

1. 加速に関する基礎的事項

1.1 電場による荷電粒子の加速

加速器は荷電粒子のエネルギーを増加させる装置である。文字どおり解釈すれば粒子の速度を増すための装置であるが、名称に相応しい(?)動作をするのは非常にエネルギーの低い場合に限られ、速度がほぼ光速に達してしまう高エネルギー領域では専ら質量を増加させることでエネルギーを増加させる。粒子のエネルギーの増加は運動量の増加と等価である。運動量 p の変化と粒子に加えられる力 F との関係は、次のニュートンの第 2 法則 (Newton's second law) によって表わされる。

$$\frac{dp}{dt} = F \quad (1.1)$$

粒子を高いエネルギーまで加速するには、十分に強い力が十分に長い時間粒子に加えられることが必要である。電荷 q 、速度 v を持つ粒子が、磁場 B および電場 E の存在する空間を通過するとき受ける力は、次式で表わされるローレンツ力 (Lorentz force) である。

$$F = q(v \times B + E) \quad (1.2)$$

粒子が点 z_1 から点 z_2 まで移動する間に、粒子のエネルギーは

$$\begin{aligned} \Delta E &= \int_{z_1}^{z_2} F \cdot dz \\ &= q \int_{z_1}^{z_2} (v \times B) \cdot dz + q \int_{z_1}^{z_2} E \cdot dz \quad (1.3) \end{aligned}$$

だけ変化する。(このテキストでは同じ E でもエネルギーを表わす場合と電場を表わす場合があるので注意して下さい)。(1.3) 式の積分要素 dz は常に速度ベクトル v と平行であるから、ベクトル $v \times B$ は dz に垂直になる。すなわち、 $(v \times B) \cdot dz = 0$ であるから、磁場 B は粒子の運動エネルギー変化には寄与しない。したがって、(1.3) 式は

$$\Delta E = q \int_{z_1}^{z_2} E \cdot dz = eV \quad (1.4)$$

となる。ただし、 V は粒子が点 z_1 から点 z_2 まで動く間に経験する電圧、つまり z_1 と z_2 の間の電位差である。(1.4) 式は粒子の運動エネルギーの増加は電場のみによってなされて、加速の方向は電場の方向であることを示している。

(1.4) 式は粒子の速度 v を含んでいないので、加速は粒子の速度には無関係であり、たとえ $v = 0$ であっても加速される。また、(1.4) 式は粒子の質量 m も含んでいないから、 ΔE は粒子の質量によらず、粒子の持つ電荷と受ける電位差のみで決る。すなわち、軽い粒子も重い粒子も電荷量が q ならば、電位差 V で加速された時に得るエネルギーは同じ qV である。

ローレンツ力を表わす (1.2) 式が示すように、電場による力には速度 v は関係ないが、磁場による力は v に依存する。磁場による力の方向は、粒子の運動方向に直角で、かつ磁場の方向にも直角である。したがって、磁場は粒子のエネルギー増加には寄与しないが、粒子の運動に直角な方向の力を必要とする、ビームの偏向、集束、軌道の補正等において重要な役割を果たしている。

さて、電場 E および磁場 B は、一般的に磁氣的ベクトルポテンシャル A および電氣的スカラーポテンシャル Φ を用いて、次のように表わされる。

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla\Phi \quad (1.5)$$

$$B = \nabla \times A \quad (1.6)$$

磁氣的ベクトルポテンシャル A の単位は $[V \cdot s/m] = [Wb/m]$ であり、電氣的スカラーポテンシャル Φ の単位は $[V]$ である。(1.5) 式は電場の基本表現であり、右辺の第 1 項 ($-\partial A/\partial t$) は磁場 B の時間微分に関係し、電磁誘導によって生成される電圧である。右辺第 2 項 ($-\nabla\Phi$) は電位の傾きが作る電場である。(1.4) 式が示すように、すべての加速器において、荷電粒子の加

速は電場によって行われている。ベータトロンや誘導型リニアックは電磁誘導による電場を利用した例であり、静電加速器は、電位の傾きによる電場を利用している。高周波加速空洞で得られる電場には、電磁誘導と電位の傾きの両方が寄与していると考えられる。

1.2 エネルギーの単位

ここで簡単な加速器のモデルを考える。図 1.1 に示すような平行平板電極に直流電圧 V が印加されているとする。電極の間隔を d とし、その間の電場 E_f は一様であるとする ($E_f = V/d$)。

(1.2) 式より、単位電荷 e を持った電子は電場 E_f の中で

$$F = eE_f \quad (1.7)$$

なる力を受けて加速される。一様電場 E_f の中を距離 d だけ走った場合、電子の得るエネルギー ΔE は (1.4) 式より次のように表わされる。

$$\Delta E = Fd = eE_f d = eV \quad (1.8)$$

電場が一様でなくても、電子の受ける電位差が V ならば $\Delta E = eV$ が成り立つ。

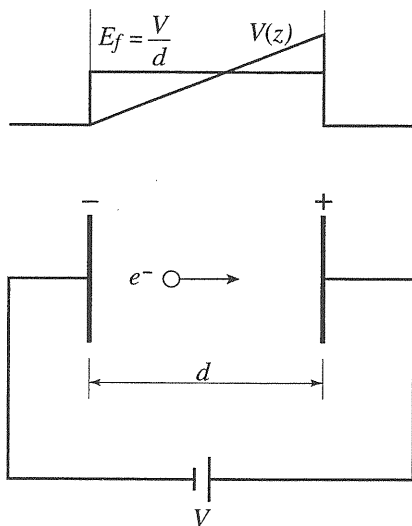


図 1.1 直流電圧による電子の加速 (電子ボルトの定義)

さて、世の中は国際単位系 (略称 SI) に一本化される方向に動いている。エネルギー・仕事・熱量の SI 単位はジュール [J] である。1 [J] は力学的には、1 ニュートン [N] の大きさの力が、その力の方向に 1 メートル [m] 動かすときに、その力がする仕事である。電気的には、1 [J] は 1 クーロン [C] の電荷を持つ粒子が真空中で 1 [V] の電位差で加速されるときに得るエネルギーである。

しかし、粒子ビームを取扱う場合、エネルギーの単位としてジュールを用いることは必ずしも便利ではない。上のモデルでも述べたように、単位電荷 e を持つ電子が電位差 V で加速されるときに得るエネルギーは eV であるから、これで直接エネルギーを表わせれば便利である。このような理由から原子核、素粒子、加速器等の分野においては、粒子の持つエネルギーを電子ボルト (electron volt) で表わすことが多い。単位記号は [eV] である。1 電子ボルト (1 [eV]) のエネルギーとは、単位電荷 e を持つ粒子が、真空中で 1 [V] の電位差を持つ 2 点間で加速される時に得るエネルギーである。この電子ボルトは SI 単位と併用してよい単位として認められている。

エネルギーの単位をまとめると次のようになる。

1 電子ボルト (1 [eV]) …単位電荷 e を持つ粒子が電位差 1 [V] から得るエネルギー

1 ジュール (1 [J]) …1 クーロン [C] の電荷が電位差 1 [V] から得るエネルギー

単位電荷量 $e = 1.602 \times 10^{-19}$ [C]

従って $1 \text{ [eV]} = 1.602 \times 10^{-19}$ [J]

より高いエネルギーを表わすために、通常、下記のような単位が用いられている。

$$1 \times 10^3 \text{ [eV]} = 1 \text{ [keV]}$$

$$1 \times 10^6 \text{ [eV]} = 1 \text{ [MeV]}$$

$$1 \times 10^9 \text{ [eV]} = 1 \text{ [GeV]}$$

$$1 \times 10^{12} \text{ [eV]} = 1 \text{ [TeV]}$$

粒子の振舞いを説明するとき、場合に応じて運動量とエネルギーを使い分けることがある。例えば、ローレンツ力を扱うときには運動量を用いるほうが都合がよく、電場での加速を扱う場合にはエネルギーを用いた方が便利である。しかし、使いわけるのが煩わしいので、これらの量をすべてエネルギーで説明する場合もある。この場合、運動量を明確にする必要があるときには、エネルギーを光速 c で割った値を用いる（次の1.3項参照）。例えば、エネルギー1 [GeV] を持つ電子は1 [GeV]/ c の運動量を持つことになる。

1.3 相対論の初歩

加速器の動作を理解するためには、相対論の初歩的な事柄を理解することが必要である。古典論では粒子の質量を m_0 、速度を v とすれば、粒子の持つ運動エネルギー E_k は次のように表わされる。

$$E_k = \frac{1}{2} m_0 v^2 \quad (1.9)$$

質量 m_0 は変化しないので、運動エネルギーは速度 v の2乗に比例することになる。実際上、運動エネルギーに上限があるとは思われないので、速度にも上限がないことになる。しかし相対論では速度には上限があり、光の速度を超えることができない。また、質量とエネルギーは等価なものであり、お互いに変換可能なものである。したがって、運動エネルギーの増加は速度の増加とともに質量の増加によっても得られる。速度が小さい時には質量の増加は非常にわずかであるが、速度が光速に近づくとエネルギー増加の大部分は質量の増加によって得られることになる。

相対論によれば、質量 m は速度 v によって変化し、次のように表わされる。

$$m = \frac{m_0}{(1 - \beta^2)^{1/2}} \quad (1.10)$$

ただし m_0 : 静止質量
 β : v/c

c : 光の速度 ($=2.998 \times 10^8$ [m/s])

前述のように、質量とエネルギーは相互に変換可能なものである。エネルギーに対する質量の比は光速の2乗 (c^2) であり、静止質量 m_0 は次式のように静止エネルギー E_0 と等価である。

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (1.11)$$

運動している粒子の持つ全エネルギー E は、粒子が止まっている時に持っている静止エネルギー E_0 と、加速されたことによって得た運動エネルギー E_k との和で表わされる。

$$E = E_0 + E_k = m_0 c^2 + E_k \quad (1.12)$$

また、この全エネルギー E は、(1.10) 式的全質量（運動している粒子の質量） m を用いて次のように表わすことができる。

$$E = m c^2 \quad (1.13)$$

全エネルギーと静止エネルギーの比を通常 γ で表わす。これは全質量と静止質量の比でもある。

$$\gamma = \frac{E}{E_0} = \frac{m}{m_0} = \frac{1}{(1 - \beta^2)^{1/2}} \quad (1.14)$$

(1.12) 式および (1.13) 式より全質量 m は次のように書ける。

$$m = m_0 + \frac{E_k}{c^2} = m_0 \left(1 + \frac{E_k}{E_0} \right) \quad (1.15)$$

(1.12) 式および (1.14) 式より運動エネルギー E_k を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} E_k &= E - E_0 = E_0 \left[\frac{1}{(1 - \beta^2)^{1/2}} - 1 \right] \\ &= E_0 (\gamma - 1) \end{aligned} \quad (1.16)$$

上式より $\beta (=v/c)$ を求めると次のようになる。

$$\beta = \left[1 - \frac{1}{(1 + E_k/E_0)^2} \right]^{1/2} \quad (1.17)$$

上式より粒子の運動エネルギー E_k と比速度 β との関係式を計算することができる。

粒子の持つ運動量 p は次のように表わされる。

$$p = mv = \gamma m_0 v = \beta \gamma m_0 c = \frac{\beta E}{c} \quad (1.18)$$

(1.11) 式の E_0 と (1.18) 式の p を用いて次のような関係式が導かれる。

$$\begin{aligned} (pc)^2 + E_0^2 &= (\beta^2 \gamma^2 + 1) E_0^2 \\ &= \gamma^2 E_0^2 = E^2 \end{aligned} \quad (1.19)$$

したがって、次のような関係式が得られる。

$$E = (E_0^2 + p^2 c^2)^{1/2} \quad (1.20)$$

$$p = \frac{(E^2 - E_0^2)^{1/2}}{c} = \frac{\beta E}{c} \quad (1.21)$$

(1.21) 式より、相対論的ビーム ($\beta = 1$) の場合は、全エネルギー E を光速 c で割れば運動量 p が得られる。また、上式より、 β を運動量で表わすこともできる。

$$\beta = \left(1 - \frac{E_0^2}{E^2} \right)^{1/2} = \frac{cp}{(E_0^2 + p^2 c^2)^{1/2}} \quad (1.22)$$

ここで、後で使用する関係式を求めておく。(1.18) 式の p を v で微分して次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dv} &= m_0 \frac{d}{dv} (\gamma v) = m_0 \left(\gamma + v \frac{d\gamma}{dv} \right) \\ &= \gamma m_0 (1 + \beta^2 \gamma^2) \end{aligned} \quad (1.23)$$

最後の等式は $d\gamma/dv = (d\gamma/d\beta)/c$ に (1.14) 式か

ら得られた $d\gamma/d\beta$ を代入して求められた。

(1.14) 式より、 $\gamma^2 = 1 + \beta^2 \gamma^2$ であるから、これを上式に代入すれば

$$dp = \gamma^3 m_0 dv \quad (1.24)$$

となる。(1.24) 式両辺を (1.18) 式の $p = \gamma m_0 v$ で割ることにより、次式を得る。

$$\frac{dp}{p} = \gamma^2 \frac{dv}{v} \quad (1.25)$$

この粒子の運動量の変化 dp と速度の変化 dv との関係式は、円形加速器の位相安定性の項で使用される。

次に、相対的なエネルギーの変化 $\Delta E/E$ と相対的な運動量の変化 $\Delta p/p$ との間関係式を求める。(1.14) 式および (1.11) 式より

$$E = \gamma m_0 c^2 \quad (1.26)$$

である。この E を p で微分すれば

$$\frac{dE}{dp} = m_0 c^2 \frac{d\gamma}{dp} \quad (1.27)$$

となる。(1.18) 式より $\gamma = p/m_0 v$ であるから、これを (1.27) 式に代入して

$$\frac{dE}{dp} = c^2 \frac{d}{dp} \left(\frac{p}{v} \right) \quad (1.28)$$

を得る。上式の右辺の微分は (1.24) 式、(1.18) 式および (1.14) 式を用いることにより、次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} \left(\frac{p}{v} \right) &= \frac{1}{v} - \frac{p}{v^2} \frac{dv}{dp} \\ &= \frac{1}{v} \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) = \frac{1}{v} \beta^2 \end{aligned} \quad (1.29)$$

(1.29) 式を (1.28) 式に代入して

$$dE = \frac{c}{\beta} \beta^2 dp \quad (1.30)$$

を得る。 E と p との間には (1.18) 式の関係があるから、結局、次式を得る。

$$\frac{dE}{E} = \beta^2 \frac{dp}{p} \quad (1.31)$$

(1.31) 式は後でシンクロトロン運動方程式を導くときに使用される。

通常の世界では、物体の速度は光速に比べて遥かに遅いので、速度による質量の変化は全く無視できる。しかし、加速器とまではいかななくても、身近な電子管の中で相対論の世界を垣間見ることができる。電子加速器用のマイクロ波源として大電力クライストロンが一般に使用されている。例えば、KEKB で使用されている CW 動作の 509MHz 1.2MW クライストロンのビーム電圧は 90 [kV] である。この場合の電子の速度と質量を求めてみる。 $E_k = 90$ [keV]、 $E_0 = 511$ [keV]

(3.1 項参照) であるから、(1.17) 式より $\beta = 0.526$ となる。この β を(1.10)式に代入して $m/m_0 = 1.18$ を得る。すなわち、非常に軽い電子が真空中で 90 [kV] の電圧で加速されると、もはや非相対論的ビームとは言い難くなる。さらに、リニアコライダー (GLC) 用として開発されているパルス動作の X バンド・クライストロンのビーム電圧は約 500 [kV] であるから、 $\beta = 0.866$ 、 $m/m_0 = 2.0$ となる。カソードを飛び出した電子の速度は、加速された後では光速の 86.6% に達し、質量は静止質量の 2 倍になっているので、立派な相対論的電子になっている。

2. 繰り返し加速

2.1 静電加速器

直流高電圧を使用する静電加速器 (electrostatic accelerator) で代表的なものはコッククロフト・ワルトン型加速器 (Cockroft-Walton accelerator) とバンデグラーフ型加速器 (Van de Graaff) である。これらの加速器の原理図を図 2.1 と図 2.2 に示す。

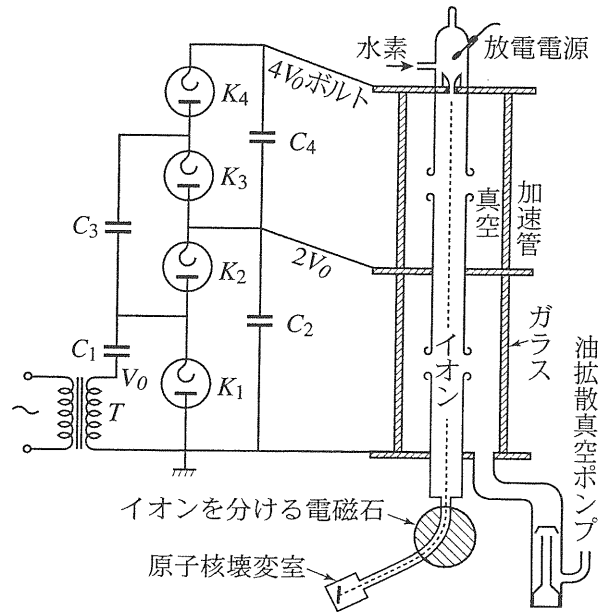


図 2.1 コッククロフト・ワルトン型加速器の原理図

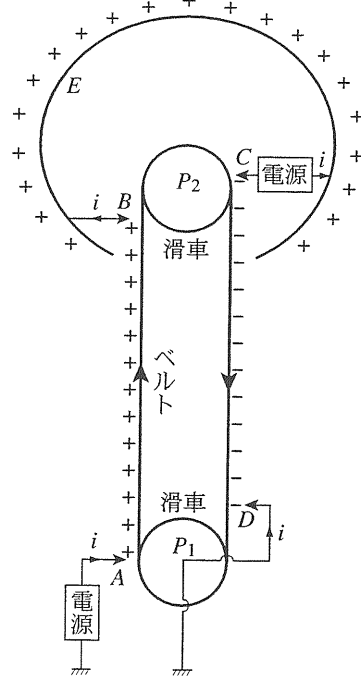


図 2.2 バンデグラーフ型高電圧発生器の原理図 (加速管はコッククロフト・ワルトン型加速器とほぼ同じもの)

静電加速器によって得られる最大エネルギー

は、発生できる最大直流電圧によって制限される。図 2.3 は静電加速器における印加電圧と負荷電流（洩れ電流）との関係を示したものである。図示のように、電流は抵抗性電流、イオン電流、電子ローディング電流の 3 種類の成分より成る。高圧電極を支える絶縁物の抵抗が無限度でないために流れる抵抗性電流は電圧に比例して増加する。残留ガスによるイオン電流は、印加電圧が高いために空間電荷効果が効かず、直ぐに飽和してほぼ一定値になる。電子ローディング電流は一種の放電現象による電流であり、電圧が低い間は殆ど 0 であるが、電圧が高くなると指数関数的に増加する。通常、この電子ローディング電流が最大印加電圧を制限する。通常のパンドグラフ高圧発生器の最大電圧は 2 [MV] 程度である。高圧発生部や加速セクションを SF₆ のような絶縁ガスで満たしたタンクの中に入れる等の改良を施しても、10 [MV] を越えることは困難である。

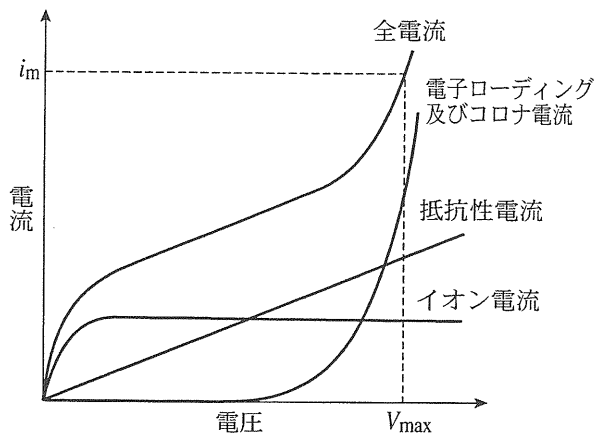


図 2.3 静電加速器における印加電圧と洩れ電流との関係

2.2 静電圧による繰り返し加速の試み

このような高電圧での放電の問題を回避するためには 1 回の加速電圧を低くし、繰り返し加速すればよい。まず最初に、当然のことであるが、静電圧では繰り返し加速ができないことを 2、3 のばかげた例を上げて示す。

図 2.4 (a) は直流電圧 V_1 [V] の電源を用いて $3V_1$ の加速をしようとする試みである。電極は中空円筒とし、その中を電子ビームが通るとする。加速しようとした電極間では V_1 [V] の加速ができるが、その他の電極間で同じ電圧だけ減速されてしまい、結局、総合で V_1 [V] だけしか加速できない。

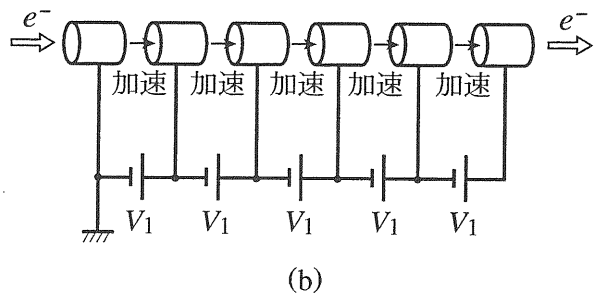
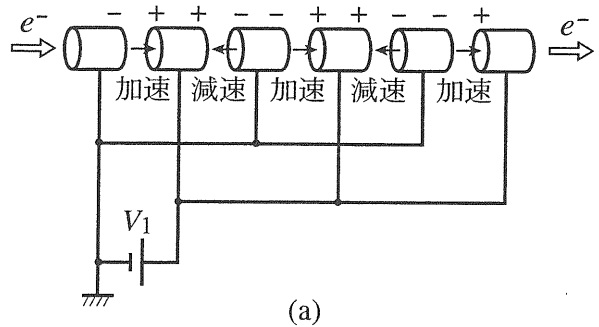


図 2.4 静電圧による繰り返し加速の試み：
 (a) 直流電圧 V_1 [V] の電源で $3V_1$ [V] の加速をしようとする試み、
 (b) 電圧 V_1 [V] の直流電源を縦続接続して $5V_1$ [V] の加速をしようとする試み

では、図 2.4 (b) のように直流電圧 V_1 [V] の電源 5 台を縦続に接続したらどうなるだろうか。この場合は原理的には思惑通り $5V_1$ [V] の加速電圧が得られる。しかし、耐圧という観点からは、最も電位の高い個所とアース間の耐圧で決ってしまうので、この場合は単に得られる最高の電圧を 5 分割したに過ぎないということになり、あまり意味がない。

次に、円形加速器で静電場を用いて繰り返し

加速ができるであろうか。図 2.5 (a) のように磁場を使って粒子を回転させ、直流電圧のかかっている電極を繰り返し通過させる。この場合、電極間では加速されるが、電極の外では減速されて相殺されてしまう。これは静電場が保存されることによると考えればよい。すなわち、軌道を一周して元の位置に戻ったら、電位は元の値でなければならないから、図 2.5 (b) に模式的に示すように、電極の外には必ず電極内とは逆の電場ができています。この電場によって粒子は減速されてしまうので、静電電極で粒子を繰り返し加速することはできない。

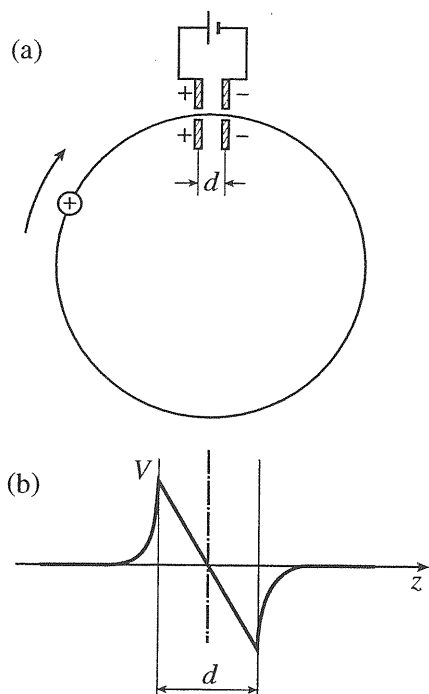


図 2.5 (a) 円形加速器で静電場を使って繰り返し加速を行う試み、
(b) 電極付近の電位分布の模式図

以上のように、直流電圧では繰り返し加速ができないことを述べたが、実は、現在のバンデグラーフ加速器の多くは、同じ直流電圧を 2 回使って 2 倍のエネルギーまで加速できるタンデム加速器 (tandem accelerator) である。この加速器は粒子の電荷変換を巧みに利用している。図 2.6 はタンデム加速器の原理を示す。粒子ビーム

の入口と出口はアース電位であり、中央に高電圧ターミナルがある。負イオンビームが入射され、高電圧ターミナルの正電圧で加速される。加速された負イオンは、高電圧ターミナル内に設けられたガスあるいはカーボン箔を用いた電荷変換装置で、電子を剥ぎ取られ、正イオンに変換される。この正イオンビームは負の高圧で再び加速され、結局、高電圧ターミナルの電圧で 2 回加速されたことになる。

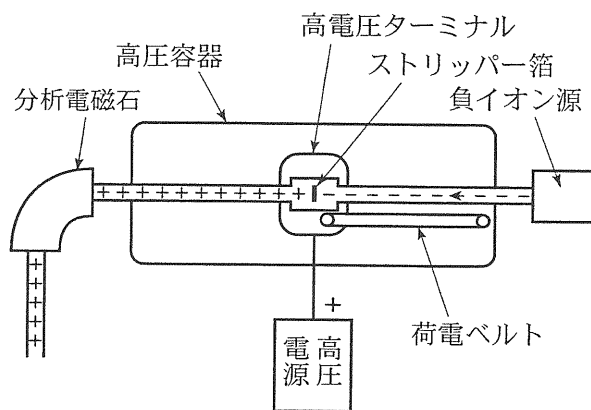


図 2.6 タンデム型バンデグラーフ加速器の原理

2.3 高周波による繰り返し加速

前項で、線形加速器においても、円形加速器においても、静電場を用いては繰り返し加速はできないことが分った。ここで高周波が登場する。高周波には

- (1) 電磁場の向きが周期的に反転する、
- (2) 空洞の電磁場は空洞内のみ制限されて外には出ない、

という性質があるので、これをを利用することにより繰り返し加速を行うことができる。ただし、繰り返し加速を行うためには、粒子が加速ギャップを通過する時に、ギャップの電場が常に加速位相になるように工夫することが必要である。以下に、繰り返し加速の原理を線形加速器と円形加速器 (シンクロトロン) の場合について述べる。

2.3.1 線形加速器の場合

図 2.4 (a) の直流電圧 V_1 を高周波電圧に置き換えると図 2.7 のようになる。ある瞬間をとれば、直流電圧の場合と同じように、ギャップには交互に加速電場と減速電場が現れる。しかし、高周波の場合には時間と共に電場の位相が変化するので、状況は一変する。ここでは説明の便宜上電子の加速を考え、速度は一定 ($\beta=1$) とする。図 2.8 (a) に示すように電場は中空円筒のギャップのところだけにでき、円筒の中にはないので、電子はギャップでのみ電場を感じる。図中の加速電場の実線と点線は、高周波の位相が互いに 180° 異なる場合を示している。図 2.8 (b) はギャップ 1 (G_1) の電場とギャップ 2 (G_2) の電場の時間変化を示している。1 番目のギャップが加速電場であれば 2 番目のギャップ 2 は減速電場になっている。つまり、ある時間についてみると、各ギャップには減速電場と加速電場が交互に現われている。

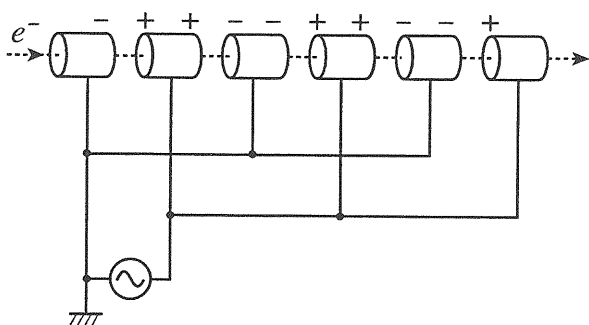
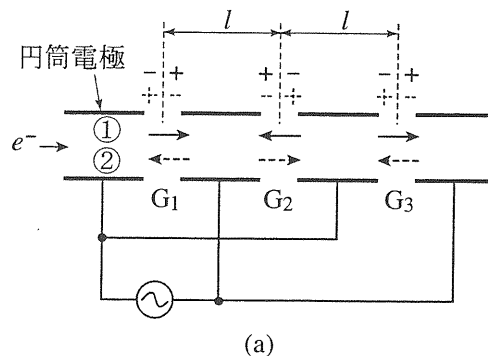


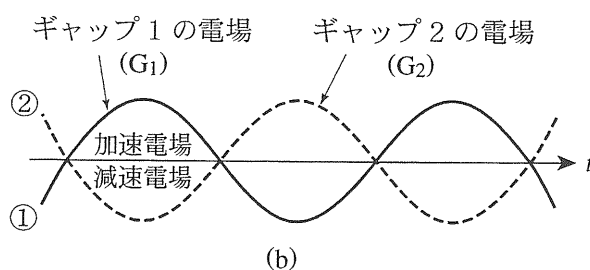
図 2.7 図 2.4 (a) の直流電圧 V_1 を高周波電圧に置き換えた場合

電子がギャップ 1 (G_1) を通過する時に加速され、ギャップ 2 (G_2) を通過する時にも加速されるためには、電子が円筒内を通過し、次のギャップに達したときに、高周波の位相が逆転 (180° 変化) していればよい。このような関係を保つためには、ギャップと次のギャップの間の距離を l とし、電子の速度を v としたときに、高周波の周期 T_{rf} は次のようになっていなければならない。

$$\frac{T_{rf}}{2} = \frac{l}{v} \quad (2.1)$$



(a)



(b)

図 2.8 (a) 図 2.7 の場合の電場の様子、(b) ギャップ 1 (G_1) とギャップ 2 (G_2) の電場の時間変化

電子の速度が一定であり、かつ (2.1) 式の関係が満たされれば、正しい位相で入射された電子はすべてのギャップで加速されることになる。実際には、(1) 電子の速度はほぼ光速であるから、ギャップ間距離 l が長くなりすぎることに、(2) l を短くするためには周波数を上げて周期 T を小さくせねばならないが、構造上の問題で周波数を上げることが困難であること、のために、図 2.7 に示すような加速システムは電子の加速には適さない。図 2.7 のような加速システムを現実的なサイズで構成するには、粒子の速度の小さいイオンの加速に限定される。ただし、この場合には加速するにつれて粒子の速度が上がるので、中空円筒の長さもそれに合わせて長くしていく必要がある。これについては後で述べる。

2.3.2 円形加速器の場合

前述のように、円形加速器で繰り返し加速を行うためには、高周波加速空洞を用いて電磁場を空洞の外に出さないようにせねばならない(図 2.9 (a))。また粒子が空洞を通過する時、常に加速電場を見るためには、図 2.9 (b) に示すように高周波の周波数 (f_{rf}) が粒子の回転周波数 (f_{rev}) と同じか、その整数倍になっていなければならない。 $f_{rf}/f_{rev} = h$ はハーモニック数 (harmonic number) と呼ばれている。高周波加速器では、粒子は小さなかたまりとなって加速される。これを普通バンチ (bunch) と呼んでいる。なぜバンチが形成されるかについては後で述べる。図 2.9 (b) には粒子のバンチが加速電場の最も大きくなったところ (山の頂上) で加速されるように書いてある。しかし、円形加速器で粒子を安定に加速するには、後述のように、山の中腹で加速することが必要である。

表 1 はいくつかのシンクロトロン、回旋加速器の周長、回転周波数、加速周波数、ハーモニック数等をまとめたものである。

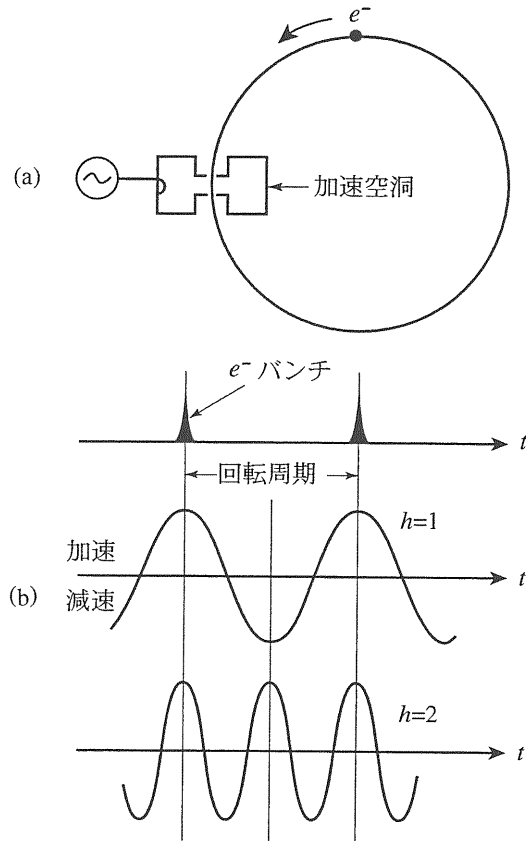


図 2.9 (a) 高周波電場による繰り返し加速、
(b) バンチの回転周期と加速周波数のハーモニック数

表 2.1

加速器	エネルギー [GeV]	周長 [m]	回転周期 [μ s]	回転周波数 [MHz]	加速周波数 [MHz]	ハーモニック数
PSB	0.04~0.5	37.7	0.444~0.166	2.25~6.03	2.25~6.03	1
PSM	0.5~12	339	1.49~1.13	0.67~0.88	6.03~7.93	9
JPR	3.0	348	1.47~1.08	0.68~0.93	1.36~1.86	2
JPM	50	1568	5.39~5.23	0.186~0.191	1.67~1.72	9
PFR	2.5	187	0.624	1.603	500.1	312
SP-8	8.0	1436	4.79	0.209	508.6	2436
KEKB	3.5, 8.0	3018	10.1	0.099	508.9	5120

表 2.1 の第 1 列の加速器名の略称はそれぞれ以下の加速器を表わしている。

PSB : KEK 陽子シンクロトロン・ブースター

SP-8 : SPring-8 蓄積リング

PSM : KEK 陽子シンクロトロン・主リング

KEKB : KEK-B ファクトリー

JPRC : J-PARC RCS

JPM : J-PARC 主リング

PFR : KEK 放射光リング

3. 電子の加速と陽子の加速

3.1 概観

電子の持つ静止質量と静止エネルギーは次のようになる。

$$\text{静止質量} \quad m_0 = 9.1094 \times 10^{-31} [\text{kg}]$$

静止エネルギー

$$\begin{aligned} E_0 &= m_0 c^2 = 9.1094 \times 10^{-31} [\text{kg}] \\ &\quad \times (2.9979 \times 10^8 [\text{m/s}])^2 \\ &= 8.187 \times 10^{-14} [\text{J}] \\ &= (8.187 \times 10^{-14} [\text{J}] \\ &\quad / 1.602 \times 10^{-19} [\text{J}/\text{eV}]) [\text{eV}] \\ &= 0.511 [\text{MeV}] \end{aligned}$$

陽子の持つ静止質量と静止エネルギーは次のようになる。

$$\text{静止質量} \quad m_0 = 1.6726 \times 10^{-27} [\text{kg}]$$

$$\text{静止エネルギー} \quad E_0 = m_0 c^2 = 938.2 [\text{MeV}]$$

電子は軽いので簡単に光速近くまで加速され、それ以後のエネルギー増加は質量の増加によって与えられる。一方、陽子の静止質量は電子の1836倍であり、同じエネルギーを得ても（同じ電圧で加速されても）速度の上がり方は電子に比べて遥かに少ない。

図 3.1 は (1.17) 式を用いて粒子の運動エネルギー E_k と $\beta (=v/c)$ との関係を計算したものである。図には電子 (e)、陽子 (p)、重陽子 (d)、ヘリウム原子核 (α) の場合について示してある。また、図中にいくつかの各種加速器のエネルギー範囲も記入した。図より明らかなように、KEK の電子ライナック、PF リング、KEKB のような電子の加速器では（ライナックの最初の部分を除いては）全加速領域で電子の速度は殆ど光速である。これに対して陽子ライナック、陽子リングの動作領域は、光速の数パーセントからほぼ光速までの広範囲に亘っている。このことは陽子加速器と電子加速器の加速構造、加速システムに大きな違いを生じさせている。

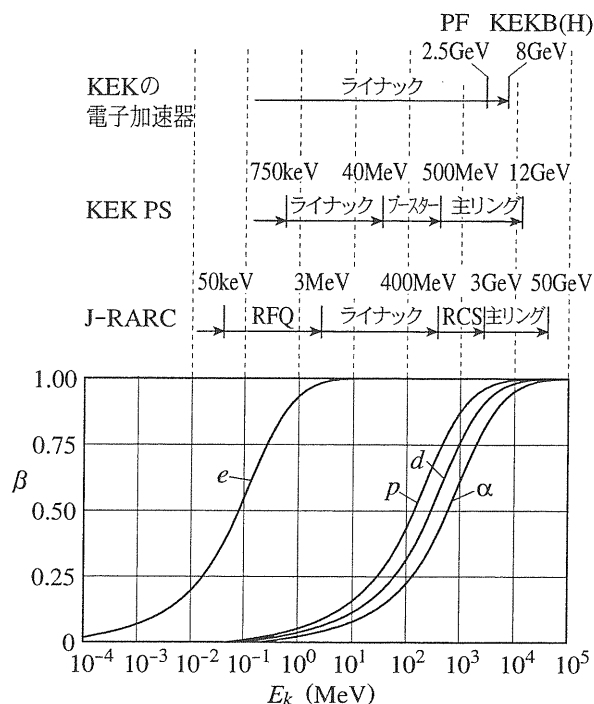


図 3.1 粒子の運動エネルギー E_k と $\beta (=v/c)$ との関係 (e : 電子、 p : 陽子、 d : 重陽子、 α : ヘリウム原子核)

粒子の速度という点から陽子加速器と電子加速器を見れば、次のようにまとめることができるであろう。

線形陽子加速器

陽子は加速するにつれて速度がどんどん上がっていくので、加速構造は速度の変化に対応したものでなければならない。

線形電子加速器

電子の速度は 10MeV 以上ではほぼ光速としてよいので、最初の部分を除いて、電子の進行方向への加速構造の変化は必要ない。

陽子シンクロトロン

陽子の回転周波数は加速するにつれて高くなるので、加速周波数もそれに合わせて変えていく必要がある。加速システムも周波数変化に対応したものでなければならない。

電子シンクロトロン

電子の回転周波数は一定なので、加速周波数は一定でよい。

3.2 線形加速器

3.2.1 線形加速器での陽子の加速

陽子は加速されるにつれて速度が増すので、図 2.7 のような方法で加速するためには、図 3.2 に示すように後にいくほど円筒（ドリフト管）の長さを長くせねばならない。図 3.2 の構造を持つ加速器を最初に実験したのは R. Wideroe であり、加速装置はガラス製の真空容器に入っていた。この型の加速器はヴィデレー型線形加速器と呼ばれている。ちなみに、R. Wideroe は電子の円形加速器であるベータトロンの原理の着想を得て、初めてその設計をした人でもある。

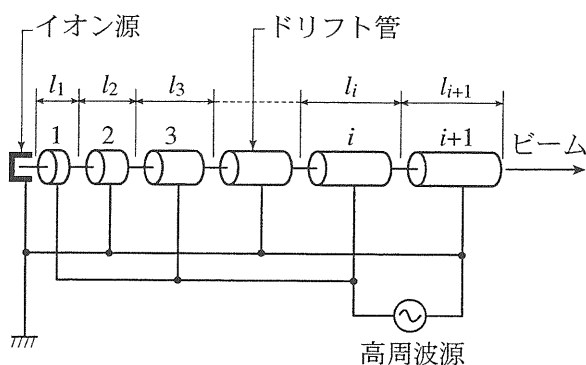


図 3.2 ヴィデレー型線形加速器

図 3.2 の構成で陽子を加速するには、それぞれのドリフト管の長さを次のように変えねばならない。 i 番目のドリフト管での陽子の速度を v_i とすれば、 $(i-1)$ 番目のギャップと i 番目のギャップとの間の距離 l_i は、(2.1) 式より次のように表わされる。

$$l_i = \frac{v_i T_{rf}}{2} = \frac{v_i}{2 f_{rf}} = \frac{v_i \lambda_{rf}}{2c} = \beta_i \frac{\lambda_{rf}}{2} \quad (3.1)$$

ただし、加速周波数 $f_{rf} (= c/\lambda_{rf})$ は一定とし、 β_i は比速度 v_i/c である。ドリフト管の長さを運動エネルギーで表わすことを試みる。非相対論的速度 ($v \ll c$) を仮定すれば、 i 番目のドリフト管での陽子の運動エネルギー $E_{k,i}$ は

$$E_{k,i} = \frac{1}{2} m_0 v_i^2 \quad (3.2)$$

と表せる。したがって、(3.1) 式の l_i は

$$l_i = \frac{1}{f_{rf}} \sqrt{\frac{E_{k,i}}{2m_0}} \quad (3.3)$$

となり、ドリフト管の長さは陽子の運動エネルギーの平方根に比例する。

このように、この型の加速器はエネルギーが増加し、速度が上がるほどドリフト管を長くせねばならない。加速器を手ごろな大きさに抑えるためには、(3.1) 式から明らかなように、加速周波数を高くして周期 λ_{rf} を小さくすることが必要である。しかし、第 2 次世界大戦以前は 10 [MHz] 以上の周波数で出力の大きな高周波源を得ることができなかったし、また、図 3.2 のような開構造では、周波数を上げていくと放射損失が増し、加速効率が落ちてしまう。大戦中のレーダー技術開発の成果により、戦後、100 [MHz] 以上の周波数帯で大電力を出すことのできる高周波源が得られるようになった。L. W. Alvarez はこれを利用することにより、図 3.3 に示すような構成の線形加速器を開発した。

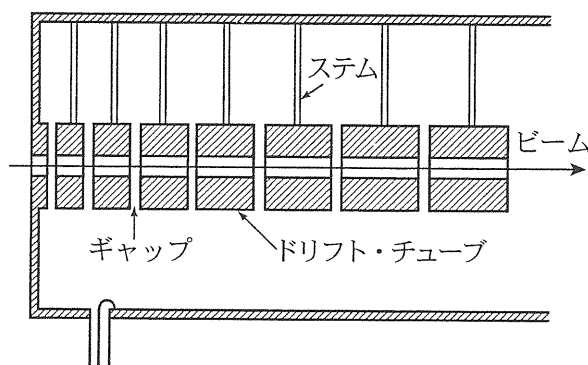


図 3.3 アルバレ型線形加速器

アルバレ型線形加速器では図 3.3 に示すように、電磁波の放射損失を防ぐために、加速セクションは大きな金属製の円筒型空洞共振器の中に入っている。この空洞共振器は加速電界を作り出す役割も果たしている。外部の高周波源からの電力が結合器を介して空洞に供給され、空洞内に TM_{010} モードの電磁場（定在波）を励振する。円筒型空洞共振器の電磁場のモードは、TM モード (transverse magnetic mode) と TE モード (transverse electric mode) に大別される。TM モードでは円筒の軸方向には電場しかなく、磁場は軸に直角な方向にしか成分を持たない。TM モードは TM_{mnp} と表記されるが、添字の m 、 n 、 p はそれぞれ、円筒の周方向、半径方向、軸方向に電磁場の強さが変化する回数を表わしている。したがって、 TM_{010} モードの電磁場は、半径方向には変化するが、周方向と軸方向には変化しない。

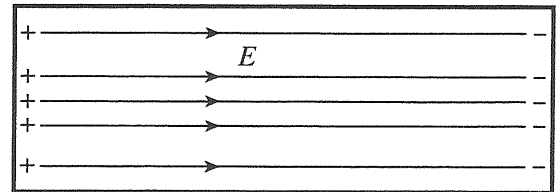
さて、 TM_{010} モードは図 3.4 (a) に示すように、円筒の軸方向にのみ電場を有し、中心軸上で電場が最も強くなる。この空洞の中心軸上に、ウィデレー型と同様の中空円筒のドリフト管を取り付ける。この時の電場は図 3.4 (b) に示すように、主としてドリフト管の間隙に集中し、管内は遮蔽されているので電場は生じない。管内に電場ができない理由は、ドリフト管を円筒形導波管と考えれば、半径が小さいため加速周波数は遮断周波数以下になって、電場が管内に侵入できないことによる。

間隙で加速された陽子が、電場の方向が逆になる間はドリフト管の中を走っていて、再び加速電場になったときに次の間隙に現れるようにすれば、加速が継続される。図 3.2 のヴィデレー型の場合には、陽子がドリフト管の中を走る時間は加速周波数の半周期であったが、アルバレ型では 1 周期になる。したがって、アルバレ型のドリフト管の長さは、エネルギー、周波数などが同じ条件の場合にヴィデレー型の 2 倍になる。すなわち、ヴィデレー型の l_i を表わす

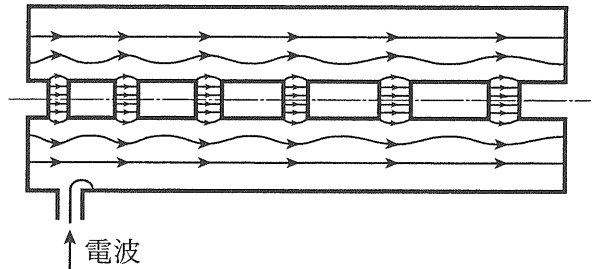
(3.1) 式は、アルバレ型では

$$l_i = \beta_i \lambda_{rf} \quad (3.4)$$

となる。



TM_{010}
(a)



(b)

図 3.4 (a) 円筒型空洞共振器の TM_{010} モードの電磁場分布、(b) 円筒空洞内にドリフト管を入れた場合の電場分布

通常、ドリフト管の中には、ビーム集束用の 4 極電磁石が組み込まれており、そのための電力や冷却水はドリフト管を支えるステム (stem) を通して供給される。アルバレ型のように、加速管が空洞共振器から成り、空洞内に立つ定在波で加速するタイプの加速器を定在波型加速器という。

アルバレ型線形加速器は比較的低エネルギーの低い陽子やイオンの加速に広く用いられている。数 10 [MeV] 程度あるいはそれ以上のエネルギーの陽子を得るための有力な加速器であると共に、陽子シンクロトロンなどの入射器としても多く使用されている。加速する粒子の速度が遅い (1 [MeV] の陽子で $\beta \approx 0.05$) ので加速周波数は 200 [MHz] 程度である。アルバレ型線形加速器は粒

子の速度が増すと、ドリフト管の長さが長くなり、加速効率が落ちてしまうので、100~200 [MeV] 以上の領域では、結合空洞型等の別の型の加速構造が用いられている。また、アルバレ型は現在では DTL (drift-tube linac) あるいはアルバレ DTL と呼ばれている。

3.2.2 線形加速器での電子の加速

前述のアルバレ型加速器のドリフト管の長さを一定にして、電子の加速器として利用することもできる。しかし、電子の速度は速いので、ドリフト管の長さが長くなる。周波数を高くして λ_g を小さくするにも限度があり、単位長さ当たりの加速エネルギーをあまり高くすることはできない。電子は一定速度で走るのであるから、もっと効率の良い加速方法があるはずである。

円筒形導波管の中を伝搬する電磁波は、いろいろな電磁場のモードを取り得るが、その中には円筒の中心軸上で軸方向を向いた電場を持つモードがある。その中で最も単純なモードは図 3.5 に示すような TM_{01} モードである。もし、

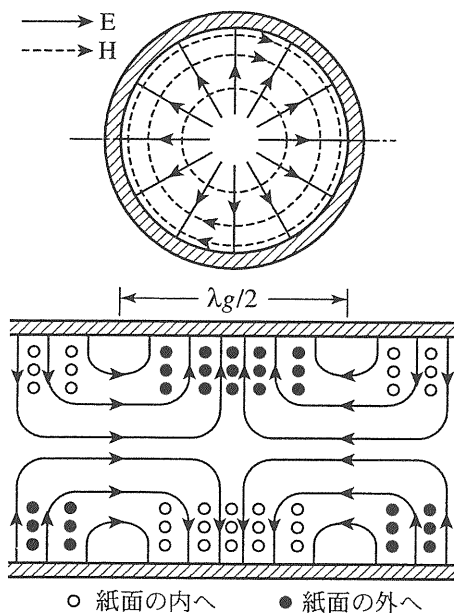


図 3.5 円筒形導波管の TM_{01} モードの電磁界分布

このモードの電磁波が光速で伝搬するのであれば、丁度加速電場に乗るように電子を入射することにより、電子を連続的に加速することができるはずである。しかし、残念なことに、導波管の電磁波モードの伝搬速度、すなわち位相速度は光速よりも速いため、通常の導波管で電子を加速することはできない。

図 3.6 は導波管の伝搬定数 k_z と角周波数 ω との関係を示す曲線、つまり分散曲線である。伝搬波の位相速度 v_p および群速度 v_g はそれぞれ次のように表わされる。

$$v_p = \frac{\omega}{k_z} = \frac{c}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}} \quad (3.5)$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_z} = c\sqrt{1 - (f_c/f)^2} \quad (3.6)$$

ただし、 f_c は考えているモードの遮断周波数である。図 3.6 あるいは上式より分るように、通常の導波管の位相速度 v_p は光速より速い。エネルギーの伝搬速度である群速度は当然光速より遅く、 v_p と v_g との間には

$$v_p v_g = c^2 \quad (3.7)$$

の関係がある。

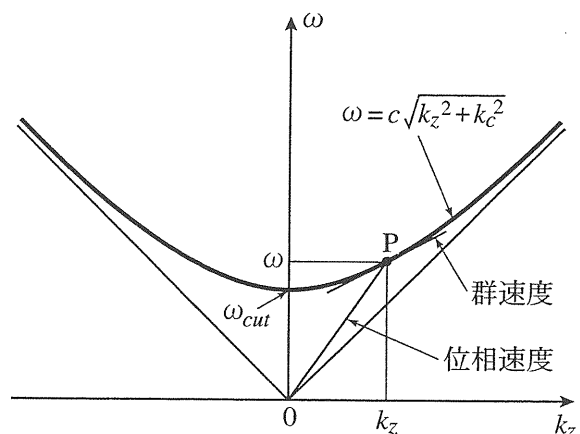


図 3.6 導波管の分散曲線

光速で走る電子を連続的に加速するためには、何らかの方法で導波管のモードの伝搬速度を遅くして、電子の速度と合わせる必要がある。一般に、電子ビームと電磁波をある区間に亘って相互作用をさせるために、電磁波の位相速度を遅くするように工夫した伝送線路は、遅波構造 (slow-wave structure) あるいは遅波回路などと呼ばれている。例えば、マイクロ波の発振・増幅用の真空管である進行波管 (travelling-wave tube) は、この遅波構造を用いている。どちらも電子ビームと電磁波との相互作用を利用しているが、線形加速器は電磁波のエネルギーを電子ビームに与える装置であり、マイクロ波真空管は、逆に、電子ビームのエネルギーを電磁波のエネルギーに変換する装置である。

このような遅波構造には、図 3.7 (a) に示すような、導線をらせん状に巻いたヘリックス (helix)、図 3.7 (b)~(e) に示すような内部に周期構造を持たせた導波管、図 3.7 (f) に示すような電子ビームが通る中心部を除いて誘電体で満たした導波管などいろいろある。現在、線形電子加速器に専ら用いられている遅波構造は、図 3.8 に示すような、穴あき円板を等間隔で装荷した円筒形導波管である (図 3.7 (d) と同じ)。

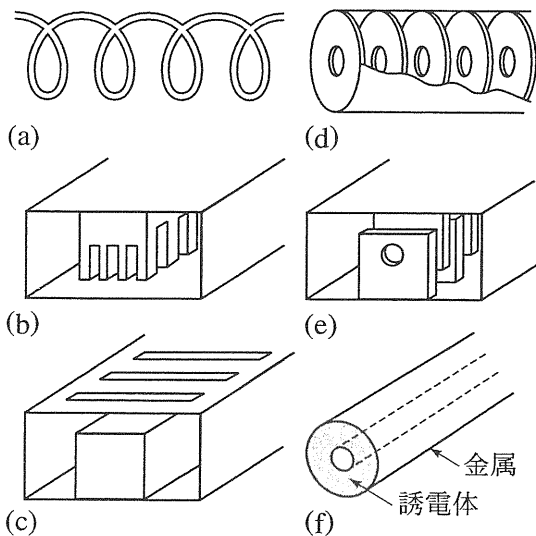


図 3.7 いろいろな遅波構造

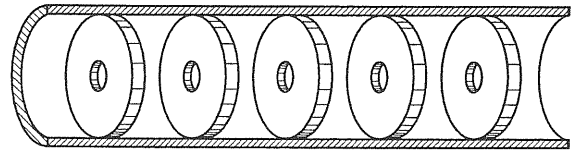


図 3.8 穴あき円板を等間隔で装荷した円筒形導波管

導波管内の伝搬モードの波長、いわゆる管内波長 λ_g (図 3.5 参照) とそのモードの位相速度 v_p との間には、一般に

$$v_p = \lambda_g f \quad (3.8)$$

の関係がある。したがって、 λ_g を短くすれば、 v_p を遅くすることができる。図 3.8 のように、円筒形導波管の中に穴のあいた金属製の円板を等間隔で並べると、電磁場分布が影響を受けて管内波長 λ_g が変わる。円板の間隔と穴径などを調節することにより λ_g を変え、電磁波の位相速度を電子の速度に合わせることができる。この遅波構造は比較的構造が簡単であり、加速の効率も良く、 v_p を精度良く調節できる等の利点があるため、多くの線形電子加速器で使用されている。

通常の導波管の場合は、遮断周波数以上のすべての周波数成分は伝搬することができる。しかし、上記のような穴あき円板を等間隔に並べた導波管の場合には、それぞれの円板によって進行波の一部が反射され、それらが干渉する。そのため、波が減衰しないで伝搬できるのは、次のような条件を満たす場合に限られる。すなわち、円板の間隔を d とした場合、波長 λ_g は d の整数倍でなければならない。

$$\lambda_g = md, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (3.9)$$

整数 m は 1 波長当たりの円板の枚数である。隣り合う円板の間の位相差は

$$\frac{2\pi}{m} = \frac{2\pi}{\lambda_g} d = k_z d, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (3.10)$$

となる。 k_z は伝搬定数（位相定数）である。原理的には数多くのモードがあるが、実際に加速に用いられているモードは次の3つである。

m (1波長当たりの円板数)	λ_g (波長)	$2\pi/m$ (円板間の位相差)
2	$2d$	π
3	$3d$	$2\pi/3$
4	$4d$	$\pi/2$

加速管内の電磁場モードの呼び方として、円板の数が1波長に2枚の場合 ($m=2$)、円板の間の位相差は π になるので π モード、同様に1波長に3枚の場合 ($m=3$) は $2\pi/3$ モード、4枚の場合 ($m=4$) は $\pi/2$ モードと呼ばれている。図 3.9 に $\pi/2$ 、 $2\pi/3$ および π モードの場合の軸方向電場分布を示す。

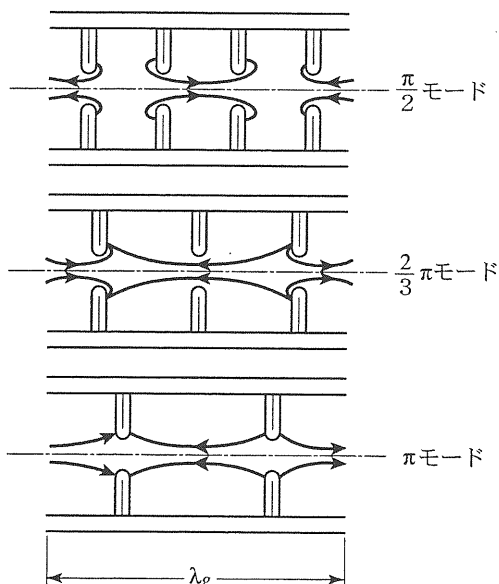


図 3.9 $\pi/2$ 、 $2\pi/3$ および π モードの場合の軸方向電場分布

図 3.10 は円板を装荷した導波管の分散特性であり、 $2\pi/3$ モードの位相速度を光速に合わせた場合を示している。遮断周波数 ω_{cut} は通常の導波管の場合と少し異なる。このような分散曲線はブリルアン・ダイアグラム (Brillouin diagram) と呼ばれている。

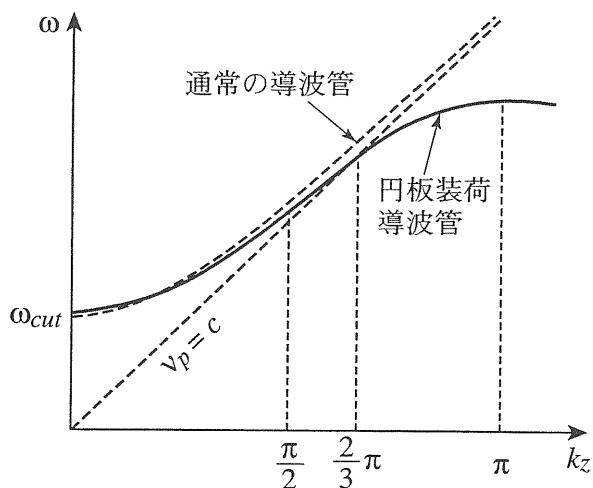


図 3.10 円板装荷導波管の分散特性

一般に、円板を装荷した導波管のように周期構造を持つ伝送線路には無数の空間高調波が存在し得る。通常、加速に使用するのは最も大きな振幅を持つ基本波である。加速効率の目安となる単位長当たりのシャント・インピーダンス r は次のように定義されている。

$$r = -\frac{E_z^2}{dP/dz} \quad (3.11)$$

E_z は電子ビーム速度と同じ位相速度を持つ空間高調波の軸上の加速電場の大きさであり、 dP/dz は導波管の単位長当たりの高周波損失である。

(3.11) 式が示すように、単位長当たりのシャント・インピーダンスが高いということは、同じ高周波損失でより高い加速電場が得られるということを意味する。1波長あたりの円板の数を変えて、進行波の場合のシャント・インピーダンスを求めると図 3.11 のようになる。 $2\pi/3$ モ

ード ($m=3$) の場合が最もシャント・インピーダンスが大きく、次に大きいのは $\pi/2$ モード ($m=4$) である。

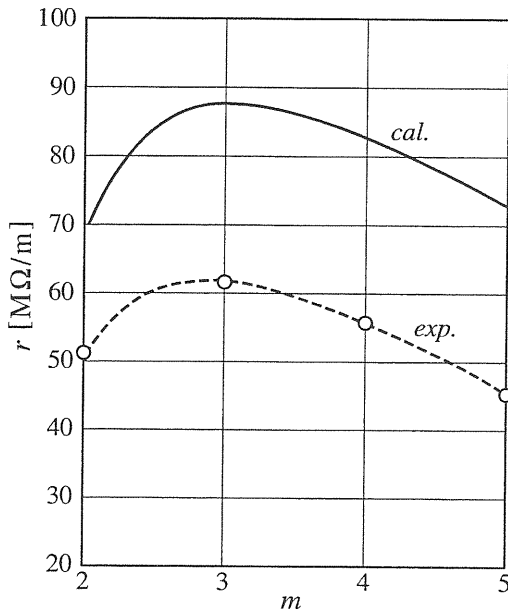


図 3.11 1 波長当たりの円板の数 m とシャント・インピーダンス r との関係

π モードの場合は、それぞれの円板からの反射波がすべて同位相で重なるので、定常状態では入射波と反射波は同じ大きさになり、完全な定在波になる。したがって、加速管全体が一種の空洞共振器として働き、定在波型の加速器となる。これに対して $\pi/2$ 、 $2\pi/3$ モードのように、電磁波が粒子ビームと共に加速管の中を進行するようなタイプの加速器を進行波型加速器という。

π モードの場合、トータルのシャント・インピーダンスは空間高調波の $n=0$ の分と $n=-1$ の分との和になるので、前進波のみの $2\pi/3$ モードのシャント・インピーダンスよりも大きくなる (図 3.11 の $m=2$ (π モード) の場合は $n=0$ の基本波のみの結果を示している)。 Q 値も π モードの場合が最も大きい。 π モードの欠点は、モード間の相互作用を起こし易く、これを防ぐために一つの加速管の中のセル数を多くできない

ことである。したがって、独立の RF フィード系を必要とする加速管の数が多くなるため、RF システムが複雑になり、建設費用も増大する。 π モードのもう一つの難点は、定在波型であるため加速管内に電場を立ち上げるための時間 (filling time) が長いことである。このためパルス運転の加速器には不向きである。以上のような理由から、線形電子加速器用の加速モードとしては $2\pi/3$ モードが多く使われている。

線形加速器では、粒子は各加速空洞で 1 回しか加速されない。したがって、加速空洞に非常に高い電圧を加えねばならないため、空洞の冷却の関係から、パルスのしか空洞を励振できない。そのため、線形加速器からは、パルスビームしか得られない。勿論、超伝導空洞を用いれば冷却の問題はなくなるので、連続ビームが得られる (例: TJNAF の 5.7 [GeV] recirculating linac CEBAF)。常伝導空洞ではパルス運転であるから、最大加速電場を制限するのは熱の問題ではなく、表面の状態に依存する放電の問題である。現在、KEK の S バンド (2856MHz) ライナックは 15 [MV/m] 以上の加速電場で運転されており、X バンド (11.4GHz) の GLC (Global Linear Collider) では 50 [MV/m] 以上の加速電場を目指している。

3.3 円形加速器 (シンクロトロン)

3.3.1 シンクロトロンでの陽子の加速

3.3.1.1 周波数の変化

陽子シンクロトロンでは、加速するにつれて陽子の回転周波数上がるので、それに合わせて加速周波数を変化させねばならない。粒子の速度を v 、回転周期を T 、平衡軌道を C ($=2\pi R$ 、 R : 全周長 C を 2π で割った値でリングの平均半径と呼ばれる) とすれば、それらの間の関係は次のように表わされる。

$$T = \frac{C}{v} \quad (3.12)$$

ハーモニック数を h とすれば、加速周波数 f_H は (1.22) 式を用いて次のように表せる。

$$f_{rf} = h \frac{v}{C} = hf_0 \beta$$

$$= hf_0 \frac{cp}{\sqrt{E_0^2 + p^2 c^2}} \quad (3.12a)$$

ただし、 $f_0 = c/C$ は陽子の速度が光速に達した場合の回転周波数である。上式の p として 4 章の (4.4) 式を用いれば、(3.12a) 式は次のように表わすことができる。

$$f_{rf}(t) = hf_0 \frac{B(t)}{\sqrt{B^2(t) + (E_0/q\rho c)^2}} \quad (3.13)$$

(3.13) 式は時間の関数としての偏向磁石の磁場の強さ $B(t)$ と加速周波数 $f_{rf}(t)$ との関係を示している。加速周波数は (3.13) 式に従って、磁場の立上がりに同期して変化していかなければならない。図 3.12 は一例として、磁場 $B(t)$ が直線的に上昇する場合に、曲率半径 ρ を一定に保つための加速周波数 $f_{rf}(t)$ を示している。陽子シンクロトロンでビームを安定に加速するためには、実際の磁場の変化に応じて加速周波数を精密に追従させることが重要である。磁場の信号を用いた加速周波数プログラムだけでは不十分なので、ビームの軌道を検出してそれを周波数にフィードバックすることが必要である。

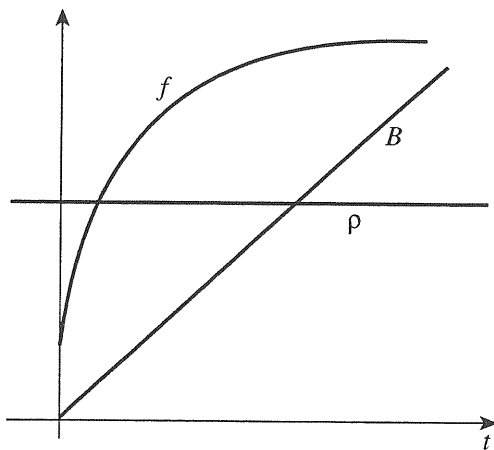


図 3.12 偏向磁石の磁場の強さ $B(t)$ と加速周波数 $f_{rf}(t)$ の関係の一例

加速周波数が時間と共に変化していくので、十分な加速電圧を出すためには、加速空洞の共振周波数もそれに合わせて変えていかなければならない。空洞のインダクタンスを L 、キャパシタンスを C とすれば、空洞の共振周波数 f_r は次のように表せる。

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (3.14)$$

共振周波数 f_r を変えるには L か C を変えればよい。 C を変えるとすれば電子的な方法では困難なので、機械的に可変することになるが、可変幅を大きくし、しかも高速で変化させることは難しい。したがって、現在の陽子シンクロトロンに用いられる加速空洞は、殆どが空洞内にフェライトを装荷し、それにバイアス磁場を加えることにより、透磁率 μ を変えてインダクタンス L を変える方式をとっている。

3.3.1.2 空洞の構造

陽子シンクロトロン用加速空洞の基本となっているのは同軸線の $1/4$ 波長共振器である。図 3.13 は同軸線の一端を短絡し、他端を開放して、

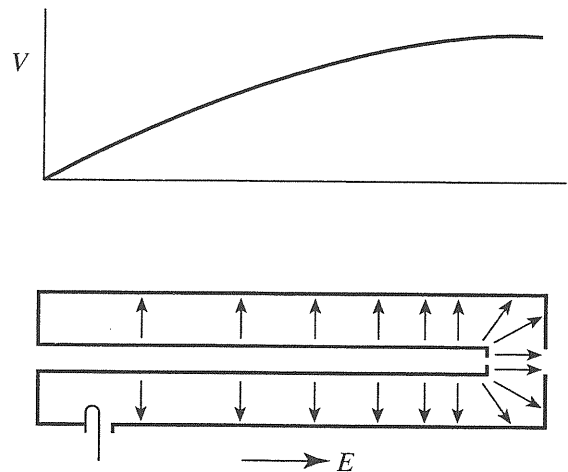


図 3.13 同軸線 $\lambda/4$ 共振器の電圧および電場分布

同軸線の長さが丁度波長の 1/4 になるような周波数で励振した場合の電圧および電場の分布を示している。 $\lambda/4$ 共振器となって開放端に大きな軸方向電場が発生する。もう一つの $\lambda/4$ 共振器を向い合わせに並べて逆位相で励振すれば、2 倍のギャップ電圧が得られることになる。

図 3.14 はフェライト装荷空洞の基本ユニット（セル）であり、フェライト・リングを装荷した二つの $\lambda/4$ 共振器から成る。高周波源をプッシュプル・アンプにすることにより、二つの共振器を逆位相で励振することができる。

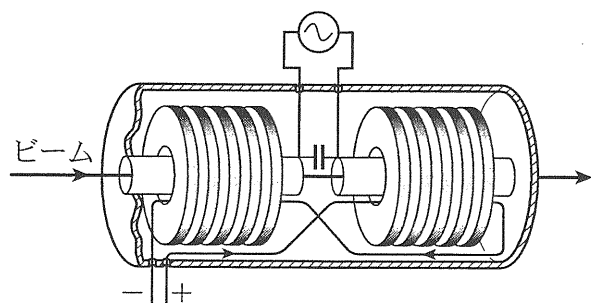


図 3.14 フェライト装荷空洞の基本構造（セル）

図 3.14 に示すように、フェライト・リングに 1 ターンの導線を巻いて電流を流し、フェライト中にバイアス磁場を発生させて透磁率 μ の値を変える。 μ 値の変化幅としては 100 : 1 位までとれるので、周波数可変範囲としてはフェライトの占積率を考慮しても 10 : 1 近くまで可能である。バイアス巻き線は空洞の中を通るので、巻き線に高周波電圧が誘起され、バイアス電源の故障や不調の原因となる。図 3.14 のように 8 の字型に巻けば、二つの半セルで誘起される高周波電圧は相殺される。

3.3.1.3 空洞の伝送線モデル

加速空洞を伝送線モデルで考えると、線路の伝搬定数 β と特性インピーダンス Z_0 はそれぞれ次のように表わされる。

$$\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \quad (3.15)$$

$$Z_0 = 60 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (3.16)$$

ただし、 μ_r および ϵ_r はフェライトの比透磁率および比誘電率であり、 a および b はフェライト・リングの内半径および外半径である。

次に、終端が短絡された伝送線の入力インピーダンス、つまり、この場合は加速ギャップから短絡端を見たインピーダンス Z_{in} は次のように純リアクタンスで表わされる。

$$Z_{in} = j Z_0 \tan(\beta l) \quad (3.17)$$

ただし、 l はギャップから短絡端までの距離である。上式より $\beta l < \pi/2$ の場合、線路は誘導性リアクタンスになっているから、ギャップのキャパシタンス（付加キャパシタンスも含む）を C とすれば、

$$Z_0 \tan(\beta l) = \frac{1}{\omega C} \quad (3.18)$$

が共振条件となる。

フェライトは空洞の共振周波数を変えるために用いられるが、空洞の長さを短くする役割も果たしている。(3.15) 式に示されるように、伝搬定数 β は $\mu_r \epsilon_r$ の平方根に比例する。例えば、 $\mu_r = 200$ 、 $\epsilon_r = 15$ のフェライトを密に詰めたとすれば、 β は中空の場合の 55 倍になるから、必要な βl を得るための長さ l は 1/55 になる。数値例をあげれば、周波数 2 [MHz] の同軸線の 1/4 波長は 37.5 [m] であるが、上記のフェライトを密に詰めれば 68 [cm] になる。

3.3.1.4 加速空洞の例

図 3.15 に KEK の陽子シンクロトロンで使用されている加速空洞を示す。二つの単位セルが連結されている。バイアス電流の流し方は図 3.14 の場合と異なり、空洞の内導体および外導体に

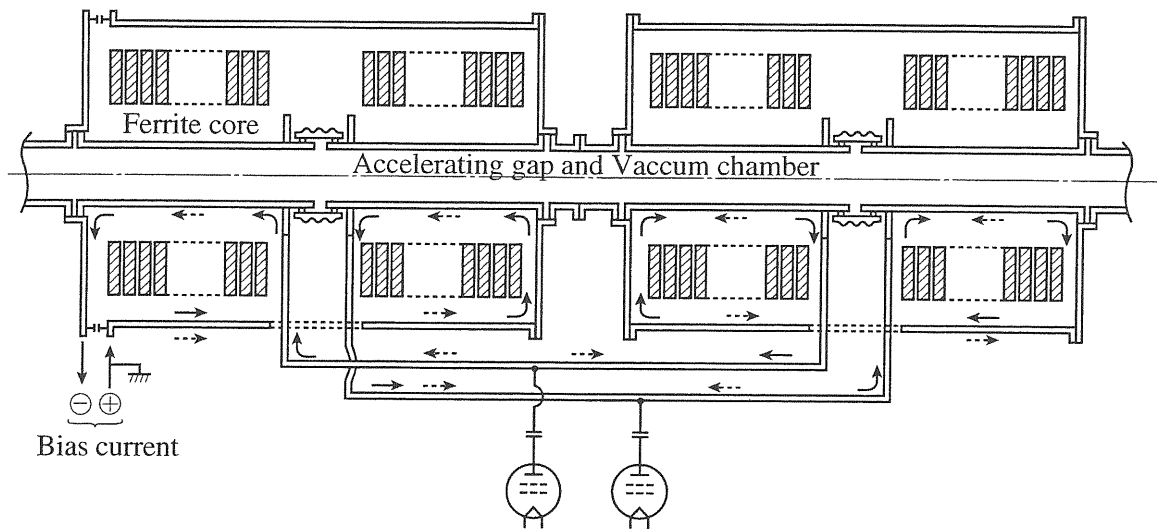


図 3.15 KEK の陽子シンクロトロンで使用されている加速空洞

直接流して、すべてのフェライトに 1 ターンのバイアス磁場を与えている。図中の実線の矢印はバイアス電流の流れの向きを示し、点線の矢印は高周波電流の向きを示している。図のように 2 セルの空洞を連結してバイアス電流を流すことにより、バイアス電流に乗る高周波の影響を除くことができる。例えば、左側のセルで高周波電流がバイアス電流と同一方向であれば、右側のセルでは逆方向になって相殺され、バイアス電源に入り込む高周波を防ぐことができる。

3.3.1.5 MA 空洞

これからの陽子シンクロトロンでは、ビーム電流強度の増大、繰り返し周波数の増加、それらに伴う直線部の有効利用等のために、単位長当たりの加速電圧を上げることが望まれている。しかし、フェライトには 0.01 [T] 以上の磁場で高周波損失が急速に増大する現象があり、加速空洞として得られる電圧は 15 [kV/m] 位が限度である。最近、非常に大きな透磁率を持つ軟磁性合金 (magnetic alloy; MA) の開発が進展している。J-PARC (当時は JHP) 用の加速空洞開発の初期の段階で、MA の一種で超微細結晶粒組織を持つ Fe 基軟磁性合金 (以下 MA と略称) は、非常に高い磁場 (> 0.2 [T]) まで高周波特性の変

化がないことが見いだされた。

図 3.16 は高周波磁場 B_{rf} を変えた時の MA の μQf 値の測定値を示す。 μQf 値は MA を空洞に装荷した時のシャント・インピーダンスに比例する量であり、大きい方が同じ電力で高い加速電圧を出すことができる。

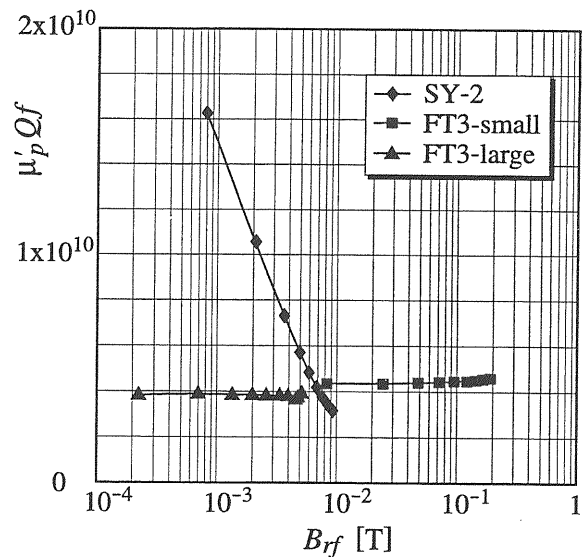


図 3.16 MA コアの μQf 値の高周波磁場依存性 (SY-2 はフェライト)

図中の μ'_p は MA を並列等価回路で表わしたときの比透磁率の実数部、 Q はいわゆる共振回路の良さを表わす Q 値、 f は [GHz] で表わした周波数である。FT3 は MA のサンプル名、SY-2 は典型的特性を持つフェライトのサンプル名であり、比較のためにプロットした。FT3 については小さいコアと大きいコアの結果が示されているが、大きいコアでは手持ちのアンプで出せる B_f が制限されたために、小さなコアでより高い磁場までの測定を継続したものである。測定周波数は小コアの場合には 700 [kHz]、大コアの場合には 3.3 [MHz] であった。

フェライト・コアの製作過程にはプレス成形が入るために、これによって製作できるコアの大きさが制限される。これに対して MA コアは薄いテープ状の MA を巻いてコアを作るので、フェライト・コアより大きなサイズまで製作可能である。MA の単位体積当たりの損失は高磁場 (> 0.2 [T]) でもそれ程大きくなり、また、キュリー点が高く (570°C) 熱に強い。これらのことから、MA コアを用いた加速空洞は 100 [kV/m] 以上の加速電場を達成できる可能性を秘めている。既に 1 セルのプロトタイプ空洞で 50 [kV/m] を得ている。

MA コアのもう一つの特徴は Q 値が低い (1 ~ 10) ことである。 Q が小さくても μ が大きい (数 1000) ので、 $\mu Q f$ 値は図 3.16 に示すような値を保っている。フェライト空洞の場合には Q 値が高い (数 10 以上) ので、必要な加速電圧を出すためには、常に共振状態を保つことが重要であり、バイアス磁場を必要とする。MA 空洞の場合は Q 値が小さいので、空洞の共振周波数を加速周波数に合わせなくても加速電圧を出すことができる。

したがって、バイアス電流を流す必要がなくなり、加速システムは非常に簡単化される。しかし、 Q 値が低いために空洞のインピーダンスは高い周波数まで延びており、ビームの回転周波数の高調波成分によって空洞に電圧が誘起される。この誘起電圧は加速電圧に重畳されて電圧波形を歪めることになる。特に、MA 空洞をビーム強度の大きな加速器で使用する場合は、このビーム誘起電圧を何らかの方法で抑制する

ことが、安定な加速を得るために不可欠である。

3.3.2 シンクロトロンでの電子の加速

3.3.2.1 概論

円形電子加速器 (電子シンクロトロン) の場合には、電子の回転周波数は一定であるから、加速周波数は一定でよい。したがって、原理的には、線形電子加速器の加速構造が利用できる。線形加速器との相違点は次の 2 点である。

(1) 低い単位長当たりの加速電圧

(2) 連続波運転

電子は回転運動をしており、同じ空洞で繰り返し加速できるので、単位長当たりの加速電圧は低くてよい。また、通常のシンクロトロンの回転周期は短い (全長 300m のリングで $1 \mu s$) ので、CERN の LEP (全長 26.7km) のような大きなリングでない限り、連続波運転をせざるを得ない。この連続波運転における空洞の冷却の問題からも、(1) の条件が必要になる。

前の線形加速器の項で、定在波型 (π モード) 加速器は、モード間の干渉を防ぐためにセル数をあまり増やせないことで加速管の数が増加し、経済的でないこと、filling time が長いのでパルス運転には向かないこと、しかし、シャント・インピーダンスは進行波型よりも高いことを述べた。シンクロトロンの場合には、必要電圧が線形加速器ほど高くないから、加速管のセル数は少なくてもよい。また、連続波運転であるから、filling time はあまり問題にならない。このような事情から、電子シンクロトロンの加速構造としては、シャント・インピーダンスの高い定在波型構造である空洞共振器が専ら用いられている。

3.3.2.2 ピルボックス空洞

電子シンクロトロンの加速空洞の基本形は、図 3.17 に示すようなピルボックス空洞 (pill box cavity) と称する、軸方向の長さの短い円筒形空洞である。このような空洞に TM_{010} モードを励振すると図のように軸方向に電場ができ、中心軸上の電場が最も強くなる。そこで、円筒の両端面 (太鼓の腹) の中央に穴を明けて電子ビームを通せば、丁度ビームが通るときに加速する

ように電場の位相を合わせることで、電子ビームを加速することができる。

$$a = \frac{q_{01}c}{2\pi f_r} = \frac{2.4048 \times 2.998 \times 10^8}{2\pi \times 5 \times 10^8} = 0.2295 \text{ [m]}$$

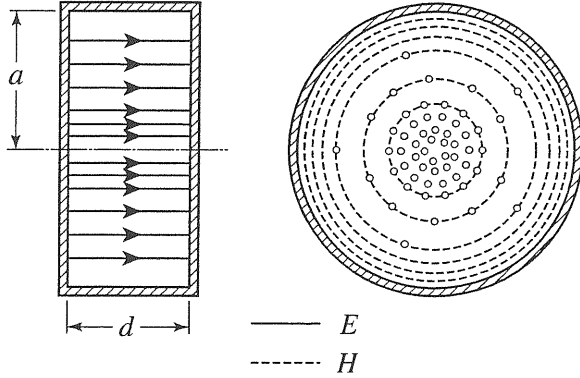


図 3.17 円筒形空洞（ピルボックス空洞）

円筒形空洞の TM_{mnp} モードの共振波長 λ_r と共振周波数 f_r は、それぞれ次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_r &= \frac{2a}{\sqrt{(q_{mn}/\pi)^2 + (pa/d)^2}} \\ f_r &= \frac{c}{\lambda_r} \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

ただし、 a は円筒の半径、 d は長さ、 c は光速 ($= (\epsilon\mu)^{-1/2}$)、 q_{mn} はベッセル関数 $J_m(x)=0$ の n 番目の根である。 TM_{010} モードの場合、 $m=0$ 、 $n=1$ 、 $p=0$ であるから、共振波長と共振周波数は (3.19) 式より

$$\lambda_r = \frac{2\pi a}{q_{01}}, \quad f_r = \frac{q_{01}c}{2\pi a} \quad (3.20)$$

となり、円筒の長さ d には関係しないで、半径 a のみで決る。これは、 $p=0$ であるから、電磁場は軸方向に一様であることによる。ちなみに、中空円筒形空洞が TM_{010} モードで 500 [MHz] で共振するための半径 a を求めると、 $q_{01} = 2.4048$ であるから

となる。

3.3.2.3 空洞の Q 値

加速空洞にとって基本的に重要な量は、 Q 値 (quality factor) とシャント・インピーダンス (shunt impedance) R_{sh} である。 Q 値は共振回路の良さ、あるいは、共振の鋭さの尺度である。 R_{sh} は加速効率を表わす目安、つまり、空洞にある電力を供給したときに得られる加速電圧の大きさの尺度である。 Q 値は空洞の蓄積電力 P_{st} と損失 P_d の比に等しい。

$$Q = \frac{P_{st}}{P_d} = \frac{\omega W_{st}}{P_d} \quad (3.21)$$

ただし、 W_{st} は空洞の蓄積エネルギー、 ω は角周波数である。空洞の蓄積エネルギーは、電氣的エネルギーと磁氣的エネルギーの和であり、それぞれは時間的に逆位相（一方が最大値のとき他方が 0）で変化するが、その和は常に一定である。したがって、磁氣的エネルギーが 0 のときの電氣的エネルギー、あるいは逆に、電氣的エネルギーが 0 のときの磁氣的エネルギーを求めれば、全蓄積エネルギー W_{st} が得られる。前者をとれば

$$W_{st} = \frac{1}{2} \epsilon \int |E|^2 dv \quad (3.22)$$

となる。積分は空洞の全体積について行われる。

一般に、 P_d は空洞の内壁面を高周波電流が流れることによる電力損失と、空洞の中に入っている物質中での損失の和である。電子リング用空洞のように、中空空洞の場合には前者のみを考えればよく、フェライト等を装荷した陽子リング用空洞の場合には後者の方が圧倒的に大きい。ここでは電子リングを扱っているので、空洞壁の損失のみを考える。通常、空洞の内面は

銅でできていて、導電率 σ が大きいために、高周波抵抗は小さく電力損失も小さい。したがって、摂動法が適用でき、無損失 ($\sigma \rightarrow \infty$) として求めた表面磁場 H を用いて、 P_d を次のように求めることができる。

$$P_d = \frac{1}{2} R_{surf} \int |H|^2 ds \quad (3.23)$$

なお、積分は空洞内面全体について行われる。 R_{surf} は表面抵抗 (surface resistance) であり、次のように表わされる。

$$R_{surf} = \sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\sigma}} = \frac{1}{\sigma\delta} \quad (3.24)$$

ただし、 μ_0 は真空中の透磁率、 δ は表皮の深さ (skin depth) であり、高周波電流密度が表面での値の $1/e$ に減少する深さである。ちなみに、銅の場合、周波数 500 [MHz] で $\delta \approx 3 [\mu\text{m}]$ である。銅の導電率を $\sigma = 5.80 \times 10^7$ [S/m] とすれば、表面抵抗は $R_{surf} = 1/(5.80 \times 10^7 \times 3 \times 10^{-6}) = 5.75$ [m Ω] となる。これは理論値であり、実際に得られる値は 1 割増しにして 6.3 [m Ω] 程度と考えればよい。

(3.22) 式の蓄積エネルギー W_{st} と (3.23) 式の損失電力 P_d を (3.21) 式に代入すれば

$$Q = \frac{G}{R_{surf}} \quad (3.25)$$

の形で表わすことができる。 G は空洞の寸法には関係しないで、形状と電磁場のモードによって決る定数であり、幾何学係数 (geometry factor) と呼ばれている。もっとも、係数とは言っても G は抵抗 [Ω] の次元を持っている。上式より、 Q を大きくするには、空洞内面の表面抵抗 R_{surf} を小さくし、空洞の形状を工夫して形状係数 G を大きくせねばならないことが分る。単セル空洞の G は 200~300 [Ω] 程度であるから、500 [MHz] での R_{surf} を 6.3 [m Ω] とすれば、 Q 値は 10^4 のオーダーということになる。

3.3.2.4 加速電圧と間隙係数

シャント・インピーダンスを定義する準備として、空洞で得られる加速電圧と、空洞内の電場の位相が時間的に変化することによって生じ、加速電圧を実質的に減少させる間隙係数について述べる。空洞の加速電圧は、空洞の入口から出口までの間に粒子が受ける軸方向電場 E_z の積分値であるから、次式で表せる。

$$V = \int E_z dz \quad (3.26)$$

進行波で加速する場合は、粒子を電場が最大になる時間に入射すれば、いつまでも同じ位相で加速できる。しかし、図 3.17 に示すような空洞共振器の TM_{010} モードの電場は軸方向には一定であるが、時間と共に変化する。したがって、粒子が進行するにつれて電場の位相は変わってしまう。例えば、電場が減速から加速に転ずるときに粒子が入射されたとすれば、粒子の進行とともに加速電場は増加するが、最大値を過ぎると減少し、粒子の移動距離が半波長 (周波数 500 [MHz] では 30 [cm]) を越えると減速電界になってしまう。したがって、空洞の長さ、あるいは加速ギャップの長さは半波長程度が限度であると考えてよい。空洞の加速電圧はこのような電場の位相変化を考慮して求められる。

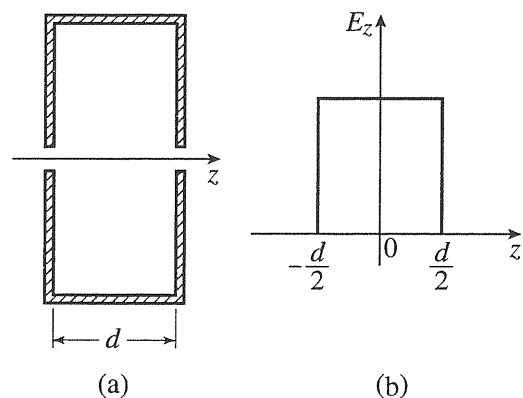


図 3.18 (a) 簡単な加速ギャップ、(b) z 方向電場分布

ここで、図 3.18 (a) に示すような単純な、長さ d の空洞共振器あるいは加速ギャップを考える。ギャップ間の電場 E_z は、図 3.18 (b) に示すように z 方向には一様であるが、時間的には次に示すように、正弦波的に変化すると仮定する。

$$E_z = E_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (3.27)$$

位相 ϕ は粒子が $t=0$ で $z=0$ (ギャップの中央) にいるときの電場の位相である。ギャップを 1 回通過するときを得るエネルギーは、通常、粒子の持っている運動エネルギーよりも遥かに小さいので、ギャップを通過する間に速度の変化はない、つまり $v=dz/dt=\beta c$ 一定としてよい。勿論、 $\beta=1$ のビームであれば、このようなことわり書きも要らないが、ここでは一般的なビームを考えている。(3.27) 式を (3.26) 式に代入して積分することにより

$$\begin{aligned} V &= \int_{-d/2}^{d/2} E_0 \cos(\omega t + \phi) dz \\ &= \left[\frac{\sin(\omega d/2\beta c)}{\omega d/2\beta c} \right] E_0 d \cos \phi \quad (3.28) \end{aligned}$$

を得る。ただし β は比速度 (v/c) である。上式の角括弧内の式は走行時間係数 (transit-time factor) あるいは間隙係数 (gap factor) と呼ばれ、次のように表わされる。

$$\Gamma = \frac{\sin(\omega d/2\beta c)}{\omega d/2\beta c} = \frac{\sin(\theta/2)}{\theta/2} \quad (3.29)$$

ただし

$$\theta = \frac{\omega d}{\beta c} = \frac{2\pi d}{\beta \lambda} \quad (3.30)$$

θ は走行角 (transit angle) と呼ばれる。 λ は自由空間での波長である。図 3.19 は間隙係数 Γ と走行角 θ との関係を示したものである。ギャップの長さが 1/4 波長 ($\theta=\pi/2$) の場合、 $\Gamma=0.900$

であり、半波長 ($\theta=\pi$) の場合、 $\Gamma=0.637$ である。

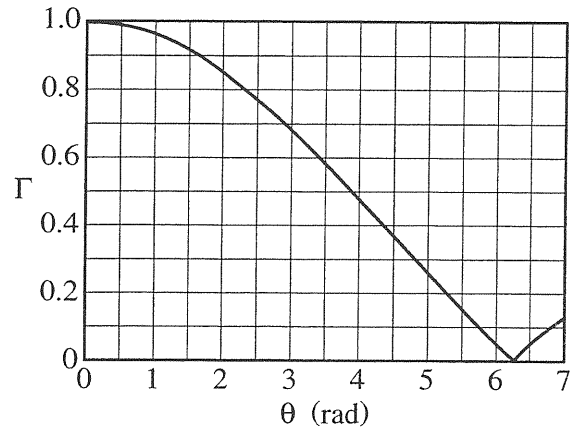


図 3.19 間隙係数 Γ と走行角 θ との関係

3.3.2.5 シャント・インピーダンス

Q 値と共に空洞のもう一つの重要なパラメータであるシャント・インピーダンス R_{sh} は、空洞の加速電圧 V と損失 P_d とを用いて次のように定義される。

$$R_{sh} = \frac{V^2}{P_d} \quad (3.31)$$

上式中の空洞電圧 V は、(3.28) 式より明らかなようにピーク値である。通常の電気回路の解析では、電力を計算するときに電圧、電圧として実効値 (ピーク値の $1/\sqrt{2}$) を用いている。したがって、(3.31) 式の R_{sh} は通常の電気回路の解析で使用される抵抗 R の 2 倍の大きさを持っている ($R_{sh} = 2R$)。加速器では、シャント・インピーダンスを電圧の実効値よりもピーク値と関連付けた方が都合がよいので、(3.31) 式の定義を用いることが多い。ただ、この定義には一般性がなく、混乱を招きかねないので、通常の抵抗の定義と同じにするために、(3.31) 式の分母に 2 を付けて R_{sh} を定義する場合もある。したがって、 R_{sh} を使用する場合は、どちらの定義に基づくものかを確認する必要がある。

空洞に入力した高周波電力 P_{in} によって、空洞に加速電圧 V が励振されるが、ビームのない場合には、 P_{in} はすべて空洞壁面で消費される ($P_{in} = P_d$)。したがって、空洞で得られる加速電圧の最大値 V_{max} は (3.31) 式より

$$V_{max} = \sqrt{R_{sh} P_{d,max}} \quad (3.32)$$

のように表せる。 $P_{d,max}$ は冷却能力によって制限される空洞の最大許容電力である。単セル空洞で得られる最大電圧は通常 1 [MV] 以下である。この電圧でビームを加速する場合は、この空洞損失とビームに供給する電力との和が必要電力ということになる。

さて、シャント・インピーダンスを大きくするには、(3.31) 式が示すように、単位電力を空洞に与えた時の加速電圧 V を大きくし、空洞壁での損失 P_d を減らせばよい。 V を大きくするには、まず、電場をできるだけ中心軸付近に集中させ、軸上の電場 E_0 を大きくせねばならない。

図 3.20 (a) は原形のピルボックス空洞である。同図 (b) のようにビームパイプを空洞の中まで入れることにより、ギャップの電場を強くすることができる。このようにビームパイプが空洞内に突き出したような構造は、ノーズコーン (nose cone) と呼ばれている。(3.28) 式に示されるように、電圧 V は電場 E_0 の他に間隙係数 Γ およびギャップの長さ d の関数でもある。ノーズコーンを付けることにより、 E_0 は大きくなり、 Γ も大きくなるが、 d は短くなるので、 V を最大にするような最適化が必要である。

図 3.20 (a) ピルボックス空洞、
(b) ノーズコーンを付けた空洞、
(c) 空洞内面を丸くした空洞

次に、損失 P_d を減らすためには、(3.23) 式が示すように、表面抵抗 R_{surf} と $\int |H|^2 ds$ を減らさねばならない。 R_{surf} については (3.24) 式より導電率 σ の大きな材料を用いるしかない。図 3.20 (c) は (b) の空洞の角ばったところに丸みを付けた構造になっている。これにより、空洞の内表面積が減るとともに、電流分布が均一化され、流れも滑らかになって、 $\int |H|^2 ds$ を減らすことができる。典型的な実際の空洞の一例として、KEK-PF の初代の加速空洞の断面図を図 3.21 に示す。その後、この空洞は後で触れる HOM 減衰型空洞にとって代わられた。

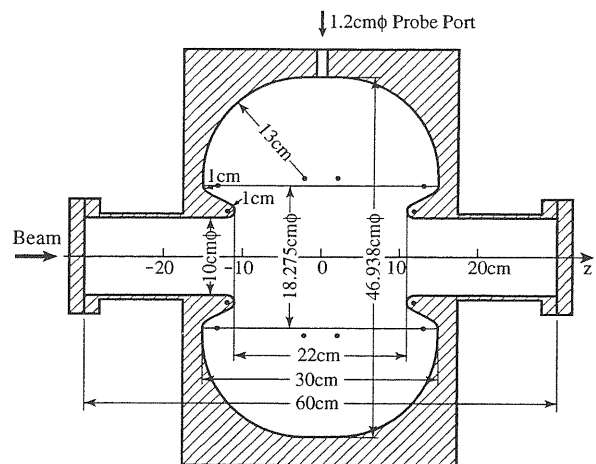
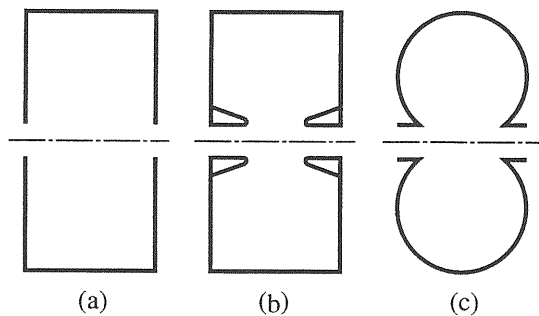


図 3.21 KEK-PF の初代の加速空洞の断面図



3.3.2.6 入力結合器とチューナー

入力結合器は加速空洞にとって非常に重要なコンポーネントである。これは伝送線（通常は導波管）で送られてきた高周波電力を空洞に供給する装置である。図 3.22 は単セル空洞システムの模式図である。空洞の下に付いている部分が入力結合器である。導波管内を TE_{10} モードで伝搬してきた電波は導波管/同軸変換器によ

り、同軸の TEM モードに変換され、セラミック窓を通過した後、結合ループを介して空洞に供給される。セラミック窓 (ceramic window) は真空封じ用であるが、高周波の大電力が通過し、高電圧に曝される苛酷な状況で使用される。したがって、大電力まで安定に動作する入力結合器を設計、製作することが、特にビーム強度の大きい加速器の空洞にとって重要なポイントである。

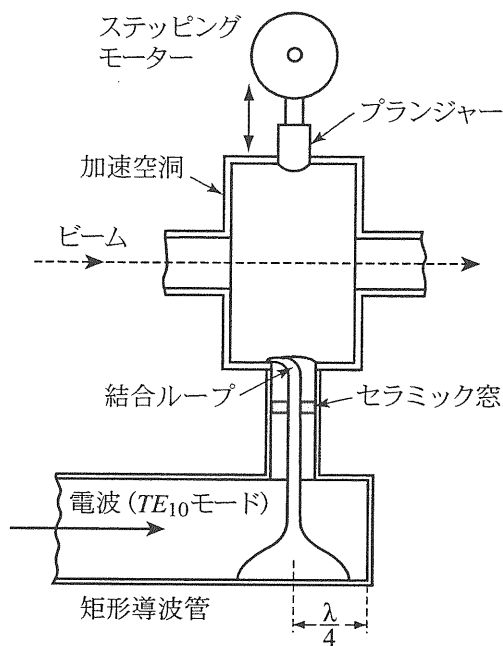


図 3.22 単セル空洞システムの模式図

前述のように、電子シンクロトロンは加速周波数は一定であるから、陽子シンクロトロンのように、大幅に空洞の共振周波数を変える必要はない。しかし、ビームを含めた空洞系の共振周波数は空洞の温度やビーム強度によって変わるので、周波数を補正するための装置が必要である。通常、図 3.22 に示すように、ステッピング・モーターでプランジャー (plunger) を出し入れして空洞の同調をとる。このような装置をチューナー (tuner) と呼んでいる。

このチューナーの原理は次のようなものである。空洞の壁の一部が微小な変形を受けたとする、例えば、内部に少し突き出したとする。そ

の結果、空洞のモードによるが、電気エネルギー、磁気エネルギーのうちのどちらかがより大きな変化を受ける。しかし、それぞれのエネルギーの時間平均値は等しくなければならないので、それが保てるように共振周波数は僅かに変化する。空洞の壁が内部に突き出した場合、それによって排除された元の空洞の部分が磁気エネルギーが優勢であった場所ならば共振周波数は高くなり、電気エネルギーが優勢であった場所ならば共振周波数は低くなる。プランジャーによる共振周波数の調整は空洞のこのような性質を利用している。

3.3.2.7 多セル空洞

エネルギーが数 [GeV] のシンクロトロンであれば、高々 10 台程度の加速空洞で間に合う。しかし、10 [GeV] 以上のエネルギーを得ようとすると、放射損失の増大のため、必要な加速電圧が増大し、空洞台数が急増する。入力結合器も空洞台数だけ必要になるし、高周波電力の分配も複雑になる。また、空洞を設置するスペースの増大も問題になる。したがって、高い加速電圧を必要とする電子シンクロトロンでは、高周波装置の建設費用の削減とトンネル内スペースの有効利用のために、いくつかのセルをまとめた多セル構造の加速空洞が使用される。

多セル構造の場合、線形加速器のように進行波型と定在波型の空洞のどちらも使用することができる。TRISTAN や LEP のような単リング衝突型加速器では、互いに反対方向に回転する電子と陽電子を同じ空洞で加速する必要がある。このような場合には進行波型は使えないので定在波型を使用することになる。定在波は z の正方向に進行する波と z の負方向に進行する波との合成である。 π モードの定在波型加速構造の場合は、電子ビームがいずれの進行波とも結合するので、シャント・インピーダンスが高い。しかし、 π モード型の欠点は、線形加速器の項でも触れたように、モード間の相互作用を起こし易いことである。

多セル構造の場合には、セルの数と同じ数のモードが立ち得る。例えば、9 セル構造であれば、位相定数 k_z が

$$k_z = \pi, \frac{8}{9}\pi, \frac{7}{9}\pi, \dots, \frac{1}{9}\pi$$

となるような 9 個のモードが励振され得る。円板装荷導波管の分散曲線である図 3.10 から類推できるように、 π モードの場合には群速度が 0 ($d\omega/dk_z = 0$) であり、狭い周波数範囲に隣接のモードが存在することになる。その結果、小さな周波数シフトでも隣りのモードを励振してしまうおそれがある。

モード分離の面で有利なモードは $d\omega/dk_z$ が最も大きい $\pi/2$ モードである。しかし、図 3.9 の電場分布から分るように、 $\pi/2$ モードでは半分のセルしか有効に働いていないので、シャント・インピーダンスがあまり高くない。定在波型の多セル空洞としては、実質的には π モードでありシャント・インピーダンスは大きい、 $d\omega/dk_z \neq 0$ となるような構造が研究されてきた。図 3.23 はそのうちの二つの方法を模式的に示したものである。

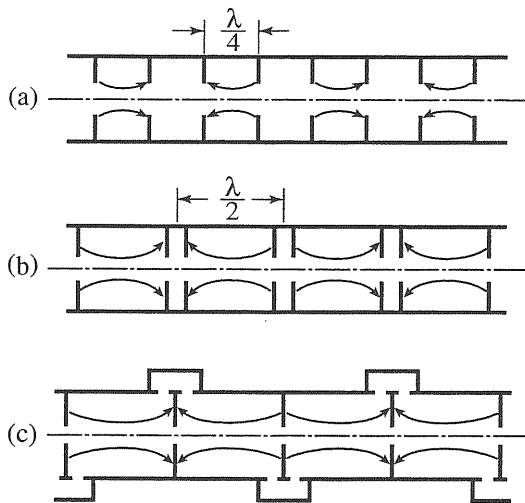


図 3.23 $\pi/2$ モードからの変形を示す模式図：
 (a) $\pi/2$ モード構造、
 (b) Alternating Periodic Structure (APS)、
 (c) Side-coupled Cavity

図 3.23 (a) は円板を等間隔で置いた構造の $\pi/2$ モードを示す。一つおきのセルでしか加速していないので加速効率が良くない。図 3.23 (b) は加速に寄与していないセルを小さくしたものであり、bi-periodic structure あるいは alternating periodic structure (APS) と呼ばれている。小さなセルは単にセル間の結合をしているだけなので、それを側面に出したものが図 3.23 (c) である。これは Side-coupled Cavity と呼ばれ、側面の結合セルは加速電場が非対称にならないように交互に反対位置に取り付けている。図 3.23 (b)、(c) のような構造により $d\omega/dk_z$ が大きいという $\pi/2$ モードの利点を残しながら、シャント・インピーダンスを高めることができる。

図 3.24 に KEK の TRISTAN で使用された APS 構造の 2 連 9 セル空洞を示す。KEK の PF-AR リングでは 12 セル APS 空洞が今も稼動している。

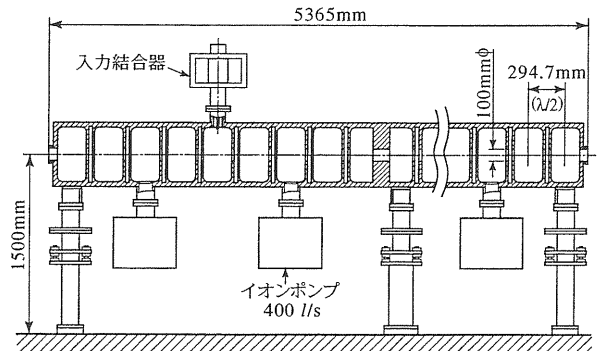


図 3.24 KEK TRISTAN で使用された 2 連 9 セル APS 空洞

3.3.2.8 ビーム強度増大への対応

B-ファクトリーのように平均電流が 1 [A] を越えるような大電流を蓄積するリングでは、ビームが通路の共振構造に誘起する電磁場とビーム自身との相互作用によって生じる結合バンチ不安定性が問題になる。このビーム不安定性の根本的対策はビーム通路のすべての共振構造の Q 値を下げて、ビームと誘起電磁場との結合インピーダンスを小さくすることである。最大のインピーダンス源は加速空洞であるから、まず、

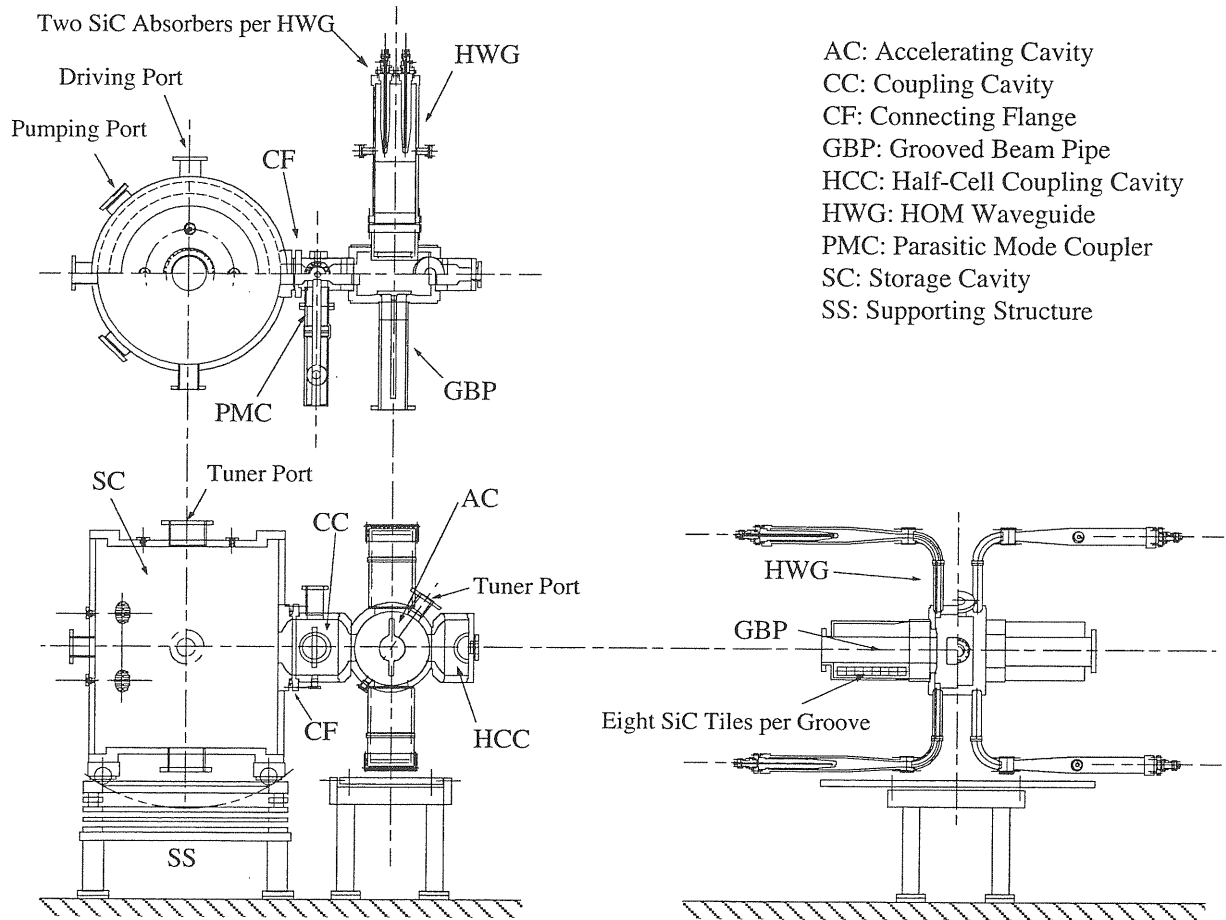


図 3.25 KEKB の高周波加速空洞 ARES

危ないモードの数を減らすために、多セル空洞から単セル空洞に戻らざるを得ない。

加速空洞には、加速に使用するモード（通常は基本モード）の他に、その構造に起因する多数の共振モードが存在し、高次モード（higher-order mode; HOM）と呼ばれている。これらの高次モードは、加速モードの周波数で空洞を励振するときには姿を表わさないが、ビームを通すと、ビームの高調波成分（回転周波数の整数倍の周波数成分）によって、空洞内に誘起される。

高次モードの減衰は、空洞内に生成される高次モードの電磁エネルギーを、空洞外に効率的に取り出すことにより行われる。方法としては、空洞に取り付けた導波管により取り出す方法、ビームパイプ方向に取り出す方法などがある。このようにして高次モードを非常に減衰させた

空洞を、高次モード減衰型空洞（HOM-damped cavity）と呼んでいる。

図 3.25 は KEKB で使用されている ARES 空洞（Accelerator Resonantly coupled with Energy Storage）であり、加速空洞は高次モード減衰型空洞になっている。導波管による HOM の取り出しと溝付きビームパイプからの HOM の取り出しを併用している。

ビーム電流値が大きくなると、空洞の加速モードも結合バッチ不安定性を引き起こす要因となる。図 3.26 (a) は電子リングの高周波大電力システムを単純化して描いたものである。同図 (b) はビームを含めた (a) のシステムを回路モデル化したものであり、高周波源とビームは電流源として表わされ、加速空洞は並列共振回路で表わされている。アドミタンス表示なので、

空洞のシャント抵抗 R_{sh} はコンダクタンス $G_{sh} = 1/R_{sh}$ で表わされ、高周波源の出力コンダクタンスは βG_{sh} で与えられている。 β は伝送線路と空洞との結合係数である。

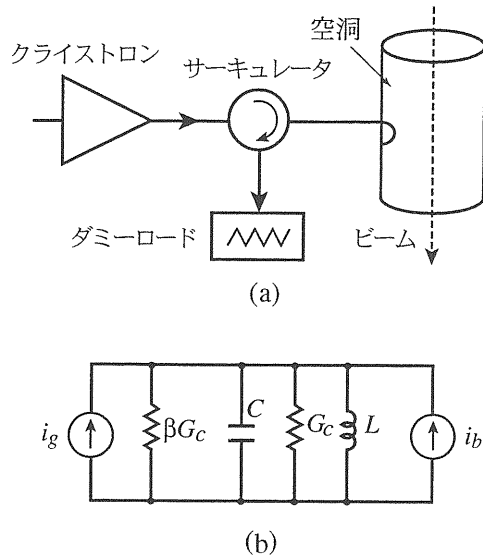


図 3.26 (a) 高周波大電力システムの単純化したブロック図、(b) ビームを含めた (a) のシステムの回路モデル

通常の運転では、空洞からの反射電力を減らし電力の有効利用率を高めるために、高周波源から見た負荷が常に共振するように自動的に制御される。負荷は加速空洞とビームから成り、ビームはリアクティブな成分を持っているので、負荷の共振を保つためには、ビーム強度に応じて、空洞自身の共振周波数を少しずらす（下げる）ことになる。ビーム強度がそれほど大きくないときには、この共振周波数のずれは、むしろ、ビームの安定化にとって好ましい。すなわち、バンチがすべて同位相で振動する、いわゆる 0 モードの結合モード不安定性を抑制するように働く。しかし、ビーム強度が大きくなると、それに伴って共振周波数のずれも大きくなるために、それ以外のモード（-1、-2、-3 モードなど）の結合バンチ不安定性を引き起こすようになる。

ビームによるリアクタンス分を、空洞の逆符号のリアクタンス分で打ち消すためには、空洞自体の共振周波数を次の量だけずらす必要がある。

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_r} = \frac{1}{2} \left(\frac{R_{sh}}{Q} \right) \frac{I_b}{V_c} \sin\phi_s \quad (3.33)$$

I_b はビーム電流値、 V_c は加速電圧、 ϕ_s は後述べる平衡位相である。上式より、周波数ずれ $\Delta\omega$ を小さくするには、加速電圧 V_c をできるだけ高くすることが必要であることが分る。この点に関しては、 V_c を高くすることができる超伝導空洞が有利である。

もう一つ重要なことは、 $\Delta\omega$ が空洞の特性を表わす R_{sh}/Q に比例することである。 $\Delta\omega$ を小さくするには、 R_{sh}/Q の小さな空洞が望ましいということになる。これは、高い R_{sh} を得るためには、大きな R_{sh}/Q が望ましいとされていた従来の概念とは相反するものである。空洞の蓄積エネルギー W_{st} を大きくできれば、 Q が大きくなり、 R_{sh}/Q を小さくすることができる。

KEKB ではエネルギーを蓄積するための専用の空洞を追加することにより、 R_{sh}/Q の値を約 1/10 に下げることができた。これが図 3.25 に示した ARES 空洞であり、加速空洞とエネルギー蓄積空洞が間の結合空洞を介して結合する $\pi/2$ モード方式で運転される。 Q を大きくするが、 R_{sh} をできるだけ下げないように、エネルギー蓄積空洞は低損失の TE_{013} モードで運転される。

3.3.2.9 超伝導空洞

空洞の損失は (3.31) 式から明らかなように、電圧の 2 乗に比例して増加する。銅製空洞の場合、電圧が上がると空洞損失が増大しエネルギー効率が悪くなることと、水冷の限界から、単セル空洞の連続運転時の電圧は 0.5 [MV] 程度に制限される。この損失の源は (3.24) 式で表わされる表面抵抗 R_{surf} である。ニオブなどの金属超伝導体を臨界温度以下に冷却すれば、表面抵抗を極端に減らすことができる。

金属超伝導体の表面抵抗 R_{surf} の温度と周波数依存性は、次のような簡単な式で表わされる。

$$R_{surf} = A \frac{f^2}{T} e^{-\Delta(t)/kT} + R_{res},$$

for $T < T_c/2$ (3.34)

ただし、 A は超伝導体の物質パラメータに依存する定数、 T は絶対温度、 T_c は臨界温度、 f は周波数、 2Δ はエネルギー・ギャップ、 k はボルツマン定数、 R_{res} は残留抵抗である。上式は $T < T_c/2$ の温度範囲で測定値と非常によく一致する。

図 3.27 は単セルで 508 [MHz] のニオブ超伝導空洞の表面抵抗 R_{surf} の温度依存性の測定結果である。残留抵抗は不純物、表面の酸化膜等が原因となるが、材料純度の向上、表面処理工程の改良等により小さくすることができる。図 3.27 の結果より、この空洞を液体ヘリウム温度 (4.2k) で運転するときの表面抵抗は約 65 [nΩ] (after 3rd treatment) である。これを前に述べた 500 [MHz] での銅空洞の $R_{surf} \approx 6.3$ [mΩ] と比べると、実に $1/10^5$ になっている。その結果、超伝導空洞のシャント・インピーダンス R_{sh} は、銅空洞の R_{sh} の 10^5 倍にもなる。

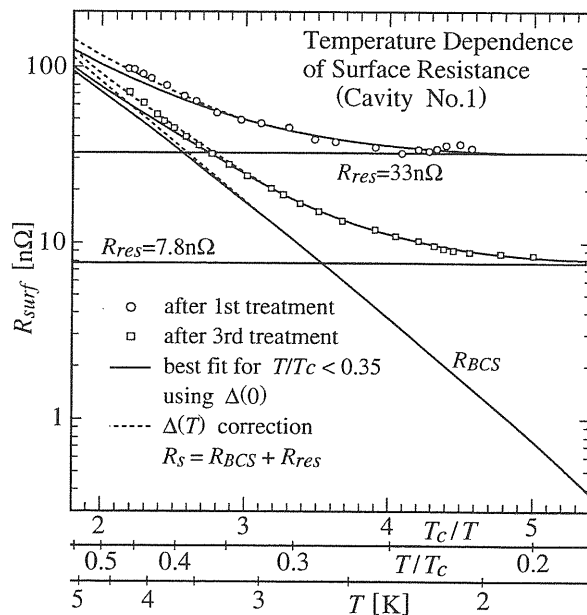


図 3.27 508 [MHz] の単セル・ニオブ超伝導空洞の表面抵抗測定値

このように、超伝導空洞では形状を工夫して R_{sh} を大きくする必要がないので、空洞形状は製作の容易さ、表面処理のし易さ、放電の抑制等が優先されて決る。そのため、 R_{sh}/Q 値は銅空洞の $1/2$ 程度になる。また、超伝導空洞は図 3.28 に示すように、滑らかな曲線でつないだ単純な形状にできるので、 R_{sh} を大きくするために若干複雑な構造にせざるを得ない銅空洞よりも、高次モードの数を減らし、そのインピーダンスを下げる可以降低ことができる。したがって、 R_{sh}/Q 値が小さいことと相俟って、超伝導空洞はビーム電流強度の増大にも対応できる特性を有しており、現在 KEKB の HER (High Energy Ring) で使用されている。

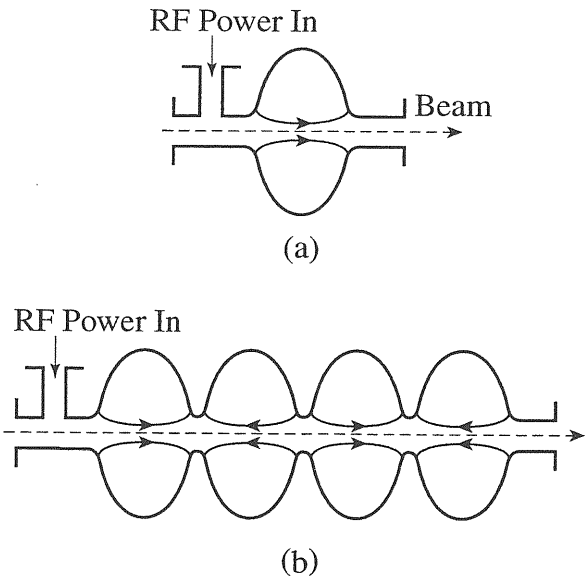


図 3.28 電子リング用加速空洞概念図：(a) 単セル空洞、(b) 4セル空洞

以上のように表面抵抗 R_{surf} が大幅に減少し、冷却能力による最大電圧の制限はなくなったが、現実に電圧をどこまで上げることができるであろうか。得られる加速電場の理論的境界は、空洞表面の磁場が高周波臨界磁場に達するときのビーム軸上の加速電場であり、典型的な空洞形状の場合、57 [MV/m] である。しかし、実際に

は(1)局所的超伝導破壊、(2) multipacting (高周波電場に同期した2次電子増殖)、(3)電子の電界放出等のために、もっと低い値に制限される。電場強度が大きくなると(3)の電界放出が支配的になる。電場強度の上昇にともなって放出電流は指数関数的に増大し、高周波電力を消費するとともに、空洞面を叩いて加熱する。現在、500 [MHz] 帯の単セル空洞で得られている最大電場は、KEKB 用空洞で得られた 19 [MV/m] である。実際の運転では安全性を考慮して 6~8 [MV/m] で運転されているが、これでも銅空洞の 3~5 倍の電場強度である。

図 3.29 に KEBK で使用されている単セル高次

モード減衰型超伝導空洞を示す。空洞はニオブ板からへら絞りで成形され、内面に電界研磨が施されている。空洞はクライオスタット内の 4.2K の液体ヘリウムに浸され、空洞内は 10^{-7} [Pa] 以下の圧力に保たれている。高周波入力は導波管/同軸変換器、セラミック窓を通して空洞に送られる。空洞の周波数調整は空洞をビーム軸方向に伸縮することにより行われる。空洞内に発生する高次モード電磁波を取り出すために、空洞に隣接する部分のビームダクトの直径を他の部分より大きくしている。空洞から取り出された高次モード電磁波は両側に設置された高次モード減衰器 (HOM damper) により吸収される。

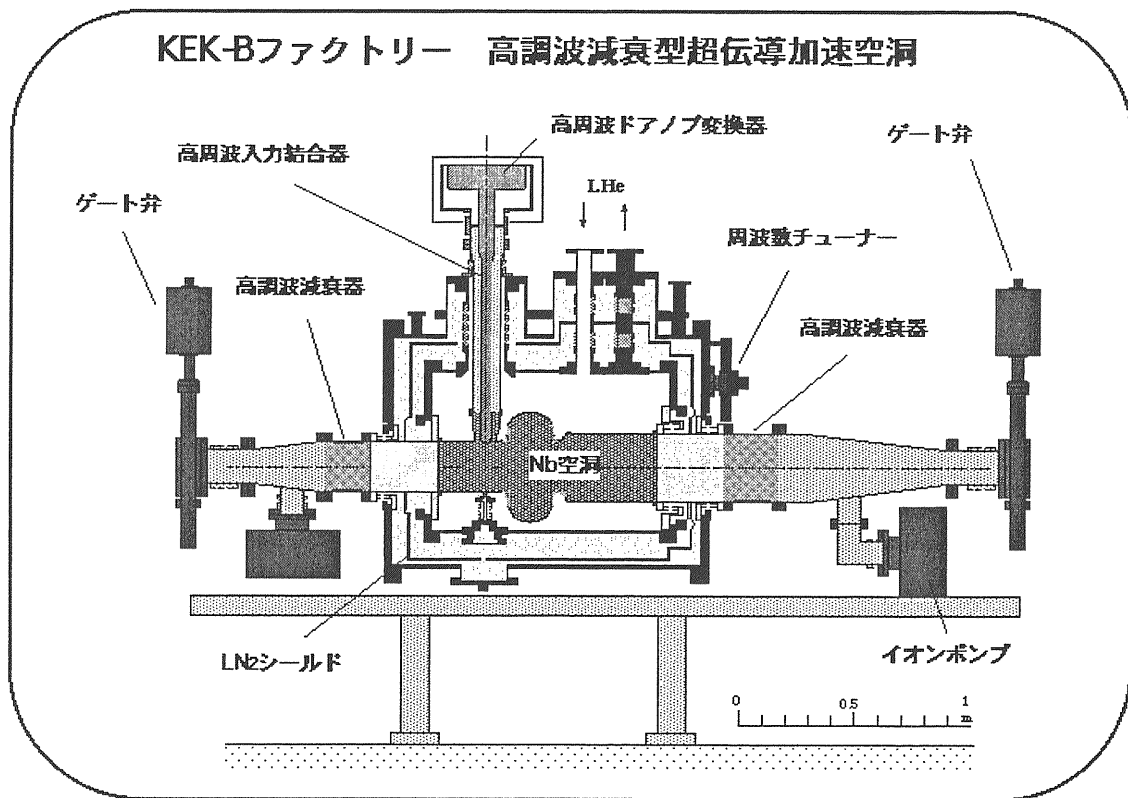


図 3.29 KEBK で使用されている単セル高次モード減衰型超伝導空洞

4. 位相安定性とバンチの形成

高周波で加速される多数の粒子はバラバラにならずに小さなかたまり (bunch) となって加速される。この集群作用は、線形加速器においては粒子の持つ運動量によって速度が異なること、円形加速器においては粒子の持つ運動量によって粒子の回転周期が異なることに起因する。

4.1 線形陽子加速器の位相安定性とバンチの形成

ここではアルバレ DTL 構造を考え、粒子は図 3.3 あるいは図 3.4 (b) のようにドリフト管とドリフト管の間のギャップの電場で加速されるとする。ギャップの電場は粒子の進行方向には一定であり、時間的には図 4.1 に示すように、正弦波的に変化する。エネルギーの低い領域では、粒子はギャップを通るたびに加速され、速度を増していく。ドリフト管の長さ、粒子の速度、電場の波長の間の関係が正確に (3.4) を満足する粒子は、加速電場と同期していて、どのギャップでも同じ位相で加速されるはずである。このような粒子は同期粒子 (synchronous particle) と呼ばれ、その位相は同期位相 (synchronous phase) と呼ばれ、図 4.1 で ϕ_s で表わされる。

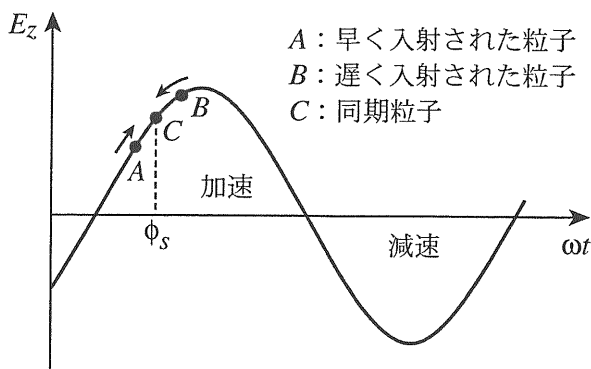


図 4.1 陽子線形加速器の位相安定性を説明する図

図 4.1 の横軸は時間に比例し、時間は左から右に進む。時間軸の上の部分は加速電場、下の

部分は減速電場を表わす。同期粒子は C で表わされている。同期粒子よりも少し早くギャップに到着した粒子を A とし、少し遅く到着した粒子を B で表わしている。粒子 A は同期粒子よりも弱い電場を受けるため、速度の増加は同期粒子よりも少なくなり、位相は遅れて同期粒子の方に移動していく。しかし、粒子 A の位相が同期位相より遅れると、今度は同期粒子よりも強い電場を受ける。このために速度が増して同期粒子よりも速くなり、位相が進んで再び同期粒子を追い越して先行することになる。以後はこの運動を繰り返す。粒子 B も同様に同期位相のまわりを振動する。

このように、ある位相範囲 (安定領域) 内にいる粒子は同期粒子のまわりを振動しながら安定に加速され、バンチ (bunch) が形成される。このような性質は位相安定性 (phase stability) と呼ばれており、高周波加速が安定に行われることを保証する重要な特性である。粒子の速度が速くなるほど、安定領域の幅 (位相振動振幅) は小さくなり、振動の周波数は低くなる。なお、入射のときにはパラメータの変化が大きいため、後で述べるような位相平面上の安定領域は、閉じた曲線にならずに一部が開いたゴルフクラブのような形になる。

図 4.1 では同期粒子の位相を、電場が時間的に上昇する側に設定した。これによって、位相安定性が得られ、バンチが形成されることが分った。それでは、同期粒子の位相を、電場が時間的に下降する側に設定したらどうなるか。この場合は、同期粒子から少し離れて入射された粒子は、益々同期粒子から離れていってしまうので、位相安定性は得られない。したがって、バンチが形成されず、ビームの加速はできないということになる。

4.2 線形電子加速器の位相安定性とバンチの形成

線形加速器における粒子の集群作用、つまりバンチの形成は、前述のように、粒子の受ける電場の大きさによって粒子の速度が変化することを利用している。しかし線形電子加速器においては、加速の最初の部分を除き、電子の速度はほぼ光速になっているので、粒子の集群作用

は失われる。したがって電子線形加速器においては、まだ速度が変化する加速の初期の段階で、十分に小さいバンチを形成することが重要である。以下ではこれについて少し述べる。

電子銃から加速管に入射される時の電子の速度は光速の半分程度であり、電波の全位相角に一様に分布している。電波の速度を入射される電子の速度に合わせておく。図 4.2 (a) に電波の電場と電子の動きを示す。ここでは進行波を考えているので、横軸は粒子の進行方向 z である。最初は平均として加速も減速もない場合を考える。したがって、電場が 0 の時に入射された粒子 C は、そのままの位相で波とともに進む。A のような位相に入った電子は、加速電場を受けて電波よりも速度が速くなるので、徐々に矢印の方向に位相がずれていき、反対に B のような位相に入った電子は、減速電場を受けて減速され、位相が矢印の方向に位相がずれていく。

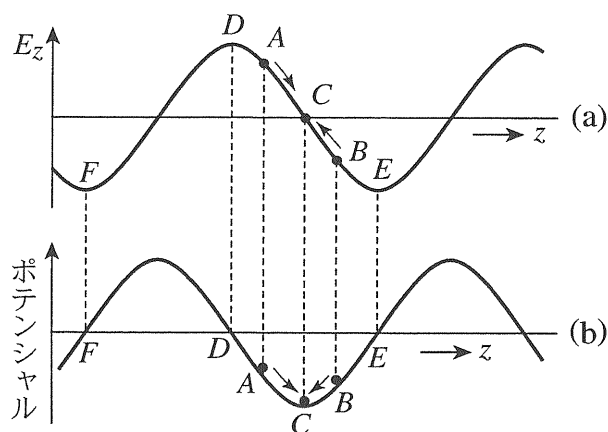


図 4.2 (a) 電場の位相と電子の運動、(b) ポテンシャル・エネルギーと電子の運動

結局、いろいろな位相に入った電子はすべて電場 0 の C 点に向かって進み、C 点を少し通り過ぎてから反転してまた C 点に向かうという運動をする。つまり、どの位相で入射された電子も電場 0 の点のまわりを位相振動して捉えられ、バンチが形成されることになる。この場合は電場 0 の点が同期位相ということになる。図

4.2 (b) は電場のポテンシャル・エネルギーを描いたものである。C 点はポテンシャルの谷になっているので、電子はそのまわりを振動することになる。

これでバンチはできたが、バンチの中心が電場 0 のところにあるので、このままでは加速できない。加速するためには加速管に沿って電波の速度を増していけばよい。円板を装荷した円筒形導波管ならば、円板の間隔を徐々に広げて電波の位相速度を大きくしていくことになる。このようにするとバンチの位相は徐々に加速位相の方 (C 点 → A 点の方向) に移り、電子は次第に加速されてくる。電子の速度が光速に近づく、エネルギーが変わったことによる速度の変化が小さくなるため、位相振動の振幅は次第に小さくなる。加速されるにつれて電子の質量が増加するため、さらに動きが小さくなり狭い位相幅の中に集められてくる。その後は加速の効率を上げるために、バンチを電場の頂上付近に保って加速していく。

次に、電子線形加速器のバンチングの一つの例について説明する。電子線形加速器から単バンチの強いビームを出力するにはどうすればよいか。すなわち、加速周波数 (2856 [MHz]) の一つの周期だけに大強度のバンチを作り、まわりの周期はすべて空にするということである。図 4.3 は加速周波数の整数分の 1 の周波数、つまりサブハーモニック周波数 (sub-harmonic frequency) を用いて、段階的にバンチングを進めていく例を示している。

電子銃からの電子ビームは、まず、周波数の低い 1 番目のサブハーモニック・バンチャーでバンチされる。次に、周波数のより高い 2 番目のサブハーモニック・バンチャーで、2856 [MHz] の 1 周期内に電子群が入るように、さらにバンチされる。次のプリバンチャー (prebuncher) は 2856 [MHz] で動作し、バンチは周期の狭い範囲に納まるようにさらにバンチされる。この段階までは、平均としての加速はなく、電子はひたすらバンチされる。次のバンチャー (buncher) で電子は初めて加速される。バンチはさらに小さくなり、加速されて電場波形の頂上付近まで移動し、このままの状態の主加速器に入射される。なお、図 4.3 に描いたバンチは長さの変化

だけに意味があります。バンチの面積の変化は無視して下さい。

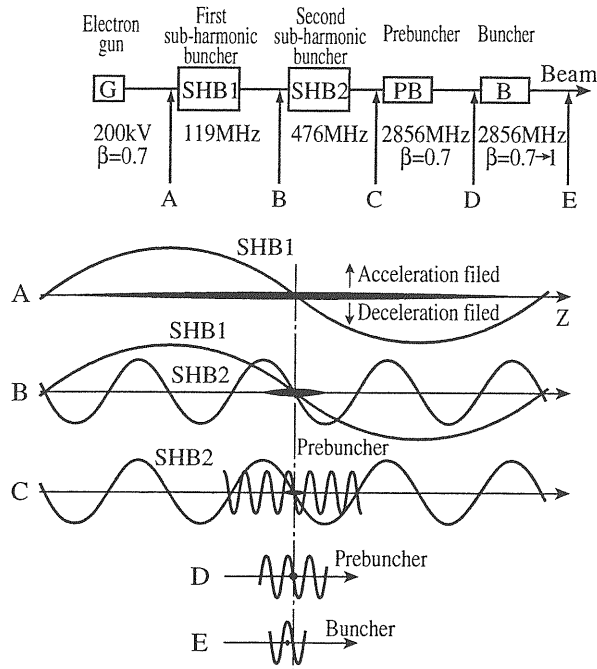


図 4.3 電子線形加速器で単バンチを得る過程の模式図

4.3 円形加速器（シンクロトロン）の位相安定性とバンチの形成

円形加速器の位相安定性に進む前に、それに関係する円形加速器での粒子の振舞いの基礎について述べる。

4.3.1 運動量の変化による軌道の変化

4.3.1.1 一様磁場中の荷電粒子の運動

まず、一様磁場中の荷電粒子の運動について復習する。質量 m 、電荷 q の荷電粒子が速度 v で一様磁場 B の中を、磁場に垂直方向に運動しているとする。このとき、粒子に働く力（ローレンツ力） F_L は、この場合は $E=0$ であるから、(1.2) 式より次のようになる。

$$F_L = qvB \quad (4.1)$$

力の方向は速度 v にも磁場 B にも直角の方向、つまり粒子は磁場に垂直な面内で曲げられ、円を描くような力を受ける（図 4.4）。一方、速度 v で等速円運動をしている質量 m の粒子に働く遠心力 F_C は次のように表わされる。

$$F_C = \frac{mv^2}{\rho} \quad (4.2)$$

ただし ρ は円軌道の曲率半径である。ローレンツ力 F_L と遠心力 F_C との釣合から次式が得られる。

$$\frac{mv^2}{\rho} = qvB \quad (4.3)$$

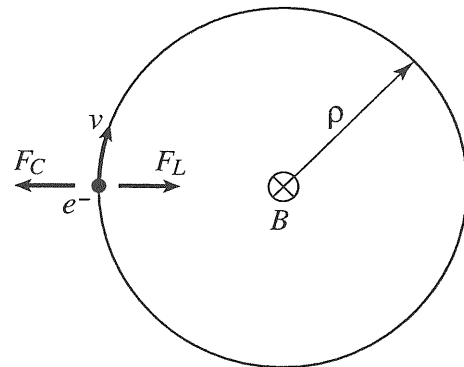


図 4.4 一様磁場中の荷電粒子の運動

粒子の持つ運動量 p と曲率半径 ρ 、磁場 B との関係は、(1.18) 式と (4.3) 式より次のように表わされる。

$$p = mv = q\rho B \quad (4.4)$$

上式は磁石によって保持できる粒子の最大運動量は、半径 ρ と磁場の強さ B との積で制限されることを表わしている。 $B\rho$ 積は運動量の尺度であるが、ビームの曲げにくさを表わす量でもあるので、磁氣的剛性（magnetic rigidity）と呼ばれている。粒子に働く加速力は、(1.1) 式に示

されるように、粒子の運動量の時間的変化率に等しい。また、この力は粒子の電荷と粒子を加速する電場 E の積に等しく、次のように表わされる。

$$\frac{dp}{dt} = q \left(\frac{d\rho}{dt} B + \rho \frac{dB}{dt} \right) = qE \quad (4.5)$$

このように加速力は曲率半径の時間的変化率に比例する項と磁場の時間的変化率に比例する項との和で表わされる。

4.3.1.2 閉軌道と運動量圧縮係数

上で述べたような、一様な磁場 B の中を円運動している粒子は、一周すると元の位置に戻ってくる。つまり軌道は閉じていることになり、これを閉軌道 (closed orbit) と呼んでいる。この場合、運動量 p と曲率半径 ρ 、磁場 B との間に (4.4) 式の関係がある。例えば B 一定とすれば、ある p に対応した ρ が決まり、この場合の閉軌道の大きさは $C=2\pi\rho$ となる。図 4.5 に示すように、 B 一定の場合には運動量 p が増す程、曲率半径 ρ も増し、閉軌道 C も大きくなる。このように粒子の運動量を p とすれば、この p に対して 1 つの閉軌道 C が対応することになる。

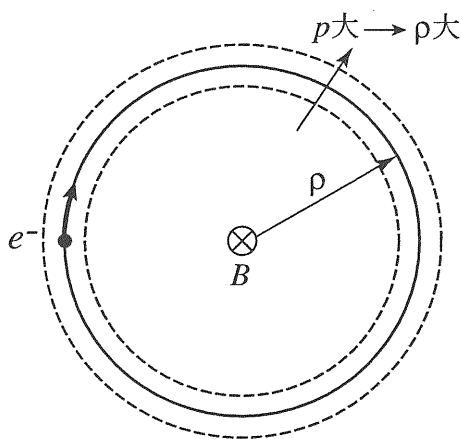


図 4.5 一様磁場中の粒子の運動量の変化と軌道の変化

上の例では理想的な一様磁場の中の粒子の円運動を考えたので、運動量 p の粒子は永久に同一軌道上を回ることになる。しかし、加速器においては、粒子は入射されてから取り出されるまでに非常な長距離を走行する。現実には理想的磁場を作ることはできないので、粒子を長距離走行させるためには、軌道から外れた場合に軌道に戻すような力が必要である。円形加速器の初期には、磁場の強さが半径の大きくなるほど弱くなる、いわゆる弱集束 (weak focusing) の原理を用いていた。

現在の大型シンクロトロンでは、4 極電磁石 (quadrupole magnet : Q magnet) を用いた強集束 (strong focusing) で、水平方向と垂直方向の軌道ずれを抑えている。強集束の原形は、半径方向の磁場勾配が正と負である、2 種類の偏向磁石 (bending magnet) を交互に並べたものであるが、これは今も小型円形加速器に用いられている (例 : KEK-PS のブースターシンクロトロン)。このような収束作用により、軌道のずれた粒子は閉軌道のまわりを振動しながら運動する。この振動をベータトロン振動 (betatron oscillation) といい、振動の周期は磁石の配置によって決まる。

現実の加速器においても、任意の運動量を持つ粒子に対して、一周して完全に閉じるような閉軌道が存在する。これを平衡軌道 (equilibrium orbit) と呼ぶ。運動量のずれ Δp とそれに対応する平衡軌道の長さのずれ ΔC との間には次の関係がある。

$$\frac{\Delta C}{C} = \alpha \frac{\Delta p}{p} \rightarrow \alpha = \frac{\Delta C/C}{\Delta p/p} \quad (4.6)$$

ただし、 α は運動量圧縮係数 (momentum compaction factor) と呼ばれ、運動量が変わった時に平衡軌道の長さ (あるいは平均半径) がどの程度変わるかを示す係数である。ビーム内の粒子の運動量は中心値のまわりに分布しているが、 α が小さい場合には、運動量の異なる多数の粒子が半径方向に密に詰まっていることになる。

α は軌道上の磁場分布の形によって決まる。ちなみに、前述の一様磁場中の円運動の場合の

α は (4.4) 式を用いて次のようになる。

$$C = 2\pi\rho = 2\pi\frac{p}{qB} \quad (4.7)$$

B 一定とすれば、(4.7) 式より

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta p}{p} \quad (4.8)$$

つまり、この場合には $\alpha = 1$ となる。実際の加速器では、横方向（半径方向）のビーム・サイズを小さくするために $\alpha \ll 1$ となるように磁場分布を設計する。KEKB では $\alpha = 1 \sim 2 \times 10^{-4}$ である。

4.3.1.3 粒子の運動量の変化と周期の変化の関係

粒子の速度を v 、回転周期を T 、平衡軌道を C とすれば、それらの間の関係は (3.12) 式で与えられる。再掲して

$$T = \frac{C}{v} \quad (4.9)$$

粒子の平衡軌道が僅かな量 ΔC だけずれ、速度が僅かに Δv だけずれたときの、回転周期のずれを ΔT とすれば、(4.9) 式より次のように書ける。

$$T + \Delta T = \frac{C + \Delta C}{v + \Delta v} \quad (4.10)$$

変化分は非常に小さいと考えているので、2 次の項は省略でき

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta C}{C} - \frac{\Delta v}{v} \quad (4.11)$$

を得る。(4.6) 式および (1.25) 式を用いれば、上式は次のように表わされる。

$$\frac{\Delta T}{T} = \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right) \frac{\Delta p}{p} \quad (4.12)$$

ただし、 γ は (1.14) 式で表わされる全エネルギーと静止エネルギーの比 E/E_0 である。

運動量 p が変化した時の回転周期 T の変化は、(4.11) 式および (4.12) 式で表わされるように、次の 2 つのお互いに逆の効果合成されたものである。

$$\Delta C/C = \alpha(\Delta p/p)$$

p が変わった時の C の変化。 p が増加すれば C は長くなり ($\Delta C > 0$)、 T を大きくするように働く（回転周波数が下がる）。

$$-\Delta v/v = -(\Delta p/p)/\gamma^2$$

p が変わった時の v の変化。 p が増加すれば v が大きくなり、 T を小さくするように働く（回転周波数が上がる）。

運動量 p が変化した時の回転周期 T の変化は、 α と γ の大きさの関係により次の三つの場合に分けられる。

(1) $\alpha < 1/\gamma^2$ の時 $\Delta T/T \propto -\Delta p/p$
エネルギーが低く γ が小さいうちは、速度 v の変化率の方が平衡軌道 C の変化率より大きくなり、運動量 p が大きくなると回転周期 T が小さくなる（回転周波数は上がる）。

(2) $\alpha = 1/\gamma^2$ の時 $\Delta T/T = 0$
エネルギーが上がり γ がこの値に達した時に、運動量 p が変化した場合の平衡軌道 C の変化率と速度 v の変化率が等しくなる。つまり、運動量が変わっても周期 T は変わらない。この時のエネルギーをトランジション・エネルギー（transition energy）と言う。

(3) $\alpha > 1/\gamma^2$ の時 $\Delta T/T \propto \Delta p/p$
エネルギーがトランジションを越して γ がこの領域になると、平衡軌道 C の変化の方が速度 v の変化分より大きくなり、運動量 p が大きくなると周期 T が大きくなる。

上に述べたことをまとめると次のようになる。

粒子の運動量 p は $p = mv$ で表わされる。粒子を加速していくとき、加速の初期では、質量の増加率は小さく速度の増加率が大きい。このため、運動量の変化に対して、質量の変化よりも速度の変化の寄与が大きくなり、回転周波数は上がる。トランジションを過ぎると β は 1 に近付くので速度の増加はにぶり、運動量の変化に対して速度よりも質量の変化の寄与が大きくなって、回転周波数は下がる。

(4.12) 式の最後の式の括弧内の量は

$$\eta \equiv \alpha - \frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{\gamma_r^2} - \frac{1}{\gamma^2} \quad (4.13)$$

$$\gamma_r \equiv \frac{1}{\alpha}$$

と表わされ、 η は位相スリップ係数 (phase slip factor) あるいは単にスリップ係数と呼ばれている。運動量圧縮係数 α の値は通常 0.1~0.0001 の範囲にあるから、 γ_r の範囲は 3~100 である。電子の場合は $E_0 = 0.511$ [MeV] であるから、電子シンクロトロン・トランジション・エネルギーは高々 50 [MeV] である。したがって、通常の電子シンクロトロンは常に上記の (3) の領域、つまり、トランジションの上のエネルギー領域で動作する。

一方、陽子シンクロトロンでは $E_0 = 0.938$ [GeV] であるから、トランジション・エネルギーは数 [GeV] 以上になる。そのため、中形以上の大きなシンクロトロンでは、加速開始から終了までの間に上記の (1)、(2)、(3) のすべての領域を通過することが普通である。ちなみに、KEK の 12 GeV PS 主リングでは $\gamma_r = 6.76$ であり、運動エネルギーで 5.4 [GeV] にトランジションがある。トランジションについてはまた後で述べる。

4.3.2 シンクロトロンの位相安定性とバンチの形成

図 4.6 に示すように 1 台の加速空洞がリングの 1 箇所を設置してあり、高周波電圧

$$V(t) = V \sin(\omega t) \quad (4.14)$$

を発生しているとする。何台かの空洞がリングに沿って分散されているとしても、(4.14) 式はそれらの合成電圧と考えれば、以下の議論は成り立つ。単位電荷 e を持つ粒子が加速空洞を通過する時の高周波電圧の位相を ϕ とすると、粒子が得る 1 回転当たりのエネルギー $[\Delta E]_1$ は次のようになる。

$$[\Delta E]_1 = eV \sin(\phi) \quad (4.15)$$

エネルギーのずれのない ($\Delta E/E = 0$) 粒子が中心軌道 (設計軌道) を回るために必要な 1 周当たりのエネルギーを $[\Delta E_s]_1$ とすれば、次のように表わされる。

$$[\Delta E_s]_1 = eV \sin(\phi_s) \quad (4.16)$$

この ϕ_s を同期位相あるいは平衡位相 (equilibrium angle) と呼ぶ。中心軌道を回っている粒子が位相 ϕ_s で加速ギャップを通過するならば、次に通過する時の位相も ϕ_s となり、常に高周波と同期する。線形加速器のところで述べたように、このような粒子を同期粒子あるいは平衡粒子 (equilibrium particle) と言う。

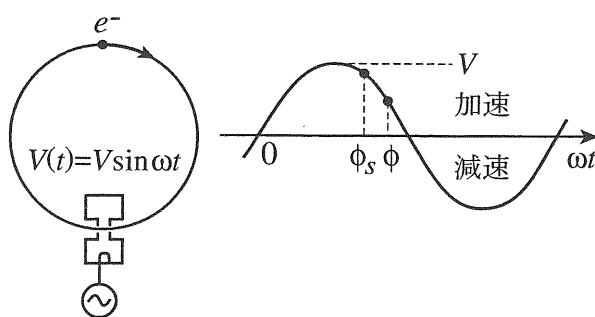


図 4.6 シンクロトロンの加速モデル

ビーム中には多くの粒子があり、それらのエネルギーと位置 (位相) はばらついている。これらの同期から外れた粒子はどのような運動をするだろうか。ここでは、電子リングを考える。エネルギーはトランジションを越えているので、

図 4.6 に示すように平衡位相角 ϕ_s は 90° と 180° の間になければならない。この理由は後程明らかになる。

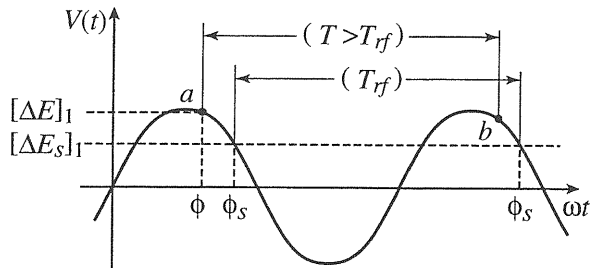


図 4.7 位相安定性を説明するための図

図 4.7 はハーモニック数が 1 の場合の加速を示す。図において、エネルギーは E_s (同期粒子の持つエネルギー) に等しいが、加速ギャップを通過する時の位相が ϕ である粒子を考える。図の a 点で示されるようにギャップを通過する時の電圧が高いので、粒子の得るエネルギーは同期粒子のそれよりも大きくなる。その結果、前述のように、トランジション以後であるから周期 T は同期粒子の周期 T_{rf} よりも大きくなる。このため、次にギャップを通過する時には前よりも位相が遅れて b 点になり、 ϕ_s に近づく。

このように同期粒子よりも大きなエネルギーを持っているので、何回転かする間に ϕ_s を通り越してしまう。 ϕ_s より位相が遅れると 1 回に得るエネルギーが $[\Delta E_s]_1$ (同期粒子が 1 回の加速で得るエネルギー) より小さくなり、この粒子の持つエネルギー E と同期粒子の持つエネルギー E_s との差が小さくなっていく。ある位相のところまで遅れると $E = E_s$ となり、それ以後は $E < E_s$ となる。したがって、今度は $T < T_{rf}$ となるので、位相は逆に進んで ϕ_s に近付いていくことになる。

この様子を同期粒子からのエネルギー差 $\Delta E (= E - E_s)$ を縦軸とし、位相差 $\Delta\phi (= \phi - \phi_s)$ を横軸として表わしたものが図 4.8 である。この平面上で a を出発した粒子はリングを何回転かする間に再び a 点に戻ってくることになり、結

局、この平面上の同一軌道上を回転することになる。他の非同期粒子についても同様であり、 $(\Delta E - \Delta\phi)$ 面上を同期粒子の位置 (E_s, ϕ_s) を中心として回転し、常に同期粒子の近くを安定に加速されることになる。

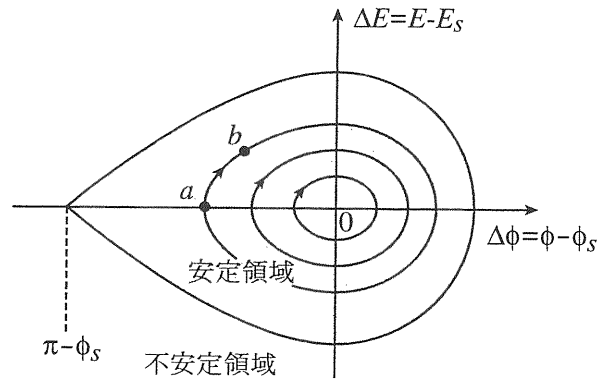


図 4.8 位相安定領域とシンクロトロン振動

線形加速器のところで述べたように、このように粒子が自動的に、ある位相のまわりに捉えられる特性を位相安定性と言う。ただし、 ΔE と $\Delta\phi$ には安定限界があり、それ以上に同期粒子から離れた粒子は脱落していく。網かけのある部分が安定領域である。安定領域の大きさは ϕ_s の値により決まり、図に示すようなトランジション以後の場合には、 ϕ_s が大きい程 (180° に近い程) 大きくなる。

もし、平衡位相角 ϕ_s が $0^\circ \sim 90^\circ$ にある場合には、少しでも同期を外れた粒子は、同期粒子から離れていくようなエネルギーを得ることになり、どんどんずれていって脱落してしまう。つまり、この場合には安定領域は存在しない。

これまではトランジション以後の場合について述べてきたが、トランジション以前の場合には、安定領域を作る ϕ_s の範囲は $0^\circ \sim 90^\circ$ になる。この場合 ϕ_s が小さい程、安定領域は大きくなる。 ϕ_s の範囲が $90^\circ \sim 180^\circ$ の場合には安定領域は存在しない。

これまでに述べたことをまとめると次のようになる。ビーム中には多くの粒子があり、それらのエネルギーと位相はばらついている。これ

らの粒子は、エネルギー（運動量）が変化した時に回転周期が変化する性質のために、同期粒子からのエネルギー差と位相差がある範囲に入っていれば、自動的に同期粒子のまわりに捉えられて、位相的およびエネルギー的に安定に振動することになる。これを位相安定性と言う。

このように多くの粒子が位相的およびエネルギー的に振動しながら ϕ_s のまわりに集中して分布することになり、小さな集団を作ることになる。つまりバンチが形成される。この ϕ_s のまわりの振動をシンクロトロン振動（synchrotron oscillation）と呼ぶ。シンクロトロンの開発中に見い出されたのでこのように名付けられたが、現在では他の円形加速器においても、縦方向、つまり粒子の進行方向の振動を一般的にシンクロトロン振動と呼んでいる。

通常シンクロトロン振動数は数 100 [Hz] ~ 数 10 [kHz] の範囲にある。また平衡位相角 ϕ_s の値はトランジション以前では $0^\circ \sim 90^\circ$ であるがトランジション以後は $90^\circ \sim 180^\circ$ となる。トランジション前の平衡位相角を ϕ_s とすれば、トランジションを乗り越えた後の平衡位相角は $(180^\circ - \phi_s)$ となる。したがって、トランジションを通過するとき、位相を $(180^\circ - 2\phi_s)$ だけ急速に変化させねばならない。

5. シンクロトロン運動

前章では粒子が平衡位相のまわりを運動することを述べた。この章では、平衡粒子からのエネルギーずれに比例する量を縦軸にとり、位相を横軸にとった、いわゆる縦方向位相空間 (longitudinal phase space) での粒子の運動をもう少し定量的に取扱う。

5.1 粒子の運動方程式

平衡粒子 ($\Delta E/E = 0$) の 1 回転当たりのエネルギー利得は (4.16) 式で表わされる。再掲して

$$[\Delta E_s]_1 = eV \sin(\phi_s) \quad (4.16)$$

電圧 V はリング 1 周の合成電圧、 ϕ_s は平衡位相である。同様に、平衡粒子から位相が $\Delta\phi$ だけずれた粒子が 1 回転当たりに得るエネルギー利得は

$$[\Delta E]_1 = eV \sin(\phi_s + \Delta\phi) \quad (5.1)$$

で表わされる。粒子のシンクロトロン振動はゆっくりしていて、その周期は、通常、粒子の回転周期の 100 倍以上であるから、粒子に関する量の時間についての微分は、その量の 1 回転での変化を回転周期で割ることで置き換えることができる。もともと、エネルギーは空洞ごとあるいは 1 回転ごとにステップ的に変化するので、差分方程式を数値積分して解く方法がより現象に忠実な取扱いであるが、条件によっては見通しのよい解析的な結果が得られる微分方程式で近似できる、と言い換えた方がよいかもしれない。このような訳で、平衡粒子と非平衡粒子のエネルギーの時間変化率は、それぞれの 1 回転当たりのエネルギー利得を回転周期 ($T = 2\pi/\omega$) で割って、次のように表わされる。

$$\frac{d[\Delta E_s]_1}{dt} = \frac{\omega_s}{2\pi} eV \sin(\phi_s) \quad (5.2)$$

$$\frac{d[\Delta E]_1}{dt} = \frac{\omega}{2\pi} eV \sin(\phi_s + \Delta\phi) \quad (5.3)$$

ただし、 ω_s あるいは ω はそれぞれ平衡粒子あるいは非平衡粒子の角回転周波数である。

(5.2) 式および (5.3) 式の両辺をそれぞれの角回転周波数で割り、両式の差をとれば、その左辺は次のように表わされる。

$$\frac{1}{\omega} \frac{d[\Delta E]_1}{dt} - \frac{1}{\omega_s} \frac{d[\Delta E_s]_1}{dt} \approx \frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta E}{\omega_s} \right) \quad (5.4)$$

上式の誘導は多少技巧的なので省略する。したがって、左辺は (5.4) 式であり、右辺は (5.2) 式と (5.3) 式の右辺をそれぞれの角回転周波数で割ったものであるから、次のように表わされる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta E}{\omega_s} \right) = \frac{1}{2\pi} eV [\sin(\phi_s + \Delta\phi) - \sin(\phi_s)] \quad (5.5)$$

上式の ω_s を加速角周波数 ω_f に変換して次式を得る。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta E}{\omega_f} \right) = \frac{eV}{2\pi h} [\sin(\phi_s + \Delta\phi) - \sin(\phi_s)] \quad (5.6)$$

これが運動方程式のうちの一つである。

次にもう一つの運動方程式を求める。粒子の回転周期の変化分 ΔT と運動量の変化分 Δp との関係は (4.12) 式で表わされる。すなわち

$$\frac{\Delta T}{T_s} = \left(\alpha - \frac{1}{\gamma_s^2} \right) \frac{\Delta p}{p_s} = \eta_s \frac{\Delta p}{p_s} \quad (5.7)$$

添字 s が付いた量は平衡粒子の量であることを示している。非平衡粒子と平衡粒子の位相差 $\Delta\phi$ は、角加速周波数を ω_f 、ハーモニック数を h として

$$\Delta\phi = \omega_f \Delta T = h \omega_s \Delta T \quad (5.8)$$

となる。(5.7) 式から ΔT を求めて上式に代入すれば

$$\Delta\phi = h\omega_s T_s \eta_s \frac{\Delta p}{p_s} = 2\pi h \eta_s \frac{\Delta p}{p_s} \quad (5.9)$$

を得る。ここで (1.31) 式を用いれば上式は次のように表わされる。

$$\Delta\phi = \frac{2\pi h \eta_s}{\beta_s^2} \frac{\Delta E}{E_s} \quad (5.10)$$

$\Delta\phi$ の時間的変化率は、上式を時間で微分する (T_s で割る) ことにより、次のようになる。

$$\frac{d(\Delta\phi)}{dt} = \frac{\omega_{rf}^2 \eta_s}{\beta_s^2 E_s} \left(\frac{\Delta E}{\omega_{rf}} \right) \quad (5.11)$$

これがもう一つの運動方程式である。(5.6) 式と (5.11) 式はシンクロトロン運動方程式を構成する。 $\Delta\phi$ と $\Delta E/\omega_{rf}$ は正準共役な位相空間座標である。(5.6) 式および (5.11) 式はそれぞれ 1 階の微分方程式であるが、これらを結合すれば、次のような $\Delta\phi$ についての 2 階の微分方程式が得られる。

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\beta_s^2 E_s}{\omega_{rf}^2 \eta_s} \frac{d(\Delta\phi)}{dt} \right] - \frac{eV}{2\pi h} [\sin(\phi_s + \Delta\phi) - \sin(\phi_s)] = 0 \quad (5.12)$$

5.2 シンクロトロン振動と位相集束

非平衡粒子と平衡粒子の位相差 $\Delta\phi$ が小さい ($\Delta\phi \ll 1$) と仮定すれば、(5.12) 式の左辺第 2 項の大括弧内は次のように近似できる。

$$\sin(\phi_s + \Delta\phi) - \sin(\phi_s) \approx \Delta\phi \cos(\phi_s) \quad (5.13)$$

さらに (5.12) 式の左辺第 1 項の大括弧内のパラメータが、短い時間内では一定であると仮定すれば、(5.12) 式は次のような 2 階の線形微分方程式で表わされる。

$$\frac{d^2(\Delta\phi)}{dt^2} - \frac{\omega_{rf}^2 \eta_s eV \cos(\phi_s)}{2\pi h \beta_s^2 E_s} \Delta\phi = 0 \quad (5.14)$$

上式より、安定な振動解が存在するのは、左辺第 2 項の $\Delta\phi$ の係数が式中の - 記号を含めて正の場合であり、そのときの振動の角周波数 ω_{syn} は次のように表わされる。

$$\omega_{syn} = \sqrt{-\frac{\omega_{rf}^2 \eta_s eV \cos(\phi_s)}{2\pi h \beta_s^2 E_s}} \quad (5.15)$$

ただし、平方根内は正でなければならない。 ω_{syn} はシンクロトロン振動角周波数あるいは単にシンクロトロン振動数と呼ばれる。この ω_{syn} とリングの回転周波数 ω_s との比 ν_s はシンクロトロン・チューン (synchrotron tune) と呼ばれている。

$$\nu_s = \frac{\omega_{syn}}{\omega_s} = \frac{f_{syn}}{f_s} \quad (5.16)$$

ν_s の値の範囲は 0.001~0.1 程度である。

安定なシンクロトロン振動を得るためには、前述のように (5.15) 式の ω_{syn} は実数でなければならない。平方根内のパラメータのうち、 η_s と $\cos \phi_s$ 以外はすべて正数であるから、平方根内が正になるためには

$$\eta_s \cos(\phi_s) < 0 \quad (5.17)$$

でなければならない。これはトランジション前後で分けて考えた方がよい。トランジションにおける γ の値を γ_{tr} とすれば、(4.13) 式より次のように表わされる。

$$\gamma_{tr} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad (5.18)$$

ただし、 α は運動量圧縮係数である。

(1) トランジション前 ($\gamma < \gamma_{tr}$)

この場合は η_s が負になるから、 $\cos \phi_s$ は正でなければならない。 $\cos \phi_s$ が正になるのは ϕ_s が次の二つの範囲内にあるときである。

$$(a) \quad 0 < \phi_s < \frac{\pi}{2}, \quad \sin \phi_s > 0$$

(acceleration)

$$(b) \quad \frac{3}{2}\pi < \phi_s < 2\pi, \quad \sin \phi_s < 0$$

(deceleration)

(4.16) 式および (5.1) 式より明らかなように、

(a) の場合には ΔE が正になるので粒子は加速され、(b) の場合には ΔE が負になるので減速される。バンチの形を保ったまま減速するためには、 ϕ_s を (b) の範囲に保てばよいということになる。

(2) トランジション後 ($\gamma > \gamma_{tr}$)

この場合は η_s が正になるから、 $\cos \phi_s$ は負でなければならない。 $\cos \phi_s$ が負になるのは ϕ_s が次の二つの範囲内にあるときである。

$$(c) \quad \frac{\pi}{2} < \phi_s < \pi, \quad \sin \phi_s > 0$$

(acceleration)

$$(d) \quad \pi < \phi_s < \frac{3}{2}\pi, \quad \sin \phi_s < 0$$

(deceleration)

以上の (a)~(d) の場合を図示したものが図 5.1 である。一番上の図は電圧波形であり、下の 4 つの図は横軸に位相 ϕ をとり、縦軸に $W = \Delta E / \omega_f$ をとった位相空間上に各々の場合の安定領域を示している。実線は安定領域の限界を表わしており、セパトリクス (separatrix) と呼ばれている。このセパトリクスの内部の粒子がバンチを形成することになる。点線は加速のない場合 ($\phi_s = 0, \gamma < \gamma_{tr}$ あるいは $\phi_s = \pi, \gamma > \gamma_{tr}$) のセパトリクスを示している。

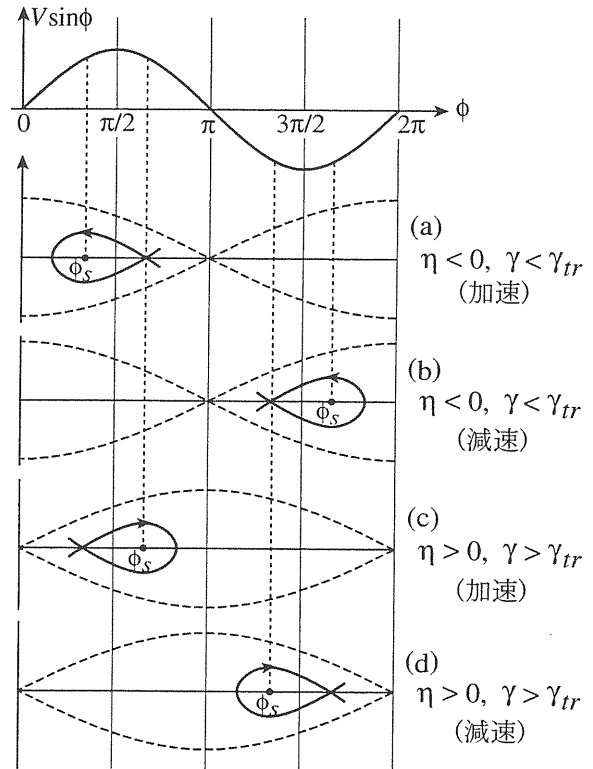


図 5.1 一番上の図は電圧波形、下の 4 つの図はそれぞれの場合の動的バケット (実線) と静的バケット (点線) を示す

図 5.2 は上記の (c) の条件、つまり、トランジション以後の加速の場合で、 $\phi_s = 180^\circ, 150^\circ, 120^\circ$ の場合の位相空間上の粒子の軌跡を示したものである。電子シンクロトロンはこの (c) の領域で動作している。図の網かけの部分は安定領域を示している。セパトリクスで囲まれた部分はバケット (bucket) と呼ばれている。加速および減速のない場合 ($\phi_s = 0$ あるいは $\phi_s = \pi$) のバケットは静的バケット (stationary bucket) と呼ばれ、位相安定範囲は 2π である。 ϕ_s が 0 または π 以外であり、加速あるいは減速をしているときのバケットは動的バケット (moving or running bucket) と呼ばれている。

静的バケットの場合、セパトリクスの外の粒子を見ると、位相はどんどんずれていくが、エネルギー偏倚は脈動こそするがある値以下に留まっている。加速のないときには粒子は真空ダクトの中をまわることができるが、加速を始

めるとすぐにエネルギーがずれてダクトに当たってしまう。一方、動的バケットの場合、セパトリクス以外の粒子は、図 5.2 の $\phi_s = 150^\circ$ と 120° の場合から明らかなように、エネルギー的にも位相的にも安定領域内の粒子からどんどん離れていき、発散してしまう。

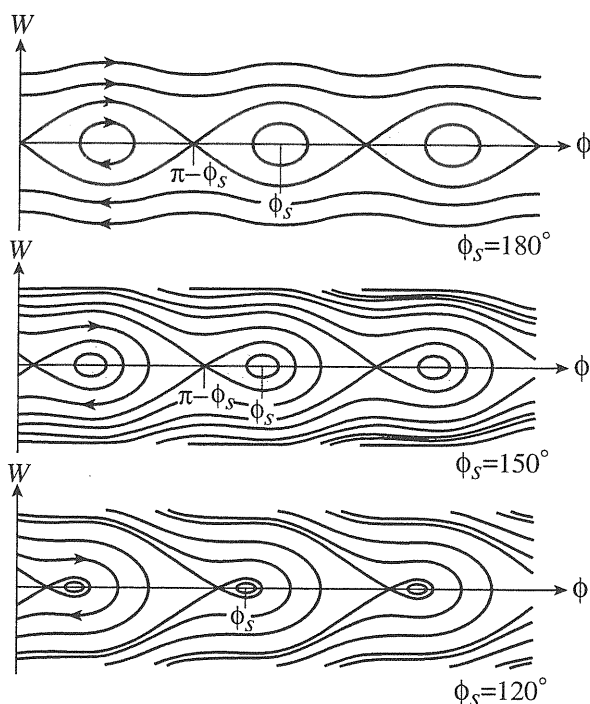


図 5.2 $\gamma > \gamma_{tr}$ の場合の位相平面上の粒子の軌跡

5.3 トランジション

前述のように、粒子のエネルギーを上げていくときに、スリップ係数 η の符号が負から正に変わるエネルギーがトランジション・エネルギーである ((4.13) 式参照)。トランジションでは η が 0 になるので、(5.15) 式より明らかなように、シンクロトロン周波数が 0 になってしまう。そのため、位相集束性が失われて、縦方向の粒子運動の安定性は失われてしまう。このトランジション近傍の不安定領域の時間幅 $\pm T_c$ は次のように表わされる。

$$T_c = \left[\frac{2\pi^2 \beta_s^2 E_0^2 \gamma_{tr}^4}{h (eV)^2 \omega_s^3 \sin \phi_s |\cos \phi_s|} \right]^{1/3} \quad (5.19)$$

ただし、 E_0 は静止エネルギーである。KEK-PS 主リングでは、 T_c の値は 2~3 ms 程度である。前述のように、トランジション後の位相安定性を確保するために、加速高周波の位相はトランジションで、 ϕ_s から $(\pi - \phi_s)$ に切り換えられる。この切り替えは T_c よりもかなり短い時間内に行われねばならない。

現実のビームはエネルギー幅を持っているので、高周波位相の切り替えタイミングは、すべての粒子にとって正しい値になっているわけではない。その結果、トランジションを通過する時に、何がしかのビーム損失が生じ、また、位相空間内でのパンチ面積（エミッタンス）が増加することになる。エミッタンスのブローアップ（blow-up）は、空間電荷の力によりさらに増大する。このトランジション通過時のビーム損失とエミッタンスのブローアップは、ビーム強度の増大とともに深刻な問題になり、これまでに様々な対策が講じられてきた。

その中の効果的な方法の一つに γ_{tr} -ジャンプ（ γ_{tr} -jump）と呼ばれている方法がある。1/2 ベータトロン波長だけ離れた 4 極マグネットは、ベータトロン振動の周波数に影響を与えることなしに、トランジション時の γ 値である γ_{tr} を変えることができる。この 4 極マグネットをパルス励振することにより、図 5.3 に示すように、 γ_{tr} を時間的に急速に変えることができる。その結果、粒子がトランジション近傍の不安定領域にいる時間が短くなり、トランジション通過時のビーム損失やエミッタンス・ブローアップが緩和される。

大強度陽子シンクロトロンの問題点の一つは、ビーム損失に伴う残留放射能である。そのため、設計段階から、ビーム損失を極力減らすような方策を講じることが重要になる。この観点から、もし、トランジションでのビーム損失の問題から解放されるならば、それは非常に望ましいことである。

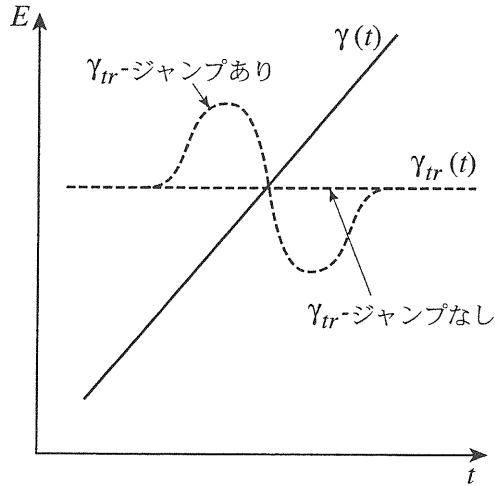


図 5.3 粒子のエネルギー γ とトランジション・エネルギー γ_{tr} との関係： γ_{tr} -ジャンプがない場合とある場合を示す。

(4.13) 式から分るように、もし、運動量圧縮係数 α が負 (γ_{tr} が虚数) であるならば、スリップ係数は常に負であるから、加速の全域に亘ってトランジションは生じない。磁石の配列構造であるラテイス (lattice) を工夫することにより、このような要求を満たすことができる。J-PARC の 50 [GeV] 主リングでは、ラテイスの一部の偏向電磁石を抜くことにより、負の α を実現し、トランジションの問題を回避する設計になっている。

5.4 縦方向位相空間パラメータ

ここでは、縦方向位相空間での粒子の運動に関するいくつかのパラメータを示す。具体的に言えば、バケットの位相幅およびエネルギー幅、バケットの面積、バケット内のビームの面積について示す。

5.4.1 位相の安定限界

セパトトリクスのすぐ内側の軌跡をたどる粒子は、シンクロトロン振動の過程で、位相においてもエネルギーにおいても、平衡粒子から最も離れた点に達する。したがって、セパトトリクスは安定なシンクロトロン振動を行っている粒子の取り得る、最大位相振幅および最大エネルギー振幅を定義するものである。

図 5.4 の点線は静的バケット、その内側の実線は $\gamma < \gamma_{tr}$ の場合の動的バケットを示し、一番内側の線はビームバンチの中で最も外側をまわっている粒子の軌跡を示している。バケット内の粒子の位相振動の限界点は図 5.4 の $\Delta\phi_1$ および $\Delta\phi_2$ で示されている。 $\Delta\phi_1$ は

$$\Delta\phi_1 = \pi - \phi_s \quad (5.20)$$

で与えられる。もう一つの限界点である $\Delta\phi_2$ は、次の超越方程式に ϕ_s の値を与えたときの数値解として得られる。

$$\begin{aligned} \cos(\Delta\phi_2) + \Delta\phi_2 \sin \phi_s \\ = (\pi - \phi_s) \sin \phi_s - \cos \phi_s \end{aligned} \quad (5.21)$$

上式において $\phi_s = 0$ のときには $\cos(\Delta\phi_2) = -1$ であるから $\Delta\phi_2 = -\pi, \pi$ になり、また $\phi_s = \pi$ のときには $\cos(\Delta\phi_2) = 1$ であるから $\Delta\phi_2 = 0, 2\pi$ になる。すなわち、隣接するバケットの安定限界位相と重なる (静的バケット)。 ϕ_s の値を変えたときの $\Delta\phi_1$ および $\Delta\phi_2$ の値を図 5.5 に示す。

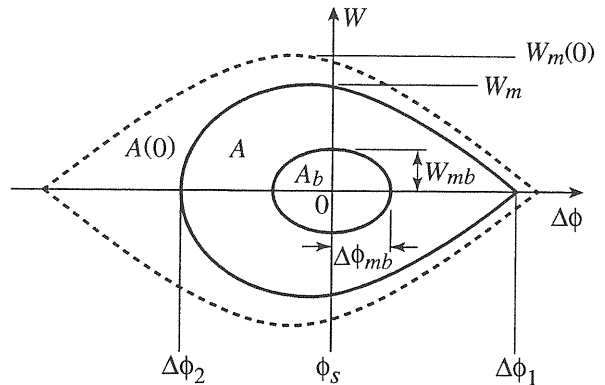


図 5.4 $W_m(0), W_m$: 静的および動的バケットの高さ、

$A(0), A$: 静的および動的バケットの面積、

$\Delta\phi_1, \Delta\phi_2$: 安定領域限界の位相、

A_b : バンチの面積 (エミッタンス)、

$W_{mb}, \Delta\phi_{mb}$: バンチのエネルギー幅、位相幅

バケットの位相幅 ($\Delta\phi_1 - \Delta\phi_2$) は、 ϕ_s が 90° に近づく (加速電圧のピークに近づく) と急速に狭くなることが分る。

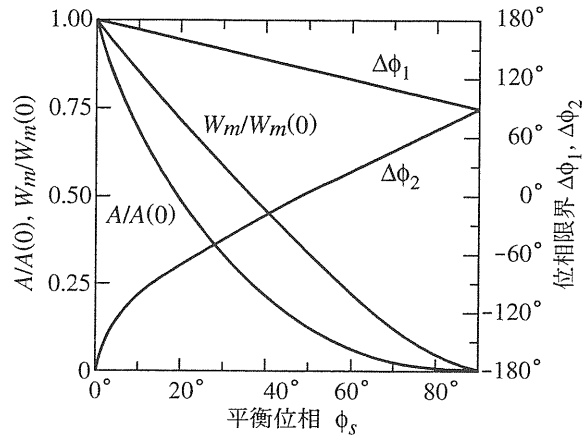


図 5.5 平衡位相角 ϕ_s を変えたときのバケットの高さの比 $W_m/W_m(0)$ 、バケットの面積の比 $A/A(0)$ 、および安定領域限界の位相 $\Delta\phi_1$ 、 $\Delta\phi_2$

5.4.2 バケットの高さ (エネルギー・アクセプタンス)

静的バケットにおいて粒子の取り得る最大エネルギー振幅 (バケットの高さ) $W_m(0)$ は ($\Delta\phi$, $W = \Delta E/\omega_{rf}$) 座標で次のように表わされる。

$$W_m(0) = \sqrt{\frac{2 eV \beta_s^2 E_s}{\pi h |\eta_s| \omega_{rf}^2}} \quad (5.22)$$

$W_m(0)$ は図 5.4 に示すようにセパトロックスのエネルギー全幅の半分である。動的バケットではバケットの高さ W_m が ϕ_s の増加とともに減少し、静的バケットの高さとの比 $W_m/W_m(0)$ は図 5.5 のように変化する。バケットの高さは、エネルギーが平衡粒子からそれだけずれた粒子まで受け入れ可能 (加速可能) であることを示しているため、エネルギー・アクセプタンス (energy acceptance) と呼ばれている。座標の縦軸を運動量で表わせば、バケットの高さは運動量アクセプタンス (momentum acceptance) とい

うことになる。

5.4.3 バケットの面積 (アクセプタンス)

セパトロックスで囲まれた位相空間の面積はバケット面積 (bucket area) と呼ばれている。この面積内に入っている粒子はすべて受け入れ可能なため、この面積を縦方向アクセプタンス (longitudinal acceptance) と呼んでいる。バケットの面積は次の式で表わされる。

$$\begin{aligned} A &= 8 \sqrt{\frac{2 eV \beta_s^2 E_s}{\pi h |\eta_s| \omega_{rf}^2}} \alpha(\phi_s) \\ &= A(0) \alpha(\phi_s) \end{aligned} \quad (5.23)$$

$\alpha(\phi_s)$ は ϕ_s の関数であり、数値積分により求められる。特別な値、 $\phi_s = 0$ と $\pi/2$ では、 $\alpha(0) = 1$ 、 $\alpha(\pi/2) = 0$ になる。図 5.5 には $\alpha(\phi_s) = A/A(0)$ の値がプロットされている。図から明らかのように、バケットの高さおよび面積は ϕ_s が 90° に近づくほど、つまり、電圧波形のピークに近づくほど、急速に小さくなる。

(5.22) 式と (5.23) 式を比較することにより

$$A(0) = 8 W_m(0) \quad (5.24)$$

であることが分る。すなわち、静的バケットの場合、バケットの面積はバケットの高さの 8 倍である。横軸の位相は無次元であるから、バケットの高さも面積も単位は縦軸の単位である [eV · s] になる。

5.4.4 バンチの面積 (エミッタンス)

粒子の振動振幅が小さい場合には、位相平面上的粒子の軌跡は楕円で近似できる。図 5.4 に示すように、バンチの最も外側の粒子がとる W の最大値を W_{mb} 、 $\Delta\phi$ の最大値を $\Delta\phi_{mb}$ とすれば、それらは次の式で結ばれている。

$$\Delta\phi_{mb} = \pm \sqrt{-\frac{2\pi h \eta_s \omega_{rf}^2}{eV \beta_s^2 E_s \cos \phi_s}} W_{mb} \quad (5.25)$$

トランジション前 ($\gamma < \gamma_{tr}$) では η_s が負で \cos

ϕ_s が正、トランジション後 ($r > r_r$) では η_s が正で $\cos \phi_s$ が負であるから、平方根内は常に正になる。

バケット内でバンチが占める面積は縦方向エミッタンス (longitudinal emittance) と呼ばれている。粒子の振動振幅が小さく、粒子の軌跡が図 5.4 のように楕円で近似できる場合には、エミッタンスは振幅の最も大きな粒子が描く楕円の面積として求められる。(5.25) 式を用いて、エミッタンス A_b を最大位相振幅 $\Delta\phi_{mb}$ で表わせば

$$A_b = \pi W_{mb} \Delta\phi_{mb} \\ = \pi (\Delta\phi_{mb})^2 \sqrt{-\frac{eV\beta_s^2 E_s \cos \phi_s}{2\pi h \eta_s \omega_{rf}^2}} \quad (5.26)$$

となる。(5.25) 式のエミッタンス A_b と (5.23) 式のバケットの面積 (アクセプタンス) A を比較すると、静的バケットの場合には次のような関係があることが分る。

$$A_b = \frac{1}{16} \pi (\Delta\phi_{mb})^2 A(0) \quad (5.27)$$

陽子シンクロトロンでは、加速するにつれて位相振幅 $\Delta\phi_{mb}$ は徐々に小さくなり (断熱的減衰)、エネルギー振幅 W_{mb} は徐々に大きくなるが、エミッタンス A_b は一定に保たれる。一方電子シンクロトロンのエミッタンスはシンクロトロン放射に左右される。放射によって粒子がエネルギーを失うことにより、シンクロトロン振動はダンプされる。しかし、放射が量子的であるために、粒子を確率的に励起してかき混ぜることにより、粒子を拡散させてしまう。この二つの相反する効果が平衡するところでエミッタンスが決ることになる。

シンクロトロン放射によるダンピングが期待できない陽子シンクロトロンでは、位相空間でのバケットの形とバンチの形が合っていること、つまり、バケット内のとり得る振動の軌跡と粒子の軌跡が一致していることが重要である。例えば、あるシンクロトロンから次段のシンクロトロンにバンチを入射する場合を考える。バケ

ットの形と入射バンチの形が合っている場合には、個々の粒子はシンクロトロン振動はするが、バンチの形としては振動しない。ところが、バケットの形と入射バンチの形が合っていない場合には、バンチが回転を始めることになり、非線形性に引掛かってバンチが拡散され、エミッタンスの増大をもたらすことになる。

バンチの形の調整は (5.25) 式から分るように、高周波電圧 V を変えることにより、行うことができる。エミッタンスは保存されるので、電圧を上げれば位相振幅 $\Delta\phi_{mb}$ は小さくなり、エネルギー幅 W_{mb} が大きくなる。電圧を下げれば、その逆になる。

6. 高周波電圧と電力

6.1 高周波電圧

ここでは、シンクロトロンでビームを加速するために必要な電圧が、どのようにして決まるかについて述べる。

粒子を加速するために必要な電圧を V_a とすれば、次のように表わされる。

$$V_a = V_{acc} + V_{comp} \quad (6.1)$$

ただし、

V_{acc} : 粒子を加速するために必要な電圧
 V_{comp} : 粒子が失うエネルギーを補うための電圧

6.1.1 粒子を加速するために必要な電圧

まず、 V_{acc} について考える。粒子を一定軌道上で加速するためには、大きくなっていく遠心力と均衡を保つために、磁場 B を大きくしてローレンツ力を増す必要がある。磁場の時間的変化率と必要な加速電圧が関係することは予想がつく。

運動量 p と全エネルギー E との関係は (1.18) 式で与えられるから、時間的変化率は次のようになる。

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{c} \left(E \frac{d\beta}{dt} + \beta \frac{dE}{dt} \right) \quad (6.2)$$

β として (1.22) 式を用いることにより、 $d\beta/dt = (dE/dt)/(\beta\gamma^2 E)$ を得る。これを上式に代入して

$$\frac{dE}{dt} = v \frac{dp}{dt} \quad (6.3)$$

と書ける。 v は粒子の速度である。(4.5) 式の dp/dt を上式に代入して次式を得る。

$$\frac{dE}{dt} = v q \left(\frac{d\rho}{dt} B + \rho \frac{dB}{dt} \right) \quad (6.4)$$

ただし、 q は粒子の電荷である。右辺の第 1 項は ρ が $d\rho$ だけ変化したときに横切る磁束 $\Delta\Phi$ の時間変化率に比例し、誘導電圧に関する項である。しかし、シンクロトロンでは軌道半径は一定であるから、この項は省略する。粒子が軌道を 1 周する間に得るエネルギー ΔE は、上式に回転周期 $T = C/v$ (C はリングの周長) を掛けたものであるから

$$\Delta E = q C \rho \frac{dB}{dt} \quad (6.5)$$

となる。したがって、必要なリング 1 周当りの加速電圧 V_{acc} は次式で表わされる。

$$V_{acc} = \frac{\Delta E}{q} = C \rho \frac{dB}{dt} \quad (6.6)$$

上式より、粒子を一定軌道上で加速するために必要な電圧は、磁場 B の時間的変化率に比例し、また、リングの周長 C と偏向電磁石の曲率半径 ρ に比例して大きくなる。

磁場 B の変化率と必要電圧 V_{acc} との関係の例を図 6.1 に示す。KEK-PS や J-PARC の主リングの場合、図 6.1 (a) のように、 B の変化は直線的なので V_{acc} は一定値になる。KEK-PS のブースターや J-PARC の RCS の場合には、 B の変化は図 6.1 (b) に示すように、バイアスのかかった正弦波形なので、 V_{acc} は余弦波形になる。

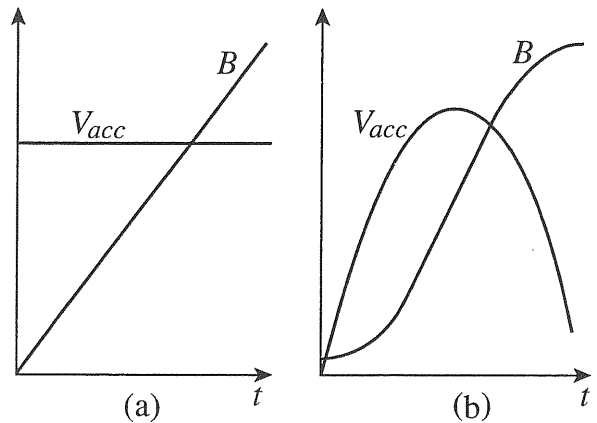


図 6.1 磁場 B と必要加速電圧 V_{acc} との関係の例：(a) 磁場 B が直線的に立上がる場合、(b) B がバイアスのかかった正弦波形の場合

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_0 c^2} = 2.8179 \times 10^{-15} \text{ [m]}$$

を用いて (6.7) 式を書き直せば次のようになる。

$$P_\gamma = \frac{2}{3} \frac{r_e c}{(m_0 c^2)^3} \frac{E^4}{\rho^2} = \frac{c C_\gamma}{2\pi} \frac{E^4}{\rho^2} \quad (6.8)$$

ただし、

$$C_\gamma = \frac{4\pi}{3} \frac{r_e}{(m_0 c^2)^3} = 8.8575 \times 10^{-5} \text{ [m/GeV}^3\text{]} \quad (6.9)$$

である。

電子がリングを 1 周する間に放出するエネルギー ΔE は、(6.8) 式の放射パワー P_γ を 1 周に亘り積分すれば得られる。曲率半径 ρ が場所によらず一定であるとすれば、 P_γ も一定であるからエネルギー ΔE は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \Delta E &= \oint P_\gamma dt = P_\gamma T_{bend} \\ &= P_\gamma \frac{2\pi\rho}{c} = C_\gamma \frac{E^4}{\rho} \end{aligned} \quad (6.10)$$

ただし、 T_{bend} は粒子が 1 周する間に偏向磁石部を通過する時間の合計である。エネルギーの単位を [GeV] とし、曲率半径 ρ の単位を [m] とし、(6.9) 式の C_γ の数値を用いれば、1 周当たりの放出エネルギー ΔE は次のように表わされる。

$$\Delta E [\text{keV}] = 88.5 \times \frac{E^4 [\text{GeV}]}{\rho [\text{m}]} \quad (6.11)$$

1 周当たり ΔE のエネルギーを失うので、何もしなければ、電子のエネルギーは所定のエネルギーからだんだんずれていく。粒子の軌道も所定の軌道からだんだん離れていき、ついには真空ダクトに当たり、失われてしまう。このよう

6.1.2 粒子が失うエネルギーを補うための電圧

6.1.2.1 シンクロトロン放射損失

次に V_{comp} について考える。 V_{comp} の最大要素はシンクロトロン放射損失の補償である。一般に、加速されている粒子は加速力の 2 乗に比例した電磁波を放出する。放射の大きさは粒子の速度の方向と力の働く方向との間の角度に依存するが、角度が直角の時に最も大きく、角度 0 の場合 (速度と力が平行の場合) の γ^2 倍になる。円形加速器の場合、粒子に加わる加速力は加速システムによる粒子の速度の方向に平行な力と、偏向電磁石による粒子の速度に直角な方向に働く力である。電子シンクロトロンの場合には、 γ^2 は非常に大きな値 ($\gamma^2 > 10^6$) になるので、磁気的な力による放射のみを考えればよいということになる。

円形加速器において、粒子軌道の曲率半径を ρ とすれば、電荷 e の荷電粒子が単位時間に放射するエネルギー、すなわち放射パワー P_γ は、 $v=c$ として次式で表わされる。

$$P_\gamma = \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0 \rho^2} \gamma^4 \quad (6.7)$$

ただし、 ϵ_0 は真空中の誘電率である。同じエネルギーの電子 ($E_0=0.511$ [MeV]) と陽子 ($E_0=938$ [MeV]) の放射パワー P_γ を比較すれば、(6.7) 式より

$$\frac{P_{\gamma,e}}{P_{\gamma,p}} = \left(\frac{938}{0.511} \right)^4 = 1.13 \times 10^{13}$$

となる。電子の放射パワーの方が圧倒的に大きく、実際的に放射パワーが問題になるのは、電子リングの場合だけであることが分る。

放射パワー P_γ をビーム・エネルギー E の関数で表わすために、古典的電子半径

な事態を避けて所定の軌道上を回すためには、失われたエネルギーと同じ量のエネルギーを高周波システムが補充せねばならない。このために必要な電圧 V_{sr} は (6.11) 式より求められる。

$$V_{sr} [\text{kV}] = \frac{\Delta E [\text{keV}]}{e} \quad (6.12)$$

これまでは電子について考えてきたが、電子以外の粒子についての V_{sr} を求めるには、

(6.7) 式の放射パワー P_r に戻らねばならない。電子の場合と同様にして ΔE を求め、それを e で割れば

$$V_{sr} [\text{V}] = \frac{e \gamma^4}{3 \epsilon_0 \rho [m]} \quad (6.13)$$

を得る。この式は電荷 e を持つすべての粒子に適用できる。

6.1.2.2 寄生モード損失

3 章の 3.3.2.8 でも述べたように、加速空洞には、加速に使用するモードの他に、その構造に起因する多数の共振モードが存在し、高次モードと呼ばれている。この高次モードに関して最も厄介なことは、3 章でも述べたように、誘起された高次モードとビームとの相互作用によって、結合バンチ不安定性が引き起こされることである。もう一つの問題点は、ビームが空洞に高次モードを誘起することにより、ビーム自身はその分のエネルギーを失うことである。その結果、これを補うための高周波電圧が必要とされる。

いま、電荷 q を持つバンチが、蓄積エネルギーのない加速空洞を通過したときに、空洞の i 番目の高次モードを誘起したとする。これによってビーム (バンチ) が失うエネルギーを ΔU_i とすれば

$$\Delta U_i = k_i q^2 \quad (6.14)$$

と表わすことができる。この量 k は損失係数 (loss factor) と呼ばれており、空洞のそれぞれ

のモードがそれぞれの k 値を持っている。高次モードを誘起することによってビームが失う全エネルギー ΔU_{hm} は、(6.14) 式で表わされる ΔU_i の総和であり、次のように表わされる。

$$\Delta U_{hm} = q^2 \sum_{i>0} k_i \quad (6.15)$$

ただし、 Σ の下の $i>0$ は加速モード ($i=0$) を除いた総和ということの意味している。

ここで、円形加速器を考え、バンチの配列は等間隔で、バンチの間は時間にして T_b だけ離れているとする。また、空洞に誘起された高次モードは、次のバンチが来る前に減衰してしまうと仮定する。リングを回っているビームの平均電流を I_0 とすれば、 $q = I_0 T_b$ が成り立つ。これを (6.15) 式の代入することにより、ビームが空洞の高次モードを誘起することにより失う全電力 P_{hm} は、次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} P_{hm} &= \frac{\Delta U_{hm}}{T_b} = I_0^2 Z_{hm} = I_0 V_{hm} \\ V_{hm} &= I_0 Z_{hm} \end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

ただし、 Z_{hm} は高次モード・インピーダンスであり、 Z_{hm} は次のように表わされる。

$$Z_{hm} = T_b \sum_{i>0} k_i = T_b k_{cav} \quad (6.17)$$

V_{hm} は高次モード損失を補償するために必要な高周波電圧である。

加速空洞以外にもビームの通路には共振構造が存在するため、ビームはそれらの構造にも電磁波を誘起してエネルギーを失う。これによりビームが失う全電力を P_{vc} とすれば、前述の加速空洞の場合と同様にして、以下のように書き表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} P_{vc} &= I_0^2 Z_{vc} = I_0 V_{vc} \\ Z_{vc} &= T_b k_{vc} \\ V_{vc} &= I_0 Z_{vc} \end{aligned} \right\} \quad (6.18)$$

Z_{vc} は真空チェンバー構成要素によるインピーダンスであり、 V_{vc} はそれによって生じる電圧である。 k_{vc} はすべての誘起モードの損失係数 k の総和である。

加速空洞の高次モードによる損失と真空チェンバー構成要素のモードによる損失を加えたものは寄生モード損失 (parasitic-mode loss) と呼ばれている。寄生モード損失を P_{pm} 、寄生モード・インピーダンスを Z_{pm} 、寄生モード電圧を V_{pm} 、寄生モード損失係数を k_{pm} で表わせれば、以下のように表せる。

$$\left. \begin{aligned} P_{pm} &= I_0^2 Z_{pm} = I_0 V_{pm} \\ Z_{pm} &= Z_{hm} + Z_{vc} = T_b (k_{cav} + k_{vc}) \\ &= T_b k_{pm} \\ V_{pm} &= I_0 Z_{pm} = V_{hm} + V_{vc} \end{aligned} \right\} (6.19)$$

V_{pm} が寄生モード損失を補償するために必要な電圧である。

6.1.3 必要高周波電圧のまとめ

前述のように、ビームはシンクロトロン放射損失と寄生モード損失を伴うのため、それを補償するための電圧 V_{comp} は

$$V_{comp} = V_{sr} + V_{pm} \quad (6.20)$$

となる。したがって、(6.1) 式の必要電圧 V_a は次のように書ける。

$$V_a = V_{acc} + V_{sr} + V_{pm} \quad (6.21)$$

シンクロトロン放射損失の補償電圧 V_{sr} は (6.11) 式が示すように、エネルギー E には依存するがビーム電流値には無関係である。一方、寄生モード損失の補償電圧 V_{pm} は、(6.19) 式が示すようにビーム電流値 I_0 に比例する。したがって、電流値が低い間は殆ど問題にならないが、電流値が高くなってくると無視できなくなる。シンクロトロン放射損失は円形電子加速器に特有の問題であることは前に述べたが、寄生モード損失も、空洞の Q 値が高く、バンチ長の短い電子加速器でその影響が大きい。

加速に必要な電圧とシンクロトロン放射損失の補償電圧の数値例を章末の表 6.1 に示す。ちなみに、最大の陽子シンクロトロンである 8 [TeV] の LHC でもシンクロトロン放射損失の補償電圧 V_{sr} は 10 [kV] 程度である。

加速電圧についての一般的結論は次のようになる。

- (1) 陽子リングでは V_{comp} を無視して V_{acc} のみを考えればよい ($V_a = V_{acc}$)
- (2) 電子リングでは V_{acc} を無視して V_{comp} のみを考えればよい ($V_a = V_{comp} = V_{sr} + V_{pm}$)

上で述べた V_a はビームを加速するために必要な電圧であるが、 V_a をピーク値とするような正弦波電圧では、ビームを安定に加速することはできない。位相安定性の項でも述べたように、もし、バンチが加速電圧の山の頂きにあれば、粒子の位相がずれたときの回復力が発生せず、粒子が散ってしまい加速できない。バンチを形成し、安定に加速するためには、空洞のピーク電圧 V_c を V_a よりも大きくし、バンチが山の中腹で加速されるようにせねばならない。

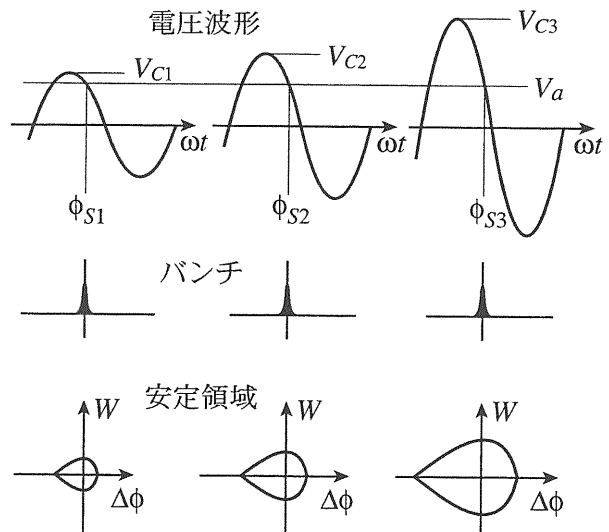


図 6.2 加速電圧 V_a 一定で空洞電圧 V_c を変えた場合の安定領域の変化

図 6.2 は加速電圧 V_a 一定で空洞電圧 V_c を変えた場合の安定領域の変化を示したものである。図はトランジション後の場合を示しているが、 V_c が大きくなるほど ϕ_s が大きくなり、安定領域は広がる。しかし、当然のことながら、 V_c が大きくなれば必要な高周波電力は増大する。

空洞電圧のピーク値 V_c と必要加速電圧 V_a との比

$$q = \frac{V_c}{V_a} = \frac{1}{\sin \phi_s} \quad (6.22)$$

は過電圧係数 (overvoltage factor) と呼ばれている。係数 q は縦方向アクセプタンスを縦方向エミッタンスよりどの程度大きくするか、バケットの高さをバンチの高さよりどの程度大きくするか、バンチの長さをどの位にするか等を考慮して決められ、通常は 1.3~2 程度である。

6.2 高周波電力

前節では、ビームを加速し、かつ所定の軌道を走らせるために必要な電圧について述べた。この電圧を空洞に発生させるために必要な高周波電力 P_g は次のように表せる。

$$P_g = P_a + P_d + P_r \quad (6.23)$$

ただし、 P_a : ビームを加速し、所定の軌道に保つために必要な電力、つまりビームに供給される有効なパワー

P_d : 空洞内で消費される電力

P_r : 空洞から反射される電力

- (1) ビームに供給される電力 P_a は、(6.21) 式で表わされる V_a を用いて次のように表わされる。

$$P_a = \frac{1}{2} V_a I_b = \frac{1}{2} V_c I_b \sin \phi_s \quad (6.24)$$

ただし、 I_b はビーム電流中の加速周波数成分のピーク値である。電子リングのようにバンチ長が短く、点電荷で近似できる場合には、 I_b はリングの平均電流 I_0 の 2 倍になる ($I_b = 2I_0$)。こ

の場合、(6.24) 式は次式のように表せる。

$$P_a = V_c I_0 \sin \phi_s \quad (6.25)$$

- (2) 空洞内で消費される電力 P_d は (3.31) 式より次のように表せる。

$$P_d = \frac{V_c^2}{R_{sh}} \quad (6.26)$$

ただし、 R_{sh} は空洞のシャント・インピーダンスである。もともと、 R_{sh} は損失として空洞の内壁での損失のみを考えて定義されたものであるが、ここでは空洞内に装荷した物質の損失をも含めて定義するものとする。陽子リングの加速空洞の損失は、空洞内部のフェライト等の磁性体の損失で決る。電子リングの加速空洞の場合には、空洞内壁の損失だけである。しかし、単位長さ当りの空洞電圧が陽子リングの空洞よりも 2 桁位高く、また蓄積リングの場合には連続的に電圧を印加するので、平均電力としては陽子リングの空洞と同等かそれ以上に大きくなる。

- (3) 電力節約の観点から、空洞からの反射電力 P_r をできるだけ小さくせねばならない。空洞と伝送線との整合状態はビーム負荷の大きさによって変わるため、通常は最大ビーム電流時、あるいは定格ビーム電流時に整合がとれるように、空洞と伝送線との結合の大きさが決められる。

表 6.1

加速器	E [GeV]	C [m]	ρ [m]	dB/dt [T/s]	γ	V_{acc} [kV]	V_{comp} [MV]
PSM (p)	12	339	24.6	1.6T/0.65s	12.8	20.5	6.6×10^{-12}
PF-AR (e)	6.5	377	23.3	0.93/60	1.17×10^4	0.14	6.8
SP-8 Sync. (e)	8	396	29.5	0.79/0.357	1.57×10^4	25.9	12.3
TRISTAN (e)	30	3018	246.5	0.4/280	5.87×10^4	1.1	291

表 6.1 の第 1 列の加速器名の略称はそれぞれ以下の加速器を表わしている。

PSM : KEK 陽子シンクロトロン・主リング

PF-AR : KEKPF-AR 放射光リング (旧トリスタン入射蓄積リング)

SP-8 Sync : SPring-8 シンクロトロン

TRISTAN : KEK トリスタン

註 : 加速器名の後の (p) は陽子リング、(e) は電子リングであることを示す。

7. 円形加速器概論

この章では若干趣きを変えて、代表的な円形加速器の原理を、主に粒子の高周波加速の観点から概観する。円形加速器は荷電粒子を軌道に沿って導くために磁場を用いることを基礎としている。ベータトロンを除くすべての円形加速器は1個あるいは複数個の高周波加速空洞を持ち、粒子は軌道上を回転しながら、空洞を繰り返し通過してその都度エネルギーを得て加速されていく。円形加速器の特長は、繰り返し加速を行うため1回転当たりの加速電圧は低くてもよく、加速システムが単純化されることである。この点は、数多くのRFパワーソースと加速セクションを必要とする線形加速器とは対照的である。

7.1 サイクロトロン

7.1.1 古典的サイクロトロン

最初に作られた円形加速器はサイクロトロン(cyclotron)である。図7.1(a)に示すように、大きな磁石の磁極の間の真空槽の中に加速空洞が入っている。この空洞は非常に高さの低い中空の円筒をその端面の中央で切り離したような形をしている。それぞれの加速電極はその形がDの字に似ていることからディー(dee)と呼ばれている。図7.1(b)のように、この2つの電極に高周波電圧が加えられる。電極間には高周波の電場が発生するが、ディーの内部には電場はない。真空槽の中央に置かれたイオン源を低速で離れたイオンは、電極間の間隙で加速されてディーの中に入る。ディーの中では加速されないで磁場で曲げられるだけであり、一定速度で半円形軌道をとって再び間隙を通過する。このとき、電場の位相が反転していればイオンは再び加速され、ディーの中で前よりも大きな半円形軌道に従うことになる。このようにしてイオンは1回転ごとに2回加速され、それに伴って軌道半径が次第に大きくなるので、イオンはらせん形を描きながら高いエネルギーに加速され、最後にディーの出口に置かれた偏向電極(deflector)によって曲げられ、外に取り出されて実験に使われる。

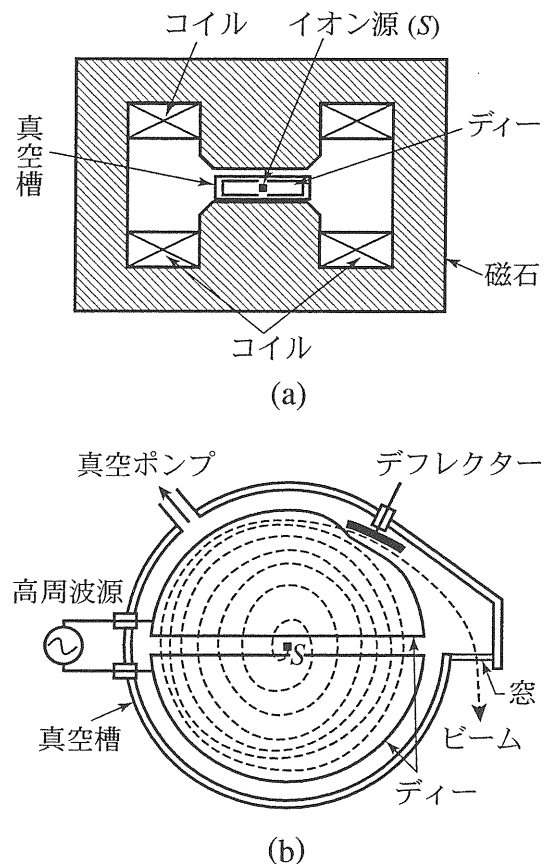


図7.1 (a) サイクロトロンの断面図、(b) サイクロトロンの真空槽と粒子軌道の模式図

上記のような繰り返し加速を行うためには、一つのディーの中の走行時間が高周波の周期の1/2になるように磁場の大きさを決めることになる。一様な静磁場 B の中を質量 m 、電荷 q の荷電粒子が半径 ρ の等速円運動するとき、その速度 v と回転周期 T_{rev} の関係は

$$T_{rev} = \frac{2\pi\rho}{v} = \frac{2\pi m}{qB} \quad (7.1)$$

上式の2番目の等号は(4.3)式を用いて得られた。また、回転周波数 f_{rev} は

$$f_{rev} = \frac{1}{T_{rev}} = \frac{qB}{2\pi m} = \frac{eZB}{2\pi m} \quad (7.2)$$

と表わされ、サイクロトロン周波数として知られている。Z は原子番号である。質量 m として (1.10) 式をとれば (7.2) 式は相対論的にも正しい。(7.2) 式が示すように、回転周波数あるいは回転周期は電荷 q 、磁場 B 、質量 m で決る。 $E_k \ll E_0$ が成り立つような低いエネルギー領域では $m \simeq m_0$ で近似できるので、回転周波数 f_{rev} は粒子のエネルギーには無関係で、磁場 B だけで決ることになる。 B を一定とすれば、 f_{rev} もエネルギーに関係なく一定値になる。したがって、この回転周波数 f_{rev} と同じ一定周波数 f_f の高周波電圧を電極間に印加することにより、粒子を連続的に加速することができる。この場合、粒子軌道の曲率半径 ρ は、(7.1) 式より、加速される粒子の速度 v に比例して大きくなっていくことが分る。

実際には粒子の質量は (1.15) 式に示すように、エネルギーの増加とともに大きくなるので、

(7.2) 式で表わされる回転周波数は加速が進むにつれて減少する。そのため、粒子が加速間隙を通過する時の位相が高周波に対して少しずつ遅れていき、ついには減速電界に入ってしまう。したがって、加速周波数一定、磁場の強さ一定の条件で加速できるのは非相対論的エネルギーの範囲に限られる。殊に電子の場合には図 3.1 に示されるようにエネルギーに対する速度の上昇が速いので、この原理での加速には適していない。

このような固定周波数で加速するサイクロトロン (Fixed Frequency Cyclotron) の特長は、連続運転ができるため、加速周期間隔のパンチされた連続ビームが得られることである。その結果、後で述べるシンクロ・サイクロトロンのようなパルス動作の加速器よりも、遥かに大強度のビームが得られる。

加速周波数は (7.2) 式より、加速する粒子の種類と磁場 B の値で決まり、次のようになる。

- 陽子： f_f [MHz] = 15.3 B [T]
(15.3 [MHz] for $B = 1$ [T])
- 重陽子： f_f [MHz] = 7.6 B [T]
(7.6 [MHz] for $B = 1$ [T])
- ヘリウム原子核： f_f [MHz] = 7.6 B [T]

(7.6 [MHz] for $B = 1$ [T])

図 7.2 は上の関係をグラフで表わしたものである。図より常伝導サイクロトロンの周波数の範囲は数 [MHz] ~ 20 [MHz] 程度であることが分る。粒子の回転周波数と加速周波数が一致することが同期条件、つまり連続的に加速できるための条件であると述べたが、少し考えれば、加速周波数が回転周波数の奇数倍であれば同様に同期条件を満足することが分る。偶数倍であると一方の電極で加速されても、他方の電極で減速されてしまうことになる。

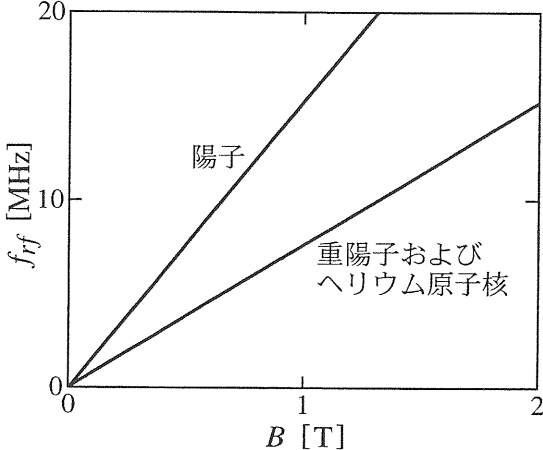


図 7.2 サイクロトロンの加速周波数と磁場との関係

次に必要な加速電圧について考えてみる。もし、粒子の回転周波数が常に加速周波数と同期しているとすれば、たとえ非常に低い加速電圧でも、時間はかかるが、粒子を所要のエネルギーまで加速することができるはずである。しかし、粒子の安定性を得るために、磁場の強さは外側ほど弱くなるように作られているので、実際の粒子の回転周波数はエネルギーの増加とともに徐々に下がってくる。そのため、加速電極を通過するときの粒子の位相が少しずつずれてきて、遂には減速電界に入ってしまう。したがって、所要のエネルギーを得るための最小電圧が存在し、エネルギーの他に、磁場の半径方向の勾配、イオンの質量と電荷の比に依存する。

陽子を 20 [MeV] まで加速するための最小電圧は 100 [kV] 程度である。加速電圧は高いほどよいが、発振器あるいは増幅器の出力と真空放電とによって、安定な運転電圧は 200 [kV] 程度に制限されている。

限られた電力で高い電圧を得るために、加速電極データーは共振器の中に組み込まれる。図 7.3 にデーター・システムの一例を示す。二つのデーターはそれぞれ他端が短絡された同軸線に接続される。このシステムは同軸の $\lambda/4$ 共振器を構成し、データー間に大きな電圧を発生する。発振器からの電力は結合ループを介して共振器に送り込まれる。共振器の Q 値を上げるために損失の小さい導体を使用する。

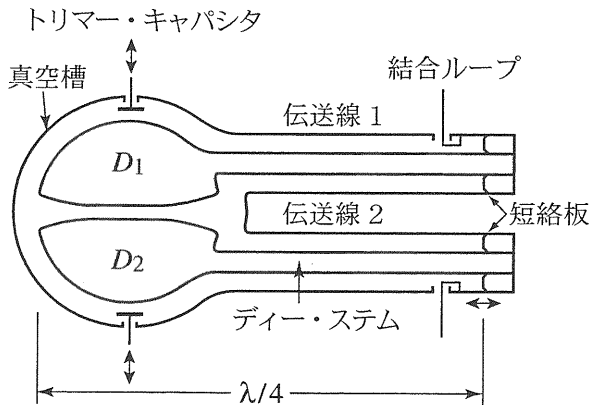


図 7.3 $\lambda/4$ 同軸共振器を用いたデーター・システムの模式図

7.1.2 シンクロ・サイクロトロン

前述の古典的な固定周波数サイクロトロンは陽子、重陽子、アルファ粒子をおよそ 22 [MeV]/電荷まで加速することができる。このエネルギーでの粒子の速度は $v \approx 0.15c$ 程度であるから、

(1.14) 式より $\gamma = m/m_0 = 1.011$ となり、(7.2) 式より、回転周波数の低下率は 1% 強である。古典的サイクロトロンでは、前述のように、粒子の垂直方向（磁石の軸方向）の安定性を確保するために、磁場に勾配を付け、半径が増すとともに磁場が弱くなるように作られている。この磁場の勾配により、エネルギーが上がって粒

子の軌道半径が増すほど回転周波数は下がることになる。この影響も付加されて、 $\beta = v/c \approx 0.15$ 程度を越えると一定の加速周波数で加速することが難しくなる。

エネルギーが上がっても粒子の回転周波数と加速周波数を同期させる方法として、次の二つのことが考えられる。

- (1) 加速周波数を回転周波数の低下に合わせて変化させる
- (2) 磁場の強さを半径が大きくなるほど強くする。

ここでは (1) について述べる。(2) については次の等時性サイクロトロンの項で述べる。

第 (1) の場合、粒子の回転周波数の低下に合わせて加速周波数を下げていく、つまり周波数を変調することにより、加速周波数を粒子の回転周波数に同期させる。このような原理で動作するサイクロトロンをシンクロサイクロトロン (synchrocyclotron) と呼んでいる。

まず必要な周波数変化幅（変調幅）について考える。粒子の回転周波数を表わす (7.2) 式を (1.15) 式と (1.11) 式を用いて書き直して次式を得る。

$$f = \frac{eZBc^2}{2\pi E_0(1 + E_k/E_0)} \quad (7.3)$$

上式より加速周波数の変化幅は、所要エネルギー E_k の大きさと磁場の半径方向の変化（磁石の中心の磁場と取り出し軌道の磁場との差）によって決ることが分る。周波数を f [MHz]、磁場を B [T] で表わし、粒子を陽子とすれば (7.3) 式は次のようになる。

$$f [\text{MHz}] = \frac{15.2 B [\text{T}]}{1 + E_k/E_0} \quad (7.4)$$

例えば、陽子を 150 [MeV] まで加速する場合、中心部の磁場が 1.6 [T] で、取り出し軌道のところではそれより 5% 低くなっているとす。こ

の場合の陽子の回転周波数は (7.4) 式より、加速開始時に 24.3 [MHz]、最終エネルギーに達した時に 19.9 [MHz] であり、周波数変調幅は 4.4 [MHz] である。

次に必要加速電圧について考える。前述のように、古典的サイクロトロンでは、加速につれて粒子の位相がずれてくるので、高い電圧をかけて急速に加速せねばならなかった。一方、シンクロ・サイクロトロンの場合には、粒子は常に加速位相にあるので、何回でも繰り返し加速ができるため、低い電圧でも所要のエネルギーまで加速することができる。必要加速電圧は主に周波数変調に要する時間、つまり加速時間に依存し、短い時間で加速しようとする高い加速電圧が必要になる。加速時間を T_{acc} 、平均の加速周波数を f_{av} 、最終エネルギーを $E_{k,f}$ とすれば、粒子が 1 回転あたりに得る平均エネルギー $\Delta E_{k,av}$ は

$$\Delta E_{k,av} = \frac{E_{k,f}}{T_{acc} f_{av}} \quad (7.5)$$

である。例えば、 $E_{k,f}=200$ [MeV]、 $T_{acc}=10$ ms、 $f_{av}=20$ [MHz] とすれば、 $\Delta E_{k,av}=1.0$ [keV] となる。1 回転あたり 2 回加速されるので、1 回の加速電圧は半分の 0.5 [kV] でよいことになる。しかし、位相安定性 (後述) を得るために平衡位相角 ϕ_s を $\sin \phi_s = 0.5$ となるように選べば、デーのピーク電圧の平均値は 1 [kV] になる。実際には、ビーム強度の増大、取り出し効率の改善、軌道安定条件の緩和などのために加速電圧は高くなる。しかし、それでも 100 [kV] 以上の電圧が要求される古典的サイクロトロンよりは桁位低い。

シンクロサイクロトロンの実現には、(1) 周波数変調と (2) 位相安定原理が大きな役割を果たしている。シンクロサイクロトロンの共振器の一例を図 7.4 に示す。周波数変調はデーと反対側の回転コンデンサーの C を変えて行う。変調に都合がよいように、デーを 1 個にして共振系を簡単にしている。この場合、デーの電圧はダミーデー (アース電位) に対して上下することを利用して加速する。加速電圧が低くてよいので、1 個のデーで十分である。機

械的な可変コンデンサーを用いるので、変調速度は大型のものでは 100 [Hz] 位が限度である。

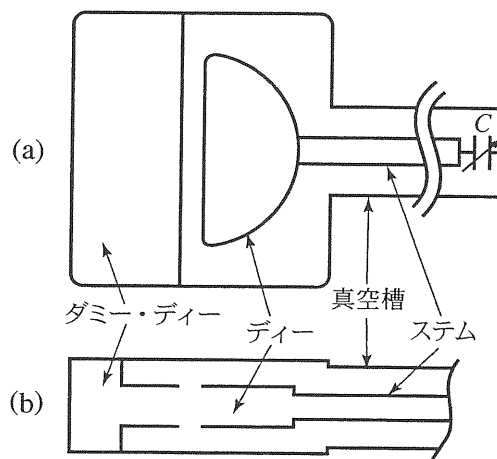


図 7.4 ダミー・デーを用いたシンクロサイクロトロン共振器：(a) 平面図、(b) 垂直断面図

位相安定原理については 4 章で述べたが、簡単にいえば、「加速電場の位相と完全に同期している粒子 (平衡粒子) に対してエネルギーが少しずれている粒子は、平衡粒子のまわりを振動していて、時間と共にどんどんずれていくことはない」ということである。この原理が成り立つための一つの条件は、加速周波数と粒子の回転周波数が一致していることである。シンクロサイクロトロンはこの条件を満足するから位相安定性を有するが、古典的サイクロトロンは満足しないので位相安定性を有しない。

シンクロサイクロトロンは周波数を変調することにより、古典的サイクロトロンのエネルギーの壁を破り、数 100 [MeV] までの加速を可能にした。しかし、その周波数変調のために連続運転はできず、パルス運転となり、平均ビーム強度は古典的サイクロトロンの 1/1000 位になってしまう。シンクロサイクロトロンは 1950 年代には最もエネルギーの高いビームを供給できる加速器であったが、現在は、高エネルギー物理用としてはシンクロトロンにとって代われ、

核物理用としては次に述べる等時性サイクロトロンにとって代わられた。

7.1.3 等時性サイクロトロン

シンクロサイクロトロンは前述のように、エネルギーを上げることはできるが、パルス運転のためビーム強度が大幅に減ってしまう。また、周波数変調の技術的困難さもある。7.1.2 項で触れたように、粒子の回転数と加速周波数を同期させるもう一つの方法は、磁場の強さを半径が大きくなるほど強くすることである。(7.2) 式の回転周波数を次のように書き直すことができる。

$$f = \frac{eZB(r(E))}{2\pi m(E)} \quad (7.6)$$

粒子が加速されて外側に行くほどその質量 m が大きくなるので、半径方向の磁場をそれに合わせて強くしていけば、常に回転周波数を一定に保つことができる。初期のサイクロトロンは外側に行くほど磁場が弱くなるという、いわゆる、弱集束の原理でビームを集束していたので、このアイデアはそれに逆行していたため、当初は実現できなかった。しかし、その後、磁場の強さを ϕ 方向、つまり粒子の進行方向に周期的に変える、いわゆる強集束法が開発された結果、このアイデアはシンクロサイクロトロンより遅れて実用化された。この原理のサイクロトロンは等時性 (isochronous) サイクロトロン、AVF (azimuthally-varying-field) サイクロトロン、SF (sector-focused) サイクロトロンなどと呼ばれる。

等時性サイクロトロンはシンクロサイクロトロンの長所を受け継いでいる。すなわち、粒子の回転周波数と加速周波数が同期しているので、位相安定の原理が働くからビームは縦方向にも安定であり、かつ加速電圧は低くてよい。また、古典的サイクロトロンの長所も引き継いでいる。すなわち、加速周波数は一定であるから連続運転ができ、大きな平均ビーム強度が得られる。しかも、面倒な周波数変調が必要ないので加速システムは簡単になる。

7.2 マイクロトロン

前節で、加速周波数一定で磁場の強さ一定のサイクロトロンは、電子の加速に適さないと述べた。しかし、若干の発想の転換を行えば、このような条件でも電子を加速することができる。粒子を繰り返し加速する際に基本的に重要なことは、「粒子が回転して加速ギャップに戻って来た時に、常にある特定の加速位相の近くにいる」ということであって、必ずしも粒子の回転周波数と加速周波数が一致している必要はない。

電子は軽いので、加速されるとどんどん質量が増し、(7.1) 式に示されるように、回転周期は質量に比例して長くなっていく。隣接する回転周期の差が常に加速周期の整数倍になれば、あるいは同じことであるが、任意の回転周期が加速周期の整数倍になれば、加速は継続される。これは比較的高い加速周波数(短い波長)を選び、1回転当たりのエネルギー利得を適切な値に選ぶことにより可能になる。マイクロトロン (microtron) はこのような原理に基づいた円形加速器である。図 7.5 はマイクロトロンの動作原理を示すための図である。電子は空洞の内面に取り付けた熱陰極から放出されるか、電子銃によって外から入射される。

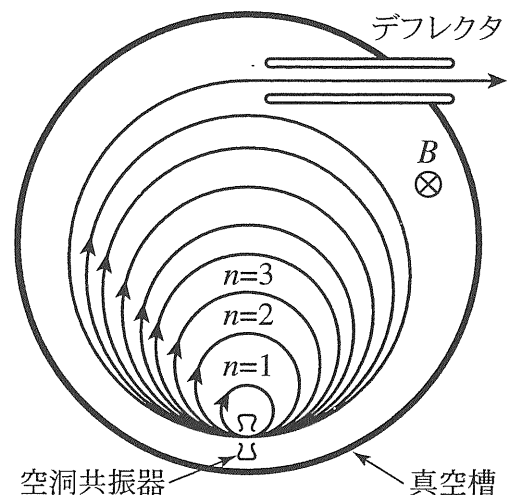


図 7.5 マイクロトロンの原理図

電子の n 回目の回転周期を T_n 、そのときの電子のエネルギーを E_n とすれば、(1.13) 式および (7.2) 式より

$$T_n = \frac{2\pi E_n}{c^2 e B}, \quad n=1, 2, \dots, \quad (7.7)$$

を得る。電子が常に同じ加速位相に戻って来るためには、 T_n が加速電場の周期 T_{rf} の整数倍になっていけばよい。

$$T_n = k T_{rf} \quad (7.8)$$

ただし、 k は正の整数であり、 n とともに増していく。電子が殆ど運動エネルギー 0 の状態から出発したとすれば、電子のエネルギーは

$$E_n = E_0 + neV \sin \phi \quad (7.9)$$

で表わされる。 V は加速電圧のピーク値、 ϕ は電子が空洞を通過するときの位相である。1 回目の回転周期 T_1 は T_{rf} の整数倍でなければならないから、(7.7)~(7.9) 式より

$$T_1 = \frac{2\pi}{c^2 e B} (E_0 + eV \sin \phi) = k_1 T_{rf} \quad (7.10)$$

ただし、 k_1 は正の整数である。1 回転ごとの回転周期の差 ΔT も T_{rf} の整数倍でなければならない。(7.7) 式および (7.9) 式より

$$\Delta T = T_n - T_{n-1} = \frac{2\pi}{c^2 e B} V \sin \phi = k_2 T_{rf} \quad (7.11)$$

を得る。ただし、 k_2 は正の整数である。(7.11) 式の両辺に電子の速度 c を掛けて書き直せば

$$\Delta \lambda = \frac{2\pi}{c B} V \sin \phi = \frac{2\pi \Delta E}{c e B} = k_2 \lambda_{rf} \quad (7.12)$$

となる。 ΔE は空洞を 1 回通過するごとに得るエネルギー、 $\Delta \lambda$ は 1 回転当たりの軌道長の増

加分、 λ_{rf} は加速電場の波長である。上式は「1 回転当たりの軌道長の増加分は、加速電場の波長の整数倍になる」ことを表わし、共振条件と呼ばれている。

(7.10) 式および (7.11) 式より次式を得る。

$$f_{rf} = \frac{c^2 e B}{2\pi E_0} (k_1 - k_2) \quad (7.13)$$

$$V \sin \phi = \frac{E_0}{e} \frac{k_2}{k_1 - k_2} \quad (7.14)$$

(7.13) 式の f_{rf} は加速周波数であり正值であるから、 $k_1 > k_2$ である。また、 $(k_1 - k_2)$ の最小値は 1 である。例えば、 $B = 0.1$ [T]、 $k_1 - k_2 = 1$ とすれば、(7.13) 式より $f_{rf} = 2.80$ [GHz] (波長 $\lambda_{rf} = 10.7$ cm) となる。 $k_1 - k_2 = 1$ の場合の加速電圧 V の最小値は、 $k_1 = 2$ 、 $k_2 = 1$ として、(7.14) 式より $V \geq E_0/e = 511$ [kV] である。 $k_1 = 2$ 、 $k_2 = 1$ の場合を基本モードと呼ぶ。基本モードの場合の 1 回転で得るエネルギーは電子の静止エネルギーに等しいエネルギーである。 $k_1 - k_2 > 1$ とすれば加速電圧 V を小さくすることができるが、加速周波数 f_{rf} が高くなる。通常は、できるだけ高い加速電圧を使って、少ない回転数で加速することが選択される。その理由は、(1) 最終エネルギーまでの回転数が少ないほど磁場不均一性の許容値が緩和される、(2) 隣接する回転の軌道差が大きいのほど取り出しが容易になる、などである。

最終エネルギーを上げるためには磁場 B の値を大きくする必要がある。前述のように $(k_1 - k_2)$ の最小値は 1 であり、この場合、 $f_{rf} = 2.8$ [GHz] とすれば $B = 0.1$ [T] である。この B の値で、例えば 10 [MeV] まで加速しようとするれば、磁石の大きさが非常に大きくなり、経済的でない。一方、加速周波数を上げることは技術上、経済上の困難が伴うので 3 [GHz] 付近にしたい。したがって、周波数を上げずに B を上げるには、(7.13) 式が示すように $(k_1 - k_2)$ を小さくせねばならない。

ここで一旦話が変わるが、初期のマイクロト

ロンでは、入射電子として空洞ギャップからの電界放出電子を用いていた。しかし、この入射方法では安定領域外に入射される電子が多く、加速される電子の割合が少ないためビーム強度が上がらなかった。その後いろいろなビーム入射法が開発されて、ビーム強度は増加した。

それらの入射法のうちに空洞内に熱陰極を置き、空洞の電場によって電子ビームを引き出す方法がある。この入射方法において、陰極の位置で1回転目を得るエネルギーを調整することにより、下記のように、加速周波数を上げることなく磁場 B を強くすることが可能になった。図 7.6 に示すように、空洞内で“0 回目”の回転を行ってから、空洞外で“1 回目”の回転を行わせる。

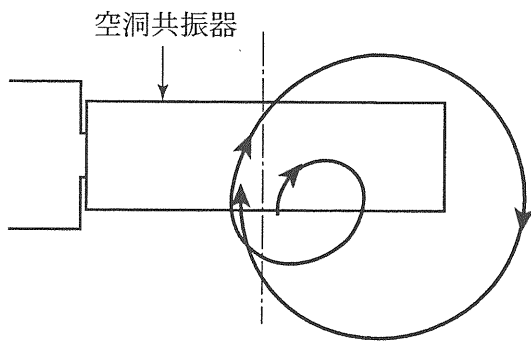


図 7.6 空洞壁の熱陰極による入射の例

この場合の1回目の回転周期 T_1 は (7.10) 式を書き直して

$$T_1 = \frac{2\pi}{c^2 e B} (E_0 + aeV \sin \phi) = k_1 T_f \quad (7.15)$$

となる。ただし、 a は任意の係数であり、(7.10) 式は $a = 1$ の特別な場合であると言える。

(7.15) 式および (7.11) 式より、 f_f を表わす (7.13) 式と $V \sin \phi$ を表わす (7.14) 式はそれぞれ次のように修正される。

$$f_f = \frac{c^2 e B}{2\pi E_0} (k_1 - ak_2) \quad (7.16)$$

$$V \sin \phi = \frac{E_0}{e} \frac{k_2}{k_1 - ak_2} \quad (7.17)$$

基本モード ($k_1=2, k_2=1$) において、(1) ($k_1 - ak_2$) は正值でなければならない、および、(2) ($k_1 - ak_2$) を 1 より小さくしたい、という条件を与えると、係数 a のとり得る範囲は $1 < a < 2$ である。例えば、 $a = 3/2$ とすれば、 $k_1 - ak_2 = 1/2$ であるから、 $f_f = 2.8$ [GHz] とする B は 0.2 [T] となり、 $a = 1$ の場合の2倍になる。ただし、加速電圧 $V \sin \phi$ も2倍の 1.02 [MeV] になる。この値は1空洞で得られる限度に近いのでこれ以上電圧を上げることは難しい。このように、加速電圧の限界によって磁場 B を大きくできないことが、円形マイクロロンのエネルギーを高々 45 [MeV] 程度に制限している。

これまでに作られた円形マイクロロンの RF システムの多くは 3 [GHz] 付近の周波数で動作している。加速空洞は無酸素銅製の円筒形または矩形空洞で、 Q 値は 1×10^4 程度である。空洞の共振周波数の調整は端面の一方を変形させるか、プランジャーの出し入れで行う。後者の方がチューニング幅は狭いが空洞の運転は安定になる。図 7.7 にカムを用いて端面を変形させる方式の空洞を示す。RF 源としてはパルス動作のマグネトロンが用いられることが多い。クライストロンよりもマグネトロンが選ばれているのは、高効率と低アノード電圧のためである。空洞へ供給するパワーが大きく、空洞の冷却の問題から連続運転ができないため、円形マイクロロンはパルス・ビームしか供給できない。しかし、位相安定性を有するので、エネルギーの安定度は良く、エネルギー幅も狭い。

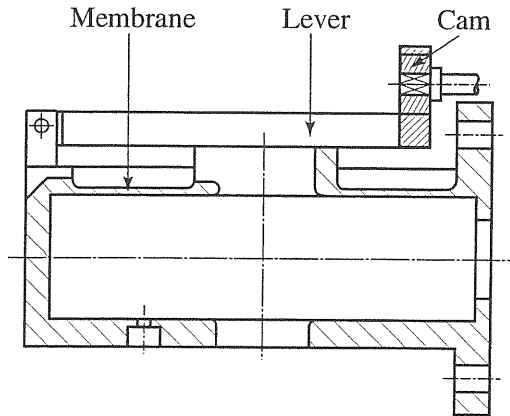


図 7.7 空洞チューニングの例：カムのより空洞壁を変形させる方法

上述のような加速電圧の問題を緩和してエネルギーを上げるとともに、連続ビーム運転を可能にするために、図 7.8 に示すようなレーストラック・マイクロトロン (race-track microtron, RTM) が開発された。マグネットは中央で分離されて引き離され、その間にできたスペースに小型の線形加速器が置かれる。二つの半円とそれにつながる二つの直線部からなる加速器の形からこのように命名されたものである。

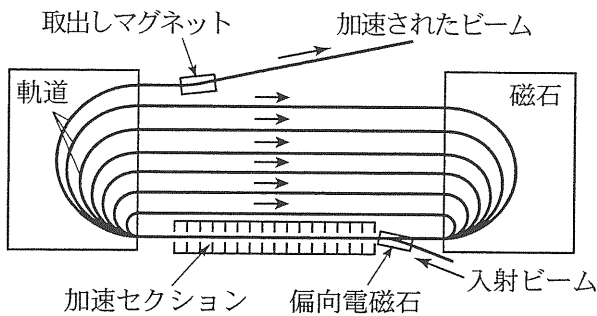


図 7.8 レーストラック・マイクロトロンの原理図

RTM においても (7.12) 式の共振条件は成立する。例えば、 $k_2=1$ 、 $f_r=2.8$ [GHz] ($\lambda_r=10.7$ cm) の場合、 $B=1$ [T] とすれば $V\sin\phi=5.11$ [MeV] になる。この程度の電圧であれば、短い線形加速

器で出すことができ、また連続運転も可能である。エネルギーの高い RTM の例としては 100 [MeV] で 24 [mA] のパルスビームが得られている。また、3 段連続構成の RTM で 855 [MeV] の連続ビームを得ている。RF パワーソースとして 2.45 [GHz] のクライストロンを使用している。

7.3 ベータトロン

ベータトロンは高周波加速装置を必要としない円形の電子加速器である。サイクロトロン、マイクロトロンにおいては、磁場の強さは時間的に一定であり、粒子の軌道半径がエネルギーと共に増加した。ベータトロンにおいては、粒子のエネルギーが増加していくときに、軌道半径が一定に保たれるように磁場の強さが時間的に増加していく。粒子軌道で囲まれる場所の磁束の時間的変化から、電磁誘導の法則によって軌道に沿った方向の加速電界が得られる。したがって、特別の加速装置を用意する必要がない。ベータトロンの原理を図 7.9 に示す。

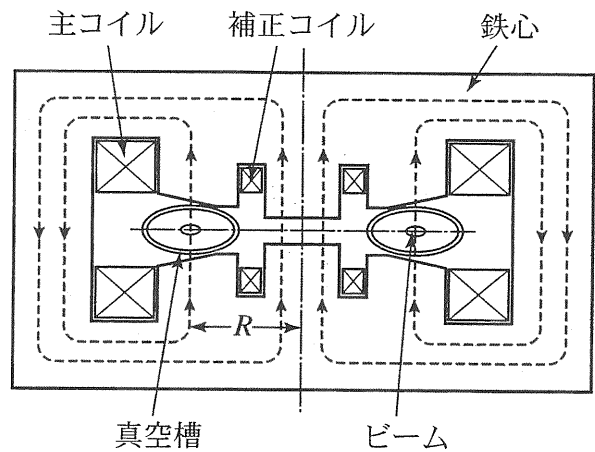


図 7.9 ベータトロンの断面図

このように、ベータトロンの動作にとって重要なことは、「粒子は時間と共に増加する磁場により加速されながら、常に平均として一定の軌道に保たれねばならない」ということである。以下ではこのような状態が保たれるために必要な条件を求める。

ベータトロンは簡単な回転対称性を持つ構成になっており、粒子の軌道は図 4.4 に示すような一定半径 ρ の円で近似できる。この軌道によって囲まれる面積を A とする。軌道面上に誘起される電場 E と軌道面に垂直な磁場 B との関係は、誘導の法則より、

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint_A \dot{\mathbf{B}} \cdot d\mathbf{s} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (7.18)$$

Φ は積分路（ビーム軌道）によって囲まれる磁束である。回転対称性より、電場の軌道方向の変化はない ($dE/d\phi = 0$) から、(7.18) 式の左辺は次のように表わされる。

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int E \rho d\phi = - 2\pi \rho E \quad (7.19)$$

ただし、正の dB/dt が負の電場を作るという意味でマイナス符号を付けた。ここで、 dp/dt を表わす (4.5) 式は $dp/dt = 0$ の場合には

$$\frac{dp}{dt} = q\rho \frac{dB}{dt} = qE \quad (7.20)$$

となる。(7.20) 式において、 $B=B_g(t)$ (添字の g は guiding field を意味する) とおけば

$$E(t) = \rho \frac{dB_g(t)}{dt} \quad (7.21)$$

となる。この式を (7.19) 式に代入して

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - 2\pi \rho^2 \frac{dB_g(t)}{dt} \quad (7.22)$$

を得る。一方、(7.18) 式の 2 番目の等式は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} - \iint_A \dot{\mathbf{B}} \cdot d\mathbf{s} &= - \pi \rho^2 \frac{d\bar{B}(t)}{dt} \\ &= - \frac{d\Phi(t)}{dt} \end{aligned} \quad (7.23)$$

ただし、バー付きの $B(t)$ は軌道内の磁場の場所的平均値である。(7.22) 式と (7.23) 式を等しいと置くことにより

$$\frac{dB_g(t)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\bar{B}(t)}{dt} \quad (7.24)$$

を得る。上式を積分して次式を得る。

$$B_g(t) = \frac{1}{2} \bar{B}(t) + B_0 \quad (7.25)$$

B_0 は時間に無関係な一定磁場である。(7.25) 式は Wideroe の 1/2 条件あるいはベータトロン条件として知られており、「一定の軌道で粒子を安定に加速するために必要な、軌道上の磁場 $B_g(t)$ と軌道内の平均磁場 (バー付き $B(t)$) との関係」を表わしている。補正コイル等によって B_0 を調整することにより、粒子の軌道を補正することができる。

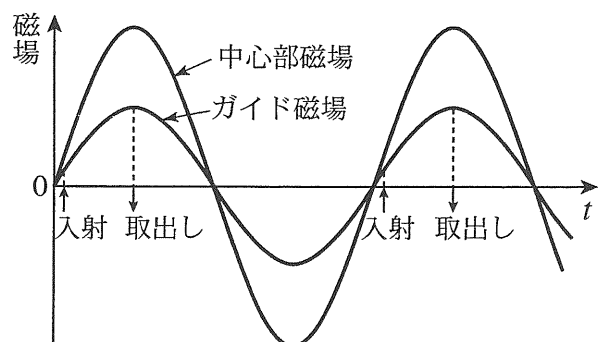


図 7.10 正弦波形の磁場を持つベータトロンで電子を加速する場合の時間サイクル

ベータトロンの磁場は、磁石のコイルのインダクタンスとそれに並列に接続されたキャパシタンスによる共振回路により作られる。通常、共振周波数は商用周波数（50あるいは60Hz）であるが、平均ビーム強度を上げるために、3倍程度の周波数逡倍を行うこともある。図 7.10 に加速の時間サイクルを示す。加速は磁場が上昇する約 1/4 サイクルで行われる。

次に粒子のエネルギー利得と軌道内の磁束の変化との関係を調べる。回転数を N とすれば、回転数に対するエネルギーの増加率（1 回転当たりのエネルギー増加）は

$$\frac{dE}{dN} = \frac{dE}{dt} \frac{dt}{dN} = \frac{dE}{dt} T = \frac{dE}{dt} \frac{2\pi}{\omega} \quad (7.26)$$

ただし、 T は回転周期、 ω は回転角周波数である。次に (7.19) 式と (7.23) 式を等しいとおいて次式を得る。

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = 2\pi\rho\mathcal{E}(t) \quad (7.27)$$

エネルギー E と混同しないように、ここでは電場を \mathcal{E} で表わしている。上式は軌道内の磁束の変化によって軌道上に誘起された電圧を表わしている。したがって、この電圧と電荷の積が粒子が 1 回転ごとに得るエネルギーであるから

$$\frac{dE}{dN} = 2\pi\rho\mathcal{E}q = q \frac{d\Phi}{dt} \quad (7.28)$$

を得る。(7.26) 式と (7.28) 式を等しいと置けば次のようになる。

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{2\pi}{q\omega} \frac{dE}{dt} \quad (7.29)$$

上式を 1 周期に亘って積分すれば次式を得る。

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{q\omega} \Delta E \quad (7.30)$$

(7.30) 式は 1 周期当たりの粒子のエネルギー利得 ΔE と 1 周期当たりの軌道内の磁束の変化量 $\Delta\Phi$ との関係を表わしている。(7.30) 式を軌道内の平均磁束（バー付き B ）で書き直せば次のようになる。

$$\Delta\bar{B} = \frac{2\pi}{q\omega\pi\rho^2} \Delta E \quad (7.31)$$

(7.25) 式のベータートロン条件は粒子についてのパラメータを含んでいないので、原理的には、どのような荷電粒子でも、どのようなエネルギーでも成り立つ。しかし、ベータートロンは陽子のような重い粒子の加速には向いていないことが、次のようにして分る。いま、粒子の最大運動量が 100 [MeV]/ c に達するようなベータートロンがあるとする。物理実験にとって重要なものは運動エネルギー E_k であるが、 E_k は (1.16) 式および (1.20) 式より

$$\begin{aligned} E_k &= E - E_0 \\ &= \sqrt{(m_0c^2)^2 + (pc)^2} - m_0c^2 \end{aligned} \quad (7.32)$$

と表わされる。電子の場合は静止エネルギー m_0c^2 が小さい (0.511 [MeV]) ので、 $pc=100$ [MeV] のときに得られる運動エネルギーは

$$E_k = 99.5 \text{ [MeV]}$$

である。これに対して陽子の場合は $m_0c^2 = 938$ [MeV] であるから、運動エネルギーは

$$E_k = 5.3 \text{ [MeV]}$$

となり、非常に低いエネルギーしか得られない。

ベータトロンの最大エネルギーは、経済的に実現できる磁石の大きさで制限されるが、最大エネルギーを制限するもう一つの要素はシンクロトロン放射損失である。放射損失はエネルギーと共に急激に増大し、ベータトロンの場合は

100 [MeV] を越えると問題になってくる。これらの制限からベータトロンエネルギーの限界は 300 [MeV] 程度と考えられている。実際は 50 [MeV] 以下で運転している例が多い。なお、加速器において、粒子軌道に直角方向の振動を一般にベータトロン振動と呼んでいるが、この呼び名はこの振動がベータトロン加速器の開発途上に研究されたことに由来している。

7.4 シンクロトロン

素粒子物理学の発展により、これまでに述べた比較的小型の加速器では達成できない、より高いエネルギーが要求されるようになった。ローレンツ力と遠心力との釣合いの式である (4.3) 式、あるいは (4.4) 式により、相対論的粒子 ($v=c$) を考えれば、粒子の全エネルギー E は次のように表わされる。

$$E = qcB\rho \quad (7.33)$$

この式が示すように、より高いエネルギーを得るには、磁場 B を強くし、かつ曲率半径 ρ を大きくすることが必要である。しかし磁場の強さの実用的限度は、常伝導電磁石で 1.5 [T] 程度、超伝導電磁石で 5 [T] 程度である。また、曲率半径についても、この章でこれまで述べてきたような、磁石の中で加速を行うタイプの加速器では、磁石の製作費用に制限されて曲率半径をあまり大きくすることはできない。このような事情により、これまでに述べてきた加速器で 1 [GeV] 以上まで加速することは非常に困難である。

このような状況を打開するために、ビームが通る位置にだけ小さな磁石を置くことにより、曲率半径 ρ を任意に大きくできるような加速器が開発された。(7.33) 式より曲率半径 ρ は

$$\rho = \frac{E}{qcB} \quad (7.34)$$

と書ける。 ρ は一定であるから、 E/B も一定、つまり、磁場 B はエネルギーの増加に同期して (synchronously) 増加せねばならない。このよ

うなことから、この型の加速器はシンクロトロン (synchrotron) と呼ばれている。シンクロトロンの原理は E. M. McMillan と V. Veksler によってほぼ同時に独立に開発された。

図 7.11 にシンクロトロンの基本的な構成を示す。初期のシンクロトロンは弱集束電磁石を用いていたが、強集束の原理の発見により、電磁石の大きさと製作費用が大幅に削減され、かつビームの集束性は格段に改良された。リングに直線部が設けられ、そこに加速空洞が置かれる。加速周波数 f_f はリングの回転周波数 f_{rev} の整数倍に選ばれる ($f_f = h f_{rev}$)。このように周波数を選べば、粒子は常に電場の位相が ϕ_s の時に空洞を通過し、1 回転ごとに得るエネルギー ΔE_{gain} は

$$\Delta E_{gain} = eV \sin \phi_s - \Delta E_{loss} \quad (7.35)$$

となる。 V は全周の加速電圧の和、 ΔE_{loss} は 1 回転する間に粒子が失うエネルギーである。

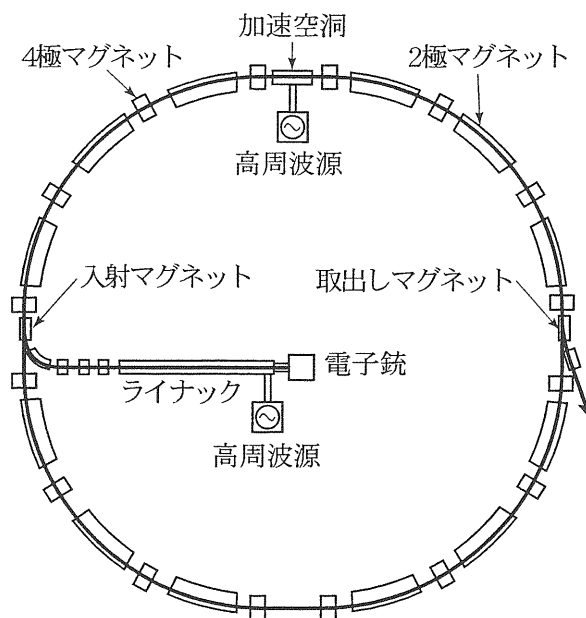


図 7.11 シンクロトロンの基本的構成

陽子シンクロトロンの場合、 $\Delta E_{loss} = 0$ とし

てよいので、 ρ および B を大きくすることにより、陽子を 1 [TeV] 以上の高エネルギーまで加速することができる。高エネルギー陽子シンクロトロンにおいては超伝導電磁石が重要な役割を果たしている。すなわち、超伝導電磁石を使用して磁場 B を大きくすることにより、加速器の曲率半径の増大を抑えることができる。現在運転中の Fermilab の Tevatron は周長 $C = 6.28$ km、 $B = 5$ [T] で陽子・反陽子を 1 [TeV] まで加速している。また、かつての LEP トンネルに現在建設中の CERN の LHC は $C = 26.66$ km、 $B = 10$ [T] で $E = 8$ [TeV] を目指している。

電子シンクロトロンの場合、エネルギーの 4 乗に比例して増大するシンクロトロン放射損失 ($\Delta E_{\text{loss}} \propto E^4$) があり、 $E \approx 10$ [GeV] 以上のエネルギー領域では圧倒的に大きくなる。放射損失を補償するために、加速空洞によってビームに高周波電力を供給することになるが、エネルギーと共に急上昇する高周波加速装置の建設・運転費用がエネルギーの限界を決めている。

加速空洞を超伝導空洞にして空洞損失を大幅に減らし、効率よく高周波電力をビームに供給することによって、より高いエネルギーまで加速することができる。しかし、放射損失はあまりにも大きい。最近運転を終了した CERN の LEP では、終盤にはリングに入るだけの超伝導空洞を設置してエネルギーを上げたが、それでもやっと 104 [GeV] であった。この数値を、前述の、同じ周長の LHC のエネルギー 8 [TeV] と比較すれば、放射損失の影響がいかに大きいか分かる。電子をこれ以上のエネルギーまで加速するには、放射損失のない線形加速器に頼らざるを得ない。リニアコライダーは、二つの相対する線形加速器からのビームを、円形加速器では得られない高エネルギーで正面衝突させる装置である。

7.4.1 蓄積リング

シンクロトロンは粒子蓄積リング (storage ring) としても利用されている。蓄積リングの基本機能はシンクロトロンと同じであるが、入射されたビームは、通常、加速されないで数時間あるいはそれ以上の長時間に亘って軌道上に蓄積される。

蓄積リングの最初の応用は高エネルギー物理のための衝突型加速器である。重心エネルギーを増すために、互いに反対方向に回転する粒子ビームと反粒子ビームを衝突させて、素粒子物理実験を行うために用いる。衝突型加速器では、衝突頻度の指標であるルミノシテイ (luminosity) を増すために、ビーム強度を上げること、衝突点でのビームサイズを絞ることが重要である。ビーム強度を上げていくと、加速空洞のインピーダンスに起因するビーム不安定性が励起されるので、その対策が加速装置にとって重要な課題になる。図 7.12 は電子・陽電子衝突リングである KEKB の模式図である。

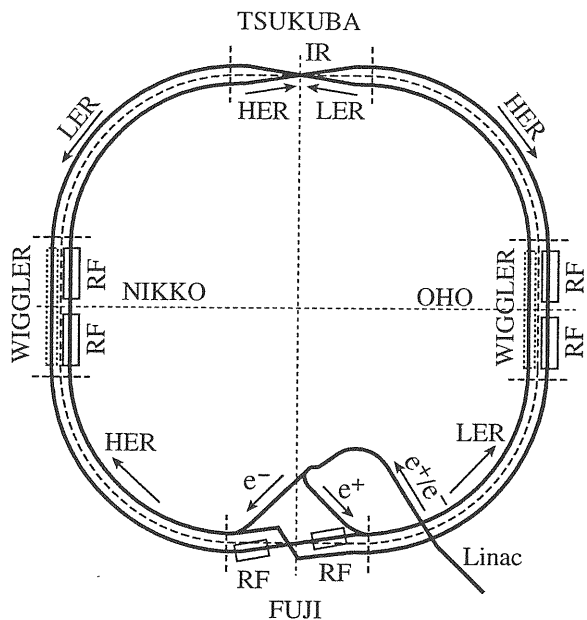


図 7.12 電子・陽電子衝突リング KEKB の模式図

蓄積リングは冷却リング (cooling ring or damping ring) としても利用される。高エネルギー陽子を標的に当てることによって生成された反陽子は、速度や方向に大きな広がりを持っている。反陽子ビームは、まず、冷却リングで確率冷却 (stochastic cooling)、電子冷却 (electron cooling) 等によって広がりを小さくしてから、次段の加速器に入射される。陽電子は特別の方

策を講じなくても、蓄積リングで回転しているうちに、シンクロトロン放射による放射冷却 (radiation cooling) で自然に冷却される。

蓄積リングのもう一つの応用は、シンクロトロン放射光発生装置である。シンクロトロン放射損失は高エネルギー加速器にとっては障碍になるが、放射光は従来の光源では得られない多くの優れた特性を持っている。このため、放射光専用の電子蓄積リングが世界各地に建設され、物質の基礎的、応用的研究に役立っている。

謝辞

本テキストを作成するにあたり、ご援助頂きました神谷幸秀加速器研究施設長、何かとお世話になりましたセミナー担当の鎌田 進氏、原稿作成の最終段階でお手伝い頂いた吉本伸一氏に感謝致します。

参考文献

下記の手持ち図書および文献を座右に置き、随時ひもといて参考にしながらこのテキストを書きました。著者の方々に感謝致します。

- [1] 熊谷寛夫他、「加速器」、核物理学講座 6、共立出版 (1960)
- [2] 熊谷寛夫編集、「加速器」、実験物理学講座 28、共立出版 (1975)
- [3] 亀井 亨、木原元央、「加速器科学」、パリティ物理学コース、丸善 (1993)
- [4] M. S. Livingston, *Particle accelerators*, McGraw-Hill Book Co., New York (1962).
- [5] E. Persico, E. Ferrari and S. E. Segre, *Principles of particle accelerators*, W, A, Benjamin, Inc., New York (1968).
- [6] J. J. Livingood, *Principles of cyclic particle accelerators*, D. Van Nostrand Co. Inc., New York (1960).
- [7] H. Wiedemann, *Particle accelerator physics* (I and II), Springer-Verlag, Berlin (1993).

[8] E. Wilson, *An introduction to particle accelerators*, Oxford Univ. Press, New York (2000).

[9] K. Wille, *The physics of particle accelerators: an introduction*, Oxford Univ. Press, New York (1996).

[10] S. Y. Lee, *Accelerator physics*, World Scientific Publishing Co. Ltd., Singapore (1999).

[11] D. A. Edwards and M. J. Syphers, *An introduction to the physics of high energy accelerators*, John Wiley & Sons, Inc., New York (1993).

[12] A. J. Lichtenberg, *Phase-space dynamics of particles*, John Wiley & Sons, Inc., New York (1969).

[13] T. Wangler, *RF linear accelerators*, John Wiley & Sons, Inc., New York (1998).

[14] A. W. Chao and M Tigner, *Handbook of accelerator physics and engineering*, World Scientific Publishing Co. Ltd., Singapore (1999).

[15] M. Sands, "The physics of electron storage rings : an introduction", SLAC-121, UC-28 (ACC) (1970).

[16] P. B. Wilson and J. E. Griffin, "High energy electron linacs; application to storage ring RF systems and linear colliders", AIP Conf. Proc., No. 87, p. 450 (1982).

[17] B. W. Montague, "Single-particle dynamics—RF acceleration", Proc. 1st course of international school of particle accelerator, CERN 77-13, 19 July (1977).

[18] W. T. Weng, "Fundamentals—longitudinal motion", AIP Conf. Proc. (1982).

以上の他にも多数の文献を参考にしましたが、それらを記す時間がなくなってしまいました。著者の方々には慎んでお詫び致します。