

1 Optics Correction とは

一般に加速器は出来上がった状態のまま、目標とした性能を発揮することは稀であり、物理実験用の衝突型加速器の場合は可能な限り高い性能の実現を要求されている。したがって、加速器の運転では継続的な調整 (Tuning) が行われる。こうした日々の Tuning では、なんらかの性能指標 (衝突型加速器であれば、Luminosity と呼ばれる衝突性能) を最大化することを目的に行われている。しかし、こうした Tuning を効率良く実行するためには、加速器の状態を管理し調整者の意図通りの応答が得られるように整えられている必要がある。本稿で取り扱う Optics Correction とは、加速器中のビームの振るまいを決定している各種の Optics Function を測定し、理想とされる値若しくは設計された値となるように調整する手法である。別の言葉で言い替えるならば、現実の加速器をある種のブラックボックスとみなし、現実の加速器に与えた制御パラメータとその出力たるビームの性質の対応関係が設計モデルと一致するように調整し直す手法と言い替える事ができる。つまり、Optics Correction によって、実在しないモデル加速器と現実の加速器の差異が埋まり、モデル加速器上の知見を現実の加速器へ適用可能になり、加速器の状態を一定の範囲で保つことができるになる。

本稿では、もっとも基本的な Optics Correction を行う上で必要となるビーム力学の基礎と KEKB 加速器の運転に用いられている Optics Correction の原理を紹介する。

2 ビーム力学

ここでは、Optics Correction の基礎となるビーム力学を概論し、単粒子線形力学系での基本公式を示す。

2.1 ビームを支配する物理

我々が加速器の中であつかうビームの多くは、相対論的速度で走る高温かつ希薄な単一電荷プラズマである。ビームを構成する個々の荷電粒子の運動を支配しているのは、相対論的な運動方程式と電磁力と幾つかの量子過程である。ビームの構成粒子に働く力を分類すると以下の種に大別できる。

- 外部から加えた静電場・静磁場からの電磁力
- 外部から加えた動電場・動磁場からの電磁力
- 粒子間のクーロン相互作用 (空間荷電効果)
- ビーム自身が生成する電磁場 (航跡場)
- 偏向場による放射光の発生 (放射減衰)
- 放射光の量子化 (放射励起)
- 他のビームが作る電磁場 (ビーム・ビーム相互作用)
- 残留ガスとの散乱、イオントラッピング
- 光電子による電子雲との相互作用

最初の二つの力は、ビームを一定の領域に閉じ込めたり加速・減速等の操作を行なうために我々が与えるものである。対して、残りの五つは望むと望まざるとに係わらず、ビームの密度や周辺構造、偏向角等に応じて自然に生じる現象である。また、最後の二つはビームを閉じ込めておく真空容器の真空度や容器外壁の光電効果と二次電子放出による現象である。

現実のビームを支配する物理はこのように複雑であるが、これを直接扱うことは現実的ではないので、通常は、最も簡単なモデルとして静磁場¹でビームが閉じ込められている状態を考え、必要に応じてより詳しい相互作用を導入してゆく。

この最も簡単なモデルでは、粒子間の相互作用がないためにビームを構成する粒子は全て独立に振る舞う。言い替えば、このモデルではビームは単粒子力学系の集合として表現できる。さらに、個々の粒子の運動は、静磁場によって支配され、現実の相対論的速度の荷電粒子では実際にはあり得ないことであるが放射光の発生²を無視しているので、粒子のエネルギーは変化しない³。したがって、実験室系で見た運動方程式は特殊相対論の補正を入れて次のように記述できる⁴。

$$m\gamma \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = q \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B} \quad (1)$$

2.2 曲線座標系

想定したモデルの範囲で起こる物理現象は、そのモデルの運動方程式で全て記述されていることになるが、それだけではビームの性質を表現するには不十分である。我々が、ただの荷電粒子集団をビームと称するのは、その集団が方向性を持ち束として伝搬してゆく描像をもってるからであり、ビームの性質を理解するには運動方程式から得られる現象をこうした描像に焼き直すことが必要である。こうした描像のために、運動を基準軌道 $\mathbf{r}_0(t)$ からの変位で表現できる座標系(曲線座標系)を導入する。まず、基準軌道のなす曲線の表現に時刻 t は不要なので、基準軌道上の距離 s を導入して以下の変数変換を行なう。

$$s(t) = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\mathbf{r}_0(t')}{dt'} \right| dt' \quad (2)$$

s は、その定義から時刻 t の単調関数である。さらに、 $\left| \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} \right|$ が零となる領域の測度が零で有れば、逆関数 $t(s)$ が一価関数で有ることを保証できる。つぎに、基準曲線上の一点 $\mathbf{r}_0(s)$ 周辺での座標系の基底を定義する。曲線を基準に座標系を定める場合、自然に定義できる特別な方向として、曲線の接線方向、曲率を持った曲線が属する平面、平面内での曲線の法線が挙げられる。以下では、この自然な方向に従って、図1に示すような直交基底を導入する。始めに、接線方向の単位ベクトル $\mathbf{e}_s(s)$ を以下で定義する。

$$\mathbf{e}_s(s) = \frac{d\mathbf{r}_0(s)}{ds} \quad (3)$$

ここで、 \mathbf{e}_s が単位ベクトルであることは、 s の定義(2)から保証されている。次に、曲線が属する平面内の法線ベクトル、つまり曲線の加速度ベクトルを接線単位ベクトル \mathbf{e}_s の s 微分で定義する。 \mathbf{e}_s の単位ベクトルなので、直交性は自動的に満たされる。この法線ベクトルは主法線ベクトルと呼ばれ、曲線の内側を示している。主法線方向の単位ベクトル $\mathbf{e}_x(s)$ を次のように定義する。

$$\mathbf{e}_x(s) = -\frac{1}{G(s)} \frac{d\mathbf{e}_s}{ds} \quad (4)$$

ここで導入された関数 $G(s)$ は曲線の曲率とよばれ、 $G(s)$ が正の時 \mathbf{e}_x は曲線の外側を指し⁵、その逆数 $\rho(s) = 1/G(s)$ は曲率半径と呼ばれる。最後に、従法線単位ベクトルを以下の外積によって定義する。

$$\mathbf{e}_y(s) = \mathbf{e}_s(s) \times \mathbf{e}_x(s) \quad (5)$$

以上の定義(3),(4),(5)で導入される三つの単位ベクトルは、曲線上の点 $\mathbf{r}_0(s)$ での自然な直交基底となっている。

¹静電場で閉じ込める静電型の蓄積リングも実在する

²静磁場から力を受ける以上、電磁場と相互作用しているので放射光を発生させるのは Maxwell 方程式からの当然の帰結である

³磁場による力は粒子の運動方向と常に直交する

⁴より一般的には、一般相対論の処方に従い電磁ポテンシャル A_μ を使ったラグランジアンによってラグランジュ方程式で記述する

⁵曲線 $\mathbf{r}_0(s)$ が自分自身と交差しない単一の平面に属する閉曲線で有るときは、常に $G(s)$ が正となるように \mathbf{e}_x を定義できる

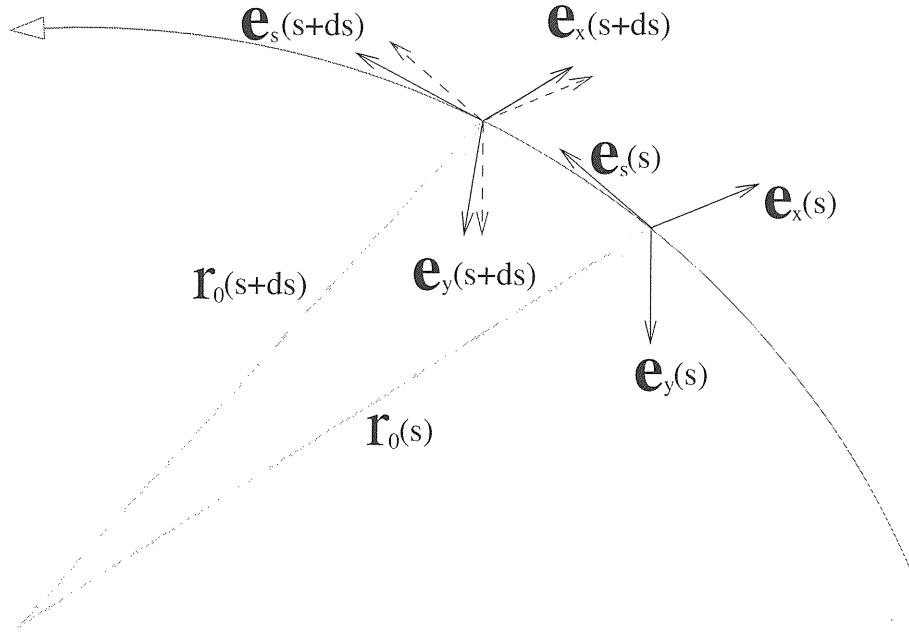


図 1: 曲線座標系の基底ベクトル

さて、直交基底の定義の中で式 (4), (5) は曲線の曲率に依存し、基準曲線 $r_0(s)$ が直線となる区間では曲率が零となり e_x が定義出来なくなる。したがって、基準曲線の全領域にわたる基底の定義を行なうために、基底 e_s, e_x, e_y の s に対する発展方程式を定義する。式 (5) の微分形

$$\frac{de_y}{ds} = \frac{de_s}{ds} \times e_x + e_s \times \frac{de_x}{ds} = e_s \times \frac{de_x}{ds} + G(s)e_x \times e_x = e_s \times \frac{de_x}{ds} \quad (6)$$

より、微分ベクトル de_y/ds は e_s と直交するので、 e_x と e_y の一次結合で表現できる。さらに、 e_y が単位ベクトルで有ることから、 de_y/ds は e_y を含むことが出来ない。したがって、 e_y の発展方程式は次のように書き下せる。

$$\frac{de_y(s)}{ds} = \kappa(s)e_x(s) \quad (7)$$

ここで、導入した関数 $\kappa(s)$ は座標系のねじれ率 (Torsion) と呼ばれる量で、隣接する二点 $s, s + ds$ での従法線ベクトル $e_y(s), e_y(s + ds)$ が成す角 $d\phi = \kappa(s)ds$ を与える。同様に、基底の直交性を用いると主法線ベクトル e_x の発展方程式は、以下で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{de_x(s)}{ds} &= \frac{d(e_y(s) \times e_s(s))}{ds} = \frac{de_y(s)}{ds} \times e_s(s) + e_y(s) \times \frac{de_s(s)}{ds} \\ &= \kappa(s)e_x(s) \times e_s(s) - G(s)e_y(s) \times e_x(s) = G(s)e_s(s) - \kappa(s)e_y(s) \end{aligned} \quad (8)$$

接線単位ベクトル e_s の発展方程式は、主法線ベクトルの定義 (4) で与えられるので、曲率 $G(s)$ とねじれ率 $\kappa(s)$ が定義されれば式 (4), (7), (8) で基準曲線上の任意の点での直交基底を定義することが出来る。基底ベクトルの定義とその発展方程式 (3), (4), (5), (7), (8) は、Frenet-Serret の公式と呼ばれる。ここまでで定義した直交基底をもちいて、基準曲線近傍の任意の点 r は次のような形に書ける。

$$r = r_0(s) + xe_x + ye_y \quad (9)$$

ここで導入された、基準曲線に基づく座標 (s, x, y) を曲線座標と呼ぶ。

曲率を持った領域では、式 (3), (4), (5) から自動的に基底が決定されるのでねじれ率 $\kappa(s)$ は一意に定まるが、曲率が零となる直線部では、曲線部との境界で単位ベクトル e_x, e_y が連続である限り自由に選ぶことが出来る。一般には、ねじれを持った座標系は扱い難いために可能なかぎり $\kappa(s) = 0$ となるように選ぶことが多い。

2.3 曲線座標系での運動方程式

前節で定義された曲線座標系を用いて運動方程式 (1) を書き直してみよう。まず、座標 r の t 微分は、Serret-Frenet の公式から

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= \frac{ds}{dt} \frac{dr}{ds} = \frac{ds}{dt} \left(\frac{dr_0}{ds} + \frac{dx}{ds} e_x + x \frac{de_x}{ds} + \frac{dy}{ds} e_y + y \frac{de_y}{ds} \right) \\ &= \frac{ds}{dt} \left((1 + Gx) e_s + \left(\frac{dx}{ds} + \kappa y \right) e_x + \left(\frac{dy}{ds} - \kappa x \right) e_y \right)\end{aligned}\quad (10)$$

で与えられる。ここで、 t は式 (2) で与えられる基準軌道上の時刻ではなく、運動する粒子の時刻で有ることに注意が必要である。運動する粒子の曲線座標 s が時刻 t に対して、微分 ds/dt が非負かつ零となる領域の測度が零であれば、曲線座標上の運動は s の一価関数で表現できる。また、 ds/dt は非負なので次のように定義できる。

$$\frac{ds}{dt} = \left| \frac{dr}{dt} \right| \left| \frac{dr}{ds} \right|^{-1}\quad (11)$$

ここで、運動方程式 (1) は、粒子のエネルギーを保存量とするので以下の等式が成立する。

$$\left| \frac{dr}{dt} \right| = v = \frac{pc^2}{E}\quad (12)$$

なお、 p と E は粒子の運動量とエネルギーである。したがって、 ds/dt は次のように与えられる。

$$\frac{ds}{dt} = \frac{pc^2}{E} \frac{1}{\sqrt{(1 + Gx)^2 + (x' + \kappa y)^2 + (y' - \kappa x)^2}}\quad (13)$$

ここで、 x' と y' はそれぞれ dx/ds と dy/ds である。以下、ことわり無き限り $'$ は微分演算子 d/ds であるものと約束する。

以上より、式 (10) と (13) に留意して、運動方程式 (1) を微分を整理すると

$$Eq.(1) \Rightarrow \frac{ds}{dt} \frac{d}{ds} \left(\frac{ds}{dt} \frac{dr}{ds} \right) = \frac{q}{m\gamma} \frac{ds}{dt} \frac{dr}{ds} \times B \Rightarrow \left(\frac{d}{ds} \frac{ds}{dt} \right) \frac{dr}{ds} + \frac{ds}{dt} \left(\frac{d}{ds} \frac{dr}{ds} \right) = \frac{q}{m\gamma} \frac{dr}{ds} \times B \quad (14)$$

が得られる。式 (13) の微分が

$$\frac{d}{ds} \frac{ds}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{((1 + Gx)^2 + (x' + \kappa y)^2 + (y' - \kappa x)^2)'}{\sqrt{(1 + Gx)^2 + (x' + \kappa y)^2 + (y' - \kappa x)^2}} \frac{ds}{dt}\quad (15)$$

と表現出来ることに留意すると、各 e_s, e_x, e_y 成分に付いて次式のように書き下せる。

$$(2Gx' + G'x + G\kappa y) - \frac{1}{2} \frac{\Sigma'}{\Sigma} (1 + Gx) = \frac{q}{p} \sqrt{\Sigma} (B_y(x' + \kappa y) - B_x(y' - \kappa x))\quad (16)$$

$$(x'' - \kappa^2 x + \kappa' y + 2\kappa y' - G^2 x - G) - \frac{1}{2} \frac{\Sigma'}{\Sigma} (x' + \kappa y) = \frac{q}{p} \sqrt{\Sigma} (B_s(y' - \kappa x) - B_y(1 + Gx))\quad (17)$$

$$(y'' - \kappa^2 y - \kappa' x - 2\kappa x') - \frac{1}{2} \frac{\Sigma'}{\Sigma} (y' - \kappa x) = \frac{q}{p} \sqrt{\Sigma} (B_x(1 + Gx) - B_s(x' + \kappa y))\quad (18)$$

$$B = B_s e_s + B_x e_x + B_y e_y, \quad \Sigma = (1 + Gx)^2 + (x' + \kappa y)^2 + (y' - \kappa x)^2$$

右辺に現れる定数 q/p は、静磁場 B の中で電荷 q 、運動量 p の粒子が円運動する際の曲率半径 ρ を用いて次のように定義し直すことが出来る。 $B\rho$ は、Magnetic Rigidity と呼ばれ、磁場中での軌道の剛性を表している。

$$\frac{1}{B\rho} = \frac{q}{p}\quad (19)$$

ds/dt に対する仮定から、未知量 x, y, t は s の一価関数で表現されるので、曲線座標系での三本の運動方程式 (16), (17), (18) のうち式 (16) を用いて、 ds/dt 由来する Σ'/Σ を消去すると、曲線座標 $x(s)$ と $y(s)$ に関する運動方程式が得られる。

$$(x'' - \kappa^2 x + \kappa' y + 2\kappa y' - G^2 x - G) - \frac{x' + \kappa y}{1 + Gx} (2Gx' + G'x + G\kappa y) - \frac{\sqrt{\Sigma}}{B\rho} \left(B_s(y' - \kappa x) + B_x \frac{(x' + \kappa y)(y' - \kappa x)}{1 + Gx} - B_y \frac{(1 + Gx)^2 + (x' + \kappa y)^2}{1 + Gx} \right) = 0 \quad (20)$$

$$(y'' - \kappa^2 y - \kappa' x - 2\kappa x') - \frac{y' - \kappa x}{1 + Gx} (2Gx' + G'x + G\kappa y) - \frac{\sqrt{\Sigma}}{B\rho} \left(-B_s(x' + \kappa y) + B_x \frac{(1 + Gx)^2 + (y' - \kappa x)^2}{1 + Gx} - B_y \frac{(x' + \kappa y)(y' - \kappa x)}{1 + Gx} \right) = 0 \quad (21)$$

2.4 線形化された運動方程式

基準曲線近傍での運動を解析するために、 x, y, x', y' を微小量とみなし式 (20), (21) を二次微小量まで展開すると次式が得られる。

$$x'' + \left(2\frac{B_{y0}}{B\rho} - G \right) Gx + \left(\frac{B_{y0}}{B\rho} - G \right) + \frac{1}{B\rho} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} x + \frac{\partial B_y}{\partial y} y - B_{s0} y' \right) - \kappa^2 x + \kappa' y + 2\kappa y' + \kappa \frac{B_{s0}}{B\rho} x - (2Gx' + G'x + G\kappa y)(x' + \kappa y) + \frac{B_{s0}}{B\rho} G\kappa x^2 + \frac{B_{y0}}{B\rho} \left(G^2 x^2 + \frac{3}{2}(x' + \kappa y)^2 + \frac{1}{2}(y' - \kappa x)^2 \right) - \frac{B_{s0}}{B\rho} Gxy' - \frac{B_{x0}}{B\rho} (x' + \kappa y)(y' - \kappa x) - \frac{1}{B\rho} \left(\frac{\partial B_s}{\partial x} x + \frac{\partial B_s}{\partial y} y \right) (y' - \kappa x) + \frac{2}{B\rho} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} x + \frac{\partial B_y}{\partial y} y \right) Gx + \frac{1}{B\rho} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} x^2 + 2\frac{\partial^2 B_y}{\partial x \partial y} xy + \frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} y^2 \right) = 0 \quad (22)$$

$$y'' - \frac{B_{x0}}{B\rho} (1 + 2Gx) - \frac{1}{B\rho} \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} x + \frac{\partial B_x}{\partial y} y - B_{s0} x' \right) - \kappa^2 y - \kappa' x - 2\kappa x' + \kappa \frac{B_{s0}}{B\rho} y - (2Gx' + G'x + G\kappa y)(y' - \kappa x) + \frac{B_{s0}}{B\rho} G\kappa xy + \frac{B_{x0}}{B\rho} \left(G^2 x^2 + \frac{3}{2}(x' + \kappa y)^2 + \frac{1}{2}(y' - \kappa x)^2 \right) + \frac{B_{s0}}{B\rho} Gxx' + \frac{B_{y0}}{B\rho} (x' + \kappa y)(y' - \kappa x) + \frac{1}{B\rho} \left(\frac{\partial B_s}{\partial x} x + \frac{\partial B_s}{\partial y} y \right) (x' + \kappa y) - \frac{2}{B\rho} \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} x + \frac{\partial B_x}{\partial y} y \right) Gx - \frac{1}{B\rho} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} x^2 + 2\frac{\partial^2 B_x}{\partial x \partial y} xy + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} y^2 \right) = 0 \quad (23)$$

ただし、 B_{s0}, B_{x0}, B_{y0} は $x = y = 0$ での磁場の各成分、 B_s, B_x, B_y の偏微分は $x = y = 0$ での微係数を表す。ここで、静磁場 B は、電流が存在しない基準曲線近傍では $\nabla \times B = 0, \nabla \cdot B = 0$ を満たす。したがって、曲線座標系での成分表示には以下の恒等式が成立している。

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = 0 \quad (24)$$

$$\frac{\partial B_s}{\partial y} - \frac{1}{1 + Gx} \left(\frac{\partial B_y}{\partial s} - \kappa B_x - \kappa y \frac{\partial B_y}{\partial x} + \kappa x \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial B_s}{\partial x} - \frac{1}{1 + Gx} \left(\frac{\partial B_x}{\partial s} - GB_s + \kappa B_y - \kappa y \frac{\partial B_x}{\partial x} + \kappa x \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = 0 \quad (26)$$

$$\frac{1}{1 + Gx} \left(\frac{\partial B_s}{\partial s} - \kappa y \frac{\partial B_s}{\partial x} + \kappa x \frac{\partial B_s}{\partial y} \right) + \frac{1}{1 + Gx} \frac{\partial}{\partial x} ((1 + Gx)B_x) + \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0 \quad (27)$$

ここで、 B_x と B_y の微分に対して以下の量を導入する。

$$K_n \equiv \frac{1}{B\rho} \frac{\partial^n B_y}{\partial x^n} \Big|_{x=y=0}, \quad \bar{K}_n \equiv \frac{1}{B\rho} \frac{\partial^n B_x}{\partial x^n} \Big|_{x=y=0} \quad (28)$$

式(28)で定義される K_n と \bar{K}_n は、曲率とねじれが無い座標系 ($G = \kappa = 0$) における s 依存性を持たない磁場に対する以下の Multipole 展開の基底に対する特徴量となるように選んでいる。

$$B = B_{s0}e_s + B\rho \sum_{n=0}^{\infty} \left(e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \text{Re} \left[\frac{K_n + i\bar{K}_n (x + iy)^{n+1}}{i (n+1)!} \right] \quad (29)$$

したがって、運動方程式(22),(23)は恒等式(24-27)と K_n, \bar{K}_n を用いて以下の形に書き直すことが出来る。

$$\begin{aligned} x'' + (2K_0 - G)Gx + (K_0 - G) + K_1x - (\bar{K}_1 + \bar{K}_0G)y - \kappa^2x + \kappa'y + 2\kappa y' - \frac{B_{s0}}{B\rho}(y' - \kappa x) - \frac{1}{B\rho} \frac{\partial B_s}{\partial s} y \\ - (2Gx' + G'x + G\kappa y)(x' + \kappa y) + K_0 \left(G^2x^2 + \frac{3}{2}(x' + \kappa y)^2 + \frac{(y' - \kappa x)^2}{2} \right) \\ + K_2 \frac{x^2 - y^2}{2} - \bar{K}_2xy + K_1G \frac{4x^2 - y^2}{2} - (3\bar{K}_1 - K_0G + 2\bar{K}_0G)Gxy \\ - \bar{K}_0(x' + \kappa y)(y' - \kappa x) - \frac{B_{s0}}{B\rho}Gx(y' - \kappa x) - \frac{1}{B\rho} \left(\frac{\partial B_s}{\partial x}x + \frac{\partial B_s}{\partial y}y \right) (y' - \kappa x) \\ + \frac{1}{B\rho} \left(\frac{\partial B_s}{\partial x}\kappa - \frac{\partial^2 B_s}{\partial x \partial y} \right) \frac{y^2}{2} - \frac{1}{B\rho} \left(\frac{\partial B_s}{\partial s}G + \frac{\partial B_s}{\partial y}\kappa + \frac{\partial^2 B_s}{\partial s \partial x} \right) xy = 0 \quad (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' - \bar{K}_0(1 + 2Gx) - \bar{K}_1x - K_1y - \kappa^2y - \kappa'x - 2\kappa x' + \frac{B_{s0}}{B\rho}(x' + \kappa y) \\ - (2Gx' + G'x + G\kappa y)(y' - \kappa x) + \bar{K}_0 \left(G^2x^2 + \frac{3}{2}(x' + \kappa y)^2 + \frac{1}{2}(y' - \kappa x)^2 \right) \\ - K_2xy - \bar{K}_2 \frac{x^2 - y^2}{2} - \bar{K}_1G \frac{4x^2 - y^2}{2} - 2K_1Gxy - K_0G^2 \frac{y^2}{2} + K_0(x' + \kappa y)(y' - \kappa x) \\ + \frac{B_{s0}}{B\rho}Gx(x' + \kappa y) + \frac{1}{B\rho} \left(\frac{\partial B_s}{\partial x}x + \frac{\partial B_s}{\partial y}y \right) (x' + \kappa y) - \frac{1}{B\rho} \left(\frac{\partial B_s}{\partial s}G - \frac{\partial B_s}{\partial y}\kappa - \frac{\partial^2 B_s}{\partial s \partial x} \right) \frac{y^2}{2} = 0 \quad (31) \end{aligned}$$

ここで、磁場 B に対して s 方向成分の一様性

$$B_s(s, x, y) = K_s B\rho \quad (32)$$

を仮定すると、 B_s の微係数に関する項は全て零になる。さらに、曲線座標系の基準曲線 $r_0(s)$ に運動方程式の解を選ぶと、式(30),(31)は $x(s) = y(s) = 0$ を満たすので、基準曲線上の磁場は次の条件を満たさねばならない。

$$\bar{K}_0 = 0, \quad K_0 = G \quad (33)$$

ここで、条件 $K_0 = G$ に現れる $K_0 = B_{y0}/B\rho$ は基準曲線上を走る粒子の Magnetic Rigidity $B\rho$ で成り立つが、一般の異なる運動量を持った粒子では成り立たない点に注意が必要である。以上の二つの仮定の元で、式(30),(31)は次のように簡略化される。

$$\begin{aligned} x'' + (K_0 - G) + (2K_0 - G)Gx + (K_1 - \kappa^2 + K_s\kappa)x - (\bar{K}_1 - \kappa')y - (K_s - 2\kappa)y' \\ - (2Gx' + G'x + G\kappa y)(x' + \kappa y) + K_0 \left(G^2x^2 + \frac{3}{2}(x' + \kappa y)^2 + \frac{(y' - \kappa x)^2}{2} \right) \\ + K_2 \frac{x^2 - y^2}{2} - \bar{K}_2xy + K_1G \frac{4x^2 - y^2}{2} - (3\bar{K}_1 - K_0G)Gxy - K_sGx(y' - \kappa x) = 0 \quad (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' - (K_1 + \kappa^2 - K_s\kappa)y - (\bar{K}_1 + \kappa')x + (K_s - 2\kappa)x' + K_sGx(x' + \kappa y) - (2Gx' + G'x + G\kappa y)(y' - \kappa x) \\ - K_2xy - \bar{K}_2 \frac{x^2 - y^2}{2} - \bar{K}_1G \frac{4x^2 - y^2}{2} - 2K_1Gxy - K_0G^2 \frac{y^2}{2} + K_0(x' + \kappa y)(y' - \kappa x) = 0 \quad (35) \end{aligned}$$

式 (34),(35) を眺めると線形運動の範囲では、次の条件が成立する場合は $x(s)$ と $y(s)$ が分離されることが判る。

$$\kappa = \frac{K_s}{2}, \quad \bar{K}_1 = \kappa' = 0 \quad (36)$$

たとえば、曲率が零の場合、Solenoid 磁場 K_s がねじれ率に対し不変であり、Solenoid 磁場で決まるねじれ率に対して $\bar{K}_1 = 0$ 、つまり座標系のねじれに沿って Quadrupole 磁場が回転している場合に運動の分離が実現される。また、線形の次の摂動では、位置 x, y に依存する Sextupole 磁場由来 (K_2, \bar{K}_2) の二次項と速度 x', y' に依存する Dipole 磁場由来 (K_0) の二次項が基本であり、座標系がねじれているとねじれ率 κ を通して Dipole 磁場由来の位置依存項が入ってくる。さらに、座標系が曲がっている場合には、曲率 G に応じて Quadrupole 磁場 (K_1, \bar{K}_1) や Dipole 磁場 (K_0, \bar{K}_0) が Sextupole 磁場由来の二次項に紛れ込んでくること判る。

改めて、条件 (36) の元での運動方程式を書き下すと以下のように一般化出来る。

$$\chi'' + K_x(s)\chi + H_x(s) = 0 \quad \left(\begin{array}{l} K_x(s) = K_1 + \frac{K_s^2}{4} + (2K_0 - G)G, \quad H_x(s) = K_0 - G \\ K_y(s) = -K_1 + \frac{K_s^2}{4}, \quad H_y(s) = 0 \end{array} \right) \quad (37)$$

特に、運動量が基準軌道と同じ場合 ($B\rho = B\rho_{ref}$) には次式が成り立つ。

$$K_x(s) = K_1 + \frac{K_s^2}{4} + G^2, \quad H_x(s) = 0 \quad (38)$$

2.5 Hill 方程式

基準曲線が長さ C の閉曲線であるとき、運動量偏差を含まない線形化された運動方程式 (37) は、変係数二階微分同次方程式で表わすことが出来る。

$$\frac{d^2\chi(s)}{ds^2} + K(s)\chi(s) = 0, \quad K(s+C) = K(s) \quad (39)$$

また、周期性の無い場合に付いては、形式的には $C \rightarrow \infty$ の極限として表現できる。この同次方程式は、Hill 方程式と呼ばれ Floquet の定理⁶によって一般解は二つの任意定数 A, θ と二つの関数 $\beta(s), \phi(s)$ を用いて次のような形で書き下せることが保証されている。

$$\chi(s) = A\sqrt{\beta(s)} \cos(\phi(s) - \theta), \quad \beta(s+C) = \beta(s) \quad (40)$$

ビーム物理ではこの振動解を Betatron 振動と呼び、振動を特徴付けている関数 $\beta(s)$ を β Function、 $\phi(s)$ を Phase Advance と呼称する。

次に、 $\beta(s)$ と $\phi(s)$ の具体的な表式を得てみよう。式 (40) を式 (39) に代入すると次式が得られる。

$$0 = \chi''(s) + K(s)\chi(s) = A \left(-\frac{1}{4}\beta^{-\frac{3}{2}}(\beta')^2 + \frac{1}{2}\beta^{-\frac{1}{2}}\beta'' - \beta^{\frac{1}{2}}(\phi')^2 + K(s)\beta^{\frac{1}{2}} \right) \cos(\phi - \theta) \\ + A(-\beta^{-\frac{1}{2}}\beta'\phi' - \beta^{\frac{1}{2}}\phi'') \sin(\phi - \theta) \quad (41)$$

式 (41) は、任意の A, θ で成り立つので、 $\cos(\phi - \theta), \sin(\phi - \theta)$ の係数から

$$\left(\frac{1}{2}\beta'' - \frac{1}{4}\beta^{-1}(\beta')^2 - (\phi')^2\beta + K(s)\beta \right) \beta^{-\frac{1}{2}} = 0 \quad (42)$$

$$(\beta'\phi' + \beta\phi'')\beta^{-\frac{1}{2}} = 0 \quad (43)$$

⁶並進対称性を持った Hamiltonian 系の解の性質という意味では、Bloch の定理として知られている定理と同じものである

を得る。ここで、式 (43) は次のように変形出来る。

$$(\beta\phi')'\beta^{-\frac{1}{2}} = 0 \quad (44)$$

従って、振幅零の自明な解 $\beta(s) = 0$ と $\beta \rightarrow \infty$ なる解を除外すれば、式 (44) より $\beta\phi'$ は定数となる。 c を積分定数として、式 (44) の解

$$\phi' = \frac{c}{\beta} \quad (45)$$

を式 (42) へ代入し β の有界かつ非零であることを用いて次式が得られる。

$$\frac{1}{2} \frac{\beta''}{\beta} - \frac{1}{4} \left(\frac{\beta'}{\beta} \right)^2 - \left(\frac{c}{\beta} \right)^2 + K(s) = 0 \quad (46)$$

一般解 (40) では β の定数倍に対する不定性があるので、積分定数 c が零で無い場合は式 (46) に対する β のスケール変換 ($\beta \rightarrow c\beta$) を適用すると式 (46) と式 (44) から

$$\frac{1}{2} \frac{\beta''(s)}{\beta(s)} - \frac{1}{4} \left(\frac{\beta'(s)}{\beta(s)} \right)^2 - \left(\frac{1}{\beta(s)} \right)^2 + K(s) = 0, \quad \phi'(s) = \frac{1}{\beta(s)} \quad (47)$$

が得られる。対して、積分定数 c が零の場合は、 $\cos(\phi - \theta)$ が定数となり $\sqrt{\beta(s)}$ 自体が Hill 方程式の解となるので、Floquet の定理に矛盾する。別の表現をすれば、 $c \rightarrow 0$ の極限は β を $1/c$ でスケール変換し $\beta \rightarrow \infty$ とする極限に対応し、有意な解は存在しない。また、式 (47) より $K(s)$ が有界であれば $\beta(s)$ が零近傍で $K(s)$ は無視すること⁷ができ $\beta(s) \in \mathbf{R}$ であれば⁸、 $\beta(s)$ は零となることは出来ない。従って、 $\beta(s)$ の符号が変わることはなく $\phi(s)$ は単調関数となる。 $\beta(s)$ の符号の選択には任意性があるので通常は $\beta(s) > 0$ とする。

したがって、Floquet の定理に依れば、Hill 方程式 (39) の一般解は式 (40) の形に書き下せ、二つの関数は $\beta(s), \phi(s)$ は式 (47) を満足する。式 (40) の形から、これは一種の変形された調和振動⁹と解釈でき、 $\sqrt{\beta(s)}$ は場所 s での振幅を表わし、 $\phi(s)$ は振動の位相を表現している。式 (47) の後半部からは、位相の進みが早い場所の振幅が小さいことが見て取れる。また、一周期分の位相の進みは $K(s)$ に固有な量で、

$$\mu = \oint_C \frac{ds'}{\beta(s')} = \int_s^{s+C} \frac{ds'}{\beta(s')} \quad (\forall s \in \mathbf{R}) \quad (48)$$

と、表わすことが出来る。特に式 (48) の μ を 2π で割ったものは $K(s)$ の一周期当たりの Betatron 振動数を表わし、Betatron Tune と呼ばれる。

$$\nu = \frac{\mu}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{ds'}{\beta(s')} \quad (49)$$

2.6 Transfer Matrix

前節では、線形化された運動方程式の一般解が式 (40) の形で書けることを示したが、これを (χ, χ') 空間上の写像として表現してみよう。式 (40) とその微分形を用いて $(\chi(s), \chi'(s))$ は次式のように表わせる。

$$\begin{pmatrix} \chi(s) \\ \chi'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\beta(s)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\beta(s)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi(s) & \sin \phi(s) \\ -\sin \phi(s) + \frac{\beta'}{2} \cos \phi(s) & \cos \phi(s) + \frac{\beta'}{2} \sin \phi(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \cos \theta \\ A \sin \theta \end{pmatrix} \quad (50)$$

逆行列を作用させると次式が得られる。

$$\begin{pmatrix} A \cos \theta \\ A \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi(s) + \frac{\beta'}{2} \sin \phi(s) & -\sin \phi(s) \\ \sin \phi(s) - \frac{\beta'}{2} \cos \phi(s) & \cos \phi(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\beta(s)}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\beta(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi(s) \\ \chi'(s) \end{pmatrix} \quad (51)$$

⁷ $|K(s)\epsilon^2| \ll 1$ となる $\epsilon > 0$ を選べば、 $|\beta(s)| < \epsilon$ の領域では $K(s)$ は $1/\beta(s)^2$ に対して十分小さい

⁸ 逆に $\beta(s)$ が実数でない解が存在すれば、 $\phi(s)$ が虚数部を持ち Betatron 振動の減衰や発散が含まれる

⁹ $K(s) = K > 0$ であれば、 $\beta(s) = 1/\sqrt{K}$ 、 $\phi' = \sqrt{K}$ となり調和振動子そのものである

任意の2点 s_1, s_2 での $\beta(s), \phi(s), x(s), x'(s)$ の値を $s = s_1$ にて $\beta(s) = \beta_1, \phi(s) = \phi_1, \chi(s) = \chi_1, \chi'(s) = \chi'_1$, $s = s_2$ にて $\beta(s) = \beta_2, \phi(s) = \phi_2, \chi(s) = \chi_2, \chi'(s) = \chi'_2$ と定義すると (χ_1, χ'_1) から (χ_2, χ'_2) への写像は式 (50), (51) を用いて次のように書き下せる。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \chi_2 \\ \chi'_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{\beta_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\beta_2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi_2 & \sin \phi_2 \\ -\sin \phi_2 + \frac{\beta'_2}{2} \cos \phi_2 & \cos \phi_2 + \frac{\beta'_2}{2} \sin \phi_2 \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} \cos \phi_1 + \frac{\beta'_1}{2} \sin \phi_1 & -\sin \phi_1 \\ \sin \phi_1 - \frac{\beta'_1}{2} \cos \phi_1 & \cos \phi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\beta_1}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\beta_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi'_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{\beta_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\beta_2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Delta\phi - \frac{\beta'_1}{2} \sin \Delta\phi & \sin \Delta\phi \\ -\left(1 + \frac{\beta'_1}{2} \frac{\beta'_2}{2}\right) \sin \Delta\phi + \left(\frac{\beta'_2}{2} - \frac{\beta'_1}{2}\right) \cos \Delta\phi & \cos \Delta\phi + \frac{\beta'_2}{2} \sin \Delta\phi \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\beta_1}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\beta_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi'_1 \end{pmatrix} \quad (52) \end{aligned}$$

ここで、 $\Delta\phi$ は位相差 $\phi_2 - \phi_1$ である。したがって、 (χ_1, χ'_1) から (χ_2, χ'_2) への写像は次のように書き下せる。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \chi_2 \\ \chi'_2 \end{pmatrix} &= M(s_2, s_1) \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi'_1 \end{pmatrix} \\ M(s_1|s_2) &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} (\cos \Delta\phi + \alpha_1 \sin \Delta\phi) & \sqrt{\beta_1 \beta_2} \sin \Delta\phi \\ -\frac{1+\alpha_1 \alpha_2}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} \sin \Delta\phi + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} \cos \Delta\phi & \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} (\cos \Delta\phi - \alpha_2 \sin \Delta\phi) \end{pmatrix}, \quad \alpha(s) = -\frac{\beta'(s)}{2} \quad (53) \end{aligned}$$

この式 (53) で定義される写像行列 $M(s_2, s_1)$ を s_1 から s_2 への Transfer Matrix (転送行列) と呼ぶ。その定義から判る通り Transfer Matrix の行列式は 1 であり、 (χ, χ') 空間上での面積を保存する。

$$\forall s_1, s_2 \in \mathbf{R} \quad \det M(s_2, s_1) = 1 \quad (54)$$

特に、点 s から点 $s + C$ への $K(s)$ の一周期分の Transfer Matrix は $\beta(s)$ の周期性ゆえに

$$M_{\text{revolution}}(s) = M(s + C, s) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\nu + \alpha(s) \sin 2\pi\nu & \beta(s) \sin 2\pi\nu \\ -\frac{1+\alpha(s)^2}{\beta(s)} \sin 2\pi\nu & \cos 2\pi\nu - \alpha(s) \sin 2\pi\nu \end{pmatrix} \quad (55)$$

と書き下すことができる。従って、式 (55) は、写像 $M_{\text{revolution}}(s)$ から Betatron Tune ν と点 s での β 関数及び、その微係数 $\alpha(s)$ を決定することが出来ることを意味し実用上極めて重要である。

2.7 Courant-Snyder Invariant

ある点 s での (χ, χ') 空間を通過する軌道を周回ごとに重ね合わせて作られる点の集合は、式 (51) と式 (53) で導入した記号 $\alpha(s)$ を用いた以下の二次形式を満足する。

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} \chi(s) & \chi'(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\beta(s)}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\beta(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi(s) + \frac{\beta'}{2} \sin \phi(s) & \sin \phi(s) - \frac{\beta'}{2} \cos \phi(s) \\ -\sin \phi(s) & \cos \phi(s) \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} \cos \phi(s) + \frac{\beta'}{2} \sin \phi(s) & -\sin \phi(s) \\ \sin \phi(s) - \frac{\beta'}{2} \cos \phi(s) & \cos \phi(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\beta(s)}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\beta(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi(s) \\ \chi'(s) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \chi(s) & \chi'(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\alpha(s)^2}{\beta(s)} & \alpha(s) \\ \alpha(s) & \beta(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi(s) \\ \chi'(s) \end{pmatrix} \quad (56) \end{aligned}$$

一般に、Betatron 振動が安定な場合は $\beta(s) > 0$ が成り立つように $\beta(s)$ の符号を選べるので、式 (56) は正定値な二次形式となり、 $(\chi(s), \chi'(s))$ は楕円曲線に属す。ここで、 $\chi(s)^2$ の係数を $\gamma(s)$ と表示した楕円曲線の

標準形は

$$\begin{aligned}\gamma(s)\chi(s)^2 + 2\alpha(s)\chi(s)\chi'(s) + \beta(s)\chi'(s)^2 &= A^2 \\ \alpha(s) &= -\frac{\beta'(s)}{2}, \quad \gamma(s) = \frac{1 + \alpha(s)^2}{\beta(s)}\end{aligned}\tag{57}$$

で与えられる。式 (57) に現れる A は、Betatron 振動を特徴付ける Hill 方程式の積分定数である。ここで、 A を力学的視点で解釈し直すと、これは Betatron 振動の保存量と再解釈でき、Courant-Snyder Invariant と呼ばれている。また、点 s での楕円曲線の形状を決定する係数 $\alpha(s), \beta(s), \gamma(s)$ は Twiss Parameter と呼ばれる。Twiss Parameter を用いて、式 (55) を書き直すと

$$M_{revolution}(s) = I \cos 2\pi\nu + \begin{pmatrix} \alpha(s) & \beta(s) \\ -\gamma(s) & -\alpha(s) \end{pmatrix} \sin 2\pi\nu\tag{58}$$

が得られる。したがって、Twiss Parameter の変換式は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}M_{revolution}(s_2) &= M(s_2, s_1)M_{revolution}(s_1)M^{-1}(s_2, s_1) \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha(s_2) & \beta(s_2) \\ -\gamma(s_2) & -\alpha(s_2) \end{pmatrix} &= M(s_2, s_1) \begin{pmatrix} \alpha(s_1) & \beta(s_1) \\ -\gamma(s_1) & -\alpha(s_1) \end{pmatrix} M^{-1}(s_2, s_1)\end{aligned}\tag{59}$$

2.8 Symplectic Condition

すでに、 (χ, χ') 空間で定義される 2×2 Transfer Matrix に付いては、式 (53) の定義から $\det M = 1$ という性質があることが判っているが、より一般には自由度 $2N$ の位相空間¹⁰で定義された $2N \times 2N$ Transfer Matrix M は Symplectic Condition と呼ばれる以下の条件を満たすことが知られている¹¹。

$$MJ_{2N}M^T = J_{2N}\tag{60}$$

ここで、 J_{2N} は以下で定義される 2×2 行列 J_2 を対角要素とするブロック対角行列である。

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\tag{61}$$

特に、 2×2 行列の場合には以下の恒等式が成立するので、 M の Symplectic Condition と $\det M = 1$ は等価である。

$$MJ_2M^T = \det M J_2\tag{62}$$

また、行列 J_{2N} は以下の性質を満足する。

$$J_{2N}J_{2N} = -I, \quad J_{2N}^{-1} = J_{2N}^T = -J_{2N}\tag{63}$$

もし、Transfer Matrix が Symplectic Condition を満たすなら、Transfer Matrix を定義している空間を位相空間とみなすことが可能で、正準理論から得られる様々な帰結を適用することが出来る。式 (53) で定義された (χ, χ') 空間上の 2×2 Transfer Matrix は、式 (54) の性質から、Symplectic Condition を満足している。それでは、 (x, x', y, y') 空間で定義される $x - y$ 結合を含んだより一般的な 4×4 Transfer Matrix が、Symplectic Condition を満足するかどうかを調べてみよう。始めに、式 (30), (31) の線形項から、点 s から点 $s + ds$ まで

¹⁰ N 個の座標と、それと正準共役な N 個の正準運動量で張られる $2N$ 次元の空間のこと (正準座標系とも呼ばれる)

¹¹ 正準理論によれば、正準座標系での時間発展は系を記述する Hamiltonian 演算子による無限小正準変換の重ね合わせで記述される。無限小正準変換は、その定義から Symplectic Condition を満足している

の 4×4 無限小 Transfer Matrix を定義すると、

$$M(s+ds, s) = \begin{pmatrix} 1 & ds & 0 & 0 \\ -(K_1 - \kappa^2 + K_s \kappa + G^2)ds & 1 & (\bar{K}_1 - \kappa' + K'_s)ds & (K_s - 2\kappa)ds \\ 0 & 0 & 1 & ds \\ (\bar{K}_1 + \kappa')ds & -(K_s - 2\kappa)ds & (K_1 + \kappa^2 - K_s \kappa)ds & 1 \end{pmatrix} \quad (64)$$

となる。ただし、 $\bar{K}_0 = 0, K_0 = G$ を仮定している。定義より明らかに

$$\det M = 1 + O(ds^2) \quad (65)$$

が成り立っている。 MJ_4M^T を書き下すと以下の形になる。

$$M(s+ds, s)J_4M(s+ds, s)^T = J_4 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -(K_s - 2\kappa) \\ 0 & 0 & -(K_s - 2\kappa) & (K_s - 2\kappa)' \\ 0 & (K_s - 2\kappa) & 0 & 0 \\ (K_s - 2\kappa) & -(K_s - 2\kappa)' & 0 & 0 \end{pmatrix} ds + O(ds^2) \quad (66)$$

よって、 $O(ds)$ の項は、座標系を $\kappa = K_s/2 = B_s/2B\rho$ となるように選べば全て消すことが出来る。無限小の Transfer Matrix から、有限な長さ Δs の Transfer Matrix は

$$M(s + \Delta s, s) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N M\left(s + \frac{i}{N}\Delta s, s + \frac{i-1}{N}\Delta s\right) \quad (67)$$

で構築できる。したがって、行列積 $M(s + \Delta s, s)J_4M(s + \Delta s, s)^T$ は無限小 Transfer Matrix $M(s + ds, s)$ による以下の展開形へ書き下すことが出来る。

$$M(s + \Delta s, s)J_4M(s + \Delta s, s)^T = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\prod_{i=1}^N M\left(s + \frac{i}{N}\Delta s, s + \frac{i-1}{N}\Delta s\right) \right) J_4 \left(\prod_{i=N}^1 M\left(s + \frac{i}{N}\Delta s, s + \frac{i-1}{N}\Delta s\right)^T \right) \quad (68)$$

式 (66) と無限小 Transfer Matrix が単位行列と $O(ds)$ の行列の和に分解出来ることに留意して、式 (68) の右辺 $2N + 1$ 個の行列積の二次微小量までの展開項数を数えると、一個の $O(1)$ 項 J_4 、 N 個の $O(ds)$ 項、 N^2 個の $O(ds^2)$ 項が見付かる。 $O(ds^2)$ の項数の内訳は、 N 個が式 (66) の二次項に由来し、残りの $N(N-1)$ 個は式 (66) の一次項と無限小 Transfer Matrix の ds 成分との積に由来する。よって、一般には式 (66) の一次微小量に由来する成分は、極限 $N \rightarrow \infty$ で消えずに残る。以上の考察に基づいて、 $M(s_2, s_1)J_4M(s_2, s_1)^T$ を積分表示で書き下すと、次の形になる。

$$M(s_2, s_1)J_4M(s_2, s_1)^T = J_4 + \int_{s_1}^{s_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -(K_s - 2\kappa) \\ 0 & 0 & -(K_s - 2\kappa) & (K_s - 2\kappa)' \\ 0 & (K_s - 2\kappa) & 0 & 0 \\ (K_s - 2\kappa) & -(K_s - 2\kappa)' & 0 & 0 \end{pmatrix} ds + \iint \dots ds^2 + \dots \quad (69)$$

ここで、続いている多重積分による展開項も全て $K_s - 2\kappa$ に関する積分である。

したがって、式 (67) で定義される (x, x', y, y') 空間での Transfer Matrix が Symplectic Condition を満たすためには $K_s(s) = 2\kappa(s)$ となるように座標系が選ばれる必要がある。一般に、曲率を持たない座標系では、ねじれ率 κ を任意に選ぶことが出来るので、Transfer Matrix が Symplectic Condition を満たす座標系が常に存在

する。逆に、基準曲線が曲率を持ち s 方向の磁場やねじれ率が存在する場合、Transfer Matrix の Symplectic 性は自明ではない。また、 s 方向の磁場が存在する $K_s \neq 0$ の場合には、運動量 ($B\rho$) の異なる粒子の Transfer Matrix は、曲線座標系を取り換えない限り、必ず Symplectic Condition を破る。

こうした、運動量や座標系を定める任意パラメータに Symplectic Condition が依存するということは、Transfer Matrix を定義している空間 (x, x', y, y') が正準座標系では無いこと、言い替えれば x' と y' が x と y 正準運動量では無いことを意味している。

2.9 Coupling Parameter

Symplectic Condition を満たしていると言う仮定のもとで、一般の $x-y$ 結合を持った 4×4 Transfer Matrix M について運動を分離する座標変換が存在するかどうかを調べてみよう。一般に行列 M に対しては Unitary 行行列 U を用いた固有値分解が存在する。

$$M = UWU^{-1}, \quad U^*U = I \quad (70)$$

安定な $2N \times 2N$ Transfer Matrix の固有値 λ_i に対しては下記の条件が自動的に成立する。

$$\det M = \det W = \prod_i \lambda_i = 1, \quad \forall \lambda_i \quad |\lambda_i| \leq 1 \Rightarrow \forall_i \quad |\lambda_i| = 1 \quad (71)$$

さらに、Transfer Matrix は実行列なので、固有値 λ_i の複素共役 $\bar{\lambda}_i$ も固有値である。

$$M \in \mathbf{R} \Rightarrow M \mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i \Leftrightarrow M \bar{\mathbf{x}}_i = \bar{\lambda}_i \bar{\mathbf{x}}_i \quad (72)$$

さて、固有値の縮退については $O(\epsilon)$ の距離離れた縮退の無い固有値の極限 $\epsilon \rightarrow 0$ とみなすことができるので、これより先で固有値に縮退が無いことを仮定しても一般性を失わない。また、固有値の並べ方には自由度があるので、 W の対角成分に固有値 λ_i とその複素共役 $\bar{\lambda}_i$ がペアになるように並べることとする。したがって、 W を 2×2 のブロック対角行列とみなすと i 番目の部分対角行列 W_i は式 (62) より Symplectic Condition を満たす。したがって、 W も Symplectic Condition を満足する。

$$W J_{2N} W^T = \begin{pmatrix} W_1 & & \\ & \ddots & \\ & & W_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_2 & & \\ & \ddots & \\ & & J_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1^T & & \\ & \ddots & \\ & & W_N^T \end{pmatrix} = J_{2N} \quad (73)$$

さらに、式 (71) より、以下の恒等式が成立する。

$$W^{-1} = \bar{W} \quad (74)$$

以上の性質を踏まえて、 M の Symplectic Condition を考えてみよう。

$$J_{2N} = M J_{2N} M^T = UWU^{-1} J_{2N} (U^{-1})^T W U^T \Rightarrow U^{-1} J_{2N} (U^T)^{-1} \bar{W} = W U^{-1} J_{2N} (U^T)^{-1} \quad (75)$$

行行列 W は対角行列なので、自然な基底 e_i に対し固有値 λ_i を持つことに注意して、行行列 $U^{-1} J_{2N} (U^T)^{-1}$ の i 行 j 列成分を抽出すると、

$$e_i^T U^{-1} J_{2N} (U^T)^{-1} \bar{\lambda}_j e_j = \lambda_i e_i^T U^{-1} J_{2N} (U^T)^{-1} e_j \Rightarrow (\lambda_i - \bar{\lambda}_j) e_i^T (U^{-1} J_{2N} (U^T)^{-1}) e_j = 0 \quad (76)$$

が得られる。したがって、固有値が縮退していないとの仮定から行行列 $U^{-1} J_{2N} (U^T)^{-1}$ の i 行 j 列成分は λ_i, λ_j が複素共役でなければ零となる。ゆえに、行行列 $U^{-1} J_{2N} (U^T)^{-1}$ の零以外の値を取り得る要素はただか $2N$ 個しか存在せず、 $\det U^{-1} J_{2N} (U^T)^{-1} = 1$ が成り立つので、 λ_i, λ_j が複素共役となる要素は全て非零となる。さらに、 J_{2N} の性質から転置行列との対応が与えられる。

$$(U^{-1} J_{2N} (U^T)^{-1})^T = U^{-1} J_{2N}^T (U^T)^{-1} = -U^{-1} J_{2N} (U^T)^{-1} \quad (77)$$

$$\Rightarrow e_i^T U^{-1} J_{2N} (U^T)^{-1} e_j = -e_j^T U^{-1} J_{2N} (U^T)^{-1} e_i \quad (78)$$

さて、ここで $\det S \neq 0$ を満たす対角行列を用いて式 (70) を次のように書き直すことが出来る。

$$M = USS^{-1}WSS^{-1}U^{-1} = (US)W(US)^{-1} \quad (79)$$

これを用いて、式 (76) の行列 U を $V = US$ で置き換えると、

$$e_i^T V^{-1} J_{2N} (V^T)^{-1} e_j = S_{ii}^{-1} S_{jj}^{-1} e_i^T U^{-1} J_{2N} (U^T)^{-1} e_j, \quad V = US \quad (80)$$

が得られる。したがって、以下の定理が成り立ち、安定で Symplectic な Transfer Matrix を Symplectic な対角行列へ対角化する Symplectic な行列 V が存在することが保証される。

$$Eq(78), Eq(80) \Rightarrow \exists S \quad V^{-1} J_{2N} (V^{-1})^T = J_{2N}, \quad V = US \quad (81)$$

複素共役な固有ベクトルの一次結合から、二本の一次独立な実ベクトルを組み立てることが出来る。さらに、固有ベクトルの直交性から組み立てられた実ベクトルは他の固有ベクトルに直交する。したがって、スケールリング済みの直交基底を実ベクトル化する変換を 2×2 にブロック対角化された行列 Q を用いて次のように与えることが出来る。

$$V_R = VQ, \quad \det Q_i = 1 \quad (82)$$

ここで、 Q_i は行列 Q の i 番目の 2×2 ブロック行列である。したがって、行列 Q は Symplectic Condition を満足するので、行列 V_R も Symplectic である。式 (79) は次のように変換され、対角行列 W にも Q による Symplectic な実数化変換が存在する。

$$M = VWV^{-1} = V_R W_R V_R^{-1}, \quad W_R = Q^{-1} W Q \quad (83)$$

当然、変換された行列 W_R は 2×2 にブロック対角化されている。 Q_i による 2×2 ブロック内の変換は、少なくとも固有値の複素共役ペア $(\lambda, \bar{\lambda})$ を用いた以下の形で与えることが可能で、唯一ではないが必ず存在する。

$$\begin{pmatrix} x_{Ri1} & x_{Ri2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i & \bar{x}_i \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i^2 - \bar{\lambda}_i^2}} \begin{pmatrix} \lambda_i & \bar{\lambda}_i \\ \bar{\lambda}_i & \lambda_i \end{pmatrix} \quad (84)$$

$$W_{Ri} = \begin{pmatrix} \lambda_i & \bar{\lambda}_i \\ \bar{\lambda}_i & \lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_i & \bar{\lambda}_i \\ \bar{\lambda}_i & \lambda_i \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\lambda_i + \bar{\lambda}_i} \begin{pmatrix} \lambda_i^2 + \lambda_i \bar{\lambda}_i + \bar{\lambda}_i^2 & -\lambda_i \bar{\lambda}_i \\ \lambda_i \bar{\lambda}_i & \lambda_i \bar{\lambda}_i \end{pmatrix} \quad (85)$$

以上の手続きで構築された実 Symplectic 行列 V_R は固有値の複素共役ペアの並べ方を選ぶことで、 2×2 の対角ブロック行列 V_{Rii} が縮退しないように選べる¹²。つまり、適切な基底の並べ方の元で V_R の 2×2 対角ブロック行列 V_{Rii} は、次の条件を満たす。

$$\forall_i \quad \det V_{Rii} \neq 0 \quad (86)$$

さらに、列の入れ換えで $\det V_{Rii}$ の符号が反転することから、固有ベクトルの最初の並び順を適切に選んでいれば、より強い条件を満足する。

$$\forall_i \quad \det V_{Rii} > 0 \quad (87)$$

よって、次式を満足する Symplectic なブロック対角行列 P が存在する。

$$P_i = \sqrt{\det V_{Rii}} V_{Rii}^{-1} \quad (88)$$

ただし、 P_i は P の i 番目の 2×2 ブロック対角行列である。ここで、 P による次の変換を定義する。

$$V_P = V_R P, \quad W_P = P^{-1} W_R P \quad (89)$$

¹² 選べないならば、 V_R が縮退しており固有ベクトルの直交性に反する

P が Symplectic なブロック対角実行列なので、得られる行列 V_P は実 Symplectic 行列であり、 W_P は Symplectic な 2×2 ブロック対角実行列である。さらに、 P の定義から、行列 V_P の 2×2 対角ブロック行列 V_{Pii} は単位行列 I の正の定数倍になる。

$$V_{Pii} = \sqrt{\det V_{Rii}} I \quad (90)$$

つまり、安定で Symplectic な任意の Transfer Matrix に対して Symplectic な 2×2 ブロック対角実行列 W_P と 2×2 対角ブロックをたかだか単位行列の正の定数倍で表現できる Symplectic な実行列 V_P をもちいた次の分解が存在する。

$$M = V_P W_P V_P^{-1} \quad (91)$$

以上の定理を 4×4 の Symplectic な Transfer Matrix に適用すると、 V_P は以下の形式で書き下せる。

$$V_P = \begin{pmatrix} \alpha I & S \\ R & \beta I \end{pmatrix} \quad (92)$$

ここで、 α, β は正の実数、 R, S は 2×2 の実行列である。 V_P は Symplectic な行列なので、次の恒等式を満足せねばならない。

$$\alpha^2 + \det S = \beta^2 + \det R = 1 \quad (93)$$

$$\alpha R J + \beta J S^T = \alpha J R^T + \beta S J = 0 \quad (94)$$

式 (94) の第一項を左右から S と R^T で挟むと、

$$0 = S(\alpha R J + \beta J S^T) R^T = \alpha \det R S J + \beta \det S J R^T = (\alpha \det R S - \beta \det S J R^T J) J \quad (95)$$

が得られる。したがって、式 (93) と組み合わせると α, β が正であるので、 S は次のように書き下せる。

$$S = \frac{\beta}{\alpha} \frac{1 - \alpha^2}{1 - \beta^2} J R^T J \quad (96)$$

ここで、 $\beta = 1$ の特異点に付いては、式 (94) の第二項より

$$S = \alpha J R^T J \Rightarrow \det S = \alpha^2 \det R \quad (97)$$

が成立し、式 (93) から $\det R = 0$ なので $\alpha = \beta = 1$ となる。 $\beta \neq 1$ の場合は、 S の表式を式 (93) に代入して

$$1 - \alpha^2 = \det S = \left(\frac{\beta}{\alpha} \frac{1 - \alpha^2}{1 - \beta^2} \right)^2 \det R = \frac{\beta^2 (1 - \alpha^2)^2}{\alpha^2 (1 - \beta^2)} \Rightarrow \alpha^2 (1 - \beta^2) = \beta^2 (1 - \alpha^2) \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2 \quad (98)$$

を得る。 α, β は正の実数なので $\alpha = \beta$ である。したがって、 V_P の 4×4 での一般形を次のように与えられる。

$$V_P = \begin{pmatrix} \mu I & J R^T J \\ R & \mu I \end{pmatrix}, \quad V_P^{-1} = \begin{pmatrix} \mu I & -J R^T J \\ -R & \mu I \end{pmatrix}, \quad \mu = \sqrt{1 - \det R} \quad (99)$$

さて、Unitary 行列の Symplectic 化は一意に与えられるが、以降の Symplectic な変換行列 Q, P は、 W_R の左右で同一の変換を選ぶ必要は無いので、一般に Symplectic な 4×4 Transfer Matrix は次の形式でブロック対角化できる。

$$M(s_2, s_1) = C(s_2)^{-1} \begin{pmatrix} M_u(s_2, s_1) & 0 \\ 0 & M_v(s_2, s_1) \end{pmatrix} C(s_1) \quad (100)$$

$$C(s) = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \det R(s)} I & J R(s)^T J \\ R(s) & \sqrt{1 - \det R(s)} I \end{pmatrix}, \quad C(s)^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \det R(s)} I & -J R(s)^T J \\ -R(s) & \sqrt{1 - \det R(s)} I \end{pmatrix} \quad (101)$$

ここで、 M_u, M_v を 2×2 の Transfer Matrix と解釈すれば、 C は結合を持った空間から結合のない空間への座標変換行列と理解できる。座標変換 C の非対角成分 R は、運動がどのように結合しているかを表しており、Coupling Matrix と呼ばれ R の四つの成分は Coupling Parameter と呼ばれ、 $R_1 \sim R_4$ と表記される。

$$R = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix} \quad (102)$$

2.10 Dispersion Function

Hill 方程式の議論では、運動量のずれ $\delta = \Delta p/p_0$ を考慮せず $\delta = 0$ かつ、基準曲線が運動方程式を満たしているとして議論を行っていた。ここでは、より一般的な運動量のずれを含む場合を考察しよう。運動方程式 (37) を運動量のずれ δ も含めて一次までで展開し直すと、仮定 $H_\chi(s)|_{\delta=0} = 0$ のもとで次の非同次方程式が得られる。

$$\begin{aligned} 0 &= \chi'' + K_\chi(s)\chi + H_\chi(s) \\ &= \chi'' + \left(K_\chi(s)|_{\delta=0} + \delta \frac{\partial K_\chi(s)}{\partial \delta} \Big|_{\delta=0} \right) \chi + \left(H_\chi(s)|_{\delta=0} + \delta \frac{\partial H_\chi(s)}{\partial \delta} \Big|_{\delta=0} \right) \\ &= \chi'' + K_\chi(s)|_{\delta=0} \chi + \delta \frac{\partial H_\chi(s)}{\partial \delta} \Big|_{\delta=0} \end{aligned} \quad (103)$$

常微分方程式論によれば、非同次方程式 (103) の一般解は、 $\delta = 0$ での同次方程式の一般解と $\delta \neq 0$ での非同次方程式の特解の和で表現できることが知られている。ここで、 $\delta = 0$ での同次方程式とその一般解は、Hill 方程式 (39) と Betatron 振動解 (40) であり、非同次方程式の非同次項が δ に比例するので、その特解も δ に比例する。したがって、一般解は次の形式で表現できる。

$$\chi(s) = \delta \eta(s) + A \sqrt{\beta_\chi(s)} \cos(\phi_\chi(s) - \theta), \quad \eta''(s) + K_\chi(s)|_{\delta=0} \eta(s) + \frac{\partial H_\chi(s)}{\partial \delta} \Big|_{\delta=0} = 0 \quad (104)$$

ここに表れる関数 $\eta(s)$ は、非同次方程式 (103) の $\delta = 1$ での特解であり、運動量の変化にともなう軌道の変化量を表し、Dispersion Function(運動量分散関数) と呼ばれる。

3 Optics Correction

ここでは、Optics Correction の対象となる Optics Model に依存しない一般論に付いて概説する。

3.1 応答行列と最小二乗法

Correction の対象となる M 個の観測量 (Observable) f_i と N 個の加速器制御パラメータ (Controllable) x_j が与えられ、制御対象の加速器は Correction を実行する時間領域では Controllable 以外からの影響を受けないと仮定する。Observable f には Correction の目標値 f^{target} が存在するので、残差 r を以下のように定義できる。

$$r = f - f^{target} \quad (105)$$

したがって、Optics Correction とは式 (105) の残差 r を 0 にする Controllable x を発見することと再定義できる。 f^{target} が物理的かつ x が必要な制御パラメータ空間を覆っていれば解が存在するが、 x の属する空間は加速器の設計や整備、制御上の制約のもとで選ばれるので、一般には厳密な式 (105) の解が存在することは保証されない。故に、より現実的には何らかのノルムを導入し、残差のノルム $|r|$ が最小化する Controllable x を発見することと再定義される。

最小化問題の対象となる残差ノルムの定義には、かなり大きな自由度が存在するが実用的なノルムの代表として以下の二つの定義が挙げられる。

$$|\mathbf{r}|_\infty = \max_i |r_i| \quad (106)$$

$$|\mathbf{r}|_2 = \sqrt{\sum_i r_i^2} \quad (107)$$

式(106)は L_∞ ノルムと呼ばれ、残差最大の成分を最小化する解を与える。一方、式(107)は L_2 ノルムと呼ばれ、残差の二乗和を最小化する解、つまり特定の残差成分を残しても他の大多数の残差成分を最小化する解を与える。どちらの定義がより優れているかという議論に意味は無く、解に求められる性質に応じたノルムを選ぶことが重要である。しかし、ここで挙げた L_∞ ノルムと L_2 ノルムの比較では微分可能性と言う点で大きく異なる。 L_∞ ノルムは残差の零点は微分不可能であり最小化問題を解く際に微分を利用したアルゴリズムを適用できないと言う点¹³で L_2 ノルムに劣る。以降の議論は、 L_2 ノルムに付いてのみ行なう。

まず、式(107)の具体的な表式を得よう。Observable f_i は x_j の関数であり、関数 $f(\mathbf{x})$ が点 $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$ で微分可能かつ近傍に特異点を持たなければ、Taylor 展開が存在する。

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}^0} (x_i - x_i^0) + \sum_{i,j} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\mathbf{x}^0} (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) + \dots \quad (108)$$

式(107)の定義を展開し x_i の二次までの項を顕わに書き下して次式を得る。

$$\begin{aligned} (|\mathbf{r}|_2)^2 = & |f(\mathbf{x}^0) - f^{target}|^2 + 2 \sum_i (f(\mathbf{x}^0) - f^{target}) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}^0} (x_i - x_i^0) \\ & + \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}^0} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big|_{\mathbf{x}^0} (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) \\ & + \sum_{i,j} (f(\mathbf{x}^0) - f^{target}) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\mathbf{x}^0} (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) + \dots \end{aligned} \quad (109)$$

ここで、 $(|\mathbf{r}|_2)^2$ は $|\mathbf{r}|_2$ と同じ順序性を持ち定数項は最小点に寄与しないことに着目すると、最小化すべきマスタ関数 $F(\mathbf{x})$ は式(109)の右辺第二項以降で構築できる。さらに、 \mathbf{x} の原点に Correction の原点(つまり、Correction 前の Controllable の状態)を選び、原点近傍の Taylor 展開を採用すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) = & 2 \sum_i (f^0 - f^{target}) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_0 x_i + \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_0 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big|_0 x_i x_j \\ & + \sum_{i,j} (f^0 - f^{target}) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_0 x_i x_j + O(x^3) \quad (f^0 = f(\mathbf{0})) \end{aligned} \quad (110)$$

ここで、目標値 f^{target} が初期値 f^0 に十分近い場合、 $f^0 - f^{target}$ と \mathbf{x} を微小量とみなし式(110)を第2項で打ち切れる。打ち切られた式(110)の最高次数項は正定値な二次形式なので唯一の極小値が最小値となるので、補正ベクトル \mathbf{x} は以下の条件を満たす。

$$\forall_i \in \{1, 2, \dots, N\} \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} = (f^0 - f^{target}) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_0 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big|_0 x_j = 0 \quad (111)$$

行列積の形に書き直すと最小二乗法の公式となる。

$$A^T A \mathbf{x} = A^T (f^{target} - f^0), \quad (A)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} \quad (112)$$

ここで現れる行列 A は応答行列 (Response Matrix) と呼ばれる。

¹³Controllable \mathbf{x} に対する Observable f の応答が複雑で導関数の計算精度が十分に得られない場合は、どちらにしろ複雑な最小化アルゴリズムを使用しても効率が悪い。そうした際には、導関数に依存しない Simplex 法などを適用するので、 L_∞ ノルムも欠点とはならない

3.2 最小二乗法の解と誤差

式(112)で与えた最小二乗解の誤差を見積もってみよう。最小二乗法に現れる対称行列 $A^T A$ には、線形代数学の教えるところによれば、正規直交行列 V と対角行列 Λ を用いた固有値分解が存在する。

$$A^T A = V \Lambda V^T, \quad V^T V = I \quad (113)$$

式(112)に固有値分解を適用して、

$$\begin{aligned} V \Lambda V^T \mathbf{x} &= A^T (f_{target} - f^0) \\ \rightarrow \Lambda (V^T \mathbf{x}) &= (AV)^T (f_{target} - f^0) \end{aligned} \quad (114)$$

を得る。よって、固有値が零となる固有ベクトルの張る零空間の不定性を除いて、式(112)の解は $\lambda_i = 0$ の逆数を形式的に 0 と置いた逆行列 Λ^{-1} を用いて次式で表せる。

$$\mathbf{x} \equiv V \Lambda^{-1} (AV)^T (f_{target} - f^0) \quad (115)$$

式(115)が与える解は、零空間上で $|\mathbf{x}|$ を最小化し、それ以外の空間での残差を最小化する意味で最適な最小二乗解を与えている。

さて、 f^{target} の各成分に分散 σ_i の誤差が独立に含まれるとすると、 $V^T \mathbf{x}$ の各成分の誤差分散 $\hat{\sigma}_i$ は、以下のように書き下せる。

$$\hat{\sigma}_i = \lambda_i^{-1} \sqrt{\sum_j \sigma_j (AV)_{ji}} \quad (116)$$

つまり、 \mathbf{x} の固有空間での成分 $V^T \mathbf{x}$ に含まれる誤差は、右辺の誤差に固有値の逆数 λ^{-1} を乗じたものになる。従って、 λ_i が小さい固有空間からの解への寄与は λ_i^{-1} で増幅された測定誤差にまみれて意味を失うので零固有値と同様に Λ^{-1} から除外すべきであろう。当然、この議論では測定誤差が存在しなければ零以外の全ての固有値を使えることになる。しかし、実際の応用では計算機上で有限桁の浮動小数点表現を用いて実行される。浮動小数点による表現では、離散化に伴う丸め誤差の混入や桁落ちによる有効数字の喪失が必然的に発生する。したがって、全ての数に浮動小数点表現に伴う丸め誤差が存在することを前提に式(116)の誤差伝搬を解釈すると、 \mathbf{x} の固有ベクトル合成に於いて十分小さい固有値 λ_i が存在すると、丸め誤差の伝搬で全ての有効数字が汚染されるという帰結が得られる。浮動小数点表現が全ての数の定数倍に対して、有効精度を保てることを考量すると相対的な丸め誤差の寄与は、最大の固有値 λ_{max} を用いて λ_{max}/λ_i で増幅される。したがって、安定な解を得るには閾値 ϵ を適切に選び、 $|\lambda_i| < \epsilon \lambda_{max}$ となる固有値を打ち切る必要がある。

$$\lambda_i^{-1} \equiv \begin{cases} 1/\lambda_i & (|\lambda_i| \geq \epsilon \lambda_{max}) \\ 0 & (|\lambda_i| < \epsilon \lambda_{max}) \end{cases} \quad \lambda_{max} = \max_i |\lambda_i| \quad (117)$$

また、場合によっては、式(117)より穏便な打ち切り法として次式が挙げられる。

$$\lambda_i^{-1} \equiv \frac{\lambda_i}{\lambda_i^2 + \epsilon^2 \lambda_{max}^2} \quad (118)$$

閾値 ϵ としては、倍精度演算であれば有効数字は 17 桁程度なので 10^{-17} 以上を取る必要があり、実用的には $10^{-8} \sim 10^{-12}$ 程度に選ぶことが多い。

特に、最も大きさの異なる固有値の比 $\lambda_{max}/\lambda_{min}$ は行列の Condition Number(条件数)と呼ばれ、逆行列の数値的安定度に対する指標になっている。

$$\text{Condition Number} = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}, \quad \lambda_{max} = \max_i |\lambda_i|, \quad \lambda_{min} = \min_i |\lambda_i| \quad (119)$$

ここで、特殊な場合であるが行列 A 自身が縮退の無い正方行列である場合を考えてみよう。逆行列 A^{-1} の存在が保証されるので、式 (112) は次のように書き直される。

$$Ax = (f^{target} - f^0) \quad (120)$$

さらに、行列 A が対称であることを仮定すれば、以下の固有値分解が存在する。

$$A = \hat{V}\hat{W}\hat{V}^T, \quad \hat{V}^T\hat{V} = I \quad (121)$$

ここで、式 (113) と比較することで次式が得られる。

$$VWV^T = A^T A = \hat{V}\hat{W}^T\hat{V}^T\hat{V}\hat{W}\hat{V}^T = \hat{V}\hat{W}^2\hat{V}^T \Rightarrow \hat{V} = V, \quad \hat{W} = W^{\frac{1}{2}} \quad (122)$$

従って、式 (120) の条件数は、式 (112) の条件数の平方根で与えられる。よって、式 (120) の解の方が式 (112) から得られる解より数値的に安定であり、条件数が悪いほどその差は顕著¹⁴になる。

3.3 実用的な解法: Singular Value Decomposition

前節では固有値分解を使った条件数の議論から、数値的な安定性を得るには式 (112) よりも式 (120) を直接解く方が望ましいとされたが、一般の正方でない行列 A について、式 (120) から最小二乗法的な意味で正しい解を導くことが出来るのであろうか? 答えは「可能」であり、その手法は特異値分解と呼ばれる手続きによって支えられている。

線形代数の教えるところでは、任意の $M \times N$ 行列 A に対して、Singular Value Decomposition(特異値分解)と呼ばれる $M \times N$ の列正規直交行列 U と $N \times N$ の対角行列 W 、 $N \times N$ の正規直交行列 V の積への分解が存在する。

$$A = UWV^T, \quad U^T U = V^T V = VV^T = I \quad (123)$$

ここで、対角行列 W の対角項は特異値 (Singular Value) と呼ばれ、 A が正方であれば固有値そのものである。これを、式 (120) に適用して次式を得る。

$$UWV^T x = (f^{target} - f^0) \Rightarrow x_{SVD} \equiv VW^{-1}U^T(f^{target} - f^0) \quad (124)$$

ここで、 W^{-1} は式 (117) や式 (118) 等の処方で小さな特異値を取り除いた実効的な逆特異値行列である。

一般解を $x = x_{SVD} + x'$ で表すと、式 (120) の残差は以下のように書き下せる。

$$\begin{aligned} U^T r &= U^T (f^{target} - f^0 - A(x_{SVD} + x')) \\ &= (I - WW^{-1})U^T(f^{target} - f^0) - WV^T x' \end{aligned} \quad (125)$$

ここで、列正規直交行列 U による座標変換では、 U が覆う空間上での残差二乗和を保存している。 U の基底で表現できない残差は実効的な行列 A の値域に属さないので除外しても一般性を失わない。零空間では $(I - WW^{-1})_{ii} = 1$ かつ $W_{ii} = 0$ ゆえに、残差二乗和は定数で $(V^T x')_i = 0$ が x の長さ最小の解になり、特異値が零で無ければ $(I - WW^{-1})_{ii} = 0$ なので、残差二乗和が最小となるのは $(V^T x')_i = 0$ である。したがって、式 (124) の解 x_{SVD} は、実効的な行列 A による残差二乗和を最小化する最短ベクトルを与えるという意味で、式 (120) の最小二乗解になっている。

3.4 応答行列の構築

これまでの議論から、我々は応答行列 A が与えられれば、式 (120) を用いて最小二乗法の意味で適切な補正ベクトル x_{SVD} を求めることが出来る¹⁵。では、どのようにして応答行列 A を組み立てればよいのである

¹⁴たとえば、 A の条件数が 10^8 程度で倍精度で解く場合、式 (120) では有意な解が得られるが、式 (112) では丸め誤差に汚染され有意な解が得られない

¹⁵SVD の具体的な分解法は数値計算の解説書を参考にして欲しい。また、大抵の数値計算ライブラリーにはブラックボックス化された SVD 計算ルーチンが用意されている

うか?

関数 $f(\mathbf{x})$ の情報を持っていないならば、式 (112) の応答行列の定義中の微分作用素から差分を構築し、Correction の対象から応答行列 A を実測することが唯一の方法である。

$$A_{ij} \sim \frac{f_i(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f_i(\mathbf{x})}{h} \quad (\text{前進差分}) \quad (126)$$

$$A_{ij} \sim \frac{f_i(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f_i(\mathbf{x} - h\mathbf{e}_j)}{2h} \quad (\text{中点差分}) \quad (127)$$

ここで、時間に対して一次のドリフトを考慮すると以下の差分が得られる。

$$A_{ij} \sim \frac{2f_i^{t_0+\Delta t}(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f_i^{t_0}(\mathbf{x}) - f_i^{t_0+2\Delta t}(\mathbf{x})}{2h} \quad (\text{前進差分}) \quad (128)$$

$$A_{ij} \sim \frac{f_i^{t_0+2\Delta t}(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f_i^{t_0+\Delta t}(\mathbf{x} - h\mathbf{e}_j)}{2h} - \frac{f_i^{t_0+3\Delta t}(\mathbf{x}) - f_i^{t_0}(\mathbf{x})}{3h} \quad (\text{中点差分}) \quad (129)$$

ここで、 Δt は各測定間の時間間隔である。当然、式 (126)~(129) の差分は、 $f(\mathbf{x})$ の高階導関数の影響化にあるので、差分のスケール h は f の変化量が測定誤差に埋もれない程度に大きく、高階導関数の影響を受けない程度に小さく選ぶ必要が有る。また、 f の高階微分が滑らかであれば、差分の h の依存性が多項式で表せるので、幾つかの異なるスケール h_k で測定を行ない、 $h \rightarrow 0$ へ補外する手法が存在するが、測定誤差の影響を受けるので高次の補外は難しく、測定時間の増加の面からも一般的ではない。応答行列 A の測定に要する時間は、Observable f が同時測定可能であれば N に比例する。したがって、Observable f の測定コストが高い場合や N が大きい場合は、応答行列 A の測定は現実的ではない。

幸いなことに、我々は設計に用いた加速器モデルでの関数 $f(\mathbf{x})$ に対する知識を持っている。つまり、測定対象に対応するよう加速器モデルのパラメータを設定できれば、モデルから応答行列 A を得ることが出来る。これはうまい考えであるが、設定すべきパラメータ自身が Correction の対象となる未知量 (Controllable) そのものを含んでいる。しかし、応答行列 A のパラメータ依存が十分に小さいと仮定できれば、加速器モデルの設計値に於ける応答行列 A で近似することが出来る。特に、Correction の目標値が設計値自身で有る場合は、この近似は次のように正当化出来る。測定した $f^{measure}$ を目標に設計値 f^{design} を Correction することを考えると、式 (120) に対応するのは、

$$A^{design}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{design}) = (f^{measure} - f^{design}) \quad (130)$$

である。ここで、得られる \mathbf{x} は測定された $f^{measure}$ に対応する Controllable の推定値である。したがって、 $f^{measure}$ から f^{design} への Correction での Controllable \mathbf{x} の補正量は $\mathbf{x}^{design} - \mathbf{x}$ で与えることができ、式 (130) には \mathbf{x} 以外の未知量が存在しないので計算可能である。

3.5 応答行列の誤差

応答行列 A を測定又は推定する場合、真の応答行列 A_{exact} に対して何らかの誤差を含んだ応答行列 A_{est} を用いて補正を行うことになる。この場合、応答行列の誤差によって Optics Correction が収束するには複数回の補正が必要となる。一般に複数回の補正を行うなら全ての補正を一度に行わなくてもよいので、補正量を定数倍する自由度がある。ここでは、一回の補正量を λ 倍して適用するものとし、 n 回目の Controllable $\mathbf{x}^{(n)}$ と Observable の目標値からのずれ $\Delta \mathbf{f}^{(n)}$ で表すと、Optics Correction の進み方は以下の漸化式で表せる。

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} - \lambda A_{est}^{-1} \Delta \mathbf{f}^{(n)} \quad (131)$$

$$\Delta \mathbf{f}^{(n+1)} = \Delta \mathbf{f}^{(n)} + A_{exact}(\mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x}^{(n)}) \quad (132)$$

ここで、表れる定数 λ は、Damping Factor と呼ばれる。 $\Delta \mathbf{f}^{(n)}$ に付いて展開すると、次式が得られる。

$$\Delta \mathbf{f}^{(n+1)} = (I - \lambda A_{exact} A_{est}^{-1}) \Delta \mathbf{f}^{(n)} \quad (133)$$

Optics Correction が安定であるためには、この漸化式が発散しない、つまり、全ての固有値が複素面上で単位円に入っていることが必要である。したがって、行列 $A_{exact}A_{est}^{-1}$ の固有値を λ_i とし、安定条件は以下のように書き下せる。

$$\forall \lambda_i \quad |1 - \lambda \lambda_i| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \lambda_i \quad \lambda^2 |\lambda_i|^2 \leq 2 \lambda \operatorname{Re} \lambda_i \quad (134)$$

応答行列 A_{est} の推定が正しい場合、 $A_{exact}A_{est}^{-1}$ は単位行列になるので、安定条件 (134) は $\lambda_i = 1$ に対しても満たされなければならない。よって、 λ は少なくとも次の条件を満たす。

$$0 < \lambda < 2 \quad (135)$$

ここで、補正無し $\lambda = 0$ と定常振動状態 $\lambda = 2$ を取り除いている。したがって、式 (135) を満たす範囲に λ は制限されるので、安定条件 (134) は次式のように書き直すことができる。

$$\forall \lambda_i \quad \lambda \leq 2 \frac{\operatorname{Re} \lambda_i}{|\lambda_i|^2} \quad (136)$$

つまり、行列 $A_{exact}A_{est}^{-1}$ の固有値が右半面に属していれば、Optics Correction を安定化する十分に小さな λ が常に存在する。また、Optics Correction の漸化式 (133) を離散化した Negative Feedback System の時間発展と解釈すると、 λ は Loop Gain の制御パラメータに相当し、 λ を小さくすることは系の応答を遅くすることとみなすことができる。この NFB との類推から、 λ を小さく選ぶことで測定値に含まれる外乱からの影響を受けにくくなることが期待できる。

4 Optics Correction in KEKB

ここでは、Optics Correction 個別論として、KEKB で行なわれている COD(Closed Orbit Distortion), Global- β , XY-Coupling, Dispersion の計 4 種¹⁶の補正法とその対象となる KEKB リングの特徴を紹介する。

4.1 KEKB Lattice の特徴

KEKB の Arc 部の Lattice は 2.5π Cell Non-Interleaved Lattice と呼ばれ、Cell の Phase Advance が 2.5π rad に設定されており、図 2 のように Arc 中に二台ずつのペアからなる K_2 の符号の異なる二種類の Chromaticity 補正用 Sextupole Family(SE,SD) が互いに入れ子にならないよう (Non-Interleaved) かつペアの Sextupole 間の Transfer Matrix が次式のように $-I$ に近くなるように設計されている。

$$M(s_{sext2}, s_{sext1}) = -I' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ C_x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & C_y & -1 \end{pmatrix} \quad (137)$$

この設計の利点は、ペアの Sextupole 間での軌道の通過位置が反対称になるために、Sextupole の非線型性がペア間で互いに打ち消されることにある。式 (34),(35) から薄い Sextupole での Kick を取り出すと次のように書き下せる。

$$\begin{pmatrix} x_{out} \\ x'_{out} \\ y_{out} \\ y'_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{in} \\ x'_{in} - K_2 \frac{x_{in}^2 - y_{in}^2}{2} \\ y_{in} \\ y'_{in} + K_2 x_{in} y_{in} \end{pmatrix} \quad (138)$$

¹⁶COD に関しては、Optics Correction ではなく Orbit Correction に分類するケースが多いが、ここでは広義の Optics Correction の一種として扱う

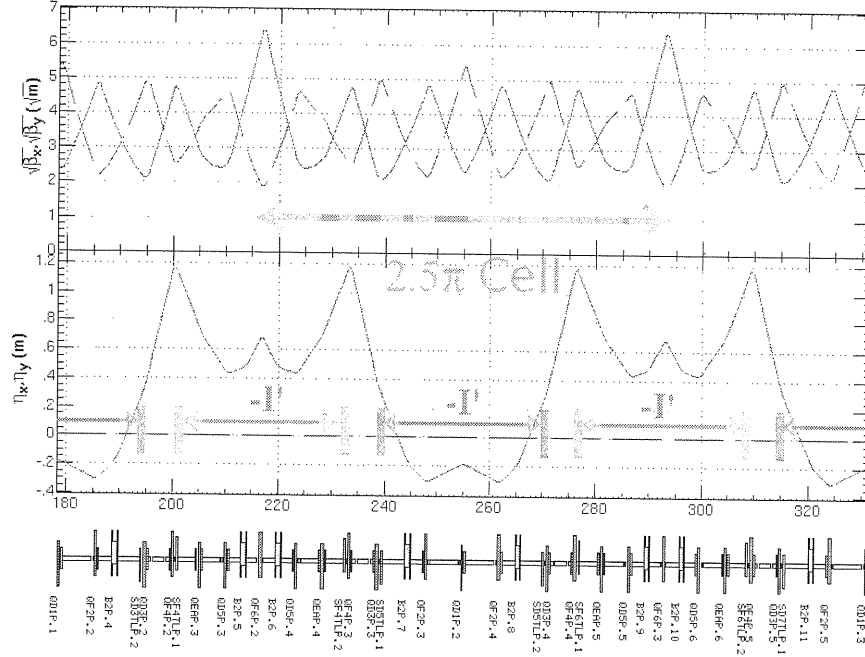


図 2: KEKB の 2.5π Cell

$-I'$ を挟んだペアとなる Sextupole 間では、Sextupole の強さが等しければ ($K_2^{sext1} = K_2^{sext2}$) 次式のように非線型性を打ち消しあう。

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} x_{out} \\ x'_{out} \\ y_{out} \\ y'_{out} \end{pmatrix} &= f(sext2) \circ f(-I') \circ f(sext1) \begin{pmatrix} x_{in} \\ x'_{in} \\ y_{in} \\ y'_{in} \end{pmatrix} = f(sext2) \begin{pmatrix} -x_{in} \\ C_x x_{in} - x'_{in} + K_2^{sext1} \frac{x_{in}^2 - y_{in}^2}{2} \\ -y_{in} \\ C_y y_{in} - y'_{in} - K_2^{sext1} x_{in} y_{in} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -x_{in} \\ C_x x_{in} - x'_{in} + (K_2^{sext1} - K_2^{sext2}) \frac{x_{in}^2 - y_{in}^2}{2} \\ -y_{in} \\ C_y y_{in} - y'_{in} - (K_2^{sext1} - K_2^{sext2}) x_{in} y_{in} \end{pmatrix} \quad (139)
 \end{aligned}$$

また、Transfer Matrix の定義 (53) よりペアの Sextupole 同士の β 関数は等しく、Sextupole 間の Phase Advance¹⁷ は π となっている。KEKB では、 β 関数だけでなく、ペアの Sextupole 同士で Dispersion Function $\eta(s)$ も等しくなるように設計されているので、Sextupole の中心からの軌道のずれから生じる Quadrupole/Skew Quadrupole 成分を Optics Correction に積極的に利用することが容易になっている。

4.2 KEKB のモニターと Controllable

KEKB での Optics Correction に用いるモニターとしては、Tune Meter と Beam Position Monitor(BPM) の二つがある。Tune Meter はその名の通り、周期外力に対するビームの共鳴を観測することで、Horizontal、Vertical 方向の Betatron Tune を測定するもので、各リングに一台ずつ存在する。BPM は蓄積ビームを観測する Multi-Turn 型のもので、リング中の全ての Quadrupole に設置されており、BPM を通過するビームの Horizontal、Vertical 方向の位置を測定できる。

¹⁷一般には $-I'$ の Phase Advance は $\pi + 2n\pi$ であるが、 2.5π -Cell に二つの Sextupole ペアが存在するので π 以外はあり得ない

また、Correction に用いる Controllable としては、RF Master Oscillator から設定可能なリングの加速空洞の周波数(リングの周回周波数)、電磁石電源ごとに設定可能な Steering の K_0 と Quadrupole の K_1 、Sextupole の可動架台による Sextupole の Horizontal、Vertical 位置がある。Steering は、平均して Quadrupole 二台に付き Horizontal Steering 一台、Vertical Steering 一台が設置されている。Sextupole の可動架台は、全ての Sextupole に設置されており独立に動かすことが出来るが、真空ダクトに関する技術的な問題から現状では Local Bump で代用している。

4.3 COD Correction

設計時に想定した磁場に対して現実の磁場が誤差を含む場合、ビームの閉軌道や Betatron 振動は設計時に想定したものから変化する。特に、Dipole 磁場に誤差が生じると閉軌道 $x(s) = 0$ はもはや線形化された運動方程式 (37) の解ではなくなり、閉軌道が変形する。これを Closed Orbit Distortion と呼ぶ。一般に、 $2N$ 極磁場が存在場所で COD が発生すると新たな閉軌道で曲線座標系を定義し直すと、COD の大きさに比例して $2, \dots, 2(N-1)$ 極磁場が生じ Optics が変化する¹⁸。したがって、安定な運転のためには磁場の経時変化や潮汐、熱膨張、地盤の歪等々による磁石の変位などを原因とする COD を一定の範囲に収まるよう補正する必要がある。特に、高精度なビーム制御のために Optics を安定化させるには COD による Optics 歪を抑えるための連続的な COD Correction が重要となる。

$\chi_0(s)$ を元の閉軌道として、Dipole 磁場 K_0, \bar{K}_0 に摂動 $\Delta K(s)$ が加わった新しい閉軌道を $\chi(s) = \chi_0(s) + \Delta\chi(s)$ で表わすと運動方程式 (37) は次のように書き下せる。

$$x_0''(s) + K_x(s)x_0(s) + H_x(s) = 0, \quad y_0''(s) + K_y(s)y_0(s) + H_y(s) = 0 \quad (140)$$

$$(x_0(s) + \Delta x(s))'' + \left(K_x(s) + \frac{\partial K_x}{\partial K_0} \Delta K(s) \right) (x_0(s) + \Delta x(s)) + \left(H_x(s) + \frac{\partial H_x}{\partial K_0} \Delta K(s) \right) = 0 \quad (141)$$

$$(y_0(s) + \Delta y(s))'' + \left(K_y(s) + \frac{\partial K_y}{\partial \bar{K}_0} \Delta K(s) \right) (y_0(s) + \Delta y(s)) + \left(H_y(s) + \frac{\partial H_y}{\partial \bar{K}_0} \Delta K(s) \right) = 0 \quad (142)$$

$\Delta\chi(s)$ と $\Delta K(s)$ の一次まで展開して次式を得る。

$$\Delta x''(s) + K_x(s)\Delta x(s) + \left(\frac{\partial H_x}{\partial K_0} + \frac{\partial K_x}{\partial K_0} x_0(s) \right) \Delta K(s) = 0 \quad (143)$$

$$\Delta y''(s) + K_y(s)\Delta y(s) + \left(\frac{\partial H_y}{\partial \bar{K}_0} + \frac{\partial K_y}{\partial \bar{K}_0} y_0(s) \right) \Delta K(s) = 0 \quad (144)$$

条件 (33) を適用される前の運動方程式 (30),(31) から $K_\chi(s), H_\chi(s)$ の微分は次のように与えられる。

$$\frac{\partial H_x}{\partial K_0} + \frac{\partial K_x}{\partial K_0} x_0(s) = 1 + 2Gx_0(s) \quad (145)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial \bar{K}_0} + \frac{\partial K_y}{\partial \bar{K}_0} y_0(s) = -1 \quad (146)$$

式 (143),(144) は $K_\chi(s)$ が定義する Hill 方程式に非同次項 (145),(146) が加わった非同次方程式なので、その特解である COD は

$$\Delta\chi''(s) + K_\chi(s)\Delta\chi(s) + \delta(s - s_0) = 0 \quad (147)$$

の特解 (Green 関数) の重ね合わせで表現できる。式 (147) は、 $s \neq s_0$ の領域では Hill 方程式そのものであり、Hill 方程式の一般解を適用することが出来る。 $s = s_0$ 近傍に付いては、 $\Delta\chi(s)$ が C^0 連続¹⁹であることを仮

¹⁸例えば、Quadrupole での COD からは Dipole が発生し、Sextupole の Horizontal COD からは Quadrupole、Vertical COD からは Skew Quadrupole が生じる

¹⁹粒子の軌跡が連続であり (無限速度での移動の禁止)、曲線座標系を定める基準軌道と曲線座標系の基底が s に付いて連続であればよい

定すると、 $s < s_0$ での解 $\Delta\chi_L(s)$ と $s_0 < s$ での解 $\Delta\chi_R(s)$ の間で以下の境界条件が成立する。

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \Delta\chi_L(s_0 - \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \Delta\chi_R(s_0 + \epsilon) \quad (148)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{s_0 - \epsilon}^{s_0 + \epsilon} (\Delta\chi''(s') + K_\chi(s')\Delta\chi(s') + \delta(s' - s_0))ds' = 0 \quad (149)$$

$K_\chi(s), \Delta\chi(s)$ が有界であれば、式 (149) の積分第二項は零であることが保証されることから次式を得る。

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} (\Delta\chi'_R(s_0 + \epsilon) - \Delta\chi'_L(s_0 - \epsilon)) = -1 \quad (150)$$

二領域の一般解を以下のように書き下す場合、

$$\Delta\chi_L(s) = A_L \sqrt{\beta(s)} \cos(\phi(s) - \theta_L) \quad (s < s_0) \quad (151)$$

$$\Delta\chi_R(s) = A_R \sqrt{\beta(s)} \cos(\phi(s) - \theta_R) \quad (s_0 < s) \quad (152)$$

式 (148) と式 (150) の境界条件は次のように表わせる。

$$A_R \sqrt{\beta_0} \cos(\phi_0 - \theta_R) = A_L \sqrt{\beta_0} \cos(\phi_0 - \theta_L) \quad (153)$$

$$\frac{A_R}{\sqrt{\beta_0}} (\alpha_0 \cos(\phi_0 - \theta_R) + \sin(\phi_0 - \theta_R)) = 1 + \frac{A_L}{\sqrt{\beta_0}} (\alpha_0 \cos(\phi_0 - \theta_L) + \sin(\phi_0 - \theta_L)) \quad (154)$$

ここで、 $\beta_0, \alpha_0, \phi_0$ はそれぞれ $\beta s_0, \alpha(s_0), \phi(s_0)$ である。式 (153) と式 (154) は、 δ 関数による Dipole Kick の前後で Betatron 振動の振幅と位相がどのように変わるかを記述しているが、まだ自由度は二変数存在する。ここで、新しい軌道 $\chi_0(s) + \Delta\chi(s)$ が閉軌道となるよう周期境界条件 $\Delta\chi(s+C) = \Delta\chi(s)$ を導入する。 $K_\chi(s)$ の周期境界条件によって、 δ 関数 $\delta(s-s_0)$ が実際は $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(s-s_0-nC)$ になっていることに注意すると $s = s_0$ 付近での周期境界条件は次のように書き下せる。

$$s_0 - C < \forall s < s_0, \quad \Delta\chi_R(s+C) = \Delta\chi_L(s) \quad (155)$$

したがって、式 (155) の $s \rightarrow s_0 - 0$ 極限から以下の境界条件が得られる。

$$A_R \sqrt{\beta_0} \cos(\phi_0 + 2\pi\nu - \theta_R) = A_L \sqrt{\beta_0} \cos(\phi_0 - \theta_L) \quad (156)$$

$$\frac{A_R}{\sqrt{\beta_0}} (\alpha_0 \cos(\phi_0 + 2\pi\nu - \theta_R) + \sin(\phi_0 + 2\pi\nu - \theta_R)) = \frac{A_L}{\sqrt{\beta_0}} (\alpha_0 \cos(\phi_0 - \theta_L) + \sin(\phi_0 - \theta_L)) \quad (157)$$

式 (156) と式 (157) を書き下すと次式が得られる。

$$A_R = A_L = A \quad (158)$$

$$\theta_R = \theta_L + 2\pi\nu + 2n\pi \quad (n \in \mathbf{Z}) \quad (159)$$

式 (158) と式 (159) を式 (153) と式 (154) へ代入することで

$$\cos(\phi_0 - \theta_R) = \cos(\phi_0 - \theta_L) \quad (160)$$

$$A(\sin(\phi_0 - \theta_R) - \sin(\phi_0 - \theta_L)) = \sqrt{\beta_0} \quad (161)$$

を得る。したがって、式 (161) にて A が有界になるためには式 (160) の解は次の形にならなければならない。

$$\theta_R = 2\phi_0 - \theta_L + 2m\pi (m \in \mathbf{Z}) \quad (162)$$

したがって、振幅 $A = A_L = A_R$ と二つの位相 θ_L, θ_R は任意整数 m, n を用いて以下のように表せる。

$$\theta_L = \phi_0 - \pi\nu + (m-n)\pi \quad (163)$$

$$\theta_R = \phi_0 + \pi\nu + (m+n)\pi \quad (164)$$

$$A_L = A_R = -\frac{\sqrt{\beta_0}}{2 \sin \pi\nu} (-1)^{m+n} \quad (165)$$

以上を踏まえて、Green 関数を顕わに書き下すと

$$\Delta\chi(s) = \begin{cases} -\frac{\sqrt{\beta_0}}{2 \sin \pi\nu} \sqrt{\beta(s)} \cos(\phi(s) - \phi_0 + \pi\nu) & (s_0 - C < s < s_0) \\ -\frac{\sqrt{\beta_0}}{2 \sin \pi\nu} \sqrt{\beta(s)} \cos(\phi(s) - \phi_0 - \pi\nu) & (s_0 < s < s_0 + C) \end{cases}$$

$$= -\frac{\sqrt{\beta_0}}{2 \sin \pi\nu} \sqrt{\beta(s)} \cos(|\phi(s) - \phi_0| - \pi\nu) \quad (s_0 - C < s < s_0 + C) \quad (166)$$

を得られる。一般の $\Delta K(s)$ については、非同次項 (145),(146) による重ね合わせから次式が得られる。

$$\Delta\chi(s) = -\frac{\sqrt{\beta_\chi(s)}}{2 \sin \pi\nu_\chi} \oint_C \sqrt{\beta_\chi(s')} \left(\frac{\partial H_\chi}{\partial K_{\chi 0}} + \frac{\partial K_\chi}{\partial K_{\chi 0}} \chi_0(s') \right) \Delta K(s') \cos(|\phi_\chi(s) - \phi_\chi(s')| - \pi\nu_\chi) ds'$$

$$(K_{x0} = K_0, K_{y0} = \bar{K}_0) \quad (167)$$

ただし、 s は全周積分 \oint_C が走る区間に属する。したがって、非同次項 (145),(146) を代入した顕わな表現は、次のように与えることができる。

$$\Delta x(s) = -\frac{\sqrt{\beta_x(s)}}{2 \sin \pi\nu_x} \oint_C \sqrt{\beta_x(s')} \Delta K_0(s') \left(1 + 2 \frac{x_0(s')}{\rho(s')} \right) \cos(|\phi_x(s) - \phi_x(s')| - \pi\nu_x) ds' \quad (168)$$

$$\Delta y(s) = \frac{\sqrt{\beta_y(s)}}{2 \sin \pi\nu_y} \oint_C \sqrt{\beta_y(s')} \Delta \bar{K}_0(s') \cos(|\phi_y(s) - \phi_y(s')| - \pi\nu_y) ds' \quad (169)$$

初期状態に $x_0(s) = 0$ を選べば、式 (168) は符号を除いて式 (169) と同じ形になる。この符号の違いは、座標の回転対する磁場 B と力 $e_s \times B$ が 90 度異なる方向を向いていることに起因する。

また、COD に伴う軌道長の変化 Δz は、

$$\begin{aligned} \Delta z &= \oint_C dz = \oint_C \frac{\Delta x(s)}{\rho(s)} ds \\ &= \oint_C -\frac{1}{2 \sin \pi\nu_x} \oint_C \frac{\sqrt{\beta_x(s)}}{\rho(s)} \sqrt{\beta_x(s')} \Delta K_0(s') \cos(|\phi_x(s) - \phi_x(s')| - \pi\nu_x) ds' ds \\ &= \oint_C -\Delta K_0(s') \left(\frac{\sqrt{\beta_x(s')}}{2 \sin \pi\nu_x} \oint_C \sqrt{\beta_x(s)} \cos(|\phi_x(s') - \phi_x(s)| - \pi\nu_x) \frac{ds}{\rho(s)} \right) ds' \end{aligned} \quad (170)$$

と書き下せる。式 (170) 中の s による全周積分は、後の Dispersion Correction の節で扱う Dispersion Function $\eta(s')$ の積分表示 (式 (243)) そのものである。

4.3.1 COD Measurement

COD の測定は、BPM によるビーム軌道の変位の測定そのもので与えることができる。ただし、COD の基準となる軌道をどのように選ぶかという問題がある。モデル上での解析では、設計軌道や曲線座標系の基準軌道からの変位を COD と呼んでいるが、現実の加速器でそうした基準軌道での BPM の測定値は未知量である。したがって、実測での COD の基準としては、Quadrupole 以上の多極磁場の中心をビームが通過する軌道の測定値、過去の運転実績で最も状態が良かった時の測定値が挙げられる。前者の考え方は、多くの加速器設計では、特別な場合を除いて極磁場の中心をビームが通るように設計されていることが根拠となっている。多極磁場の強さを変化させた際の軌道変位が最小化する軌道と定義できるので、実測可能であり、COD Correction の自然な目標値となる。特に、KEKB では BPM は Quadrupole に取り付けられているので、Quadrupole の K_1 の変化に対する COD が最小となる軌道での BPM の測定値が零となるように較正している。対して、後者の考え方は、COD Correction の目的が運転状態の保持であるならば、運転状態が良かった時と同じ状態に向けて補正を実行するという意味で正当化され、この時の軌道は Golden Orbit と称される。

4.3.2 COD Corrector

ここで、 M 個の BPM での基準軌道からの変位を $\Delta x_i, \Delta y_i$ として、 N 個の Steering の K_0 もしくは $-\bar{K}_0$ の補正量を ΔK_j 、Steering の K_0, \bar{K}_0 分布を $k_j(s)$ とすると、式 (167) から ΔK から $\Delta \chi$ への応答行列 A は次のように与えられる。

$$A_{ij} = -\frac{\sqrt{\beta_i^{BPM}}}{2 \sin \pi \nu} \oint_C \sqrt{\beta(s)} k_j(s) \cos(|\phi(s) - \phi_i^{BPM}| - \pi \nu) ds \quad \left(\oint_C k_j(s) ds = 1 \right) \quad (171)$$

実用上は、場所ごとに要求される軌道補正の精度が異なることから、軌道の残差ノルムを作る際に BPM ごとに異なる重み付けを与えることが多い。比較的によく採用される重み付けは、 $\sqrt{\beta}$ を用いたもので、軌道変動の表れやすい場所を優先的に補正するという意図に基づいている。また、特定の場所での軌道の拘束条件や軌道補正に伴う軌道長変化 (式 (170))、Betatron Tune の変化²⁰等に対する拘束条件を必要とする場合があり、こうした場合には Lagrange の未定乗数法が利用できる。

KEKB の CCC と呼ばれる Continuous COD Correction では、約 4 秒ごとに全周の BPM 測定を行ない全周の Steering を用いて約 20 ~ 30 秒周期で補正を行なっている。COD Corrector では、BPM への重み付けを $\sqrt{\beta}$ を基本とし Sextupole 近傍の BPM にさらに 2 ~ 5 倍の重みを与え、SVD の閾値 $\epsilon = 0.01 \sim 0.03$ 、Damping Factor $\lambda = 0.3 \sim 0.8$ を用いて、軌道を $\pm 50 \mu\text{m}$ オーダーで制御している。Damping Factor λ は、リングが空の状態からのビーム入射時には大きくとることで、リングの状態変化に素早く追従させ、定常運転に入った後は、0.3 程度まで小さくすることで、軌道補正に伴うビームの衝突状態の変化を抑えることで各種のビーム衝突制御システムへの干渉を減らしている。

4.4 XY-Coupling Correction

これまでの議論ではビームの Transverse 方向の運動は Horizontal 成分と Vertical 成分が独立しているものとして扱って来たが、実際には設計上の必要性や誤差によって両者の運動に結合²¹が生じ、これを XY-Coupling と呼ぶ。KEKB のように垂直方向のビームサイズを絞りこむ衝突型加速器²²では、意図しない Coupling の発生は垂直方向のビームサイズの増大を招き Luminosity と呼ばれる衝突性能の低下へとつながる。したがって、安定な運転を行なうためには Coupling 測定とその補正が必要である。では始めに、Coupling を持たない運動方程式に摂動的な Coupling を導入し、Coupling Source と軌道変位を結びつける表式を導出しよう。

式 (33)、式 (36) を満足し、 x と y の運動が分離され基準曲線自身を解に持つ運動方程式に、 $x - y$ 結合を発生する最低次の磁場である Skew Quadrupole \bar{K}_1 を導入すると、

$$x''(s) + \left(\frac{K_s^2}{4} + K_1(s) + G(s)^2 \right) x(s) - \bar{K}_1(s)y(s) = 0 \quad (172)$$

$$y''(s) + \left(\frac{K_s^2}{4} - K_1(s) \right) y(s) - \bar{K}_1(s)x(s) = 0 \quad (173)$$

のように書き下される。 $\bar{K}_1(s)$ を摂動的に加えた場合、 $\bar{K}_1(s) = 0$ の解 $x_0(s), y_0(s)$ に対してそれぞれ軌道 $y_0(s), x_0(s)$ に比例した Dipole Error $\Delta H_x(s) = -\bar{K}_1(s)y_0(s)$ 、 $\Delta H_y(s) = -\bar{K}_1(s)x_0(s)$ が生じたものと解釈

²⁰Sextupole で軌道変化と式 (210) で与えられる

²¹固有振動を分離する座標系を定義することは可能であり、そうした枠組の中では結合の無い座標系と物理的な座標系の変換行列の非対角成分として Coupling を記述できる。特に正準座標系の場合、Symplectic な座標変換が存在しその非対角成分は Coupling Matrix R で表現できる

²²平面内に軌道が閉じている場合、放射減衰 (Radiation Damping) は Horizontal 方向と Vertical 方向で同じ様に生じるが、その量子化の影響 (Radiation Quantum Excitation) は Horizontal 方向に表れるため、ビームの位相空間体積 (平衡 Emittance) は Horizontal 方向で有限な値で平衡状態になるが、Vertical 方向では他の要因が無ければ非常に小さくなる

できる。したがって、式 (167) を用いて以下のように書き下せる。

$$\Delta x(s) \sim \frac{\sqrt{\beta_x(s)}}{2 \sin \pi \nu_x} \oint_C \sqrt{\beta_x(s')} \bar{K}_1(s') y_0(s') \cos(|\phi_x(s') - \phi_x(s)| - \pi \nu_x) ds' \quad (174)$$

$$\Delta y(s) \sim \frac{\sqrt{\beta_y(s)}}{2 \sin \pi \nu_y} \oint_C \sqrt{\beta_y(s')} \bar{K}_1(s') x_0(s') \cos(|\phi_y(s') - \phi_y(s)| - \pi \nu_y) ds' \quad (175)$$

4.4.1 XY-Coupling Measurement

Coupling の大きさが十分に小さい場合は、Coupling の効果は摂動的に表れるので、Coupling が無い場合の軌道 $(x_0(s), y_0(s))$ に Coupling による軌道の摂動 $(\Delta x(s, y_0(s)), \Delta y(s, x_0(s)))$ が加わると解釈できる。したがって、 x, y 方向に独立な軌道を作り、 y, x 方向への回り込みを測定することで、Coupling を測定できる。全周に渡って x, y 方向に軌道を作るには、Steering の K_0, \bar{K}_0 を使って Betatron 振動を発生させればよく、軌道の回り込みは BPM の変位から直読できる。注意すべきは、BPM や Steering が回転している場合も回り込みが見える点で、BPM の回転では回転角 θ があると発生する Betatron 振動の $\sin \theta$ 倍の振動パターンが回り込み、Steering の回転では Steering を源とし回り込んだ軸の $\beta(s), \phi(s)$ による Betatron 振動が観測される。十分な数の BPM が存在する場合、Coupling の源と Steering が重なっていないければ、BPM や Steering の回転による回り込みは、Betatron 振動の位相や微分不連続点の位置から分離することができる。したがって、こうした回転に付いては較正することが可能で、これより先では BPM と Steering の回転は較正済みであることを仮定する。

実用上は x 方向から y 方向への Coupling による回り込みを抑えるのが目的なので、Horizontal Steering の K_0 を振って作られる Horizontal Betatron 振動とその回り込みを測定する。 j 番目の Horizontal Steering の K_0 を ΔK_j 振った際の軌道偏差を i 番目の BPM で測ったものを $\Delta x_i^j, \Delta y_i^j$ とする。もし、設計上の Coupling が存在しない場合は Δy_i^j に表れる回り込み成分は全て誤差磁場による Coupling に由来するが、設計に Coupling が含まれている場合は、設計上の回り込み成分 Δy_i^{design} (Δx_i^j) が存在し、誤差磁場による回り込み $\Delta \tilde{y}_i^j$ は

$$\Delta \tilde{y}_i^j \equiv \Delta y_i^j - \Delta y_i^{design}(\Delta x_i^j) \quad (176)$$

で表される。式 (101) で定義される Coupling Matrix R の設計値が既知であるとすれば、Coupling の無い座標系 (u, u', v, v') との関係は

$$\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta u' \\ \Delta v \\ \Delta v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & -R_4 & R_3 \\ 0 & \mu & R_2 & -R_1 \\ R_1 & R_2 & \mu & 0 \\ R_3 & R_4 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta x' \\ \Delta y \\ \Delta y' \end{pmatrix}, \quad \mu = \sqrt{1 - R_1 R_4 + R_2 R_3} \quad (177)$$

で与えられる。ここで、Coupling が十分に小さく $R_{1\sim 4}$ と $\Delta y, \Delta y'$ が微小量をみなせると仮定すると、一次微小量までの展開から

$$\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta u' \\ \Delta v \\ \Delta v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta x' \\ \Delta y + R_1 \Delta x + R_2 \Delta x' \\ \Delta y' + R_3 \Delta x + R_4 \Delta x' \end{pmatrix} \quad (178)$$

が得られる。Coupling の無い座標系では回り込みは見えないはずなので、 $v = 0, v' = 0$ を仮定すると設計上の回り込み成分 Δy_i^{design} は次のように与えられる。

$$\Delta y_i^{design} = -R_1 \Delta x_i - R_2 \Delta x_i' \quad (179)$$

ここで表れる $\Delta x'_i$ は、BPM で直接観測できる量ではないが、二個の BPM 間の Transfer Matrix $M(s_{i+1}, s_i)$ から次の関係が成り立つ。

$$\Delta x_{i+1} = M_{xx}(s_{i+1}, s_i)\Delta x_i + M_{xx'}(s_{i+1}, s_i)\Delta x'_i \Rightarrow \Delta x'_i = \frac{\Delta x_{i+1} - M_{xx}(s_{i+1}, s_i)\Delta x_i}{M_{xx'}(s_{i+1}, s_i)} \quad (180)$$

まとめると、 i 番目の BPM での誤差磁場による回り込み $\Delta \tilde{y}_i^j$ は、Coupling Parameter R_1, R_2 と Transfer Matrix M を用いて次のように表せる。

$$\Delta \tilde{y}_i^j = \Delta y_i^j - \left(-R_1(s_i)\Delta x_i^j - R_2(s_i)\frac{\Delta x_{i+1}^j - M_{xx}(s_{i+1}, s_i)\Delta x_i^j}{M_{xx'}(s_{i+1}, s_i)} \right) \quad (181)$$

ここで、 s_i は i 番目の BPM の位置である。

Horizontal Steering の Kick 角 ΔK_j は、Betatron 振動の振幅を均一にするために Steering での $\sqrt{\beta_x}$ に反比例するように選び、BPM の分解能に対して軌道の変位が十分に大きくなるようにする必要がある。特に、 Δy の測定精度は、測定可能な最小の Coupling を決定する。

4.4.2 XY-Coupling Corrector

測定された Coupling に関する情報は、 x 方向の軌道変位 Δx_i^j と式 (181) による y 方向への回り込み $\Delta \tilde{y}_i^j$ で与えられるので、これらを式 (175) に当てはめて Skew Quadrupole への補正量 $\Delta \bar{K}_1$ を求めることになるので、 k 番目の Skew Quadrupole \bar{K}_1 の変位 ΔK_k から i 番目の BPM での回り込み $\Delta \tilde{y}_i^j$ への応答は形式的に次のように書くことができる。

$$\Delta \tilde{y}_i^j = \frac{\sqrt{\beta_{y_i}^M}}{2 \sin \pi \nu_y} \sum_k \Delta K_k \oint_C \sqrt{\beta_y(s')} k_k(s') \Delta x^j(s') \cos(|\phi_y(s') - \phi_{y_i}^M| - \pi \nu_y) ds' \quad \left(\oint_C k_k(s) ds = 1 \right) \quad (182)$$

ここで、 $k_k(s)$ は k 番目の Skew Quadrupole の \bar{K}_1 分布の形状因子、 $\beta_{y_i}^M, \phi_{y_i}^M$ は i 番目の BPM での y 方向の β Function と Phase Advance、 $\Delta x^j(s')$ は j 番目の測定での x 方向の軌道変位を表す。Skew Quadrupole が薄い場合は次のように近似できる。

$$\Delta \tilde{y}_i^j = \frac{\sqrt{\beta_{y_i}^M}}{2 \sin \pi \nu_y} \sum_k \Delta K_k \sqrt{\beta_{y_k}^S} \Delta x_{S_k}^j \cos(|\phi_{y_k}^S - \phi_{y_i}^M| - \pi \nu_y) \quad (183)$$

ここで、 $\beta_{y_k}^S, \phi_{y_k}^S$ は k 番目の Skew Quadrupole の y 方向の β Function と Phase Advance、 $\Delta x_{S_k}^j$ は j 番目の測定での k 番目の Skew Quadrupole で観測される x 方向の軌道変位である。式 (183) の右辺に表れる $\Delta x_{S_k}^j$ は未知量であるが、リングであれば k 番目の Skew Quadrupole を両側から挟む BPM の組合せが必ず存在し、この二台の BPM での測定値を $\Delta x_{M_{i_1}}^j$ と $\Delta x_{M_{i_2}}^j$ で表すと Transfer Matrix を介して次の関係が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} \Delta x_{M_{i_2}}^j \\ \Delta x_{M_{i_2}}^{j'} \end{pmatrix} = M(s_{i_2}^M, s_k^S) \begin{pmatrix} \Delta x_{S_k}^j \\ \Delta x_{S_k}^{j'} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \Delta x_{S_k}^j \\ \Delta x_{S_k}^{j'} \end{pmatrix} = M(s_k^S, s_{i_1}^M) \begin{pmatrix} \Delta x_{M_{i_1}}^j \\ \Delta x_{M_{i_1}}^{j'} \end{pmatrix} \quad (184)$$

$$M(s_{i_2}^M, s_{i_1}^M) = M(s_{i_2}^M, s_k^S) M(s_k^S, s_{i_1}^M)$$

したがって、次の補間公式が得られる。

$$\Delta x_{S_k}^j = \frac{M_{xx'}(s_k^S, s_{i_1}^M)\Delta x_{M_{i_2}}^j + M_{xx'}(s_{i_2}^M, s_k^S)\Delta x_{M_{i_1}}^j}{M_{xx'}(s_{i_2}^M, s_{i_1}^M)} \quad (185)$$

設計モデルの Transfer Matrix と式 (185) を組み合わせると、式 (183) を用いて、Skew Quadrupole による Coupling Correction の応答行列を与えることができる。

KEKB の Skew Quadrupole は、LER(Low Energy Ring) の衝突点の両側に 4×2 台、HER(High Energy Ring) の衝突点の両側に 6×2 台が衝突点の Coupling Correction 用に設置されている。しかし、これだけではリング全周での Coupling Correction を行うには不十分なので、Arc 部に存在する強さ K_2 の Sextupole を Δy だけ垂直方向に動かした際に生じる Skew Quadrupole 成分 $-K_2\Delta y$ も Coupling Correction に利用している。ペアとなる Sextupole 間の Phase Advance は π になっているので、ペアの Sextupole 間で Horizontal Betatron 振動の位相と Skew Quadrupole 成分から生じる Vertical Betatron 振動の位相は共に π ずれているので、ペアの Sextupole を対称に動かすことで Sextupole 区間の外側に単一の Skew Quadrupole と同じ影響を与えることができる。したがって、薄い Sextupole ペアからの寄与は次式のように与えられる。

$$\Delta \tilde{y}_i^j = \frac{\sqrt{\beta_{y_i}^M}}{2 \sin \pi \nu_y} \sum_k -\Delta y_k^S K_{2k} \sqrt{\beta_{y_k}^S} \left(\Delta x_{S1k}^j \cos(|\phi_{y_k}^S - \phi_{y_i}^M| - \pi \nu_y) \right. \\ \left. + \Delta x_{S2k}^j \cos(|\phi_{y_k}^S + \pi - \phi_{y_i}^M| - \pi \nu_y) \right) \quad (186)$$

ここで、 $\Delta y_k^S, \beta_{y_k}^S, \phi_{y_k}^S$ は、それぞれ k 番目の Sextupole ペアの一台目の y 方向の移動量、 β Function、Phase Advance であり、 Δx_{S1k}^j と Δx_{S2k}^j は k 番目の Sextupole ペアのそれぞれの Sextupole での x 軌道の変位である。特に、Horizontal Steering が Sextupole 間に無い場合は 2.5π -Cell の性質から、 $\Delta x_{S2k}^j = -\Delta x_{S1k}^j$ が成り立つので、式 (186) は以下のように簡略化できる。

$$\Delta \tilde{y}_i^j = \begin{cases} -\frac{\sqrt{\beta_{y_i}^M}}{\sin \pi \nu_y} \sum_k \Delta y_k^S K_{2k} \Delta x_{S1k}^j \sqrt{\beta_{y_k}^S} \cos \pi \nu_y \cos(\phi_{y_i}^M - \phi_{y_k}^S) & (\phi_{y_k}^S \leq \phi_{y_i}^M \leq \phi_{y_k}^S + \pi) \\ -\frac{\sqrt{\beta_{y_i}^M}}{\sin \pi \nu_y} \sum_k \Delta y_k^S K_{2k} \Delta x_{S1k}^j \sqrt{\beta_{y_k}^S} \cos(|\phi_{y_i}^M - \phi_{y_k}^S| - \pi \nu_y) & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (187)$$

KEKB での典型的な XY-Coupling Correction では、六種類の Horizontal Betatron 振動を用いて測定を行い $\pm 1\text{mm}$ 程度の振幅を持つ Horizontal 軌道からの Vertical 軌道への回り込みを $\pm 30\mu\text{m}$ 程度まで補正している。

4.5 Global- β Correction

COD と同様に Quadrupole 磁場に誤差が存在すると式 (47) にしたがって β 関数と Phase Advance が変化する。 $\beta(s)$ の定義式 (47) は β の一階微分を含んだ厄介な形式なので、別の表現として $\beta(s) = w(s)^2$ なる変数変換を適用する。式 (47) の $w(s)$ での表現は、

$$\frac{d^2 w(s)}{ds^2} + K(s)w(s) - \frac{1}{w(s)^3} = 0 \quad (188)$$

で与えることができる。 $K(s)$ への摂動を $\Delta K(s)$ として摂動を受けた解を $w(s) = w_0(s) + \Delta w(s)$ として

$$w_0''(s) + K(s)w_0(s) - \frac{1}{w_0(s)^3} = 0 \quad (189)$$

$$(w_0(s) + \Delta w(s))'' + (K(s) + \Delta K(s))(w_0(s) + \Delta w(s)) - \left(\frac{1}{w_0(s) + \Delta w(s)} \right)^3 = 0 \quad (190)$$

と表せる。これを $\Delta w(s)$ と $\Delta K(s)$ の一次微小量まで展開すると

$$\Delta w''(s) + \left(K(s) + \frac{3}{w_0^4(s)} \right) \Delta w(s) + w_0(s) \Delta K(s) = 0 \quad (191)$$

が得られる。式 (191) の Green 関数は次の Hill 方程式の一般解を用いて表現できる。

$$\Delta w''(s) + \left(K(s) + \frac{3}{w_0^4(s)} \right) \Delta w(s) = 0 \quad (192)$$

Hill 方程式 (192) の一般解は次の形で書き下すことができる。

$$\Delta w(s) = A\sqrt{\tilde{\beta}(s)} \cos(\tilde{\phi}(s) - \theta) \quad (193)$$

Hill 方程式の解法に従い、任意定数 c を用いて $\tilde{\beta}(s)$ と $\tilde{\phi}(s)$ を $\beta(s) = w_0^2(s)$ に留意して書き下すと

$$\frac{1}{2} \frac{\tilde{\beta}''}{\tilde{\beta}} - \frac{1}{4} \left(\frac{\tilde{\beta}'}{\tilde{\beta}} \right)^2 - \left(\frac{c}{\tilde{\beta}} \right)^2 + K(s) + \frac{3}{\beta(s)^2} = 0 \quad \tilde{\phi}'(s) = \frac{c}{\tilde{\beta}(s)} \quad (194)$$

が得られる。式 (194) に式 (47) を代入し $K(s)$ を消去すると、 $c = 2$ の時に次の特解が存在することが判る。

$$\tilde{\beta}(s) = \beta(s) \quad \tilde{\phi}'(s) = \frac{2}{\beta(s)} \quad (195)$$

ここで、 c を恣意的に選んでいるが、 c は $\tilde{\beta}(s)$ をスケールする任意定数なのでこの選択は解の一般性を損なわない。以上から、Hill 方程式 (192) の一般解が得られる。

$$\Delta w(s) = A\sqrt{\beta(s)} \cos(2\phi(s) - \theta) \quad (196)$$

次に、 $\Delta K(s) = \delta(s - s_0)$ と置いて Green 関数を求めよう。二つの領域 $s < s_0$ と $s_0 < s$ での解を $\Delta w_L(s)$ と $\Delta w_R(s)$ で表すと、 $\Delta w(s)$ を C^0 連続として $s = s_0$ での境界条件は

$$A_R \sqrt{\beta_0} \cos(2\phi_0 - \theta_R) = A_L \sqrt{\beta_0} \cos(2\phi_0 - \theta_L) \quad (197)$$

$$\frac{A_R}{\sqrt{\beta_0}} (\alpha_0 \cos(\phi_0 - \theta_R) + 2 \sin(2\phi_0 - \theta_R)) = \sqrt{\beta_0} + \frac{A_L}{\sqrt{\beta_0}} (\alpha_0 \cos(\phi_0 - \theta_L) + 2 \sin(2\phi_0 - \theta_L)) \quad (198)$$

で与えられる。 $\Delta w(s)$ は周期境界条件 $\Delta w(s + C) = \Delta w(s)$ を満たすので $s = s_0 + C - 0$ と $s = s_0 - 0$ の間の周期境界条件を書き下すと、

$$A_R \sqrt{\beta_0} \cos(2\phi_0 + 4\pi\nu - \theta_R) = A_L \sqrt{\beta_0} \cos(2\phi_0 - \theta_L) \quad (199)$$

$$\frac{A_R}{\sqrt{\beta_0}} (\alpha_0 \cos(2\phi_0 + 4\pi\nu - \theta_R) + 2 \sin(2\phi_0 + 4\pi\nu - \theta_R)) = \frac{A_L}{\sqrt{\beta_0}} (\alpha_0 \cos(2\phi_0 - \theta_L) + 2 \sin(2\phi_0 - \theta_L)) \quad (200)$$

が得られる。従って、 A_R, A_L が有界な解は

$$\theta_L = 2\phi_0 - 2\pi\nu + (m - n)\pi \quad (201)$$

$$\theta_R = 2\phi_0 + 2\pi\nu + (m + n)\pi \quad (202)$$

$$A_L = A_R = -\frac{\beta_0}{4 \sin 2\pi\nu} (-1)^{m+n} \quad (203)$$

で与えられる。従って、Green 関数は以下のように書き下せる。

$$\Delta w(s) = \begin{cases} -\frac{\beta_0}{4 \sin 2\pi\nu} \sqrt{\beta(s)} \cos(2\phi(s) - 2\phi_0 + 2\pi\nu) & (s_0 - C < s < s_0) \\ -\frac{\beta_0}{4 \sin 2\pi\nu} \sqrt{\beta(s)} \cos(2\phi(s) - 2\phi_0 - 2\pi\nu) & (s_0 < s < s_0 + C) \end{cases} \\ = -\frac{\beta_0}{4 \sin 2\pi\nu} \sqrt{\beta(s)} \cos(|2\phi(s) - 2\phi_0| - 2\pi\nu) \quad (s_0 - C < s < s_0 + C) \quad (204)$$

ここで、 $\beta(s)$ の表現に戻して

$$\Delta\beta(s) = (w_0(s) + \Delta w(s))^2 - w_0(s)^2 \sim 2\sqrt{\beta(s)}\Delta w(s) \\ = -\frac{\beta_0}{2 \sin 2\pi\nu} \beta(s) \cos(|2\phi(s) - 2\phi_0| - 2\pi\nu) \quad (s_0 - C < s < s_0 + C) \quad (205)$$

を得る。全周に渡って積分することで一般の $\Delta K(s)$ に付いての表式が得られる。

$$\Delta\beta(s) = -\frac{\beta(s)}{2\sin 2\pi\nu} \oint_C \beta(s')\Delta K(s') \cos(2|\phi(s) - \phi(s')| - 2\pi\nu) ds' \quad (206)$$

Phase Advance の変化 $\Delta\phi(s) = \phi(s) - \phi_0(s)$ は、原点を $\Delta\phi(0) = 0$ とし $\beta(s)$ の積分によって次のように与えることが出来る。

$$\begin{aligned} \Delta\phi(s) &= \int_0^s \left(\frac{1}{\beta(s') + \Delta\beta(s')} - \frac{1}{\beta(s')} \right) ds' = - \int_0^s \frac{\Delta\beta(s')}{\beta(s')^2} ds' \\ &= \frac{1}{2\sin 2\pi\nu} \oint_C \beta(s')\Delta K(s') \left(\int_0^s \phi'(s'') \cos(2|\phi(s'') - \phi(s')| - 2\pi\nu) ds'' \right) ds' \\ &= \frac{1}{2\sin 2\pi\nu} \oint_C \beta(s')\Delta K(s') \int_0^s d \left(\frac{\text{sign}(\phi(s'') - \phi(s'))}{2} \sin(2|\phi(s'') - \phi(s')| - 2\pi\nu) \right) ds' \quad (207) \end{aligned}$$

ここで、 $\int_0^s ds''$ での被積分関数の定積分が $s'' = s'$ で不連続であるので、積分区間を $[0, s']$ と $[s', s]$ に分割すると $\phi(s)$ の単調性から不連続性は各積分区間の端点に封じ込めることが出来る。

$$\begin{aligned} \Delta\phi(s) &= \frac{1}{2\sin 2\pi\nu} \oint_C \beta(s')\Delta K(s') \left\{ \frac{\text{sign}(\phi(s) - \phi(s'))}{2} (\sin(2|\phi(s) - \phi(s')| - 2\pi\nu) + \sin 2\pi\nu) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\text{sign}(\phi(s') - \phi(0))}{2} (\sin(2|\phi(s') - \phi(0)| - 2\pi\nu) + \sin 2\pi\nu) \right\} ds' \quad (208) \\ &= \frac{1}{2\sin 2\pi\nu} \oint_C \beta(s')\Delta K(s') \{ 2\sin 2\pi\nu \sin^2 \min(\phi(s) - \phi(s'), 0) \\ &\quad + \sin \phi(s) \cos(2\phi(s') - \phi(s) - 2\pi\nu) \} \quad (209) \end{aligned}$$

ここで、Phase Advance 原点に $\phi(0) = 0$ を選んでいる。また、Betatron Tune の変化 (Tune Shift と呼ばれる) $\Delta\nu = (\Delta\phi(s+C) - \Delta\phi(s))/2\pi$ は式 (208) に $s = C$ を代入して次のように与えることが出来る。

$$\Delta\nu = \frac{\Delta\phi(C) - \Delta\phi(0)}{2\pi} = \frac{1}{4\pi} \oint_C \beta(s')\Delta K(s') ds' \quad (210)$$

4.5.1 Global- β Measurement

β 関数の Correction を行なうためには、これを測定する必要があるが、 β 関数を直接測れるモニターは存在しない。 β 関数が、測定可能な Tune とビーム位置に現れる式には、式 (210) と式 (167) がある。式 (210) を応用するのであれば、Quadrupole の K_1 の変化と Tune Shift の対応から Quadrupole での β 関数を求めることになるが、Arc 部の Quadrupole は Cell 構造のために独立していないので使いづらい。よって、式 (167) に基づいた Steering と BPM による β 測定法を採用する。

まず、 M 個の BPM のビーム位置を x_i 、 β 関数と位相を β_i^M, ϕ_i^M 、 N 個の Steering での β 関数と位相を β_j^S, ϕ_j^S と置いて、 j 番目の Steering の K_0 を Δk_j だけ動かした場合の x_i の変化を Δx_i^j で表すと、式 (167) は Steering の厚みを無視すると次のように書き直せる。

$$\Delta x_i^j = \frac{1}{2\sin \pi\nu} \sqrt{\beta_i^M} \sqrt{\beta_j^S} \Delta k_j \cos(|\phi_i^M - \phi_j^S| - \pi\nu) \quad (211)$$

ここで、 $\phi(s)$ が単調関数で有ることから、 $\phi_i^M - \phi_j^S$ の符号は Steering と BPM の位置関係のみに依存するので、 i, j にのみ依存する以下の定数が存在する。

$$S_{ij} = \text{sign}(\phi_i^M - \phi_j^S) \quad (212)$$

式 (212) で導入した定数 S_{ij} を用いて、式 (211) を展開すると次のように二種類の展開形が得られる。

$$\begin{aligned} \Delta x_i^j &= \left(\Delta k_j \sqrt{\beta_j^S} \cos \phi_j^S \cos \pi\nu - \Delta k_j \sqrt{\beta_j^S} \sin \phi_j^S S_{ij} \sin \pi\nu \right) \sqrt{\beta_i^M} \cos \phi_i^M \\ &\quad + \left(\Delta k_j \sqrt{\beta_j^S} \sin \phi_j^S \cos \pi\nu + \Delta k_j \sqrt{\beta_j^S} \cos \phi_j^S S_{ij} \sin \pi\nu \right) \sqrt{\beta_i^M} \sin \phi_i^M \end{aligned} \quad (213)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\sqrt{\beta_i^M} \cos \phi_i^M \cos \pi\nu + \sqrt{\beta_i^M} \sin \phi_i^M S_{ij} \sin \pi\nu \right) \Delta k_j \sqrt{\beta_j^S} \cos \phi_j^S \\ &\quad + \left(\sqrt{\beta_i^M} \sin \phi_i^M \cos \pi\nu - \sqrt{\beta_i^M} \cos \phi_i^M S_{ij} \sin \pi\nu \right) \Delta k_j \sqrt{\beta_j^S} \sin \phi_j^S \end{aligned} \quad (214)$$

したがって、式 (211) は、合計 $M \times N$ 個の測定値 Δx_i^j に対しての $2M$ 個の未知量 $\{\sqrt{\beta_i^M} \cos \phi_i^M, \sqrt{\beta_i^M} \sin \phi_i^M\}$ と $2N$ 個の未知量 $\{\Delta k_j \sqrt{\beta_j^S} \cos \phi_j^S, \Delta k_j \sqrt{\beta_j^S} \sin \phi_j^S\}$ を当てはめる問題と解釈できる。ここで、Steering の K_0 の変化量 Δk_j は未知量自身に含まれ単体で現れないために、この当てはめ問題の結果は Δk_j の設定精度に依存しない。さらに、Steering の厚みを考慮しても未知量 $\{\Delta k_j \sqrt{\beta_j^S} \cos \phi_j^S, \Delta k_j \sqrt{\beta_j^S} \sin \phi_j^S\}$ が積分で表現されるだけで、未知量として扱う限り Steering の厚みは顕わには現れない²³。また、式 (211) は以下の二つの変換に対して不変性を持つ。

$$\forall \lambda > 0, \quad \{\beta_i^M, \beta_j^S\} \mapsto \{\lambda \beta_i^M, \lambda^{-1} \beta_j^S\} \quad (215)$$

$$\forall \delta \in \mathbf{R}, \quad \{\phi_i^M, \phi_j^S\} \mapsto \{\phi_i^M + \delta, \phi_j^S + \delta\} \quad (216)$$

したがって、この式 (211) に対する当てはめ問題の解は、式 (215) に対応する定数倍の不定性と式 (216) に対応する回転変換に対する不定性を持ち、実質的な自由度は $2M + 2N - 2$ 個である²⁴。

さて、式 (211) に対しての $\{\sqrt{\beta_i^M} \cos \phi_i^M, \sqrt{\beta_i^M} \sin \phi_i^M\}$ と $\{\Delta k_j \sqrt{\beta_j^S} \cos \phi_j^S, \Delta k_j \sqrt{\beta_j^S} \sin \phi_j^S\}$ からなる $2M + 2N$ 個の未知量による当てはめ問題を、残差の L_2 ノルム最小化問題で与えると、最小化すべき関数は未知量の四次関数である。残念なことに、二次関数を越える多変数関数の最小化問題に対する効率の良い汎用の解法は存在しない。したがって、発見的解法に頼ることになる。

さて、式 (213) と式 (214) から残差二乗和 $(|r|_2)^2$ の展開形は次のように書き下せる。

$$(|r|_2)^2 = \sum_i^M \left(\sum_j^N \left((C_{S_j} \cos \pi\nu - S_{S_j} S_{ij} \sin \pi\nu) C_{M_i} + (S_{S_j} \cos \pi\nu + S_{S_j} C_{ij} \sin \pi\nu) S_{M_i} - \Delta x_i^j \right)^2 \right) \quad (217)$$

$$= \sum_j^N \left(\sum_i^M \left((C_{M_i} \cos \pi\nu + S_{M_i} S_{ij} \sin \pi\nu) C_{S_j} + (S_{M_i} \cos \pi\nu - S_{M_i} C_{ij} \sin \pi\nu) S_{S_j} - \Delta x_i^j \right)^2 \right) \quad (218)$$

$$C_{M_i} = \sqrt{\beta_i^M} \cos \phi_i^M, \quad C_{S_j} = \Delta k_j \sqrt{\beta_j^S} \cos \phi_j^S$$

$$S_{M_i} = \sqrt{\beta_i^M} \sin \phi_i^M, \quad S_{S_j} = \Delta k_j \sqrt{\beta_j^S} \sin \phi_j^S$$

ここで、式 (217) の解を $\{C_{S_j}, S_{S_j}\}$ の関数、式 (218) の解を $\{C_{M_i}, S_{M_i}\}$ の関数とみなすと、形式的には次のように表せる。

$$\forall \{C_{M_i}, S_{M_i}\}, \quad |r(\{C_{M_i}, S_{M_i}\}, \{C_{S_j}, S_{S_j}\})|_2 \geq |r(F_M(\{C_{S_j}, S_{S_j}\}), \{C_{S_j}, S_{S_j}\})|_2 \quad (219)$$

$$\forall \{C_{S_j}, S_{S_j}\}, \quad |r(\{C_{M_i}, S_{M_i}\}, \{C_{S_j}, S_{S_j}\})|_2 \geq |r(\{C_{M_i}, S_{M_i}\}, F_S(\{C_{M_i}, S_{M_i}\}))|_2 \quad (220)$$

したがって、関数 $F_M(\{C_{S_j}, S_{S_j}\}), F_S(\{C_{M_i}, S_{M_i}\})$ を用いて漸化式

$$\{C_{S_j}^{(n+1)}, S_{S_j}^{(n+1)}\} = F_S(\{C_{M_i}^{(n)}, S_{M_i}^{(n)}\}) \quad (221)$$

$$\{C_{M_i}^{(n+1)}, S_{M_i}^{(n+1)}\} = F_M(\{C_{S_j}^{(n+1)}, S_{S_j}^{(n+1)}\}) \quad (222)$$

$$r^{(n)} = |r(\{C_{M_i}^{(n)}, S_{M_i}^{(n)}\}, \{C_{S_j}^{(n)}, S_{S_j}^{(n)}\})|_2 \quad (223)$$

²³Steering と BPM の間に重なりあう領域が存在しないことを仮定している

²⁴自由度に対して、十分な情報を与えるには $(M-2)(N-2) \geq 6$ が必要

を組み立てると、式 (219) と式 (220) の定義と L_2 ノルムの定義から数列 $\{r^{(1)}, r^{(2)}, \dots\}$ は単調減少かつ下界をもつので収束する。 $r^{(n)}$ が収束した場合、関数 F_M, F_S の定義から、対応する $\{C_{M_i}^{(n)}, S_{M_i}^{(n)}\}$ が不動点であることが主張出来る。

$$r^{(n+1)} = r^{(n)} \quad \Rightarrow \quad \{C_{M_i}^{(n+1)}, S_{M_i}^{(n+1)}\} = \{C_{M_i}^{(n)}, S_{M_i}^{(n)}\} \quad (224)$$

漸化式 (221),(222) から得られる不動点 $\{C_{M_i}^{(\infty)}, S_{M_i}^{(\infty)}\}$ は $2M$ 次元の $\{C_{M_i}, S_{M_i}\}$ 部分空間と $2N$ 次元の $\{C_{S_j}, S_{S_j}\}$ 部分空間で、残差の L_2 ノルムを極小化する。この漸化式は、常に残差ノルムの減少列を成すので初期値 $\{C_{M_i}^{(0)}, S_{M_i}^{(0)}\}$ が最小値と十分に近く、近傍に他の極点が存在しなければ、残差ノルム最小の解へ収束する。

実用上は、漸化式 (221), (222) の収束が遅いことが障害になるが、式 (224) より漸化式の極限を求めることは $2M$ 次元での写像の不動点を解くことと等価である。

$$\{C_{M_i}^{(\infty)}, S_{M_i}^{(\infty)}\} = F_M(F_S(\{C_{M_i}^{(\infty)}, S_{M_i}^{(\infty)}\})) \quad (225)$$

したがって、 $2M$ 次元での $2M$ 本の連立方程式の解を求める問題に帰着し、全微分可能であれば Newton-Raphson 法で効率良く求めることができる。式 (217),(218) の残差二乗和の定義から関数 F_M, F_S は有理関数で与えられるので、極を除けば全微分可能で、Newton-Raphson 法による更新列は形式的には以下で与えられる。

$$\begin{aligned} (\mathbf{J}^{(n)} - \mathbf{I})(\mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x}^{(n)}) &= -(\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(n)}) - \mathbf{x}^{(n)}), & \mathbf{J}_{ij}^{(n)} &= \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}^{(n)}} \\ \mathbf{x}^{(n)} &= \{C_{M_i}^{(n)}, S_{M_i}^{(n)}\}, & \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(n)}) &= F_M(F_S(\{C_{M_i}^{(n)}, S_{M_i}^{(n)}\})) \end{aligned} \quad (226)$$

実用に供するには、式 (215), (216) の二つの不定性があるので、式 (226) の収束判定前に正規化を行なう、関数 F_S で求まる $\{C_{S_j}^{(n)}, S_{S_j}^{(n)}\}$ に拘束条件を科すなどの工夫が必要である。また、Newton-Raphson 法が収束した解は、漸化式 (221),(222) を満たすが、一般に Newton-Raphson 法が収束しても同じ初期値を与えた漸化式の極限と違う解に収束している可能性があることに注意する必要がある。また、収束性に関しては、関数 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ の導関数を差分から推定した場合、推定値の精度が悪いと収束性が損なわれることに留意する必要がある。

測定に用いる Steering の選択には任意性が存在するが、実用的には BPM の測定精度や測定時の COD の大きさの観点から、Steering の Δk_j は $\Delta k_j \sqrt{\beta_j^S}$ が一定になるよう選ぶべきであり、Steering の Phase Advance は得られる情報が縮退しないようになるべく分散するように選ぶべきである。Phase Advance が π 異なる Steering 同士の COD が Steering 近傍を除けば逆符号になることを考慮すれば

$$\phi_j^S - \phi_1^S \sim \frac{j-1}{N} \pi + n\pi \quad j = 2, 3, \dots, N \quad n \in \mathbf{R} \quad (227)$$

が妥当であろう。Steering のもう一つの選択基準は、式 (170) による軌道長変化の有無である。Steering での Dispersion Function $\eta(s)$ が零で無い場合は、 Δk と $\eta(s)$ に比例する軌道長変化が発生し、COD に運動量偏差²⁵による Dispersion 成分が紛れ込むため、 $\eta(s)$ の小さい場所の Steering を選んだ方が問題が簡単になる。また、 $\{C_{M_i}, S_{M_i}\}$ に対する反復法の初期値 $\{C_{M_i}^{(0)}, S_{M_i}^{(0)}\}$ としては、 β 関数と Phase Advance の設計値を選ぶと比較的上手くゆく。

4.5.2 Global- β Corrector

Global- β Correction では、測定された β 関数 $\beta(s)$ と Phase Advance $\phi(s)$ 、Betatron Tune Shift $\Delta\nu$ を Quadrupole を用いて補正する。Quadrupole に対する補正では、Quadrupole の電磁石電源を含めた較正誤差を想定し、

²⁵ 平衡状態での周回時間は高周波空洞の加速周波数で決まっているので、軌道長の変化は平衡運動量に変化をもたらす。その比例係数は、次節で定義する Slippage Factor で与えられる

Quadrupole の強さ K_1 を相対的に ΔAF ²⁶変化させる。

$$K_1^{corrected} = (1 + \Delta AF)K_1 \quad (228)$$

したがって、 ΔAF からの応答行列 A は式 (206),(209),(210) によって

$$\Delta\nu_\chi = \frac{S_\chi}{4\pi} \sum_j \Delta AF_j \oint_C \beta_\chi(s') k_j(s') ds' \quad (S_x = 1, S_y = -1) \quad (229)$$

$$\frac{\Delta\beta_{\chi i}^M}{\beta_{\chi i}^M} = -\frac{S_\chi}{2 \sin \pi\nu_\chi} \sum_j \Delta AF_j \oint_C \beta_\chi(s') k_j(s') \cos(|2\phi_\chi(s') - 2\phi_{\chi i}^M| - \pi\nu) ds' \quad (230)$$

$$\Delta\phi_{\chi i}^M = \frac{S_\chi}{2 \sin \pi\nu_\chi} \sum_j \Delta AF_j \oint_C \beta_\chi(s') k_j(s') \{2 \sin 2\pi\nu_\chi \sin^2 \min(\phi_{\chi i}^M - \phi_\chi(s'), 0) + \sin \phi_{\chi i}^M \cos(2\phi_\chi(s') - \phi_{\chi i}^M - 2\pi\nu_\chi)\} ds' \quad (231)$$

で与えることが出来る。ここで、 χ は座標軸 x もしくは y であり、 S_χ は ΔAF_j からの寄与の符号、 ΔAF_j は j 番目の Quadrupole 電源への補正量、 $k_j(s)$ は j 番目の電源で励磁される Quadrupole の K_1 分布を表す。また、 $\beta_{\chi i}^M, \phi_{\chi i}^M$ はそれぞれ j 番目の BPM での χ 軸の β Function と Phase Advance を表している。式 (229),(230),(231) の積分項の大きさはほぼ同じ大きさなので、 ΔAF_i からの寄与は $\Delta\nu$ が相対的に $2 \sin \pi\nu$ 倍小さく見積もられる。しかし、直接測定できる $\Delta\nu$ が最も精度良く測定できるので、残差ノルムの重み付けでは $\Delta\nu$ に $1/2 \sin \pi\nu$ から $1/2 \sin \pi\nu$ の 10 倍程度の重みを与える。同様に、強さ K_2 の Sextupole の水平移動 Δx から発生する強さ $-K_2\Delta x$ の Quadrupole からの寄与も、Global- β Correction に利用でき、応答行列は式 (229),(230),(231) の $k_j(s)$ を Sextupole の K_2 分布で置き換え ΔAF_j の代わりに $-\Delta x_j$ を与えることで得られる。

注意すべき点は、前節で求めた β_i^M, ϕ_i^M には、 β_i^M の定数倍と ϕ_i^M の原点に関する不定性が挙げられる。測定した β_i^M, ϕ_i^M は、設計値からかけ離れた不自然な値にならないよう、何らかの正規化を施されていることを仮定すると、その不定性によるずれは、一次の微小量であることが期待できる。したがって、対処としては大きくわけて三種に分類できる。第一の方法では、 β_i^M, ϕ_i^M に施されてる正規化が信用できるとみなして、そのまま β_i^M, ϕ_i^M を利用する。第二の方法では、 $\Delta\beta_i^M/\beta_i^M, \Delta\phi_i^M$ へ不定性に伴う一次の微小量 $\Delta\beta, \Delta\phi$ が含まれるとみなして、補正量 $\Delta AF_j, \Delta x_j$ と共に解く。第三の方法は、第二の方法で導入した未知量 $\Delta\beta, \Delta\phi$ を BPM 間の差分によって消去した応答行列を用いる方法である。第二の手法の利点は、未知量 $\Delta\beta, \Delta\phi$ を見積もる事ができることであり、逆に重み付けや SVD の閾値の選び方によっては何も対処を行わない場合よりも不適切な解を選ぶ可能性が有る。また、第三の手法は未知量 $\Delta\beta, \Delta\phi$ に依存しないが、差分を取ることによる桁落ちの危険性が存在する。

KEKB では、入射点と $-I'$ -Cell を構成する Quadrupole を除く全周の Quadrupole を使って、Tune Shift で $\pm 5 \times 10^{-4}$ 、 $\Delta\beta/\beta$ の分散で 3 ~ 6%、 $\Delta\phi$ の分散で 30 ~ 50mrad まで補正している。実用的な SVD 閾値は 0.1 ~ 0.01 程度である。

4.6 Dispersion Correction

運動方程式の運動量偏差 $\delta = \Delta p/p_0$ 依存の非同次項による特解で定義される Dispersion Function $\eta_\chi(s)$ を、軌道の運動量分散という側面から解釈し直すと、微小な運動量変化に伴う閉軌道の変形率として次のように再定義できる。

$$\eta_\chi(s) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\chi(s)|_{\delta=\epsilon} - \chi(s)|_{\delta=0}}{\epsilon} \quad (232)$$

定義から明らかなように、Dispersion Function はビームの運動量(エネルギー)を制御できれば軌道の変位から直接測定出来る量である。しかし、平衡状態にあるリングではビームエネルギーのみを直接変えることは

²⁶Amplitude Fudge

出来ないで、実際の測定では高周波加速電場の周波数を変えることでビームの周回周波数を経由して平衡エネルギーを変化させる。では始めに、測定に必要な周波数偏差と運動量の関係式と補正に必要な Dispersion Function の表式の導出を行なおう。

一般に、基準曲線が運動方程式を満たしてない場合も含めて考えると、Betatron 振動を含まない非同次方程式の特解のみを考慮すれば、運動量偏差 0 での特解 $\chi_0(s)$ と運動量偏差 $\delta = \epsilon$ での特解 $\chi_\epsilon(s)$ を用いて Dispersion Function $\eta_\chi(s)$ は次のように表現できる。

$$\eta_\chi(s) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\chi_\epsilon(s) - \chi_0(s)}{\epsilon}, \quad \begin{cases} \chi_0''(s) + K_\chi(s)|_{\delta=0} \chi_0(s) + H_\chi(s)|_{\delta=0} = 0 \\ \chi_\epsilon''(s) + K_\chi(s)|_{\delta=\epsilon} \chi_\epsilon(s) + H_\chi(s)|_{\delta=\epsilon} = 0 \end{cases} \quad (233)$$

運動量偏差 δ の一次まで展開して整理すると、

$$\left(\frac{\chi_\epsilon(s) - \chi_0(s)}{\epsilon} \right)'' + K_\chi(s)|_{\delta=0} \left(\frac{\chi_\epsilon(s) - \chi_0(s)}{\epsilon} \right) + \left. \frac{\partial H_\chi(s)}{\partial \delta} \right|_{\delta=0} + \left. \frac{\partial K_\chi(s)}{\partial \delta} \right|_{\delta=0} \chi_0(s) + \epsilon \left. \frac{\partial K_\chi(s)}{\partial \delta} \right|_{\delta=0} \left(\frac{\chi_\epsilon(s) - \chi_0(s)}{\epsilon} \right) = 0 \quad (234)$$

が得られる。極限 $\epsilon \rightarrow 0$ を作用させて次式を得る。

$$\eta_\chi''(s) + K_\chi(s)|_{\delta=0} \eta_\chi(s) + \left(\left. \frac{\partial H_\chi(s)}{\partial \delta} \right|_{\delta=0} + \left. \frac{\partial K_\chi(s)}{\partial \delta} \right|_{\delta=0} \chi_0(s) \right) = 0 \quad (235)$$

関数 $K_\chi(s), H_\chi(s)$ は、Magnetic Rigidity $B\rho$ で規格化させた磁場と座標系の曲率 $G(s)$ 、ねじれ率 $\kappa(s)$ で書き下されるが、座標系と磁場 B が運動量偏差 δ に依存しないので、 $K_\chi(s), H_\chi(s)$ の δ 微分はすべて Magnetic Rigidity $B\rho$ を通じて表れ、式 (19) より δ 微分は以下のように与えられる。

$$\frac{\partial}{\partial \delta} \frac{1}{B\rho} = -\frac{1}{B\rho} \quad (236)$$

さまざまな仮定を導入する前の運動方程式 (30), (31) から $K_\chi(s), H_\chi(s)$ を取り出すと、

$$\left. \frac{\partial H_x(s)}{\partial \delta} \right|_{\delta=0} + \left. \frac{\partial K_x(s)}{\partial \delta} \right|_{\delta=0} x_0(s) = -K_0 - (K_1 + \kappa K_s + 2GK_0)x_0(s) \quad (237)$$

$$\left. \frac{\partial H_y(s)}{\partial \delta} \right|_{\delta=0} + \left. \frac{\partial K_y(s)}{\partial \delta} \right|_{\delta=0} y_0(s) = \bar{K}_0 + (K_1 - \kappa K_s)y_0(s) \quad (238)$$

ただし、以下の Decoupling Condition を仮定している。

$$K_s - 2\kappa = 0 \quad (239)$$

$$\bar{K}_1 + \bar{K}_0 G + K'_s - \kappa' = 0 \quad (240)$$

$$\bar{K}_1 + 2\bar{K}_0 G - \kappa' = 0 \quad (241)$$

特に、条件 (33) を満たし基準曲線が運動方程式の解である場合、 $x_0(s) = y_0(s) = 0$ となり、式 (237), (238) は次のように簡略化される。

$$\left. \frac{\partial H_x(s)}{\partial \delta} \right|_{\delta=0} + \left. \frac{\partial K_x(s)}{\partial \delta} \right|_{\delta=0} x_0(s) = -G, \quad \left. \frac{\partial H_y(s)}{\partial \delta} \right|_{\delta=0} + \left. \frac{\partial K_y(s)}{\partial \delta} \right|_{\delta=0} y_0(s) = 0 \quad (242)$$

したがって、条件 (33) のもとでは、 $\eta_y(s) = 0$ が成立ち、 $\eta_x(s)$ は強さ $\Delta H_x(s) = -G(s) = -1/\rho(s)$ の Dipole Kick が分布する場合の運動方程式に対応する。したがって、Dipole Error に対する COD の表式 (167) を用いて書き直すと次式が得られる。

$$\eta(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)}}{2 \sin \pi\nu} \oint_C \sqrt{\beta(s')} \cos(|\phi(s') - \phi(s)| - \pi\nu) \frac{ds'}{\rho(s')} \quad (243)$$

また、Dispersion による軌道長の変化 ΔC は、次式のように書き下せる。

$$\Delta C = C - C_0 \quad (244)$$

$$C = \oint_C \left(\rho(s) + \eta(s) \frac{\Delta p}{p_0} \right) \frac{ds}{\rho(s)}, \quad C_0 = \oint_C ds \quad (245)$$

積分を整理すると次のように書ける。

$$\frac{\Delta C}{C_0} = \frac{1}{C_0} \oint_C \frac{\eta(s)}{\rho(s)} ds \frac{\Delta p}{p_0} \quad (246)$$

この右辺の定数は、Momentum Compaction Factor α_c と呼ばれる。

次に、周長偏差 $\Delta C/C_0$ と周回周波数偏差 $\Delta f/f_0$ との関係を考える。周回時間 $T = 1/f$ は、周長 C とビームの速度 v を用いて、

$$T_0 + \Delta T = \frac{C_0}{v_0} \frac{1 + \frac{\Delta C}{C_0}}{1 + \frac{\Delta v}{v_0}} \quad (247)$$

と書き下せる。これを一次の微小量までで展開すると次式が得られる。

$$-\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{\Delta T}{T_0} = \frac{\Delta C}{C_0} - \frac{1}{\gamma^2 - 1} \frac{\Delta \gamma}{\gamma_0} = \left(\alpha_c - \frac{1}{\gamma^2} \right) \frac{\Delta p}{p_0} \quad (248)$$

ここで、定数 $(\alpha_c - 1/\gamma^2)$ は運動量による周回時間のずれを関係付ける量で Slippage Factor と呼ばれ、これがゼロとなる γ を Transition Gamma $\gamma_t = 1/\sqrt{\alpha_c}$ と呼称する。したがって、Slippage Factor が零で無ければ、周回周波数を制御することで運動量を制御できる。

4.6.1 Dispersion Measurement

式 (232) と式 (248) を組み合わせることで、リングの加速周波数 f_{ring} を制御して BPM で軌道を測定することで Dispersion Function $\eta(s)$ を測定できる。中点差分の公式を適用すれば、

$$\eta_{meas}(s) \sim - \left(\alpha_c - \frac{1}{\gamma^2} \right) f_0 \frac{x_{f_0+\Delta f}(s) - x_{f_0-\Delta f}(s)}{2\Delta f} + O(\Delta f^3) \quad (249)$$

が得られる。測定時間に比べて十分に遅い軌道ドリフトを考慮すると、式 (249) は次のように書き直せる。

$$\eta_{meas}(s) \sim - \left(\alpha_c - \frac{1}{\gamma^2} \right) f_0 \frac{x_{f_0+\Delta f}^{t_0}(s) + x_{f_0+\Delta f}^{t_0+2\Delta t}(s) - 2x_{f_0-\Delta f}^{t_0+\Delta t}(s)}{4\Delta f} + O(\Delta f^3) \quad (250)$$

ここで、 t_0 は最初の測定時刻、 Δt は測定間隔である。

さて、ここで与えた Dispersion Function の測定公式 (250) の右辺には、Dispersion Function から決定される定数 Momentum Compaction Factor α_c が含まれている。つまり、式 (250) 自身に測定対象である Dispersion Function が含まれるという矛盾がある。式 (250) の α_c に α_{c0} を採用することで生じる誤差は、測定対象である Dispersion Function が $\eta_0(s) + \Delta\eta(s)$ で表わせるとして、 $\eta_0(s)\Delta\alpha_c/(\alpha_{c0} - 1/\gamma^2)$ 程度であり、 α_c の誤差を含んだ表式は次式となる。

$$\eta_{meas}(s) \sim \eta_0(s) + \Delta\eta(s) + \frac{\Delta\alpha_c}{\alpha_{c0} - \frac{1}{\gamma^2}} \eta_0(s) \quad (251)$$

$$\Delta\alpha_c = \oint_C \frac{\Delta\eta(s)}{\rho(s)} ds \quad (252)$$

s に付いての内積を用いた $\eta_0(s)$ による正規化で $\Delta\alpha_c$ を消去した場合は、次の表式が得られる。

$$\left(\frac{\eta_0 \cdot \eta_{meas}}{\eta_0 \cdot \eta_0} \right)^{-1} \eta_{meas}(s) \sim \eta_0(s) + \Delta\eta(s) - \frac{\eta_0 \cdot \Delta\eta}{\eta_0 \cdot \eta_0} \eta_0(s) \quad (253)$$

式 (251)、式 (253) の両表式ともに、測定したい微小量 $\Delta\eta(s)$ に比例する不要な項が含まれている。この不要な第三項と測定対象である第二項 $\Delta\eta(s)$ とのノルムの比は、 $\Delta\eta$ が $\eta_0, 1/\rho$ になす角を $\theta_{\eta_0}, \theta_{1/\rho}$ と置くと、式 (251) で $\sqrt{\cos\theta_{\eta_0} \cos\theta_{1/\rho}}$ 、式 (253) で $\cos\theta_{\eta_0}$ 程度である。つまり、Dispersion Error $\Delta\eta$ の分布が η_0 や $1/\rho$ と十分異なれば第三項を無視することが出来る。ここで言う角度は、 s に付いて展開されて空間上での角度なので $\Delta\eta$ と η_0 が並行に近いという状態は、極めて稀であることが期待できる。また、式 (243) から考えて $\Delta\eta$ と η_0 が並行に近い状態は β 関数や $\rho(s)$ に系統的な誤差が有る可能性が高く Dispersion Correction 以前の問題であろう。

KEKB の Dispersion Measurement では、式 (250) による測定に Horizontal 方向では式 (253) の正規化を採用しているが、典型的な正規化係数の 1 からのずれは 10^{-6} 以下である。

4.6.2 Dispersion Corrector

Horizontal Dispersion Correction に付いては、式 (243) によれば、Horizontal Steering の励磁又は偏向電磁石内の Horizontal β Function の操作で Horizontal Dispersion を変えることが出来る。Steering の励磁は COD に影響を与えるので、偏向電磁石周辺の β Function を操作することを考える。強さ K_2 の Sextupole を水平方向に Δx 動かすと強さ $-K_2\Delta x$ の Quadrupole 成分が発生する。式 (206) から、ペアとなる Sextupole で生じる Quadrupole 成分が $\Delta\beta$ に及ぼす影響は 2π の位相差を持っているので、ペアとなる Sextupole を水平方向に反対称に動かせば、発生する Quadrupole 成分による β Function の歪は Sextupole ペアの間で局所化できる。したがって、応答行列は次のように書き下せる。

$$\Delta\eta_{xi}^M = \frac{\sqrt{\beta_{xi}^M}}{4 \sin \pi\nu_x} \sum_j \oint_C \frac{\Delta\beta_{xj}(s')}{\sqrt{\beta_x(s')}} \cos(|\phi_x(s') - \phi_{xi}^M| - \pi\nu_x) \frac{ds'}{\rho(s')} \quad (254)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\beta_{xj}(s')}{\sqrt{\beta_x(s')}} = \frac{\sqrt{\beta_x(s')}}{2 \sin 2\pi\nu_x} \Delta x_j & \left(\oint_C \beta_x(s'') k_{1j}(s'') \cos(|2\phi_x(s'') - 2\phi_x(s')| - 2\pi\nu_x) ds'' \right. \\ & \left. - \oint_C \beta_x(s'') k_{2j}(s'') \cos(|2\phi_x(s'') - 2\phi_x(s')| - 2\pi\nu_x) ds'' \right) \end{aligned} \quad (255)$$

ここで、 $\Delta\eta_{xi}^M$ と β_{xi}^M 、 ϕ_{xi}^M はそれぞれ i 番目の BPM での Horizontal Dispersion の変位と Horizontal β Function、Phase Advance を表し、 Δx_j と $k_{1j}(s)$ 、 $k_{2j}(s)$ は、それぞれ j 番目の Sextupole ペアの一台目の移動距離と一台目、二台目の K_2 分布を表す。Sextupole の厚みが無視できる時、式 (255) は次のように簡略化できる。

$$\frac{\Delta\beta_{xj}(s')}{\sqrt{\beta_x(s')}} = \begin{cases} \Delta x_j \sqrt{\beta_x(s')} \beta_{xj} k_j \sin 2(\phi_x(s') - \phi_{xj}) & (\phi_{xj} \leq \phi(s') \leq \phi_{xj} + \pi) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (256)$$

ここで、 β_{xj} 、 ϕ_{xj} 、 k_j は、それぞれ Sextupole ペアの一台目の β Function、Phase Advance と K_2 とする。したがって、Thin Sextupole 近似での完全な応答行列は次式で与えられる。

$$\Delta\eta_{xi}^M = \frac{\sqrt{\beta_{xi}^M}}{4 \sin \pi\nu_x} \sum_j \Delta x_j \beta_{xj} k_j \int_{\phi_{xj}}^{\phi_{xj} + \pi} (\beta_x(\phi_x))^{\frac{3}{2}} \sin 2(\phi_x - \phi_{xj}) \cos(|\phi_x - \phi_{xi}^M| - \pi\nu_x) \frac{d\phi_x}{\rho(\phi_x)} \quad (257)$$

対して、Vertical Dispersion Correction では、基本的に Vertical Dispersion が存在しない²⁷⁾ので、Vertical Dispersion は主に XY-Coupling による Horizontal Dispersion の回り込みであると理解できる。つまり、Vertical Dispersion Correction は XY-Coupling Correction の一種と解釈できる。ただし、XY-Coupling Correction と異なるのは、回り込む Horizontal 軌道が Betatron 振動では無く Horizontal Dispersion であり、Betatron 振動による軌道はペアの Sextupole 間で反対称の位置を通過するのに対して、Horizontal Dispersion による軌道は、対称な位置を通過するように設計されている点である。強さ K_2 の Sextupole を Δy 移動させて生じる Skew

²⁷⁾KEKB のリング交差点部にある LER の Vertical Chicane や、衝突点付近の Skew Quadrupole に区間が例外的に Vertical Dispersion を持っている

Quadrupole の強さは $-K_2 \Delta y$ なので、 π の位相差を持つペアの Sextupole から生じる Skew Quadrupole 成分は、Sextupole を反対称に動かすことで Betatron 振動に対しては Sextupole ペア間の局所的 XY-Coupling を生み出し、Dispersion に対しては Dispersion Coupling を生じる。したがって、 $\Delta \eta_{yi}^M$ を i 番目の BPM での Vertical Dispersion の変位、 Δy_j を j 番目の Sextupole ペアの一台目の移動距離として、式 (254),(255) と同様の記号を用いて式 (175) から応答行列を次式で与えることが出来る。

$$\Delta \eta_{yi}^M = -\frac{\sqrt{\beta_{yi}^M}}{2 \sin \pi \nu_y} \sum_j \Delta y_j \left(\oint_C k_{1j}(s') \sqrt{\beta_y(s')} \eta_x(s') \cos(|\phi_y(s') - \phi_{yi}^M| - \pi \nu_y) ds' \right. \\ \left. - \oint_C k_{2j}(s') \sqrt{\beta_y(s')} \eta_x(s') \cos(|\phi_y(s') - \phi_{yi}^M| - \pi \nu_y) ds' \right) \quad (258)$$

式 (257) と同様に、Sextupole の厚みを無視すれば

$$\Delta \eta_{yi}^M = \begin{cases} -\frac{\sqrt{\beta_{yi}^M}}{\sin \pi \nu_y} \sum_j \Delta y_j k_j \eta_{xj} \sqrt{\beta_{yj}} \cos \pi \nu_y \cos(\phi_{yi}^M - \phi_{yj}) & (\phi_{yj} \leq \phi_{yi}^M \leq \phi_{yj} + \pi) \\ -\frac{\sqrt{\beta_{yi}^M}}{\sin \pi \nu_y} \sum_j \Delta y_j k_j \eta_{xj} \sqrt{\beta_{yj}} \cos(|\phi_{yi}^M - \phi_{yj}| - \pi \nu_y) & (otherwise) \end{cases} \quad (259)$$

ここで、 $\beta_{yj}, \phi_{yj}, \eta_{xj}$ は、それぞれ j 番目の Sextupole ペアの Vertical β Function、Phase Advance と Horizontal Dispersion とする。

KEKB では、リングの周波数を $\pm 2 \times 10^{-7}$ 程度振って測定を行い $\Delta \eta$ の分散で $\sigma_{\Delta \eta_x}, \sigma_{\Delta \eta_y}$ 共に 10mm 程度まで補正することができる。

5 謝辞

本稿をまとめるにあたり、数々の助言をくださった小磯 晴代助教授に感謝します。講師の機会を与えてくださった高エネルギー加速器科学研究奨励会ならびに生出 勝宣研究主幹、鎌田 進教授に感謝します。