

加速器電磁石入門

1. シンクロトロン of 歴史

一昔前に時計を戻して第2次世界大戦中の1940年代当時の原子核物理実験の裏舞台を垣間見れば、1 GeVを超えることが至難の業であったことが伺える。当時としてはシンクロサイクロトロン of 大型化によって1 GeVに迫る加速器プロジェクトが進行中であったが、電磁石 of 重量が膨大になり建設 of 経済性に限界が現れ始めていた。バーミンガム大学 of Oliphant はこのとき既に1 GeV以上に加速するシンクロトロン of 構想を練っていた。しかし、実際にその建設に着手したのは、McMillan が位相安定性 of 理論(1945)を発表した後である。

このとき考案されたシンクロトロン(図1、1953)は、サイクロトロン of 軌道安定性に基づくもので、その後しばらくの間いわゆる弱収束の原理による比較的エネルギー of 低いシンクロトロンが建設された。シンクロトロン of 発明により電磁石 of 到達ビームエネルギーに対する重量を劇的に減少させることができた(図2)。

弱収束の原理に基づく軌道安定性はビームに対する収束力が弱いため加速されるビーム of ベータatron振動 of 振幅が大きく、ビーム of アパーチャに応じて電磁石も比較的 large であった。これは電磁石 of 空隙(ギャップ)に発生する磁場を利用してビーム of 軌道を制御するため、ギャップそ

のものが大きくなり必要とされる強い磁場 of 発生のためにギャップを取り囲む鉄心も大きくなるからである。しかし、ビーム of 最大エネルギーをさらに上げていけば、この場合にも経済的な限界が現れる。

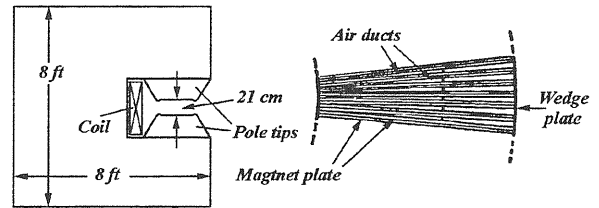
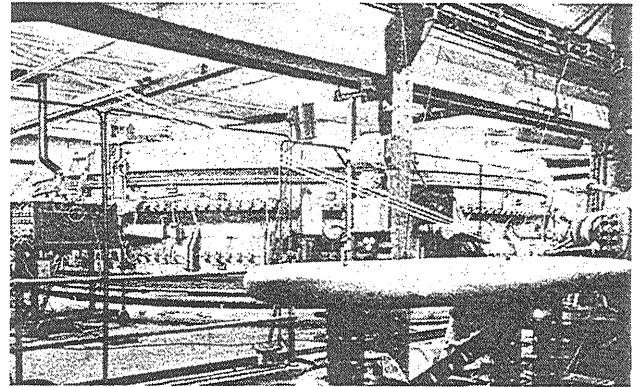


図1 バーミンガム 1.3 GeV 陽子シンクロトロン (上) と電磁石 (下)。

表1 弱収束シンクロトロンとシンクロサイクロトロン of 電磁石 of 比較。

加速器	最大陽子エネルギー (GeV)	軌道半径 (m)	電磁石総重量 (ton)	最大磁場 (T)	アパーチャー 水平 x 垂直 (cm)	磁場指標 (n 値)
弱収束シンクロトロン						
Birmingham	1.3	4.5	800	1.26	50 x 21	0.68
Cosmotron	3.0	9.14	1,650	1.38	91 x 22	0.6
Bevatron	6.2	15.24	9,700	1.54	122 x 30	0.7
ZGS	12.5	27.4	4,000	2.15	81 x 15	0.0
Nimrod	7.0	23.6	7,000	1.4	91 x 24	
Synchro-phasotron	10.0	28.0	36,000	1.3	150 x 40	0.55 - 0.75
Princeton (PPA)	3.0	12.3	350	1.38	25 x 6	0.5 - 0.75
FM サイクロトロン						
LBL	0.91	2.4	4,000	2.3		
Dubna	0.68	3.0	7,200	1.68		
CERN	0.6	3.0	2,500	1.88		

英国 of 科学産業研究局に提出された Oliphant of メモ(1943)によれば、「近年 of 原子核・素粒子研究から多くの重要な成果が得られ、基本的知識 of 探求に対する要求は加速器による 1 GeV 以

上 of エネルギーを必要としている。しかし、既存 of 技術でこの要求を経済的に満たす加速器は存在しない。コスト面で納得できる新しい加速方法を述べる」として、中空電極 of ギャップにサイク

ロトロンと同じように交番加速電場を印加して加速し、ビームのエネルギーが増加しても軌道半径を一定に保つため円環状電磁石の磁場を変化させる加速器（シンクロトロン）を提案した。加速による相対速度の変化の違いから電子と陽子の加速を区別し、加速周波数を変える必要性から陽子シンクロトロンの方がはるかに難しいと述べている。しかし、これが実用的な提案になるには McMillan による位相安定性の原理 (1945) が必要であった。当初はさして注目されなかったが、次の大きなプロジェクトのステップとして 1945 年末に Malvern (UK Telecommunications Establishment) に 30 MeV の電子シンクロトロンを建設することが決定された。図 3 に示す 2 種類の構造 (H 型と C 型) のものが建設され、1947 年にはビームコミッションが行われた。このとき既に磁場の精度、シンクロトロン振動によるビーム損失、磁極設計、磁場誤差の影響、ビーム取出などが研究されている。この加速器で物理実験の他に医学利用も考慮されていた [1]。

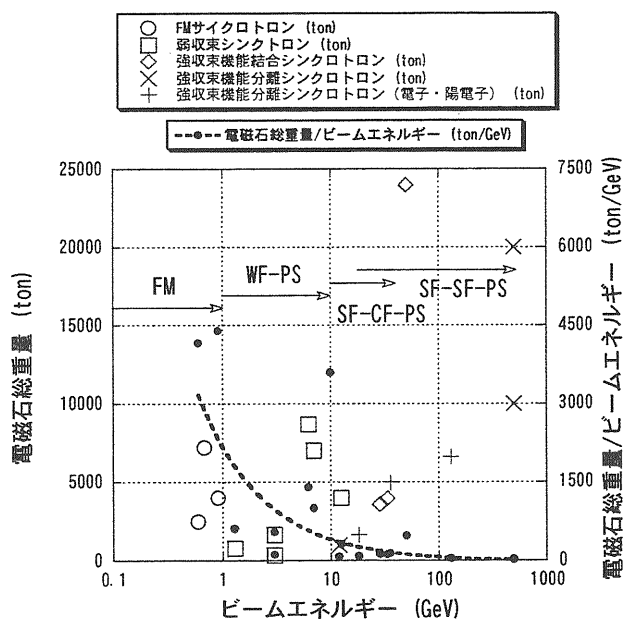


図 2 電磁石重量とビームのエネルギーの関係。

磁極の設計は $n = -(r/B)(dB/dr)$ の値を 0.7 に選び、形状は電解液によるアナログモデルによる経験的方法と緩和法による数値計算から決定された。電磁石の励磁には 50 Hz の直列共振電源が使用された。

しかし、シンクロトロン加速は、英国が不発弾処理に必要と判断して Kerst に依頼して作ってもらった可搬型の 4 MeV のベータトロンを改造して 8 MeV の加速に成功したのが最初である (1946)。これは後に Malvern に運ばれ直流バイ

アス磁場を追加してエネルギーは 14 MeV まで増加した。ドイツ軍の攻撃は V1, V2 ロケット爆弾に移ったため、このベータトロンは初期の目的に使われることはなかった。

1950 年末には Malvern における実験は終了した。当の Birmingham 大学の 1.3 GeV 陽子シンクロトロンの設計は 1946 年に開始され、完成は 1953 年である。米国では同じ頃に Bevatron (6 GeV, 1954) と Cosmotron (3 GeV, 1952) が完成している。Oliphant は途中でメルボルンに移ることになったが、メモによれば「電磁石用の鉄は高品質の薄板で、漏洩磁束は空心に比べてそれ程減少しないが、必要な電力は空心の方がずっと少ないため、鉄を使用する電磁石にはこだわっていない」と述べている。空心電磁石のシンクロトロンに傾倒した Oliphant はキャンベラで図 4 の 8 T の空心電磁石による軌道半径 4.8 m の 10.6 GeV 陽子シンクロトロンの建設を始めたが、励磁には成功したものの繰返周期に約 10 分を要することから、この計画は中止された [2]。

この頃には 30 MeV 以下の物理実験や医学利用に手頃な電子リニアックが開発されたことと、朝鮮戦争が始まったため Malvern にいた多くのスタッフは国防関係の仕事に戻っていった。C 型 30 MeV シンクロトロンは Harwell に運ばれてしばらくは光核反応の実験が行われたが、やがて CERN の設立につながる大型の陽子加速器の研究に移っていった。弱収束シンクロトロンが建設中であった頃、アテネのエレベータ技師 Christofilos は図書館で Phys. Rev. を読み、加速器を発明しようとしてこの強収束の原理を発見している (1949)。1952 年にニューヨークを訪れたとき図書館で Courant · Livingston · Snyder の論文 [3] が Phys. Rev. に掲載されているのを見て、自分のアイデアが盗まれたと思ひ抗議のため BNL まで出向いている。彼の主張は認められ、BNL に迎えられて、ドリフトチューブの計算や核融合炉 Astron の設計などの重要な仕事を行っている。1952 年に発足した CERN では Cosmotron の 10 GeV バージョンを作るために代表団を BNL に送ろうとしていた。Livingston は CERN のためによりアイデアを探していたとき、電磁石のバックレグの向きをセクションごとに内側と外側に交互に並べれば、電磁石の平均磁場を上げられるのではないかと考えた。電磁石が飽和すれば交番勾配 (alternate gradient) になるので、軌道に影響するかも知れないと Courant に相談を持ちかけた。この方法で収束が改善されることを発見し、Snyder は同じ強さの凹レンズと凸レンズを並べることで正味の収束が得られ

るという光学からの類推が加速器においても成り立つことを確認した。ここに強収束の原理が確立された。

CERN 代表団はこの原理の発見を大いに喜び、Cosmotron をスケールアップする計画を取りやめ、新しい原理で CERN の加速器を建設する道を選んだ。強収束の原理は“The Electron Analog”と呼ばれる 10 MeV 電子シンクロトロンによって検証された後、密接な協力関係を保ちながら 28 GeV CERN-PS (1959) と 33 GeV BNL-AGS (1960) の陽子シンクロトロンが建設された。

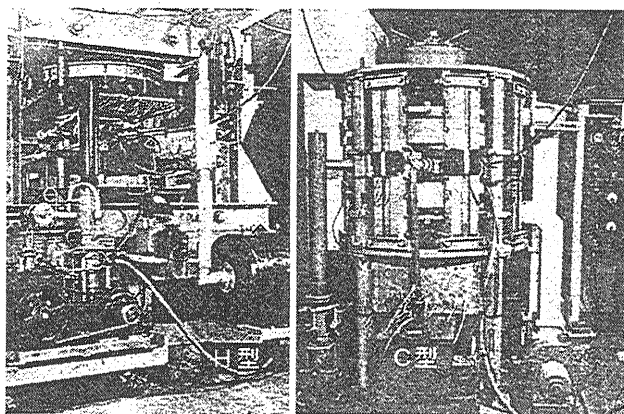
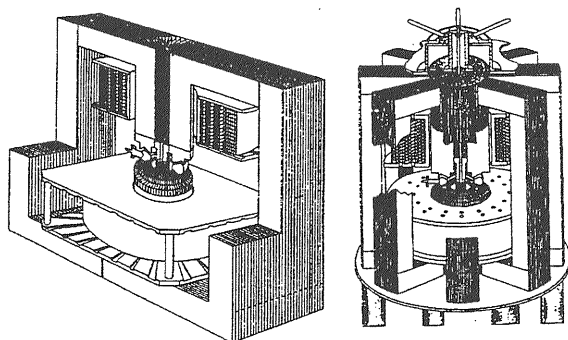


図3 世界最初の 30 MeV 電子シンクロトロン、H型とC型電磁石 (軌道半径は 10 cm)。

弱収束シンクロトロンにおいて必要なビームアパーチャーは軌道半径にほぼ比例するためビームエネルギーとともに電磁石総重量が増加する。しかし、 n 値を大きくして交互に符号を変えることによって半径方向と垂直方向に強い収束力が得られるという強収束の原理を採用することで、①ベータatron振動の振幅が小さくなる、②運動量コンパクションファクター (momentum compaction factor) が小さくなるためシンクロトロン振動による半径方向の軌道変化が小さくなる。ビームアパーチャーが減るため、電磁石を小さく設計できるようになった。この時期に建設されたシンクロトロン電磁石は機能結合型 (combined function type) である。これは偏向

磁場と収束磁場を 1 台の電磁石で実現するため、図 5 のように半径方向にギャップ寸法に変化をつけて磁場勾配を作る必要がある。磁場を増加させるとギャップが最小になる磁極面近傍で鉄の飽和が顕著になり、中心軌道における磁場 (偏向磁場) が制限されることになる。また、飽和により鉄心中の磁束分布が変化するためギャップ内の磁場分布も影響を受ける。許容範囲を超えて変化した場合はビームが不安定になり加速器としての機能が失われる。機能結合型の電磁石では磁場勾配が大きい程、偏向磁場が強い程、加速エネルギーは低くなる。

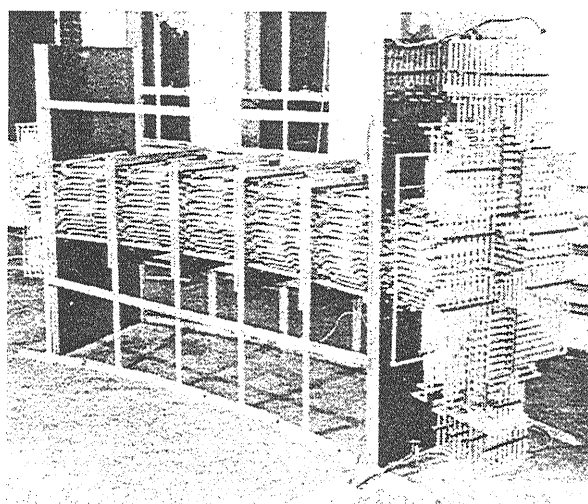


図4 空心電磁石 (オーストラリア国立大学)、 n 値は約 0.55、有効アパーチャーは 22 cm。

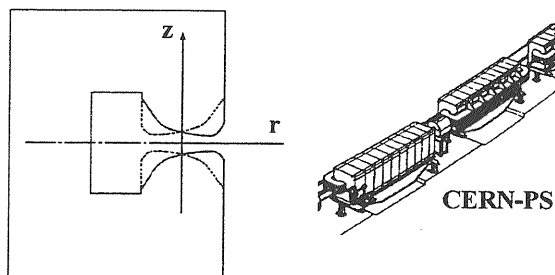


図5 機能結合型電磁石。

CERN と BNL で機能結合型シンクロトロンが設計段階にあったころ、プリンストン大学で機能分離型の理論的研究が行われ、機能結合型と本質的な軌道光学上の相違がないことが確認された。この成果は後に FNAL の 500 GeV 陽子シンクロトロン (1971) に生かされることになった。機能分離型はビームに対する偏向作用と収束作用をそれぞれ独立の偏向電磁石と 4 極電磁石 (図 6) で行うため、電磁石として使用できる磁場範囲が広がり、より高いエネルギーまで加速する大型シンクロトロンに適している。これ以来、大型のシ

シンクロトロンは電子、陽子を問わず機能分離型で設計されるようになった。日本では高工機構の前身であった素粒子研究所準備室で 42 GeV 陽子シンクロトロンを建設するため機能結合型で設計を進めていたが、高工研設立にあたり大幅な計画変更と、その後 Lee Teng の指導や FNAL のデザインレポートに基づき最新の成果を取り入れて KEK-PS が完成 (1975) した。短期間に新しい加速器の設計できた背景にはコンピュータによる軌道計算と電磁石設計ができたことと、日本の工業技術水準が高かったことによる。

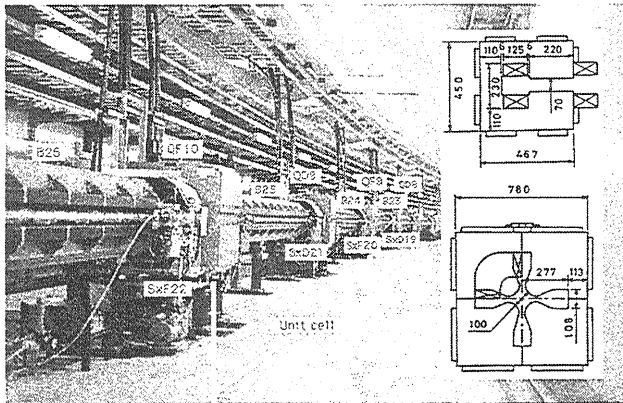


図6 機能分離型の偏向電磁石と4極電磁石。

しかし、CERN-SPS が完成した後は、素粒子実験は物理の成果を求めて電子・陽電子衝突型シンクロトロンへ移ることになり、SPEAR、DORIS、CESR、PEP、PETRA、TRISTAN、LEP などが相次いで建設された。しかし、電子シンクロトロン放射光による経済的限界から電子・陽電子衝突型加速器はリニアコライダーを目指し、それが建設されるまでの期間を BNL-RHIC や CERN-LHC による陽子・陽子および重イオン・重イオン衝突型シンクロトロンを利用して、より高いエネルギーにおける実験へと進むことになる。他方、CESR で行われていた CP 非保存の検証を行うため、TRISTAN と PEP はルミノシティの大きな電子・陽電子非対称衝突型シンクロトロン (Bファクトリー) として KEKB と PEP-II に改造され、大きな成果を上げつつある。

2. 弱収束と強収束の原理

2-1. 弱収束シンクロトロン

弱収束の原理によれば、垂直方向の軌道安定性のためには磁場勾配が半径とともに減少しなければならない。すなわち、 n 値 (磁場指標) が正

でなければならない。しかし、垂直方向の収束力は水平方向の軌道安定性から制限される。垂直・水平両方向の軌道安定性の条件は

$$0 < n < 1 \quad \left(n = -\frac{r}{B} \frac{\partial B}{\partial r} \right) \quad (1)$$

ここで、 B は中心軌道 r における磁束密度である。 z (垂直) 軸に垂直な対称面をもつ軸対称磁場 $\mathbf{B} = (-B_r, 0, -B_z)$ を仮定して、平衡軌道を $z=0$ 、 $r=p/eB$ とする。 p は粒子の運動量、 e は単位電荷である。この場合の荷電粒子の運動方程式は

$$\frac{d}{dt}(mr\dot{r}) = \frac{mv^2}{r} - evB_z \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt}(mz\dot{z}) = evB_r \quad (3)$$

電磁石対称面における平衡軌道 r_0 まわりの磁場は

$$B_z = B_{z0}(r/r_0)^{-n} \quad (4)$$

で与えられるので、

$$n = -\frac{r}{B_z} \frac{dB_z}{dr} \quad (5)$$

マクスウエルの関係式から磁極ギャップ内で $[\text{rot}\mathbf{B}]_\theta = \partial B_r / \partial z - \partial B_z / \partial r = 0$ が成立するので、磁場の r 方向成分は

$$B_r = (-nz/r)B_z + \text{higher order terms in } z/r \quad (6)$$

(2) (3) において、

$$x = r - r_0, \quad z = z \quad (7)$$

と置き、質量 m と速度 v は変化しないものとして (4) を用いて線形化すれば、定常解のまわりの微小振動の方程式が得られる。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (1-n)\omega_0^2 x = 0 \quad (8)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + n\omega_0^2 z = 0 \quad (9)$$

ここで、 $\omega_0 = v/r_0$ は回転の角周波数である。(8)

(9) はそれぞれ水平、垂直方向のビームのベータトロン振動を記述する運動方程式であり、ベータトロン振動数 (リング一周あたりのベータトロン振動の数、チューンとも云う) は $\nu_x = \sqrt{1-n}$ 、 $\nu_z = \sqrt{n}$ である。すなわち、(1) の関係が成立するとき、ビームは安定である。

2-2. 強収束シンクロトロン

弱収束に要求されるアパーチャーは比較的大きく、電磁石の重量はエネルギーの3乗にほぼ比例する。Cosmotron (3 GeV, 1650 tons) を例にとれば、10 GeV の陽子シンクロトロンの電磁石

総重量は $1650 \times (10/3)^3 = 60,000 \text{ tons}$ である。この原理に従う限り経済的なエネルギー限界はそれほど高くない。

上の運動方程式において、時間微分の代わりに平衡軌道上のビーム経路 s による微分でベータatron振動の方程式を導く。そのためにビームが進んだ距離と時間の関係

$$s = \int v dt \quad (10)$$

を用いて (8) (9) を変換すれば、

$$x'' + \frac{1-n}{\rho^2} x = 0 \quad (\text{ただし、} \rho = r_0) \quad (11)$$

$$z'' + \frac{n}{\rho^2} z = 0 \quad (12)$$

ここで、 x と z の係数は s の周期関数であり、 x'' 、 z'' は s による微分である。強収束の条件から、ビームがシンクロトロンリングを一周する間にこれらの係数が交互に変化する（符号を変える）ため、このような変換が必要である。(11) と (12) は同じ形をしているので、一緒にして、

$$u'' + K_{x,y}(s)u = 0 \quad (13)$$

ただし、

$$K_x = \rho^{-2} + k, \quad K_y = -k \quad (14)$$

ここで、 $k = g/B\rho$ (g は磁場勾配) である。係数の周期条件を

$$K(s+L) = K(s) \quad (15)$$

とする。ここで、リング周長を C 、リング全体として電磁石配列に規則性の現れる周期を L とすれば、 $N(C/L)$ 回の周期性が存在する。この L を超周期と呼び、 L より短い図7のような規則的な周期が電磁石配列の基本構造(単位セル)である。複数の単位セルと基本構造とは異なる特殊セルが合わさって1超周期(super-period)を構成する。3超周期、4超周期または6超周期で1リングを構成する。

(13) は定数係数の2階微分方程式であるので、初期条件が決まればその後の運動は一意的に決まる。 $s = s_0$ における初期条件を $u(s_0)$ 、 $u'(s_0)$ とすれば、任意の位置 s における状態は

$$u(s) = au(s_0) + bu'(s_0) \quad (16)$$

$$u'(s) = cu(s_0) + du'(s_0) \quad (17)$$

(1) $K > 0$ のとき、 $u(s) = A \sin \sqrt{K}s + B \cos \sqrt{K}s$ なる解を仮定して、(16)、(17) に $u(s)$ 、 $u'(s)$ 、 $u(s_0)$ および $u'(s_0)$ を代入すれば、

$$a = \cos \varphi, \quad b = \frac{\ell \sin \varphi}{\varphi \sqrt{K}}, \quad c = -\frac{\varphi}{\ell} \sin \varphi, \quad d = \cos \varphi$$

ただし、 $\varphi = K^{1/2} \ell$ 、 $\ell = s - s_0$ である。これらをマトリックス形式で書き直せば、

$$\begin{pmatrix} u(s) \\ u'(s) \end{pmatrix} = \mathbf{M}(s|s_0) \begin{pmatrix} u(s_0) \\ u'(s_0) \end{pmatrix} \quad (18)$$

となつて、

$$\mathbf{M}(s|s_0) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \frac{\ell \sin \varphi}{\varphi} \\ -\frac{\varphi}{\ell} \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (19)$$

(2) $K < 0$ のとき、 $u(s) = A \sinh \sqrt{|K|}s + B \cosh \sqrt{|K|}s$ なる解が得られるので、同様にして、

$$\mathbf{M}(s|s_0) = \begin{pmatrix} \cosh |\varphi| & \frac{\ell \sinh |\varphi|}{|\varphi|} \\ \frac{|\varphi|}{\ell} \sinh |\varphi| & \cosh |\varphi| \end{pmatrix} \quad (20)$$

(3) $K = 0$ のとき、 $u(s) = As + B$ となるので、

$$\mathbf{M}(s|s_0) = \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

である。

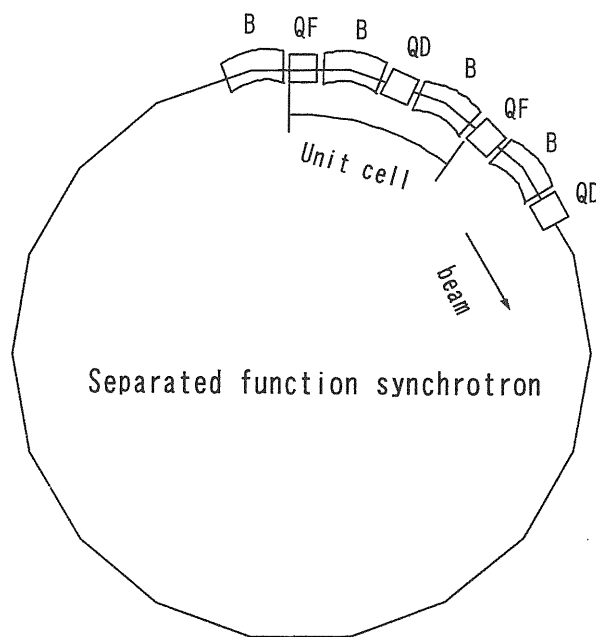


図7 機能分離型シンクロトロン。

$k \neq 0$ および $\rho \neq \infty$ であれば、偏向磁場と収束磁場が同時に存在する機能結合型のトランスファーマトリックスを与える。

1) $K > 0$ の場合は収束電磁石に相当し、① $k = 0$ ならば偏向角を $\theta = \ell/\rho$ と置いて水平面内の偏向電磁石、また偏向角を $\theta = s/\rho \rightarrow 0$ と置いて垂直方向の偏向電磁石、② $\rho = \infty$ ならば純粋な収束4極電磁石のトランスファーマトリックスが得

られる。偏向電磁石で運動量の違いによる軌道への影響を考慮すれば、トランスファーマトリックスを3行3列として扱う必要がある。

2) $K < 0$ の場合は発散電磁石に相当し、 $\rho = \infty$ のとき純粹の発散4極電磁石のトランスファーマトリックスが得られる。

3) $K = 0$ の場合は磁場のない長さ ℓ のドリフトスペースを与える。

単位セルのマトリックスを $\mathbf{M}(s)$ とすれば、

$$\mathbf{M}(s+L|s) = \mathbf{M}(s) \quad (2.2)$$

の周期性が成立する。リングは $K = \text{const}$ の要素から構成されるので、(1.9) - (2.1) のマトリックスを掛け合わせることによって $\mathbf{M}(s)$ を求めることができる。シンクロトロン軌道パラメータ $(\mu, \alpha, \beta, \gamma)$ との関係は

$$\mathbf{M}(s) = \mathbf{I} \cos \mu + \begin{pmatrix} \alpha(s) & \beta(s) \\ -\gamma(s) & -\alpha(s) \end{pmatrix} \sin \mu \quad (2.3)$$

ここで、 \mathbf{I} は単位マトリックス、 μ は長さ L の超周期におけるベータトロン振動の位相の進み (phase advance)、 $\beta(s)$ は振幅関数である。証明

は省略するが、

$$\alpha = -\beta'/2, \quad \gamma = (1 + \alpha^2)/\beta$$

の関係がある。(1.3) は減衰項を持たないため $\det \mathbf{M} = 1$ が成立するので、(2.3) から $\beta\gamma - \alpha^2 = 1$ が得られる。振動が安定であるためには水平方向にも垂直方向にも $|\text{Tr} \mathbf{M}(s)/2| = |\cos \mu| < 1$ でなければならない。この条件を満たすとき、ベータトロン振動数は $\nu = N\mu/2\pi$ である。

2-3. 不整磁場

上で扱った磁場は理想的な偏向磁場と収束磁場である。ところが実際に製作される電磁石は理想的な設計に対して多少の誤差を含む。設計軌道上の磁場誤差を $\Delta B(s)$ として非線形項を無視すれば、運動方程式は

$$u'' + K(s)u = \frac{\Delta B}{B\rho} \equiv F(s) \quad (2.4)$$

 整次方程式 (1.3) の一般解

$$u(s) = a\beta^{1/2} \cos\left[\int \frac{ds}{\beta} + \delta\right], \text{ ただし、 } 2\beta\beta'' - \beta'^2 - 4[1 - K(s)\beta^2] = 0 \quad (2.5)$$

を利用して (2.4) の解を求める。一般解を求めるため

$$u(s) = a\beta^{1/2} \cos\left[\int \frac{ds}{\beta} + \delta\right] = A\beta^{1/2} \cos \int \frac{ds}{\beta} + B\beta^{1/2} \sin \int \frac{ds}{\beta} \quad (2.6)$$

のように定数 A, B を導入してから定数変化法を適用する。その結果、

$$A = -\int \beta^{1/2} F(s) \sin \int \frac{ds}{\beta} ds + C, \quad B = \int \beta^{1/2} F(s) \cos \int \frac{ds}{\beta} ds + D \quad (2.7)$$

となって、未定定数は C, D になる。この A, B を (2.6) に代入し、次の変数

$$\eta(\varphi) = \beta^{-1/2} u(\varphi), \quad \varphi = \int \frac{ds}{v\beta}, \quad (ds = v\beta d\varphi) \quad (2.8)$$

を導入すれば、一般解は

$$\eta(\varphi) = C \cos v\varphi + D \sin v\varphi + v \int_{\varphi_0}^{\varphi} \beta^{3/2} F(\psi) \sin v(\varphi - \psi) d\psi \quad (2.9)$$

となる。右辺第3項が特殊解を与える。

$$\sin v(\varphi - \psi) = \frac{1}{2 \sin v\pi} [\cos v(\pi - \varphi + \psi) - \cos v(\pi + \varphi - \psi)]$$

の関係を入れて、

$$\eta(\varphi) = C \cos v\varphi + D \sin v\varphi + \frac{v}{2 \sin v\pi} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \beta^{3/2} F(\psi) [\cos v(\pi - \varphi + \psi) - \cos v(\pi + \varphi - \psi)] d\psi \quad (3.0)$$

(28) を用いて (24) を書き直せば、

$$\frac{d^2\eta}{d\varphi^2} + \nu^2 \left[\frac{1}{2} \beta \beta'' - \frac{1}{4} \beta'^2 + \beta^2 K(s) \right] \eta = \nu^2 \beta^{3/2} F(s)$$

ここで、[]内のプライムは s による微分で、

$$\beta\gamma - \alpha^2 = \frac{1}{2} \beta \beta'' - \frac{1}{4} \beta'^2 + \beta^2 K(s) = 1$$

の関係が成立する[4, 5]。したがって、

$$\frac{d^2\eta}{d\varphi^2} + \nu^2 \eta = \nu^2 \beta^{3/2} F(\varphi) \quad (31)$$

この右辺の $F(\varphi)$ は電磁石の製作誤差や空間の浮遊磁場によるもので、一般的にはあらゆるフーリエ成分が含まれる。 ν が整数でないとき、(29) または (30) の一般解の内、周期性の条件 $\eta(\varphi_0) = \eta(\varphi_0 + 2\pi)$ と $\eta'(\varphi_0) = \eta'(\varphi_0 + 2\pi)$ を満たす解が閉軌道 (closed orbit) を与える。閉軌道の式は

$$\eta(\varphi) = \frac{\nu}{2 \sin \pi \nu} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \beta^{3/2} F(\psi) \cos \nu(\pi + \varphi - \psi) d\psi \quad (32)$$

である。チューンが整数であれば閉軌道が無限大になり、安定な軌道は存在しない。

3. 磁場の理論的取扱 (多極磁場)

電流が存在しない領域において磁気スカラーポテンシャル ϕ に関するラプラス方程式

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (33)$$

が成立する。このスカラーポテンシャルから、磁場は

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \text{grad} \phi = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \quad (34)$$

として求めることができる。加速器の電磁石はビームの軌道に対してある対称性をもって作られるので、座標系の選択により磁場の表現が簡単になる。ここでは電磁石のビーム軸を z 方向とする円柱座標系 (r, θ, z) を採用する。この座標系において (33) は、

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (35)$$

ここでは磁場測定との関連においてラプラス方程式を解くことを考える。図8のように回転サーチコイルの一辺を電磁石の中心軸に合わせ、他辺が磁場の中を一定速度で回転する。コイルに誘導される電圧はコイルが横切る磁束の変化率に比例する。電磁石は一定電流で励磁され、空間的磁場変化があればコイルが磁束の変化として捉え、誘導電圧が発生する。磁場測定は

1) コイルが十分短くて電磁石内に位置し、2次

元磁場だけを感じる場合には、 $B_z = 0$ 。

2) コイルが十分長くて、コイルの両端が電磁石の十分外にある場合には、コイル両端で $\mathbf{B} = 0$ 。

の2つの場合に分けて扱う。どちらの場合も誘導電圧への寄与は B_r 成分のみである。この種のサーチコイルは4極以上の多極電磁石の磁場測定において、2) の長いコイル内に独立の1) のコイルを入れ、それぞれ磁場の2次元分布と3次元分布積分値の測定に利用される。

コイルに誘導される電圧は磁束の時間変化として、

$$E(t) = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (36)$$

ここで、 Φ はコイルが囲む面積と交差する全磁束である。

$$\Phi = \int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} \quad (37)$$

これを全微分することによりコイルに誘導される電圧は

$$E(t) = -\int_S \left\{ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + [\text{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{v}) - \nu \text{div} \mathbf{B}] \right\} \cdot d\mathbf{S} \quad (38)$$

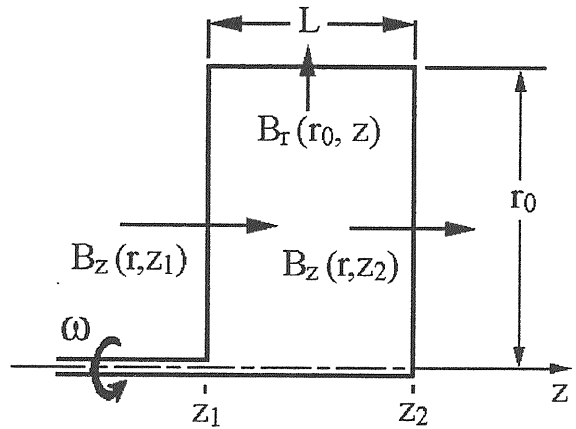


図8 回転ハーモニックコイルによる磁場測定。

\mathbf{B} の時間的変化はなく、 $\text{div} \mathbf{B} = 0$ およびストークスの定理を適用すれば、

$$E(t) = -\int_{\Gamma} (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{s} \quad (39)$$

すなわち、誘導電圧はコイルの回転速度 \mathbf{v} に直交するコイル Γ に沿う磁場の積分で与えられる。そこで、 \mathbf{B} 、 $d\mathbf{s}$ および \mathbf{v} を円柱座標で表せば、

$$\mathbf{v} = r\dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \dot{z} \hat{\mathbf{z}} \quad (40)$$

$$\mathbf{B} = B_r \hat{\mathbf{r}} + B_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + B_z \hat{\mathbf{z}} \quad (41)$$

$$d\mathbf{s} = \hat{\mathbf{r}} dr + \hat{\boldsymbol{\theta}} r d\theta + \hat{\mathbf{z}} dz \quad (42)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{r}}$ 、 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 、 $\hat{\mathbf{z}}$ はそれぞれの方向の単位ベクトルである。 θ だけが時間の関数であるので、

$$(\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{s} = r\dot{\theta}B_z dz - r\dot{\theta}B_r dr \quad (4.3)$$

コイル両端の r 方向に沿う積分路の B_z 成分は 1) および 2) のいずれの場合にもゼロであるので、誘導電圧は、コイルの巻数を N として、

$$E(r, \theta) = -r\dot{\theta}N \int_{z_1(r)}^{z_2(r)} B_z(r, \theta, z) dz \quad (4.4)$$

ここで、 $z_1(r)$ と $z_2(r)$ はコイル両端の z 座標である。

電磁石を設計する上では電磁石ギャップ内の端部から離れた所の 2 次元と思われる部分を扱う。端部の 3 次元的部分からくる磁場分布の誤差は、磁場測定に基づく端部シム補正または独立の補正用電磁石によって補正する。

3-1. 2次元磁場と多極磁場展開

2次元磁場ではラプラス方程式 (3.5) の z 方向依存性が無視できるので、スカラーポテンシャルを

$$\phi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) \quad (4.5)$$

と置いて、変数分離法によって解くことができる。

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} = -\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = \pm n^2 \quad (4.6)$$

これより、

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} \pm n^2 \Theta = 0, \quad r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} \mp n^2 R = 0 \quad (4.7)$$

これらの微分方程式の一般解は n の値により表 2 のように分類することができる。

表 2 2次元ラプラス方程式の一般解 (磁気スカラーポテンシャルの解)。

	$n=0$	$n \neq 0$	
微分方程式	$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = 0$ $r \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{dR}{dr} = 0$	$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + n^2 \Theta = 0$ $r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - n^2 R = 0$	$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} - n^2 \Theta = 0$ $r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + n^2 R = 0$
一般解	$\Theta = E + F\theta$ $R = G + H \ln r$	$\Theta = A \cos n\theta + B \sin n\theta$ $R = Cr^n + Dr^{-n}$	$\Theta = A' \cosh n\theta + B' \sinh n\theta$
周期性 $\phi(r, \theta) = \phi(r, \theta + 2\pi)$	$F = 0$	$n = \text{integer}$	$A' = B' = 0$
有限性 $\phi(0, \theta) = \text{finite}$	$H = 0$	$D = 0$	$A' = B' = 0$
上の 2 条件を満たす一般解	$\phi(r, \theta) = EG$	$\phi(r, \theta) = Cr^n (A \cos n\theta + B \sin n\theta)$	$\phi(r, \theta) = 0$
ノーマル m 極電磁石の対称性 $\phi(r, \theta) = -\phi(r, -\theta)$ $\phi(r, \theta) = \phi(r, 2\pi/m - \theta)$	$EG = 0$	$A = 0$ $n = (2N-1)m/2, N=1, 2, \dots$	
スキュー m 極電磁石の対称性 $\phi(r, \theta) = \phi(r, -\theta)$ $\phi(r, \theta) = -\phi(r, \theta - 2\pi/m)$	$EG = 0$	$B = 0$ $n = (2N-1)m/2, N=1, 2, \dots$	
以上の条件を満たす一般解	ノーマル成分: $\phi(r, \theta) = \sum_{N=1}^{\infty} B_{(2N-1)m/2} \left(\sin \frac{(2N-1)m}{2} \theta \right) r^{(2N-1)m/2}$ スキュー成分: $\phi(r, \theta) = \sum_{N=1}^{\infty} A_{(2N-1)m/2} \left(\cos \frac{(2N-1)m}{2} \theta \right) r^{(2N-1)m/2}$		

(注) m 極電磁石において、 $m=2$ は 2 極、 $m=4$ は 4 極、 $m=6$ は 6 極の電磁石である。

上の表において $n = (2N-1)m/2 = 1, 2, 3, \dots$ であるので、ノーマル成分とスキュー成分が存在するときの一般解を次のように表すことができる。

$$\phi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} [B_n (\sin n\theta) + A_n (\cos n\theta)] r^n \quad (4.8)$$

これより電磁石ギャップ内の磁場成分は、

$$B_r = -\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1} [B_n (\sin n\theta) + A_n (\cos n\theta)] \quad (4.9)$$

$$B_\theta = -\mu_0 \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1} [B_n (\cos n\theta) - A_n (\sin n\theta)] \quad (5.0)$$

磁極の対称性から現われる許容磁場成分 (allowed multi-pole component) を表 3 に示す。

磁場測定において誘導電圧 (4.4) はコイル長を l 、コイル巻数を N 、 $\dot{\theta} = \omega$ とすれば、

$$E(r, \theta) = \mu_0 \omega l N \sum_{n=1}^{\infty} n r^n [B_n (\sin n\theta) + A_n (\cos n\theta)] \quad (5.1)$$

2次元磁場において中心軌道 $r=0$ の周りでテーラー展開したスカラーポテンシャル

表3 電磁石に現われる多極磁場成分。

	許容磁場成分： $n = (2N-1)m/2$	対称な磁極形状誤差による磁場成分
2極電磁石 ($m=2$)	$n = 1, 3, 5, 7, \dots$	$n = 3, 5, 7, \dots$
4極電磁石 ($m=4$)	$n = 2, 6, 10, 14, \dots$	$n = 4, 6, 8, \dots$
6極電磁石 ($m=6$)	$n = 3, 9, 15, 21, \dots$	$n = 5, 7, 9, \dots$
8極電磁石 ($m=8$)	$n = 4, 12, 20, 28, \dots$	$n = 6, 8, 10, \dots$

(注) $n=1, 2, 3, 4, \dots$ はそれぞれ2極、4極、6極、8極、・・・磁場に対応する。

$$\phi(r, \theta) = \sum_{n>0} \frac{1}{n!} A_n r^n e^{in\theta} \quad (5.2)$$

は2次元のラプラス方程式 $\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0$ を満足するので、(5.2) を書き換えて、

$$\phi(r, \theta) = \sum_{n>0} \frac{1}{n!} A_n [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = \sum_{n>0} \frac{1}{n!} A_n (x + iy)^n \quad (5.3)$$

のように (x, y) 座標で表すことができる。2項定理に従って展開し、実数部と虚数部に分離すれば、

$$\text{Re}[\phi(x, y)] = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n/2} \frac{(-1)^m A_{n-2m, 2m}}{(n-2m)!(2m)!} x^{n-2m} y^{2m} \quad (5.4)$$

$$\text{Im}[\phi(x, y)] = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{(n+1)/2} \frac{(-1)^{m-1} A_{n-2m+1, 2m-1}}{(n-2m+1)!(2m-1)!} x^{n-2m+1} y^{2m-1} \quad (5.5)$$

ここで、次数 n に関するポテンシャルを $\phi_n(x, y)$ とすれば、 $\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x, y)$ である。

加速器に通常利用される磁場はポテンシャルの虚数部から得られるノーマル成分である。すなわち、

$$B_x(x, y) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial x} \text{Im}[\phi(x, y)] = -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{(n+1)/2} \frac{(-1)^{m-1} A_{n-2m+1, 2m-1}}{(n-2m+1)!(2m-1)!} x^{n-2m} y^{2m-1} \quad (5.6)$$

$$B_y(x, y) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial y} \text{Im}[\phi(x, y)] = -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{(n+1)/2} \frac{(-1)^{m-1} A_{n-2m+1, 2m-1}}{(n-2m+1)!(2m-2)!} x^{n-2m+1} y^{2m-2} \quad (5.7)$$

スキュー成分も同様にして、(5.3) の実数部から求めることができる。 (x, y) 座標で表した $n=5$ までの磁場成分とスカラーポテンシャルの成分を表4に示す。

表4 ノーマルおよびスキュー磁場成分とスカラーポテンシャル。

次数	ノーマル磁場成分		スキュー磁場成分	
	B_{nx} (水平磁場成分)	B_{ny} (垂直磁場成分)	B_{nx} (水平磁場成分)	B_{ny} (垂直磁場成分)
1	0	b_1	a_1	0
2	$b_2 y$	$b_2 x$	$a_2 x$	$a_2 y$
3	$b_3 xy$	$(1/2)b_3(x^2 - y^2)$	$(1/2)a_3(x^2 - y^2)$	$a_3 xy$
4	$(1/6)b_4(3x^2 y - y^3)$	$(1/6)b_4(x^3 - 3xy^2)$	$(1/6)a_4(x^3 - 3xy^2)$	$(1/6)a_4(3x^2 y - y^3)$
5	$(1/6)b_5(x^3 y - xy^3)$	$(1/24)b_5(x^4 - 6x^2 y^2 + y^4)$	$(1/24)a_5(x^4 - 6x^2 y^2 + y^4)$	$(1/6)a_5(x^3 y - xy^3)$
	スカラーポテンシャルのノーマル成分		スカラーポテンシャルのスキュー成分	
1	$b_1 y$		$a_1 x$	
2	$b_2 xy$		$(1/2)a_2(x^2 - y^2)$	
3	$(1/6)b_3(3x^2 y - y^3)$		$(1/6)a_3(x^3 - 3xy^2)$	
4	$(1/6)b_4(x^3 y - xy^3)$		$(1/24)a_4(x^4 - 6x^2 y^2 + y^4)$	
5	$(1/120)b_5(5x^4 y - 10x^2 y^3 + y^5)$		$(1/120)a_5(x^5 - 10x^3 y^2 + 5xy^4)$	
6	$(1/720)b_6(6x^5 y - 20x^3 y^3 + 6xy^5)$		$(1/720)a_6(x^6 - 15x^4 y^2 + 15x^2 y^4 - y^6)$	

上の表に示したスカラーポテンシャルが一定になる曲線は2次元の磁極形状に相当する。加速器に通常採用されるノーマル電磁石の理想的な磁極形状について示せば、

$$y = \pm \text{const} \quad (\text{ノーマル 2 極電磁石})$$

$$xy = \pm \text{const} \quad (\text{ノーマル 4 極電磁石})$$

$$3x^2y - y^3 = \pm \text{const} \quad (\text{ノーマル 6 極電磁石})$$

$$x^3y - xy^3 = \pm \text{const} \quad (\text{ノーマル 8 極電磁石})$$

などである。これらの磁極形状を図9に示す。同様にして、スキュー電磁石の磁極形状はスカラーポテンシャルのスキュー成分が一定になる曲線で与えられる。

上の表におけるスカラーポテンシャルのノーマル成分に関する対称性を調べる。 $\phi_n(x, y) = -\phi_n(x, -y)$ の反対称性はすべての次数($\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi_6, \dots$)にあるが、 $\phi_n(x, y) = \phi_n(x, -y)$ の対称性を示すものはない。したがって、次の2種類の対称性に区別される。

$$\phi_n(x, y) = \phi_n(-x, y) = -\phi_n(-x, -y) : \phi_1, \phi_3, \phi_5, \dots$$

$$\phi_n(x, y) = -\phi_n(-x, y) = \phi_n(-x, -y) : \phi_2, \phi_4, \phi_6, \dots$$

これより x 軸、 y 軸および電磁石中心軸に関する対称な磁極形状のズレから発生する多極成分が分かる。すなわち、

2 極電磁石(ϕ_1)に現われる磁場成分： $\phi_1, \phi_3, \phi_5, \dots$

4 極電磁石(ϕ_2)に現われる磁場成分： $\phi_2, \phi_4, \phi_6, \dots$

6 極電磁石(ϕ_3)に現われる磁場成分： $\phi_3, \phi_5, \phi_7, \dots$

8 極電磁石(ϕ_4)に現われる磁場成分： $\phi_4, \phi_6, \phi_8, \dots$

この関係を一般的に表せば、 $2n$ 極電磁石(ϕ_n)に現われる磁場成分は

$$2(n+2p) \text{ 磁極成分 } (\phi_{n+2p}), \quad (p=0,1,2,\dots) \quad (58)$$

次に、磁極中心線に関する対称性のある磁極形状のズレから発生する許容磁場成分は

$$2[n+(2n)q] \text{ 磁極成分 } (\phi_{n+(2n)q}), \quad (q=0,1,2,\dots) \quad (59)$$

電磁石に現われるこれらの磁場成分(58)(59)は表3に示したものである。磁極の数が少ないほど低次の磁場成分が現われるので、許容磁場誤差に対する条件が厳しくなる。高次磁場成分の寄与は $(1/n!)b_n x^{n-1}$ であるので、中心軸付近におけるビームへの寄与は一般に小さい。

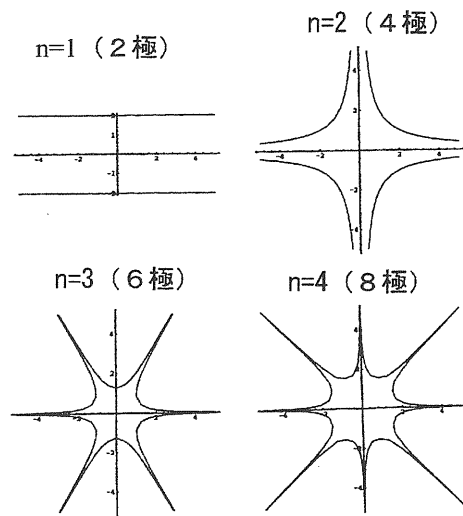


図9 次数1～4のノーマル電磁石の理想的磁極形状。

3-2. シンクロトロンにおける磁場補正

機能分離型のシンクロトロンを考え、そのリングの電磁石系には基本的な電磁石として偏向電磁石と4極電磁石がある。この他に軌道補正用の偏向電磁石(ステアリング電磁石)、回転4極磁場補正用のスキュー4極電磁石、クロマティシティー補正用の6極電磁石がある。基本になる電磁石は高い精度で製作されるけれども、僅かな工作誤差や材料の不均一性、浮遊磁場および設置誤差(アラインメント誤差)による影響から磁場誤差が発生する。これらの誤差は補正用電磁石を使用して補正される。補正用4極電磁石も考えられるが、機能分離型の場合には通常は基本4極電磁石の微細調整で補正可能である。

水平方向と垂直方向の軌道補正を行う必要から、2種類のステアリング電磁石(それぞれスキューとノーマルの偏向電磁石)が使用される。水平方向の軌道補正には基本偏向電磁石のヨークに取り付けるバックレグ巻線も併用できる。しかし主コイルによる磁束変化のため大きな電圧がバックレグ巻線に誘導されるため、この誘導電圧を打ち消しながら励磁できる電源が必要である。

加速される粒子が電子と陽子とで事情が異なる。電子シンクロトロンの場合、放射光放出による影響のため加速とともにビームサイズが大きくなるので、最大エネルギーまでダイナミックな軌道補正が行われる。ところが、陽子の場合、ビームサイズは加速とともに小さくなるため、ビームサイズが最も大きな入射磁場において軌道補

正される、高磁場側では基本4極電磁石のアラインメント補正で対処するのが通例である。

軌道歪は(24)の ΔB に起因するもので、この原因として、

- (a) 偏向電磁石の磁場実効長の誤差、
- (b) 4極電磁石の垂直および半径方向のミスアラインメント、
- (c) 偏向電磁石のビーム方向のミスアラインメント、
- (d) 偏向電磁石の軸周りの回転、
- (e) 浮遊空間磁場(地球磁場も含む)、

などがある。これらの内、(a)と(b)が最も影響が大きい。(c)と(d)は精密アラインメントの段階で、かなりの精度が出せるが、(b)の精度は0.1mm(rms)が限界で、4極電磁石の中心軸のズレ量に磁場勾配を掛けた値を偏向磁場誤差としてビームが感じる。(a)については電磁石製造段階で長さや鋼板の品質管理を徹底することである程度の対処が可能である。

スキュー4極補正電磁石は、主に基本4極電磁石のアラインメントにおける軸周りの回転とビーム衝突点に置かれる検出器のソレノイド磁場の補正に必要である。

3-2-1. 閉軌道歪の補正

磁場誤差があるときのx, y方向の粒子の運動方程式は(31)で与えられるので、この右辺をフーリエ展開して、

$$\beta^{3/2} F(\varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i e^{ik\varphi} \quad (60)$$

ただし、

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \beta^{3/2}(\varphi) F(\varphi) e^{-ik\varphi} d\varphi \quad (61)$$

(31)を書き直して、

$$\frac{d^2\eta}{d\varphi^2} + v^2\eta = \sum_{k=1}^{\infty} v^2 f_k e^{ik\varphi} \quad (62)$$

この方程式の解は、

$$\eta(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v^2}{v^2 - k^2} f_k e^{ik\varphi} \quad (63)$$

チューン v は非整数であるが、これに最も近い整数次のフーリエ成分が軌道歪に大きく寄与することが理解できる。(32)の閉軌道の式を利用すれば、

$$x(s) = \frac{\sqrt{\beta_x(s)}}{2(B\rho)\sin\pi v_x} \int_s^{s+C} \sqrt{\beta_x(z)} (g_{quad}\Delta x) \cos\{\mu_x(s) - \mu_x(z) - v_x\pi\} dz \quad (64)$$

ここで、 g_{quad} は4極電磁石の磁場勾配、 Δx は半径方向の4極電磁石のミスアラインメント、 $B\rho$

は磁気剛性で運動量 p とは

$$B\rho [T \cdot m] = 3.3356 p [GeV/c]$$

の関係にある。また、

$$\mu_x(z) = \int_0^z \frac{dz}{\beta_x(z)}, \quad \mu_x(s) = \int_0^s \frac{ds}{\beta_x(s)}$$

である。閉軌道歪 $x(s)$ は $s_i (i=1, 2, \dots, M)$ の位置に置かれたビーム位置モニターで測定されるので、これを $x_i (i=1, 2, \dots, M)$ 、4極電磁石のミスアラインメントを $\Delta x_j (j=1, 2, \dots, N)$ とすれば、

$$x_i = \sum_{j=1}^N b_{ij} \Delta x_j \quad (65)$$

ここで、マトリックス要素 b_{ij} は(64)に従って、軌道計算から求めることができる。(65)から4極電磁石のミスアラインメントによる閉軌道歪を予測することができる。(64)の関係は垂直方向についても成立するので、垂直方向の閉軌道歪も同様にして計算できる。

3-2-2. 磁場勾配の擾乱の影響

4極電磁石にランダムな磁場勾配の誤差があれば(22)の超周期性は成立しなくなるが、リング一周の周期性は成り立つ。リング一周のトランスファーマトリックスを M_0 とすれば、(23)が成り立つ。すなわち、

$$M_0(s) = \begin{pmatrix} \cos\mu_0 + \alpha(s)\sin\mu_0 & \beta(s)\sin\mu_0 \\ -\gamma(s)\sin\mu_0 & \cos\mu_0 - \alpha(s)\sin\mu_0 \end{pmatrix}$$

ここで、リングの非常に短い区間 ds に磁場勾配の擾乱 $k_{err}(s)$ があれば、この区間で

$$u'' + [K_0(s) + k_{err}(s)]u = 0 \quad (66)$$

ただし、 $k_{err}(s) = g_{err}(s)/B\rho$ である。区間 ds のトランスファーマトリックス m を薄いレンズ(thin lens)の第1次近似として扱う。(19)において $\varphi \rightarrow 0$ として、

$$m = \begin{pmatrix} 1 & ds \\ -[K_0(s) + k_{err}(s)]ds & 1 \end{pmatrix} \quad (67)$$

擾乱が無いときの区間 ds のトランスファーマトリックス m_0 は、

$$m_0 = \begin{pmatrix} 1 & ds \\ -K_0(s)ds & 1 \end{pmatrix} \quad (68)$$

したがって、この区間に擾乱がある場合のリング一周のトランスファーマトリックスは

$$M = m m_0^{-1} M_0(s) \quad (69)$$

マトリックス計算を行って、跡(trace)を求める。

$$\text{Tr}(M) = 2\cos\mu = 2\cos\mu_0 - \beta(s)k_{err}(s)\sin\mu_0 ds \quad (70)$$

リング一周の擾乱に対して

$$\Delta(\cos \mu) = -\frac{\sin \mu_0}{2} \oint_C \beta(s) k_{err}(s) ds \quad (7.1)$$

が成立する。 $\Delta(\cos \mu) = -\Delta\mu \sin \mu_0$ となるので、磁場勾配の擾乱によるチューンの変化は

$$\Delta\nu = \frac{\Delta\mu}{2\pi} = -\frac{\Delta(\cos \mu)}{2\pi \sin \mu_0} = \frac{1}{4\pi} \oint_C \beta(s) k_{err}(s) ds \quad (7.2)$$

で与えられる。

3-3. クロマティシティーの補正

クロマティシティーは磁場誤差によるものではなく、ビームが持っている運動量の拡がりによるチューンの拡がりである。勿論、3次の磁場成分による影響もあるが、6極電磁石の磁場の性質を利用してチューンの拡がりを補正できる。クロマティシティーを ξ とすれば、チューンの拡がり $\Delta\nu$ は、

$$\Delta\nu = \xi \frac{\Delta p}{p} \quad (7.3)$$

で表され、4極電磁石の磁場勾配を g とすれば、チューンが運動量によって変化しないためには、偏向磁場に対する磁場勾配が一定という関係 $\int_C g ds / B\rho = \text{const}$ と磁気剛性と運動量との関係 $B\rho = 3.3356p$ から、

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta p}{p} \quad (7.4)$$

すなわち、運動量に比例する磁場勾配が必要である。4極電磁石のギャップ内で磁場勾配は一定であるので、運動量が異なる粒子に対して磁場勾配が異なる割合に応じてチューンが変化する。4極電磁石から発生する運動量によるチューンの変化を自然クロマティシティー (natural chromaticity) と呼ぶ。蓄積衝突型リングではルミノシティ (luminosity) を上げるため衝突点でビームを絞る4極電磁石の磁場勾配が大きく、これからのクロマティシティーへの寄与が大きい。

粒子の設計運動量を p_0 として、 Δp だけ運動量の異なる粒子に対して $\delta = \Delta p / p_0$ なる量を定義する。高次磁場成分を考慮した x, y 方向の磁場は

$$B_x = b_2 y + b_3 xy + \frac{1}{6} b_4 (3x^2 y - y^3) + \dots$$

$$B_y = b_1 + b_2 x + \frac{1}{2} b_3 (x^2 - y^2) + \frac{1}{6} b_4 (x^3 - 3xy^2) + \dots$$

運動量の違い δ を含む運動方程式の導出は少々複雑であるので省略するが、 $\rho \gg 1$ として6極磁

場まで考慮した粒子の運動方程式は、

$$x'' + kx = kx\delta - \frac{1}{2} m(x^2 - y^2) \quad (7.5)$$

$$y'' - ky = -ky\delta + mxy \quad (7.6)$$

ここで、 $m = b_3 / B\rho$ である。運動量分散関数を η_x とすれば、運動量 $p_0 + \Delta p$ の軌道は、ベータatron振動の軌道を x_β, y_β として、

$$x = x_\beta + \eta_x \delta, \quad y = y_\beta \quad (7.7)$$

ただし、垂直方向の分散関数はゼロである。これを(7.5)(7.6)に代入すれば、

$$x_\beta'' + kx_\beta = (k - m\eta_x)x_\beta\delta + O(x_\beta^2, y_\beta^2) \quad (7.8)$$

$$y_\beta'' - ky_\beta = -(k - m\eta_x)y_\beta\delta + O(x_\beta y_\beta) \quad (7.9)$$

x_β, y_β の2次以上の項を無視すれば4極と6極の磁場によるチューンシフトは、

$$\Delta\nu_x = -\frac{\delta}{4\pi} \oint \beta_x (k - m\eta_x) ds \quad (8.0)$$

$$\Delta\nu_y = \frac{\delta}{4\pi} \oint \beta_y (k - m\eta_x) ds \quad (8.1)$$

である[6]。この式で $m=0$ と置けば自然クロマティシティーが得られる。運動量の拡がりに対応するチューンの拡がり (tune spread) のため、チューンダイアグラムにおけるビームの安定領域が狭くなり、シンクロtron振動による運動量の変化の影響を受けてビーム損失の原因になる。

(8.0)(8.1)から不整6極磁場の存在によってもチューンが変化する。偏向電磁石に現れる6極磁場成分も考慮して、補正用6極電磁石を用いて $\Delta\nu_x = \Delta\nu_y = 0$ となるようにクロマティシティーを補正する。そのためには、

$$-\frac{\delta}{4\pi} \oint \beta_x k ds + \frac{\delta}{4\pi} \sum_i m_i \eta_{xi} \ell_i = 0 \quad (8.2)$$

$$\frac{\delta}{4\pi} \oint \beta_y k ds - \frac{\delta}{4\pi} \sum_i m_i \eta_{xi} \ell_i = 0 \quad (8.3)$$

の連立方程式を満たす補正6極磁場が必要である。ここで、 m_i と ℓ_i は i 番目の6極電磁石の強さと長さであり、偏向電磁石の不整6極磁場も考慮に入れる。これらの式から分散関数の大きい場所が補正に有利であることが分かる。水平、垂直方向のクロマティシティー補正には最低でも2ファミリーの6極電磁石が必要である。

4. 電磁石設計

上に求めたスカラーポテンシャルを利用して磁極が設計できる。しかし、励磁するためのコイル導体の配置を考え、コイルスペースを設けなければならない。そのため、図9に示した理想的な

磁極形状は漸近線をもつ無限に長い曲線であるので、磁極形状の対称性を保ちながら、適当な長さで曲線の裾を切り捨てる。この場合(58)の多極磁場成分が現われる。しかし、電磁石の磁場は鉄心材料の局所的な特性の相違も反映するので、材料の一様性も含めて、製作誤差や組立誤差は一般に対称性を持たないので、多少なりともあらゆる多極成分を含むと考えるが妥当である。電磁石の製作において機械的寸法や鉄心材料の選択に厳しい管理が要求されるのは、加速器に好ましくない磁場誤差を持ち込まないためである。

電磁石は起磁力を与えるコイル(電気回路)と磁束を誘導する磁気回路(鉄心)から構成される。電磁石は開口部(ギャップ)を持ち、荷電粒子がこの中を通るとき磁場の作用を受ける。ギャップに発生する磁場はコイルを流れる電流による磁場と鉄心を構成する強磁性体の磁化による磁場との和として与えられる。アンペールの法則「静磁場内の任意の閉曲線 Γ に沿って線積分した値はその閉曲線で囲まれる電流の総和に比例する」として知られるマクスウエル方程式における電流と磁場の関係は

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{積分形式})$$

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (\text{微分形式}) \quad (84)$$

で与えられる。ここで、 \mathbf{H} は磁界の強さ、 \mathbf{J} は電流密度、 S は閉曲線 Γ が取り囲む面積である。

4-1. 偏向電磁石(Dipole magnet, Bending magnet, 2極電磁石)

偏向電磁石には図10に示す3つの基本形がある。C型はギャップへのアクセスが容易であるが、漏洩磁束が大きく、高磁場では磁極間に働く磁気力のためギャップが変形する。H型にはこのような心配はないが、ギャップへのアクセスが不便である。窓枠型(window frame type)は漏洩磁束がないため高磁場の発生に向いているが、コイルがビーム領域に近接するためコイルからの磁場の影響を受けやすく、コイルスペースを広げるためH型に似た鉄心構造になる。

高さ h [m]のギャップに磁場 B_g [T]を発生させるために必要なアンペアターン NI [AT]は(84)から、

$$NI = \frac{B_g h}{\mu_0} + \frac{B_{iron} \ell}{\mu_0 \mu_r} \quad (85)$$

ここで、 B_{iron} [T]、 ℓ [m]、 μ_r は鉄心の磁束密度、磁路長、比透磁率である。 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [V \cdot s / A \cdot m]$ は真空中の透磁率である。鉄の飽和が殆どない1

T以下では鉄の比透磁率が大きく、(85)の右辺第2項は無視できる。しかし、磁場が強くなって飽和が大きくなればこの項は無視できなくなる。

[1] H型偏向電磁石

磁極形状が左右対称であるため磁場分布も対称になる。理想的な偏向磁場を発生するためには平らな磁極の幅を無限に大きくしなければならないが、現実的ではないので適当な幅に抑える。しかし、このままでは図11aに示すように磁極の両側で磁場が低下するため、オーバーハングを設ける。ギャップ寸法に対するオーバーハング寸法は次の経験式から求めることができる。

$$\frac{a}{h} = 0.75 - 0.36 \ln \left(100 \left| \frac{\Delta B}{B} \right| \right) \quad (86)$$

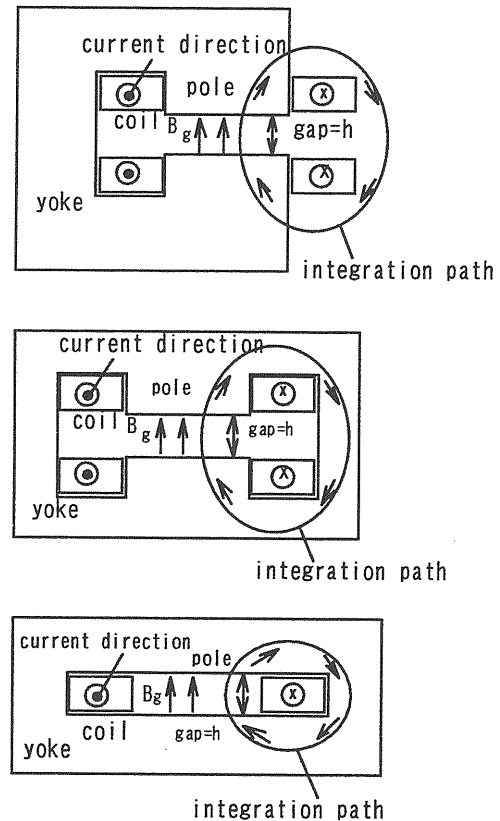


図10 偏向電磁石の基本形、上からC型、H型、窓枠型。

磁極両側(および両端)で磁場が大きく変化し、この附近の磁場をフリンジング磁場(fringing field)と呼ぶ。 $\Delta B/B = 0.01\%$ に対して $a = 2.4h$ である。必要なビームアパーチャーを w とすれば、この場合の全磁極幅は $w + 4.8h$ である。

さらに電磁石を経済的に製作するために、磁極

の両端に図 1 1 b に示すようなシム (shim) を付けて有限幅の磁極形状で磁場分布の改善を図る。 $|\Delta B/B| \sim 0.01\%$ 程度以下の磁場一様性の磁場領域でビームアパーチャーが確保できるよう磁極幅を決める。最適な磁極形状は試行錯誤で決められるが、現在は磁場計算コードを利用する数値的設計が一般的である。このような電磁石設計は偏向電磁石に限らず、別の形状の電磁石の設計でも行われている。

磁極両側に鉄のシムを付けた場合、外側に広がっていた磁束はシムに集まってこの部分の磁場が上昇し、その外側で急激に磁場が低下する。磁極の基部 (根元) は全磁束が通過するため、特にコーナー部が強く飽和しやすい。飽和しにくくするため図 1 1 c のように磁極基部の幅を広げて磁極両側をテーパ状にする。磁束の局所的な集中が起きないように、このテーパ部分とシムを滑らかな曲線でつなぐ。テーパ状にすることでコイルスペースに漏れる磁束が増えるため、ヨーク (継鉄) の幅を若干増やす必要がある。鉄の磁気特性は非線形的であるので、磁場計算コードを使って丹念に設計しなければならない。

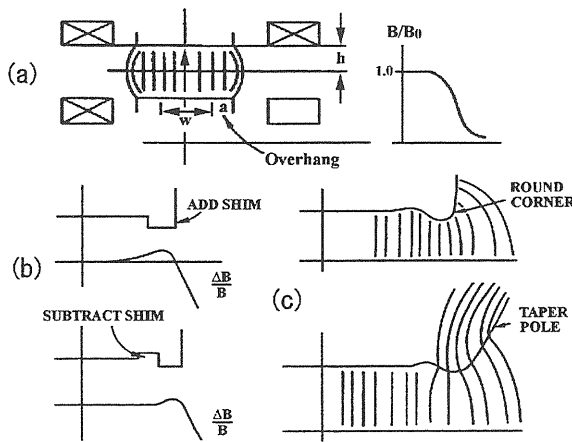


図 1 1 H型偏向電磁石の磁極形状とシム。

電磁石両端のフリンジング磁場においても、磁場がギャップの外に漏れるように分布する。磁場測定から図 1 2 に示すような磁場分布が得られる。両端において S1 と S2 の面積が等しくなる境界間の長さをもって磁場実効長 (effective magnetic length) と定義する。偏向電磁石の実効長は

$$L_{\text{eff}}(x) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} B(s, x) ds}{B(0, 0)}$$

で定義される。

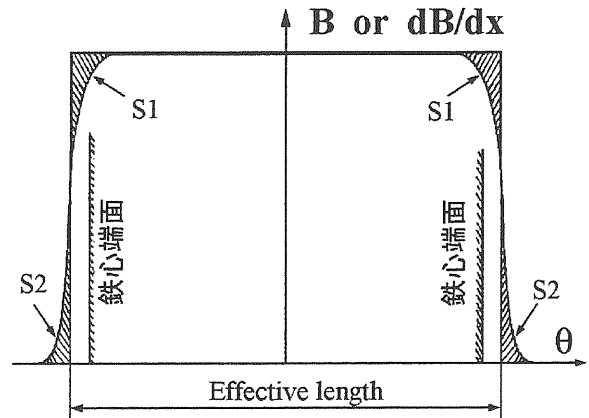


図 1 2 磁場実効長 (縦軸の dB/dx は 4 極電磁石の場合)。

[2] C型偏向電磁石

H型偏向電磁石は垂直面と水平面の 2 重の対称性をもっているのに対して、C型偏向電磁石は水平面だけの対称性しか持っていない。そのため鉄心の飽和により、H型偏向電磁石には通常現れない磁場勾配 (2 次磁場成分) や 8 極磁場成分 (4 次磁場成分) などが現れる。しかし、真空チェンバーの挿入や保守のための接近性 (accessibility) が良いためしばしば採用される。あまり磁場の強くない電子シンクロトロンでは C 型が採用されている。

図 1 3 に示すように C 型偏向電磁石では、ギャップの開口部に近い側を通る磁束は鉄心の中で長い磁路を通る。鉄の透磁率が有限であれば、開口部に近いほど磁場が低下し磁場勾配が現れる。磁場が低い場合は逆の傾向が現れる。その理由は、比較的低い磁場で透磁率が最大になり (図 3 8 参照)、その両側でなだらかに減少するためである。そのため、最大透磁率を示す磁場より低いところで局所的に透磁率を増やすように磁束が集まる。同様に、磁場が高くなれば磁束密度を下げ最大透磁率に近づくように鉄心中の磁束が分散する。

[3] C型スチール・セメント偏向電磁石

電子シンクロトロンの場合、リングの径をできる限り大きくしてシンクロトロン放射 (放射光) を減らす設計がなされる。その理由は、シンクロトロン放射が電子のエネルギーの 4 乗に比例し、曲率半径に反比例するからである。CERN-LEP はすでに運転を止め解体されてしまったが、その周長は約 27km で JR 山手線に匹敵する大きさである。このように巨大な電子・陽電子衝突型加速

器であるが、入射磁場が 0.017T と低いため、残留磁場が一様にならないことが問題になった。この問題はラミネーション（鋼板）のスタッキングファクター（占積率）を 27% に減らすことで解決された。すなわち、図 1 4 のようにラミネーションの間に 4mm の空間を設け、粒度の小さな砂とセメントのモルタルで埋める構造を採用した。機械的にはプレストレスのコンクリート棒として働き、鋼板中の磁束密度は増加する。セメントは鋼材より安いいため電磁石の製作コストの削減にも寄与した。

130GeV における磁場は 0.1231 T であるため高磁場における鉄心の飽和は問題でなく、低磁場における保持力と透磁率の低いことによる磁場性能への影響が問題である。ヨークは鉄心の飽和よりは機械的強度に重点が置かれ、最大磁束密度は 130GeV で 1.6T 以下である。鉄の保持力を H_c として残留磁場の寄与も考慮すれば、鉄心中の磁束密度は

$$B = \mu_0 \mu_r (H + H_c) \quad (87)$$

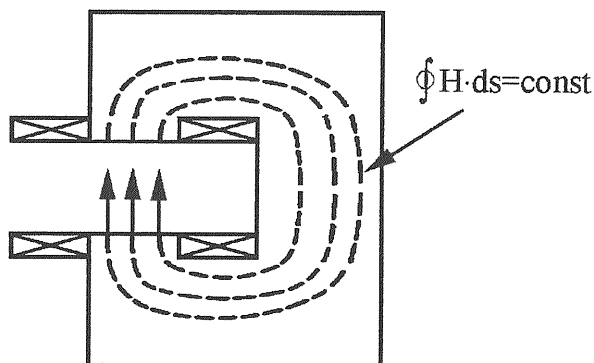


図 1 3 C型偏向電磁石の鉄心中における磁路。

図 1 5 の磁束チューブにおいて、磁束の連続性から

$$B_{air} A = B_{iron} a \quad (88)$$

ここで、 A と a はそれぞれギャップと鉄心中の磁束チューブの断面積、 B_{air} と B_{iron} はそれぞれの磁束密度である。アンペールの法則

$$\frac{B_{air}}{\mu_0} h + \int_{iron} H ds = Ni \quad (89)$$

に (87) (88) を代入して、

$$B_{air} = \frac{\mu_0}{h} (Ni + \int_{iron} H_c ds) \frac{1}{\left(1 + \frac{A}{h} \int_{iron} \frac{ds}{\mu_r a}\right)} \quad (90)$$

$Ni=0$ において、鉄心中の磁路長を l とすれば残留磁場は近似的に

$$B_{rem} = \frac{\mu_0}{h} \int_{iron} H_c ds \approx \frac{l}{h} \mu_0 H_c \quad (91)$$

ここで、 l/h は鉄心中の磁路長とギャップ寸法の比である。この比は通常 10~15 程度であるので、保持力の大きさから残留磁場が推定できる。磁場勾配は (90) を半径方向 (x 方向) に微分して、

$$\frac{1}{B_{air}} \frac{dB_{air}}{dx} = \left(\frac{H_c}{Ni} - \frac{1}{h \mu_r a / A} \right) \frac{dl}{dx} \quad (92)$$

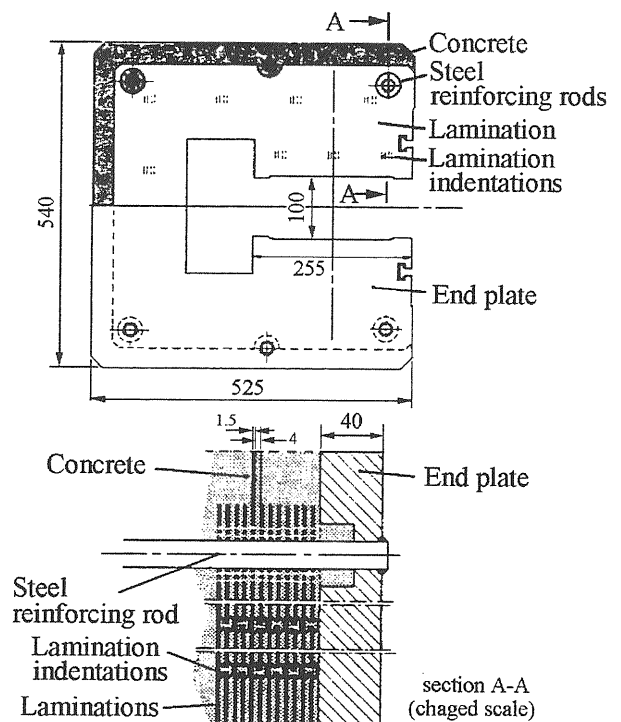


図 1 4 CERN-LEP のスチール・セメント偏向電磁石。

ここで、 a/A は鋼板の占積率を与える。低磁場では Ni と μ_r が小さくなってお互いにキャンセルし合うので磁場勾配は小さくなる。高磁場では両者ともに大きくなり、やはり磁場勾配は小さい。表 5 に鋼板の保持力のデータを示す。占積率を小さくすれば、鉄中の磁束密度は増加して保持力も増加するので、お互いに相殺し合う [7, 8]。

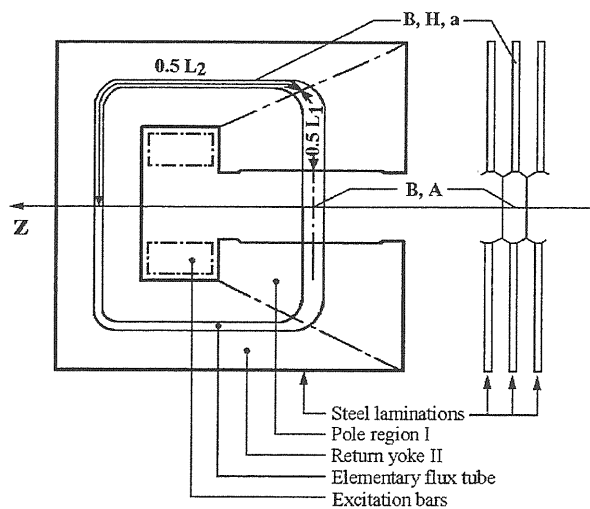


図15 スチール・セメント偏向電磁石の磁路。

[4] 窓枠型+H型偏向電磁石 (window-frame + H-type)

窓枠型 (または、額縁型、picture-frame) は 2T 以上の磁場が要求される偏向電磁石に採用されるが、コイルスペースが狭いため図16に示すようにH型に近い構造になる (CERN-SPS、FNAL)。このためビームに直接向い合うギャップ

表5 保持力 H_c の測定データ (単位は A/m)

	低炭素鋼板		ケイ素鋼板	
	SPS	ISR	PETRA	
H_c^{sat}	39.0	50.2	61.8	
0 → B_{max} → 0 の励磁サイクル後の H_c				
$B_{max} = 0.7T$	31.2	40.7	50.7	
$B_{max} = 0.4T$	24.4	32.0	40.2	
$B_{max} = 0.25T$	19.4	26.1	33.6	
$B_{max} = 0.1T$	13.6	17.8	22.2	

コイルとその背後に設けたコイルウィンドウのコイルに分れる。前者からは電流による磁場がギャップ内の磁場分布に直接影響を与え、コイルに近づく程磁場が強くなる。このためギャップ部のコイルには位置精度 ($\pm 0.1mm$) が要求され、コイル導体の冷却水チャンネルの孔の位置やコイルの対地絶縁厚などによる影響も受ける。しかし、後者は鉄心の磁化による磁場分布への寄与が大きく、シムを考慮した磁極形状に左右される。

両方のコイルのアンペアターン比と磁極形状などを考慮してギャップ内の磁場分布が最適化できる。図17はFNAL主リングの偏向電磁石についてこれらの関係を検討した結果である[9]。

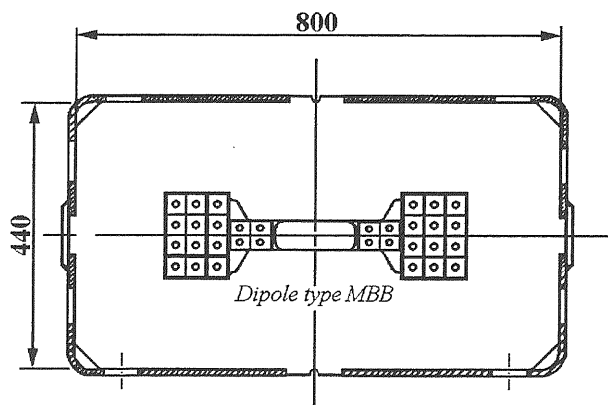


図16 CERN-SPS の偏向電磁石 (窓枠型+H型)。

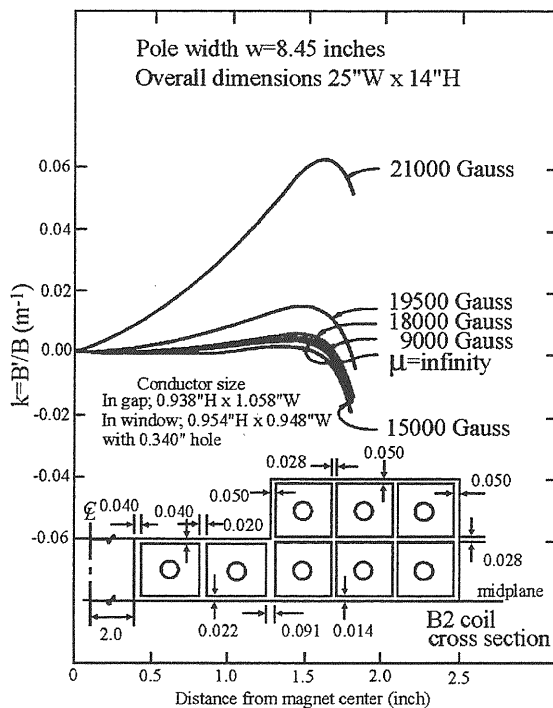
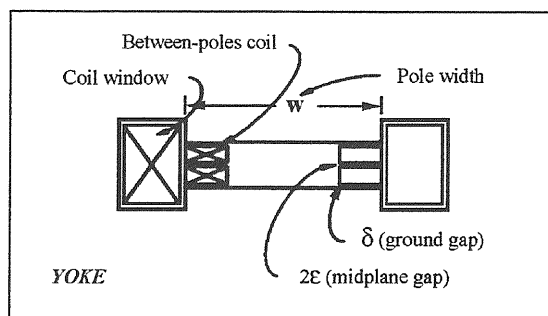


図17 FNAL主リング偏向電磁石における磁場分布の検討。

4-2. 機能結合型電磁石 (combined-function magnet)

弱収束の加速器では $0 < n < 1$ の磁場指標 (通常は 0.6 付近) をもつ偏向電磁石だけで半径方向と垂直方向の収束を同時に行った。しかし、強収束の原理により大きな磁場勾配をもつ 4 極磁場を偏向磁場に重畳させて n 値を大きくする機能結合型電磁石が考案され、CERN-PS や BNL-AGS に採用された。図 1 8 は C 型偏向電磁石に 4 極磁場成分 (収束磁場) を重畳させる形状であるが、H 型でも可能である。

理想的な磁極形状は中性極 (neutral pole) をもつ双曲線で表され、磁極中央部における磁場指標

$$n = -\frac{\rho_0}{B_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} \quad (93)$$

をできるだけ広い範囲で一定に保つように磁極両側のシム形状を決める。磁場指標は x 座標によらないので、この関係から、

$$B_y = B_0 \left(1 - n \frac{x}{\rho_0} \right) \quad (94)$$

ここで、 x は中心軌道 ρ_0 (磁極中心) から測った半径方向の距離、 B_0 は中心軌道の磁場である。半ギャップ (half gap、磁極対称面から磁極面までの距離) を $x=0$ において y_0 、 $x=x$ において y とすればアンペールの法則から、

$$B_0 y_0 = B_0 \left(1 - n \frac{x}{\rho_0} \right) y = \mu_0 n i \quad (95)$$

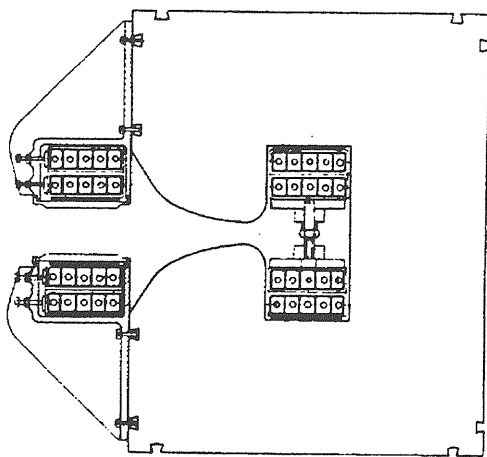


図 1 8 機能結合型 C 型電磁石。

ここで、 ni は磁極あたりのアンペアターンである。これより磁極の曲線は

$$\left(\frac{\rho_0}{n} - x \right) y = \frac{\rho_0}{n} y_0 \quad (96)$$

クロマティシティー補正のためにさらに 6 極磁場成分を付け加える設計もある。磁場勾配を b_2 、6 極成分を b_3 とすれば、磁極対称面の磁場は $B_y = B_0 (1 + b_2 x + b_3 x^2)$ で表され、通常的设计では $b_2 \cong 4 [m^{-1}]$ 、 $b_3 \cong 0.5 [m^{-2}]$ である。

SLAC のリニアコライダ SLAC にも図 1 9 に示す機能結合型電磁石が採用されている。この電磁石は中性極をもつ構造で、中性極から中心軌道までの距離は 8mm、ギャップは 6.4mm である。クロマティシティー補正のための 6 極成分も含めてある [10]。

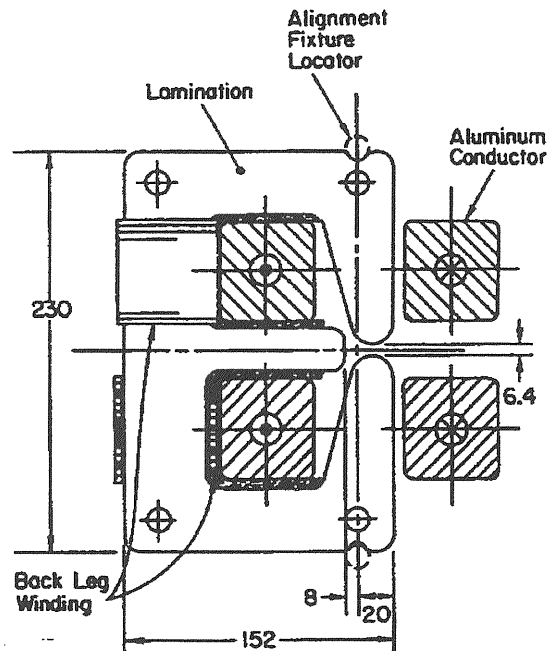


図 1 9 SLAC-SLC の機能結合型電磁石。

4-3. 4 極電磁石 (quadrupole magnet, quad)

磁場指標をもっと大きくするためには、4 極磁場を偏向電磁石から独立させた 4 極電磁石によらなければならない。非常に大きな n 値により強いビーム収束が可能になり、4 極電磁石は機能分離型シンクロトロン的重要な構成要素になった。機能結合型では偏向磁場と収束磁場が密接な関係にあり、収束磁場を自由に変えることはできない。しかし、機能分離型によって収束磁場を自由に変えることが可能になり、加速器調整の自由度が格段に向上する。今日の大型加速器がすべて機能分離型シンクロトロンであるのはこのような

優位性による。

4 極電磁石の理想的な磁極形状は図 2 0 の双曲線 $xy = R^2/2$ (R は内接円の半径、ポアー半径) で与えられる。この双曲線に直交する磁力線は $x^2 - y^2 = \text{const}$ である。磁場勾配を g とすれば、 x 方向と y 方向の磁場成分は、

$$B_x = gy, \quad B_y = gx \quad (97)$$

すなわち、純粋な 4 極磁場であれば B_x と B_y はそれぞれ y 座標と x 座標にのみ依存するので、ギャップ内のどこでも磁場勾配は同じである。コイルを取り囲む図 2 0 の積分経路 Γ に対してアンペールの法則を適用すれば、鉄心中の寄与を無視して、

$$\int_{\Gamma} B_y dy = \int_0^y gxy dy = gxy \equiv \frac{1}{2}gR^2 = \mu_0 ni \quad [\text{AT/pole}] \quad (98)$$

磁場勾配とポアー半径が決まれば、励磁に必要な磁極あたりの概略アンペアターンは $ni = gR^2 / (2\mu_0)$ で計算できる。

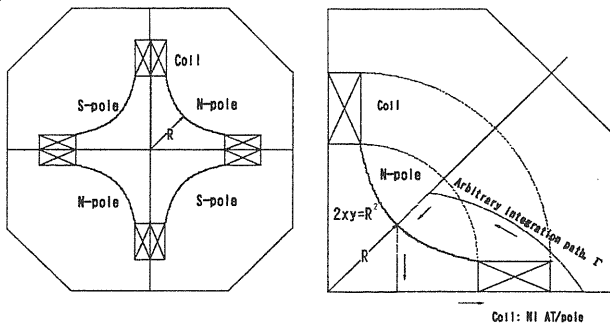


図 2 0 4 極電磁石の第 1 象限における積分経路。

理想的な偏向電磁石と 4 極電磁石で構成される加速器の中で荷電粒子が受ける磁場は、水平方向の運動に対して偏向電磁石からの B_0 と 4 極電磁石からの gx である。垂直方向の運動に対しては 4 極電磁石から受ける gy だけである。これら 2 種類の磁場における荷電粒子の運動は水平方向の運動と垂直方向の運動に分けて、それぞれ線形運動として扱うことができる。4 極電磁石のギャップ内における磁場の方向と荷電粒子が受けるローレンツ力の方向を見れば図 2 1 に示すように、水平方向と垂直方向で異なる。すなわち、水平方向に収束であれば垂直方向に発散し、水平方向に発散であれば垂直方向に収束する。コイルに流れる電流の向きを変えれば収束と発散が入れ替わることが分かる。コイル電流の向きが異なる 2 種

類の 4 極電磁石を交互に並べることによって両方向に強い収束が得られる (強収束の原理)。

裾野が無限に続く双曲線の磁極形状によって理想的な 4 極磁場が発生できるが、コイルスペースを設けるために図 2 2 のように双曲線の裾を有限幅で切断する。切断した鉄 (裾野) からの寄与が無くなるため、4 極磁場分布に歪が現れる。双曲線形状を修正してこの歪を最小限に抑えるため、双曲線を円弧で近似する方法と、双曲線の両端にシムを付ける方法がある。ビーム輸送ラインに使用される直流励磁の 4 極電磁石では機械加工の容易な円弧で近似される。磁極の対称性から発生する高次の多極磁場成分は 12 極であるが、円弧の半径をポアー半径の 1.15 倍に選ぶことによって、ポアー半径の 0.9 倍のアパーチャーを確保できる。この場合の円弧は 1/4 円で、磁極幅はポアー半径の約 1.6 倍である。

シンクロトロンリングで使用される 4 極電磁石には磁場精度が要求されるのでシムで補正する。電磁石はパルス励磁されるので鉄心中の渦電流を防ぐため鋼板を積層して製作される。鋼板は精密抜型を使用して一枚ずつ打ち抜かれる。抜型において図 2 2 のように双曲線のあるところから接線を伸ばし、磁極の両側で双曲線から盛り上がるようにシムを設ける。雌雄の抜型はミクロン程度の精度で作られ、両者の隙間 (clearance) は約 20 ミクロンである。打ち抜かれた鋼板の寸法誤差もこの程度である。鋼板を精度よく揃えるため基準になる積層面のあるシムが望ましい。4 極電磁石についても磁場計算コードによって最適設計を行う。

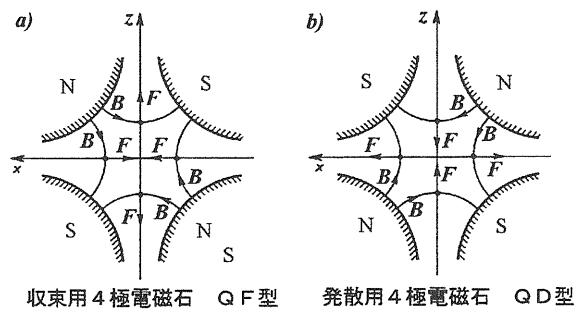


図 2 1 4 極電磁石における磁場と荷電粒子に働く力の方向。

水平方向と垂直方向に全く同じ磁場有効領域を持たせる図 2 3 の対称 4 極電磁石 (Symmetric quadrupole) では磁極中心線に関して磁極は対称である。蓄積衝突型シンクロトロンではビームパラメーターを自在に変えてルミノシティを最

大にする必要性から垂直方向にも広い有効領域が要求される。しかし、通常のシンクロトロンではビームアパーチャーは垂直方向に狭いので図24の非対称4極電磁石 (Asymmetric quadrupole) が採用される場合が多い。この場合、水平面と垂直面に面するシムの形状は異なる。

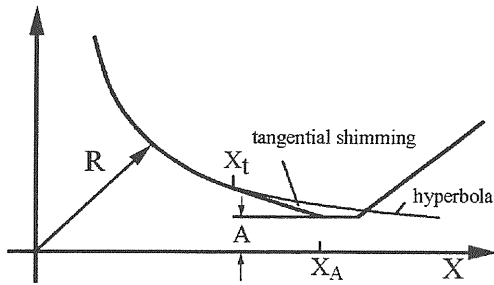


図22 4極電磁石の磁極形状。

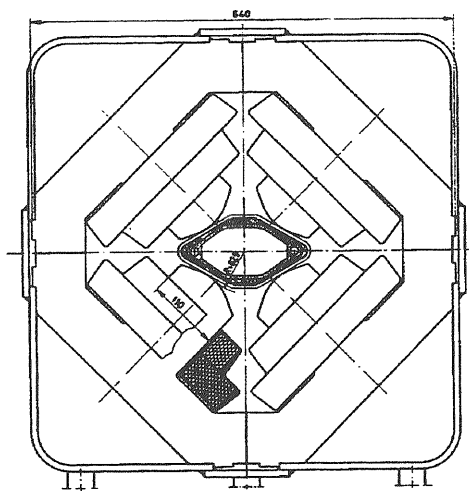


図23 対称4極電磁石。

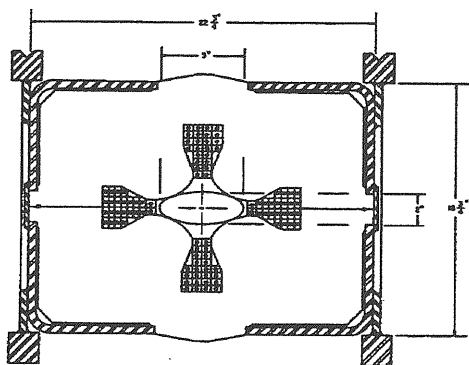


図24 非対称4極電磁石。

4-4. 6極電磁石 (Sextupole magnet)

粒子の運動量は光学における光の周波数に相当し、周波数したがって波長によってレンズの焦点距離が異なる現象を色収差 (chromatic aberration) という。この類推から運動量の相違によって4極電磁石の焦点距離が変化し、ベータトロン振動数 (チューン) が変化する現象がクロマティシティーである。一般にビームは運動量の拡がりを持ち、中心運動量のまわりにガウス分布している。運動量の小さい粒子はチューンが大きく、逆に運動量の大きな粒子はチューンが小さい。運動量の拡がりによってチューンに拡がり (tune spread) ができる。この現象は水平、垂直の両方向に現れる。チューンの拡がりが大きくなれば共鳴線で囲まれる安定領域が狭くなるため、6極電磁石によるクロマティシティー補正が必要である。

6極電磁石の理想的磁極形状は R をポア一半径として $3x^2y - y^3 = R^3$ の曲線で与えられ、漸近線は $y=0$ と $y=\pm\sqrt{3}x$ である。ギャップ内の x 、 y 方向の磁場成分は

$$B_x = b_3xy, \quad B_y = \frac{1}{2}b_3(x^2 - y^2) \quad (99)$$

であるので、図25に示した点線の積分路に沿って y 軸に平行に積分すれば、

$$\int_{\Gamma} B_y ds = \int_0^y \frac{1}{2}b_3(x^2 - y^2) dy = \frac{b_3}{6}(3x^2y - y^3) = \frac{b_3R^3}{6} \quad (100)$$

アンペールの法則において鉄心中の寄与を無視して、

$$\frac{b_3R^3}{6} = \mu_0 ni \quad (101)$$

ここで、 ni は磁極あたりのアンペアターン、 x 軸上の磁場は $B_y = b_3x^2/2$ である。

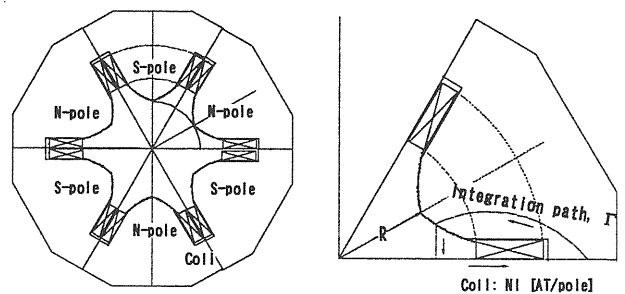


図25 6極電磁石断面図。

6極電磁石の場合もコイルスペースを設けるため、理想的磁極線の裾を切断し、磁極両側にシムを付けて磁場分布を改善する。一般に多極電磁石では磁極間隙の最も狭いギャップ (minimum gap) を通してコイルを挿入することができないため、対称性を考慮して鉄心を分割できる構造にする。図26は対称な6極電磁石であるが、楕円形のビーム断面形状に合わせて図27の非対称な設計もある[11]。非対称にすることにより各磁極までの距離が異なり、磁極あたりのアンペアターンも異なる。中心軸から90度と270度までの距離を a_1 、±30度と±150度までの距離を a_2 とすれば、これら2種類の磁極のアンペアターンの比は、

$$\frac{(ni)_1}{(ni)_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 \quad (102)$$

非対称な設計の長所は全体のアンペアターンが減少するので電力の節約になる。さらに、コイル挿入のために上下2分割ですむことである。

(99)の B_y を x 座標で微分すれば、

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = b_3 x \quad (103)$$

となって、 x の正負に応じてビームが受ける磁場勾配の符号が異なる。運動量の拡がりをもつビームでは、 $\Delta p > 0$ の粒子は中心軌道より外側の軌道を通り、 $\Delta p < 0$ の粒子は内側の軌道を通る。図28に示すように、同じ4極磁場に対して $\Delta p > 0$ の粒子は焦点距離が長く(チューンが小さい)、 $\Delta p < 0$ の粒子の焦点距離が短い(チューンが大きい)。6極磁場は $\Delta p > 0$ の粒子に収束力を及ぼし、

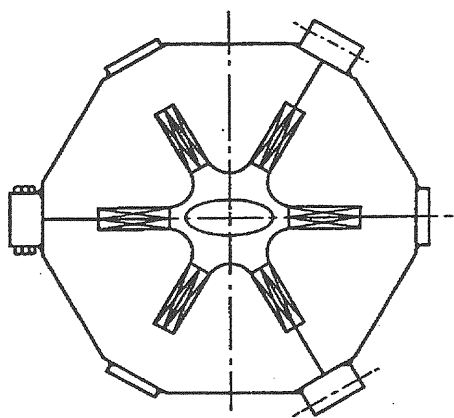


図26 対称6極電磁石。

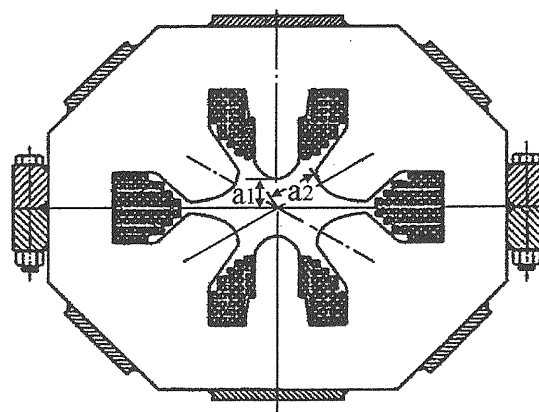


図27 非対称6極電磁石。

$\Delta p < 0$ の粒子に発散力を及ぼすので、異なる運動量の粒子の焦点距離(チューン)を合わせる働きをする。これがクロマチシティーの補正であるが、運動量の大きい粒子が $x > 0$ 、小さい粒子が $x < 0$ の側に来なければならないので、分散関数がゼロでないところで補正しなければならない。垂直方向のチューンの拡がりも補正しなければならないので、 b_3 の符号を異にする2種類の6極電磁石(F-6極とD-6極)が必要である。

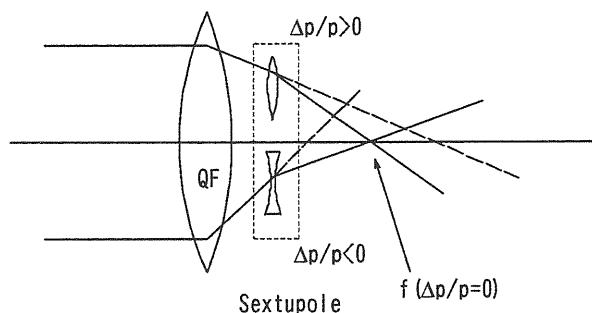


図28 6極電磁石によるクロマチシティーの補正。

4-5. 超伝導電磁石

大型電子シンクロトロンによる電子・陽電子衝突実験はCERN-LEPを最後に、より高いエネルギーが期待できるリニアコライダーの開発へ移り、高エネルギー物理は衝突エネルギーの高い陽子・陽子衝突または重イオン・重イオン衝突による実験へ方向転換した。BNLはRHICを建設・稼動し、CERNはLEPのトンネルにLHCを建設中である。DESYはHERAの後継加速器とし

ていち早く全長 33km の電子・陽電子コライダー TESLA の建設を計画中である。陽子または重イオンなどのハドロン用の高エネルギーシンクロトロンはエネルギーを上げるため、強い磁場の超伝導電磁石を必要とする。

図 2 9 a のようなアパーチャーに比べてビーム方向に長い超伝導電磁石を考え、磁場を 2 次元の円筒座標系 (r, θ) で考える。z 軸に平行に軸上を + 方向に流れる電流 I による距離 r の任意の点における磁場は θ 方向の成分だけを持ち、

$$B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (104)$$

で与えられる。この磁場に対するベクトルポテンシャルは z 成分しかもたないので $\mathbf{A} = (0, 0, A_z)$ で与えられる。したがって、 θ 方向の磁束密度は

$$B_\theta = \frac{\partial A_z}{\partial z} - \frac{\partial A_r}{\partial r} = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \quad (105)$$

となつて、これよりベクトルポテンシャルは

$$A_z(r, \theta) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{a}\right) \quad (106)$$

ここで、 a は対数項を無次元化するために長さの次元をもつ任意定数である。(106) は図 2 9 b の z 軸上を流れる電流によって作られるベクトルポテンシャルであるので、超伝導電磁石の電流配置に合わせるため、図 2 9 c のように電流が (a, ϕ) の場所に z 軸に平行に流れていて、この電

流によって (r, θ) の場所で観測される磁束密度 $\mathbf{B} = (B_r, B_\theta)$ を求める。ベクトルポテンシャルは

$$A_z(r, \theta) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{R}{a}\right) \quad (107)$$

ただし、 $R = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\theta - \phi)}$ である。

磁場の観測点が電流要素より内側にあるかどうかによって 2 つの場合に分けて考える[12]。

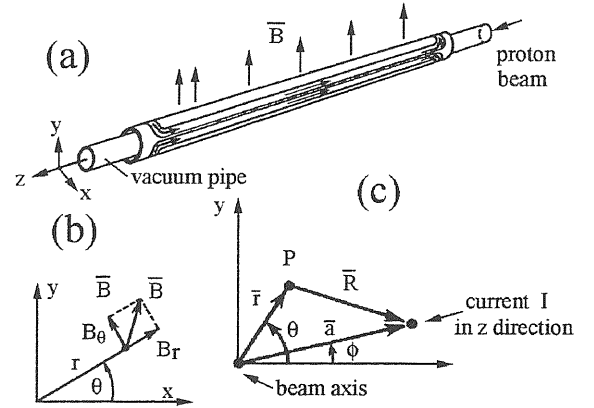


図 2 9 (a) 超伝導偏向電磁石、
(b) z 軸上の線電流による磁場、
(c) (a, ϕ) を流れる線電流による磁場。

1) $r < a$ の場合、

$$R^2 = a^2 + r^2 - ar[e^{i(\theta-\phi)} + e^{-i(\theta-\phi)}] = a^2 \left[1 - \frac{r}{a} e^{i(\theta-\phi)} \right] \left[1 - \frac{r}{a} e^{-i(\theta-\phi)} \right]$$

となるので、

$$\begin{aligned} A_z(r, \theta) &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{R}{a}\right) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\ln\left(1 - \frac{r}{a} e^{i(\theta-\phi)}\right) + \ln\left(1 - \frac{r}{a} e^{-i(\theta-\phi)}\right) \right] \\ &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[-\left(\frac{r}{a}\right) e^{i(\theta-\phi)} - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a}\right)^2 e^{i2(\theta-\phi)} - \frac{1}{3} \left(\frac{r}{a}\right)^3 e^{i3(\theta-\phi)} - \dots - \left(\frac{r}{a}\right) e^{-i(\theta-\phi)} - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a}\right)^2 e^{-i2(\theta-\phi)} - \frac{1}{3} \left(\frac{r}{a}\right)^3 e^{-i3(\theta-\phi)} - \dots \right] \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos[n(\theta - \phi)] \end{aligned} \quad (108)$$

磁場成分は、

$$\begin{aligned} B_\theta(r, \theta) &= -\frac{\partial A_z}{\partial r} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} \cos[n(\theta - \phi)] \\ B_r(r, \theta) &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} \sin[n(\theta - \phi)] \end{aligned} \quad (109)$$

2) $r > a$ の場合、

$$R^2 = a^2 + r^2 - ar[e^{i(\theta-\phi)} + e^{-i(\theta-\phi)}] = r^2 \left[1 - \frac{a}{r} e^{i(\theta-\phi)} \right] \left[1 - \frac{a}{r} e^{-i(\theta-\phi)} \right]$$

$$\ln\left(\frac{R}{a}\right) = -\ln\left(\frac{a}{r}\right) + \ln\left(\frac{R}{r}\right)$$

と書き直せば、ベクトルポテンシャルは同様にして

$$A_z(r, \theta) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{R}{a}\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{a}{r}\right) + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{a}{r}\right)^n \cos[n(\theta - \phi)] \quad (110)$$

したがって、

$$B_\theta(r, \theta) = -\frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \cos[n(\theta - \phi)] \quad (111)$$

$$B_r(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sin[n(\theta - \phi)]$$

ここで、ビームアパーチャー内 ($r < a$) におけるベクトルポテンシャルは (108) であるので、ノーマル電磁石に対して電流分布を

$$I(\phi) = I_0 \cos(m\phi) \quad (112)$$

と仮定すれば、

$$A_z(r, \theta) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n \int_0^{2\pi} \cos(m\phi) \cos[n(\theta - \phi)] d\phi = \begin{cases} 0 & ; m \neq n \\ \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{1}{m} \left(\frac{r}{a}\right)^m \cos(m\theta) & ; m = n \end{cases}$$

すなわち、 $m = n$ のとき

$$A_z(r, \theta) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{1}{m} \left(\frac{r}{a}\right)^m \cos(m\theta) \quad (113)$$

このときのギャップ内の磁束密度は

$$B_\theta(r, \theta) = -\frac{\mu_0 I_0}{2a} \left(\frac{r}{a}\right)^{m-1} \cos(m\theta) \quad (114)$$

$$B_r(r, \theta) = -\frac{\mu_0 I_0}{2a} \left(\frac{r}{a}\right)^{m-1} \sin(m\theta)$$

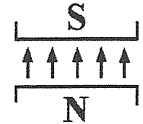
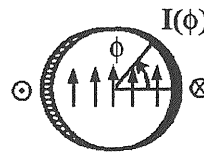
(112) の電流分布を仮定すれば、図30のように $m=1, 2, 3, \dots$ に対して、2極、4極、6極、... 磁場が現れる。超伝導電磁石を設計する上で $\cos(m\theta)$ を如何に近似するかによって現れる高次磁場成分の大きさが決まる。図31は実際の超伝導電磁石断面の構造である。ラザフォードケーブルと呼ばれる平角超伝導より線を使用して、多重の電流セルの角度や非磁性のウエッジを埋め込むことによって近似され、加速器グレードの磁場分布を得ている。コイルはステンレスのカラーでしっかり固定され、熱収縮や電磁力によるコイルの動きを防止する。

スキュー電磁石の場合の電流分布は (112) に $-\pi/2m$ の回転を与えることによって $I(\phi) = I_0 \sin(m\phi)$ となる。この場合のベクトルポテンシャルも同様にして求めることができる。

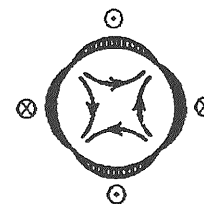
超伝導電磁石は液体ヘリウム温度まで冷却しなければならないので、熱浸入の極めて小さなクライオスタットに収められる。超伝導コイルを鉄心で取り囲むことによってギャップの磁場は数

10%程度増加する。

Dipole $I(\phi) = I_0 \cos \phi$



Quadrupole $I(\phi) = I_0 \cos 2\phi$



Sextupole $I(\phi) = I_0 \cos 3\phi$

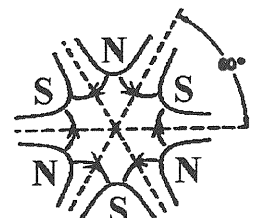
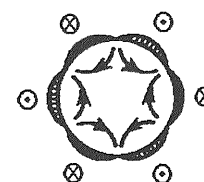


図30 電流分布による純粋な2極、4極、6極電磁石と対応する通常の電磁石断面。

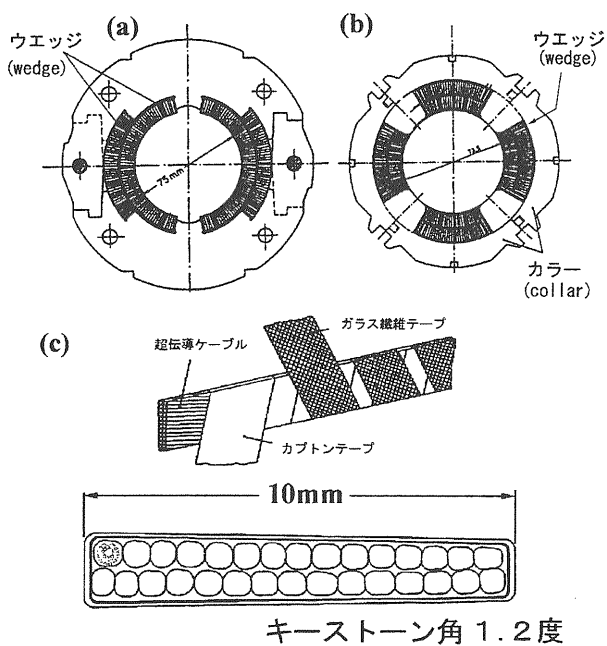


図 3 1 2重シェルの(a)超伝導 2極電磁石 (HERA, LHC) と(b)超伝導 4極電磁石 (HERA) の断面構造、(c)ラザフォードケーブル。

4-6. ラピッドサイクルの電磁石

以上ではスローサイクル、すなわちパルス運転の周期が数秒以上の比較的繰り返しの遅いシンクロトロン電磁石を扱った。平均のビーム強度を上げるため数 10Hz の繰返率で運転するラピッドサイクルシンクロトロンがある。繰返しは商用周波数に合わせたものが多い。電磁石は交流電磁石の設計になり、鉄心は鋼板(ラミネーション)をエポキシ樹脂で接着する非溶接構造である。溶接すれば溶接箇所を通して渦電流が流れ、ギャップの磁場分布に影響する。コイルは冷却用のステンレスパイプの周りに絶縁した銅細線を燃った導体を使用される。これは導体中の渦電流損失を低減するためである。図 3 2 はコーネル大学で建設された 60Hz の 10GeV 電子シンクロトロン機能結合型電磁石である[13]。

励磁用電源は繰返周波数に合わせて設計され、直流励磁された電磁石に、交流電流が重畳される。図 3 3 のように電磁石とチョークトランスのインダクタンスおよびコンデンサーで共振回路を構成することによって交流電流が流れる。回路のジュール損失、コンデンサー損失および渦電流で消費される電力を 1 サイクルごとにチョークトランス一次側のパルス電源からコンデンサーに供給することによって、交流電流が安定に維持さ

れる[14]。

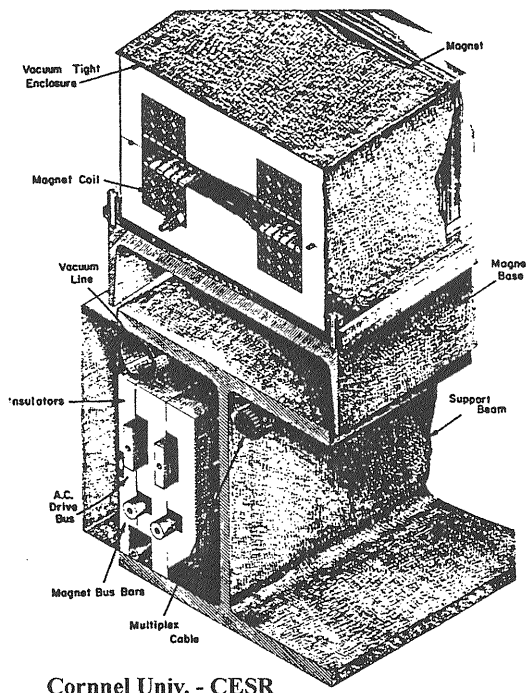
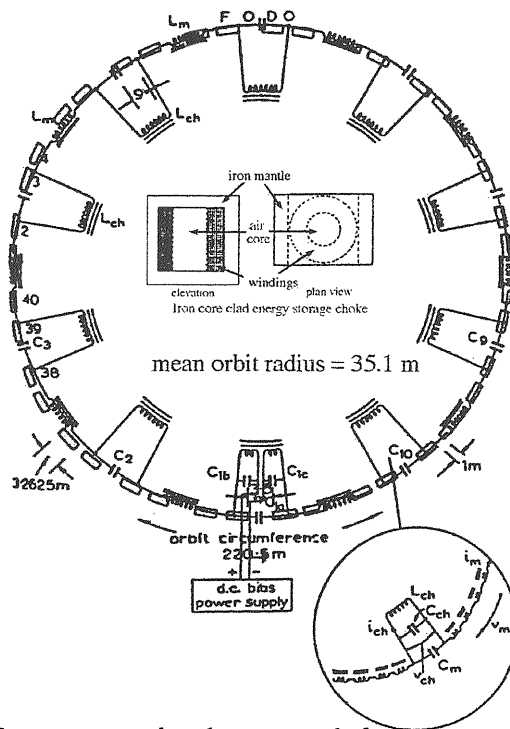


図 3 2 コーネル大学の 60Hz、10GeV 電子シンクロトロン電磁石。



Resonant network and power supply for the 4GeV electron synchrotron Nina (UK)

図 3 3 ラピッドサイクルの電源・電磁石の回路構成。

電磁石の端部においてラミネーションを貫くように磁束が通るので、端部の鉄心の中に渦電流が発生する。これを抑えるため電磁石端部を図34に示すログスキー曲線

$$\frac{z}{d} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{\pi} \exp\left(\frac{\pi x}{d}\right) \right) \quad (115)$$

でカットする。ここで、 d はギャップの全高である。ログスキー曲線により鉄心コーナー部の局所的飽和がなくなって磁束分布が一様になり、磁場の強さによらずフリンジング磁場の分布がほぼ同じになる。図35はログスキー曲線で成形した場合としない場合（角型エッジ）の磁場分布の比較である[15]。

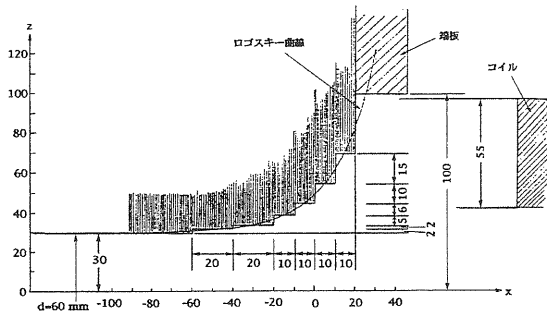


図34 KEK ラピッドサイクル用モデル電磁石の端部形状（ログスキー曲線）。

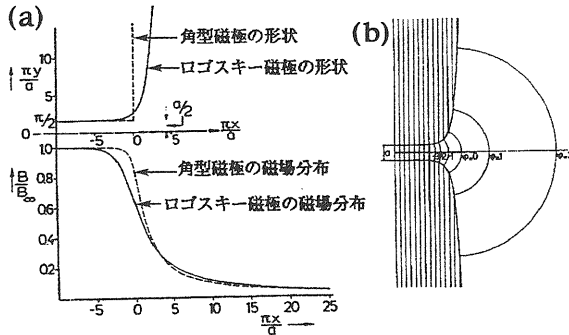


図35 (a)磁極コーナー部の形状による磁場分布、(b)ログスキー形状による磁力線の分布。

5. 電磁石の素材と構造

5-1. 鉄心材料と鉄心の製作

電磁石はビームの軌道安定性に直接関するため、その性能には厳しい精度が必要で、工作精度は勿論のこと使用する磁性体の磁気特性と品質の一樣性が要求される。鉄は優れた磁性材料として磁気回路を構成し、コイルを流れる電流によって発

生する磁束を誘導する。磁気回路を個々の要素に分け、各々の磁路長、透磁率、断面積を ℓ_i 、 μ_i 、 S_i とすればアンペールの法則から、

$$\sum_i \left(\frac{\ell_i}{\mu_i S_i} \right) \Phi = NI \quad (116)$$

ここで、 NI は積分路が取り囲む電流値である。電気回路からの類推により、

$$\begin{aligned} \text{起磁力 } NI &= \text{起電力 } V \\ \text{磁束 } \Phi &= \text{電流 } I \\ \text{磁気抵抗 } Q &= \text{電気抵抗 } R \end{aligned}$$

の対応が成り立つので、磁気回路において、

$$NI = Q\Phi \quad (117)$$

ここでは直列磁気回路として、

$$Q = \sum_i Q_i = \sum_i \frac{\ell_i}{\mu_i S_i} \quad (118)$$

すなわち、全磁気抵抗は個々の磁気回路要素の和で与えられる。磁束は磁気回路を一周して閉じるので、 Q は鉄心の磁気抵抗 Q_{iron} とギャップの磁気抵抗 Q_{air} の和 $Q = Q_{iron} + Q_{air}$ で与えられる。

ギャップの磁気抵抗は加速器の設計から決まるので、ギャップの磁場を強くするためには鉄心の磁気抵抗を小さく抑えなければならない。鉄心は飽和により透磁率が低下するので、その断面積との兼ね合いから鉄心の大きさが決められる。

強磁性体は用途によって軟磁性材料と硬磁性材料に区別される。軟磁性材料は磁化が大きく、ヒステリシス損の小さい材料、硬磁性材料は保持力の大きな材料である。鉄は軟磁性材料に属し、比較的安価で透磁率が大きいため電磁石の鉄心に使用される。強磁性材料は図36のように透磁率と保持力で分類できる。

鉄心用スチールの選択は直流電磁石、交流またはパルス電磁石によって個々に扱う必要がある。また、その磁氣的性質は化学的組成や製法によって異なる。

シンクロトロン電磁石の鉄心に採用される材料はケイ素鋼板か低炭素鋼板 (low carbon steel) または脱炭鋼板 (decarburized steel) である。ケイ素鋼板は電気機械用の材料 (電磁鋼板) として磁気特性が工業規格で定められ、鉄心材料として安心して使用できるものであるが、ケイ素の含有量 (通常 3%以下) によって磁気特性が異なる。純鉄は優れた強磁性体であるが、図37に示す異方性を持ち、とても高価である。脱炭鋼板は純鉄の代用品であるが、図38に示すように高磁場側での磁気特性はケイ素鋼板より優れ、しかも安価であることから、欧米ではよく採用される[16]。ケイ素含有量が少ないグレードの低いケイ素鋼

板は脱炭鋼板に近い磁気特性を持っている。日本で低炭素鋼板と呼ばれるものは深絞り鋼板として区別され、磁気特性の保障はない。純鉄の飽和磁束密度は 2.16 T で、ケイ素含有量とともに飽和磁束密度は減少する。交流電磁石の最適含有量は 1~2 % Si である。

を管理し、電磁石の製造にあたって異なる特性の鋼板を組み合わせる (shuffling)、各電磁石の個体差を可能な限り小さくする努力が必要である。特に、残留磁場に影響する保持力は 10% 以上のバラツキがあるので、鋼板の製造段階で測定されたデータを基にして $|H_c| \leq 10\%$ を満たすものだけを選び、この中でシャプリングする。図 3 9 は国内のメーカーによるケイ素鋼板の実績例である。

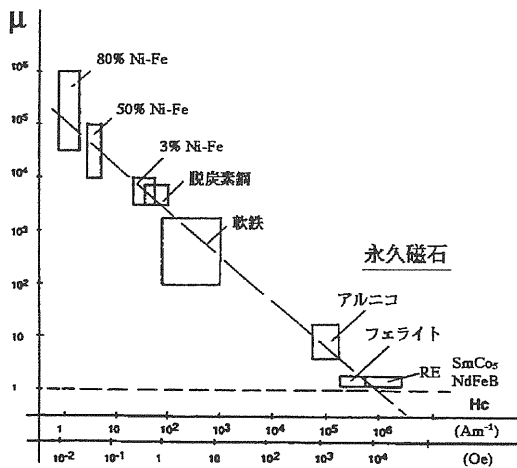


図 3 6 強磁性体の分類。

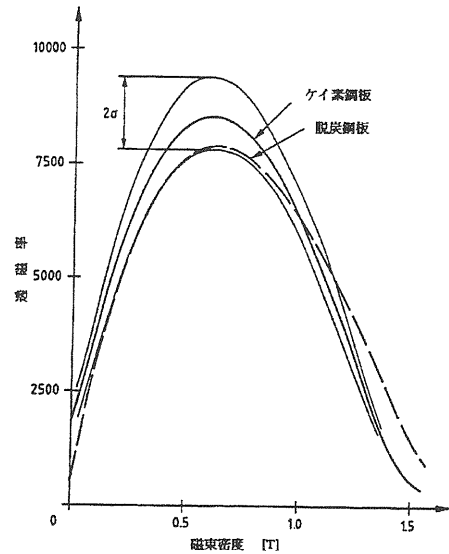


図 3 8 ケイ素鋼板と脱炭鋼板の比透磁率。

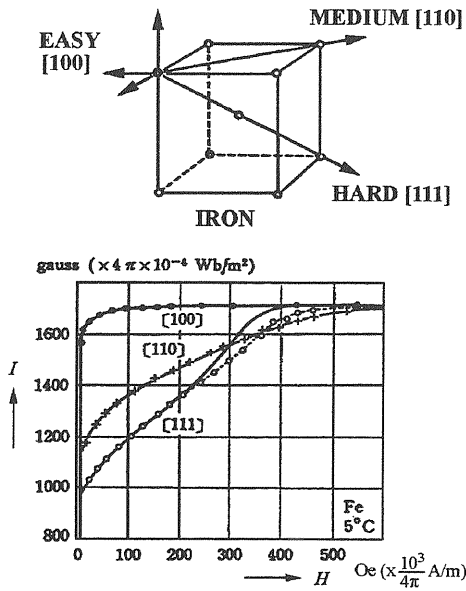


図 3 7 鉄単結晶の結晶軸と磁気異方性。

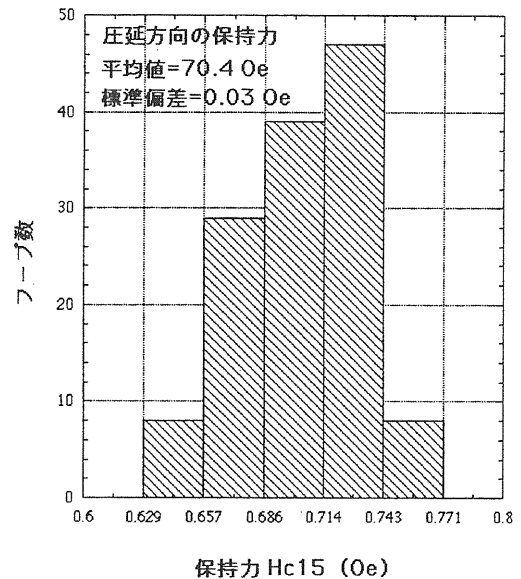


図 3 9 加速器用に納入されたケイ素鋼板の保持力の分布。

大型のシンクロトロンでは電磁石の製造に数年かかるのが通例で、納入される電磁鋼板の磁気特性は製造ロットごとに異なる。それは主に原材料の組成や不純物が異なることが原因である。そのため、納入される鋼板はロールごとに磁気特性

ケイ素鋼板には方向性鋼板と無方向性鋼板がある。方向性鋼板は、図40のように圧延過程で結晶粒の方向を揃えて、一方向（圧延方向）にすべての結晶粒の容易磁化方向を揃えたものである（1934年 N.P. Goss によって開発）。磁極部の大局的な磁力線の方向に容易磁化方向を選ぶことによって電磁石の性能が改善される。

無方向性ケイ素鋼板は結晶配列がランダムになっていて磁気特性の異方性が少ない。

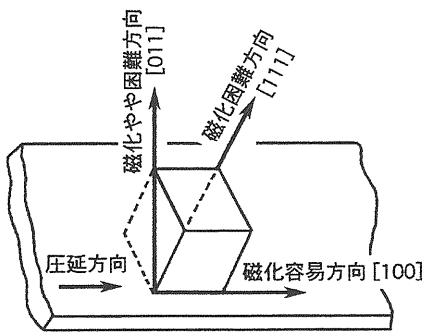


図40 方向性ケイ素鋼板の結晶方向。

鋼板の磁気特性の経年変化に保持力の増加と透磁率の低下がある。これは炭素や窒素の格子間溶解元素の凝縮によるので、炭素と窒素の総含有量を減らすか、磁気特性に影響しない炭化物や窒化物に凝縮させて固溶体中の濃度を減らすことで経年変化を抑えることができる。電磁石用鋼板としての炭素含有量が 0.003%以下であれば経年変化が無視できる。

(91)の関係から、保持力が小さいほど残留磁束密度も小さくなる。電磁石の磁場は励磁による磁場 B_l と残留磁場 $B_{r,m}$ の和で与えられるので、入射磁場に近いところで残留磁場の影響が大きくなる。このため残留磁場、したがって保持力はできる限り小さい方が望ましい。保持力は鋼板の結晶粒度に関して図41のように粒度とともに増加し、ヒステリシス損も増加する[17]。

ケイ素鋼板では一般的に低磁場で大きな透磁率をもつものは保持力が低く、高磁場における透磁率も低い。1.5% Si のケイ素鋼板で透磁率は 0.01 T で 750、 $H_c \sim 72$ A/m である。低炭素鋼 ($\sim 0.1\%$ Si) では、透磁率は 250~500、 $H_c \sim 120 \sim 160$ A/m である。

他方で、ケイ素鋼板の電気抵抗はケイ素含有量とともに増加して渦電流損は減少するが、結晶粒度が小さいほど渦電流損は大きくなる。ヒステリシス損と渦電流損の合計を鉄損と呼び、鉄損が最小になる最適粒度が存在する。鉄損の大きさによ

ってケイ素鋼板のグレードが決められている。

電磁鋼板には絶縁皮膜が施されている。絶縁物の組成は無機質、無機質ベース+有機質がある。加速器の電磁石は放射線下で使用されるので、一般に無機質絶縁が選ばれる。積層の作業性は無機質ベース+有機質の方がよいが、溶接性は無機質の方がよい。絶縁皮膜によって占積率は若干低下するが、0.5 mm 厚鋼板で 98.5% である。

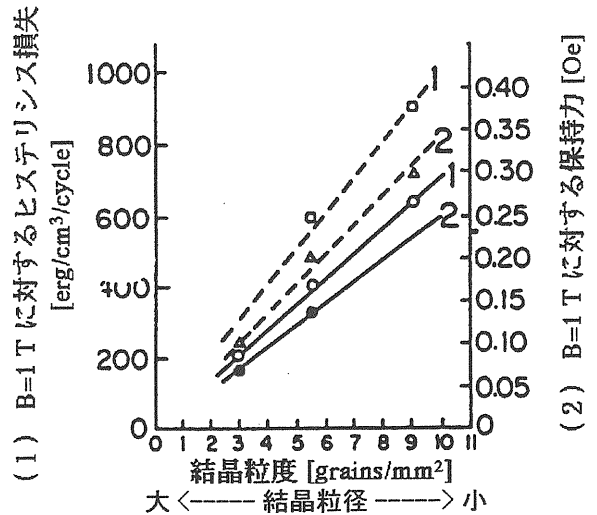


図41 ケイ素鋼板の保持力とヒステリシス損。

電磁鋼板は高精度の図42に示す抜型を使用し、プレスを用いて電磁石断面形状に打抜加工される。打ち抜き後の切口形状や打抜寸法は抜型のクリアランス、打抜速度、鋼板の機械的性質などの影響を受けるので、事前に最適の打抜条件を探しておく必要がある。抜型は一体ではなく、打抜鋼板の寸法測定に基づく修正が簡単にできるよ

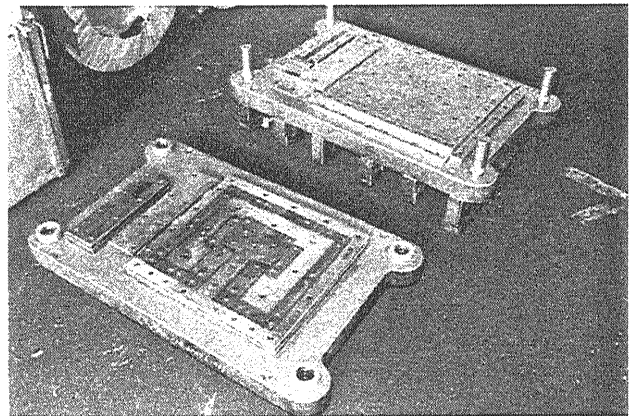


図42 偏向電磁石の精密抜型 (日立製作所提供)。

うにブロックを組み合わせた構造にする。無方向性鋼板でも異方向性が若干あるので、方向によって内抜寸法が異なる。打ち抜き後の切口形状を見れば図43に示すようにダレとカエリ（バリ）が発生し、特にカエリは鋼板間の導通を引き起こして渦電流が大きくなる恐れがあるので、最小限に留めるか、バリ取りを行う。抜型の磨耗によりダレやカエリが大きくなるので、打抜寸法を所定の枚数ごとに測定して、ダレが板厚の10%、カエリが2%を超えるようであれば抜型の再研磨を行う。

鋼板に残留応力があれば打抜いた後で変形が起こる。精密打抜では残留応力を開放するために、最終の打抜形状に近い形に打抜いて、その後で最終形状に打抜く2度打抜きを行う。この場合は生産性を考えて図44の順送抜型（progressive die）を利用する。

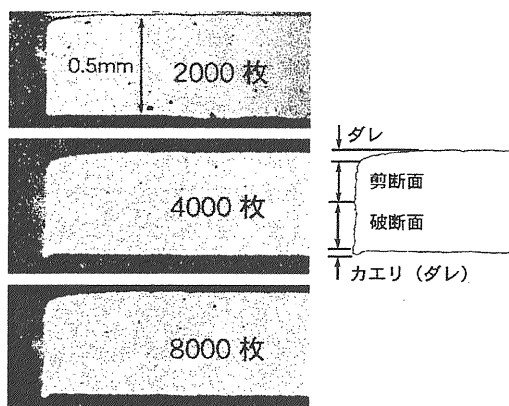


図43 打抜き枚数と切口のダレとカエリ。

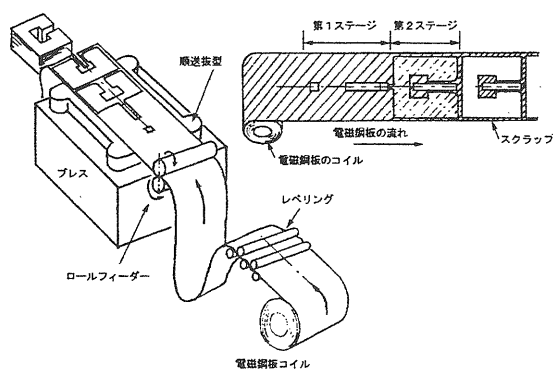


図44 順送打抜（日立製作所提供）。

製鉄所の圧延機ローラーには工業規格で許される程度のギャップ誤差があるので、電磁鋼板には幅方向に必ず10 μ m程度の厚み偏差がある。これを無視して積層すれば電磁石の長さが前後で数cmも異なることになる。これを避けるために、電磁鋼板の打抜方向を変えて所定の枚数ごと

に交互に積層し、積厚偏差は現れないように調節しなければならない。積厚偏差は鉄心の溶接段階における溶接変形の原因にもなる。どうしても積厚偏差が残れば、同じ鋼板のライナーを挟み込んで調整する。

積層治具と呼ばれる架台の上で打ち抜いた鋼板を精度よく積層する。この架台上に鉄心を拘束して溶接するので、溶接変形に耐えるだけの強度が必要である。積層は途中で長さ方向に仮締付けを行いながら、積厚偏差を修正する。鉄心の前後には端板（bookend）と呼ばれる非磁性のステンレスの厚板を置く。積層が終われば、側板を取り付け、左右上下を拘束する。長さ方向には油圧シリンダーで最大20 kg/cm²の圧力で締め付けた状態で溶接する。端板は拘束を除いた後で鉄心の伸びを抑える働きをする。特に磁極部は溶接箇所から離れているので、ある程度の伸びがある。端板の強度が足りない場合は予め、絶縁したスルーボルトを磁極の磁場に影響しない場所に取り付けるように設計する。

溶接にあたっては、溶接変形が起きないように溶接順序を考えて行う。大型の加速器では電磁石は大量生産になるので、自動溶接を考えて積層架台を製作しなければならない。図45はTRISTANの鉄心を自動溶接するための積層架台である。

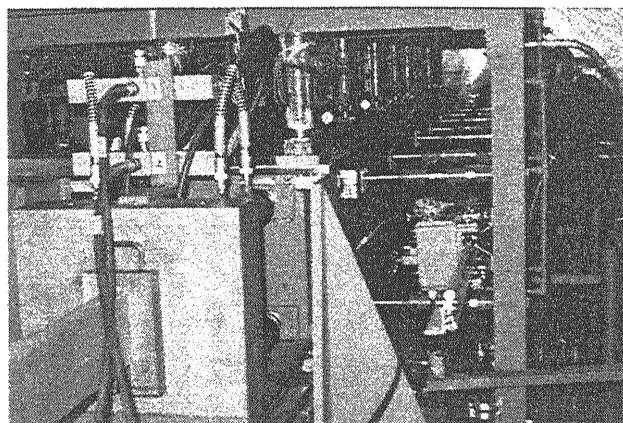


図45 自動溶接のための積層架台（日立製作所提供）。

5-2. コイル導体

コイル導体は冷却水チャンネルをもつ無酸素導（OFC ホロー導体、oxygen free copper hollow conductor）かアルミニウムである。アルミは比電気抵抗が大きく、抵抗値を下げるためにコイル断面寸法は大きくなる。コイル製作コストはアル

ミの方が安い、運転経費、耐久性、溶接性、電気端子取り合いの点で銅の方が優れる。アルミの場合、コイルの接続に heliarc 溶接が必要で、端子のボルト接続では接触抵抗を下げるために特殊なペースト (Alcoa No. 2EJC) が使用される。アルミのホロー導体は径の大きなドラムに巻いて運搬できるので、長尺の導体が利用できる。

無酸素銅は電気・熱伝導性がよく、冷間加工性、溶接性に優れる。しかし、導体の長さには制限があり、1つのコイルの途中に図45に示す構造の接続部が数箇所あり、銀ロー付けされる。接続の前後に段差があれば、冷却水の流路が狭まって流速が増し、段差のところで水流の低圧部が発生し、銀ローが損傷(壊食)を受ける。図46のような複雑な構造でなく、導体同士を銀ローを挟んで直付けする方法が FNAL で採用され、高工機構でも採用されているが、上のような危険性があるので、製作段階における工程管理が重要である。

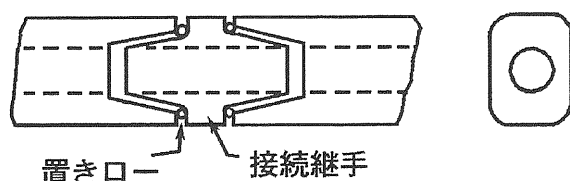


図46 銅ホロー導体の接続方法の一例。

コイルの絶縁は、導体の素線絶縁と層間絶縁、コイル全体の対地絶縁とその外側の保護絶縁の4層からなる。以前はボロンを含まないガラステープまたはマイカテープで絶縁して全体をエポキシ樹脂で真空含浸させ、加熱硬化させた。エポキシ樹脂の絶縁破壊強度は 16~22 kV/mm である。対地電圧が高い場合は、マイカシートの絶縁を施す。マイカの絶縁破壊強度は 120~240 kV/mm である。コイルが受ける吸収線量を評価して絶縁の耐用期間を評価しなければならない。マイカは放射線に対して強いので問題はないが、エポキシ樹脂は種類によって耐放射線性は異なる。有機物では 10⁷ Gy 程度が限度で、これ以上では酸化モリブデンやセラミックによる絶縁、あるいはコンクリート絶縁などの特殊な方法が採用される。

現在では、ガラス繊維にエポキシ樹脂を含浸させたセミキュア絶縁テープが使用される。これで素線絶縁と層間絶縁を行い、エポキシセミキュアガラス/マイカテープで対地絶縁した後、エポキシセミキュアガラステープで保護絶縁し、エポキシ樹脂を加熱硬化させる。加熱によりエポキ

シ樹脂が溶けて隙間を埋めるが、エポキシ樹脂の量は隙間を埋め尽くすほど十分ではなく、湿気が入れば層間短絡の危険がある。

5-3. コイルの設計

電磁石の抵抗とインダクタンスは励磁電源を設計する上で重要なパラメーターである。コイル導体1本の断面積を a 、コイルの巻数を N 、1ターンの平均長を ℓ 、導体の平均温度における比抵抗を ρ とすれば、コイルの全抵抗は

$$R = \frac{\rho N \ell}{a} \quad (119)$$

最大励磁電流はアンペアターン Ni からコイルの巻数 N を決めて得られるので、この電流におけるコイルの消費電力は

$$U = i^2 R = \frac{\rho (Ni)^2 \ell^2}{N a \ell} = \frac{\rho (Ni)^2 \ell^2}{\text{coil volume}} \quad (120)$$

コイルにかかる直流電圧は電流密度を $j = i/a$ として、

$$V = Ri = \rho N j \ell \quad (121)$$

電流密度が $\sim 1 \text{ A/mm}^2$ 以下であればコイルの発熱は空冷で冷やすことが可能であるが、これ以上であれば強制空冷か冷却チャンネルによる水冷が一般的である。水冷却はホローコンダクターを採用すれば簡単であるが、この場合は通常 $\sim 10 \text{ A/mm}^2$ 以下である。

インダクタンスは磁場計算コードで計算される電磁石の蓄積エネルギーから簡単に精度よく求めることができる。机上計算は少々複雑で、ゼロ次近似程度の精度である。 N ターンのコイルが交差する磁束を Φ [Wb]、励磁電流を I [A] とすれば、

$$L = \frac{N \Phi}{I} [H] \quad (122)$$

ただし、

$$\Phi = w \ell_p B \quad (123)$$

ここで、

$$w = \begin{cases} w_a + 2w_c / 3 & ; \text{ window-frame magnet} \\ w_p + h / 2 & ; \text{ magnet with poles} \end{cases}$$

$$w_a = \text{コイル内法 [m]}$$

$$w_c = \text{コイル片幅 [m]}$$

$$w_p = \text{磁極幅 [m]}$$

$$h = \text{ギャップ高 [m]}$$

$$\ell_p = \text{磁極の長さ [m]}$$

1) 偏向電磁石の場合、 $B = \mu_0 N I / h$ を考慮して、

$$L_{\text{dipole}} \approx \frac{\mu_0 N^2 w \ell_p}{h} [H] \quad (124)$$

2) 4極電磁石の場合、磁場勾配 $g=2\mu_0 NI/r^2$ を考慮して、中心軸からコイルまでの距離を x_{\max} [m] とすれば、1磁極あたりのコイルと交差する磁束は漏れ磁束を考慮して、

$$\begin{aligned} \Phi &= 2\ell_p \int_0^{x_{\max}} g dx \approx \ell_p g x_{\max} (x_{\max} + 2w_c/3) \\ &= \frac{2\mu_0 NI \ell_p}{r^2} x_{\max} \left(x_{\max} + \frac{2}{3} w_c \right) \end{aligned}$$

したがって、インダクタンスは

$$L_{quad} \approx \frac{8\mu_0 N^2 \ell_p}{r^2} x_{\max} \left(x_{\max} + \frac{2}{3} w_c \right) \quad (125)$$

速いパルス励磁または交流励磁の電磁石では、コイル両端の電圧は、

$$V = Ri + L \frac{di}{dt} \quad (126)$$

となるので、励磁電圧を下げるためにインダクタンスを小さくすることが必要で、巻数を少なくして導体断面を大きく設計する。

5-4. コイルの冷却

コイルの冷却は水冷が一般的であるが、導体との化学反応や電流の導通を避けるため脱イオン水が使用される。このため、市水または地下水をイオン交換樹脂を用いて電気抵抗率（比抵抗）を $100 \text{ k}\Omega \cdot \text{cm}$ 以上にする（市水の電気抵抗率は $\sim 10 \text{ k}\Omega \cdot \text{cm}$ 、蒸留水で $100 \sim 1000 \text{ k}\Omega \cdot \text{cm}$ 、理論純水で $18300 \text{ k}\Omega \cdot \text{cm}$ ）。

電磁石に採用される水冷法はホロー導体（中空導体）の中に冷却水を流す直接冷却法である。大型電磁石の導体断面は充分大きいので中空導体を使用できる。導体断面は四角形で、その中心に穴を空けた押し出し銅（またはアルミ）で、冷却効率がよく、大きな電流密度（ $\sim 10 \text{ A/mm}^2$ ）まで耐える。孔の大きさは必要な冷却水流量に合わせて決めなければならない。必要ならば冷却回路を並列にすることも考慮する。コイルの許容温度上昇を ΔT [°C]、発熱（消費電力）を U [kW] とすれば、必要な流量は

$$q = \frac{U}{4.2\Delta T} = 10^{-3} v \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 \quad [\text{liter/sec}] \quad (127)$$

ここで、 d [mm] は冷却チャンネルの直径、 v [m/sec] は冷却水の流速である。キャビテーションによる導体の侵食を防ぐため流速は $\sim 2.5 \text{ m/sec}$ 以下に選ぶ。

冷却水のコイル入口から出口までの圧力損失（圧損）を ΔP [kg/cm²] は、冷却チャンネルの長さ L_d [m] として、

$$\Delta P = 0.18 L_d v^{1.75} / (F_s^{1.75} d^{1.25}) \quad (128)$$

ここで、 F_s は冷却孔の形状因子で、冷却孔断面の周長と断面積を L_F 、 A_F とすれば $F_s = L_F^2 / 16A_F$ である。丸穴の場合は $F_s = \pi/4$ である。

冷却水流量は通電のデューティー（duty）から決められるが、フラットトップが1秒以上持続する加速器であれば、冷却水の条件は直流電磁石として扱う。例えば、発熱量 600 kW の電磁石を冷却水2回路（各 50 m 、 100 m の場合）で温度上昇を 15°C として冷却チャンネルの直径と流速、圧損の関係を図45に示す。

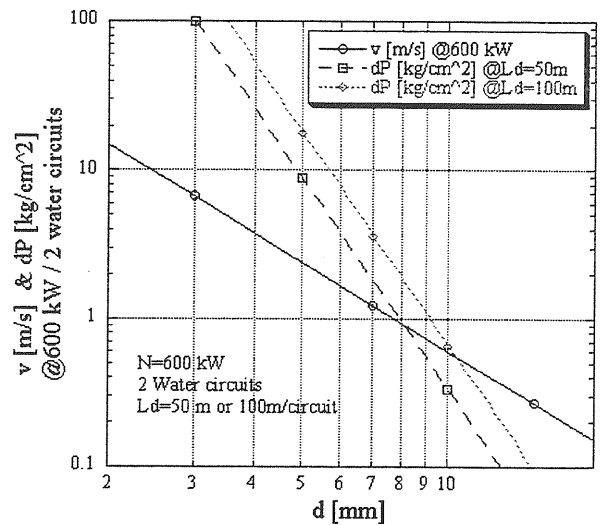


図47 発熱量 600 kW の電磁石の水冷却回路の流速と圧損。

6. 終わりに

素粒子研究所準備室の幻に終わった 42 GeV 陽子シンクロトロン計画以来、シンクロトロン電磁石について今まで高工研および高工機構において学んできたことを書き綴ってきたが、この時代は加速器の巨大化とともにひたすら走り続けてきた感が強い。この過程で電磁石の設計方法は大きく変化し、ここでは述べなかったが、当時は時代の先端を行く技術として、CDC6600 や HITAC の大型計算機を利用する磁場の数値解析がモデル電磁石に代わるものとして登場した。現在では磁場計算コードはワークステーション用に変換され、視覚化プログラムで計算結果を色コードで表示することも容易になっている。

苦労話として、方向性ケイ素鋼板を世界で初めて KEK-PS に採用するに当たって、精密抜型による打ち抜き精度を試行錯誤で上げたこと、磁気特

性の方向性を磁場解析に取り込むため悪戦苦闘したこと、溶接箇所からの水漏れによるコイル短絡で原因究明に奔走したことなどが思い出される。

ここに収めた内容は過去の出版物と重なる部分も多く、もっと詳細を望まれるときはこれらも参照して頂きたい[18, 19]。

7. 参考文献

- [1] P.M. Rolph (ed.), "Birmingham Synchrotron 40th Anniversary Reunion," Proc. One-day Symposium, Univ. Birmingham, 1993.
- [2] J.P. Blewett, "The Proton Synchrotron," Rep. Progr. Phys., 19(1956)37-79.
- [3] E. Courant, M.S. Livingstone, and H. Snyder, Phys. Rev. 88 (1952) 1190.
- [4] E.D. Courant and H.S. Snyder, "Theory of the Alternating-Gradient Synchrotron," Ann. Phys. 3 (1958) 1-48.
- [5] P.J. Bryant and K. Johnsen, "The Principle of Circular Accelerator and Storage Rings," Cambridge Univ. Express, 1993.
- [6] H. Wiedemann, "Particle Accelerator Physics," Springer-Verlag, 1993.
- [7] J.P. Gourber and L. Resegotti, "Implication of the Low Field Levels in the LEP Magnets," IEEE Trans. NS-26 (1979) 3185-7.
- [8] J. Billan et al, "Influence of Mortar-Induced Stresses on the Magnetic Characteristics of the LEP Dipole Cores," IEEE Trans. MAG-24 (1988) 843-5.
- [9] R.J. Lari and L.C. Teng, "Field Design of the Main-Ring Bending Magnets of the NAL 200-GeV Synchrotron," PAC69, pp.667-671.
- [10] SLAC Linear Collider Conceptual Design Report, SLAC-229, 1980.
- [11] N. Marks, "The SPS Prototype Multipole Magnet," MT-6, Brastislava, 1977, pp.528-534.
- [11] K.H. Mess et al, "Superconducting Accelerator Magnets," World Science, 1996.
- [13] R.R. Wilson, "The 10 to 20 GeV Cornell Electron Synchrotron," CS-33, 1967.
- [14] J.A. Fox, "Resonant Magnet Network and Power Supply for the 4 GeV Electron Synchrotron Nina," Proc. IEE, Vol.112, pp.1107-1126.
- [15] C.M. Braams, "Edge Effect in Charged-Particle Analyzing Magnets," Nucl. Instr. Meth. 26(1964)83-89.
- [16] J. Billan and Ph. Lebrun, "Use of Silicon Steel for Low-hysteresis D.C. Accelerator Electromagnets," CERN LEP-MA/87-45, 1087.
- [17] H. Brechna, "Materials in Electromagnets and their Properties," Proc. MT-12, Oxford, 1967, pp.305-329.
- [18] 遠藤有聲, 「加速器における電磁石の基礎」、高エネルギー加速器セミナーOHO'97, 1997, pp.III-1 - III-121.
- [19] 遠藤有聲, 「シンクロトロン電磁石」、加速器設計シリーズ、KEK Internal 2001-2, 2001.