

1 粒子ビームの運動

1.1 Frenet-Serret 座標系

電磁場中の粒子の運動は以下のハミルトニアンで記述されることは一般に広く知られている。

$$H = c\sqrt{m^2c^2 + (\vec{p} - q\vec{A})^2} + q\Phi \quad (1.1)$$

ここで用いた \vec{A} および Φ はベクトルポテンシャルおよびスカラーポテンシャルで、電場および磁場はこれらのポテンシャルを用いて、

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}, \quad \vec{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1.2)$$

と表わされる。また、式 (1.1) に示された \vec{p} は変数 \vec{r} に対する共役運動量で

$$\vec{p} = \frac{m\vec{r}}{\sqrt{1-|\vec{r}|^2/c^2}} + q\vec{A} \quad (1.3)$$

と表わされる。加速器の中では通常のデカルト座標系で粒子の運動を記述するより、ビーム軸に沿った座標系を用いた方が便利な場合が多い。そこで式 (1.1) 中の $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$ の座標から図 1.1 に示された (x, y, s) という座標への変換を考える。この (x, y, s) で表わした座標系を Frenet-Serret 座標系と呼び、Frenet-Serret 座標系におけるハミルトニアンは、

$$H = c\sqrt{m^2c^2 + \left(\frac{p_s - qA_s}{1 + x/\rho_x + y/\rho_y}\right)^2 + \sum_{z=x,y} (p_z - qA_z)^2} + q\Phi \quad (1.4)$$

となる。またこのハミルトニアンでのそれぞれの変数 (x, y, s) に対する共役運動量は、

$$p_x = \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|} \quad (1.5)$$

$$p_y = \frac{\vec{p} \cdot \vec{y}}{|\vec{y}|} \quad (1.6)$$

$$p_s = (1 + x/\rho_x + y/\rho_y) \frac{\vec{p} \cdot \vec{s}}{|\vec{s}|} \quad (1.7)$$

と定義される。ここで ρ_x, ρ_y は理想軌道の x, y それぞれの方向の曲率半径である。更に、ハミルトニアンの独立変数を t から s へと変更することにより s に対する運動を考える方が便利である場合も多い。つまり、

新しく式 (1.4) を $p_s = -H_s, H = E$ と置き換えて、 $H_s(x, p_x; y, p_y; t, -H : s)$ に関して整頓すると、

$$H_s = -qA_s - \left(1 + \frac{x}{\rho_x} + \frac{z}{\rho_z}\right) \times \sqrt{\frac{(E - q\Phi)^2}{c^2} - \sum_{z=x,y} (p_z - qA_z)^2 - m^2c^2} \quad (1.8)$$

となる。これが Frenet-Serret 座標系における独立変数を s としたハミルトニアンである。

ここで若干一般性を失うが、以下では電場は無く、磁場はビーム軸 s に対して垂直な場合のみを考える。つまり磁場が

$$\vec{B} = B_x(x, y) \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} + B_y(x, y) \frac{\vec{y}}{|\vec{y}|} \quad (1.9)$$

と表わされる場合のみを考える。このとき電磁場は、 $\Phi=0, A_x=0, A_y=0$ となり、 A_s のみで記述することができる。よって、式 (1.8) で記述されたハミルトニアンは以下のように簡略化することができる。

$$H_s = -\left(1 + \frac{x}{\rho_x} + \frac{z}{\rho_z}\right) \sqrt{p^2 - p_x^2 - p_y^2} - qA_s \quad (1.10)$$

また、粒子のエネルギーが理想エネルギーと同じとは限らないので $p = (1+\delta)p_0$ と置きかえて、 H_s および $p_{x,y}$ を p_0 で規格化された新しい変数を用いると、つまり、

$$H_s \rightarrow H_s/p_0, \quad p_z \rightarrow p_z/p_0 \quad (z = x, y) \quad (1.11)$$

とすると、ハミルトニアンは更に、

$$H_s = -\left(1 + \frac{x}{\rho_x} + \frac{z}{\rho_z}\right) \sqrt{(1+\delta)^2 - p_x^2 - p_y^2} - \frac{q}{p_0} A_s \quad (1.12)$$

と書き換えられる。

1.2 加速器内で用いられる電磁石

加速器内で粒子は磁場にガイドされながら運動をおこなう。それらの磁場は電磁石によって生成される。この節では加速器に多く使われている電磁石のベクトルポテンシャルを考えていく。加速器に多く使われている電磁石には偏向電磁石、四極電磁石、六極電磁石などがある。

まず、偏向電磁石に対するベクトルポテンシャルを考えることにする。Frenet-Serret 座標系における磁場

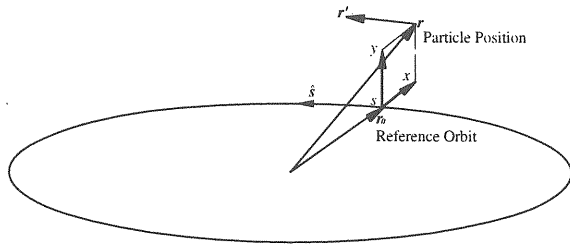


図 1.1: Frenet-Serret 座標系の定義。ビーム軌道に沿った path length を s 軸、デザイン軌道からの水平方向のオフセットを x 軸とし、垂直方向のオフセットを y 軸と定義する。

とベクトルポテンシャルとの間には、

$$B_x = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial A_s}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial s} \right) \quad (1.13)$$

$$B_y = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial A_x}{\partial s} - \frac{\partial A_s}{\partial x} \right) \quad (1.14)$$

$$B_s = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad (1.15)$$

の関係がある。ここで、 $h=1+x/\rho_x+y/\rho_y$ である。偏向電磁石とは x, y それぞれの方向に一樣磁場を生成する電磁石のことで、偏向電磁石のベクトルポテンシャルは、

$$-\frac{q}{p_0} A_{s,1} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{\rho_x} + \frac{y}{\rho_y} \right)^2 \quad (1.16)$$

と置くことができる。次に、四極電磁石や六極電磁石などの多重極電磁石に対するベクトルポテンシャルを考えることにする。これらのベクトルポテンシャルは、

$$-\frac{q}{p_0} A_{s,n} = \frac{k_{n-1}}{n!} r^n \cos n\theta \quad (1.17)$$

で表わされる。例えば四極電磁石や六極電磁石の場合、

$$\begin{aligned} -\frac{q}{p_0} A_{s,2} &= \frac{k_1}{2!} r^2 \cos 2\theta \\ &= \frac{k_1}{2} r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ &= \frac{k_1}{2} (x^2 - y^2) \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} -\frac{q}{p_0} A_{s,3} &= \frac{k_2}{3!} r^3 \cos 3\theta \\ &= \frac{k_2}{6} r^3 (\cos^3 \theta - 3 \sin^2 \theta \cos \theta) \\ &= \frac{k_2}{6} (x^3 - 3y^2x) \end{aligned} \quad (1.19)$$

となる。ここで以後の節では線形の磁場における粒子の運動を取り扱うため、その一般的な例として偏向電磁石磁場と四極電磁石磁場が共存する磁場に於ける、つまり

$$-\frac{q}{p_0} A_s = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{\rho_x} + \frac{y}{\rho_y} \right)^2 + \frac{k_1}{2} (x^2 - y^2) \quad (1.20)$$

というベクトルポテンシャルに対するハミルトニアンについて考える。ここで蛇足だが式 (1.20) のようなベクトルポテンシャルは厳密には Maxwell 方程式を満足しない。つまり、偏向磁場成分と四極磁場成分だけの磁場は存在し得ない (Appendix A)。しかし、三次以降を無視するとベクトルポテンシャルが式 (1.20) のようになる電磁場は存在し得るので、ここでは式 (1.20) のベクトルポテンシャルに対する近似的なハミルトニアンを考えることにする。

式 (1.12)、(1.20) から、偏向電磁石磁場と四極電磁石磁場が共存する磁場に於けるハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H_s &= - \left(1 + \frac{x}{\rho_x} + \frac{y}{\rho_y} \right) \sqrt{(1+\delta)^2 - p_x^2 - p_y^2} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{\rho_x} + \frac{y}{\rho_y} \right)^2 + \frac{k_2}{2} (x^2 - y^2) \\ &\approx -\frac{1}{2} - \delta \left(1 + \frac{x}{\rho_x} + \frac{y}{\rho_y} \right) + \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) \\ &\quad + \frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{\rho_x^2} + k_1 \right) + \frac{y^2}{2} \left(\frac{1}{\rho_y^2} - k_1 \right) \end{aligned} \quad (1.21)$$

となる。これが $(x, p_x, y, p_y, \tau, \delta)$ に関して二次の項まで考慮したときのハミルトニアンである。ここで τ は理想的な時間に対する時間的な遅れ $\tau = (t - t_0)/t_0$ であり、 δ の共役量に相当する。ここでは静電磁場中の運動を考えているので、当然ハミルトニアンには τ に関する依存性は存在しない。

1.3 ベータトロン振動

ビームの進行方向に対して垂直方向の粒子の運動をベータトロン運動やベータトロン振動と呼ぶ。前節までに運動を記述するハミルトニアンについての導出は終わっているため、この節では、導出されたハミルトニアンを用いて、実際の運動方程式を導くことにする。この運動方程式は時間 t に対しての運動方程式ではなく、ビームの進行方向の位置 s に対する運動方程式であることを注意して欲しい（そのために s を独立変数とするハミルトニアンの導出に努めてきた）。

ハミルトニアン形式で定義されるベータトロン振動に対する運動方程式は、

$$\frac{d}{ds} \vec{q} = S \frac{\partial}{\partial \vec{q}} H_s(\vec{q}) \quad (1.22)$$

と定義できる。ここで \vec{q} 、 S はそれぞれ、

$$\vec{q} \equiv \begin{pmatrix} x \\ p_x \\ y \\ p_y \end{pmatrix}, \quad S \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

である。ここで導入された S はシンプレクティック行列と呼ばれる行列である。式 (1.21)、(1.22) から、運動方程式は、

$$\frac{dx}{ds} = p_x \quad (1.24)$$

$$\frac{dp_x}{ds} = - \left(\frac{1}{\rho_x^2} + k_1 \right) x + \frac{\delta}{\rho_x} \quad (1.25)$$

$$\frac{dy}{ds} = p_y \quad (1.26)$$

$$\frac{dp_y}{ds} = - \left(\frac{1}{\rho_y^2} - k_1 \right) y + \frac{\delta}{\rho_y} \quad (1.27)$$

となる。式 (1.24)-(1.27) をまとめると、運動方程式は以下のように水平、垂直両方向とも同様の運動方程式で記述することができる。

$$\frac{d^2 z(s)}{ds^2} + k_z(s) z(s) = \frac{\delta}{\rho_z} \quad (z = x, y) \quad (1.28)$$

$$k_x(s) = \frac{1}{\rho_x^2(s)} + k_1(s) \quad (1.29)$$

$$k_y(s) = \frac{1}{\rho_y^2(s)} - k_1(s) \quad (1.30)$$

ここでは、まず初めにエネルギーが理想エネルギーである粒子の運動、即ち $\delta = 0$ のときを考える（エネルギーが理想エネルギーと違った粒子の運動については後の節で述べる）。つまり、この節では運動方程式

$$\frac{d^2 z(s)}{ds^2} + k_z(s) z(s) = 0 \quad (z = x, y) \quad (1.31)$$

の解を考えていくことにする。式 (1.31) の解は以下のように与えることができる。

$$z(s) = a\omega(s) \cos \psi(s) \quad (1.32)$$

$$z'(s) = a \{ \omega'(s) \cos \psi(s) - \omega(s) \psi'(s) \sin \psi(s) \} \quad (1.33)$$

ここで、 a 、 $\psi(s_0)$ は積分定数である。また式 (1.32)、(1.33) に従って運動する粒子の位置 s_1 と s_2 との関係は、

$$\begin{pmatrix} z(s_2) \\ z'(s_2) \end{pmatrix} = M(s_2, s_1) \begin{pmatrix} z(s_1) \\ z'(s_1) \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

と与えられる。ここで $M(s_2, s_1)$ は転送行列と呼ばれる二次元の正方行列で、その各々の行列要素は

$$M_{11} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \Delta\psi - \frac{\omega'_1 \omega_2}{\omega_1^2 \psi'_1} \sin \Delta\psi \quad (1.35)$$

$$M_{12} = \frac{\omega_2}{\omega_1 \psi'_1} \sin \Delta\psi \quad (1.36)$$

$$M_{21} = \left[\frac{\omega'_2}{\omega_1} - \frac{\omega'_1}{\omega_2} \right] \cos \Delta\psi - \left[\frac{\omega_2 \psi'_2}{\omega_1} + \frac{\omega'_1 \omega'_2}{\omega_1^2 \psi'_1} \right] \sin \Delta\psi \quad (1.37)$$

$$M_{22} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cos \Delta\psi + \frac{\omega'_2}{\omega_1 \psi'_1} \sin \Delta\psi \quad (1.38)$$

で与えられる。上式中の添字は s_1 、 s_2 における値を意味する。また $\Delta\psi$ は $\Delta\psi = \psi(s_2) - \psi(s_1)$ と定義された s_1 、 s_2 間の位相進度を表わす。更に式 (1.31) の運動方程式に式 (1.32) を代入することによって ω に対する運動方程式を導くことができる。

$$\begin{aligned} & \left[2 \frac{d\omega(s)}{ds} \frac{d\psi(s)}{ds} + \omega \frac{d^2 \psi(s)}{ds^2} \right] \sin \psi(s) \\ & + \left[\frac{d^2 \omega(s)}{ds^2} - \omega(s) \left(\frac{d\psi(s)}{ds} \right)^2 + k_z(s) \omega(s) \right] \cos \psi(s) = 0 \end{aligned} \quad (1.39)$$

式 (1.39) が初期位相 $\psi(s_0)$ に対する恒等式になる為には、

$$2 \frac{d\omega(s)}{ds} \frac{d\psi(s)}{ds} + \omega(s) \frac{d^2 \psi(s)}{ds^2} = 0 \quad (1.40)$$

$$\frac{d^2 \omega(s)}{ds^2} - \omega(s) \left(\frac{d\psi(s)}{ds} \right)^2 + k_z(s) \omega(s) = 0 \quad (1.41)$$

という二つの方程式が常に満たされていなければならない。式 (1.40) が常に満たされるための条件は、

$$\frac{d\psi(s)}{ds} \omega^2(s) = (\text{constant}) = 1 \quad (1.42)$$

である。ここで積分定数は任意の定数を探ることができるが慣例的に以後は 1 と置くことにする。また式 (1.42) により $\psi(s)$ と $\omega(s)$ は独立変数ではなく、

$$\Delta\psi = \psi(s_2) - \psi(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} ds \frac{1}{\omega^2(s)} \quad (1.43)$$

という関係で結びつけられることがわかる。また式 (1.41)、(1.42) から

$$\frac{d^2\omega(s)}{ds^2} + k_z(s)\omega(s) = \frac{1}{\omega^3(s)} \quad (1.44)$$

という ω に関する運動方程式を導くことができる。この非線形方程式の一般解を求めることは難しく、今回の講義の範疇を越えるのでここでは触れないことにする。しかし、 k_z が位置 s に依存しない定数である場合は簡単に解けて、

$$\omega(s) = \sqrt[4]{\frac{1}{k_z}} = (\text{constant}) \quad (1.45)$$

となり、 $\omega(s)$ もまた位置 s に依存しない定数となる。このとき式 (1.35)-(1.38) から、転送行列 $M(s, s_0)$ は

$$\cdot k_z > 0 \quad M = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{k_z}L & \sin \sqrt{k_z}L / \sqrt{k_z} \\ -\sqrt{k_z} \sin \sqrt{k_z}L & \cos \sqrt{k_z}L \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

$$\cdot k_z = 0 \quad M = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

$$\cdot k_z < 0 \quad M = \begin{pmatrix} \cosh \sqrt{-k_z}L & \sinh \sqrt{-k_z}L / \sqrt{-k_z} \\ \sqrt{-k_z} \sinh \sqrt{-k_z}L & \cosh \sqrt{-k_z}L \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

と簡単な形で書き表すことができる。式 (1.46)-(1.48) 中の $L = s_2 - s_1$ は粒子の path length を表わす量である。この結果 s に沿って磁場が変化しない領域ではベータatron運動の伝搬は式 (1.46)-(1.48) に示すような単純な転送行列に従って運動することがわかる。

1.4 Twiss Parameter

これまで磁場中の一粒子の運動について議論してきたが、実際の加速器において粒子は多数集まってビームを形成している。このようなビームとして粒子群を見たときに x, p_x, y, p_y といった個々の粒子に対する個々の運動を考えるよりも、ビーム全体として捉える方が便利となることが多い。この節ではビームとしての特性を表わすときに使われる Twiss Parameter や Courant-Snyder 不変量と呼ばれるものの数学的な定義を論ずる。ここで Courant-Snyder 不変量という量は一組の Twiss Parameter と呼ばれる値を定義したときに、その Twiss

Parameter によって規定される座標系における個々の粒子の性質を表わす値である。Twiss Parameter とは前節で紹介した変数 $\omega(s)$ を使って

$$\beta(s) \equiv \omega^2(s) \quad (1.49)$$

$$\alpha(s) \equiv -\frac{1}{2} \frac{d\beta(s)}{ds} = -\omega(s) \frac{d\omega(s)}{ds} \quad (1.50)$$

$$\gamma(s) \equiv \frac{1 + \alpha^2(s)}{\beta(s)} \quad (1.51)$$

と定義される変数のことである。また、式 (1.32) で定義される位相進度も Twiss Parameter を使って、

$$\Delta\psi = \psi(s_2) - \psi(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} ds \frac{1}{\beta(s)} \quad (1.52)$$

と定義することができる。また、式 (1.49)-(1.52) の Twiss Parameter および位相進度を用いることにより、粒子の位置および発散を表わす式 (1.32)、(1.33) は以下のように変形することができる。

$$T(s) \begin{pmatrix} z(s) \\ z'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{W_z} \cos \psi_z(s) \\ -\sqrt{W_z} \sin \psi_z(s) \end{pmatrix} \quad (1.53)$$

$$T(s) \equiv \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\beta_z(s)} & 0 \\ \alpha_z(s)/\sqrt{\beta_z(s)} & \sqrt{\beta_z(s)} \end{pmatrix} \quad (1.54)$$

即ち (z, z') を T という行列で一次変換した位相空間において、粒子の運動は半径を $\sqrt{W_z}$ とする円運動で記述することができる。また W_z は Courant-Snyder 不変量と呼ばれる量でベータatron振動の振幅を表わす量であり、式 (1.32)、(1.33) で定義された a との間には $W_z = a^2$ の関係がある。また式 (1.53)、(1.54) から

$$W_z = \sqrt{\gamma_z z^2 + 2\alpha_z z z' + \beta_z z'^2} \quad (1.55)$$

と表わすことができる。

更に転送行列 $M(s_2, s_1)$ を Twiss Parameter および位相進度を表わす式 (1.49)-(1.52) を使って書き直すと、

$$\begin{aligned} M(s_2, s_1) &= \begin{pmatrix} \sqrt{\beta_2} & 0 \\ -\alpha_2/\sqrt{\beta_2} & 1/\sqrt{\beta_2} \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} \cos \Delta\psi & \sin \Delta\psi \\ -\sin \Delta\psi & \cos \Delta\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\beta_1} & 0 \\ \alpha_1/\sqrt{\beta_1} & \sqrt{\beta_1} \end{pmatrix} \\ &= T^{-1}(s_2) \begin{pmatrix} \cos \Delta\psi & \sin \Delta\psi \\ -\sin \Delta\psi & \cos \Delta\psi \end{pmatrix} T(s_1) \quad (1.56) \end{aligned}$$

となる。よって式 (1.53)、(1.56) を使って、位相空間 $T(z, z')$ における粒子の運動の伝搬を考えると、

$$\begin{aligned} T(s_2) \begin{pmatrix} z(s_2) \\ z'(s_2) \end{pmatrix} &= T(s_2) M(s_2, s_1) \begin{pmatrix} z(s_1) \\ z'(s_1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \Delta\psi & \sin \Delta\psi \\ -\sin \Delta\psi & \cos \Delta\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{W} \cos \psi(s_1) \\ -\sqrt{W} \sin \psi(s_1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{W} \cos (\psi(s_1) + \Delta\psi) \\ -\sqrt{W} \sin (\psi(s_1) + \Delta\psi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{W} \cos \psi(s_2) \\ -\sqrt{W} \sin \psi(s_2) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.57)$$

となり、ビーム軸上の粒子の運動は位相空間 $T(z, z')$ における単なる円運動として考えることができる。

次に Twiss Parameter の伝搬について考える。Twiss Parameter の伝搬は転送行列 M を使って表わすことができる。式 (1.56) を書き直すと、

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ -\gamma_2 & -\alpha_2 \end{pmatrix} = M(s_2, s_1) \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\gamma_1 & -\alpha_1 \end{pmatrix} M^{-1}(s_2, s_1) \quad (1.58)$$

となる。この式をより使いやすい形に書き直すと、

$$\begin{pmatrix} \beta_2 \\ \alpha_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11}^2 & -2M_{11}M_{12} & M_{12}^2 \\ -M_{21}M_{11} & 1+2M_{12}M_{21} & -M_{12}M_{22} \\ M_{21}^2 & -2M_{22}M_{21} & M_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \alpha_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \quad (1.59)$$

と書き直すことができる。式 (1.59) はビームライン上の二つの位置での Twiss Parameter の関係を表わすものであり、ビームライン上の一点における Twiss Parameter がわかれば、他の全ての位置での Twiss Parameter は式 (1.59) により求めることができることを示唆する。

ただし、Twiss Parameter の取扱には注意が必要である。ここまで議論を進めてきた Twiss Parameter は、ただの数学的なパラメーターに過ぎない。つまり、上述の「Twiss Parameter がわかれば」という言い回しは「Twiss Parameter を適当に決めれば」という言い回しに取って替えることができる。Twiss Parameter の決め方については数学的には何の条件も方針もない。

つまり大切なのは Twiss Parameter を数学的な道具として扱うのではなく、Twiss Parameter に物理的な意味を持たせることである。ただし、一粒子の運動を議論する際に α, β に物理的な意味を持たせることはできない。多数の粒子からなるビームの運動を記述する際に

初めて Twiss Parameter に物理的な意味を持たせることができる。この Twiss Parameter に物理的な意味を持たせるような α, β の決め方、その物理的な意味については次節で説明する。

1.5 ビームとしての運動

前節で示した Twiss Parameter は数学的な取扱から導出された単なるパラメーターに過ぎなかった。しかし Twiss Parameter は単なる数学的なパラメーターではなく、ビームの特性を表わす重要な関数である。その特性は一粒子としての運動では決して表面化することがなく、多数の粒子の集合体であるビームの特性を考える際に重要な意味を見出すことができるようになる。これまで粒子のベータトロロン運動は、転送行列 T による一次変換により

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix} \quad (1.60)$$

として定義された (u, v) 空間において、半径 $\sqrt{W_z}$ の回転運動として記述できることを学んだ。

ここで、今までのような一粒子としての運動ではなく、多数の粒子の集合体としてのビームの振舞いを扱うことを考える。その際に転送行列 T の選び方が重要になる。前節でも説明したように、 T を形成する Twiss Parameter α, β (γ は α, β を決めれば自動的に決定される) に対して数学的に課される条件はビームライン上の一点で Twiss Parameter を決定したら、その前後では式 (1.59) に従って Twiss Parameter は変化するというだけであった。つまり、初期条件として α, β にどんな値を使っても、以後式 (1.59) に従って Twiss Parameter を変化させれば数学的には何の問題も無いパラメーターであった。

では、どのような初期条件 α, β の決定の仕方が物理的に一番意味を持たせることができるのだろうか。通常我々は以下のような決定の仕方をしている。つまり u, v がそれぞれ $\sigma_u = \sigma_v = \sigma\sqrt{W_z}$ のガウス分布 (に近い形) になり、かつ、 u と v との間には相関が無いように Twiss Parameter α, β を決定する。つまり、ビームライン上でのある位置でのビーム内の粒子の分布が

$$\varphi(u, v) du dv = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{W_z}} \exp \left[-\frac{u^2 + v^2}{2\sigma^2\sqrt{W_z}} \right] du dv \quad (1.61)$$

という分布関数によって記述されるように Twiss Parameter α , β を決定する。ビームライン上のある位置でこのように Twiss Parameter を決定すれば、個々の粒子の運動は (u, v) 空間上で各々の Courant-Snyder 不変量を一定に保ちながら、半径が $\sqrt{W_z}$ の回転運動をおこなう為、この分布関数はビームライン上のどの位置でも等しくなる。また、この回転運動に際してビーム内の全ての粒子の回転角度は一定であることも注意されたい。

このようにして Twiss Parameter を決定すると、 z, z' と u, v との関係は式 (1.53) より

$$z = \sqrt{\beta_z} u, \quad z' = \frac{v + \alpha_z u}{\sqrt{\beta_z}} \quad (1.62)$$

であったので、この関係式と式 (1.61) の確率分布関数から、

$$\sigma_z = \sqrt{\langle z^2 \rangle - \langle z \rangle^2} = \sqrt{\beta_z \varepsilon_z} \quad (1.63)$$

$$\sigma_{z'} = \sqrt{\langle z'^2 \rangle - \langle z' \rangle^2} = \sqrt{\gamma_z \varepsilon_z} \quad (1.64)$$

$$\langle z z' \rangle = -\alpha_z \varepsilon_z \quad (1.65)$$

$$\varepsilon_z \equiv \sigma_{\sqrt{W_z}}^2 = \frac{1}{2} \langle W_z \rangle \quad (1.66)$$

といった粒子ビームの横方向の拡がりを Twiss Parameter と ε_z を使って記述することができる。ここで ε_z はエミッタンスと呼ばれる量で、このようにして決定された Twiss Parameter を使った (u, v) 空間での Courant-Snyder 不変量の拡がりの指標であると共に、物理的にはビームの大きさや拡がり角等の加速器内を運動するビームの性質を表わす重要な量である。また、このようにして決められた α , β を使って (z, z') 空間に於ける粒子ビーム中のビームの分布を表わすと図 1.2 のようになる。

一般には Twiss Parameter と呼ばれているパラメータは、前節で取り扱った数学的な変数ではなく、このように決められたパラメータのことを言う。このように定義された Twiss Parameter には、 β はビームサイズを表わす指標で、 γ はビームの発散角を表わす指標、 α はそれらの相関を表わす指標となる。

1.6 Dispersion 関数

これまでの、粒子のエネルギーが理想的な値として、即ち $\delta = 0$ のときの粒子のベータトロン運動を考えて

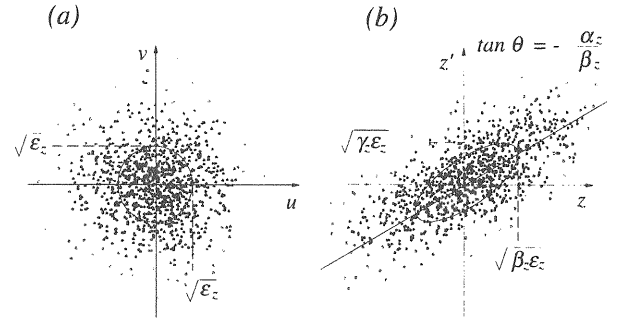


図 1.2: Courant-Snyder 不変量と Twiss Parameter の概略図。(a) (u, v) 空間における分布。(b) (z, z') 空間における分布。

きた。しかし一般には、粒子のエネルギーが理想的であるとは限らない。そこで、粒子のエネルギーが設定値からずれている場合を考えていこう。式 (1.28) より、 $\delta \neq 0$ のときの運動方程式は、

$$\frac{d^2 z(s)}{ds^2} + k_z(s) z(s) = \frac{\delta}{\rho_z} \quad (z = x, y) \quad (1.67)$$

とおける。更に x, y をベータトロン振動と運動量のずれから規定される位置のずれとに分離して、

$$z(s) = z_\beta(s) + \delta \eta_z(s) \quad (1.68)$$

と置くことにする。ここで、 η_z は、設定運動量からずれた粒子のベータトロン運動からのずれを表す関数で、Dispersion 関数と呼ばれている。ここで式 (1.67), (1.68) を使い、運動方程式を δ の一次の項までを書き下すと、

$$\left(\frac{d^2 z_\beta}{ds^2} + k_z z_\beta \right) + \delta \left(\frac{d^2 \eta_z}{ds^2} + k_z \eta_z - \frac{1}{\rho_z} \right) = 0 \quad (1.69)$$

となる。 z_β は、これまで論議してきたベータトロン運動と同じ運動方程式に従い運動することがわかる。また η_z に関しても偏向磁場が存在していないときはこれまで論議してきたベータトロン運動と同じ運動方程式に従い運動することがわかる。しかし偏向磁場が存在するときは η_z は、 $1/\rho_z$ の項のため、ベータトロン振動とは異なった運動をおこなうことになる。

η_z の運動について考える際に、まず偏向磁場で $\eta_z(0) = \eta'_z(0) = 0$ の粒子の運動を考えることから始める。この時の Dispersion 関数を $D_z(s) = \eta_z(s)$, $D'_z(s) = \eta'_z(s)$ とおくと、この $D_z(s), D'_z(s)$ が満たす

べき運動方程式は、

$$\begin{aligned} \cdot k_z > 0; \quad D_z(s) &= \frac{1 - \cos \sqrt{k_z} s}{\rho_z k_z} \\ D'_z(s) &= \frac{\sin \sqrt{k_z} s}{\rho_z \sqrt{k_z}} \\ \cdot k_z = 0; \quad D_z(s) &= \frac{s^2}{2\rho_z} \\ D'_z(s) &= \frac{s}{\rho_z} \\ \cdot k_z < 0; \quad D_z(s) &= \frac{\cosh \sqrt{|k_z|} s - 1}{\rho_z |k_z|} \\ D'_z(s) &= \frac{\sinh \sqrt{|k_z|} s}{\rho_z \sqrt{|k_z|}} \end{aligned}$$

となる。よって一般に、ビームライン上の位置 s_1 と s_2 での Dispersion 関数の関係は、

$$\begin{pmatrix} \eta_z(s_2) \\ \eta'_z(s_2) \end{pmatrix} = M(s_2, s_1) \begin{pmatrix} \eta_z(s_1) \\ \eta'_z(s_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_z(s_2 - s_1) \\ D'_z(s_2 - s_1) \end{pmatrix} \quad (1.70)$$

または、

$$\begin{pmatrix} \eta_z(s_2) \\ \eta'_z(s_2) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & D_z \\ M_{21} & M_{22} & D'_z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_z(s_1) \\ \eta'_z(s_1) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.71)$$

と表せる。ここで、 $M(s_2, s_1)$ は式 (1.56) の式で表わされる転送行列である。

実際のビームは単色ではなく一定のエネルギー拡がりを持っているため運動量分散関数が有限のところでは、たとえエミッタンスが0であっても有限のビームサイズ $\sigma_z = \eta_z \sigma_\delta$ が Dispersion 関数によって生成されることになる。また、このビームサイズはエミッタンスにより決定されるビームサイズとの相関は無いので、実際の加速器中のビームのビームサイズは、

$$\sigma_z = \sqrt{\varepsilon_z \beta_z + \eta_z^2 \sigma_\delta^2} \quad (1.72)$$

となる。これが実際の加速器を運動するビームに対するビームサイズである。

1.7 幾つかの特殊な磁場での運動

1.7.1 スキュー四極電磁石磁場での運動

実際のビーム輸送系には水平方向と垂直方向の運動が混ざり合うようになる磁場を生成する電磁石を設置

することがある。これらは後述のカップリングの補正などに用いるために使われる。その代表的な例としてスキュー四極電磁石がある。スキュー磁場とは通常多重極電磁石磁場と直交する磁場のことであり、 n 次のスキュー電磁石磁場に対するベクトルポテンシャルは、

$$-\frac{q}{p_0} A_{s,\hat{n}} = \frac{\hat{k}_{n-1} r^n}{n!} \sin n\theta \quad (1.73)$$

として表わされる。特にスキュー四極電磁石磁場のベクトルポテンシャルは、

$$-\frac{q}{p_0} A_{s,\hat{2}} = \frac{\hat{k}_1 r^2}{2} \sin 2\theta = \hat{k}_1 xy \quad (1.74)$$

となる。このようなスキュー四極電磁石磁場は四極電磁石の回転設置誤差などにより

$$\begin{aligned} -\frac{q}{p_0} A_s &= \frac{k_1}{2} \{ (x \cos \theta + y \sin \theta)^2 - (y \cos \theta - x \sin \theta)^2 \} \\ &\simeq \frac{k_1}{2} (x^2 - y^2) + 2\theta k_1 xy \end{aligned} \quad (1.75)$$

のように生成される。また回転設置誤差の効果を打ち消して、 x 方向と y 方向の運動を独立な状態に戻す為に、故意にスキュー四極電磁石磁場をビーム輸送系に設置する場合も多い。

このようなスキュー四極電磁石磁場中を通過する粒子のハミルトニアンは、

$$\begin{aligned} H_s &= -\sqrt{(1+\delta)^2 - p_x^2 - p_y^2} + \frac{\hat{k}_1 r^2}{2} \sin 2\theta \\ &\simeq -1 + \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \hat{k}_1 xy \end{aligned} \quad (1.76)$$

となる。ここでは簡単の為 $\delta=0$ とした。今までは線形的な運動のみを考えてきたが、ハミルトニアンが与えられている時の変数 f に対するより一般的な運動方程式は、

$$\begin{aligned} f(x, p_x, y, p_y; s_2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(L: -H:)^n}{n!} f(x, p_x, y, p_y; s_1) \\ &= \exp [L: -H:] f(x, p_x, y, p_y; s_1) \end{aligned} \quad (1.77)$$

として与えられる (Appendix B)。ここで $[,]$ はポアソンの括弧式を表わし、

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{ds^n} f(x, p_x, y, p_y) &= [-H, [-H, [-H, [-H, [-H, \dots f]]]] \\ &\equiv: -H: ^n f(x, p_x, y, p_y) \end{aligned} \quad (1.78)$$

である。つまり、式 (1.77) から、 s_2 における粒子の x_2 を s_1 での位置や傾きの関数として求めと、

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{k}_1^{2n} L^{4n}}{(4n)!} + p_{x,1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{k}_1^{2n} L^{4n+1}}{(4n+1)!} \\ &\quad - y_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{k}_1^{2n+1} L^{4n+2}}{(4n+2)!} - p_{y,1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{k}_1^{2n+1} L^{4n+3}}{(4n+3)!} \\ &= x_1 \frac{\cos \theta + \cosh \theta}{2} + p_{x,1} \frac{\sin \theta + \sinh \theta}{2\sqrt{\hat{k}_1}} \\ &\quad + y_1 \frac{\cos \theta - \cosh \theta}{2} + p_{y,1} \frac{\sin \theta - \sinh \theta}{2\sqrt{\hat{k}_1}} \quad (1.79) \end{aligned}$$

として表わすことができる。同様に $p_{x,2}$ 、 y_2 、 $p_{y,2}$ についても

$$\begin{aligned} p_{x,2} &= -x_1 \frac{\sqrt{\hat{k}_1}(\sin \theta - \sinh \theta)}{2} + p_{x,1} \frac{\cos \theta + \cosh \theta}{2} \\ &\quad - y_1 \frac{\sqrt{\hat{k}_1}(\sin \theta + \sinh \theta)}{2} + p_{y,1} \frac{\cos \theta - \cosh \theta}{2} \quad (1.80) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= x_1 \frac{\cos \theta - \cosh \theta}{2} + p_{x,1} \frac{\sin \theta - \sinh \theta}{2\sqrt{\hat{k}_1}} \\ &\quad + y_1 \frac{\cos \theta + \cosh \theta}{2} + p_{y,1} \frac{\sin \theta + \sinh \theta}{2\sqrt{\hat{k}_1}} \quad (1.81) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{y,2} &= -x_1 \frac{\sqrt{\hat{k}_1}(\sin \theta + \sinh \theta)}{2} + p_{x,1} \frac{\cos \theta - \cosh \theta}{2} \\ &\quad - y_1 \frac{\sqrt{\hat{k}_1}(\sin \theta - \sinh \theta)}{2} + p_{y,1} \frac{\cos \theta + \cosh \theta}{2} \quad (1.82) \end{aligned}$$

となる。ここで $\theta \equiv \sqrt{\hat{k}_1}L$ と定義した。このようにスキュー四極電磁石磁場に対する四次元の転送行列を導くことができる（上式から自明。ここでは紙面の幅の関係上書き下せないので省略する）。この関係式は通常のハミルトニアン形式の微分方程式からも求めることもできる。しかしその場合、四階の微分方程式を解く必要があり多少の面倒臭さがある。一方、式 (1.77) から求めるときは、通常四極電磁石等の線形な特性を持つ電磁石と全く同じ手続きで求めることができる。

1.7.2 ソレノイド電磁石磁場での運動

次にソレノイド電磁石磁場について考えることにする。ソレノイド磁場のベクトルポテンシャルは、

$$-\frac{q}{p_0} A_{x,sol} \simeq -Ay \quad (1.83)$$

$$-\frac{q}{p_0} A_{y,sol} \simeq +Ax \quad (1.84)$$

$$-\frac{q}{p_0} A_{s,sol} \simeq 0, \quad A = \frac{q}{2p} B_s \quad (1.85)$$

として表わされる。よって、ソレノイド磁場中を運動する粒子のハミルトニアンは、

$$\begin{aligned} H_s &= -\sqrt{(1+\delta)^2 - (p_x + Ay)^2 - (p_y - Ax)^2} \\ &\simeq -1 + \frac{1}{2} \left\{ (p_x + Ay)^2 + (p_y - Ax)^2 \right\} \quad (1.86) \end{aligned}$$

となる。ここでも簡単の為 $\delta=0$ とした。よって式 (1.77) から、 s_2 における水平方向位置 x_2 を s_1 での位置や傾き $x_1, p_{x,1}, y_1, p_{y,1}$ の関数として求めと、

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{x_1}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2AL)^{2n}}{(2n)!} \right\} \\ &\quad + \frac{p_{x,1}}{2A} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2AL)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &\quad + \frac{y_1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2AL)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &\quad + \frac{p_{y,1}}{2A} \left\{ 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2AL)^{2n}}{(2n)!} \right\} \\ &= \frac{1 + \cos 2AL}{2} x_1 + \frac{\sin 2AL}{2A} p_{x,1} \\ &\quad + \frac{\sin 2AL}{2} y_1 + \frac{1 - \cos 2AL}{2A} p_{y,1} \\ &= C^2 x_1 + \frac{SC}{A} p_{x,1} + SC y_1 + \frac{S^2}{A} p_{y,1} \quad (1.87) \end{aligned}$$

となる。ここで $C = \cos AL$ 、 $S = \sin AL$ とおいた。同様に $p_{x,2}, y_2, p_{y,2}$ についても、

$$p_{x,2} = -ASC x_1 + C^2 p_{x,1} - AS^2 y_1 + SC p_{y,1} \quad (1.88)$$

$$y_2 = -SC x_1 - \frac{S^2}{A} p_{x,1} + C^2 y_1 + \frac{SC}{A} p_{y,1} \quad (1.89)$$

$$p_{y,2} = AS^2 x_1 - SC p_{x,1} - ASC y_1 + C^2 p_{y,1} \quad (1.90)$$

と解くことができる。このようにしてソレノイド磁場中の粒子の運動を四次元の転送行列を

$$M_{sol} = \begin{pmatrix} C^2 & SC/A & SC & S^2/A \\ -ASC & C^2 & -AS^2 & SC \\ -SC & -S^2/A & C^2 & SC/A \\ AS^2 & -SC & -ASC & C^2 \end{pmatrix} \quad (1.91)$$

として書き表すことができることも分かった。このようにソレノイド磁場中でもスキュー四極磁場中と同じよう

に粒子の水平方向と垂直方向の運動が混ざり合うことになる。

1.7.3 六極電磁石磁場での運動

最後に非線形磁場中を運動する粒子の運動を考えることにする。非線形磁場を考える例として、ビーム輸送系にも度々設置される六極電磁石中を運動する粒子の運動を考えることにする。六極電磁石のベクトルポテンシャルは式 (1.19) より

$$-\frac{q}{p_0}A_{s,3} = \frac{k_2}{6}(x^3 - 3y^2x) \quad (1.92)$$

として与えられる。この六極電磁石は非線形磁場なので、通常では線形オブティクスには影響を与えないが、粒子が六極電磁石の中心からオフセットを持った軌道を通過したときには線形オブティクスに影響を与えることになる。まず粒子が水平方向にオフセットを持った粒子が通過したとき、

$$\begin{aligned} -\frac{q}{p_0}A_{s,3} &= \frac{k_2}{6}\{(x + \Delta x)^3 - 3y^2(x + \Delta x)\} \\ &\cong \frac{k_2}{6}(x^3 - 3y^2x) + \frac{k_2\Delta x}{2}(x^2 - y^2) \end{aligned} \quad (1.93)$$

となり、 $k_1 = k_2\Delta x$ という収束力を持った四極電磁石を通過したときと同じ影響を受けることになる。同様に粒子が垂直方向にオフセットを持って六極電磁石を通過したとき、

$$\begin{aligned} -\frac{q}{p_0}A_{s,3} &= \frac{k_2}{6}\{x^3 - 3(y + \Delta y)^2x\} \\ &\cong \frac{k_2}{6}(x^3 - 3y^2x) - k_2\Delta y xy \end{aligned} \quad (1.94)$$

となり $\hat{k}_1 = -k_2\Delta y$ というスキュー四極電磁石を通過したときと同様の影響を与えることになる。

次に六極電磁石を通過する粒子の運動を考えることにする。六極電磁石磁場中を運動するエネルギーが設定エネルギーである粒子のハミルトニアンは、

$$H_s \cong -1 + \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{k_2}{6}(x^3 - 3y^2x) \quad (1.95)$$

であった。次に六極電磁石を通過する粒子の運動をより一般的な記述で考えてみることにする。式 (1.77) から、位置 s_2 における粒子の運動を位置 s_1 での位置や傾きの

関数として求めると、

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + Lp_{x,1} - \frac{k_2L^2}{4}(x_1^2 - y_1^2) \\ &\quad - \frac{k_2L^3}{6}(x_1p_{x,1} - yp_{y,1}) + \dots \end{aligned} \quad (1.96)$$

$$\begin{aligned} p_{x,2} &= p_{x,1} - \frac{k_2L}{2}(x_1^2 - y_1^2) \\ &\quad - \frac{k_2L^2}{2}(x_1p_{x,1} - yp_{y,1}) + \dots \end{aligned} \quad (1.97)$$

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + Lp_{y,1} + \frac{k_2L^2}{2}x_1y_1 \\ &\quad + \frac{k_2L^3}{6}(x_1p_{y,1} + y_1p_{x,1}) + \dots \end{aligned} \quad (1.98)$$

$$\begin{aligned} p_{y,2} &= p_{y,1} + k_2Lx_1y_1 \\ &\quad + \frac{k_2L^2}{2}(x_1p_{y,1} + y_1p_{x,1}) + \dots \end{aligned} \quad (1.99)$$

となる。ここで上式は $x_1, p_{x,1}, y_1, p_{y,1}$ に関する二次の項まで書き正した。線形的な運動のみを考えると、ドリフト空間を通過する場合と全く同じ転送行列で運動を記述できることがわかるが、実際には高次の項の影響が大きく粒子の運動に関わる。そのため、粒子の運動のトラッキングをおこなう場合は高次の項も含めた計算が必要ながわかる。実際のトラッキングでは、電磁石の強さや厚さ、粒子のベータatron振動の振幅などから何次の項まで考慮に入れるべきかを決める必要がある。

2 ビーム輸送系の設計

2.1 ビームサイズへの考慮

ビーム輸送系を設計する際に、まず初めに最低限考慮しなければならないのがビームサイズと真空ダクトとの関係である。ビームサイズは式 (1.72) で表わされるように、ビーム自身の性質を表わすパラメーターであるエミッタンス $\varepsilon_{x,y}$ やエネルギー拡がり σ_δ と、ベータ関数 $\beta_{x,y}$ 、Dispersion 関数 $\eta_{x,y}$ で決まる。この $\beta_{x,y}$ 、 $\eta_{x,y}$ はビーム光学系の設計により決まる値で、ビームが真空ダクトにあたらないようにビーム輸送系を通過するためには適切な $\beta_{x,y}$ 、 $\eta_{x,y}$ となるようにビーム光学系を設計する必要がある。

ここで実際のビーム輸送系の設計の例として、KEK-ATF のビーム輸送系のビーム光学系を図 2.1 に示す。図中の上段にはベータ関数を、中段には Dispersion 関

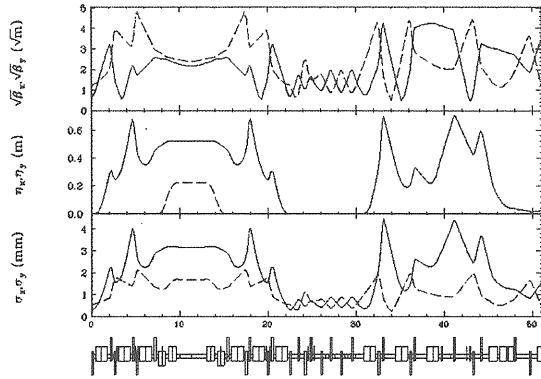


図 2.1: KEK-ATF のビーム輸送系。上段はベータ関数、中段は Dispersion 関数、下段はビームサイズを示してある。

数を、下段にはビームライン各点でのビームサイズを示してある。ビームサイズを計算する際には $\gamma\epsilon_x = \gamma\epsilon_y = 5 \times 10^{-4} \text{radm}$ 、 $\sigma_p/p = 1\%$ を仮定した。ただし、ビームのエネルギーは 1.28GeV と置いたため $\gamma \cong 2505$ としてビームサイズは計算されている。KEK-ATF の真空ダクトのサイズは内径で直径 27mm の丸型のダクトを使用しているため、 $\pm 3\sigma$ のビームがこのビーム輸送系を通過できるように設計されている。

2.2 電磁石磁場強度への考慮

実際のビームラインを設計する際に電磁石の強さは、製作可能な強さに押えなければならない。例えば、常電動電磁石に最も多く用いられている電磁軟鉄の場合の電磁石にかけることのできる磁場の目安を表 2.1 に示す。表 2.1 から同じ材質を使っても電磁石の形状で、その電磁石にかけられる最大ポール磁場が異なることがわかる。これは電磁石形状が複雑になればなるほど、電磁石の一部で磁場が局部的に高くなる効果から生じている。また、表 2.1 の目安は磁場が局部的にも 1.5T 以下に押えられる値を目安としている。実際の電磁軟鉄では最大磁場は 2T 以上かけることができるが、このような限界の磁場にするためには、saturation のため電力効率が悪くなったり、ヒステリシスの効果が大きくなることから特別な制御をする必要があるため、通常のビーム輸送系などに用いられることは少ない。

電子の場合、実際の偏向電磁石や四極電磁石や六極

電磁石の種類	ポール磁場の限界の目安
偏向電磁石磁場	1.3 T
四極電磁石磁場	0.8 T
六極電磁石磁場	0.6 T

表 2.1: 電磁軟鉄で作られた電磁石にかけることのできるポール磁場の目安

電磁石、ソレノイドコイルの強さを表すパラメーター ρ, k_1, k_2, A と磁場の関係は、

$$\frac{1}{\rho_{x,y}} = \frac{c}{E} B_{y,x} [\text{T}] \simeq \frac{0.3}{E [\text{GeV}]} B_{y,x} [\text{T}] \quad (2.1)$$

$$k_1 \simeq \frac{0.3}{E [\text{GeV}]} \frac{\partial B_y}{\partial x} [\text{T/m}] \quad (2.2)$$

$$k_2 \simeq \frac{0.3}{E [\text{GeV}]} \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} [\text{T/m}^2] \quad (2.3)$$

$$A \simeq \frac{0.15}{E [\text{GeV}]} B_s [\text{T}] \quad (2.4)$$

と表わせる。この様に同じ電磁石磁場を使ってもエネルギーが高くなれば、粒子に対する効果は弱くなる。また、四極電磁石や六極電磁石の強さは磁場の微分係数で表わされているが、これらの微分係数は電磁石のポール半径 r_a とポールの磁場 B_a を使って、 $|\partial B_y / \partial x| \cong |B_a / r_a|$ 、 $|\partial^2 B_y / \partial x^2| \cong |B_a / r_a^2|$ と近似的に表わすことができる。また四極電磁石は薄レンズ近似で考えると、電子ビームに対するレンズとしての働きを持ち、その焦点距離は $f = 1/k_1 L$ となるので (Appendix C)、ビームライン上にある決まった焦点距離のレンズを置くときには、

$$L > \frac{E [\text{GeV}] r_a [\text{m}]}{0.3 f [\text{m}] B_{a,\text{max}} [\text{T}]} \quad (2.5)$$

以上の長さの電磁石が必要になる。このことはある決まった強さの偏向電磁石の偏向角度や、六極電磁石を含んだビームラインを設計するときも同様のことが言える。またソレノイド電磁石に関しては、通常空芯の常伝導電磁石では数 kG が限界である。しかし、これらの電磁石の強さは単なる目安であり、その用途の上、実際にビームラインに導入する数量が限られたものである場合、数 T の強さの超伝導電磁石を設計に加えることもある。

2.3 電磁石磁場の誤差への考慮

ビームライン上の電磁石に磁場の誤差があるとき、ビームライン上を運動する粒子の運動は理想的な運動からずれることになる。この効果を考えることにする。一般に転送行列は式 (1.56) から

$$M(s, s_0) = T^{-1}(s) \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} T(s_0) \quad (2.6)$$

$$T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\beta_1} & 0 \\ \alpha_1/\sqrt{\beta_1} & \sqrt{\beta_1} \end{pmatrix}$$

と表わすことができる。このビームライン上の位置 s_1 にある四極電磁石に ΔK_1 の磁場誤差があるとする、転送行列は

$$\begin{aligned} M(s, s_0) &= T^{-1}(s) \begin{pmatrix} \cos \psi_2 & \sin \psi_2 \\ -\sin \psi_2 & \cos \psi_2 \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta_1 \Delta K_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi_1 & \sin \psi_1 \\ -\sin \psi_1 & \cos \psi_1 \end{pmatrix} T(s_0) \\ &\cong T^{-1}(s) \begin{pmatrix} 1 + \Delta\psi \sin 2\psi_2 & \Delta\psi(-1 + 2\sin^2 \psi_2) \\ \Delta\psi(1 - 2\cos^2 \psi_2) & 1 - \Delta\psi \sin 2\psi_2 \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} \cos(\psi + \Delta\psi) & \sin(\psi + \Delta\psi) \\ -\sin(\psi + \Delta\psi) & \cos(\psi + \Delta\psi) \end{pmatrix} T(s_0) \quad (2.7) \end{aligned}$$

となる。ここで位相進度のずれは $\Delta\psi = -\beta_1 \Delta K_1 / 2$ であり、同時に Twiss Parameter も位相進度とともにずれることがわかる。電磁石の設定誤差によるビームサイズの理想的な値からのずれは大雑把に

$$\sigma = \sqrt{\varepsilon\beta} \geq \sigma_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta\psi}{2\pi}\right)^2} \quad (2.8)$$

程度であると言える。よって実際のビームラインを設計する際には理想的な値からのずれは大雑把にビームサイズの $1/3$ 以下に抑える必要がある。よって電磁石磁場の誤差は、

$$\frac{\Delta K_1}{K_1} < \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{4\pi}{\beta K_1} \cong \frac{10}{\beta K_1} \quad (2.9)$$

に抑える必要がある。

通常加速器に使われている電磁石の絶対磁場精度は 10^{-3} のオーダーであり、ヒステリシスなどによる絶対値のずれを問題にする場合でも数%以下のずれである。そのため βK_1 は数百以下に設計することが望ましい。

また、電磁石の磁場の絶対値がきちんとおさえられている場合は、電磁石電源の安定度のビームサイズへの影響が問題となる場合がある。通常の加速器に使われている電源の安定度は 10^{-4} のオーダーであり、高安定化電源を使用することにより 10^{-5} 程度にまでは電磁石電源を安定化させることが可能である。このような電磁石電源を使用する場合、 βK_1 を一万程度にしておけば、通常の電磁石電源を使用しても、ビームサイズへの影響はほとんど無視でき、所どころ βK_1 が十万を越えるところがあっても、その箇所に高安定化電源を使用することにより対処できる。

2.4 エネルギーのずれへの考慮

2.4.1 エネルギーのずれた粒子の運動

ビーム輸送系を運動するエネルギーのずれた粒子の運動を考えることにする。まず初めにドリフト空間での粒子の運動を考える。ドリフト空間でのエネルギーが δ だけずれた粒子のハミルトニアンは、

$$\begin{aligned} H_s &= -\sqrt{(1+\delta)^2 - p_x^2 - p_y^2} \\ &\simeq -1 - \delta + \frac{1}{2(1+\delta)}(p_x^2 + p_y^2) \quad (2.10) \end{aligned}$$

であつたので、式 (1.22) から、位置 s_2 における粒子の運動は、位置 s_1 での位置や傾きから以下のように求めることができる。

$$\begin{aligned} x(s_2) &= x(s_1) + \frac{L}{(1+\delta)} p_x(s_1) \\ p_x(s_2) &= p_x(s_1) \\ y(s_2) &= y(s_1) + \frac{L}{(1+\delta)} p_y(s_1) \\ p_y(s_2) &= p_y(s_1) \end{aligned}$$

この結果、エネルギーのずれた粒子は理想的なエネルギーの粒子の運動と比べて実効的に移動距離がずれたように感じる事がわかる。

次に四極電磁石磁場中を運動するエネルギーがずれた粒子の運動を考える。四極電磁石磁場中を運動する粒子のハミルトニアンは、

$$\begin{aligned} H_s &= -\sqrt{(1+\delta)^2 - p_x^2 - p_y^2} + \frac{k_1}{2}(x^2 - y^2) \\ &\simeq -1 - \delta + \frac{1}{2(1+\delta)}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{k_1}{2}(x^2 - y^2) \quad (2.11) \end{aligned}$$

であった。ここでまた、式 (1.22) から、位置 s_2 における粒子の運動を位置 s_1 での位置や傾きの関数として求めることにする。また、ここでは簡単の為、 $k_1 > 0$ の場合のみを考えることにする ($k_1 < 0$ の場合は x と y の運動が逆になる)。ドリフト空間と同様に、四極電磁石磁場中での (x, p_x, y, p_y) は、

$$x_2 = x_1 \cos \sqrt{k_\delta} L + \frac{p_{x,1}}{(1+\delta)\sqrt{k_\delta}} \sin \sqrt{k_\delta} L \quad (2.12)$$

$$p_{x,2} = -x_1(1+\delta)\sqrt{k_\delta} \sin \sqrt{k_\delta} L + p_{x,1} \cos \sqrt{k_\delta} L \quad (2.13)$$

$$y_2 = y_1 \cosh \sqrt{k_\delta} L + \frac{p_{y,1}}{(1+\delta)\sqrt{k_\delta}} \sinh \sqrt{k_\delta} L \quad (2.14)$$

$$p_{y,2} = y_1(1+\delta)\sqrt{k_\delta} \sinh \sqrt{k_\delta} L + p_{y,1} \cosh \sqrt{k_\delta} L \quad (2.15)$$

となる。ただし $k_\delta = k_1/(1+\delta)$ とした。このエネルギーがずれた粒子の運動を考慮に入れたハミルトニアンから導き出された転送行列は水平方向、垂直方向ともに、

$$M_{q,x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \sqrt{k_\delta} L & \sin \sqrt{k_\delta} L / \sqrt{k_\delta} \\ -\sqrt{k_\delta} \sin \sqrt{k_\delta} L & \cos \sqrt{k_\delta} L \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/(1+\delta) \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

$$M_{q,y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \sqrt{k_\delta} L & \sinh \sqrt{k_\delta} L / \sqrt{k_\delta} \\ \sqrt{k_\delta} \sinh \sqrt{k_\delta} L & \cosh \sqrt{k_\delta} L \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/(1+\delta) \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

とおける。つまり、エネルギーのずれた粒子の運動の取扱は $p_{x,y} \rightarrow p_{x,y}/(1+\delta)$ とした系で、 k 値を $k_1 \rightarrow k_1/(1+\delta) = k_\delta$ とした磁場の中を運動すると考えて良い。これは先に示したドリフト空間の場合も同様で、

$$M_{d,x,y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/(1+\delta) \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

と書き改めることができる。このように線形磁場中でのエネルギーのずれた粒子の取扱は、これまでと同様に行列演算で計算することができる。ことがわかる。

2.4.2 クロマティシティー

エネルギーが設定エネルギーからずれた粒子の運動については既に説明したように行列形式で記述できる。

更に、このときの転送行列は、

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+\delta \end{pmatrix} M(k's \rightarrow k's/(1+\delta)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/(1+\delta) \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

と記述することができる。つまり、このとき、

$$M(s, s_0) = T_\delta^{-1}(s) \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} T_\delta(s_0) \quad (2.20)$$

$$T_\delta = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\beta/(1+\delta)} & 0 \\ \alpha_1/\sqrt{\beta/(1+\delta)} & \sqrt{\beta/(1+\delta)} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

と Twiss Parameter の再定義をおこなうことによって、個々の電磁石が $-\Delta K_1$ の磁場誤差を持っている状態と等価にみなすことができる。よって理想エネルギーの粒子とエネルギーが δ だけずれた粒子との位相進度の差は、

$$\Delta \psi_x = +\delta \sum_i \frac{\beta_{x,i} K_{1,i}}{2} = 2\pi \xi_x \delta \quad (2.22)$$

$$\xi_x \equiv + \sum_i \frac{\beta_{x,i} K_{1,i}}{4\pi} \quad (2.23)$$

$$\Delta \psi_y = -\delta \sum_i \frac{\beta_{y,i} K_{1,i}}{2} \equiv 2\pi \xi_y \delta \quad (2.24)$$

$$\xi_y \equiv - \sum_i \frac{\beta_{y,i} K_{1,i}}{4\pi} \quad (2.25)$$

となる。ここで導入した $\xi_{x,y}$ はクロマティシティーと呼ばれ、光学で言うところの色収差に相当するパラメーターである。ここでビームの中の粒子のエネルギーが σ_δ の有限の拡がりを持っていると考えると、エネルギー拡がりによるビームサイズの滲みは

$$\sigma = \sigma_0 \sqrt{1 + \xi^2 \sigma_\delta^2} \quad (2.26)$$

程度になることがわかる。よって、ビーム輸送系を設計するときには、ビームサイズの増大を抑制するためにクロマティシティーを $\xi < 1/3\sigma_\delta$ 程度以下に抑えるのが望ましい。しかしながら、ここで一つ注意が必要なことは、これは無限に長いビームラインでほとんど全ての電磁石が同じ程度の βK_1 を与えるときには非常に良い近似で正しいが、特定の電磁石が極端に大きな βK_1 を与えるときは、その電磁石から衝突点までの位相進度が大きく影響を与え、必ずしも正しいとは言えなくなる。

2.4.3 クロマティシティーの補正

ビーム衝突点ではビームサイズを小さく絞らなければならないため、クロマティシティーは小さく抑えるほうが望ましい。しかしながら、実際にビームを小さく絞ろうとすると、ビームの衝突点の直前でベータ関数を大きくしなければならず、その結果、クロマティシティーが大きくなってしまう。ビーム輸送系においては、このようなクロマティシティーの補正のため、しばしば六極電磁石を設置することがある。六極電磁石中を粒子が通過する際のハミルトニアンは、

$$H_s \simeq -1 - \delta + \frac{1}{2(1+\delta)}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{k_2}{6}(x^3 - 3y^2x) \quad (2.27)$$

であった。ここで粒子の運動をベータトロン振動によるものと運動量分散関数によるものとに分離して、 $x = x_\beta + \eta_x \delta$ 、 $y = y_\beta$ とおくと、

$$\begin{aligned} H_s &\simeq -1 - \delta + \frac{1}{2(1+\delta)}(p_x^2 + p_y^2) \\ &+ \frac{k_2}{6}(x_\beta + \eta_x \delta)^3 - 3y_\beta^2(x_\beta + \eta_x \delta) \\ &= -1 - \delta + \frac{1}{2(1+\delta)}(p_x^2 + p_y^2) \\ &+ \frac{k_2 \eta_x \delta}{2}(x_\beta^2 - y_\beta^2) + \frac{k_2}{6}(x_\beta^3 - 3y_\beta^2 x_\beta) + o(\delta^2) \end{aligned} \quad (2.28)$$

となる。ここで式 (1.22) から、位置 s_2 における粒子の運動を位置 s_1 での位置や傾きの関数として求めることにする。

$$\begin{aligned} x_2 &\simeq x_1 \cos \sqrt{k_\delta} L + \frac{p_{x,1}}{(1+\delta)\sqrt{k_\delta}} \sin \sqrt{k_\delta} L \\ &- \frac{k_2 L^2}{4}(x_1^2 - y_1^2) - \frac{k_2 L^3}{6}(x_1 p_{x,1} - y_1 p_{y,1}) \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} p_{x,2} &\simeq -x_1(1+\delta)\sqrt{k_\delta} \sin \sqrt{k_\delta} L + p_{x,1} \cos \sqrt{k_\delta} L \\ &- \frac{k_2 L}{2}(x_1^2 - y_1^2) - \frac{k_2 L^2}{2}(x_1 p_{x,1} - y_1 p_{y,1}) \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} y_2 &\simeq y_1 \cosh \sqrt{k_\delta} L + \frac{p_{y,1}}{(1+\delta)\sqrt{k_\delta}} \sinh \sqrt{k_\delta} L \\ &+ \frac{k_2 L^2}{2} x_1 y_1 + \frac{k_2 L^3}{6}(x_1 p_{y,1} + y_1 p_{x,1}) \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} p_{y,2} &\simeq y_1(1+\delta)\sqrt{k_\delta} \sinh \sqrt{k_\delta} L + p_{y,1} \cosh \sqrt{k_\delta} L \\ &+ k_2 L x_1 y_1 + \frac{k_2 L^2}{2}(x_1 p_{y,1} + y_1 p_{x,1}) \end{aligned} \quad (2.32)$$

となる。ただし $k_\delta = k_2 \eta_x \delta / (1+\delta) \simeq k_2 \eta_x \delta$ とした。また簡便化のため $x_\beta \rightarrow x$ 、 $y_\beta \rightarrow y$ と置き換えた。このと

き線形の部分のみを考えると、転送行列は水平方向、垂直方向ともに、

$$\begin{aligned} M_{s,x} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \sqrt{k_\delta} L & \sin \sqrt{k_\delta} L / \sqrt{k_\delta} \\ -\sqrt{k_\delta} \sin \sqrt{k_\delta} L & \cos \sqrt{k_\delta} L \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/(1+\delta) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} M_{s,y} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \sqrt{k_\delta} L & \sinh \sqrt{k_\delta} L / \sqrt{k_\delta} \\ \sqrt{k_\delta} \sinh \sqrt{k_\delta} L & \cosh \sqrt{k_\delta} L \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/(1+\delta) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.34)$$

とおける。ここでは $k_2 > 0$ の場合のみを示したが、 $k_2 < 0$ の場合は水平方向と垂直方向の運動を逆にすれば良い。よって、この場合もエネルギーのずれた四極電磁石中を運動する粒子のときと全く同じに考えて、六極電磁石も考慮にいったクロマティシティーは、

$$\xi_x \equiv \sum_i \frac{\beta_{x,i}(K_{1,i} + K_{2,i} \eta_{x,i})}{4\pi} \quad (2.35)$$

$$\xi_y \equiv - \sum_i \frac{\beta_{y,i}(K_{1,i} + K_{2,i} \eta_{x,i})}{4\pi} \quad (2.36)$$

となる。よって運動量分散関数が有限のところには六極電磁石を置き、その強さを調整することにより、クロマティシティーを補正することができる。

しかしながら、クロマティシティーが大きければ衝突点でのビームサイズは大きくなるという傾向はあるが、クロマティシティーを0にすれば必ず衝突点でのビームサイズは線形オプティクスで予想したビームサイズになる訳ではない。それは、衝突点でのビームサイズはクロマティシティーのみで決まる訳ではなく、誤差のある電磁石から衝突点までの位相進度も重大な影響を与えるためである。そこで六極電磁石の強さは Off-momentum Matching と呼ばれる手法で決定されることがしばしばある。これは粒子のエネルギーが理想的なエネルギーからずれた場合、できる限り理想的なベータ関数からずれないような六極電磁石の強さを探す方法である。ビーム輸送系においてクロマティシティーを小さくすることは円形加速器内でクロマティシティーを小さくすることほど意味はなく、ビーム輸送系においてはむしろ位相進度を揃えることよりもビームサイズを大きくしない強さの六極電磁石を探ることが正義となることが多い。

また六極電磁石を導入することは、その非線形な磁場の効果のために生じる今までに無かった新しい収差を生み出すと言うことを忘れてはいけない。著者の感覚では、どうしても必要と思われないところに六極電磁石などの非線形電磁石を置くことは避けたいものがある。このような六極電磁石をビームラインに置くことによる影響に関する例は3.1節に詳しく述べる。

2.5 カップリングへの考慮

2.5.1 カップリングに関する一般論

ビームラインにソレノイドコイルやスキュー四極電磁石が設置されていたり、四極電磁石の回転設置誤差や六極電磁石上での粒子のオフセットがあるとき、粒子の水平方向と垂直方向の運動は独立にならないことは既に示した。このような場合には、粒子の運動を x, y 軸で記述するより、新たな二つの独立な軸で記述する方が便利である場合が多い。

これらの新しい独立な軸を考える為の準備として、シンプレクティック条件というものを導入することにする。シンプレクティック条件とは、ある行列 A が

$$A^T S A = S, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

を満たすことである。一般に転送行列はシンプレクティック条件を満たす。そのことをここで証明する。ビームライン上の位置 s_0 から s までの転送行列を $M(s, s_0)$ と置く。このとき、 $M(s, s_0)$ の各行列要素は、

$$M_{ij}(s, s_0) = \frac{\partial q_i}{\partial q_{j,0}} \quad (2.38)$$

である。ただし $\vec{q} = (x, p_x, y, p_y)$ である。更に、

$$F(s, s_0) = M^T(s, s_0) S M(s, s_0) \quad (2.39)$$

といった行列を定義することにする。まず初めに $s = s_0$ のとき、 $M = I$ であるので、明らかに $F = S$ であることがわかる。よって $s = s_0$ における M のシンプレクティック条件の適合が証明された。次に F のビームラインに沿った変化を考えてみよう。

$$\frac{d}{ds} F(s, s_0) = \sum_{k,l} \frac{\partial q'_k}{\partial q_{i,0}} S_{kl} \frac{\partial q_l}{\partial q_{j,0}} + \sum_{k,l} \frac{\partial q_k}{\partial q_{i,0}} S_{kl} \frac{\partial q'_l}{\partial q_{j,0}}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k,l,m} \frac{\partial}{\partial q_{i,0}} \left(S_{km} \frac{\partial H}{\partial q_m} \right) S_{kl} \frac{\partial q_l}{\partial q_{j,0}} \\ &\quad + \sum_{k,l,m} \frac{\partial q_k}{\partial q_{i,0}} S_{kl} \frac{\partial}{\partial q_{j,0}} \left(S_{lm} \frac{\partial H}{\partial q_m} \right) \\ &= \sum_k \frac{\partial}{\partial q_{i,0}} \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \frac{\partial q_k}{\partial q_{j,0}} \\ &\quad - \sum_l \frac{\partial q_l}{\partial q_{i,0}} \frac{\partial}{\partial q_{j,0}} \left(\frac{\partial H}{\partial q_l} \right) \\ &= \sum_{k,l} \frac{\partial q_k}{\partial q_{j,0}} \left[\frac{\partial q_l}{\partial q_{i,0}} \frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial q_l} \right] \\ &\quad - \sum_{k,l} \frac{\partial q_l}{\partial q_{i,0}} \left[\frac{\partial q_k}{\partial q_{j,0}} \frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial q_l} \right] = 0 \quad (2.40) \end{aligned}$$

となりビームライン上の全ての位置において転送行列はシンプレクティック条件を満たすことがわかる。

またこのようなシンプレクティック条件を満たす行列は、行列

$$R = \begin{pmatrix} \mu I & S_2 r^T S_2 \\ r & \mu I \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

を使うことにより、

$$M(s, s_0) = R^{-1}(s) V(s, s_0) R(s_0) \quad (2.42)$$

$$V = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

という形に書き改めることができる。このとき A, B はそれぞれ二行二列のシンプレクティック条件を満たした行列である。また、 R 自身も四次元のシンプレクティック条件を満たす行列で、 R がシンプレクティック条件を満たすためには、式 (2.41) 中の μ は $\mu^2 = 1 - \det(r)$ を満たさなければならず、 r がわかれば R も一意的に決定される（慣例的に $\mu > 0$ と取る）。従って式 (2.43) の右辺は行列 $A, B, r(s_0), r(s)$ により決定され、16個の独立変数は左辺の転送行列の行列要素から計算できる。よって $R\vec{q}$ 空間では粒子の運動は行列 V により規定され、互いに独立な二次元の運動として考えることができる。このような二つの独立な座標系を Intrinsic な空間と呼び、それぞれの座標系で定義されるエミッタンスを Intrinsic Emittance 等と呼んだりする。

フラットビームの場合、微量の xy カップリングが垂直方向エミッタンスに大きな影響を与えることがあ

るが、以後の転送行列を適当に選ぶことにより、最終的には垂直方向エミッタンスを Intrinsic Emittance まで押えることができる。このような観点から Intrinsic Emittance をビームのエミッタンスを表わす一つの指標と見る見方もある。

2.5.2 カップリング補正の方法

一般には水平、垂直方向の運動が独立でない場合、前節のような取扱でビームの運動は記述できるが、実際には水平、垂直方向の運動を独立になるように補正したい場合も多い。そのようなときのため、この節ではカップリングの補正方法に関する説明をおこなう。二次元のビームパラメーターの伝搬は転送行列を使って、

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ -\alpha_2 & -\gamma_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\alpha_1 & -\gamma_1 \end{pmatrix} M^{-1} \quad (2.44)$$

と書き表わすことができることは以前示したが、若干の変形をおこなうことにより、

$$\sigma_2 = M \sigma_1 M^T \quad (2.45)$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ -\alpha & \gamma \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

と二次元のビームパラメーター σ を用いて書き改めることができる。同様に四次元のビームパラメーターも

$$\sigma_2 = M \sigma_1 M^T \quad (2.47)$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & \sigma_{24} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} & \sigma_{34} \\ \sigma_{14} & \sigma_{24} & \sigma_{34} & \sigma_{44} \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

と置くことができる。二次元のビームマトリックスに対する独立な変数が三個 ($\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ または $\alpha, \beta, \varepsilon$) であったのに対して、式 (2.48) から四次元のビームマトリックスに対する独立なパラメーターは 10 個であることがわかる。つまり四次元のビームパラメーターを測定により決定するためには、10 個以上の独立なビームサイズ測定が必要となる。

水平垂直方向の運動を独立にするためには、式 (2.48) の行列要素のうち $\sigma_{13} = \sigma_{14} = \sigma_{23} = \sigma_{24} = 0$ とする必要がある。このことは、前節の式 (2.43) の転送行列で $R(s) = I$ となるように二次元行列 r を決めることと等

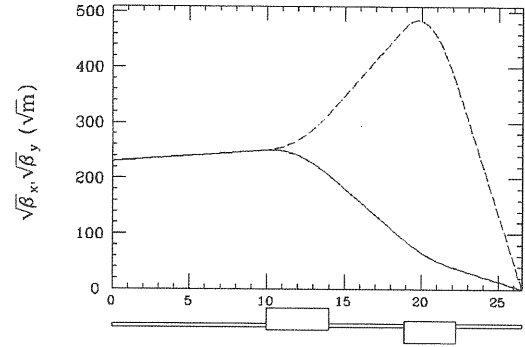


図 3.1: 最終収束系 Final Doublet の例。計算では衝突点でのベータ関数は水平方向 $\beta_x^* = 13$ mm、垂直方向 $\beta_y^* = 0.13$ mm としている。

価である。このような条件を満たすためにはビームライン上に最低 4 個の水平垂直軸が独立ではない電磁石を設置する必要がある。つまり、カップリングを補正するためには、ビームパラメーターの測定のために最低 10 個の独立な測定が可能なビームモニターと最低 4 個の水平垂直軸が独立ではない電磁石磁場を設置しなければならない。

3 特別な目的のビーム輸送系

3.1 最終収束系

高エネルギー実験において、ビームの衝突地点でできる限りビームサイズを絞りたいという要求は多く、実際に、そのような要求を反映させるように衝突地点のビーム光学系は設計されている。しかし、実際には無限に小さくビームを絞れるわけではない。そこで、この節では次世代のリニアコライダー JLC の最終収束系のデザインを通して、ビームサイズを小さく絞るためには、どのようなことに気をつけなければならないかを説明する。

水平方向、垂直方向双方のビームサイズを小さく絞るためには、通常、final doublet と呼ばれる 2 個の四極電磁石からなる最終収束系が基本となる。図 3.1 には、JLC のビーム衝突点での設計値のベータ関数が $\beta_x^* = 13$ mm、 $\beta_y^* = 0.13$ mm となるように設計された Final Doublet の例を示す。この様に Final Doublet のパラメータを適

切に選ぶことにより、衝突点でのベータ関数を非常に小さく設計することができる。しかし、ここで一番大きな問題となるのがクロマチシティーである。図 3.1 に示されたビームラインでは四極電磁石のところでベータ関数が大きいため、たった二個の四極電磁石で生成されるクロマチシティーは水平方向で約 5000、垂直方向で約 50000 という数字になる。これでは 2.4.2 節に示したように、何の手当もしないと 0.1% のエネルギー拡がりを持ったビームに対して、水平方向で約 5 倍、垂直方向では約 50 倍ビームサイズが広がってしまい、衝突点でビームサイズを絞るためにベータ関数を小さく設計した意味が無くなってしまう。

しかし、このような困難を乗り越えて、JLC では衝突点でビームサイズをベータ関数とエミッタンスから計算される線形の値にしている。そのためには幾つかの方法があるが、ここでは SLAC の P. Raimondi が提案した方法を紹介することにする [3]。

P. Raimondi が提案した方法の一番大きな特徴は Local Correction ということである。つまり、クロマチシティーが主に生成されるのは Final Doublet の位置であるので final doublet のすぐ近くに六極電磁石を置きクロマチシティーを補正しようということである。また、クロマチシティーの補正には式 (2.35)、(2.36) からわかるように、六極電磁石を置くだけでなく、六極電磁石の位置に Dispersion 関数 η_x を生成させる必要がある。六極電磁石を置く位置は Final Doublet のすぐ側であり、六極電磁石と衝突点の間に偏向電磁石を置く余裕が無い場合、衝突点において $\eta_x = 0$ は保証できるものの、 $\eta'_x \neq 0$ となってしまうのも P. Raimondi が提案した方法の特徴の一つとなる。しかし、この衝突点での $\eta'_x \neq 0$ の影響が小さいことは数々のシミュレーションの結果確認されている。

それでは、衝突点におけるビームサイズを膨らませる要因はクロマチシティーだけであろうか。実際には六極電磁石をビームラインの置くことにより数々の効果が衝突点におけるビームサイズに悪影響を与える。1.7.3 節で説明したように、六極電磁石の中心から水平方向にずれた粒子はずれの大きさに比例した収束力を受け、垂直方向にずれた粒子はずれの大きさに比例したカップリングを受けることになる。ビームは有限の大きさを持つため、六極電磁石を通過する際にビーム内のある粒子は収束力を受けたり、カップリングを受けたりす

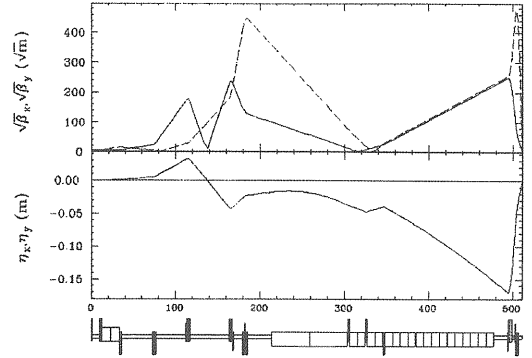


図 3.2: P. Raimondi が提案した JLC の最終収束系のビーム光学系。上段はベータ関数を下段は Dispersion 関数を示している。JLC では 500 GeV のビームに対して、この最終収束系で水平方向で約 200 nm、垂直方向で約 2 nm までビームを絞ることを予定している。

る。これを Geometric Aberration と呼び、ビームラインにはできる限り非線形効果のある電磁石を置きたくない理由である。P. Raimondi が提案した最終収束系では、六極電磁石は Final Doublet の側に配置されているため、六極電磁石を通過するときのビームサイズは大きく、Geometric Aberration の影響は大きい。しかし、彼は Geometric Aberration に対する処置もおこなった上で最終収束系の設計をおこなっている。ここでは彼のおこなった最低次の Geometric Aberration の補正を紹介しよう。この最低次の Geometric Aberration は六極電磁石を単体として使うのでは無く、その上流に更に六極電磁石を配し常に対を組むように使うようにすることにより対処する。このとき、それらの対には

$$M_F = \begin{pmatrix} F & 0 & 0 & 0 \\ F_{21} & 1/F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & F_{34} & 1/F \end{pmatrix}, \quad M_D = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & 1/D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & D_{34} & 1/D \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

の条件を与えることにより Geometric Aberration は補正できる。ここで M_F は Final Doublet の Focusing 四極電磁石の脇に置いた六極電磁石とそれに対となる六極電磁石との間の転送行列で、 M_D は Defocusing 四極電磁石の脇に置いた六極電磁石とそれに対となる六極電磁石との間の転送行列を表す。また、それぞれの六

極電磁石の強さは、

$$K_{2,F1} = \frac{\xi_x}{R_{F,12}^3 \eta'_x}, \quad K_{2,F2} = -F^3 K_{2,F1} \quad (3.2)$$

$$K_{2,D1} = \frac{\xi_y}{R_{D,34}^3 \eta'_x}, \quad K_{2,D2} = -D^3 K_{2,D1} \quad (3.3)$$

となる。ここで $K_{2,F1}$ 、 $K_{2,D1}$ は Final Doublet の脇に置いた六極電磁石の強さで、 $K_{2,F2}$ 、 $K_{2,D2}$ はそれに対する六極電磁石の強さである。また R_F 、 R_D は、それぞれ Final Doublet の脇に置いた六極電磁石から衝突点までの転送行列を意味する。このような取扱いをおこなうことにより最低次の Geometric Aberration は補正できる。P. Raimondi は更に高次の Geometric Aberration の補正もおこなっているが、これらは Final Doublet の組み方や、その脇に配置する六極電磁石の位置に強く依存しており、それらを考慮に入れた最終収束系を図 3.2 に示す。JLC では 500 GeV のビームに対して、この最終収束系で水平方向で約 200 nm、垂直方向で約 2 nm までビームを絞ることを予定している。

3.2 ビーム進行方向に関する要求

3.2.1 Isochronous Beamline

建物の敷地とビームラインの長さの関係で、ビームラインを心ならずも曲げて設計しなければならない時がある。この時に1つの問題となるのがビームラインを曲げたためにバンチ長が伸びてしまうことである。図 3.3 に示すように粒子が偏向電磁石を通過する際にエネルギーの違いによって横方向の位置だけでなく、偏向電磁石の通過時間にも差ができる。

ここで一般に長さ L で偏向角度 θ のセクター型 (図 3.3 のようにボールのエッジがデザイン軌道に垂直) の偏向電磁石の六次元の転送行列は

$$M = \begin{pmatrix} C & S/\rho & 0 & 0 & 0 & (1-C)/\rho \\ -\rho S & C & 0 & 0 & 0 & S \\ 0 & 0 & 1 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S & -(1-C)/\rho & 0 & 0 & 1 & -(\theta-S)/\rho \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

となる。ここで $C = \cos \theta$ 、 $S = \sin \theta$ 、 $\rho = L/\theta$ である。このときの六次元空間は $(x, p_x, y, p_y, z, \delta)$ である。この

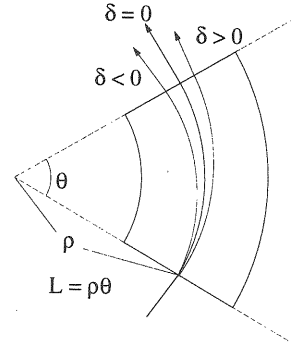


図 3.3: 偏向電磁石を通過するとき、粒子のエネルギーの違いにより横方向の位置だけでなく、粒子の軌道長にも差が出る様子。

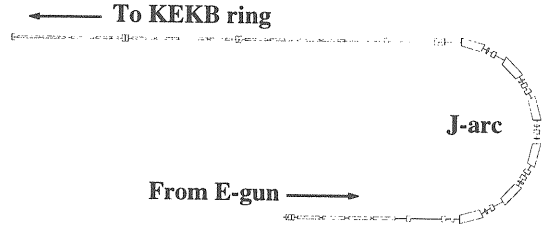


図 3.4: KEKB 入射器 J-arc の配置図。KEKB 入射器では J-arc を使うことにより、バンチ長を伸ばすことなくビームラインを 180° 曲げている。

ように偏向電磁石への入射エネルギーの違いにより、粒子軌道の軌道長が変化することがわかる。エネルギーの高い粒子は軌道長が長くなるため、デザイン通りのエネルギーの粒子に比べると進行方向の移動距離が遅れることになり、エネルギーの低い粒子は逆の効果で進行方向の移動距離が進むことになる。ビームはエネルギーに拡がりを持った粒子同士の集まりで構成されているので、ビーム内での軌道長の違いが結果としてバンチ長を伸ばす効果を生み出すことになる。

しかしながら、ビームラインの設計次第で、ビーム軌道を曲げながらバンチ長を変化させないことも可能である。このようなビームラインを Isochronous Beamline と呼ぶ。ここでは Isochronous Beamline の例として KEKB の入射器部分に使われている J-arc と呼ばれるビームラインを紹介しよう。図 3.4 には J-arc の幾何学

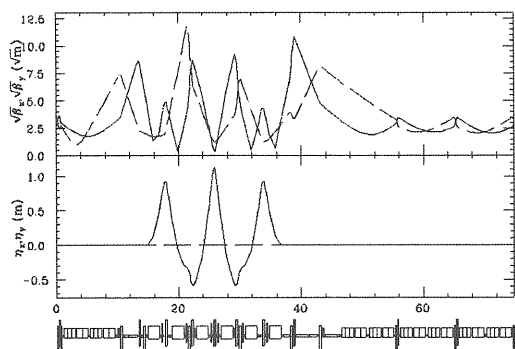


図 3.5: KEKB 入射器 J-arc のビーム光学系。上段はベータ関数 $\beta_{x,y}$ を、下段は水平方向の Dispersion 関数 η_x を示してある。

的な配置を図 3.5 には J-arc のビーム光学系を示す。J-arc は限られた敷地内で KEKB 入射器の加速区間を延ばすことを目的として作られたビームラインで、図 3.4 からわかるようにビームラインを 180° 折り返すデザインとなっている。

ここで、このビームラインに要求されていることは以下の点であることを注意しよう。一つ目はエネルギーの違いによってビームラインの出口でビーム進行方向の位置が変わらない。そして、二つ目にエネルギーの違いによってビームラインの出口で位置や角度が変化してはならないということである。これらの要求を満たすためにはビームライン全体の転送行列を作り $M_{16} = M_{26} = M_{56} = 0$ となるように偏向電磁石の間にある四極電磁石の強さを決めてやれば良い。

特に $M_{56} = 0$ の条件を満たすために、J-arc では図 3.5 からわかるようにビームライン中で Dispersion 関数 η_x の符号を反転させている。これはデザインエネルギーの粒子に比べてエネルギーの高い粒子の軌道が外側に回る部分と内側に回る部分を作っていることに相当する。粒子がデザインエネルギーの粒子軌道の外側を回る時、粒子の軌道長は伸び、内側を回る時は縮む。この外側に回る部分と内側に回る部分のバランスをとることによって、エネルギーの違った粒子同士を同じ軌道長でビームラインを通過させることが可能になる。

また、 $M_{16} = M_{26} = 0$ に関しては図 3.5 の Dispersion 関数 η_x がビームラインの前後で閉じていることから、この条件が満たされていることがわかる。このようなビー

ムラインの前後で Dispersion 関数が閉じているビームラインは Achromatic なビームラインと呼ばれ、多くのビーム輸送系や放射光リングなどで使われている。

3.2.2 エネルギー圧縮装置

線形加速器で加速したビームの円形加速器への入射を考える際にしばしば問題となるのが、エネルギー拡がりが大きかったり、エネルギーテールのため、円形加速器自身や円形加速器へ入射するまでのビーム輸送系内においてビーム損失をおこすことである。設計により違うこともあるが、一般に円形加速器のエネルギー許容値は線形加速器のそれと比べて小さく、逆に円形加速器のパンチ長への許容値は線形加速器の許容値に比べて緩いことが多い。つまり、線形加速器で加速したビームを円形加速器に入射する前に多少パンチ長が伸びてしまうことを犠牲にしてもエネルギー拡がりを小さくすることが望ましいことが多々ある。

前節では偏向電磁石を通過する際に粒子のエネルギーの違いによりビーム進行方向の位置が変わることを説明した。そして、この違いからパンチ長が伸びることを抑制するビームラインについて学んだ。しかし、この節では逆にこの特性を利用することを考える。そのためには、まず意図的に $M_{16} = M_{26} = 0$ という Achromatic な条件を満たしながら $M_{56} \neq 0$ というようなビームラインを作り出す必要がある。このような条件を満たす最も簡単なビームラインとしてシケイン型のビームラインがある。このシケイン型のビームラインは四個、またはそれ以上の Rectangular 型偏向電磁石（両端のポール形状が平行）を組み合わせただけで構成される。このときの位相平面 (z, δ) での転送行列は、

$$M = \begin{pmatrix} 1 & M_{56} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

となる。一方、エネルギー圧縮のためには更にビーム進行方向の位置の違いによりエネルギー差をつける装置が必要になってくる。この候補として高周波加速管がある。通常、高周波加速管はビーム加速のために利用されるが、ここでは加速には使わず高周波の肩に乗せる。このことにより、ビーム進行方向の位置の違いによりエネルギー差をつけることが可能になる。つまり、このとき

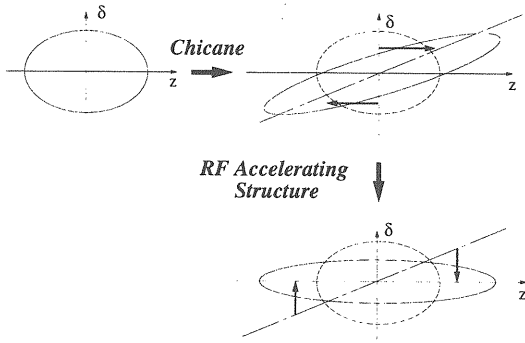


図 3.6: エネルギー圧縮装置の概念図。

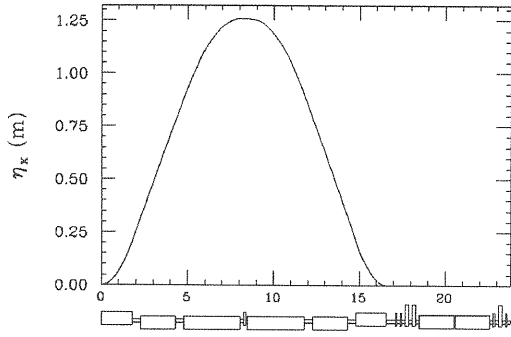


図 3.7: KEKB 入射器のエネルギー圧縮装置の磁石の配置と Dispersion 関数。前半の Dispersion 関数が有限な区間がシケインであり、ここでは六個の Rectangular 型偏向電磁石で構成されている。後半には 2m 長の高周波加速管が 2 本配置されている。

の位相平面 (z, δ) での転送行列は、

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f & 1 \end{pmatrix}, \quad f = -\frac{Vk \cos \psi}{E - V \sin \psi} \quad (3.6)$$

である。ここで $k = 2\pi f_{rf}/c$ は高周波の波数を表す。

エネルギー圧縮のメカニズムは、図 3.6 に示すようなものである。まず初めにシケインなどでバンチ長を伸ばす。この時、バンチ内でエネルギーと進行方向の位置との間に相関が生じることになる。次に高周波加速管でビームを高周波の肩にのせることによりエネルギー差を取り除いてやるといった手続きになる。つまり、転送行列で表わすと、

$$\begin{pmatrix} z_f \\ \delta_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & M_{56} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_i \\ \delta_i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & M_{56} \\ f & 1 + fM_{56} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_i \\ \delta_i \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

となる。ここで $1 + fM_{56} = 0$ となるように、高周波加速管やシケインのパラメーターを選ぶことにより、エネルギー圧縮装置を通過した後のエネルギー広がりは $\sigma_{\delta,f} = f\sigma_{z,i}$ となることがわかる。

ここで注意しなければならないのは、このエネルギー圧縮装置でエネルギーを無限に圧縮できるわけではなく、圧縮できるエネルギーには高周波加速管やシケインの非線形効果からくる限界値が存在するということである。エネルギー圧縮装置前後でのエネルギーのずれ $\Delta\delta_i$ と $\Delta\delta_f$ との関係は、

$$\begin{aligned} \Delta\delta_f = & \left(1 - \frac{kM_{56}VC}{E - VS}\right) \Delta\delta_i \\ & + \frac{kM_{56}V(3C - kM_{56}S)}{2(E - VS)} \Delta\delta_i^2 \\ & + \frac{k^2 M_{56}^2 V(9S + kM_{56}C)}{6(E - VS)} \Delta\delta_i^3 + o(\Delta\delta_i^4) \end{aligned} \quad (3.8)$$

のように表わせる。ここで $k = 2\pi f_{rf}/c$, $S = \sin \psi$, $C = \cos \psi$ である。式 (3.8) の第 1 項、第 2 項は高周波加速管にかかる高周波の電圧と位相を調整してキャンセルすることができる。しかし第 3 項は消すことのできない値として残ってしまう。この第 3 項がバンチ長圧縮の制限値を作ることになる。この非線形の効果を見捨てるための条件として

$$3\sigma_{\delta,f} = \left| \frac{3kVC}{E - VS} \right| \sigma_{z,i} > |\Delta\delta_f(3\sigma_{\delta,i})| \quad (3.9)$$

とおける。また、円形加速器の入射を考える際にはバンチ長を円形加速器の許容値以下に抑えなければならないので、このことによりバンチの圧縮に限界が生じることもある。

ここで実際のエネルギー圧縮装置の例として、KEKB 入射器に配置されている陽電子ビームラインの ECS (Energy Compression System) を例にとり考えていくことにする。図 3.7 には KEKB の入射器部のエネルギー圧縮装置を示す。KEKB のエネルギー圧縮装置に入る前の陽電子ビームのパラメーターはバンチ長が 1.7 mm でエネルギー広がりが 0.25 % である。また、高周波加速管の周波数は S-band (2856 MHz) を使用している。よって式 (3.9) から圧縮できるエネルギーの限界

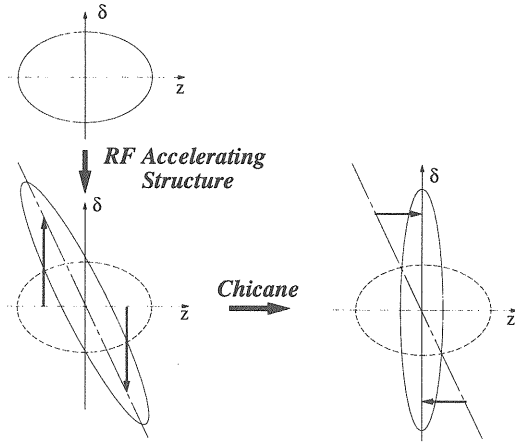


図 3.8: バンチ長圧縮装置の概念図。

は 0.06 % であることがわかる。しかし KEKB 入射器では、この ECS でエネルギー拡がりを 0.25 % から約半分の 0.13% まで圧縮して KEKB の主リングに入射している。これは式 (3.9) から求められるエネルギー圧縮の限界値よりも抑えぎみのパラメーター設定だが、このパラメーターの設定は KEKB リングへの入射ビームのバンチ長を約 7 mm に抑えるためになされたものである (ECS 以後のビーム輸送系の R_{56} が約 -5 m のため、KEKB 主リング入射直前ではバンチ長は約 7 mm まで伸びる)。

3.2.3 バンチ長圧縮装置

エネルギー圧縮とは逆に、パルスラジオリシスや SASE-FEL、リニアコライダー等の実験においてはバンチ長を短くしたいという要求が出てくる。このような要求を満足するため、バンチ長圧縮装置を実際の加速器に設置したり設計に盛り込んだりすることがある。

基本的なバンチ長圧縮装置の概念は、前節で示したエネルギー圧縮装置の全く逆である。図 3.8 に示すように、まず初めに高周波加速管でビームを高周波の肩にのせることによりバンチの前後にエネルギー差つけてやる。このときバンチの前方にエネルギーの低い粒子が、後方にエネルギーの高い粒子が来るようにエネルギー差をつけてやる。その後、シケインを通過させることによりエネルギーの低い粒子はシケインの外側を回るのバンチ後方へ位置をシフトさせ、エネルギーの高い粒子はバンチ前方にビーム進行方向の位置をシフトさせ

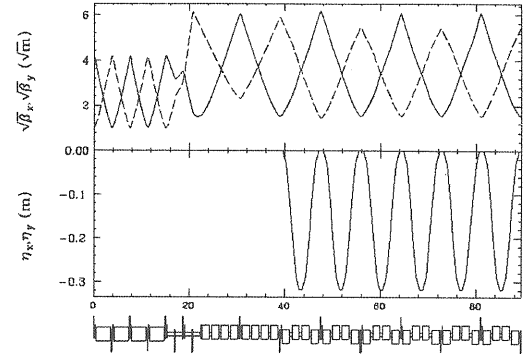


図 3.9: JLC の初段のバンチ長圧縮装置 BC1 のビーム光学系。上段はベータ関数を下段は Dispersion 関数を示している。

るようになる。この結果、バンチ長の圧縮が起こることになる。この場合も、エネルギー圧縮装置の場合と同様に転送行列で表わすと、

$$\begin{pmatrix} z_f \\ \delta_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & M_{56} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_i \\ \delta_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+fM_{56} & M_{56} \\ f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_i \\ \delta_i \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

となる。ここでもエネルギー圧縮装置のときと同様に $1+fM_{56}=0$ となるように、高周波加速管やシケインのパラメーターを選ぶことにより、バンチ長圧縮装置を通過した後のバンチ長は $\sigma_{z,f} = M_{56}\sigma_{\delta,i}$ となることがわかる。

ここで、バンチ長圧縮装置の一つの例として JLC の初段のバンチ長圧縮装置である BC1 と呼ばれる部分を紹介する。JLC の BC1 のビーム光学系を図 3.9 に示す。エネルギー圧縮装置の場合と同じで、バンチ長の圧縮も無限にできるわけではなく、圧縮できるバンチ長には高周波加速管やシケインでの非線形特性からくる制限が生じる。バンチ圧縮装置前でのビーム進行方向の位置 Δz_i と圧縮装置後のビーム進行方向の位置 Δz_f との関係は

$$\begin{aligned} \Delta z_f = & \left(1 - \frac{kM_{56}VC}{E-VS}\right) \Delta z_i \\ & - \frac{k^2 M_{56} \{V(1+2C^2) - ES\}}{2(E-VS)^2} \Delta z_i^2 \\ & + \frac{k^3 M_{56} VC(E+8VS)}{6(E-VS)^2} \Delta z_i^3 + o(\Delta z_i^4) \end{aligned} \quad (3.11)$$

のように表わせる。ここで $k=2\pi f_{rf}/c$, $S=\sin\psi$, $C=\cos\psi$ である。式 (3.11) の第 1 項、第 2 項は高周波加速管にかかる高周波の電圧と位相を調整してキャンセルすることができる。しかし第 3 項は消すことのできない値として残ってしまう。この第 3 項がバンチ長圧縮の制限値を作ることになる。この非線形の効果を無視するための条件として

$$3\sigma_{z,f}=3|R_{56}|\sigma_{\delta,i} > |\Delta z_f(3\sigma_{z,i})| \quad (3.12)$$

とおける。JLC の BC1 への入射ビームのパラメータは $\sigma_{z,i}=5$ mm、 $\sigma_{\delta,i}=0.1\%$ なので、高周波の周波数を S-band (2856 MHz) としたときは圧縮限界が約 680 μm 、L-band (1428 MHz) としたときは圧縮限界が約 250 μm である。BC1 ではバンチ長をおよそ 500 μm まで圧縮を予定しているため、高周波加速管にかかる高周波の周波数を L-band としている。また図 3.9 でシケインを多数に分けて使っているのは、CSR(Coherent Synchrotron Radiation) によるエミッタンス増大を防ぐためである (Appendix D 参照)。

3.3 スピン操作

3.3.1 Thomas-BMT 方程式

電子ビームを輸送する際に、時として偏極した電子ビームを輸送しなければならない時がある。一般に電子ビームが静電磁場を通過したときの偏極ベクトルの変化は Thomas-BMT 方程式として

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{P} \quad (3.13)$$

$$\vec{\Omega} = \frac{e}{\gamma m} \left[G\gamma \vec{B}_{\perp} + (1+G)\vec{B}_{\parallel} + \left(G\gamma - \frac{\gamma}{\gamma^2-1} \right) \frac{\vec{E} \times \vec{v}}{c^2} \right] \quad (3.14)$$

とおける。ここで $G=(g-2)/2$ は異常磁気モーメントで、電子に対してはおおよそ 0.00116 である。また、ここでのスピンの変化は電子の軌道が曲がる時、その方向とともに向きを変えるような電子の静止系で定義されている。この際スピンの回転角度は、式 (3.14) を使って、

$$\varphi = |\vec{\Omega}|\Delta t = \frac{|\vec{\Omega}|}{\beta c} \Delta L \quad (3.15)$$

として表わせる。このように電子ビームが静電磁場中を通過することにより、電子ビームのスピンの方向は変化する。

3.3.2 電子ビームの進行方向に対するスピン操作

ビームの進行方向に対して電子ビームのスピンを回転させるときは、ソレノイド磁場を使うことが多い。ソレノイド磁場は電子の進行方向に対して垂直に向いており、このときスピンは磁場の方向に対して回転し、その回転角は式 (3.15) から

$$\varphi = \frac{e(1+G)}{\gamma\beta mc} BL \quad (3.16)$$

となる。しかし、 (x, p_x, y, p_y) の四次元空間での転送行列は、式 (1.91) から、

$$M_{\text{sol}}(\varphi) = \begin{pmatrix} C^2 & SC/A & SC & S^2/A \\ -ASC & C^2 & -AS^2 & SC \\ -SC & -S^2/A & C^2 & SC/A \\ AS^2 & -SC & -ASC & C^2 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

であった。ここで $S=\sin\varphi/2$, $C=\cos\varphi/2$, $A=\varphi/2L$ である。上式を見てわかるように、電子ビームをソレノイド磁場中を運動させるとき、水平方向と垂直方向のカップリングを生じるという大きな問題がある。

JLC では扁平ビームのスピンを操作しなければならないため、このカップリングは大きな問題となる。そこで、ここでは JLC で用いられているカップリング抑制の方法を紹介しよう。JLC では、ソレノイド磁石を使ってスピンの方向を φ だけ曲げたいとき、ソレノイド磁石を 2 つの区間に区切って、その間の転送行列を水平方向は +I、垂直後方は -I となるように電磁石を配置することになっている。このとき、システム全体の転送行列は、

$$M(\varphi) = M_{\text{sol}}\left(\frac{\varphi}{2}\right) \begin{pmatrix} +I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} M_{\text{sol}}\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \begin{pmatrix} C & S/A & 0 & 0 \\ -AS & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C & -S/A \\ 0 & 0 & AS & -C \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

となり、カップリングは消えることになる。このように多少の工夫をすることにより、水平方向と垂直方向の

カップリングをなく、ソレノイド磁石を使ってスピン操作をすることは可能となる。

3.3.3 電子ビームの進行方向に垂直なスピン操作

電子ビームの進行方向に垂直なスピン操作には基本的な考え方としては偏向電磁石磁場を用いる方法が一般的である。しかし、その方法は低エネルギー電子ビームに対するときと、高エネルギー電子ビームに対するときで多少の違いがある。これら2つの場合を順をおって説明することにする。

● 低エネルギー電子ビームの場合

低エネルギー領域で電子軌道を変化させずに電子のスピン方向のみを操作する方法として Wien-filter がある。静電磁場を通過する際に電子ビームの軌道を変化させないための条件は

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\vec{v} \times \vec{B} \\ \frac{\vec{E} \times \vec{v}}{c^2} &= -\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \vec{B}\end{aligned}\quad (3.19)$$

である。ここで磁場の方向を電子ビームの進行方向に対して垂直にとり $\vec{B} \rightarrow \vec{B}_\perp$ と置き、式 (3.15) に代入すると、

$$\varphi = \frac{e(1+G)}{\gamma^2 \beta mc} BL \quad (3.20)$$

となる。このように電子ビームの方向を変えず、スピンの方向を回転させる装置を Wien-filter と呼ぶ。この Wien-filter を使って回転可能なスピンの角度はエネルギーと共に $1/\gamma^2$ に比例して小さくなるので、この Wien-filter は実際にはあまり高いエネルギーの電子ビームに適用されることは少ない。ここで、少し定量的に適用限界について考えてみると、実際に生成できる静電場の強さは 500 kV/m 程度であるので、1 m の長さの Wien-filter でスピンの方向を 90° 回転できるエネルギーは式 (3.20) から 320 keV 程度であることがわかる。

● 高エネルギー電子ビームの場合

一方、高いエネルギーの電子ビームに対する場合はもっと単純である。電子ビームの軌道を偏向電磁石で曲げてやるだけでよい。電子ビームが偏向

電磁石磁場を通過する時、電子のスピン方向は磁場に対して垂直な平面上を回転することになる。偏向電磁石磁場は、通常電子の進行方向に対して垂直に向いており、このときスピンは磁場の方向に対して回転し、その回転角は式 (3.15) から

$$\varphi_s = \frac{eG}{\beta mc} BL \approx \frac{E[\text{MeV}]}{440.652\beta} \varphi_b \quad (3.21)$$

となる。ここで φ_s 、 φ_b はそれぞれスピンの回転角、電子の軌道の回転角を表わす。ここで、注意して欲しいのは式 3.21 から、電子ビームのエネルギーが 440 MeV を越えたときはじめてスピンの回転角度が電子軌道の偏向角度を上回る。つまり、電子ビームのエネルギーが低いときには、この方法はほとんど使用できない。

謝辞

本稿を通して、再度、加速器の勉強をする機会ができました。このような機会を頂いた神谷加速器施設長、榎本主幹および鎌田進教授に感謝いたします。また、本稿執筆に関わる時間を頂いた浦川順治助教授、早野仁司助教授をはじめとする KEK-ATF 全スタッフ、本稿を書くにあたり様々な助言を頂いた大西幸喜氏、黒田茂氏に、この場を借りて感謝を申し上げます。

参考文献

- [1] 鎌田進, “ビーム物理学入門”, OHO '97.
- [2] F. Hinode *et al.*, “ATF Design and Study Report”, *KEK Internal* 95-4(1995).
- [3] P. Raimondi, *Proc. of EPAC2000* 492.
- [4] “KEKB Accelerator Papers”, *KEK Preprint* 2001-157(2001).
- [5] “JLC Design Study”, *KEK Report* 97-1(1997).
- [6] J. D. Jackson, “Classical Electrodynamics”.

Appendices

A Combined Function 型偏向電磁石

偏向電磁石磁場と四極電磁石磁場が共存する磁場を生成する電磁石を Combined Function 型偏向電磁石と呼ぶ。しかし、実際には完全に偏向電磁石磁場と四極電磁石磁場だけの電磁石はつくることはできない。偏向電磁石磁場と四極電磁石磁場だけの磁場は以下のようなベクトルポテンシャルは

$$-\frac{q}{p_0}A_s = \frac{h^2}{2} + \frac{k_1}{2}(x^2 - y^2), \quad h = 1 + \frac{x}{\rho_x} \quad (\text{A.1})$$

である。ここでは簡単の為、水平方向のみに偏向磁場があるとした。さらに式 (1.13)-(1.15) で示したように Frenet-Serret 座標系における磁場とベクトルポテンシャルとの関係から磁場は

$$B_x = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial A_s}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial s} \right) = \frac{p_0}{q} \frac{k_1 y}{h} \quad (\text{A.2})$$

$$B_y = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial A_x}{\partial s} - \frac{\partial A_s}{\partial x} \right) = \frac{p_0}{q} \left(\frac{k_1 y}{h} + \frac{1}{\rho_x} \right) \quad (\text{A.3})$$

$$B_s = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.4})$$

となる。しかし、このような磁場は Mawrell 方程式 $\text{rot} \vec{B} = 0$ を満たしていない。即ち、

$$(\text{rot} \vec{B})_s = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = -\frac{p_0}{q} \frac{k_1 x}{\rho_x h^2} \quad (\text{A.5})$$

となり、Maxwell 方程式を満たさなくなってしまう。そこで KEK-ATF では以下のようなボールの断面を持つ偏向電磁石を用いている。

$$\frac{1}{B_{y,0}} \left[k_1 \rho_x^2 \ln \left(1 + \frac{x}{\rho_x} \right) + 1 \right] y = y_0 \quad (\text{A.6})$$

$$B_{y,0} = \frac{p_0}{q} \frac{1}{\rho_x}, \quad \frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{p_0}{q} k_1$$

このようなボール断面を持つ電磁石の形成するベクトルポテンシャルは

$$-\frac{q}{p_0}A_{s,C.B.} = -\frac{k_1}{2}y^2 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{\rho_x} \right)^2 \left[1 + k_1 \rho_x^2 \left\{ \ln \left(1 + \frac{x}{\rho_x} \right) - \frac{1}{2} \right\} \right]$$

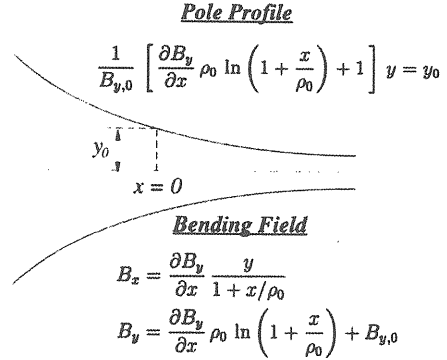


図 A.1: KEK-ATF で使われている Combined Function 型偏向電磁石のポール形状。ポール形状は従来の双曲線型ではなく図中の式のような複雑な形になっている。

$$= -\frac{k_1 \rho_x^2}{4} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{\rho_x} \right)^2 + \frac{k_1}{2} (x^2 - y^2) + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{k_1 \rho_x^2 (-1)^{n-1}}{n(n-1)(n-2)} \left(\frac{x}{\rho_x} \right)^n \quad (\text{A.7})$$

であり多少の高次の項が存在するが式 (1.20) に近いベクトルポテンシャルとなっていることが分かる。また高次の項も次数が高くなれば高くなるほど小さくなるので、このように設計された偏向電磁石はとても良い近似で理想的な Combined Function 型の偏向電磁石に近い特性を示すことが分かる。

B 対数的 Lie 変換を使った運動方程式

一般的な電磁場中の粒子の運動を考える上で、ここではハミルトニアンを使った対数的 Lie 変換を用いる運動の伝搬の記述手法を紹介する。まず始めに位置 s_1 に於ける独立変数 (x, p_x, y, p_y) からなる値 f が距離 L だけ進んだ位置 $s_2 = s_1 + L$ では

$$f(x, p_x, y, p_y; s_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L^n}{n!} \frac{d^n}{ds^n} f(x, p_x, y, p_y; s_1) \quad (\text{B.1})$$

と変化する。このとき s 軸に対する f の微係数は、ハミルトニアンを使って、

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} f(x, p_x, y, p_y) &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial p_x} \frac{dp_x}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial p_y} \frac{dp_y}{ds} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial p_x} - \frac{\partial f}{\partial p_x} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial p_y} - \frac{\partial f}{\partial p_y} \frac{\partial H}{\partial y} \\ &= [-H, f]_x + [-H, f]_y \equiv [-H, f] \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

と表わせる。ここで $[,]$ はポアソンの括弧式を表わす。更に第 n 次の微係数は、

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{ds^n} f(x, p_x, y, p_y) &= [-H, [-H, [-H, [-H, [-H, \dots f]]]] \\ &\equiv: -H :^n f(x, p_x, y, p_y) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

と表わすことができるので、式 (B.1) は、

$$\begin{aligned} f(x, p_x, y, p_y; s_2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(L : -H :)^n}{n!} f(x, p_x, y, p_y; s_1) \\ &= \exp [L : -H :] f(x, p_x, y, p_y; s_1) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

と書き改めることができる。このようにビームライン上の全ての位置でのハミルトニアンとある位置での粒子の初期条件がわかれば、一般にはビームライン上の全ての位置でのビームの運動の様子を追うことができる。この手法は非線形磁場中での粒子の運動のトラッキングなどの非線形運動の理解に有用である。

C 薄レンズ近似

四極電磁石の特性を説明する際にしばしば薄レンズ近似という考え方が紹介される。この考え方はビームラインを設計する際に第一次の近似で考える際に有用な考え方なので、ここで紹介しておく。四極電磁石の転送行列は $k_1 > 0$ のとき、以下のように表わせる ($k_1 < 0$ の場合は x, y を逆に考えれば良い)。

$$M_{q,x} = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{k_1} L & \sin \sqrt{k_1} L / \sqrt{k_1} \\ -\sqrt{k_1} \sin \sqrt{k_1} L & \cos \sqrt{k_1} L \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

$$M_{q,y} = \begin{pmatrix} \cosh \sqrt{k_1} L & \sinh \sqrt{k_1} L / \sqrt{k_1} \\ \sqrt{k_1} \sinh \sqrt{k_1} L & \cosh \sqrt{k_1} L \end{pmatrix} \quad (\text{C.2})$$

ここで、 $k_1 L$ を一定に保ちながら $L \rightarrow 0$ とすると仮定すると、上記の転送行列は、

$$M_{q,x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k_1 L & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.3})$$

$$M_{q,y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ +k_1 L & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.4})$$

となる。これは光学で考えると、水平方向には焦点距離 $f = 1/k_1 L$ の凸レンズがあり、垂直方向には焦点距離 $f = 1/k_1 L$ の凹レンズが置いてあると考えられる。つまり四極電磁石の役割は荷電粒子に対して光学でのレンズの役割を近似的に果たしていると言うことができる。また、実際には電磁石は有限の長さを持っているので、この転送行列の前後に、長さ $L/2$ のドリフト空間があると考えて、

$$\begin{aligned} M_{q,x} &= \begin{pmatrix} 1 & L/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k_1 L & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - k_1 L^2/2 & L - k_1 L^3/4 \\ -k_1 L & 1 - k_1 L^2/2 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & L \\ -k_1 L & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

$$\begin{aligned} M_{q,y} &= \begin{pmatrix} 1 & L/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ +k_1 L & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + k_1 L^2/2 & L + k_1 L^3/4 \\ k_1 L & 1 + k_1 L^2/2 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & L \\ +k_1 L & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

とした方がより現実的な近似である。

D シンクロトロン放射光による影響

電子ビームが偏向電磁石を通過する際にシンクロトロン放射光を放出する。この際、電子ビーム内の個々の電子はシンクロトロン放射光を放出することによりエネルギーを失うことになる。エネルギーの失われ方は個々の電子により差ができるので、偏向電磁石を通過することにより、電子ビームにエネルギー拡がりが生じることになる。更にこの時、電子ビームが通過した偏向電磁石が電子ビームを水平方向に曲げるものだとすると、水平方向 Dispersion 関数が有限なところでこのエネルギー

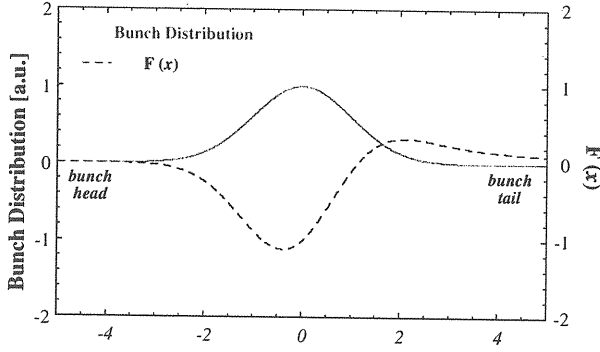


図 D.1: CSR ポテンシャル。実線がガウシアン型のビームの分布を示し、点線が $F(x)$ を示している。Wake Potential と違い、ビーム後方の影響よりビーム前方の電子の影響のほうが大きくなる。

ギー拡がりが生じるため、結果として水平方向のエミッタンス増大を引き起こすことになる。このことにより引き起こされるエミッタンス増大は、

$$\Delta\epsilon_x \cong 2.0 \times 10^{-11} E^5 [\text{GeV}] I_5 \quad (\text{D.1})$$

となる。ここで I_5 は放射積分で、

$$I_5 \equiv \oint ds \frac{\gamma_x \eta_x^2 + 2\alpha_x \eta_x \eta'_x + \beta_x \eta_x'^2}{|\rho|^3} \quad (\text{D.2})$$

となる。このエミッタンス増大はエネルギーの5乗に比例して大きくなるため、この効果は高いエネルギーの電子ビームに大きな影響を及ぼす。

一方、比較的低いエネルギーの電子ビームに影響の大きい効果もある。それは CSR (Coherent Synchrotron Radiation) である。ここでの CSR とは偏向電磁石を通過する際に、ビームの後方の電子が放出したシンクロトロン放射光がビームの前方の電子に影響を与える効果のことを言う。つまり、偏向電磁石を通過するとき電子ビームの軌道が曲がるため、直線的に進む放射光の軌道長が、電子の軌道長より短くなり後方電子の放出するシンクロトロン放射光は前方粒子へと到達できるのである。このことにより、ビーム内で放射したシンクロトロン放射光のある決まった波長成分をビーム内で自己増幅することになり、結果として Coherent な強度の強い放射光を放出することになる。このとき、CSR による

影響は Wake Potential のように

$$V_{\text{CSR}}(s) = -\frac{2Ne}{\sqrt{2\pi} \sqrt[3]{3\rho^2\sigma_z^4}} F(s/\sigma_z) \quad (\text{D.3})$$

というようなポテンシャルを与えることになる。ここで $F(x)$ は図 D.1 に示されたような形状をしている。ここで注目すべきは、Wake Potential の場合と異なり、ビーム前方の電子への影響がビーム後方の電子の影響に比べて大きくなっているところであり、これが CSR ポテンシャルの特長である。このような CSR ポテンシャルによるエネルギー変化が Achromatic な系の中で起こると、ビーム内の一部で Achromatic な条件が崩れ、結果としてエミッタンス増大を引き起こすことになる。