC}(r;s)|}{|E_r^{SC}(r;s)|} = \beta^2 \quad (11)$$

と求められる。したがって、 β が大きなビームほど磁場によって電場の効果が打ち消され、 $\beta \rightarrow 1$ の極限では、空間電荷効果は完全に打ち消されてゼロになる。逆に $\beta \rightarrow 0$ の極限では、ビームによって磁場は生じず、電場の効果はまったく打ち消されない。

これらの式を用いると、粒子の運動方程式は次のように書き直すことができる。

$$\frac{d^2r}{ds^2} = -\kappa^2 r + \frac{L^2}{r^3} + \frac{K}{r} \int_0^r n(r') 2\pi r' dr' \quad (12)$$

ここで、 L は粒子の角運動量である。また、

$$K \equiv \frac{qI}{2\pi\epsilon_0\gamma^3 m(\beta c)^3} \quad (13)$$

は、一般化されたパービアンズ (generalized perveance) とよばれる量であり、空間電荷効果の強さを表す指標としてしばしば用いられる。この式の中では、磁場による打ち消しの効果を表す項 $1 - \beta^2$ を、 γ の定義を用いて $1/\gamma^2$ に書き換えてある。

ここまでの導出で、ビーム電流が同じであれば、エネルギーの低い領域ほど、磁場による空間電荷力の打ち消しが起こらず、強い空間電荷効果が現れることは理解していただけたものと思う。上の議論では軸対称なビームを例に取り上げたが、粒子の速度の z 成分が x 成分や y 成分よりも十分大きいという近似が成り立つ限り、軸対称性のない一般の分布をもつビームについて同様の議論が成り立つ。大強度陽子加速器施設のDTLでは、入り口(3MeV)と出口(50MeV)で β が0.08から0.31まで変化することにより、一般化されたパービアンズの表式に含まれる因子 $1/\beta^3\gamma^3$ は1594から27.7まで変化する。すなわち、一般化されたパービアンズの大きさは、DTLで加速される間に約70分の1にまで小さくなってしまふことになる。

次に、ビーム電流もエネルギーも同じであるとき、外部収束力の強さによって空間電荷効果の強さがどのように変化するかを考えよう。少し考えると、外部収束力を弱めるとビームが拡がり、その結果電荷の密度が下がって空間電荷効果は弱まりそうな気がする。この関係が正しいかどうかを確かめるためには、外部収束力の強さとビーム全体の拡がりの関係を求める必要

がある。いま、ビーム全体の拡がりを表す量として、ビームのRMS (Root Mean Square) サイズを採用しよう。いま、軸対称なビームを考えているので、ビームのRMS半径を ρ とかくと、 ρ は次のような式によって定義される。

$$\rho = \sqrt{\langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle} = \sqrt{2}\sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{2}\sqrt{\langle y^2 \rangle} \quad (14)$$

ここで、 $\langle X \rangle$ は、ビームを構成する全粒子について X の平均をとることを意味する。この ρ の時間発展は、RMSエンベロープ方程式とよばれる次のような方程式で記述される [5]。

$$\frac{d^2\rho}{ds^2} = -\kappa^2\rho + \frac{K}{2\rho} + \frac{\epsilon^2}{\rho^3} \quad (15)$$

ここで、 ϵ はRMSエミッタンスとよばれる量である。一般に、 x 方向のRMSエミッタンス ϵ_x と y 方向のRMSエミッタンス ϵ_y は値が異なるが、ここでは軸対称なビームを考えているので、 $\epsilon = \epsilon_x = \epsilon_y$ である。 ϵ_x と ϵ_y は、それぞれ次のように定義されている。

$$\epsilon_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle x'^2 \rangle - \langle xx' \rangle^2} \quad (16)$$

$$\epsilon_y = \sqrt{\langle y^2 \rangle \langle y'^2 \rangle - \langle yy' \rangle^2} \quad (17)$$

ここで、プライムは s による微分を表す。RMSエミッタンスは、ビームに働く力が線形の場合には保存することが知られている。空間電荷効果が働くときには、必ずしもエミッタンスは保存しないが、ほぼ保存するものと仮定して今後の議論を進めよう。この収束系にマッチングのとれたビームのRMS半径 ρ_0 は、式(15)で $d^2\rho/ds^2 = 0$ とおくことで、次のように求められる。

$$\rho_0^2 = \frac{K + \sqrt{K^2 + 4\epsilon^2\kappa^2}}{4\kappa^2} \quad (18)$$

これで、外部収束力の強さが変わったときに空間電荷効果の強さがどのように変化するかを調べるための道具立てはそろったが、一般的な話をする前に少し寄り道をして、非常に単純なケースで具体的な計算を少ししてみよう。いままでは、ビームのもつ分布として軸対称性をもつ分布一般を考えてきたが、ここでは、次のような特殊な分布をもつビームを考える。半径 R の内側には粒子が一様に分布 ($n(r) = \text{const.}$) し、 R の外側には粒子がまったく分布しない ($n(r) = 0$) ようなビームである。このような単純な場合には、 $n(r)$ の積分は簡単に実行できて、粒子の運動方程式は粒子が存在する R より内側では

$$\frac{d^2r}{ds^2} = -\kappa^2 r + \frac{L^2}{r^3} + \frac{K}{R^2} r \quad (19)$$

となる。また、 R と ρ の間には $R = \sqrt{2}\rho$ の関係が成り立つことが簡単に確かめられる。ここで、 $K = 1$ 、 $\kappa = 1$ 、 $\epsilon = 1$ のビームと、 κ だけを 2 にしたビームを考え、ビームを構成する粒子が $r = \rho_0$ の位置で受ける収束力と空間電荷力の大きさを計算してみよう。以下の計算では、ビームのマッチングはとれているものとする。すなわち、 $R = \sqrt{2}\rho_0$ 、 $K = 1$ 、 $\kappa = 1$ 、 $\epsilon = 1$ の場合には、式 (18) より、 $\rho_0 \sim 0.90$ となるため、 $r = \rho_0$ における外部収束力 $\kappa^2\rho_0$ は ~ 0.90 、空間電荷力 $K/2\rho_0$ は ~ 0.56 となる。一方、 κ だけを 2 倍にすると、 ρ_0 が ~ 0.57 と小さくなるため、空間電荷力は ~ 0.88 と先ほどに比べ大きくなるが、外部収束力は ~ 2.26 とそれ以上に大きくなるため、相対的に空間電荷力が弱まる結果となる。ちなみに、 ϵ だけを 2 倍にした場合、 $\rho_0 \sim 1.13$ となるため外部収束力は ~ 1.13 、空間電荷力は ~ 0.44 となり、相対的に空間電荷力が弱まることになる。

上の結果から、外部収束力を弱めた場合、ビーム径が大きくなることにより、ビームを構成する各粒子に働く空間電荷力は確かに弱まるが、粒子に働く外部収束力はそれ以上に弱まってしまうため、相対的には空間電荷効果が強くなるのがわかる。上の例では、空間電荷力が線形になってしまうような非常に単純な分布を例にあげたが、これは特殊なケースであり、空間電荷力は一般に非線形な成分をもつ。この非線形な成分が様々な非線形現象を引き起こし、ビームの質の低下を引き起こすと考えられている。我々が想定している領域では、ビームを構成する粒子に働く力は線形な成分が支配的であり、非線形な成分は摂動（と言い切ってしまうには大きすぎる場合もあるかもしれないが）ととらえることができる。このことから、粒子の運動の示す非線形性の強さは粒子に働く力のうち非線形な成分の大きさそのものによって特徴づけられるのではなく、線形な成分に対する非線形な成分の比によって特徴づけられる。したがって、空間電荷効果の強さは、粒子に働く空間電荷力の大きさそのものではなく、その線形な外部収束力の大きさに対する比で特徴づけられる。

このあたりの関係を上のような特殊な分布を用いず一般に示すには、正規化された座表系を導入するのがよい。いま、正規化された無次元の座標 $\tilde{r} = \sqrt{\kappa/\epsilon}r$ 、 $\tilde{\rho} = \sqrt{\kappa/\epsilon}\rho$ 、 $\tilde{s} = \kappa s$ を導入すると、粒子の運動方程式とエンベロップ方程式は、それぞれ次のようにかき直せる。

$$\frac{d^2\tilde{r}}{d\tilde{s}^2} = -\tilde{r} + \frac{L^2}{\tilde{r}^3} + \frac{\tilde{K}}{\tilde{r}} \int_0^{\tilde{r}} n(\tilde{r}') 2\pi\tilde{r}' d\tilde{r}' \quad (20)$$

Table 2: SDTL の主要なパラメータ

入射エネルギー	50 MeV
出射エネルギー	190.8 MeV
周波数	324 MHz
タンクあたりのセル数	5
タンク数	32
クライストロン数	16
平均加速電場	2.53-3.74 MV/m
同期位相	-27 deg
高周波消費電力	0.26-0.82 MW
タンク内径	520 mm
ドリフトチューブ外径	92 mm
ビーム孔直径	36 mm
$g/\beta\lambda$	0.28~0.46
全長	91 m

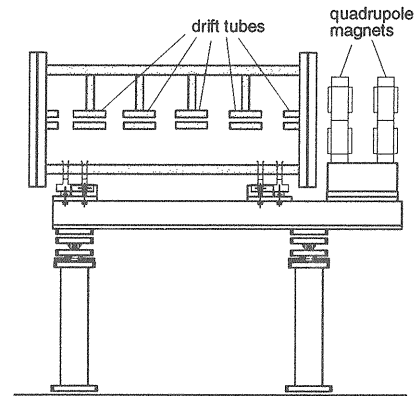


Figure 7: SDTL のレイアウト

$$\frac{d^2\tilde{\rho}}{d\tilde{s}^2} = -\tilde{\rho} + \frac{\tilde{K}}{2\tilde{\rho}} + \frac{1}{\tilde{\rho}^3} \quad (21)$$

ここで、 $\tilde{K} = K/\kappa\epsilon$ は正規化された一般化パービアンズである。これらの式から、 K や κ や ϵ が違っても $K/\kappa\epsilon$ が同じであれば、正規化された座標系ではまったく同じ運動をすることがわかる。すなわち、空間電荷効果の強さは K ではなく、より正確には $K/\kappa\epsilon$ によって決まることになる。

上の議論から、ビーム電流やエミッタンスが同じとき、空間電荷効果を弱めるには κ を、すなわち外部収束力を大きくすればよいことはわかっていたかと思う。実際の加速器では、ビームに加えることができる外部収束力の強さは、「1 収束周期あたりのゼロカレント・フェイズアドバンス（空間電荷効果を見捨てたときのベータatron振動の位相の進み）が 90 度を越えてはいけない」という構造共鳴を避けるための条件

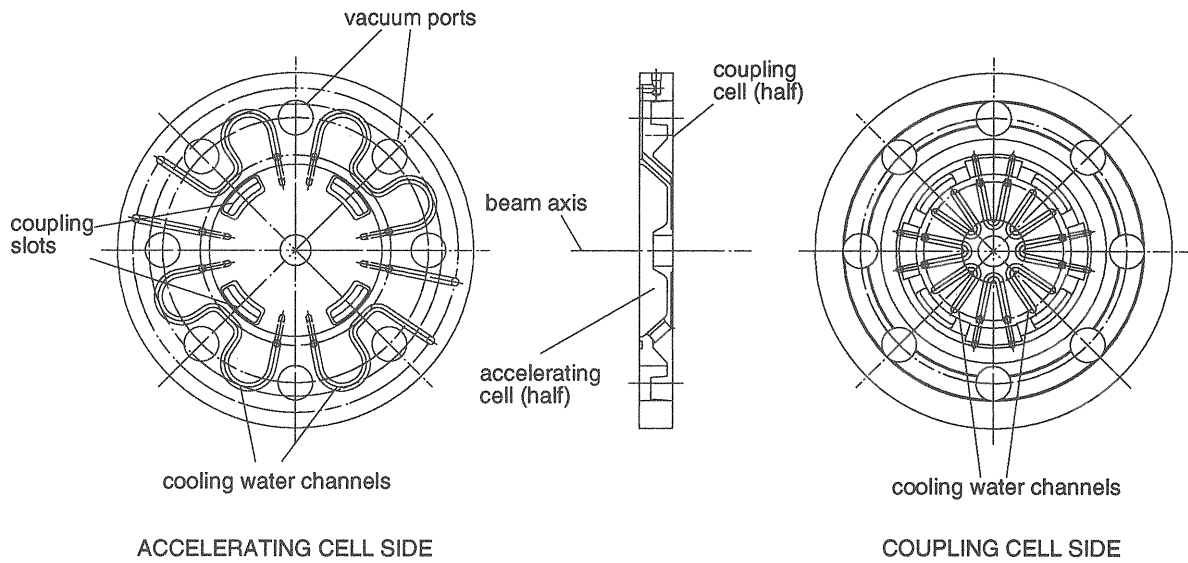


Figure 8: ACSの構造 (ハーフセル)

によって制限されている。 κ は単位長さあたりのゼロカレント・フェイズアドバンスに比例するので、この条件を満たしつつ κ を大きくするには1収束周期の長さを短くするほかない。DTLでは、 $1\beta\lambda$ ごとに(ふうう1個の)四重極磁石を入れることができるので、水平方向収束(鉛直方向発散)の四重極磁石と鉛直方向収束(水平方向発散)の四重極磁石を交互に入れれば、収束周期を $2\beta\lambda$ にできる。このような短い収束周期をとることによって大きな収束力をビームに加えることができる点がDTLの強みであり、特に空間電荷効果が厳しい低エネルギー部ではその効果は非常に大きい。ただし、それほど空間電荷効果が厳しくない高エネルギーの領域になってくると、短い収束周期をとり得ることの恩恵は薄くなっていく。高エネルギーの領域では、ドリフトチューブに四重極磁石の入れることが逆に足かせになり、空洞としての高周波性能の低下を招くことは前章で述べた通りである。

図7に示すように、SDTLの高周波的な構造はDTLと同じである。ただし、ドリフトチューブ内には四重極磁石は組み込まれておらず、横方向の収束は空洞の外部に設置された四重極電磁石によって行われる。四重極磁石をドリフトチューブ外に出すことにより、ドリフトチューブ形状の設計の自由度が高くなり、DTLよりも高い高周波性能が実現できる。またエネルギーが高くなると、横方向の収束周期が長くなるのがビームの性質に与える影響は小さくなる。このことからエ

ネルギーが高い領域ではDTLよりもSDTLを採用するメリットが大きい。

表3に、大強度加速器施設のSDTLの主要なパラメータをまとめておく。各SDTLのタンク間には、水平方向収束と水平方向発散の四重極電磁石がペアで入っており、これによってビームの横方向の収束を行う。この四重極電磁石のペアをダブレットとよび、このような四重極電磁石の配置(ラティス)をダブレットラティスとよぶ。

図6からわかるように、SDTLではDTLに比べて有効シャントインピーダンスを改善することができるが、やはり β が大きくなると有効シャントインピーダンスが低下するという傾向に変わりはない。したがって、 β の高い領域では、これとは異なる加速構造を採用する必要がある。

4 ACS

図8にACSのハーフセルの形状を示す。ACSは、図8のようなハーフセルを2枚重ね合わせることで1つの加速セルをかたちづくるような構造になっている。ACSがどのようにしてこのような形状になっているのかを理解するためには、多連空洞(multi-cell cavity)に励振される電磁場の固有モードの話は避けて通れない。多連空洞とは図9のように複数の加速空洞をビーム軸方向に連結したものであり、各セルに励振される電磁場はビームホールなどを通して電磁的に結合し

ている。この連結された空洞のひとつひとつをセルとよぶ。多連空洞に励振される電磁場の振動は、図10のような連結されたおもりの振動のアナロジーを用いると理解しやすい。図10では、それぞれのおもりが1つのセルに対応しており、おもりの平衡点からの変位は小さく、おもりに働く力は変位に線形であると近似できると考える。

いま、周波数 f の高周波源によって励振されている多連空洞を考えよう。各セルに励振される電磁場の向きは $1/f$ を周期として時間とともに変化する。各セルに励振される電磁場の振動数はすべて等しいが、セル間の振動の位相差についてはいくつかのケースが考えられる。ある時刻におけるとなりあうセルの間の電場の位相のずれが $0, \pi/2, \pi$ の場合のようすを図9に示した。これらの振動モードをそれぞれ、0モード、 $\pi/2$ モード、 π モードとよぶ。各モードの共鳴周波数は少しずつ異なるため、空洞を励振する高周波源の周波数を調整することによって、特定のモードのみを選択的に励振することができる。セル数が無限の多連空洞では、励振されうるモードの数は無限になるが、セル数が有限の現実の多連空洞では、両端のセルにおける境界条件から、励振されうるモードの数は有限となる。

ここで各モードの波長を考えよう。ここでいう波長とは、いわゆる電磁波の波長 $\lambda \equiv c/f$ ではなく、連結されたセルに伝わる波の波長（連結されたおもりのアナロジーでいうと、連結されたおもりを伝わる波の波長）である。いま、この波長を Λ と混同しないように、 Λ とかくことにする。1セルの長さを L とすると、 π モードの波長は $2L$ 、 $\pi/2$ モードの波長は $4L$ であることはすぐにわかる。0モードについては、となりあうセルの位相のずれが小さくなった極限であると考えられると、波長は無限大であるということになる。このことから、となりあうセルの位相のずれは波長に反比例すること、すなわち波数 ($k \equiv 2\pi/\Lambda$) に比例することがわかる。

ここで、大学の教養課程で扱われる「振動・波動」の物理の基礎を思い出そう。波の波長（あるいは波数）と振動数の関係を分散関係といい、振動数が波数に比例しないときには「分散がある」というのであった。分散があるときには、群速度 $d\omega/dk$ は位相速度 ω/k と一致しない。ここで、 ω は振動の角速度である。群速度は波束（振動数の近い波を重ね合わせてできた空間的な広がりが有限である波）の移動速度、すなわち波のエネルギーの移動速度を表す重要な物理量であり、多連空洞の設計にも重要な意味をもつ。一般の振動・波動の理論では横軸に波数 k 、縦軸に角振動数 ω をとつ

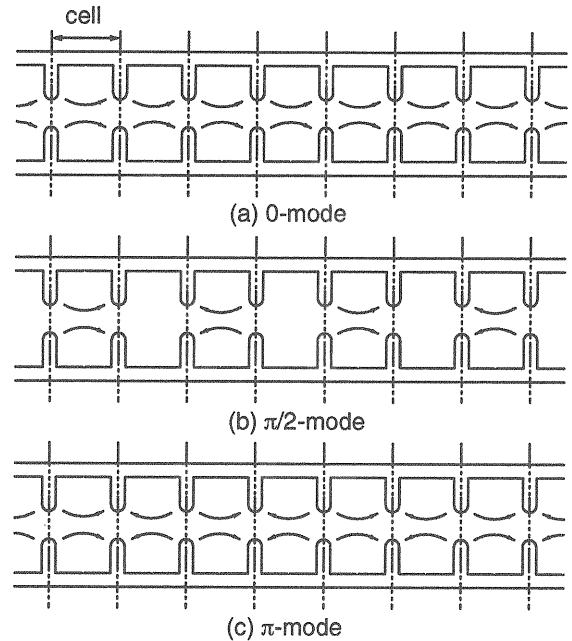


Figure 9: 多連空洞の電磁場のモードの例

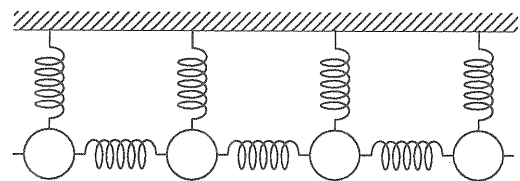


Figure 10: 連結されたおもり

たグラフを書いて分散関係を表すのがふつうであり、群速度 $d\omega/dk$ はこのグラフ上での分散曲線の傾きと一致する。このあたりをきちんと復習したいひとは、参考文献 [6] などのテキストをあたってほしい。

多連空洞では、となりあうセルの位相のずれが波数に比例することから、横軸には波数のかわりにこの位相のずれをとることが多い。このグラフ上でも群速度は、分散曲線の傾きに比例する。例として、セル数が5の場合について、この分散曲線を求めてみよう。結合力が線形な多連空洞の分散曲線は、線形な結合力で連結された調和振動子の固有振動数を求めるのとまったく同じ方法で求めることができる。厳密にいうと、多連空洞では、隣り合うセル間だけでなくその隣のセルとの間にも（もっと厳密に言えばもっと離れたセルと

の間にも) 結合力が働くが、このテキストではすぐ隣との間にだけ結合力が働く場合に話を限定することにする。このような場合を考えると、連結された5つの調和振動子の運動方程式は次のように書ける。

$$\begin{aligned}\frac{d^2\tilde{x}_1}{dt^2} &= -\omega_1^2\tilde{x}_1 + k\tilde{x}_2 & (22) \\ \frac{d^2\tilde{x}_2}{dt^2} &= -\omega_2^2\tilde{x}_2 + \frac{k}{2}(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_3) \\ \frac{d^2\tilde{x}_3}{dt^2} &= -\omega_3^2\tilde{x}_3 + \frac{k}{2}(\tilde{x}_2 + \tilde{x}_4) \\ \frac{d^2\tilde{x}_4}{dt^2} &= -\omega_4^2\tilde{x}_4 + \frac{k}{2}(\tilde{x}_3 + \tilde{x}_5) \\ \frac{d^2\tilde{x}_5}{dt^2} &= -\omega_5^2\tilde{x}_5 + k\tilde{x}_4\end{aligned}$$

ここで、 $\tilde{x}_1 \sim \tilde{x}_5$ は各振動子の平衡点からの変位である。多連空洞では、 $\tilde{x}_1 \sim \tilde{x}_5$ は電磁場の強さ、すなわち2乗するとそのセルの電磁場の蓄積エネルギー (stored energy) を与える量に相当し、その符号は励振される電磁場の向きに相当する [7]。 $\omega_1 \sim \omega_5$ は、各振動子 (セル) の固有振動数であり、 k は振動子 (セル) 間の結合の強さを表すパラメータである。式 (23) では、0モード、 π モードにおいて各セルの \tilde{x} の絶対値が同じになるよう、両端のセルの部分で k の値を調節してある。いま、 $\omega_1 \sim \omega_5$ が等しい場合を考え、上の方程式の解を、 $\tilde{x}_1 = x_1 \exp(i\Omega t)$ 、 $\tilde{x}_2 = x_2 \exp(i\Omega t)$ などと書くと、上の式は次のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned}(\Omega^2 - \omega_0^2)x_1 + kx_2 &= 0 & (23) \\ (\Omega^2 - \omega_0^2)x_2 + \frac{k}{2}(x_1 + x_3) &= 0 \\ (\Omega^2 - \omega_0^2)x_3 + \frac{k}{2}(x_2 + x_4) &= 0 \\ (\Omega^2 - \omega_0^2)x_4 + \frac{k}{2}(x_3 + x_5) &= 0 \\ (\Omega^2 - \omega_0^2)x_5 + kx_4 &= 0\end{aligned}$$

この式は、行列を用いて次のように書き直すことができる。

$$MX = \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}X \quad (24)$$

ここで、

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -\kappa & 0 & 0 & 0 \\ -\kappa/2 & 1 & -\kappa/2 & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa/2 & 1 & -\kappa/2 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa/2 & 1 & -\kappa/2 \\ 0 & 0 & 0 & -\kappa & 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad (26)$$

また、 $\kappa = k/\Omega^2$ である。式 (24) より、 M の固有値と固有ベクトルを求めることにより、式 (23) の一般解を求めることができることがわかる。 M の固有値 $\Omega_1 \sim \Omega_5$ は、線形代数の知識を用いて次のように求められる。

$$\begin{aligned}\frac{\Omega_1^2}{\omega_0^2} &= 1 - \kappa & (27) \\ \frac{\Omega_2^2}{\omega_0^2} &= 1 - \frac{\kappa}{\sqrt{2}} \\ \frac{\Omega_3^2}{\omega_0^2} &= 1 \\ \frac{\Omega_4^2}{\omega_0^2} &= 1 + \frac{\kappa}{\sqrt{2}} \\ \frac{\Omega_5^2}{\omega_0^2} &= 1 + \kappa\end{aligned}$$

また、固有値 $\Omega_1 \sim \Omega_5$ それぞれに対応する固有ベクトル $X_1 \sim X_5$ は次のように求められる。

$$\begin{aligned}X_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & (28) \\ X_2 &= \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{bmatrix} \\ X_3 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ X_4 &= \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{bmatrix} \\ X_5 &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

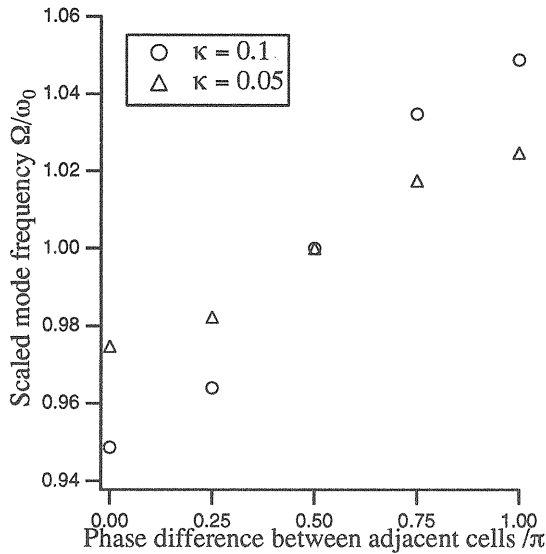


Figure 11: 5セル結合空洞の分散曲線

X_1 では、各セルに励振される電磁場の強さは等しく、またその向きも等しい。したがって、 X_1 は 0 モードに対応することがわかる。同様に、 X_3 は $\pi/2$ モード、 X_5 は π モードに対応する。これらの結果から分散曲線を求めたものが図 11 である。図 11 には、カップリング κ が 0.05 の場合と 0.1 の場合の分散曲線を示した。

一般に、 α を既約分数として、 $\alpha\pi$ モードの共振周波数 Ω_α は

$$\frac{\Omega_\alpha^2}{\omega_0^2} = 1 - \kappa \cos(\alpha\pi) \quad (29)$$

とかける。このことから、多連空洞を伝わる波の群速度は 0 モード、 π モードでは 0 となり、 $\pi/2$ モードで最大となることがわかる。また、 $\pi/2$ モードの群速度はカップリング κ が大きいほど大きい。群速度が大きいということは、なんらかの原因であるセルの電磁場の強さが小さくなったとき（蓄積エネルギーが減少したとき）速やかに高周波源から電力が供給できることを意味し、安定な電磁場を励振するという観点から有利である。したがって、 $\pi/2$ モードは、0 モード、 π モードに比べてより安定な電磁場を励振できるという長所をもつといえる。

次に、各セルの共振周波数が少し異なる場合を考えよう。現実の加速器では、製作精度の限界から、各セルの共振周波数を厳密に同じにすることはできない。したがって、現実的な共振周波数のずれを想定したときに、ビームの加速に十分なクオリティの加速電場を励振

できることが求められる。例として、先ほどの 5 連空洞の 5 つのセルのうち、1 番目のセルだけ共振周波数を他よりも 0.1% 高くした場合を考える ($\omega_1 = 1.001\omega_0$)。表 3、表 4 は、カップリング κ がそれぞれ 0.05 の場合、0.10 の場合について上記のような共振周波数のずれを与えたときの固有ベクトルを示したものである。これらの表から、例えば 0 モードでは、共振周波数がそろっていたときには各セルに励振される電磁場の強さが等しかったのに対して、共振周波数のずれが存在すると励振される電磁場の強さがセル毎に異なってしまうことがわかる。この電磁場の強さの傾きをティルト (tilt) とよぶ。表 3、表 4 から、 π モード、 $\pi/2$ モードでも、同様のティルトが生じていることがわかる。大きなティルトが生じるとビームに悪影響を与えるため、ティルトは極力小さく抑える必要がある。いま、 $\pi/2$ モードと他のモードを比較すると、 $\pi/2$ では他のモードに比べて本来加速電場が生じるセルの電場のずれが小さいことがわかる（本来加速電場が生じないセルの電場のずれは他のモードとほとんどかわらない）。このずれの大きさを定量的に比較するための指標として、それぞれの場合についての電場のフラットネスを表 3、表 4 にあげておいた。ここでフラットネスは、本来加速電場が生じるべきセルのうち x がもっとも大きいセルの x を x_{\max} 、もっとも小さいセルの x を x_{\min} 、 x の平均を \bar{x} とし、 $(x_{\max} - x_{\min})/\bar{x}$ と定義した。これらの結果から、各セルの共振周波数に同じ程度のずれがある場合、 $\pi/2$ モードは 0 モードや π モードに比べて加速電場のずれが小さく、したがってビーム与える影響が小さいことがわかる。より詳細な検討から、各セルの共振周波数のずれを $\delta\omega$ としたとき、0 モードや π モードの電場のずれは $\delta\omega/\omega_0$ の 1 次のオーダーであるのに対して、 $\pi/2$ モードの本来加速電場の生じるセルの電場のずれは $\delta\omega/\omega_0$ の 2 次のオーダーであることが求められている [7]。

上の考察から、 $\pi/2$ モードがもっとも群速度が大きく、かつ各セルの共振周波数のずれがビームに与える影響が小さいことから、ティルトの小さい電場を安定に励振する上で、 $\pi/2$ モードが有利であることもわかった。しかし $\pi/2$ モードでは 1 つおきに加速電場の発生しないセル（結合セル）が存在するため、軸方向の単位長さあたりのエネルギーゲインが小さくなるという意味で効率が悪い。そこで図 12(b) のように結合セルの軸方向の長さを縮めることによってこの点を改善したものが、APS (Alternating-Periodic Structure linac) リニアックである。横結合型結合空洞リニアック (Side-Coupled Linac, SCL) ではこのような考えをさらに推

Table 3: 共振周波数のずれの影響 ($\omega_1 = 1.001\omega_0, \kappa = 0.05$)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	フラットネス
0モード	0.975345	0.992484	1.00479	1.01219	1.01467	0.039325
$\pi/2$ モード	0.999842	0.0150057	-0.999992	0.00500208	1.00004	0.000198
π モード	1.02537	-1.00748	0.994772	-0.987173	0.984644	0.040726

Table 4: 共振周波数のずれの影響 ($\omega_1 = 1.001\omega_0, \kappa = 0.10$)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	フラットネス
0モード	0.987583	0.996245	1.00245	1.00617	1.00742	0.019837
$\pi/2$ モード	0.99996	0.00750353	-0.999998	0.0025012	1.00001	0.000050
π モード	1.01259	-1.00375	0.997443	-0.993667	0.99241	0.020180

し進め、図 12(c) のように結合セルをビーム軸から脇にはずし、ビーム軸上には加速電場の発生するセル (加速セル) だけを並べた構造となっている。図 12(b) のような APS リニアックでは、加速セルと結合セルの間の電磁気的な結合はビームホールを通して行われるが、SCL では加速セルと結合セルの間に電磁気的な結合を生じさせるためのスロット (細長いあな) が設けられている。SCL では、このようなスロットが存在することによって、加速セル中の電場が摂動を受ける。この摂動がビームに与える影響を軽減するため (摂動によって与えるビームへのキックが一方向に蓄積していくことを避けるため)、SCL では、結合セルおよび結合スロットを、図 12(c) のように、上下 (あるいは左右) 交互に設けるのがふつうである。結合スロットの配置の対称性を高めることによって、結合スロットがビームに与える影響をさらに軽減したのが ACS である。ACS では、図 12(d) のように、結合セルの形状を環状 (ドーナツ状) にし、複数の結合スロットをビーム軸に対して対称に設けることによって、電磁場の軸対称性を高め、ビームが結合スロットによる電磁場の摂動によって一方向に蹴られることを防いでいる。本加速器施設の ACS では、ビーム軸を回転軸としてお互いに 90 度ずつ離れた位置に 4 つの結合スロットを設けている。

図 12 では、簡略化した形状の空洞を示しているが、実際の結合空洞リニアックでは、トランジットタイムファクターを向上させるために、ノーズコーンをつけるなど形状の工夫がなされている。本加速器施設の ACS は、図 8 のようなハーフセルを無酸素銅の板から削り出し、重ね合わせてろう付けすることによって製作される。ハーフセルの表面には加速セルの半分が、

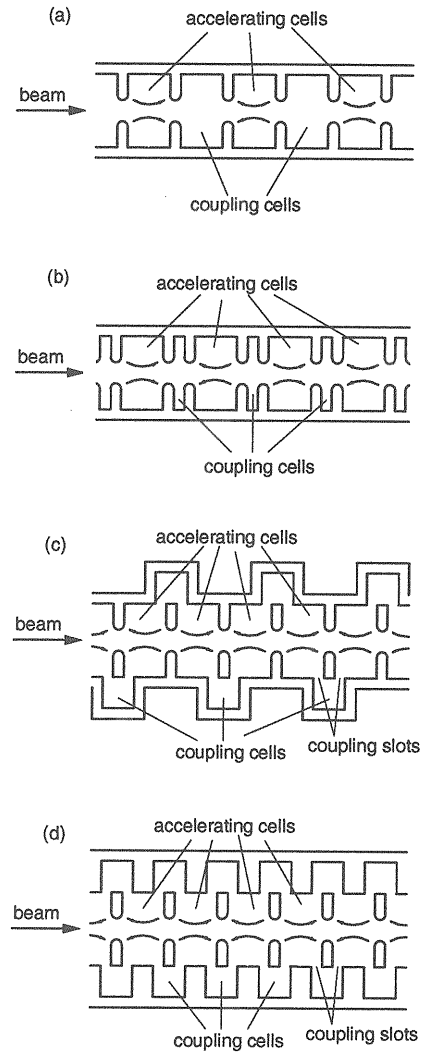


Figure 12: $\pi/2$ モード多連空洞の発展

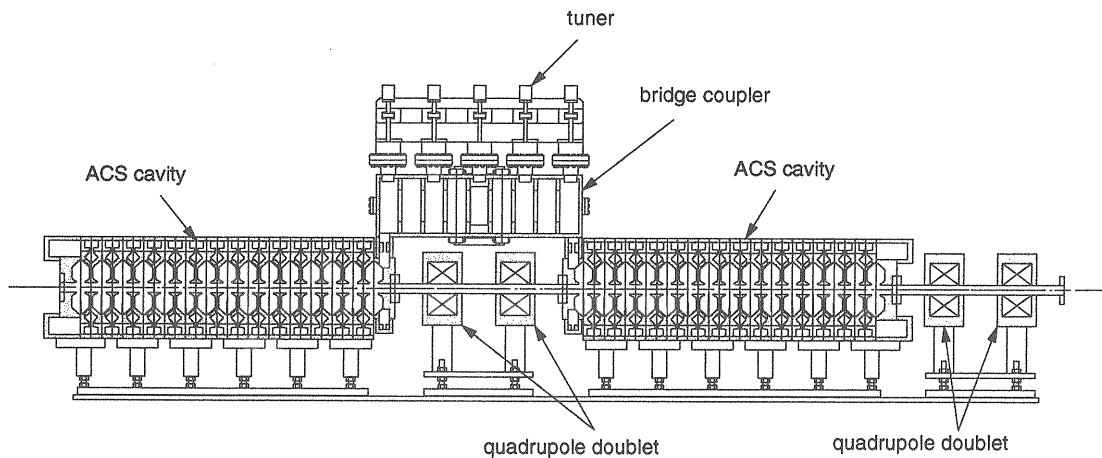


Figure 13: ACS のレイアウト

裏面には結合セルの半分が削り出されており、2枚のハーフセルを重ね合わせることで1つの加速セルが形づくられる。本加速器施設のACSは1タンクあたり15の加速セルをもつため、1つのACSタンクを製作するには、このようなハーフセルを30枚重ね合わせる必要があることになる。

本加速器施設のACSモジュールのレイアウトを図13に示す。1つのACSモジュールは、ブリッジカップラーとよばれる空洞で連結された2つのACSタンクからなる。ACSタンクの高周波電力は、ブリッジカップラーの中央から入力される。ブリッジカップラーはドーナツ状の円盤で仕切られた9つのセルからなり、ブリッジカップラー自体も $\pi/2$ モードで励振される。そのため、1つおきのセルに（ビームの加速には用いられない）「加速電場」が発生することとなる。このことによるブリッジカップラー内での熱損失を抑えるため、ブリッジカップラーとACS加速セルの間のカップリングを非対称にして、ブリッジカップラーに発生する「加速電場」を小さくする工夫がなされている。ビームの横方向の収束はACSタンク間に設置された四重極磁石のダブレットによって行われる。このACSの主要なパラメータを表4に示す。

5 まとめ

ここまでの議論から、「高 β 部（ACS）では電場の安定性をよくするために $\pi/2$ モードを用いているのに、低 β 部（DTL, SDTL）では0モードを用いているのは問題がないのか」という疑問をもたれる方も多いと思う。低 β 部で $\pi/2$ モードを加速モードに用いて、高

Table 5: ACS の主要なパラメータ

入射エネルギー	190.8 MeV
出射エネルギー	400 MeV
周波数	972 MHz
タンクあたりの加速セル数	15
タンク数	46
クライストロン数	23
平均加速電場	4.29-4.36 MV/m
同期位相	-30 deg
高周波消費電力	0.84-0.90 MW
加速セル内径	520 mm
ビーム孔直径	40 mm
$g/\beta\lambda$	0.28~0.46
全長	108 m

いシャントインピーダンスと十分に強い横方向の収束力を実現できるような加速構造が（いまのところ）ないというのが現実である。DTLでは、 $\pi/2$ モードなど他のモードを加速モードとして用いる代わりに、図3に示したようなポストカップラーとよばれる突起を備えることによって0モードのもつ欠点を補っている。0モードでは、分散曲線の傾きが0になるため群速度が0となり、このことが安定な電場を発生する上で大きな欠点となるのであった。DTLでは、ポストカップラーをタンクの壁面からビーム軸に垂直に設置することによって、加速電場に大きな影響を与えることなく分散曲線を歪ませ、0モードにおける分散曲線の傾きを0でなくすことによりこの欠点を補っている。ポストカップラーについてのより詳細な議論は、参考文献

[2, 9]などをあたってほしい。

以上で、DTL、SDTL、ACSの各リニアックの特徴と、なぜ本加速器施設の入射器がこれらのリニアックを組み合わせて構成されている背景について、おおよそのところは理解していただけたのではないかと思う。この講義テストを執筆するにあたって、とくに参考文献 [8, 9] などのテキストを参考にさせていただいた。より詳細な議論に興味のあるひとは、これらのテキストをあたってほしい。

6 REFERENCES

- [1] 例えば、砂川重信, "理論電磁気学", 紀伊国屋書店 (1973)
- [2] 高崎栄一, "陽子リニアック", OHO'89 (1989)
- [3] J. H. Bilen, L. M. Young, "'POISSON SUPERFISH", Los Alamos National Laboratory Report, LA-UR-96-1834 (1996)
- [4] 例えば、後藤憲一, 山崎修一郎, "詳解 電磁気学演習", 共立出版 (1970)
- [5] 例えば、町田慎二, "空間電荷効果", OHO'00 (2000)
- [6] 例えば、藤原邦男, "振動と波動", サイエンス社 (1976); A. P. フレンチ, "MIT 物理 振動・波動", 培風館 (1986)
- [7] Y. Yamazaki, "Analysis of a Standing-Wave Accelerating Structure Base on a Coupled-Resonator Model", KEK Report 99-2 (1999)
- [8] 亀井亨, 木原元央, "加速器科学", 丸善 (1995)
- [9] T. Wangler, "RF Linear Accelerator", John Wiley & Sons (1998)