

ビーム計測 I

諏訪田 剛¹

高エネルギー加速器研究機構 加速器研究施設
〒305-0801 茨城県つくば市大穂 1-1

0. はじめにの前に

加速器において、ビームの性質を知ることは重要である。ビームの性質を計測することをビーム計測、ビーム診断、或いはビームモニタリングと呼び、計測装置自身をビームモニター（単にモニター）と呼んでいる。最終的な加速器の性能は、ビーム計測を行った後初めて評価されるものである。もし、ビーム性能が達成されない場合は、加速器を構成する機器の不具合を調べなおすことになるが、不具合が無い場合は、設計時には考慮されていなかった（新しい）ビーム物理を探索する手段ともなり重要な役割をもつ。ビーム計測には、ビームにできるだけ小さな擾動を与えビームの応答を計測する方法（非破壊型計測）とビームそのものを大きく破壊する方法（破壊型計測）があるが、できるだけ非破壊でビームを計測することがビームを安定に制御する観点から言って望ましい。しかしながら、ビームを破壊してしまうが、計測分解能が格段に優れているモニターもあり、その使い分けが重要である。ビーム計測を行う基本的な物理過程は電磁気的なものが多いが、扱う周波数は、DC から X 線／γ線の波長まできわめて広範囲に及ぶので、検出器（センサー）及びアナログ処理回路は、その周波数範囲に合わせて設計する必要があり、物理過程のみならず高度な回路技術とその経験が要求されることが多い。特に、最近では、計算機技術の発達とともに、インターフェースや計算機制御に関する知識も要求されるようになり、ビーム計測技術は、より複雑なものになっている。当然のことながら、筆者の能力では全ての範囲をカバーできるものではない。しかしながら、基本はあくまでもビームとモニター間の相互作用をどのような物理過程を通して検出するかにあり、要求される計測分解能に応じて物理過程を選択する必要がある。もし、要求する計測分解能が、厳しいもので既存に適当なモニターがない場合は、新しい考え方に基づくモニターを開発する必要がある。これを行うには、日頃から加速器だけではなく、その周辺分野（材料、半導体、センサー、レーザー、回路技術等）にも気を配りビームモニターへの応用可能性を常に考慮しておくことが大切である。本講義録では、筆者が現在從事している電子陽電子線型加速器（以下入射器とも呼ぶ）におけるビームモニターに限定するが、基本原理から出発し、できるだけ物理過程に言及す

ることにより物理現象がイメージできるように心がけた積りである。若干の基本的な数式の導出は、全て補遺に記載したので必要に応じて参照してほしい。

1. はじめに

まず、ビームモニターで取り扱う幾つかの用語について解説しておく。電子（陽電子）線型加速器においては、ビームは、 10^{10} 個程度の電子（陽電子）が 1 つの塊（バンチと呼ぶ）となって、幾つかのバンチ列（パルス）又は、単バンチとしてパルス的に電子銃から発生し、加速・輸送される。バンチは、ラグビーボールのような形状（実際はもっと複雑である）と考えると理解しやすい。ビームの性質を表す方法として、以下のようない定量化がある。

ビーム強度：バンチ（又はバンチ列）中に含まれる荷電粒子の総数又は総電荷量で表す。線型加速器では、一般に、電荷量[nC/bunch]、[nC/pulse]、又は、個数[個/bunch]、[個/pulse]を使用するが、電流量[μA]、[mA]を使うこともある。リングでは後者を使う。

ビーム位置：ビームパイプ（又は、加速空洞等）断面の仮想的中心（機械的中心とは限らない）に対するビーム通過位置を表し、通常[mm]や[μm]で表す。ビーム位置とは、ビームの電荷重心を意味する。

ビームエネルギー：単位は、[eV]を使う。

ビームエネルギー拡がり：ビームの中心エネルギーに対するエネルギー拡がりの割合を表す。

ビームエミッタンス：ビーム位相空間上に投影された面積を表す。縦エミッタンスと横エミッタンスがある。縦エミッタンスは、ビームエネルギーとバンチ長さの位相平面での面積（[μm]や[mm]を使う）で表す。また、ビームエネルギー（電子質量で規格化する）と加速位相の位相平面での面積（[eV·deg]を使う）で言うこともある。横エミッタンスは、通常、水平・垂直エミッタンスと呼ばれ、ビームの空間的位相平面上の面積で表す。線型加速器では、通常、規格化し $\pi \text{mm} \cdot \text{mrad}$ を使用することが多い。リング加速器では、 π や rad を省略し[nm]や[μm]を使うことが多い。

バンチ長：進行方向のビームの長さを言い、長さの単位[mm]や[μm]、或いは、光速で割った時間の単位[ps]を使用する。

ビームサイズ：進行方向に垂直なビーム断面の大きさを言う（断面上に積分することが多い）。通常、

¹ E-mail: tsuyoshi.suwada@kek.jp

水平・垂直軸に対する直径（又は半径）で表し、[mm] や [μm] を使う。

本講義録においては、電子陽電子線型加速器におけるビーム強度及びビーム位置計測について取り上げる。ビーム計測の基本原理に重点を置くが、実際のビーム計測システム全体の構成及びビームモニターを利用した応用例についてもその幾つかを紹介する。

2. ビーム位置計測

2.1 ビームパイプに誘起される壁電流

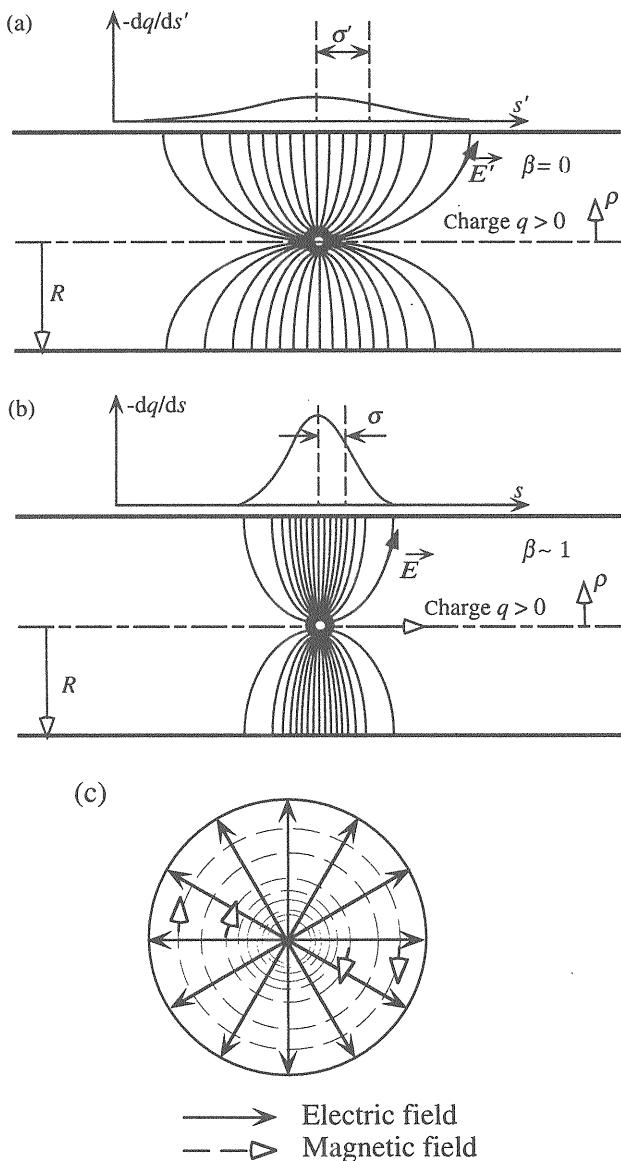


図 2.1.1：ビームパイプ内を運動する荷電粒子（正電荷）により誘起された電磁場の様子。(a) 粒子が静止している場合の電場の様子、(b) 粒子が殆ど光速で運動する場合の電場の様子、(c) 進行方向に向かって見たときの電場・磁場の様子。

ビームは、高真空中に保たれた金属パイプ（ビームパイプ又はビームダクトと呼ぶ）中を走行する（加速空洞は考えない）。簡単のために、円筒形ビームパイプ内を走行する荷電粒子（又は単に粒子）の誘起する電磁場の様子を考えてみる。図 2.1.1 にその様子を示す。境界のない真空中では、よく知られたように荷電粒子が静止している場合、電場は、粒子から等方的に出るが、図 2.1.1(a)に示すように、ビームパイプ内で運動する場合は、電場は金属の境界条件を満たすようにパイプ内壁に垂直に向かう（厳密には、電気伝導率が無限大のとき垂直となる）。有限の場合（通常の金属）は、垂直ではなく補正が必要となる）。一方、粒子の速度が増すに従って（実験室系）、相対論的効果（ローレンツ収縮）により進行方向の電場は、次第に押しつぶされ動径方向に倒れるようになる。その角度拡がり (θ) は、 $\theta \pm 1/\gamma$ 程度である。これを以下に式で表す。

$$E_\rho = \gamma E'_\rho, B_\phi = \frac{\beta \gamma E'_\rho}{c}, s = \frac{s'}{\gamma}, \rho = \rho' \quad (2.1.1a)$$

$$\beta = \frac{v}{c}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (2.1.1b)$$

ここでダッシュは、粒子の静止系座標から見た量を示し、電場・磁場は、それぞれ、動径方向 (ρ)、方位角方向 (ϕ) の大きさを表す。 c は光速を表す。実験室系の動径方向電場の大きさは、粒子の静止系に対し γ 倍になっている。これは、進行方向の座標系 (s) 自身がローレンツ変換によって収縮することにほかならない。注意したいのは、静止系では、当然のことながら電荷の流れ（電流）がないので磁場は生じない。磁場の大きさは、粒子速度が大きくなるに従い $\beta\gamma$ 倍で増えてゆく（磁場は常に電場と電流（粒子の進行方向）に垂直に閉じたループになる）。一方、ビームパイプの内壁には、逆符号電荷が誘起され、これを鏡像電荷（Image Charge）という。粒子が走行している場合は、鏡像電荷も同じ方向に走行するので、これを特に、鏡像電流（Image Current）又は、壁電流（Wall Current）と呼ぶ。壁電流の進行方向分布を見てみると、図 2.1.1 に示すように粒子速度に応じて変化する。その分布拡がりは、電場の拡がり程度で以下の式で表せる。

$$\sigma'_w = \frac{R}{\sqrt{2}}, \sigma_w = \frac{R}{\sqrt{2}\gamma} \quad (2.1.2)$$

ここで、 R はパイプ半径を表す。ちなみに、静止系での電場の拡がりは、大体パイプ半径程度であるが、1 GeV 電子の場合、パイプ半径を $R=10\text{ mm}$ とすると、パイプ上での電場の拡がりは、 $\sigma_w \approx 3.6\mu\text{m}$ となる。このように、電子加速器を考える場合は、極薄パンケーキのように、この薄い領域に動径方向に電場が、方位角方向に磁場がこれを取り巻いて集中すること

になる。このことは、同軸線路を伝送する TEM 波の電磁場の様子と同じと考えてよく（厳密には、電磁場は振動しながら伝搬するので、常にその向きは交番する）、電磁場解析を断面上の 2 次元問題に帰着させることができる（陽子ビームの場合は、すぐには光速にならないので、進行方向に電場成分を持つことになり複雑になる）。以降、特に断らないかぎり荷電粒子は光速で運動するものとし、解析は、全てパイプ断面内の 2 次元静電場問題（磁場は考えないことにする）として取り扱うことにする。

粒子が、パイプ中心から少し偏心して運動する場合のパイプ内に誘起される電場を考えてみる。図 2.1.2 に示すように、この場合は、パイプ上での境界条件（垂直）を満たすように電気力線が歪むようになる。その結果、壁電流の方位角分布は一様ではなくなり、壁電流の密度分布に違いが現れてくる。ここで、荷電粒子の偏心位置に対する壁電流の公式

（周方向の密度で表す）を出しておく。壁電流の公式の導出は、初等的な電磁気学で導出可能である（補遺 A）。

$$j(r, \phi, R, \theta) = \frac{I(r, \phi)}{2\pi R} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta - \phi)} \quad (2.1.3)$$

ここで、 $I(r, \phi)$ 、 $j(r, \phi, R, \theta)$ は、それぞれビーム電流（単位長さ当たりの線電荷でもよい）及び壁電流密度を表す。座標系は図 2.1.3 を参照のこと。ここで注意したいのは、壁電流密度は、 $1/R$ に比例することで、壁電流の検出には、パイプ径を出来るだけ小さく（又は、電極をビームに近づける）した方がよいことを示している。

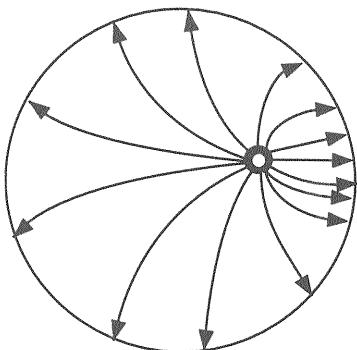


図 2.1.2：パイプ中心を偏心して運動する荷電粒子（正電荷）により誘起される電場の様子。磁場の様子は描いていないが、電場と同様に歪められる。

図 2.1.4 に、線電荷の偏心位置を変化させたときに 4 電極（大きさは考えない）に誘起される壁電流密度の変化を示した。このように、ビーム位置検出の方法として壁電流密度の変化を検出すればよいことが推定できる。次節では、実際のビーム位置モニターを取り上げ、壁電流密度の公式を応用し、ビーム位置計測の原理を考える。

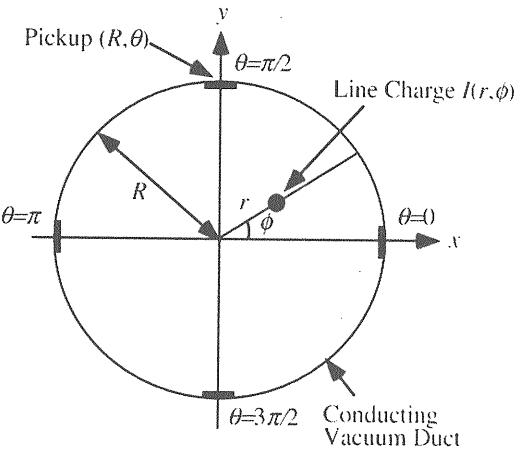


図 2.1.3：パイプ内に線電荷及び 4 電極を配置したときの座標系。

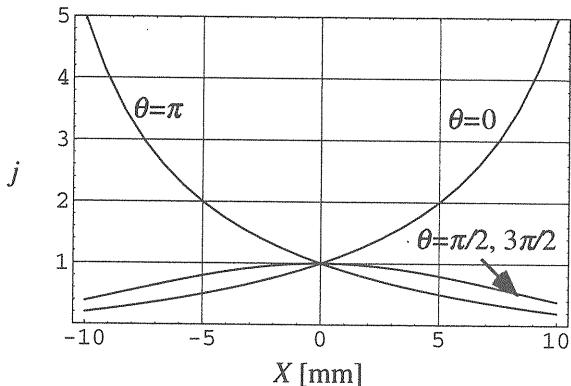


図 2.1.4：線電荷の偏心位置 ($X, Y=0, R=15\text{mm}$) を X 軸方向に変化させたときに 4 電極に誘起される壁電流密度の変化。

2.2 ビーム位置計測の原理

ビーム位置を計測するには、前節の議論よりパイプ壁に流れる壁電流の分布を計測すればよい。これを行うには、図 2.1.3 に示すようにパイプ壁の一部を電極として絶縁し、その電極に誘導される壁電流（電圧として取出す）の大きさを計測すればよい。電極数は、90 度ずつ回転させた 4 電極を配置することが多い。図 2.1.3 のようなボタン形状をした電極をボタン型電極と呼び主にリング加速器で使用される。一方、図 2.3.1 に示すように、電極をパイプ壁から少し内側に張り出したストリップライン型電極で壁電流を検出するやり方もあり、主に線型加速器で使用することが多い。前者は、電場のみで静電的に壁電流を誘導するので静電型と呼ばれ、後者は、電磁誘導的に壁電流を誘導するので電磁誘導型電極と呼ばれる。本稿では、後者のストリップライン型位置モニター（Beam Position Monitor, BPM）を取り上げその特徴を詳しく見ることにする。その前にビーム位置計測の原理を考察しておく。見通しをよくするために、壁電流密度の公式 (2.1.3) をビームの

偏心位置が充分小さいとして ($r \ll R$) 以下のように展開する (補遺 G)。

$$j(r,\phi,R,\theta) = \frac{I(r,\phi)}{2\pi R} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n \cos n(\theta - \phi) \right] \quad (2.2.1)$$

$n=1$ として 1 次の近似式を考慮し、電極番号 $i=1-4$ ($\theta=0$ を #1 として反時計回りに決める、図 2.1.3 参照) としたときに、電極 i に誘起される壁電流密度 $j_i(r,\phi,R,\theta_i)$ は、

$$j_i(r,\phi,R,\theta_i) = \frac{I(r,\phi)}{2\pi R} \left[1 + \left(\frac{2r \cos(\theta_i - \phi)}{R} \right) \right] \quad (2.2.2)$$

となる。ここで、対向する電極の壁電流密度の差 (Δ) と和 (Σ) の比 (Δ/Σ 、デルタオーバーサムと読む) を計算してみると以下のように線電荷変位に対し線形に従う測定量を得ることが出来る。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta}{\Sigma} \right)_x &= \frac{j_1(r,\phi,R,\theta_1) - j_3(r,\phi,R,\theta_3)}{j_1(r,\phi,R,\theta_1) + j_3(r,\phi,R,\theta_3)} \\ &= \frac{r \cos \phi}{R/2} = \frac{x}{R/2} \end{aligned} \quad (2.2.3a)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta}{\Sigma} \right)_y &= \frac{j_2(r,\phi,R,\theta_2) - j_4(r,\phi,R,\theta_4)}{j_2(r,\phi,R,\theta_2) + j_4(r,\phi,R,\theta_4)} \\ &= \frac{r \sin \phi}{R/2} = \frac{y}{R/2} \end{aligned} \quad (2.2.3b)$$

この公式がビーム位置計測の基本原理を与えることになる。これをグラフにすると図 2.2.1 のようになる。

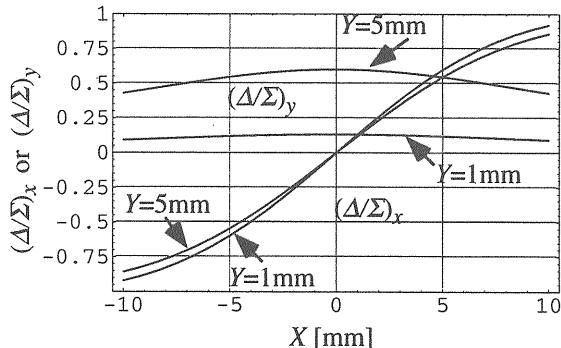


図 2.2.1：線電荷の偏心位置 ($X, Y=1, 5\text{mm}$ $R=15\text{mm}$) を変化させたときの $(\Delta/\Sigma)_x$ 及び $(\Delta/\Sigma)_y$ の変化。ただし、(2.1.3)式を用いて計算した。

ここで特徴的なことは、線電荷の偏心位置が余り大きくない中心領域では、 $(\Delta/\Sigma)_x$ はほぼ偏心位置に線形に変化すること、また、 $(\Delta/\Sigma)_y$ の変化は緩やかであることを示している。一方、線電荷の偏心位置が大きくなり電極に近づく場合は、線形からはずれが大きくなり高次項の寄与が増えてくることを示す。ここで、係数 $R/2$ は、位置感度係数（単に感度係数）と呼ばれるもので、パイプ半径が小さいほど感度が高くなることを示している。よって、ビームにできるだけ電極を近づけて検出することが感度を上げることになる。

2.3 ストリップライン電極に誘起される信号

BPM は、図 2.3.1 に示すように、電極をパイプ中心に向けて張り出すようにしたものである。こうすると電極外面とパイプ内面間は、ストリップラインと呼ばれる信号伝送路を形成することになる。すなわち、ビームが誘起する壁電流は、電極入口では、パイプ壁から電極へ流れる。この結果、ビームを電子とすると、電極外面には負電荷が、パイプ内面には正電荷が誘起され、その電荷対が、光速でストリップラインを伝搬することになる。これは、ストリップライン伝送路にパルス信号を印加した時の電磁場の伝送と同じと考えてよい。

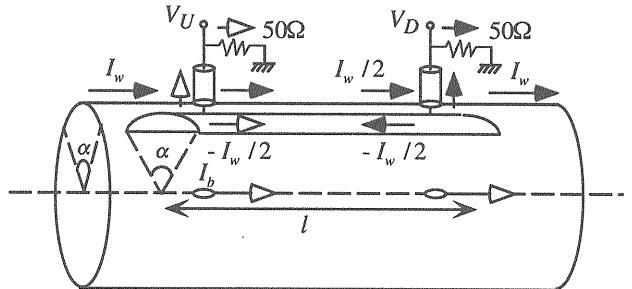


図 2.3.1：ストリップライン型 BPM におけるストリップライン電極の配置（実際には 4 電極を配置する）と電極に誘起される壁電流の流れ（黒矢印、白矢印は、逆符号電荷の壁電流を表す）。

ストリップライン電極（又は単に電極）に誘起される信号の伝搬を考えてみる。図 2.3.1 に示すように、電極の入口にビームが近づく場合、壁電流からこれを見ると並列したインピーダンスが見えることになる。すなわち、ピックアップ部の終端抵抗と電極伝送路の特性インピーダンス (Z) が並列接続されていることを意味する。特性インピーダンス Z を 50Ω にしておくと通常、終端抵抗も 50Ω で終端されるので、壁電流の流れは、2 分割されることになる。電極の開口角の大きさを α 、ビーム電流を I_b とすると、電極に流れる壁電流の大きさ ($I_w/2$) は、以下のように表すことができる。

$$\frac{1}{2}I_w = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right) \quad (2.3.1)$$

ここで、電極の上下流にピックアップを取り付けて信号を観測する場合を考える。ビームが誘起する壁電流は、電極出口では、電極からパイプ壁へ流れる。このように、下流のピックアップでは、今度は逆符号の壁電流が誘起されることになる。この（逆符号）壁電流も同様に下流ピックアップとストリップライン伝送路に2分割され、電極上を反対方向に伝搬することになる。図では、誘起される壁電流の向きも考慮している。これは、電荷の対称性を考慮すると分かり易い。ビームを電子とし、時間空間的に対称な運動を考える。この場合、陽電子が反対方向から走ってくる場合とまったく同じである。すなわち、今までの議論をその符号を反対にし、信号伝搬の時間発展を逆にして考えればよい。このように、上下流のピックアップに誘起される電圧 ($V_U(t), V_D(t)$) は、以下のように表すことが出来る。

$$V_U(t) = \frac{\phi Z}{4\pi} \left[I_b(t) - I_b(t - \frac{l}{\beta_b c} - \frac{l}{\beta_s c}) \right]$$

$$\approx \frac{\phi Z}{4\pi} \left[I_b(t) - I_b(t - \frac{2l}{c}) \right] (\beta_b \sim \beta_s \sim 1)$$
(2.3.2)

$$V_D(t) = \frac{\phi Z}{4\pi} \left[I_b(t - \frac{l}{\beta_s c}) - I_b(t - \frac{l}{\beta_b c}) \right]$$

$$\approx 0 (\beta_b \sim \beta_s \sim 1)$$
(2.3.3)

ここで、 l は電極長さ、 β_b, β_s はそれぞれ、ビームの速度、信号の伝搬速度を表す。電子ビームの速度を光速とすると電極を伝搬する信号速度とビーム速度が等しくなり、上式における2番目の近似式が成立する。このように上流ピックアップでは、ストリップライン電極特有のバイポーラパルスが観測され、下流ピックアップでは、信号が観測されないことになる。これは、ストリップライン型 BPM に特有の性質で、ビーム進行方向に対し方向性を有することを示す。実際、電子陽電子蓄積リングにこれを応用することが出来る。リング内では、電子と陽電子が反対方向に周回するが、例えば、上流ピックアップで電子の信号を、下流ピックアップで陽電子の信号を互いに相手のビームの影響を受けることなく検出することができる。線型加速器では、一般に同一方向にビームが進行するので、下流端からは信号を検出する必要はなく、通常、電極はパイプ電位にショートしている。この場合でも、観測される信号の様子は変わらない。図 2.3.2 に、進行方向にガウス分布した拡がりを持つビームが通過したときの上流ピ

ックアップで検出される信号の変化を示す。図からわかるように、ビーム幅が大きい程折り返し信号との重複具合が大きくなるので、時間領域での信号強度は小さくなることがわかる。これは、信号検出を時間領域で行うときは、ビーム幅を考慮して、電極長は S/N 比が劣化しないように設計する必要があることを示す。入射器電子ビームは、放射光リング入射には、1ns 幅 (0.2nC/pulse) のパルスビームを、KEKB リング入射には、10ps 幅 (1nC/bunch) の単バンチビームを入射しているが、信号の大きさは、ピーク電圧で前者は、100mV 程度であるが、後者は、何と数 kV の信号が発生することになる（実際には、35m 長の同軸ケーブルを通して計測するので 10ps 幅の信号は、ケーブルの高周波損失により計測器入口では、数 V まで減衰してしまう）。図 2.3.3（計算）及び図 2.3.4（観測）に、単バンチ電子ビームによる BPM 出力波形を示しておく。

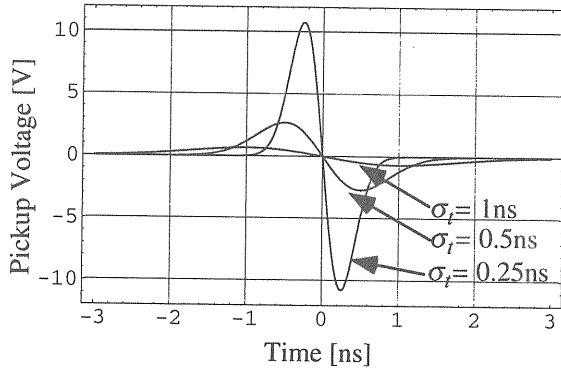


図 2.3.2：ストリップライン上流電極に誘起されるガウシアンビームによる信号（電荷量は 1nC/bunch に規格化）。ここでは、電極の開口角を 60 度、ストリップライン長さを 10cm、 $Z=50\Omega$ として計算した。

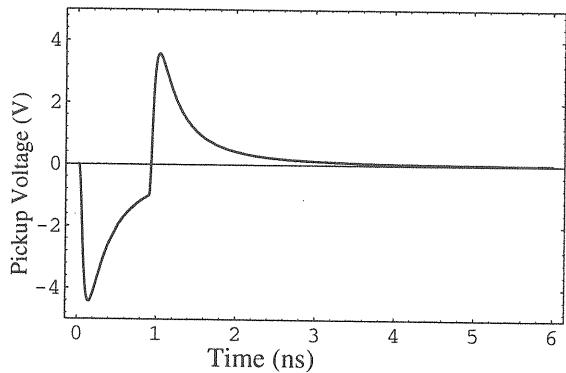


図 2.3.3：単バンチ電子ビーム（バンチ長 10ps、電荷量 1nC/bunch）によるピックアップ信号をシミュレートした結果を示す。計算では、35m 同軸ケーブル (RG-223/u 相当) による周波数減衰特性を考慮しているが、計測器の周波数帯域は考慮していない。

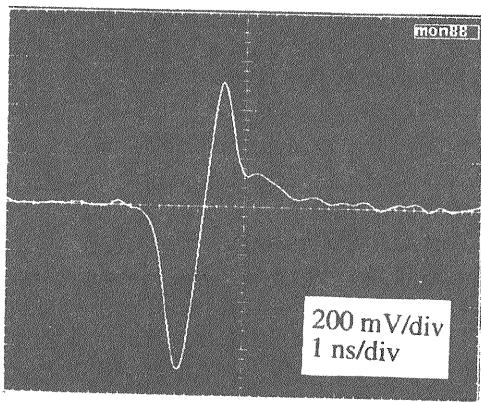


図 2.3.4：単バンチ電子ビーム（バンチ長 10ps、電荷量 1nC/bunch）によるピックアップ信号の観測。35m 同軸ケーブル（RG-223/u 相当）を通った後の信号波形で 16dB の同軸減衰器を挿入している。

3. ピーム位置計測の校正

3.1 位置校正システム

図 3.1.1 に入射器で使用しているストリップライン型 BPM の断面図を示し、Table 3.1.1 にそのパラメータを示す。

Table 3.1.1 入射器 BPM の設計パラメータ

Parameters	90-degree BPM	45-degree BPM
R_1 [mm]	13.55	16.0
R_2 [mm]	18.5	20.0
α [degree]	60	34
t [mm]	1.5	1.5
L [mm]	132.5	132.5

この節では、BPM 信号からビーム位置に変換するための位置校正の方法とそのシステムを紹介する。BPM は、ビームラインに据え付ける前に、ビーム位置校正をテストベンチで正しく行っておく必要がある。これは、BPM 製作時の電極位置のずれや変形等の誤差に起因することによるもので、1台ごとにその誤差が違うと予想されるからである。図 3.1.2 に、実際に使用している BPM 校正用ベンチの写真を示す。校正ベンチは、精密架台中央に V ブロック付きの XY ステージを設置し、BPM は、V ブロックにしっかりと固定される。BPM パイプに金属ワイヤー ($\phi 500\mu\text{m}$ 、補遺 B を参照) を通し、ワイヤーにパルス電圧を印加することによりビームを模擬する。ワイヤーは、BPM 両端にベローズを通して広帯域トランスフォーマーの中心導体に接続される。

これは、テストパルサーからのパルス信号（同軸 50Ω ）を同軸ケーブルから同軸管構造へと変換させるための広帯域インピーダンス変換器（同軸構造を階段状に徐々に変化させている）である。これを用いないで直接同軸ケーブルから同軸管へ接続するとインピーダンス不整合によりパルスが反射してしまうので注意を要する。もう片方のトランスフォーマーは、 50Ω の同軸終端器でパルス信号を終端する。XY ステージをパルスモータで動作させることにより、中心ワイヤーに対して BPM を 2 次元（水平・垂直）で移動させることができる。各ワイヤー位置で BPM の 4 電極出力をオシロスコープで同時に計測する（パルス波高を計測）。このような BPM の位置校正をマッピングと呼んでいる。

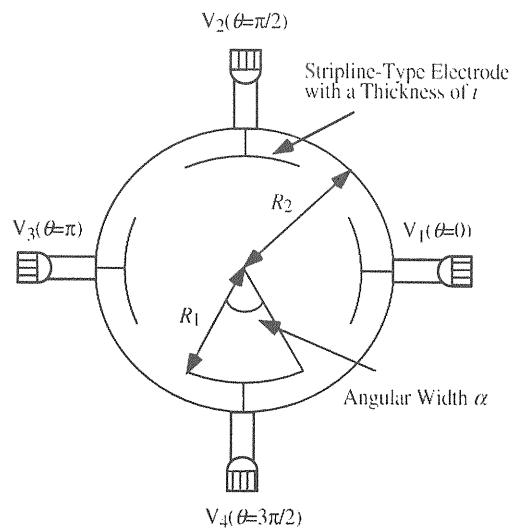


図 3.1.1：ストリップライン型 BPM の断面図。

検出位置 (x, y) は、マッピングデータとマッピング関数を用いてその校正係数が決められる。

$$x = \sum_{i,j=0}^3 a_{ij} (\Delta_x / \Sigma_x)^i (\Delta_y / \Sigma_y)^j \quad (3.1.1)$$

$$y = \sum_{i,j=0}^3 b_{ij} (\Delta_x / \Sigma_x)^i (\Delta_y / \Sigma_y)^j \quad (3.1.2)$$

$$Q = G \sum_{k=1}^4 g_k V_k \quad (3.1.3)$$

$$\Delta_x = g_1 V_1 - g_3 V_3, \Sigma_x = g_1 V_1 + g_3 V_3 \quad (3.1.4)$$

$$\Delta_y = g_2 V_2 - g_4 V_4, \Sigma_y = g_2 V_2 + g_4 V_4 \quad (3.1.5)$$

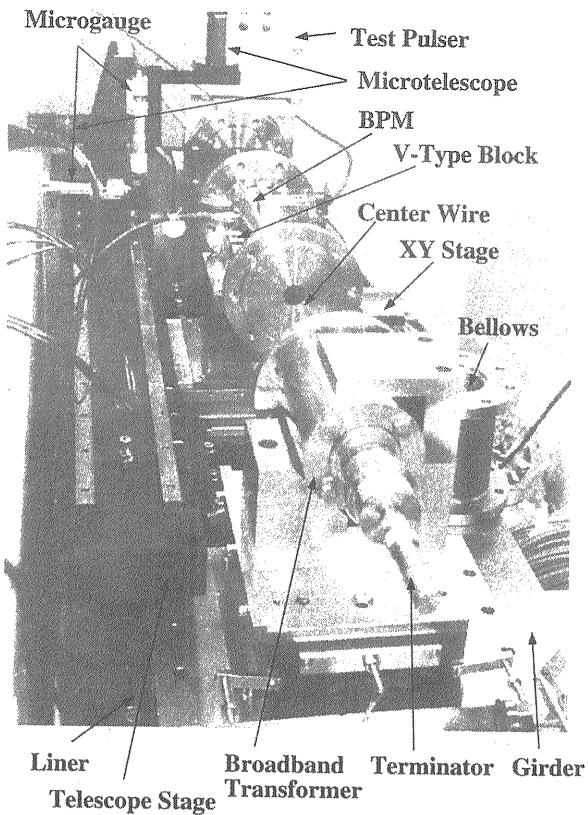


図 3.1.2 : BPM 位置校正用テストベンチ。

ここで、 $V_1 - V_4$ は、BPM 出力を、 $g_1 - g_4$ は、4 電極に対するゲイン補正（オシロスコープのチャンネル間のゲイン補正と同軸ケーブルによる減衰補正）を表す。校正係数は、3 次の多項式を用いてマッピングデータを最小自乗法でフィットすることにより決められる。 Q は、ビーム電荷量であるが、その係数 G はベンチテストではなく実際のビームを用いて決めるべき係数である（壁電流モニターを用いて校正される）。マッピング条件は、(1)出るだけ広い BPM 断面をカバーする、(2)駆動ステップを小さくしマッピング点数を多くする、(3)さらに高次項を入れて校正曲線を作る、といった考え方が望ましい。しかしながら、この条件は要求される位置分解能及び位置精度を満たすように設定されるべきで、過剰な条件で解析する必要はない。例えば、広い断面範囲をカバーしようと領域を大きくすると、電極近くで高次項の効果が大きくなるので、さらに高次項を入れた校正曲線を用いる必要が出てくる。この結果、高次項の影響で、BPM 中心付近で幾つかの変曲点が現れ、中心付近でのフィッティング精度が劣化する、といったことが生じる。入射器で使用する BPM は、出るだけ中心付近の位置精度を向上させるために、マッピングの断面範囲を小さくし、3次の多項式にとどめた。図 3.1.3 に計測した BPM のマッピング結果（校正範囲±5mm、1mm ステップ、マッピング点数 121）を示す。図中の網目状の線は、Y(X) 点を固定し X(Y) に沿ってマッピングしたときの (Δ_x / Σ_x) ((Δ_y / Σ_y)) が一定となる軌跡を示す。この

ように、歪みの少ない格子状の結果が得られるのは、校正係数の 1 次項の寄与が大きいことを示し、この領域では、充分ビーム位置と BPM 出力の関係は線形と考えてよい。もし、線形領域にも関わらずマッピング図が大きく歪んでいるとすると校正作業にどこか誤りがあることを示し、校正結果の善し悪しを示す 1 つの目安を与えることになる。図 3.1.4 に実際に行った全台数の BPM 校正結果を示す。

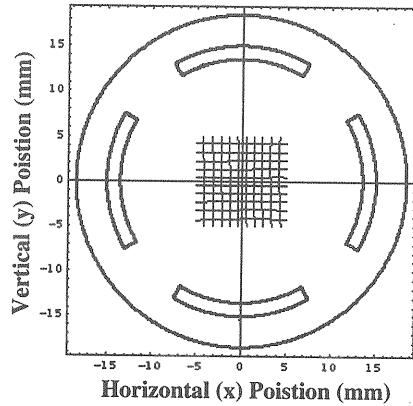


図 3.1.3 : マッピングによる BPM 校正例。

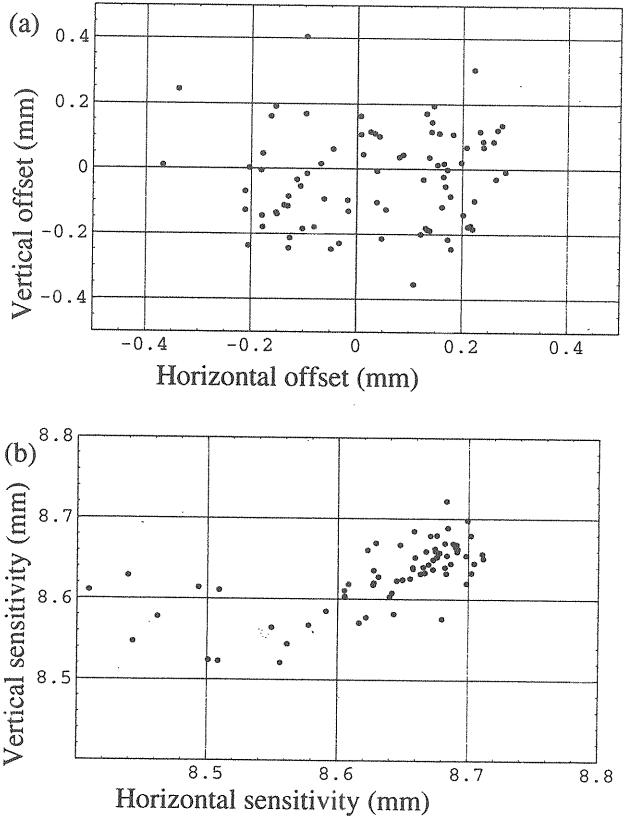


図 3.1.4 : 入射器 BPM のマッピングによる校正係数の分布図、(a) 零次の校正係数（水平垂直オフセット）の分布、(b) 1 次の校正係数（感度係数）の分布。

3.2 感度係数と位置分解能の評価

この節では、BPM の位置分解能及び感度係数を議論しておく。ビーム位置と Δ/Σ との関係は以下のようになる。

$$x = S_b \frac{V_1 - V_3}{V_1 + V_3} \quad (3.2.1)$$

$$\delta x = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial V_1}\right)^2 \delta V_1^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial V_3}\right)^2 \delta V_3^2} \quad (3.2.2)$$

$$S_b = \frac{R \Delta \phi}{2 \sin \Delta \phi} \quad (3.2.3)$$

ここでは、簡単のために BPM 中心領域に限り、X 軸付近の位置変化のみ考え、出力電位 V の統計的揺らぎを通して、位置分解能 δx が評価できるとした。 S_b は感度係数と呼ばれるもので、電極の開口角とパイプ半径の関数である（補遺 C）。また、BPM の中心付近で $V_1 \approx V_3 \approx V$ として簡単化すると、位置分解能 δx は、

$$\delta x \approx \frac{\sqrt{2} S_b \delta V}{2 V} \quad (3.2.4)$$

となる。Table 3.1.1 のパラメータ（90 度 BPM の場合）を用いてこれを計算すると $S_b \approx 8.4$ となり位置分解能の要求条件を $\delta x < 0.1 \text{ mm}$ とすると、電圧測定精度は、 $\delta V/V < 1.7\%$ が要求される。市販の高精度デジタルオシロスコープの電圧分解能は、8 ビット（カタログ値）であるが、オシロスコープの内部雑音により実質有効ビットは、6.5~7（周波数により違う）である。この値を用いて、さらに外来ノイズを押さえることで~1%程度が達成できるなら、0.1mm の位置分解能が得られることになる。感度係数の導出は、補遺 C に示すように(3.2.3)式で与えられる。感度係数は、パイプ半径と電極開口角の関数となっているが、これは、ビームサイズに対しパイプ内径及び電極半径が、充分大きいとした近似を用いた結果である。実際のストリップライン電極では、その半径として、パイプ径 R_2 、電極外径 R の 2 種類が存在する。もし、平均的な半径 ($R = (R_1 + R_2)/2$) を用いるなら（上記の計算は平均半径を用いて算出した）、実験値（図 3.1.4）から求められた感度係数 $S_b^{exp} \sim 8.65$ によく一致することを示す。これは、電極付近で電場が歪められること、また、これまで、無視してきた磁場がストリップラインのループを横切る効果により有効的なパイプ半径は平均半径程度に小さくなることを示すものである。厳密に感度係数を導出しようとすると、電極の幾何学的形状を考慮した 2 次元電磁場解析が要求されるので計算が厄介である。

4. ピーム位置モニターシステム

4.1 ハードウェアの構成

ここでは、入射器 BPM を用いた位置測定システムについて説明する。入射器では、90 台の BPM をビームラインに設置しており、全信号は、クライストロンギャラリーにほぼ等間隔に配置した 19 台のモニターステーション（MS）に分散して送られる。図 4.1.1 に入射器ビームラインに設置された典型的な BPM を示す。

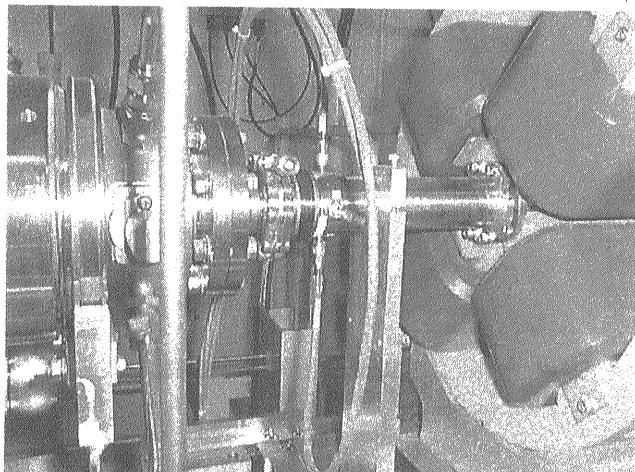


図 4.1.1：入射器ビームラインに設置された典型的なビーム位置モニター。BPM は、四重極電磁石の磁極端面に固定される。4 電極の信号は、35m の同軸ケーブルを通じて独立にモニターステーションに送られる。

平均して約 5 台分（20 信号）の BPM 信号が 1 台の MS に収集されることになる。4 電極の信号は、それぞれ 35m 同軸ケーブルを通してモニターステーション（図 4.1.2）に送られる。MS では、X, Y のそれぞれの 2 信号が信号合成器（RF コンバイナー）に入り、片方の信号は遅延ケーブルを通して遅延され、X, Y 信号は、それぞれ 1 本の同軸ケーブルに合成される。この合成信号が、パルス列としてデジタルオシロスコープ（TDS680B, 5GS/s, 帯域 1GHz, Sony Tektronics 社製）に送られ、デジタル波形処理される。処理されたデータは、GPIB インターフェースを通してフロントエンド計算機（VME/OS-9 (MC68060, 50MHz)）に送られ、各 BPM に対応したパルスの波高値を読み出し、校正係数を用いてビーム位置及び電荷量に変換された後、これらの算出量が BPM 番号と共に共有メモリーに格納される。GPIB によるデータ取得のためのコマンド発行及びデータ転送速度の能力によりオシロスコープの受け可能なビームトリガー速度は 1Hz 程度である。よって、50Hz 運転している全ての BPM データをトリガー毎に取得することは、このシステムでは不可能である。現在の所、全ての MS にわたって同期された BPM データを 1 Hz の速さで取得している。VME 計算機は、上位計算機である複数の UNIX 計算機に

データを送信する。VME-UNIX 計算機間は、光ファイバー／スイッチングハブを通して入射器ネットワークに接続されている（図 4.1.3）。このように、ネットワークにつながった X 端末や PC から UNIX 計算機にアクセスすることにより全ての同期した BPM データを取得することが可能になっている。

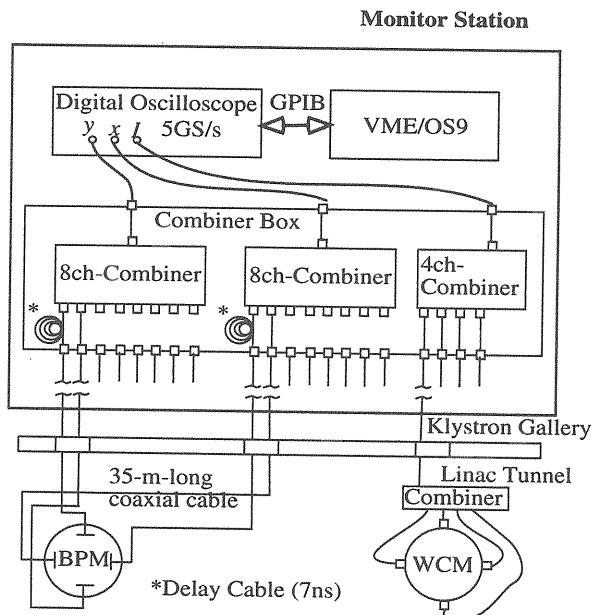


図 4.1.2：BPM 信号収集用モニターステーション。
壁電流モニター信号も同時に収集されている。

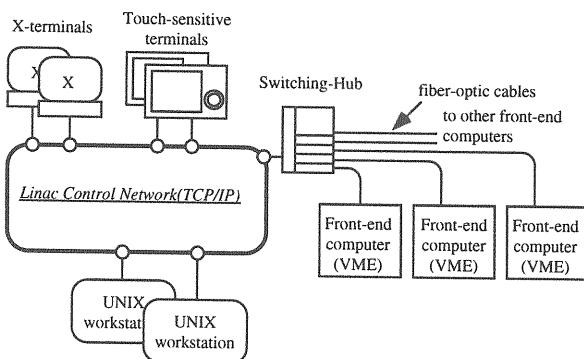


図 4.1.3：入射器ネットワークシステムと VME 計算機とのネットワーク接続図。

4.2 ソフトウェアの構成

VME 計算機上では、主に、2つの DAQ プロセスが走っている。1つは、オシロスコープから来るパルス列のデータを読み込み、各 BPM の位置と電荷量に変換し、共有メモリーに格納するプロセス、もう1つは、共有メモリーからデータを読み出し UNIX 計算機に送信するプロセスである。データ送信は、300ms ごとに共有メモリーを監視し、データの更新が行われた場合にのみ行われる。UNIX 計算機は、各 VME からの送信データを受信し、その時刻をチェックすることにより同期性を判断し、共有メモリ

ー上に全ての BPM の番号、位置、電荷量のデータを格納する。UNIX 計算機上のサーバープロセスは、上位のアプリケーション（X 端末や PC）の要求に従い BPM データを送信する。図 4.1.4 にリアルタイム表示アプリケーションによるビーム位置（水平、垂直）、電荷量の表示例を示す。入射器では、このような全 BPM データのリアルタイム表示を用いてビーム調整が行われる。

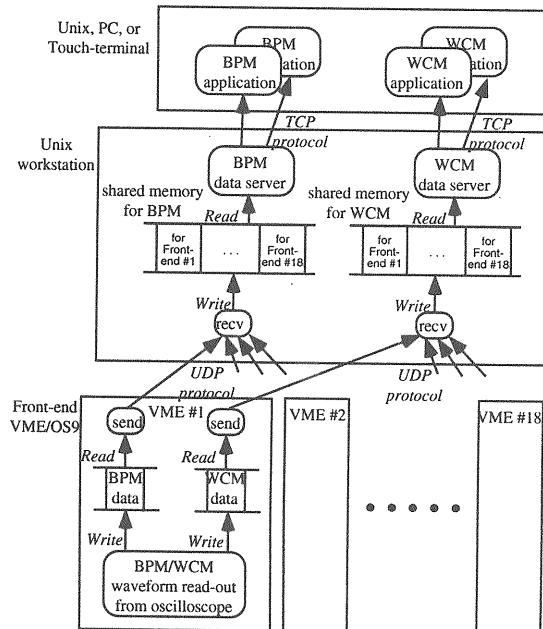


図 4.1.3：各計算機上のソフトウェアの階層構造とデータの流れ。

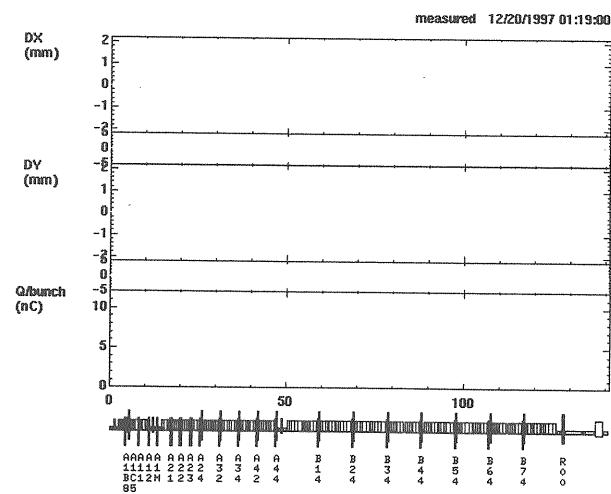


図 4.1.4:SAD/tk を用いた多数の BPM による水平・垂直位置及び電荷量の表示例。

5. ピーム位置モニターを利用した応用

5.1 BPM 位置分解能測定

BPM の位置分解能を実験的に検証しておくことは、BPM の性能を評価するうえで重要である。ここでは、3 BPM 法と呼ばれる電子ビームを用いた位置分解能の測定方法を紹介する。図 5.1.1 に 3 BPM を用いた BPM 位置分解能の測定系を示す。

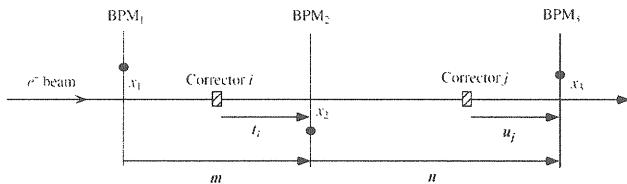


図 5.1.1: 3 BPM を用いた BPM 位置分解能の測定系。

ビームライン上に任意の連続した 3 台の BPM (1,2,3) を考え、補正電磁石 (i, j) でわずかにビームを水平（又は垂直）方向にキックする場合を考えてみる（キック角の組合せ及びキック角の大きさはビームロスが生じない限り任意でよい）。図より 1 番目の BPM によるビーム位置は変化しないが、2, 3 番目のビーム位置は、そのキック角の大きさに応じて変化し、それぞれのビーム位置の関係は、以下のような線形な関係式で表すことができる（補遺 D）。ただし、ビーム電荷量はウエーク場の影響が無視できるぐらい小さく、また、ビーム輸送の転送行列の高次項は考えないものとする。

$$x_3 = Ax_1 + Bx_2 + C \quad (5.1.1)$$

係数 A, B, C は、ビーム輸送系で決まる転送行列を用いて導出できる。

$$A = -\frac{n_{12}}{m_{12}}(m_{11}m_{22} - m_{21}m_{12}) \quad (5.1.2a)$$

$$B = \frac{1}{m_{12}}(m_{12}n_{11} + m_{22}n_{12}) \quad (5.1.2b)$$

$$C = -\frac{m_{22}n_{12}}{m_{12}}\sum_i(t_i)_{12}\theta_i + n_{12}\sum_i(t_i)_{22}\theta_i + \sum_j(u_j)_{12}\theta_j - \frac{n_{12}}{m_{12}}(m_{11}m_{22} - m_{21}m_{12})\delta_1 + \frac{1}{m_{12}}(m_{12}n_{11} + m_{22}n_{12})\delta_2 - \delta_3 \quad (5.1.2c)$$

ここで、転送行列 m, n は、それぞれ BPM_1 から BPM_2 への転送行列を、 BPM_2 から BPM_3 への転送行列を示す。転送行列 t_i, u_j は、それぞれ i 番目の補助電磁石から BPM_2 への転送行列を、 j 番目の補助電磁石から BPM_3 への転送行列を示す。 θ_i, θ_j は、それぞれ i, j 番目の補正電磁石のキック角を示す。ここでは、BPM の設置誤差を δ_i とし BPM のオフセット

も考慮している。N ケの軌道を測定したとき、位置分解能は、3 つの BPM について全て等しいと仮定すると以下の式で表すことができる。

$$\sigma_{BPM} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \frac{\sum_i^N (x_{3,i} - (Ax_{1,i} + Bx_{2,i} + C))^2}{1 + A^2 + B^2}} \quad (5.1.3)$$

図 5.1.2 に電子ビームを用いて測定した結果を示し、(a) 電荷量が 1nC/bunch の場合、(b) 電荷量が 7nC/bunch の場合をそれぞれ示す。このように、位置分解能の算出式(5.1.3)は、実験データを直線フィットしたときのその直線に対する位置測定の分布を示すものである。測定によると、ビーム電荷量が、1 及び 7nC/bunch の場合に対し、それぞれ 1σ で 0.1mm 程度の分解能を示していることがわかる。高電荷量の場合は、S/N 比が相対的に上がる所以若干位置分解能がよい。何れにしてもこの値は、第 3.2 節で評価した値 ((3.2.4)式で算出) に近い値である。ただし、高電荷量でこの測定を行うとウエーク場による影響を受けるので注意する必要がある。

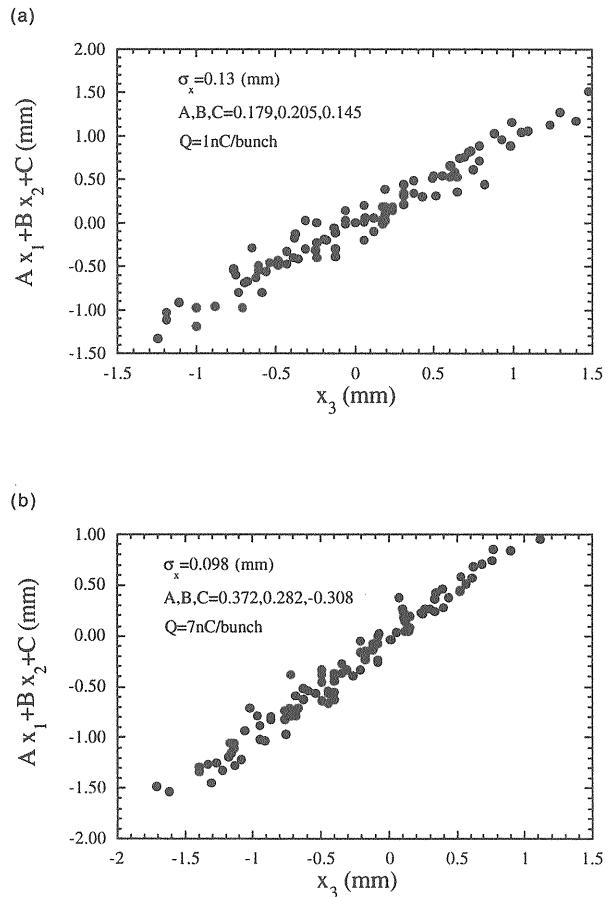


図 5.1.2 : 3 BPM 法を利用した BPM 位置分解能の測定結果。(a) 電荷量 1nC/bunch での測定結果、(b) 電荷量 7nC/bunch での測定結果。

5.2 BPM 原点位置の測定

BPM のテストベンチ校正では、BPM の電気的中心を機械的（チェンバー）中心に合わせるよう校正する。しかしながら、BPM をビームラインに設置する際には、何らかの設置誤差を伴うので、BPM の機械的中心がずれることになり、当然、電気的中心もズれて設置されることになる。実際の BPM のビームラインへの組込みは、四重極電磁石（Q 磁石）の中、又は磁極側面に固定される。その様子を図 5.2.1 に示した。

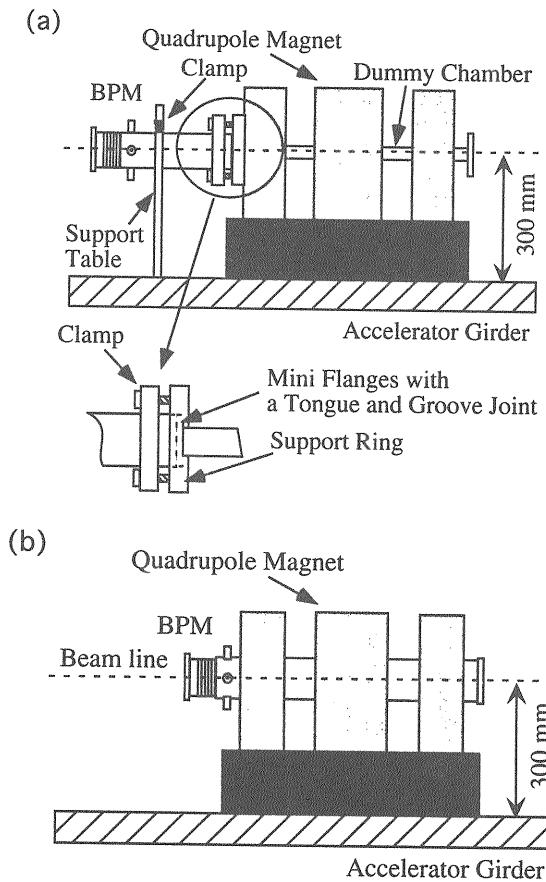


図 5.2.1 : BPM の四重極電磁石に対する設置の様子。
(a) 磁極端面に BPM を固定する場合、(b) 磁極内に BPM を挿入する場合を示す。

図(a)は、磁極の側面に固定される場合を、図(b)は、電磁石の中に挿入される場合を示した。このように、BPM は、四重極電磁石の設置位置を基準として設置されることになる。一方、ビームにとっては、四重極電磁石の磁場中心が基準軌道に対する中心（原点）となるので、磁石の磁場中心を BPM の電気的中心と一致させるべきである。この原点は、ビームを用いて求めることができ、これを Quadrupole-BPM (Quad-BPM) を用いた Beam-Based Alignment (BBA) と呼んでいる。この方法の測定系を図 5.2.2 に示す。まず、原点を測定したい (BBA を行いたい) BPM (図では BPM2) に着目し上流の補正電磁石により

任意のキックを水平（又は、垂直）方向に与えることにより幾つかの基準となる軌道を作る。1つのキックされた軌道に対し、着目する BPM2 を固定している四重極電磁石の電流値 (k 値) を変えながら、3台の BPM のビーム位置を同時に計測する。この時、もし、ある軌道に対し k 値を変化させても BPM3 のビーム位置が変化しなくなれば、この軌道は、Q 磁石の磁場中心を通っていることになる（軌道が Q 磁石の磁場中心を通らない場合は、キックを受けることになる）。この軌道に対する BPM2 の読み取り位置を BPM2 の原点とする。この測定により、Q 磁石の磁場中心と BPM2 の電気的中心を合わせることができる。

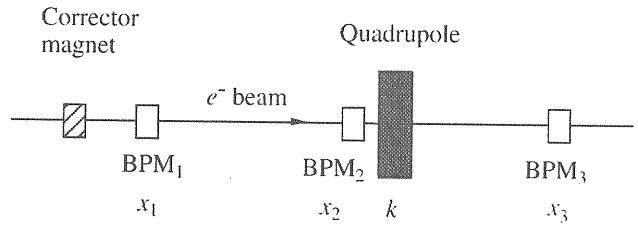


図 5.2.2 : 四重極電磁石の磁場中心に対する BPM 原点 (Beam Based Alignment) の測定系。

これを式で書き表すと以下のようになる。

$$x_3 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + (a_3 + a_4 x_2) k + a_5 \quad (5.2.1)$$

ここで、 x_i ($i=1-3$) は、BPM1-3 で計測したビーム位置を、 a_i ($i=1-5$) は、3 BPM 法 (5.1 節参照) により決まる係数を、 k は Q 磁石の強さを表す。特に、 a_3 は、BPM2 本来の位置オフセットを表す。BPM1 を組み入れて 3 BPM 法で測定するやり方は、電子ビームが上流でジッターしていても影響を与えないで信頼できる測定となる。このように各基準軌道に対し、 k 値を変化させて BPM3 の位置 (x_3) の変化を測定すると、Q 磁石の磁場中心と一致するときはその勾配が零となり、求めたいオフセット位置 (Δx_q) は、以下のような条件で導出できる。

$$\frac{\partial x_3}{\partial k} = a_3 + a_4 x_2 = 0 \quad (5.2.2)$$

$$x_2 = -\frac{a_2}{a_4} \equiv \Delta x_q \quad (5.2.3)$$

図 5.2.3 に、電子ビームを用いた BBA 測定の 1 例を示す。横軸は、BPM2 で測定したビーム位置を、縦軸は、Q 磁石の電流値に対する BPM3 の位置変化の勾配を表す。補正電磁石により変化させた基準軌道は 4 軌道で、各軌道に対し Q-Scan (8 回) を行い傾き $\partial x_3 / \partial k$ を最小自乗法で算出する。その結果に対し直線フィットした時の $\partial x_3 / \partial k = 0$ との交点が、BPM2 の原点を与えることになる。この測定を全ての BPM に対し行った結果を図 5.2.4 に示す。オフセットの

最大値は水平・垂直ともに 0.8mm 程度でやや大きいが、標準偏差を計算するとどちらも 0.3mm 程度となり、測定誤差及び設置誤差を考慮すると予想された範囲内に入っていることを示す。

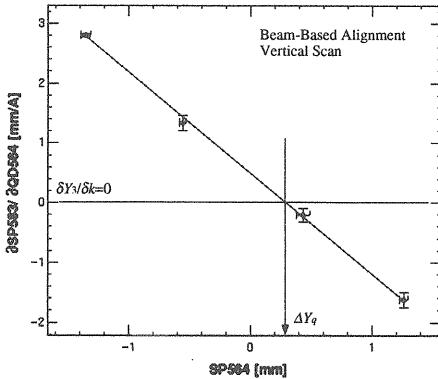


図 5.2.3 : Quad-BPM を用いた Beam Based Alignment による垂直オフセットの測定結果。

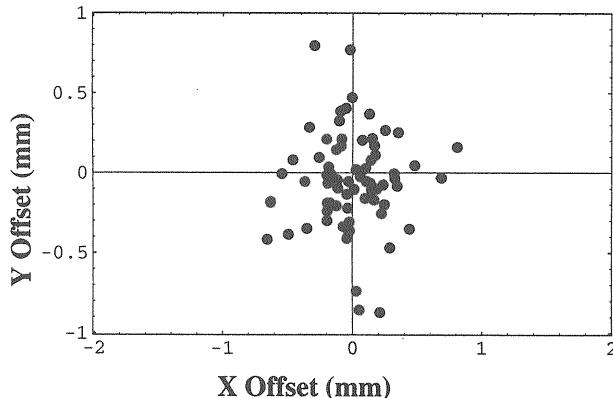


図 5.2.4 : Beam Based Alignment による BPM 原点の測定結果。

5.3 BPM を応用したビームサイズ計測

ここでは、BPM を用いたビームサイズ計測への応用について述べる。これまでには、ビーム位置計測の原理は、ビームの拡がりを無視し電荷重心がビーム位置として計測できることを議論してきた。これは、ビームの拡がりがパイプ半径に対し充分小さい場合に相当する。ビームサイズがパイプ径に対し無視できない場合は、壁電流の高次項を考慮することによりビームサイズ計測が可能になる。まずは、式(2.2.1)から出発する。線電荷 $I(r,\phi)$ をパイプ断面上に分布させることを考える。その拡がりは、ガウシアン分布とし x, y 方向の拡がり (1σ) をそれぞれ σ_x, σ_y と置く。分布した線電荷要素全ての寄与する壁電流密度を断面にわたって積分してやると、拡がりを持つビームに対する壁電流の式を得る。

$$J(R, \theta) = \frac{I_b}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \iint \frac{j(r, \phi, R, \theta)}{I(r, \phi)} \times \exp\left[\frac{-(x-x_0)^2}{2\sigma_x^2}\right] \exp\left[\frac{-(y-y_0)^2}{2\sigma_y^2}\right] dx dy, \quad (5.3.1)$$

ここで、 I_b はビーム電流を、 (x_0, y_0) はビームの電荷重心を表す。積分は、有限のパイプ断面にわたり行うが、その積分範囲を無限大に持ってゆくという近似 ($\sigma_x, \sigma_y \ll R$) を行い、解析的に積分を行う事が出来る。

$$\begin{aligned} J(R, \theta) \approx & \frac{I_b}{2\pi R} \left\{ 1 + 2 \left[\frac{x_0}{R} \cos \theta + \frac{y_0}{R} \sin \theta \right] \right. \\ & + 2 \left[\left(\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{R^2} + \frac{x_0^2 - y_0^2}{R^2} \right) \cos 2\theta + 2 \frac{x_0 y_0}{R^2} \sin 2\theta \right] \\ & + 2 \left[\frac{x_0}{R} \left(\frac{3(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}{R^2} + \frac{x_0^2 - 3y_0^2}{R^2} \right) \cos 3\theta + \frac{y_0}{R} \left(\frac{3(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}{R^2} + \frac{3x_0^2 - y_0^2}{R^2} \right) \sin 3\theta \right] \\ & \left. + \text{higher orders} \right\}, \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

このように、電極に誘起される壁電流は、電場の多重項成分を用いて展開することができ、第 1 項目から、Monopole, Dipole, Quadrupole, Sextupole moment と呼ぶ。これは、ビーム形状を多重項に展開したことではないことに注意して欲しい。もし、ビームの拡がりも多重項に展開したい場合は、(5.3.1) 式にこれを組込むことは可能である。電極配置を図 3.1.1 に示すように 90 度ごとに配置した場合 (90 度 BPM) と 45 度傾けて電極を配置した場合 (45 度 BPM、Table 3.1.1 参照) を考えて、電極に誘起される信号電圧を考えて見る。ただし、電極開口角の拡がりは、簡単のためにここでは考慮しない。結果を補遺 E に示しておく。この結果を用いて対向電極の信号電圧の和と差に関する演算を以下のように定義する。

$$(J_{dipole})_x \equiv \frac{V_1 - V_3}{V_1 + V_3} = \frac{x_0}{R/2} \quad (5.3.3)$$

$$(J_{dipole})_y \equiv \frac{V_2 - V_4}{V_2 + V_4} = \frac{y_0}{R/2} \quad (5.3.4)$$

$$J_{quad} \equiv \frac{(V_1 + V_3) - (V_2 + V_4)}{\sum_{i=1}^4 V_i} \quad (5.3.5)$$

$$J_{sext} \equiv \frac{[(V_1 + V_2) - (V_3 + V_4)]/y_0 - [(V_1 + V_4) - (V_2 + V_3)]/x_0}{\sum_{i=1}^4 V_i} \quad (5.3.6)$$

ここで、演算 J_{dipole} は、ビーム位置に関係した測定量となり、(2.2.3)式が再現される。一方、90 度 BPM に対し、演算 J_{quad} を書き下すと、

$$J_{quad} = 2 \left(\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{R^2} + \frac{x_0^2 - y_0^2}{R^2} \right) \quad (5.3.7)$$

となり、ビーム位置とサイズの両方に関係した測定量となる。一方、45 度 BPM に対し演算 J_{quad} を計算すると厳密に零となり、演算 J_{sext} で初めてビームサイズに関係する測定量となる。

$$J_{sext} = \frac{2}{R\sqrt{2}} \left(\frac{6(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}{R^2} + \frac{4(x_0^2 - y_0^2)}{R^2} \right) \quad (5.3.8)$$

このように、高次項 (Quadrupole or Sextupole) において初めてビームサイズに関係した量が出てくることがわかる。すなわち、ビームが誘起する壁電流の高次項を計測してやればビームサイズ計測は可能となる。しかしながら注意しないといけないのは、ビームサイズ σ_x, σ_y を両方同時に決めるることは出来ない。これは、 $\sigma_x^2 - \sigma_y^2 = const$ という条件のもとでは、ビームの電場 (電気力線) は変化しないからである。

ここで、電子ビームを用いた壁電流の高次項の測定結果を紹介する。詳しい実験条件はここでは述べないが、四重極電磁石に印加する電流を変化させることによりビームサイズを変化させ、演算量 Quadrupole 及び Sextupole Moment を測定したものである。図 5.3.1 に、(a) Quadrupole Moment 測定結果及び(b) Sextupole Moment 測定結果を示す。この実験から、90 度 BPM による Quadrupole Moment 測定結果は、理論式をかなり良く再現しているのがわかる。45 度 BPM による Sextupole Moment 測定結果は、3 次高次項の測定となるので、変化量は小さく平均操作によりかろうじてその効果が見えているのがわかる。

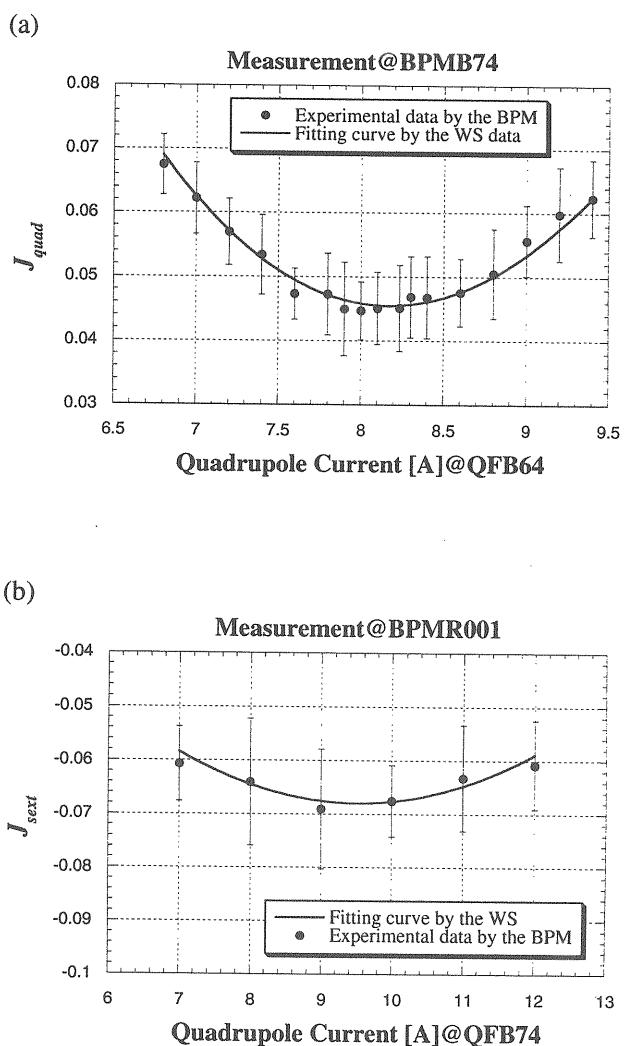


図 5.3.1：電子ビームにより誘起された壁電流の多重極モーメントの測定結果。(a) 90 度 BPM を用いた Quadrupole Moment の測定結果、(b) 45 度 BPM を用いた Sextupole Moment の測定結果。実線は、ビームサイズモニターであるワイヤースキャナーを用いて水平・垂直方向のビームサイズを直接計測し、演算量 Quadrupole Moment (5.3.7)式及び Sextupole Moment (5.3.8)式を用いて計算したものである。

6. ビーム強度計測

6.1 壁電流モニターの動作原理

本節では、ビーム強度（電流）モニターとして使われる壁電流モニター（*Wall Current Monitor*, WCM）について取り上げその基本原理について説明する。ビーム位置モニターの章で解説したように、ビームパイプ中をビームが通過すると、同時にパイプ内壁に壁電流が誘起されパイプ上を流れる。その様子を図 6.1.1 に示した。ビームパイプ外壁の回りに抵抗体を複数取り付け、抵抗体に流れる壁電流をその両端に生じる電圧差として計測すれば、ビーム電流に比例した計測が可能である。パルス化したビームが通過する場合は、そのパルス幅に対応した電圧パルスとし検出される。壁電流を抵抗体に通す必要があるので、ビームパイプは抵抗体の所でセラミックにより絶縁される。実際の WCM は、もう少し複雑で、図 6.1.2 に示すように、リング状の抵抗体及びフェライトコアをパイプ外壁に配置し、外来的電磁ノイズ（パルス電源やクライストロンパルス電源から主に発生する）を遮断するために金属カバーがこれらを取り囲んでいる。このカバーは、RF コンタクターを通してビームパイプと接触させ同一電位にしている。フェライトコアがないと壁電流は、抵抗体を通らずに金属カバーを流れてしまうので、フェライトを挿入してインダクタンス成分によりこれを防ぐようしている。フェライトコアは、高磁気透磁率（比透磁率 $\mu=4000$, <1MHz) を有する Mn-Zn 系フェライトを用いている。抵抗体は、モニター組立ての容易さ、周長に沿う抵抗値をできるだけ一様に分布させるためにセラミック抵抗体（エレマ抵抗）を用いている。抵抗体は、セラミック ($\text{Al}_2\text{O}_3+\text{SiO}_2$) に電導材（カーボン、混合量で抵抗値を変える）を混ぜたもので、1000 度以上で高温焼結させたものである。抵抗体とフェライトコアは、金属カバー内で固定され、半割り可能な構造となっているので、モニター自身のパイプからの着脱が容易である。

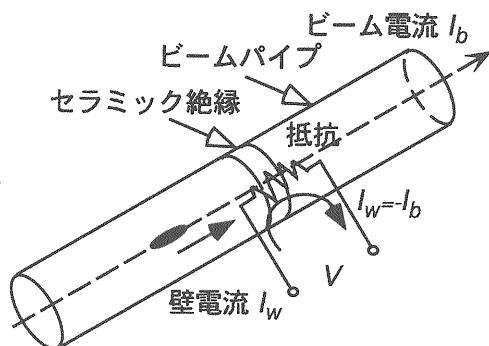


図 6.1.1 : 壁電流モニターの動作原理。

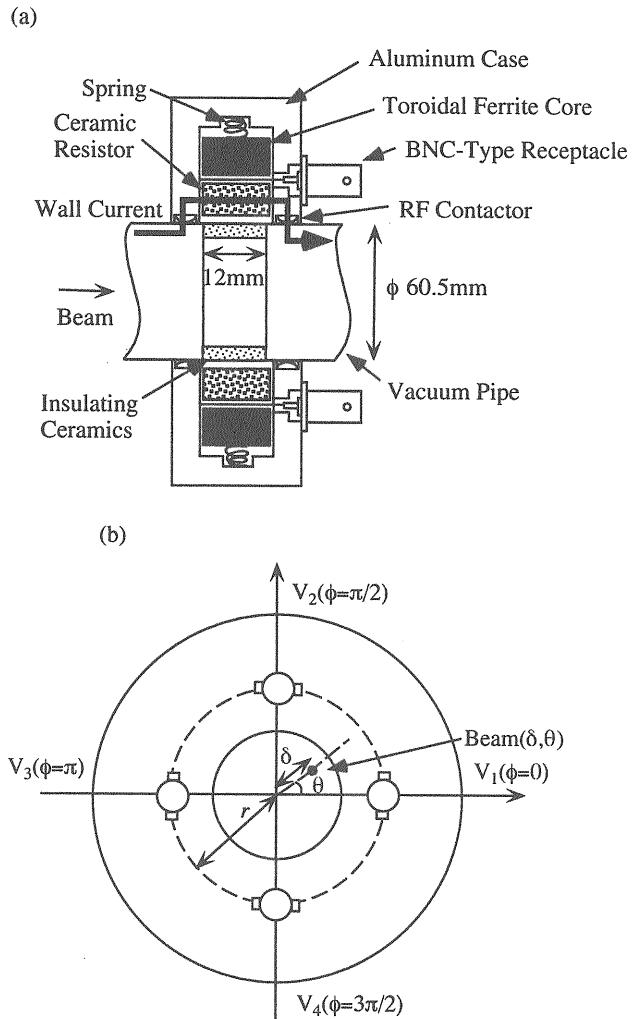
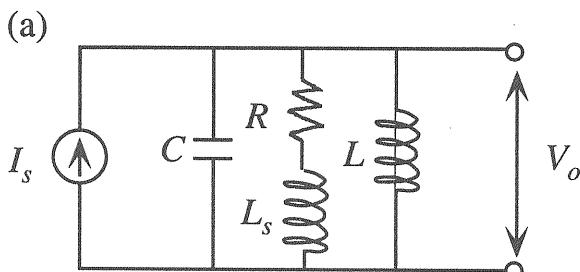


図 6.1.2 : 壁電流モニターの構造。(a) モニター断面図、(b) モニター出力端子配置図（4 電極を取り付けたのは後述するようにビーム電流のビーム位置依存性を打ち消すため、或いは積極的にビーム位置モニターとして動作させるためである）。抵抗体両端に生じる電位差は、出力端子の中心導体とカバー他端に固定された導線を通して BNC で取出すことができる。

6.2 集中定数等価回路による動作解析 (I)

WCM の動作解析は、LCR 集中定数による等価回路を用いて評価することができる。図 6.2.1 (a) にその等価回路を示す。



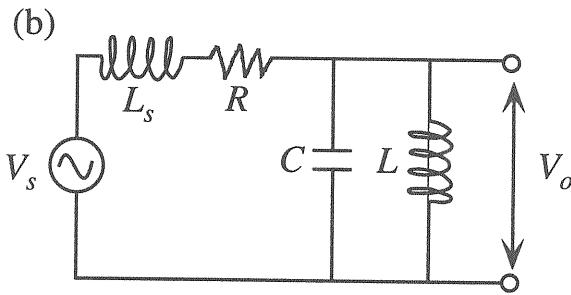


図 6.2.1 : LCR 集中定数を用いた WCM の等価回路。
(a) 電流源により駆動される場合, (b) 電圧源により駆動される場合。

WCM の等価回路は、電流源 (I_s) に並列して LCR が挿入されていると考える。ここで、電流源は壁電流を、抵抗 R 、ビームパイプのセラミック絶縁部に生じる静電容量を C 、フェライトコアによるインダクタンスを L とする。このように、それぞれが、集中した 1 つの電気的なパラメータとして取り扱うことを中心定数等価回路といふ。ここで、 L_s は、抵抗体の浮遊インダクタンスを表すが、簡単のために $L_s=0$ としておく。この等価回路を解析的に解くには、図 6.2.1 (b) に示すように、電流源を電圧源 (V_s) に変更した方が都合がよい。これには、電流源を電圧源に置き換えた後、抵抗部を直列に置き換えるといい。LC の合成インピーダンスと抵抗 R とのインピーダンス分岐比を考慮して、出力電位 (V_o) を導出すると以下のようなになる。

$$V_o = \frac{j\omega L}{R - j\omega L - \omega^2 LCR} V_s \quad (6.2.1)$$

この式は、周波数領域での入出力応答を示すものである (j は虚数、 ω は角周波数)。時間領域の応答にするには、 $j\omega \rightarrow s$ と置き換えラプラス逆変換 (\mathcal{L}^{-1}) を行えばよい。書き換えると、

$$V_o(s) = I(s)V_s(s) \quad (6.2.2)$$

$$I(s) = \frac{s/RC}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)} \quad (6.2.3)$$

となる。ここで、 $I(s)$ は、応答（伝達）関数と呼ばれる。この系にラプラス逆変換を行うと出力 V_o を時間領域で表すことができる。

$$V_o(t) = \mathcal{L}^{-1}[I(s)V_s(s)] \quad (6.2.4)$$

ここで、入力 V_s を単位ステップ関数 ($u(t)$) として、等価回路のステップ応答を調べることにする。関数 $u(t)$ のラプラス変換は、 $u(s)=1/s$ に置き換えられるので、

$$u(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = 1/s \quad (6.2.5)$$

これを用いて時間領域での応答出力 $U(t)$ は、

$$U(t) = \mathcal{L}^{-1}[I(s)/s] \quad (6.2.6)$$

となりラプラス逆変換を行って導出できる。得られる解は、式(6.2.3)の分母の根の大小により分けられる。ラプラス逆変換の公式は補遺 G に記しておく。

(1) $k > 1$

$$U(t) = \frac{k}{\sqrt{k^2 - 1}} e^{-\frac{2\pi kt}{T}} \left[e^{\frac{2\pi\sqrt{k^2 - 1}}{T}} - e^{-\frac{2\pi\sqrt{k^2 - 1}}{T}} \right] \quad (6.2.7)$$

(2) $k < 1$

$$U(t) = \frac{2k}{\sqrt{1-k^2}} e^{-\frac{2\pi kt}{T}} \sin\left(\frac{2\pi\sqrt{1-k^2}}{T}\right) \quad (6.2.8)$$

(3) $k = 1$

$$U(t) = \frac{4\pi k}{T} t e^{-\frac{2\pi kt}{T}} \quad (6.2.9)$$

$$k = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}}, T = 2\pi\sqrt{LC} \quad (6.2.10)$$

ここで、定数 k は、制動定数と呼ばれるもので、解の振動条件 ($k < 1$ の時振動解となる) を与える。これをグラフにしてみると図 6.2.2 のようになり、定数 k をパラメータとした時のステップ応答出力 $U(t)$ の変化を時間の関数 (T で規格化している) で表したものである。このように、WCM として動作させるには、 $k \geq 1$ の条件（解(1)）で使用したほうがよい（電磁ノイズを避けるためにあえて振動させ、後方の振動を検出する方法もある）。入射器の WCM の場合は、 $R \sim 1\Omega$ 、 $C \sim 35\text{pF}$ 、 $L \sim 10^{-5}\text{H}$ という定数を使っているので k を計算すると $k \sim 845$ となり、充分この条件を満足している。次に、出力応答の立上り時間 (T_{rise}) 及び立下り時間 (T_{trail}) を求めてみる。 T_{rise} の導出には、 $t \sim 0$ の回りで $U(t)$ を展開し t に関し 1 次の係数の逆数を取り T_{rise} とすると、

$$U(t) \sim \frac{4\pi k}{T} t \quad (t \sim 0), T_{rise} \sim RC \quad (6.2.11)$$

となる。一方、 T_{trail} は、 $t \gg T$ の条件で $U(t)$ を展開し減衰時間で T_{trail} を定義すると

$$U(t) \sim e^{-(1/4\pi kT)t} \quad (t \gg T), T_{trail} \sim L/R \quad (6.2.12)$$

となる。ここで、等価回路図（図 6.2.1）からわかるように、出力 V_o を大きくしたい時は、抵抗値 R を大きくすればよいが、逆にパルスの立上りを遅くするので注意する必要がある。立下り時間に関しても、 R をできるだけ小さく、インダクタンス L をできるだけ大きくし、パルス波形のサグを小さく押さえることが重要である。特に、前者は、ビームパルス幅が小さいほど速い立上りを必要とする。後者は、長いビームパルス幅の場合には出力パルスのサグとなるので、設計にあたっては、S/N 比との兼ね合いから適当な定数を選ぶべきである。入射器で使用している WCM の集中定数を使って、立上り及び立下り時間を見積もると、

$$T_{rise} \sim 350\text{ps}, T_{trail} \sim 10\mu\text{s}$$

となる。これは、ショートパルス（1ns 幅）及びセミロングパルス（50ns 幅）電子ビームに対応した定数で、S/N 比の観点から決めたものである。実際は、WCM から信号処理システムまでの同軸ケーブルによる信号伝送に高周波損失があるので、 T_{rise} としては、このような速い立上りは望めなく $T_{rise} \sim 1\text{ns}$ 程度である。また、立下り時間は、出力ピークの $1/e$ (1/2.7) 減衰値で定義されるので、この定数では、~1μs 以上の長パルスビームには大きなサグが生じるので不適当である。このように WCM で、ミクロなバンチ構造を見ることは困難である。図 6.2.3 に入射器で用いている WCM のパルス応答の測定結果を示す。図は、幾つかのフェライトコア（比透磁率が違う）の違いによる出力値の変化を示したものである。この測定により、パルス幅は、100ns 程度以下の領域で有効であることがわかる。ちなみに、図中の 12001H（比透磁率 $\mu=12000$ ）を用いたときのデータは、その他に比べて出力の減衰が速いが、これは、フェライトの高周波特性がよくないことを示すものである。これは、低周波での比透磁率は、確かに他に比べて大きいが高周波の所で比透磁率の減少が大きいことに起因する。参考として図 6.2.4 に測定に用いたフェライトコアの周波数特性を載せておく。

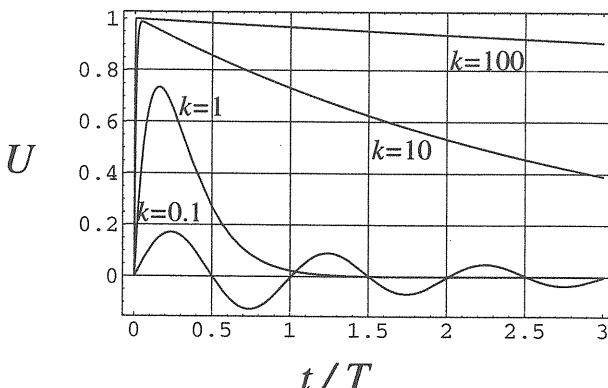


図 6.2.2 : LCR 等価回路に単位ステップ電圧を入力した時の応答。

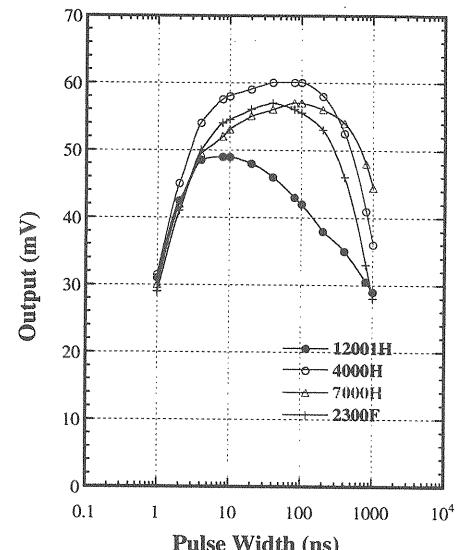


図 6.2.3 : 壁電流モニターの入力パルス幅に対する出力電圧の応答（実験）。図中のデータは、幾つかのフェライトコアの周波数特性の違いを示すものである。

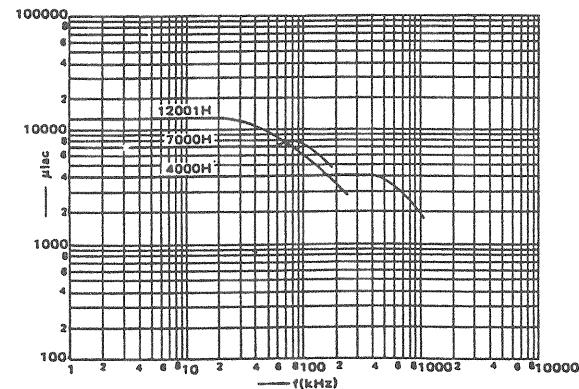


図 6.2.4 : 幾つかの比透磁率の違うフェライトコアの周波数特性（トーキン製、出典 DATA BOOK, FERRITE POT CORES 6ed., TOKIN Corp.）。

次に、WCM のパルス応答を考察しておく。パルス（インパルス）応答 ($U_{pulse}(t)$) は、ステップ応答を微分することにより得られる。

$$U_{pulse}(t) = \frac{dU_{step}(t)}{dt} \quad (6.2.13)$$

$$v_o(t) = \int_{-\infty}^t U_{pulse}(t-\tau)v_i(\tau)d\tau \quad (6.2.14)$$

ここで、 $v_i(t)$, $v_o(t)$ は、入出力のパルスを示す。ビームパルス波形をガウシアン分布とした場合に、(6.2.14)式に従い応答波形を計算した結果を図 6.2.5 に示す。このように、幾つかの制動定数を変化させて波形を模擬すると定性的には、WCM のパルス波

形を再現するが、テストベンチによる観測結果（図 6.2.6）とよく比較してみると、定量的にはモデルの不完全さが現れている。

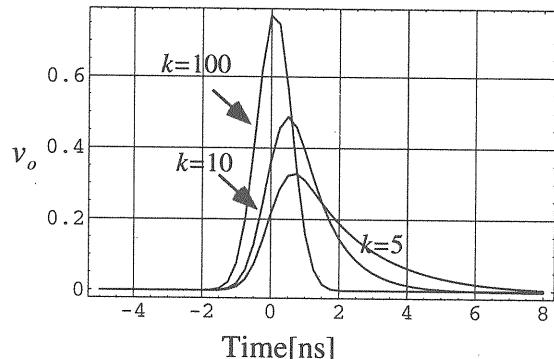


図 6.2.5 : LCR 等価回路に単位パルス（ガウシアンパルス幅 $\sigma=0.5\text{ns}$ ）を入力した時の応答を示す。

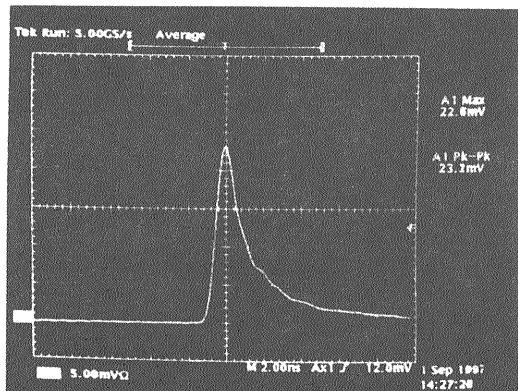


図 6.2.6 : 電流校正器を用いたテストパルス（1ns 半値全幅）による WCM 信号の観測波形（6.3 節参照）。横軸、縦軸のスケールは 2ns/div、5mV/div。

6.3 電流計測の校正

この節では、WCM の電流校正の方法について述べる。電流量（又は、電荷量）の校正是、図 6.3.1 に示した電流校正器を用いて行う。

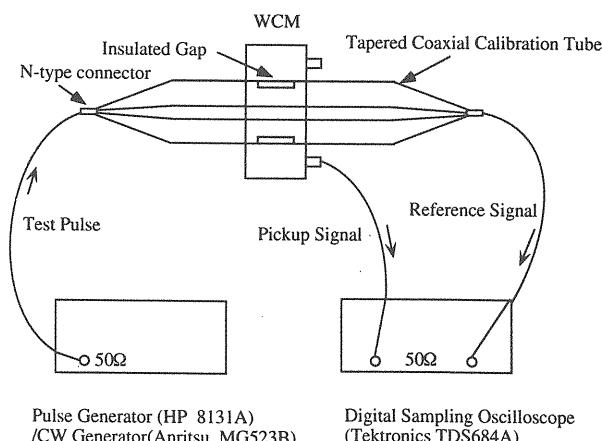


図 6.3.1 : 壁電流モニターの電流校正システム。

校正器は、パルス発生器（テストパルサー）、テープ同軸管及びオシロスコープから構成される。テープ同軸管にテストパルスを入力し、WCM 出力と入力信号を同時にオシロスコープで計測することにより入出力応答を計測する。同軸管は、テープ管と同軸管とで構成される。テープ管は、同軸ケーブル入力を同軸管（ 50Ω ）に変換するためのテープ構造を持つ同軸管で、広帯域の同軸変換器である。テストパルスは、パルス幅をビームパルス幅と同じ値に設定し同軸管に入力される。テストパルスの電荷量は、デジタルオシロスコープのパルス面積測定機能を用いて電荷量に焼き直し、これを基準の入力電荷量とする。このときの WCM の出力値を[mV]単位で計測し、[nC/mV]という単位でビーム電荷量に対する WCM の校正係数とする。この時注意したいのは、WCM の応答出力は、入力パルス幅により変化することである。すなわち、ビームのパルス幅に依存してその出力値が変化するので、パルス幅に応じて校正係数を用意する必要がある。入射器の場合は、放射光蓄積リング用入射ビームのパルス幅は、1ns で、B フラクトリーリング用入射ビームのパルス幅は、单バンチ（10ps 程度）なので、2 種類の校正係数を使用している。前者は、テストパルサーの可変範囲のパルス幅であるが、後者は、テストパルサーの可変範囲内ではない。この場合には、図 6.3.2 に示すように、WCM の応答は、パルス幅が小さい領域（<3ns）ではほぼ直線的に応答すると仮定し、その勾配から校正係数としている。しかしながら、このような極短パルスビームの場合は、正確な校正係数ではないので、ファラデーカップを用いてビーム電荷量の直接測定を行い正確な校正係数を再度決めるべきである。入射器の单バンチビームに対して、ファラデーカップによる電荷量の再校正を行ったところ、校正器で求めた校正係数に対し約 11% の補正が必要であったことを記しておく。

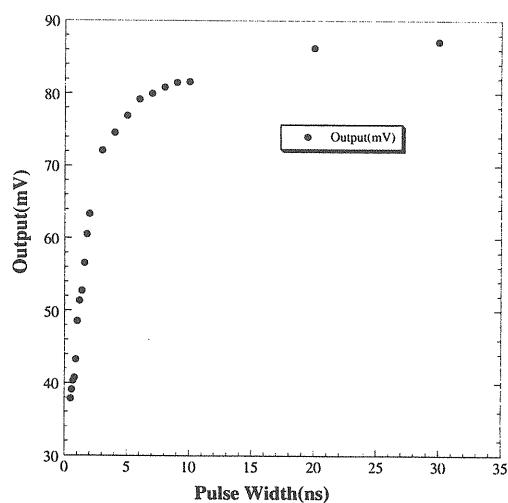


図 6.3.2: テストパルサー入力パルス幅に対する WCM 出力の応答。

6.4 集中定数等価回路による動作解析 (II)

6.2 節では、集中定数等価回路を解析することにより WCM の基本的な動作解析を行った。ここでは、さらにこの考えを応用し、周波数応答及びパルス応答を調べることにする。図 6.2.1 の等価回路で前節では無視した浮遊インダクタンス L_s を取り入れて解析を行うこととする。 L_s を考慮した時の入出力の関係式は、6.2 節と同様な計算を行い以下のように導出できる。

$$V_o(\omega) = \frac{j\omega L}{-j\omega^3 LL_s C - \omega^2 LRC + j\omega(L + L_s) + R} V_s \quad (6.4.1)$$

この関係式を同様にラプラス逆変換することによりステップ応答は、以下のようなになる。

$$V_o(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{L}{s^3 LL_s C + s^2 LRC + s(L + L_s) + R} \right] \quad (6.4.2)$$

ここで、集中定数である L_s を測定で決めておく必要がある。図 6.4.1 に示す実験装置を用いてこの定数を決めることができる。サイン波を抵抗体に入力することにより、周波数を変えながら出力応答を測定する。測定結果を図 6.4.2 に示す。ここで、抵抗体の浮遊インダクタンス L_s と抵抗 R が直列接続され、測定器側の 50Ω 終端がこれらと並列接続していると考える。このときの入出力応答は、以下の関係式を用いて表すことができる。

$$V_o = \frac{50}{50 + \sqrt{R^2 + \omega^2 L_s^2}} V_i \quad (6.4.3)$$

この関係式を用いて、 L_s をパラメータとして最小自乗法により算出しフィッティングした結果が、図中の実線である。

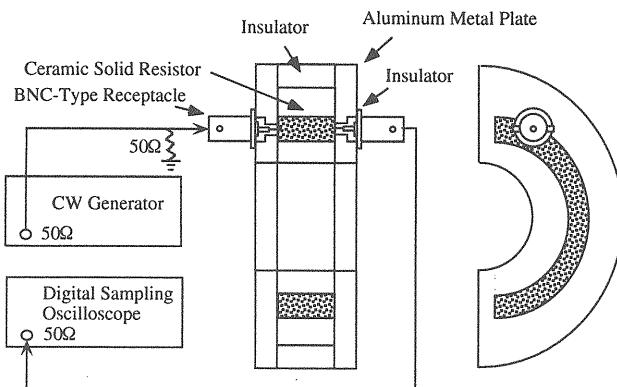


図 6.4.1 : セラミック抵抗体の浮遊インダクタンスを測定するための実験装置。実験では、サイン波発生

器とオシロスコープのグランド電位を同一にするため、また、信号の高周波伝送をよくするためにアルミホイルを抵抗体の周りを囲むようにして巻いている。

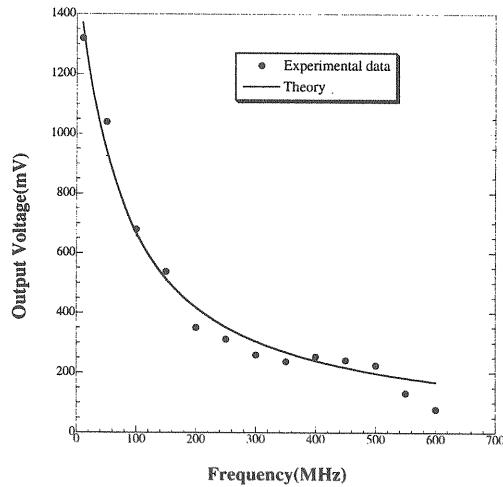


図 6.4.2 : セラミック抵抗体の浮遊インダクタンス測定結果。

この測定により求めたパラメータ ($L_s = 0.11\mu H$) を用いて、周波数応答及びパルス応答を計算することができる。図 6.4.3 は、WCM の周波数応答を測定した結果を表し、図中の実線は、(6.4.1)式を用いた計算結果である。図 6.4.4 は、パルス応答を測定した結果を表し、実線は、(6.4.2)式を数値計算により解いた結果である。ただし、計算においては、図 6.2.4 に示すようなフェライトコアによるインダクタンスの周波数特性（測定値）を考慮して厳密に計算を行っている。この図から、WCM の周波数応答及びパルス応答は、LCR 集中定数を用いた等価回路で充分記述できることがわかる。

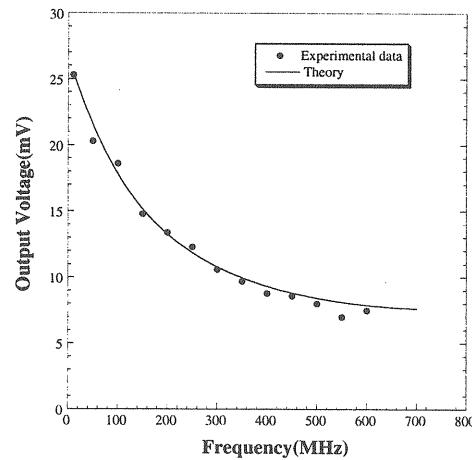


図 6.4.3 : 壁電流モニターの周波数応答。

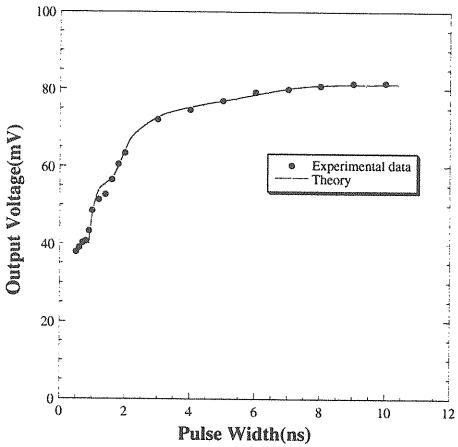


図 6.4.4：壁電流モニターのパルス応答。

6.5 分布定数等価回路による動作解析

前節では、LCR 集中定数による等価回路の特性を解析した。しかしながら、実際のビームを測定して見ると、ビーム位置に依存して WCM の応答出力が変化することがわかつていている（壁電流の周方向分布を見ている）。このことは、このような単純な集中定数による等価回路では、WCM の動作を完全には説明できないことを示す。この等価回路モデルでは、ビームパイプの周方向部分は、同電位として取り扱っているので、ビーム位置に依存する効果は当然出てこない。これは、DC ビームやパルス幅の長いビーム（低い周波数成分のみ寄与する場合）の場合は、適用可能であるが、極短パルスビームの場合は、高周波成分が大きく寄与するので、ビームパイプの周方向にわたるインピーダンス（インダクタンス成分）が支配的になる。この効果が、パイプ周方向に電位分布を生じさせ、ビーム位置依存性として現れると考えられる（逆に、周方向のインピーダンスが無限大になると壁電流分布(2.1.3)式が再現する）。

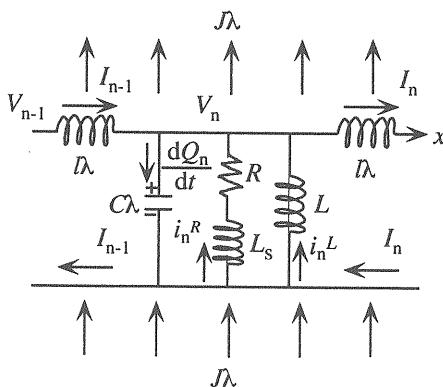


図 6.5.1：拡張された LCR 分布定数による WCM 等価回路。

そこで、集中定数等価回路モデルに対しビーム位置依存性を取り入れた形に拡張することにする。図 6.5.1 に拡張した LCR 分布定数による等価回路を示

す。図中、周方向の回路定数は分布定数（単位長さ当たりの量）として取り扱う。この図は、周方向微小領域 n 番目にある回路の構成要素を示したものである。ビームパイプ周方向に浮遊インダクタンス $J\lambda$ を導入し（ λ は周方向の単位長）、周方向に壁電流 I が流れるようにしたものである。こうすることにより周方向に周波数特性を有する電位分布を生じさせることができる。解くべき方程式は、 n 番目の構成要素の電流保存則を考えると以下のような。

$$I_{n-1} - I_n - \frac{dQ_n}{dt} + i_n^R + i_n^L - J\lambda = 0 \quad (6.5.1)$$

この方程式による解の導出は、補遺 F に回すことにして、最終的には、 n 番目の回路構成要素に誘起される電圧 V_n は、以下のように導出される。この式では、すでに壁電流の公式によるビーム位置依存性が含まれていることに注意。

$$V_n(x) = \frac{I}{2\pi r \sqrt{\omega_0^2}} \frac{j\omega(r^2 - \delta^2)}{r^2 + \delta^2 - 2r\delta \cos(\phi - \theta)} \sin[\sqrt{\omega_0^2}(\phi - \theta)] \quad (6.5.2)$$

$$\omega_0^2 = \left(\omega^2 C + \frac{j\omega \exp(-j\alpha)}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L_s^2}} + \frac{1}{L} \right) l \quad (6.5.3)$$

$$\alpha = \tan^{-1}(L_s \omega / R) \quad (6.5.4)$$

ここで、 x は方位角方向の線要素を表す。任意の点に生じる誘導電位は、微小領域に誘起する電位を周方向に積分してやるとよい。

$$V(x) = \int_0^{2\pi} V_n(x) d\psi \quad (6.5.5a)$$

$$= \frac{I}{2\pi r \sqrt{\omega_0^2}} \int_0^{2\pi} \frac{j\omega l(r^2 - \delta^2) \sin[\sqrt{\omega_0^2}(\phi - \psi - \theta)]}{r^2 + \delta^2 - 2r\delta \cos(\phi - \psi - \theta)} d\psi \quad (6.5.5b)$$

これが最終的に得られる WCM のビーム位置依存性を含んだ周波数領域における応答である。これを時間領域の応答に変換するには、 $j\omega \rightarrow s$ と置き換えてラプラス逆変換を数値計算により計算すればよい（数値計算も結構大変である）。実験及び数値計算によりこの結果を確かめたのが、図 6.5.2 及び図 6.5.3 である。ここで、数値計算においては、インダクタンス l をパラメータにして、実験値を再現するように最小自乗法からその最適値を求めた。最適値 l は、 $l = 6 \times 10^{-9} H/mm$ となったが、一方、WCM 端面を円盤としてインダクタンスを計算してやると、 $l = 4.6 \times 10^{-9} H/mm$ となり実験値を良く再現する。

このように、分布定数を用いた等価回路モデルにより、WCM の周波数応答及びパルス応答の両方に対し、ビーム位置依存性がよく再現することがわかる。このように WCM のビーム位置依存性が理解されたので、入射器の入射部（電子銃から発生した電子ビームをバンチ化する最初のセクション）に 2 台の WCM を組込み BPM として動作させている。

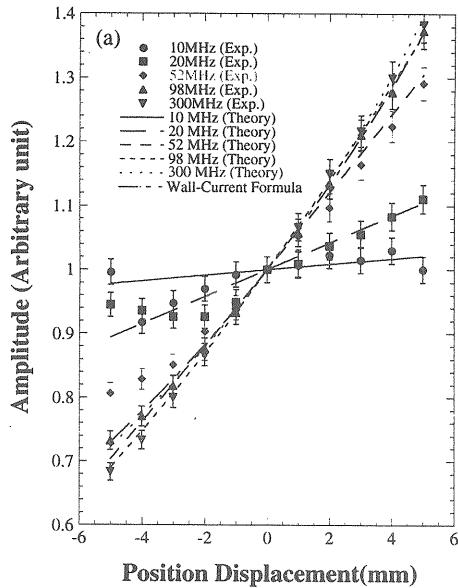


図 6.5.2 : WCM 校正器にサイン波を入力したときのビーム位置に対する出力の変化。図中、Theory は、式(6.5.5)を用いて計算した結果である。また、Wall-Current Formula は、式(2.1.3)を用いて計算した結果である。周波数が高くなるに従い、実験、計算値とともに壁電流の公式に近づくのがわかる。

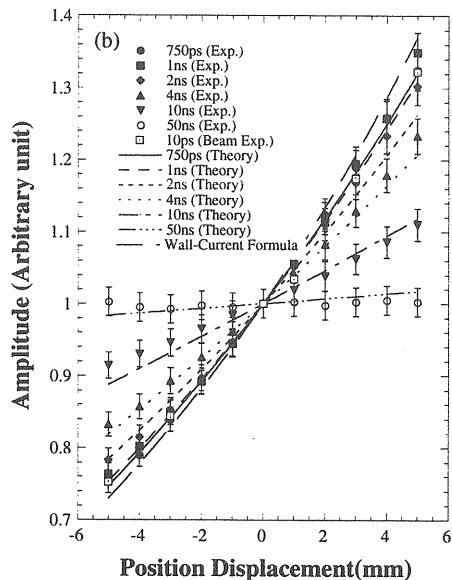


図 6.5.3 : WCM 校正器にテストパルスを入力したときのビーム位置に対する出力の変化。図中、Theory は、式(6.5.5)のラプラス逆変換を数値計算により計

算した結果を示す。パルス幅が小さくなるに従い、実験、計算値がともに壁電流の公式に近づくのがわかる。また、単バンチ電子ビーム（10ps 幅）による実験データも同時にプロットしており、壁電流の公式によく一致していることがわかる。

6. 終わりに

本講義録は、KEK 電子陽電子入射器で私がこれまで行ってきた仕事を中心にまとめたものである。実験データは、何人かの共同研究者との共同研究により得られたもので、この機会にまとめることにした。筆者の力不足と不勉強により不十分な力所や誤った理解が多々あると思うがご容赦をお願いしたい。

ビームモニター及びその応用は、極めて多岐にわたっており、到底 1 冊の教科書でまとめられるものではない。巻末に参考文献を列挙しておくので参照して欲しい。特に、ビーム位置モニターに関しては、文献[1]-[3]は優れた解説をしていると思う。本講義録もこれらを参考にした。本セミナーでも、過去に幾つかのビームモニターに関する講義が行われている。また、米国及び欧州では、ビームモニターに関するワークショップが 2 年毎に開催されており、そのプロシーディングスには、広範囲で最新の技術報告が記載されているので参考になる。

謝辞

筆者にこのような機会を与えていただいた高エネルギー加速器科学研究所奨励会に感謝します。加速器研究施設の早野助教授には、本講義録について貴重なご意見を伺いました。この場をお借りして感謝を申し上げます。

参考文献

- [1] R.E. Shafer、"Beam Position Monitoring"; AIP Conference Proceedings 212, Accelerator Instrumentation, Upton, NY, 1989, pp.26-58.
- [2] S.R. Smith、"Beam Position Monitor Engineering"; AIP Conference Proceedings 390, Beam Instrumentation Workshop, Argonne, IL, 1996, pp.50-65.
- [3] 早野、"ビーム診断(ハードウェア編)" ; JLC-FFIR94 研究会講義録、熱海、1994.

KEK OHO テキスト

- [OHO86] "ビームモニターとビーム不安定性" ; 高エネルギー加速器セミナー(OHO'86), 1986.
- [OHO91] "低エネルギーインストルメント" ; 高エネルギー加速器セミナー(OHO'91), 1991.
- [OHO93] "光源用加速器と放射光用ビームライン" ; 高エネルギー加速器セミナー(OHO'93), 1993.
- [OHO95] "リニアコライダーにおける先端加速器技術" ; 高エネルギー加速器セミナー(OHO'95), 1995.

欧州で開催されるワークショップ

- [DIPAC93] 1st European Workshop on Diagnostics and Beam Instrumentation, 1993, Montreux, Switzerland; CERN PS/93-35 (1993), CERN SL/93-35 (1993).
- [DIPAC95] 2nd European Workshop on Diagnostics and Beam Instrumentation, 1995, Travemunde, Germany; DESY M-95-07 (1995).

[DIPAC97] 3rd European Workshop on Diagnostics and Beam Instrumentation, 1997, LNF-INFN, Rome, Italy; LNF-97/048 (1997).

[DIAPC99] 4th European Workshop on Diagnostics and Beam Instrumentation, 1999, CLRC Daresbury Laboratory, UK. URL:<http://srs.dl.ac.uk/dipac/>

[DIPAC01] 5th European Workshop on Diagnostics and Beam Instrumentation, 2001, ESRF, Grenoble, France. URL:<http://www.esrf.fr/conferences/DIPAC/DIPAC2001Proceedings.html>

米国で開催されるワークショップ

- [BIW89] 1st Accelerator Instrumentation Workshop, AIP Conference Proceedings 212, Upton, NY, 1989.
- [BIW90] 2nd Accelerator Instrumentation Workshop, AIP Conference Proceedings 229, Vatavia IL, 1990.
- [BIW91] 3rd Accelerator Instrumentation Workshop, AIP Conference Proceedings 252, Newport News, VA, 1991.
- [BIW92] 4th Accelerator Instrumentation Workshop, AIP Conference Proceedings 281, Berkeley, CA, 1992.
- [BIW93] 5th Beam Instrumentation Workshop, AIP Conference Proceedings 319, Santa Fe, NM, 1993.
- [BIW94] 6th Beam Instrumentation Workshop, AIP Conference Proceedings 333, Vancouver, B.C., CANADA, 1994.
- [BIW96] 7th Beam Instrumentation Workshop, AIP Conference Proceedings 390, Argonne, IL, 1996.
- [BIW98] 8th Beam Instrumentation Workshop, AIP Conference Proceedings 451, Stanford, CA, 1998.
- [BIW00] 9th Beam Instrumentation Workshop, AIP Conference Proceedings 546, Cambridge, Massachusetts, 2000.

補遺 A

線電荷をビームパイプ内に置いたときに誘起される鏡像電荷分布の導出

一般に、ビームパイプ内に偏心して線電荷がある場合に、ビームパイプ上に誘起される電荷分布は、鏡像法により解くことができる。図に示すように偏心した線電荷 $+λ$ （線密度 $λ$ ）がある時、その鏡像線電荷 $-λ$ を導入し、この2つの線電荷による電位の寄与を考えればよい。

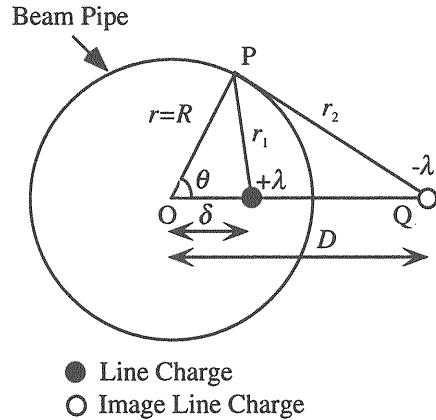


図 A.1：ビームパイプ内の線電荷と鏡像法における鏡像電荷の配置の様子

パイプ上の点Pに誘起される電位は、以下のように表せる。

$$V_p = - \int_{r_0}^{r_1} E_r^{(+\lambda)} dr - \int_{r_0}^{r_2} E_r^{(-\lambda)} dr \quad (A1)$$

$$= - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} [\ln r_1 - \ln r_2] \quad (A2)$$

ここで、 r_1, r_2 は、図に示すような幾何学的関係を持つ。

$$r_1^2 = (r \cos \theta - \delta)^2 + (r \sin \theta)^2 \quad (A3a)$$

$$r_2^2 = (r \sin \theta)^2 + (D - r \cos \theta)^2 \quad (A3b)$$

ビームパイプ半径 $r=R$ に対し、任意の θ で電位が一定であるためには、以下の関係が必要である。

$$\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{\delta^2}{R^2} = \text{const at } D = \frac{R^2}{\delta} \quad (A4)$$

このような条件を満たす円をアポロニウスの円といい、図 A.2 に示すような円群がこの条件を満たす。

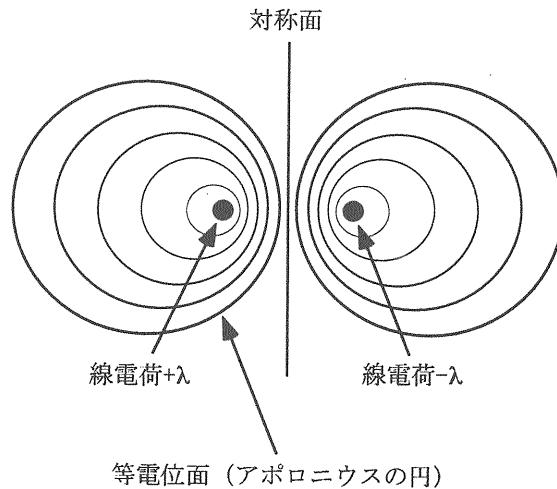


図 A.2：線電荷と鏡像線電荷により形成される等電位面（アポロニスの円群）の配置の様子。

ビームパイプ上に誘起される鏡像線電荷 σ は、P 点での電位を動径方向 r で微分することで得られる。

$$\sigma = -\epsilon_0 \left(\frac{\partial V_p}{\partial r} \right)_{r=R} \quad (\text{A5})$$

$$= \frac{-\lambda}{2\pi R} \frac{R^2 - \delta^2}{R^2 + \delta^2 - 2\delta R \cos \theta} \quad (\text{A6})$$

ここで、電極（P 点）及び線電荷の配置角度を X 軸からの相対角度として、それぞれ θ, ϕ と置き換えると以下のように(2.1.3)式が導出される。

$$\sigma(\delta, \phi, R, \theta) = \frac{-\lambda}{2\pi R} \frac{R^2 - \delta^2}{R^2 + \delta^2 - 2\delta R \cos(\phi - \theta)} \quad (\text{A7})$$

補遺 B

BPM 位置校正用ワイヤーの電荷重心の偏心効果について

BPM 校正ベンチで使用するワイヤーに印加するテストパルスの伝搬を考える。この問題は、伝搬時にワイヤーを流れる電流の電荷重心とワイヤー中心とが一致しないということを意味する。その様子を図 B.1 に示した。図からわかるように鏡像電荷の影響によりワイヤー電荷が再配置を受けその電荷重心がわずかに偏心してしまう。この偏心度を以下に導出しておく。

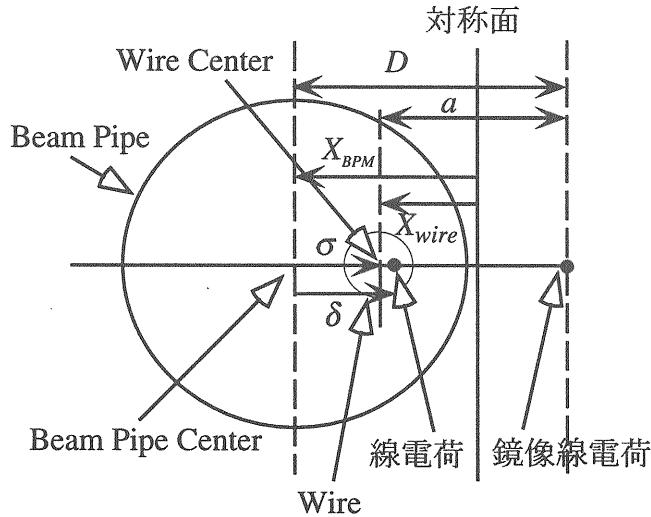


図 B.1：ビームパイプ内に位置する位置校正用ワイヤーとパイプの幾何学的な配置。

図に示した 2 つの円は、補遺 A で導出したアポロニウスの円群の一部と考えればよい。すなわち、ワイヤー外面及びビームパイプ内面は、それぞれ同電位に誘導される。補遺 A で導出した関係式を用いて、幾何学的関係式は、

$$D = 2a + \delta, \quad \delta = X - a \quad (\text{B1})$$

となる。関係式 $D = r^2 / \delta$ を代入すると、任意のアポロニウスの円群に対し以下の関係式が成立する。

$$X^2 - r^2 = a^2 = \text{const} \quad (\text{B2})$$

ここで、パイプ及びワイヤーに対しこの関係式を適用すると

$$X_{BPM}^2 - R_{BPM}^2 = X_{wire}^2 - R_{wire}^2 = a^2 = \text{const} \quad (\text{B3})$$

となる。ただし、以下の関係式を使った。

$$X_{BPM} = \frac{D + \delta}{2}, \quad D = \frac{R_{BPM}^2}{\delta}, \quad \sigma = X_{BPM} - X_{wire} \quad (\text{B4})$$

よって、この関係式を(B3)に代入すると、

$$\left(\frac{R_{BPM}^2 + \delta^2}{2\delta} \right)^2 - R_{BPM}^2 = \left(\frac{R_{BPM}^2 + \delta^2}{2\delta} - \sigma \right)^2 - R_{wire}^2 \quad (\text{B5})$$

となる。これを解くと以下の関係式を得る。

$$\frac{\sigma}{\delta} = \frac{2\sigma^2}{(\sigma^2 - R_{wire}^2 + R_{BPM}^2) - \sqrt{(R_{BPM}^2 - R_{wire}^2 + \sigma^2)^2 - 4\sigma^2 R_{BPM}^2}} \quad (B6)$$

この式が、ワイヤー内の電荷重心に対する補正量を与える。電荷重心の偏心が充分小さいとして ($\sigma \ll R_{wire}, R_{BPM}$) 近似してやると、以下に示す見通しのよい近似式が得られる。

$$\frac{\sigma}{\delta} = 1 - \frac{R_{wire}^2}{R_{BPM}^2} \quad (B7)$$

すなわち、パイプ半径及びワイヤー半径の2乗比で補正が必要であることがわかる。ちなみに、入射器の BPM 校正ベンチ用のワイヤー直径は $500\mu\text{m}$ である。この値を用いて、(C7)式を計算すると補正量は、 2.5×10^{-4} となり 10mm のワイヤー偏心に対しても $2.5\mu\text{m}$ 程度の補正なので、このシステムでは問題ないことがわかる。

補遺 C

ストリップライン型 BPM の電極開口角を考慮した感度係数の導出

図 3.1.1 に示す BPM を考え、電極に対して偏心した線電荷の配置を図 2.1.3 に示すものとする。偏心位置 x と X 軸に位置する電極 (#1 と #3) に誘起される電圧は以下の関係にある。

$$x = \delta \cos \phi = S_b \frac{V_1 - V_3}{V_1 + V_3} \quad (C1)$$

$$= S_b \frac{\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \sigma(\delta, \phi, R, \theta_1) d\theta - \int_{-\alpha/2}^{\pi+\alpha/2} \sigma(\delta, \phi, R, \theta_3) d\theta}{\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \sigma(\delta, \phi, R, \theta_1) d\theta + \int_{-\alpha/2}^{\pi+\alpha/2} \sigma(\delta, \phi, R, \theta_3) d\theta} \quad (C2)$$

ただし、電極の開口角を α とし、電極開口角にわたっての鏡像電荷を積分するものとする。また、ストリップライン電極に伴う半径の違い (R_1, R_2) は、線電荷から見てその偏心位置が充分小さい ($\delta \ll R_1, R_2$) として $R = R_1 \approx R_2$ と近似する。鏡像電荷の積分は以下のように導出できる。まず、以下の積分公式を用いて、

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c} = \frac{2}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}} \operatorname{Arctan} \left[\frac{(c-b) \tan \frac{x}{2} + a}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}} \right] \quad (a^2 + b^2 < c^2) \quad (C3)$$

電極#1 に誘起される電位 V_1 の積分を行うと、

$$\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \frac{R^2 - \delta^2}{R^2 + \delta^2 - 2\delta R \cos(\phi - \theta)} d\theta = \operatorname{Arctan} \left[\frac{R + \delta}{R - \delta} \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \quad (C4)$$

$$\approx \operatorname{Arctan} \left[\left(1 + 2 \frac{\delta}{R} \right) \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \quad (R \gg \delta) \quad (C5)$$

となる。 V_3 に対しても同様に積分を行い、(C2)式に従って積分結果の和と差を計算する。この時、以下の公式を用いて計算を進め、途中開口角 α は充分小さい ($\alpha \ll 1$) とすると、

$$\operatorname{Arctan}(x) \pm \operatorname{Arctan}(y) = \operatorname{Arctan} \frac{x \pm y}{1 \mp xy} \quad (C6)$$

最終的に得られる(C2)式は、以下のように導出される。

$$x = \delta \cos \phi \approx S_b \delta \cos \phi \frac{2 \sin \alpha}{R} \quad (C7)$$

この結果より、感度係数 S_b は、以下のように導出できる。

$$S_b = \frac{R}{2} \frac{\alpha}{\sin \alpha} \quad (C8)$$

感度係数は、電極開口角 $\alpha \rightarrow 0$ の極限で、

$$S_b = \frac{R}{2} \quad (\text{C9})$$

となり(2.1.6)式で求めた感度係数に一致する。

補遺 D

3 BPM 法における係数と転送行列との諸関係

図 5.1.1において、 BPM_i におけるビーム行列を以下のように表す。

$$\vec{x}_i = (x_i, x'_i)$$

最初に、補助電磁石のキックがない場合を考えて、転送行列 m, n を用いて以下の関係式が成り立つ。

$$\vec{x}_2 = m \vec{x}_1, \vec{x}_3 = n \vec{x}_2 \quad (\text{D1})$$

この関係式を成分で書き下すと、

$$x_2 = m_{11}x_1 + m_{12}x'_1 \quad (\text{D2})$$

$$x'_2 = m_{12}x_1 + m_{22}x'_1 \quad (\text{D3})$$

$$x_3 = n_{11}x_2 + n_{12}x'_2 \quad (\text{D4})$$

(D2), (D3)式より x'_1, x'_2 を求め、(D4)式に代入すると以下の関係式を得る。

$$x_3 = Ax_1 + Bx_2 + C \quad (\text{D5a})$$

$$A = \frac{n_{12}}{m_{12}}(m_{12}^2 - m_{22}m_{11}) \quad (\text{D5b})$$

$$B = \frac{1}{m_{12}}(m_{12}n_{11} + m_{22}n_{12}) \quad (\text{D5c})$$

$$C = 0 \quad (\text{D5d})$$

次に、 BPM_i のオフセット (δ_i) を考慮して、(D2)-(D4)の計算を同様に行ってやると以下の項が C に付加されることになる。

$$-\frac{n_{12}}{m_{12}}(m_{12}^2 - m_{22}m_{11})\delta_1 + \frac{1}{m_{12}}(m_{12}n_{11} + m_{22}n_{12})\delta_2 - \delta_3 \quad (\text{D6})$$

補助電磁石によるキック角 (θ) の効果は、ビーム行列にキック角度偏向のベクトル $\theta = (0, \theta)$ による軌道変位を足しあわせればよい。すなわち、関係式(D2)-(D4)において、

$$\Delta \vec{x}_2 = t \vec{\theta}_i \quad (\text{D7a})$$

$$\Delta \vec{x}_3 = u \vec{\theta}_j \quad (\text{D7b})$$

行列の成分で書くと以下のように書ける。

$$\Delta x_2 = t_{12}\theta_i, \Delta x'_2 = t_{22}\theta_i \quad (\text{D7c})$$

$$\Delta x_3 = u_{12}\theta_j \quad (\text{D7d})$$

これらを考慮して、(D2)-(D4)の計算を同様に行ってやると以下の項が C に付加されることになる。

$$-\frac{m_{22}n_{12}}{m_{12}}t_{12}\theta_i + n_{12}t_{22}\theta_i + u_{12}\theta_j \quad (D8)$$

何台かの補助電磁石を用いる場合は、(5.1.2c)式に示したように和をとつてやるとよい。結局、(D6)及び(D8)の項が C に寄与するので、 C は以下のように変更される。

$$\begin{aligned} C = & -\frac{m_{22}n_{12}}{m_{12}}t_{12}\theta_i + n_{12}t_{22}\theta_i + u_{12}\theta_j \\ & -\frac{n_{12}}{m_{12}}(m_{12}^2 - m_{22}m_{11})\delta_1 + \frac{1}{m_{12}}(m_{12}n_{11} + m_{22}n_{12})\delta_2 - \delta_3 \end{aligned} \quad (D9)$$

補遺 E

Table E1 ガウシアン分布した線電荷により誘起される 4 電極のピックアップ電圧（ただし、 $I_b / 2\pi R$ で規格化している）（90 度 BPM の場合）

Multipole Moments	$V_1(\theta = 0)$	$V_2(\theta = \pi/2)$	$V_3(\theta = \pi)$	$V_4(\theta = 3\pi/2)$
Monopole	1	1	1	1
Dipole	$2x_0 / R$	$2y_0 / R$	$-2x_0 / R$	$-2y_0 / R$
Quadrupole	$2[(\sigma_x^2 - \sigma_y^2) + (x_0^2 - y_0^2)] / R^2$	$-2[(\sigma_x^2 - \sigma_y^2) + (x_0^2 - y_0^2)] / R^2$	$2[(\sigma_x^2 - \sigma_y^2) + (x_0^2 - y_0^2)] / R^2$	$-2[(\sigma_x^2 - \sigma_y^2) + (x_0^2 - y_0^2)] / R^2$
Sextpole	$2 \frac{x_0}{R} \left(\frac{3(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}{R^2} + \frac{x_0^2 - 3y_0^2}{R^2} \right)$	$-2 \frac{y_0}{R} \left(\frac{3(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}{R^2} + \frac{3x_0^2 - y_0^2}{R^2} \right)$	$-2 \frac{x_0}{R} \left(\frac{3(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}{R^2} + \frac{x_0^2 - 3y_0^2}{R^2} \right)$	$2 \frac{y_0}{R} \left(\frac{3(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}{R^2} + \frac{3x_0^2 - y_0^2}{R^2} \right)$

Table E2 ガウシアン分布した線電荷により誘起される 4 電極のピックアップ電圧（ただし、 $I_b / 2\pi R$ で規格化している）（45 度 BPM の場合）

Multipole Moments	$V_1(\theta = \pi/4)$	$V_2(\theta = 3\pi/4)$	$V_3(\theta = 5\pi/4)$	$V_4(\theta = 7\pi/4)$
Monopole	1	1	1	1
Dipole	$\frac{2(x_0 + y_0)}{\sqrt{2}R}$	$\frac{2(-x_0 + y_0)}{\sqrt{2}R}$	$\frac{-2(x_0 + y_0)}{\sqrt{2}R}$	$\frac{2(x_0 - y_0)}{\sqrt{2}R}$
Quadrupole	$2x_0 y_0 / R^2$	$-2x_0 y_0 / R^2$	$2x_0 y_0 / R^2$	$-2x_0 y_0 / R^2$
Sextupole	$\frac{-A + B}{\sqrt{2}}$	$\frac{A + B}{\sqrt{2}}$	$\frac{A - B}{\sqrt{2}}$	$\frac{-A - B}{\sqrt{2}}$

A, B は、90 度 BPM で計算された $V_1(\theta = 0)$ 及び $V_4(\theta = 3\pi/2)$ での Sextupole Moment を示す。

補遺 F

拡張された LCR 分布定数等価回路の方程式の導出

まずは、(6.5.1)式から出発することにする。周方向の微小構成要素 n 番目に流れ込む電流保存を考えて、方程式は以下で表すことができる。

$$I_{n-1} - I_n - \frac{dQ_n}{dt} + i_n^R + i_n^L - J\lambda = 0 \quad (\text{F1})$$

ここで、各電気素子に誘起する電位降下を書き下すと、

$$\frac{R}{\lambda} i_n^R + \frac{L_s}{\lambda} \frac{\partial i_n^R}{\partial t} = -V_n \quad (\text{F2})$$

$$\frac{L}{\lambda} \frac{\partial i_n^L}{\partial t} = -V_n \quad (\text{F3})$$

$$V_{n-1} = l\lambda \frac{\partial I_{n-1}}{\partial t} + V_n \quad (\text{F4})$$

$$Q_n = C\lambda V_n \quad (\text{F5})$$

となる。(F2)-(F5)を(F1)に代入して方程式を整理すると、

$$\frac{\partial I}{\partial x} + C \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{i_n^R + i_n^L}{\lambda} = -J \quad (\text{F6})$$

が得られる。ここで、電流 I の添字は微分形に置き換え、 x は周方向に沿う座標とする。この方程式を再度時間微分すると以下の電位に関する 2 次の偏微分方程式を得る。

$$\frac{1}{l} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - C \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\exp(-j\alpha)}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L_s^2}} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{L} V = \frac{\partial J}{\partial t} \quad (\text{F7})$$

$$\alpha = \tan^{-1}(L_s \omega / R) \quad (\text{F8})$$

次に、この方程式の振動解を $V(x, t) = V(x)e^{j\omega t}$ と置き、位置に依存する解を求めるところにする。

$$\frac{1}{l} \frac{d^2 V(x)}{dx^2} + \left[\omega^2 C + \frac{j\omega \exp(-j\alpha)}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L_s^2}} + \frac{1}{L} \right] V(x) = j\omega J(x) \quad (\text{F9})$$

この方程式の解 (Duhamel の方法による非齊次 2 次方程式の解) を以下に表す。

$$V(x) = \frac{I}{2\pi r \sqrt{\omega_0^2}} \frac{j\omega l(r^2 - \delta^2)}{r^2 + \delta^2 - 2r\delta \cos(\phi - \theta)} \sin\left[\sqrt{\omega_0^2}(\phi - \theta)\right] \quad (\text{F10})$$

ただし、

$$\omega_0^2 = \left(\omega^2 C + \frac{j\omega \exp(-j\alpha)}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L_s^2}} + \frac{1}{L} \right) l \quad (\text{F10})$$

と置いて、初期条件 $V(x)=0, \partial V(x)/\partial x=0$ at $x=0$ を用いた解である。途中、壁電流 J は、(2.1.3)式に置き換えていることに注意。これが、微小領域構成要素に誘起する電位で、周方向に壁電流の位置依存性が組込まれている。パイプ上の任意の点における電位は、この微小構成要素からの寄与を積分してやるとよい。

補遺 G

公式集

三角関数のフーリエ展開

$$\frac{1-a^2}{1-2a\cos x+a^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx \quad \begin{cases} -\pi \leq x \leq \pi, \\ |a| < 1 \end{cases} \quad (\text{G1})$$

ラプラス逆変換の幾つかの公式

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+a)(s+b)}\right] = \frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt}) \quad (\text{G2})$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2 + 2abs + b^2)}\right] = \frac{e^{-abt}}{b\sqrt{1-a^2}} \sin(b\sqrt{1-a^2}t) \quad (\text{G3})$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+a)^2}\right] = te^{-at} \quad (\text{G4})$$