

## 1 はじめに

加速器は学術から産業界まで幅広い分野で使われる実験装置である。特に素粒子物理学の分野での活躍は目覚ましく、新粒子の発見や理論の精密検証などに大きな貢献をしてきた。加速空洞はそのような加速器の心臓部とも言えるがコンポーネントだが、その機能と姿形は加速器の種類によってずいぶん異なる。

KEKBの常伝導加速空洞はユニークで特殊なケースかも知れない。しかし、その加速空洞を説明するために必要な知識は、他のタイプの加速器の高周波(RF)加速を考える上でも基礎となることであろう。本書では細かい式の導出や高度な専門知識の説明はできるだけ避け、なるべくイメージとして理解できるように心掛けたつもりである。本書が様々な目的を持たれた読者の役に少しでも立てば幸いである。

本書の構成は以下の様である。まず、加速空洞の基本形であるピルボックス空洞を考える。そして、その空洞内の固有モード、空洞を特徴付ける諸量などを単純なピルボックス空洞から始め、それをより現実的な状態に持って行きながら解説をする(図1-(a)→(b)→(c)→(d))。また、大電流ビームを加速する上で極めて重要になるビームローディングと結合パンチ不安定性について、それぞれ節を設けて説明する。最後に、KEKBの常伝導加速空洞であるARES空洞システムの紹介と、その将来のアップグレードについてお話しする。尚、著者の力量不足もあり、RFフィードバック及び超伝導加速空洞に関しては一切触れていない。興味のある方はそれぞれ参考文献[1]、[2]を読んで頂きたい。

## 2 ピルボックス型加速空洞

加速器内を走るビーム粒子は、加速器のある区間に設置されている加速空洞でエネルギーを得て加速される。加速空洞の径はビームパイプのそれよりも大きく、そこには加速のための電磁場が閉じ込められている。この節では加速空洞の基本形であるピルボックス空洞(pillbox cavity)を例にとり説明を進めて行く。

尚、高エネルギー・フロンティアを目指す加速器では、出来るだけ高い加速勾配を得るために、電磁氣的に結合した複数のセルから成る多セル構造が用いられている。しかし、KEKBは高ルミノシティ・フロンティアであり、

大電流をいかにして安定に加速するかが重要となる。さらに、エネルギーも重心系で約10 GeVとそれ程高くない。ゆえに、本講義では単セル空洞のみを取り扱う。

### 2.1 電磁場の固有モード

ピルボックス空洞とは図1-(a)にあるような直角円筒空洞のことである。その図中に示してあるように、空洞の長さを $d$ 、半径を $b$ とし、円筒の軸方向: $z$ 、動径方向: $r$ 、軸まわりの回転角: $\theta$ で表される直角円筒座標を用いる。

それでは、空洞内の電磁場の固有モードを解析的に解いてみよう。空洞内は真空であるとし、また、空洞は完全導体でできているものとする。後で出て来るQ値等の空洞を特徴付ける量は空洞内の壁面損失と関係するが、抵抗率が十分低い場合は完全導体として求めた電磁場を用いて空洞の諸量を計算するのでよい近似となる。では、真空中のマクスウェル方程式を書き下してみよう<sup>1</sup>。

$$\text{rot}\vec{E} + \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

$$\text{rot}\vec{H} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

$$\text{div}\vec{E} = 0 \quad (3)$$

$$\text{div}\vec{H} = 0 \quad (4)$$

ここで、以下を上のマクスウェル方程式に代入する<sup>2</sup>。

$$\vec{E} = \vec{E}_0(x, y)e^{j\omega t - \gamma z} \quad (5)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0(x, y)e^{j\omega t - \gamma z} \quad (6)$$

$t$ は時間を表し、 $\omega$ は角周波数、また、 $x = r \cos \theta$ 、 $y = r \sin \theta$ である。 $\gamma$ は一般には複素数でよい。なぜ電場と磁場を上のようにおけるのか、と疑問を持たれる方がいるかもしれないが、適切な境界条件が課されればマクスウェル方程式には解の唯一性があるので、これで最後までうまく行けば問題ない。電場と磁場をどのような形におくかは物理的な考察や直感で決める。ピルボックス空洞は円形導波管の一部と考えられるので、 $z$ 依存性に関しては平面波の形になると推測される。さて、代入の結果、 $\vec{E}_0$ と $\vec{H}_0$ に関する以下の方程式系が得られる。

$$\frac{\partial^2 E_{0z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{0z}}{\partial y^2} = -k^2 E_{0z} \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 H_{0z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_{0z}}{\partial y^2} = -k^2 H_{0z} \quad (8)$$

<sup>1</sup>本書では国際単位系を用いている。

<sup>2</sup>ここでは工学系でよく使われる虚数単位 $j$ を用いる。

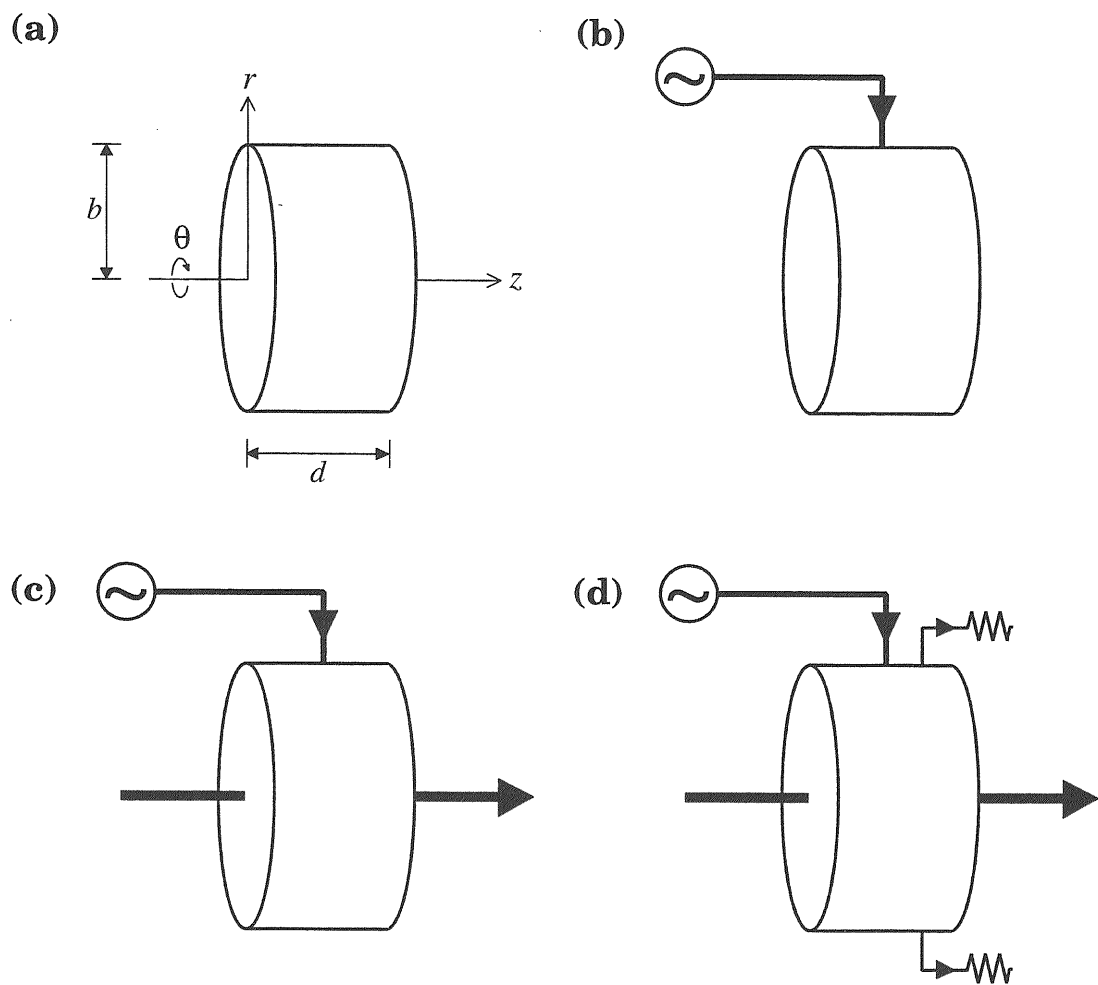


図 1: ピルボックス型加速空洞の概念図。(a) 空洞のみ。(b) 高周波入力ポート付き。(c) 入力ポートとビームパイプ付き。(d) 入力ポートとビームパイプの他、高次モード減衰器付き。

$$k^2 E_{0x} = -j\omega\mu_0 \frac{\partial H_{0z}}{\partial y} - \gamma \frac{\partial E_{0z}}{\partial x} \quad (9)$$

$$k^2 E_{0y} = j\omega\mu_0 \frac{\partial H_{0z}}{\partial x} - \gamma \frac{\partial E_{0z}}{\partial y} \quad (10)$$

$$k^2 H_{0x} = j\omega\epsilon_0 \frac{\partial E_{0z}}{\partial y} - \gamma \frac{\partial H_{0z}}{\partial x} \quad (11)$$

$$k^2 H_{0y} = -j\omega\epsilon_0 \frac{\partial E_{0z}}{\partial x} - \gamma \frac{\partial H_{0z}}{\partial y} \quad (12)$$

ここで、 $\vec{E}_0 = (E_{0x}, E_{0y}, E_{0z})$ 、 $\vec{H}_0 = (H_{0x}, H_{0y}, H_{0z})$ 、および、 $k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 + \gamma^2$  である。上の方程式系をよく観察してみると、まず式 (7) と (8) から電磁場の縦方向成分が求められる。そして、その結果を式 (9)~(12) に代入して横方向成分が求まる、という形になっている。

次に、 $E_{0z} = 0$  と  $H_{0z} = 0$  の時で場合分けをする。 $E_{0z} = 0$  の時の解を TE 波 (Transverse Electric waves) と言ひ、 $TE_{mnp}$  と書く。3 番目の添字を省略して (任意の  $p$  に対して)  $TE_{mn}$  と書くこともある。この時、式 (8) は円筒座標で書くこと以下のようになる。

$$\frac{\partial^2 H_{0z}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_{0z}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_{0z}}{\partial \theta^2} + k^2 H_{0z} = 0 \quad (13)$$

$H_{0z}$  を  $r$  と  $\theta$  で変数分離してみればわかるが、 $r$  に関して上式はベッセルの微分方程式になっている。また、 $\theta$  に関しては単なる単振動である。境界条件は円周上 ( $r = b$ ) で

$$\frac{\partial H_{0z}}{\partial r} = 0 \quad (14)$$

であり、これを課すと式 (13) の解は

$$H_{0z} = AJ_m(kr) \cos(m\theta) \quad (15)$$

となる。ここで、 $A$  は規格化定数、 $m$  はゼロ以上の整数、 $J_m$  は  $m$  次の第一種ベッセル関数で、 $k$  は境界条件により以下のようなある特定の値のみをとることになる。

$$k = j'_{mn}/b \quad (16)$$

ここで、 $j'_{mn}$  は  $J'_m$  ( $J_m$  の導関数) の  $n$  番目のゼロ点である ( $J'_m(j'_{mn}) = 0$ )。  $z = 0, d$  で  $E_r = E_\theta = 0$  という境界条件を満足するために、 $+z$  方向の進行波と  $-z$  方向の進行波をうまく重ね合わせると、以下の解を得る。

$$E_r = A \frac{j\omega\mu_0}{k^2} \frac{m}{r} J_m\left(\frac{j'_{mn}}{b} r\right) \sin m\theta \sin \frac{p\pi z}{d} \quad (17)$$

$$E_\theta = A \frac{j\omega\mu_0}{k^2} \frac{j'_{mn}}{b} J'_m\left(\frac{j'_{mn}}{b} r\right) \cos m\theta \sin \frac{p\pi z}{d} \quad (18)$$

$$E_z = 0 \quad (19)$$

$$H_r = A \frac{1}{k^2} \frac{p\pi}{d} \frac{j'_{mn}}{b} J'_m\left(\frac{j'_{mn}}{b} r\right) \cos m\theta \cos \frac{p\pi z}{d} \quad (20)$$

$$H_\theta = -A \frac{1}{k^2} \frac{p\pi}{d} \frac{m}{r} J_m\left(\frac{j'_{mn}}{b} r\right) \sin m\theta \cos \frac{p\pi z}{d} \quad (21)$$

$$H_z = AJ_m\left(\frac{j'_{mn}}{b} r\right) \cos m\theta \sin \frac{p\pi z}{d} \quad (22)$$

上式以降は時間依存の項 ( $e^{j\omega t}$ ) を省略する<sup>3</sup>。また、 $p$  はゼロ以上の整数、 $\omega$  は以下の式に従い離散的な値をとる固有角周波数 (または共鳴角周波数) である。

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \sqrt{\left(\frac{j'_{mn}}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2} \quad (23)$$

同様に、 $H_{0z} = 0$  の時を考える。この時の解を TM 波 (Transverse Magnetic waves) と言ひ、 $TM_{mnp}$  と書く。3 番目の添字を省略して (任意の  $p$  に対して)  $TM_{mn}$  と書くこともある。境界条件は円周上で  $E_z = 0$ 。解は以下のとおりである。

$$E_r = -A \frac{1}{k^2} \frac{p\pi}{d} \frac{j'_{mn}}{b} J'_m\left(\frac{j'_{mn}}{b} r\right) \cos m\theta \sin \frac{p\pi z}{d} \quad (24)$$

$$E_\theta = A \frac{1}{k^2} \frac{p\pi}{d} \frac{m}{r} J_m\left(\frac{j'_{mn}}{b} r\right) \sin m\theta \sin \frac{p\pi z}{d} \quad (25)$$

$$E_z = AJ_m\left(\frac{j'_{mn}}{b} r\right) \cos m\theta \cos \frac{p\pi z}{d} \quad (26)$$

$$H_r = -A \frac{j\omega\epsilon_0}{k^2} \frac{m}{r} J_m\left(\frac{j'_{mn}}{b} r\right) \sin m\theta \cos \frac{p\pi z}{d} \quad (27)$$

$$H_\theta = -A \frac{j\omega\epsilon_0}{k^2} \frac{j'_{mn}}{b} J'_m\left(\frac{j'_{mn}}{b} r\right) \cos m\theta \cos \frac{p\pi z}{d} \quad (28)$$

$$H_z = 0 \quad (29)$$

ここで、 $j'_{mn}$  は  $J_m$  の  $n$  番目のゼロ点である ( $J_m(j'_{mn}) = 0$ )。この場合の  $\omega$  のとれる値は、

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \sqrt{\left(\frac{j'_{mn}}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2} \quad (30)$$

である。

式 (17)~(22)、(24)~(29) を見てわかるように、 $2m$  は電磁場の軸まわり方向の節の数であり、 $m = 0$  を単極 (monopole)、 $m = 1$  を双極 (dipole) などと言う。 $n$  は動径方向の節の数 (TE 波の  $E_\theta, H_r$ 、TM 波の  $E_\theta, E_z, H_r$  に関してのみ)、 $p$  は軸方向の腹の数である。固有モードの例を図 2 に示す。

通常加速に使われるのは最も低い固有周波数を持つ  $TM_{010}$  モードである。この電磁場は円筒対称で、 $E_z$  と  $H_\theta$  の 2 成分のみを持つ。いざれも  $z$  方向には一定である。 $E_z$  と  $H_\theta$  の動径方向の分布を図 3 に示す。電場は中心軸上で最も強く、円筒壁面 ( $r = b$ ) でゼロになる。尚、KEKB の RF 周波数である 509MHz に対応するピルボックス型加速空洞の半径は式 (30) より  $b = 22.56$  cm である。

### 固有モード展開

ここで、固有モードに関係した一般的なことについて参考文献 [3] の内容を基に紹介しよう。ピルボックス空洞内の任意の電磁場は、式 (17)~(22) と式 (24)~(29) の

<sup>3</sup>電磁場のエネルギー等の測定可能量を求める時は暗黙の内に時間平均をとる。

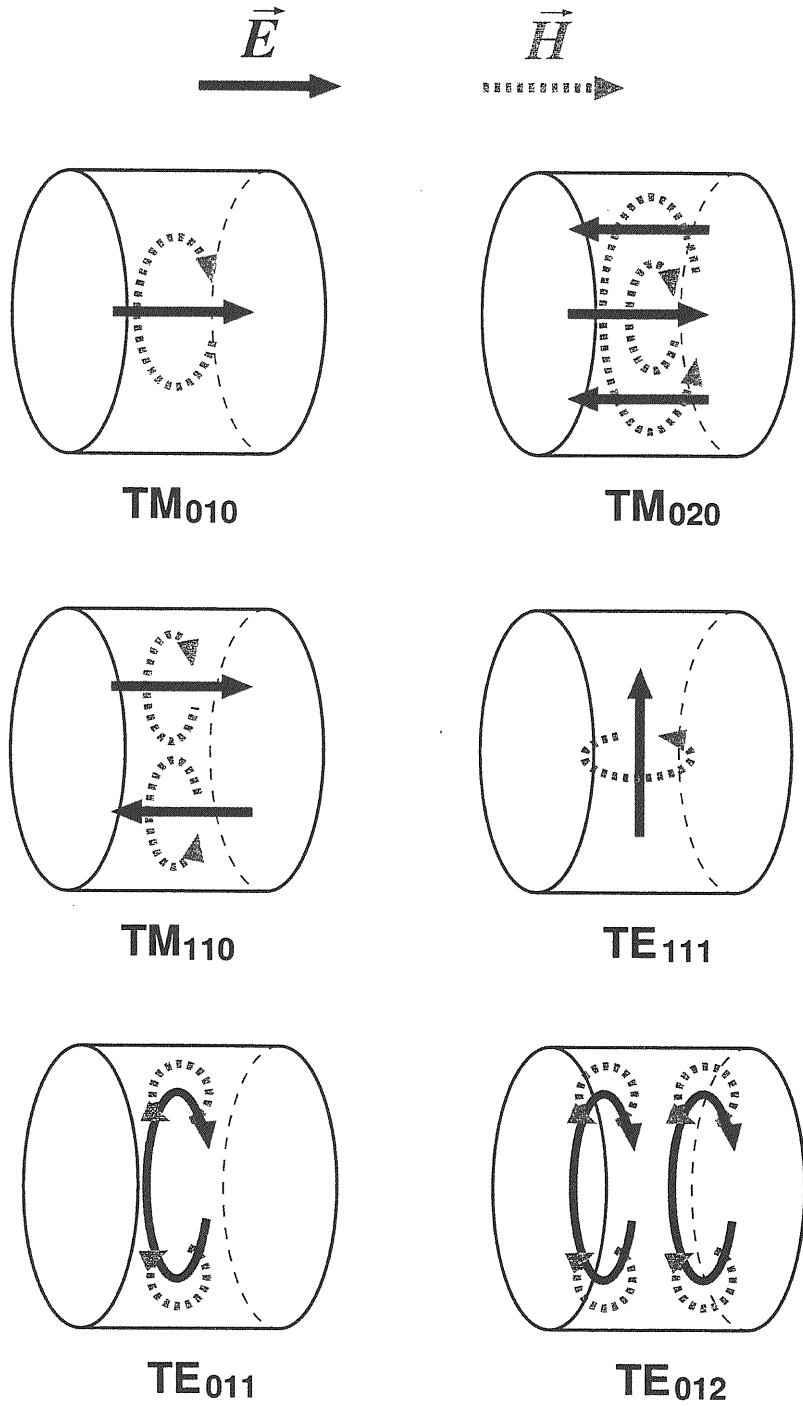


図 2: ピルボックス空洞中の固有モードの例。

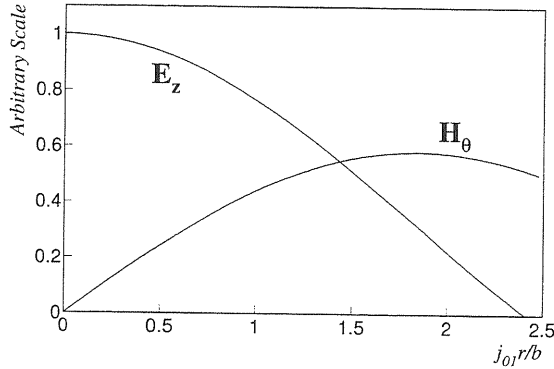


図 3: ピルボックス空洞中の固有モード  $TM_{010}$  の電場  $E_z$ 、及び、磁場  $H_\theta$  の強さの動径方向分布。これらの場は  $z$  や  $\theta$  には依存しない。 $j_{01} \doteq 2.4048$  は 0 次のベッセル関数の 1 番目のゼロ点。縦軸のスケールは任意である。

重ね合わせで表現することができる（数学的に言う完全性）。すなわち、任意の電磁場： $E$ 、 $H$  は、

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \sum_{\lambda} e_{\lambda}(t) \vec{E}_{\lambda}(\vec{x}) \quad (31)$$

$$\vec{H}(\vec{x}, t) = \sum_{\lambda} h_{\lambda}(t) \vec{H}_{\lambda}(\vec{x}) \quad (32)$$

と書ける。ここで、 $\lambda$  は固有モードを表す添字、 $e_{\lambda}(t)$  と  $h_{\lambda}(t)$  は時間に依存する展開係数である。このように展開することを固有モード展開と言う。後の節でも固有モード展開を使うが、基本的には参考文献 [3] の内容を基に説明する。

各モードはヘルムホルツ方程式：

$$\Delta \vec{E}_{\lambda} + k_{\lambda}^2 \vec{E}_{\lambda} = 0 \quad (33)$$

$$\Delta \vec{H}_{\lambda} + k_{\lambda}^2 \vec{H}_{\lambda} = 0 \quad (34)$$

と境界条件：

$$\vec{n} \times \vec{E}_{\lambda} = 0 \quad (35)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{H}_{\lambda} = 0 \quad (36)$$

を満足し、規格化条件 (normalization) は以下のようになる。

$$\int_{cavity} dV (\vec{E}_{\lambda} \cdot \vec{E}_{\lambda'}) = \delta_{\lambda\lambda'} \quad (37)$$

$$\int_{cavity} dV (\vec{H}_{\lambda} \cdot \vec{H}_{\lambda'}) = \delta_{\lambda\lambda'} \quad (38)$$

ここで、 $\delta_{\lambda\lambda'}$  はクロネッカーのデルタであり、 $\lambda = \lambda'$  の時に 1、それ以外でゼロである。式 (31),(32) を電流が

ある場合のマクスウェル方程式に代入し、式 (33),(34) 及び式 (37),(38) を使うと、展開係数  $e_{\lambda}(t)$  と  $h_{\lambda}(t)$  に関する以下のような時間発展の方程式系が得られる。

$$\begin{aligned} & \epsilon_0 \mu_0 \frac{d^2}{dt^2} e_{\lambda}(t) + k_{\lambda}^2 e_{\lambda}(t) \\ &= -\mu_0 \frac{d}{dt} \int_{cavity} dV \vec{J} \cdot \vec{E}_{\lambda} \\ & \quad - k_{\lambda} \int_{cavity} dS (\vec{n} \times \vec{E}) \cdot \vec{H}_{\lambda} \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} & \epsilon_0 \mu_0 \frac{d^2}{dt^2} h_{\lambda}(t) + k_{\lambda}^2 h_{\lambda}(t) \\ &= k_{\lambda} \int_{cavity} dV \vec{J} \cdot \vec{E}_{\lambda} \\ & \quad - \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{cavity} dS (\vec{n} \times \vec{E}) \cdot \vec{H}_{\lambda} \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} & k_{\lambda} e_{\lambda}(t) + \mu_0 \frac{d}{dt} h_{\lambda}(t) \\ &= - \int_{cavity} dV (\vec{n} \times \vec{E}) \cdot \vec{H}_{\lambda} \end{aligned} \quad (41)$$

この方程式系を解くことにより、空洞内電磁場が時間発展も含めて求まる。尚、壁面損失の無い場合は上式 (39),(40) の右辺はゼロになるので、展開係数は以下のようになる。

$$e_{\lambda}(t) = K_{\lambda} e^{j\omega_{\lambda} t} \quad (42)$$

$$h_{\lambda}(t) = j K_{\lambda} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} e^{j\omega_{\lambda} t} \quad (43)$$

ここで、 $K_{\lambda}$  はモード  $\lambda$  の強さを表す係数である。

## 2.2 高周波入力ポートをつける

前節では単独の空洞を考えたが、空洞内に固有モードを励振するためには外部からパワーを与えなければならない。そこで、図 1-(b) にあるように高周波入力ポートを付けてみる。

外部とのパワーのやり取りをするために空洞に取り付けられる装置を結合器 (coupler; カップラー) と言う。特にパワーを注入するためのカップラーを高周波入力結合器 (RF input coupler) と言う。入力高周波はカップラーの先端で空洞内電磁場と結合する。先端の形状はループやアンテナなどがある。低パワーでの Q 値測定用のものだが、例として図 4 にループ (左) とアンテナ (右) の写真を載せた。尚、ループ、及び、アンテナはそれぞれ空洞内電磁場の磁場、及び、電場に結合する。

### Q 値

ここで、Q 値 (quality factor) という空洞の性能を表す重要な無次元量を導入する。Q 値は以下の式で定義さ

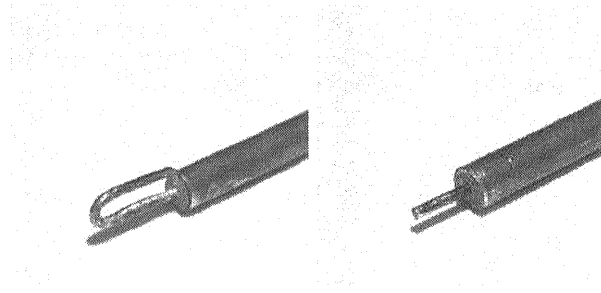


図 4: ループ (左) とアンテナ (右) の写真。これらは低パワーでの Q 値測定に使用したセミリジッド同軸ケーブルの先端部である。

れる、空洞内の電磁場のエネルギー (U) と電力損失 (P) の比に壁面損失がないと仮定した時の共振角周波数 ( $\omega_0$ ) を掛けた量である。

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega_0 U}{P} \quad (44)$$

Q 値が大きいということは、蓄えられるエネルギーが電力損失に比べて大きいことを意味する。ちなみに、Q 値は周波数に依存し、一般的には固有モードごとに異なる値を持つ。

ここで、P を何に関する電力損失とするかで、以下のように幾つかの Q 値が定義される。

$$Q_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega_0 U}{P_{\text{wall}}} \quad (45)$$

$$Q_{\text{ext}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega_0 U}{P_{\text{rad}}} \quad (46)$$

$$Q_L \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega_0 U}{(P_{\text{wall}} + P_{\text{rad}})} \quad (47)$$

$P_{\text{wall}}$  は空洞内面での壁面損失 (ジュール損失)、 $P_{\text{rad}}$  は外部負荷へ流出する電力である (図 1-(b) の例では入力ポートを経て)。 $Q_0$  を無負荷 Q 値 (unloaded-Q)、または内部 Q 値、 $Q_{\text{ext}}$  を外部 Q 値 (external-Q)、 $Q_L$  を負荷 Q 値 (loaded-Q) と呼ぶ。上の定義式より、これらの Q 値の間には以下の関係が成り立つ。

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{\text{ext}}} \quad (48)$$

$Q_0$  は理論的に以下のようにして計算することができる。まず、電磁場のエネルギー  $U$  は、

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{cavity}} dV |\vec{E}|^2 \quad (49)$$

$$= \frac{\mu_0}{2} \int_{\text{cavity}} dV |\vec{H}|^2 \quad (50)$$

である。ここで注意しなければならないのは、上の  $\vec{E}$  と  $\vec{H}$  は時間的なピーク値であるということである (式 (17)

~(22)、(24)~(29) が該当)。電磁気学によれば、 $P_{\text{wall}}$  は空洞内面の金属の電気伝導率  $\sigma$  と透磁率  $\mu$  を用いて以下の空洞内面上での面積分により求まる。

$$P_{\text{wall}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} \int_{\text{cavity}} dS |\vec{H}|^2 \quad (51)$$

$Q_0$  値計算の例として、 $b = 22.56$  cm、 $d = 26.0$  cm の銅製ビルボックス空洞の場合を図 5 に示す。この場合、 $TM_{010}$  モードは  $Q_0 = 4.12 \times 10^4$  である<sup>4</sup>。

ここで、入力ポート導波管のある面 (説明は省略するが具体的には detuned short 面) から見た空洞の入力インピーダンスは以下ようになる (証明略)。

$$Z(\omega) = Z^{(wg)} \frac{1/Q_{\text{ext}}}{j(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega) + 1/Q_0} \quad (52)$$

$Z^{(wg)}$  は導波管の特性インピーダンス、 $\omega_0$  は共振角周波数<sup>5</sup>である。これは並列 LCR 回路のインピーダンスと同形であり、従って、(detuned short 面から見ると) 空洞は並列 LCR の等価回路で表現することができる。また、高周波近似ではインピーダンスの半値幅は  $\omega_0/Q_0$  となり、高い  $Q_0$  値を持つ空洞ほど共鳴点でのインピーダンスは鋭くなる。

$Q_0$  値は空洞の共振周波数や電磁場の減衰の速さにも関係している。空洞内で一旦励振された電磁場の共振周波数、及び、自由振動の減衰の早さは式 (39)、(40) を解くことにより求めることができる。結果のみ示すと、

$$e_\lambda(t), h_\lambda(t) \propto e^{j(\omega_a + i\omega_d)t} \quad (53)$$

$$\omega_a = \left(1 - \frac{1}{2Q_0}\right) \omega_0 \quad (54)$$

$$\omega_d = \frac{\omega_0}{2Q_0} \quad (55)$$

壁面損失がある時の共振周波数 ( $\omega_a$ ) はない時のもの ( $\omega_0$ ) よりも少し小さくなる。振動の振幅が  $1/e$  倍になる時間を filling time ( $T_f$ ) と言い、以下のように書ける。

$$T_f = \frac{2Q_L}{\omega_a} \quad (56)$$

減衰に要する時間は Q 値に比例する。

### 結合度

ネットワークアナライザを使って実際に測定する Q 値は  $Q_L$  であり、パワーを入れたことの (またはピックアップの) 影響込みである。そこで、カップラーの空洞内電磁場との結合度  $\beta$  を以下のように定義する。

$$\beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Q_0}{Q_{\text{ext}}} \quad (57)$$

$$= \frac{P_{\text{rad}}}{P_{\text{wall}}} \quad (58)$$

<sup>4</sup>このように加速空洞の Q 値は非常に大きい。ちなみに、Q 値には 1 程度の数学的な下限が存在する。

<sup>5</sup>壁面損失のある場合は完全導体の場合よりも少し下がる。

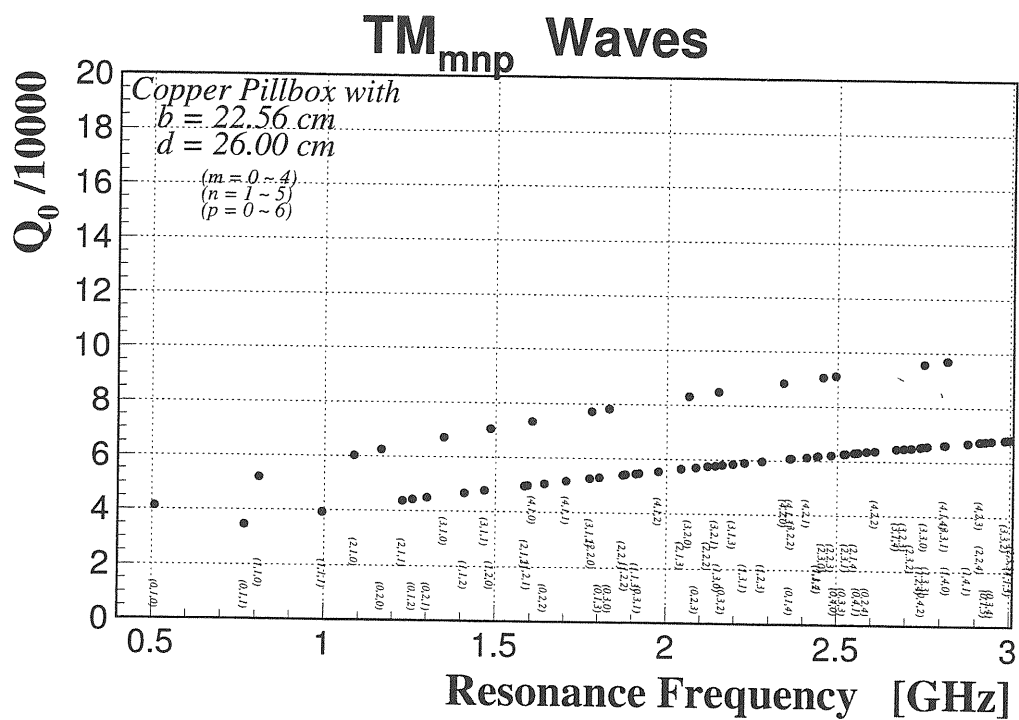
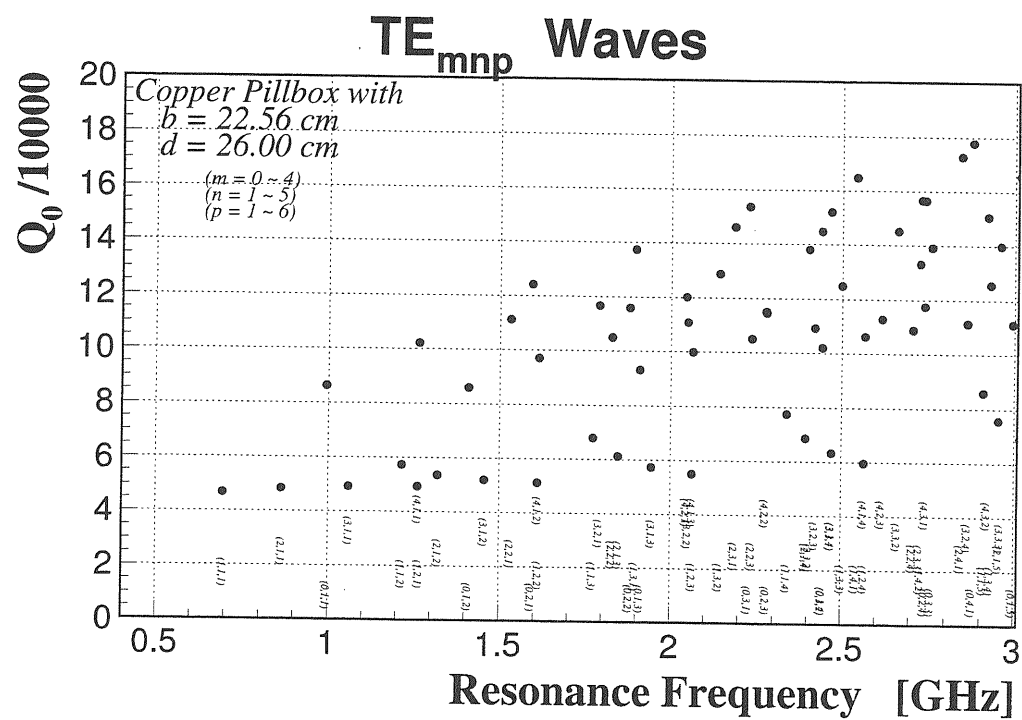


図 5: 銅製ピルボックス空洞 (半径 22.56 cm、高さ 26.00 cm) の  $Q_0$  理論値 (縦軸) と固有周波数 (横軸)。銅の電気抵抗率は IACS100% ( $1.72 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ ) を用いた。また、その透磁率は真空中と同じとした ( $\mu = \mu_0 = 1.25664 \times 10^{-6} \text{ H/m}$ )。

上の第2式の  $P_{rad}$  はそのポートから流出するパワーで、この式より  $\beta$  が結合の大きさを表していることが直感的に理解できると思う。 $\beta < 1$  の時を疎結合 (under-coupling)、 $\beta > 1$  の時を密結合 (over-coupling) と言い、 $\beta = 1$  の時は整合 (matched-coupling) のとれた状態である。式 (57) と (48) より、

$$Q_0 = (1 + \beta)Q_L \quad (59)$$

なので、 $Q_L$  と  $\beta$  がわかれば  $Q_0$  の測定値が求まる。 $\beta$  はそのポートのリターンロス:  $R_{loss}[\text{dB}] (= -20 \log_{10} |\Gamma|)$  から以下の式で計算できる。

$$\beta = \frac{1 - |\Gamma|}{1 + |\Gamma|} \quad (\beta < 1) \quad (60)$$

$$\beta = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \quad (\beta > 1) \quad (61)$$

ここで、 $\Gamma$  は反射係数である<sup>6</sup>。上式からも明らかのように、 $\Gamma = 0$  (無反射) の時は  $\beta = 1$  である。

## 2.3 ビームパイプをつける

次に、図 1-(c) にあるように、空洞にビームパイプをつけて荷電粒子 (電荷  $e$ ) を軸上で加速する場合を考えてみよう。簡単のため、ビームパイプ半径は空洞半径  $b$  より十分小さいとする。

荷電粒子が空洞を通過する時に得るエネルギーは<sup>7</sup>、

$$W = e \times \Re \left\{ \int_0^d dz E_z(z, t_0 + z/c) \right\} \quad (62)$$

である。ここで、 $\Re$  は複素数の実部をとるという意味の記号である<sup>8</sup>。また、荷電粒子が空洞に入った時の位置を  $z = 0$ 、時間を  $t = t_0$  とした。固有モード展開の式 (31), (32), (42), (43) を用いると、

$$W = e \times \Re \left\{ K_\lambda \int_0^d dz E_{\lambda,z}(z) e^{j\omega_{rf}(t_0+z/c)} \right\} \quad (63)$$

ここで、 $\omega_{rf} (\cong \omega_\lambda)$  はモード  $\lambda$  を励振している入力 RF の角周波数である。荷電粒子の得るエネルギーの大きさは空洞に入る時の電磁場の位相に依存するという事に注意しよう。

### 空洞電圧

ここで、式 (63) に従って空洞電圧を以下の複素量で定義する。

$$\mathbf{V}_c = e^{j\omega_{rf}t_0} K_\lambda \int_0^d dz E_{\lambda,z}(z) e^{j\omega_{rf} \frac{z}{c}} \quad (64)$$

<sup>6</sup>  $|\Gamma|^2$  は反射パワーの入力パワーに対する比となる。

<sup>7</sup> 本書では相対論的極限を考え、粒子は光速で進んでいるとする ( $v = c$ )。

<sup>8</sup> これは定義の問題であるが、通常は複素数の実部を物理量に対応させる。

空洞電圧の大きさ ( $V_c$ ) は、

$$V_c = |\mathbf{V}_c| \quad (65)$$

$$= \left| K_\lambda \int_0^d dz E_{\lambda,z}(z) e^{j\omega_{rf} \frac{z}{c}} \right| \quad (66)$$

である。そうすると、荷電粒子の得るエネルギーの大きさは

$$W = e \Re \{ \mathbf{V}_c \} \quad (67)$$

$$= e V_c \cos \phi_s \quad (68)$$

と書ける。空洞電圧の大きさ (65) が一定の時に最大の加速エネルギーを得るのは  $\phi_s = 0$  の時である。

### シャント・インピーダンス

次にシャント・インピーダンス  $R_a$  という重要な量を以下の式で定義する。

$$R_a \stackrel{\text{def}}{=} \frac{V_c^2}{P_{\text{wall}}} \quad (69)$$

上式の右辺に  $1/2$  をつけてシャント・インピーダンスを定義する場合もあるので注意して欲しい。上の定義式からわかるように、シャント・インピーダンスは加速の効率を表している。上式 (69) に式 (51), (32), (43), (66) を代入すると、以下ようになる。

$$R_a = 2\sigma \delta_{\text{skin}} \frac{\mu_0}{\epsilon_0} \frac{\left| \int_0^d dz E_{\lambda,z}(z) e^{j\omega_{rf} \frac{z}{c}} \right|^2}{\int_{\text{cavity}} dS |\vec{H}_\lambda|^2} \quad (70)$$

$\delta_{\text{skin}}$  は空洞の表皮効果の深さ (skin depth) である<sup>9</sup>。

$$\delta_{\text{skin}} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{2}{\omega_{rf} \mu \sigma}} \quad (71)$$

ここで、 $R_a$  と  $Q_0$  の比をとってみると、

$$\frac{R_a}{Q_0} = \frac{V_c^2}{\omega_\lambda U} \quad (72)$$

$$= \frac{2}{\epsilon_0 \omega_\lambda} \left| \int_0^d dz E_{\lambda,z}(z) e^{j\omega_{rf} \frac{z}{c}} \right|^2 \quad (73)$$

となる。上式 (73) を導くにあたって、式 (66), (50), (32), (38) を用いた。上式 (73) より  $R_a/Q_0$  は空洞壁面の電気伝導率 ( $\sigma$ ) に依らないことがわかる。また、空洞の代表的なサイズを  $L$  とすると、 $\omega_\lambda \propto L^{-1}$ 、 $E_\lambda \propto L^{-3/2}$  (規格化条件の式 (37) より) なので、空洞の形が相似形ならば  $R_a/Q_0$  は変わらない。従って、 $R_a/Q_0$  は空洞の幾何学的形状だけで決まる定数であり、空洞の形状に関する電氣的性質を特徴づける指標としてしばしば使われる。

<sup>9</sup> 高周波は skin depth 程度までしか金属等に入り込めない。



効率的な加速を行うためには、共振周波数を一定に保ちながら空洞の形状を少し変形して  $R_a$  をできるだけ上げる必要がある。また、ビームパイプ開口部の加速電場への影響も調べなければならない。これらの問題に関しては割愛させて頂くが、是非、参考文献 [4] (16~25 ページ) などで勉強して頂きたい。

#### ビームローディング

ビームパイプを通して来たバンチが加速空洞を通過する場合は、ビームがもう一つの高周波源となる。これによる効果がビームローディングであるが、KEKB のようにビーム電流が大きい場合は特に重要な問題となる。このことに関しては第 3 節で詳しく説明する。

## 2.4 高次モード減衰器をつける

ビームのバンチが加速空洞を通過すると、加速モード(基本モード)以外に高次モード(Higher Order Mode、略して HOM) が励振される。そして、それらのモードの  $Q$  値がある程度高い、つまり filling time が長い(式(56))と後続バンチに影響し、ビーム不安定性の原因になってしまう。HOM は加速とは関係ないので適当なカップラーを付けて空洞外部へ取り出すのがよい。これが高次モード減衰器である。ここで、効率的に HOM を取り出すためには減衰させたい HOM との結合を強くする必要がある。そこでは、HOM 及び加速モードの電磁場分布を考慮して、どのような種類のカップラーを加速空洞のどこに付ければよいかを決める。また、加速モードへの影響も調べなければならない。結合度を大きくするという事は、 $Q$  値で言えば空洞から減衰器への  $Q_{\text{ext}}$  が小さいということになる(式(57))。従って、高次モード減衰器の設計にあたっては  $Q_{\text{ext}}$  の計算が必要となる。ここではその詳細には触れないが、興味のある方は参考文献 [5]、[6] を読んで頂きたい。

ここからは、高次モード減衰器の例として KEKB 常伝導加速空洞を取り上げ、参考文献 [5] を基に紹介する。そこでは 2 つの異なるタイプの減衰器が使用されている。

1 つ目は図 6-(a) にあるような導波管型減衰器である。加速空洞内の  $TM_{011}$ 、 $TM_{020}$  等の高次単極モードは図 7-(a) のように結合して、上下に取り付けられた矩形導波管へと取り出される。また、 $TM_{110}$ 、 $TM_{111}$  等の垂直方向に偏極した双極モードも同様に図 7-(b) のように結合して取り出される。勿論、加速モードは遮断周波数以下

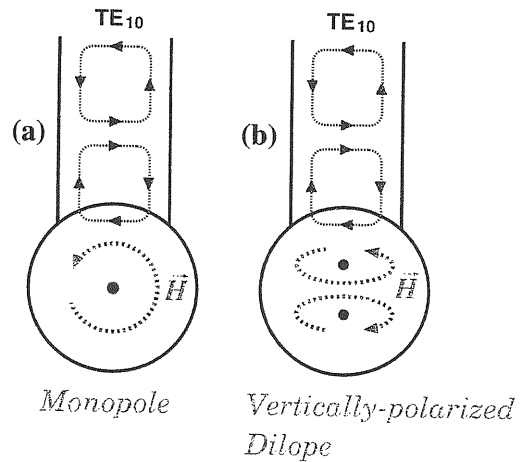


図 7: 導波管型減衰器で取り出される HOM の結合の様子(上側のみ)。ビーム軸に垂直な平面で見ている。(a) 高次単極モード。(b) 縦方向に偏極した高次双極モード。図中の  $TE_{10}$  は矩形導波管内のモードである。

下になっているので取り出されることはない。この減衰器の矩形導波管の先には図 9 の左の写真にあるような砲弾型の炭化珪素(SiC)HOM 吸収体があり、そこで HOM が熱に変わる。尚、この吸収体の内部には冷却水が直接通っており(直接冷却)、一本あたり 3.3kW までのパワーを吸収できることが実験的に確認されている。ちなみに、炭化珪素で HOM を吸収する場合は、その誘電率の複素成分の周波数特性が重要となる。この問題に関しては参考文献 [7] で詳しく説明されているので参考にさせて頂きたい。

2 つ目は図 6-(b) にあるような溝付きビーム管型減衰器である。これは前の導波管型減衰器とは違い、ビームパイプに HOM を逃がすタイプである<sup>10</sup>。しかし、減衰させたいモードである横方向高次双極モードを通常のビームパイプで逃がそうとすると、遮断周波数を十分に下げるためにビームパイプの径を大きくしなければならぬ[8]。そのようにしてしまうと、今度はシャント・インピーダンスが下がり加速効率が落ちる。そこで、ビームパイプに図 8 にあるような溝を付けることによってシャント・インピーダンスの犠牲無くして高次双極モードをビームパイプへ取り出す方法が考案された[9]。溝には図 9 の右の写真にあるような炭化珪素 HOM 吸収体

<sup>10</sup>高次単極モード、高次双極モードはそれぞれ円形ビームパイプ内の  $TM_{01}$  波、 $TE_{11}$  波と結合させて逃がすことができる。

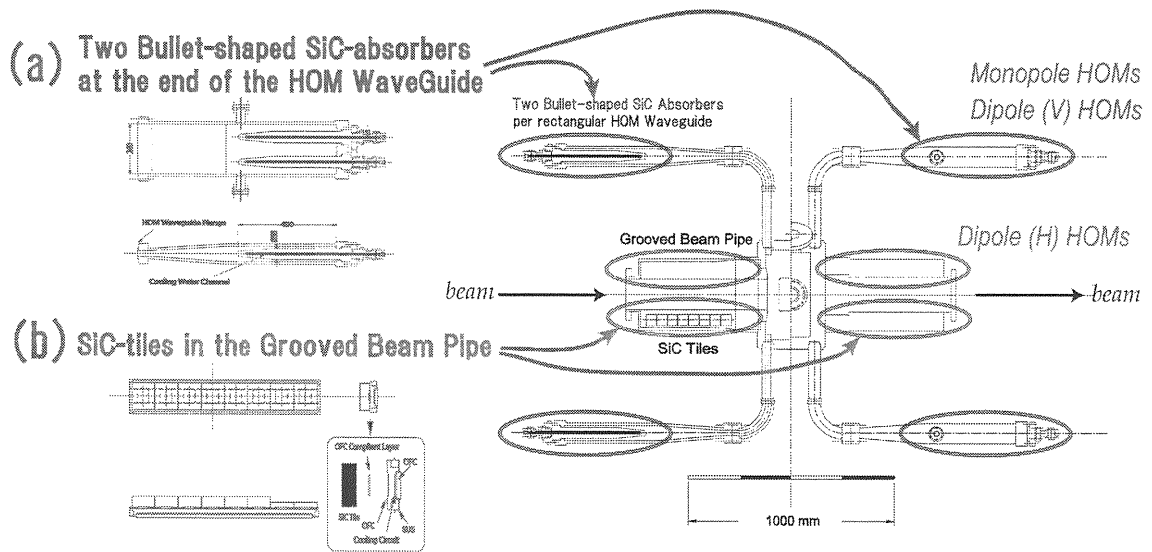


図 6: KEKB 常伝導加速空洞の高次モード減衰器。(a) 導波管型。(b) 溝付きビーム管型。

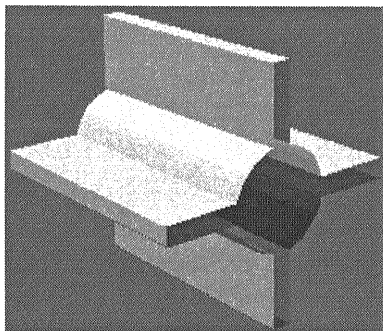


図 8: 溝付きビームパイプ。高次双極モードの縦と横両方向の偏極に対応するためには図のように溝は上下左右に必要なだが、上下の導波管型減衰器で縦方向偏極モードを取り出す場合は上下だけにあればよい (KEKB の場合)。

の小板が並べてある。写真にある 1 セットで 0.5kW のパワーまで吸収できることが実験的に確認されている。炭化珪素の小板は銅板にろう付けされており、その銅板が冷却されている (間接冷却)。

高次モード減衰型空洞についてもっと詳しく知りたい方は参考文献 [5] を読んで頂きたい。

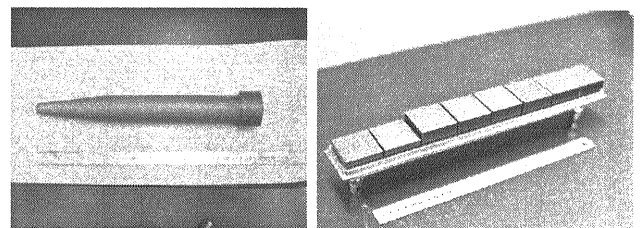


図 9: 炭化珪素 HOM 吸収体。砲弾型 (左) とタイル型 (右)。

### 3 ビームローディング

これまではビームが空洞内電磁場から受ける影響のみを考えて来たが、ビームが空洞内電磁場に与える影響もある。このことは特に大電流ビームの加速で重要となる。この節では参考文献 [3] (第 2 章) の内容に沿ってビームローディングを解説する。また、参考文献 [4] (第 5 章) も参考にさせて頂いた。

#### 3.1 単バンチの場合

まず、点電荷  $q$  が空洞の中心軸上を一度だけ通過する場合を考える。一般的には、ビームパイプに繋がっている加速空洞のような不連続領域を点電荷が通ると、そこに電磁場を残す。その電磁場のことをウェーク場と言い、

空洞の固有モードで展開するとあらゆる成分を持っている。ここで簡単のため、RF 源からのパワーの供給がなく、さらに、点電荷の通過前には空洞内に電磁場は励振されていないとする。また、点電荷の通過によって励振されるのは加速モードのみとする。さらに、点電荷が空洞を通過する時間は励振された電磁場の減衰の速さよりずっと速いとし、点電荷が通過した時に瞬間的に励振され、その後、自由振動として減衰すると考える。

式 (31),(39),(53) を使うと点電荷の通過により励振される電場は以下のように書ける。

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = e^{j(\omega_a + j\omega_d)(t-t_0)} K_\lambda \vec{E}_\lambda(\vec{x}) \quad (74)$$

点電荷  $q$  の通過後、試験電荷  $e$  が同じく空洞の中心軸上を時刻  $t = t_1$  に空洞に入る ( $z = 0$ ) としよう。その試験電荷が受ける加速電圧は、上式を用いて、

$$\mathbf{V} = \int_0^d dz E_z(z, t_1 + z/c) \quad (75)$$

$$= e^{j(\omega_a + j\omega_d)(t_1 - t_0)} K_\lambda \int_0^d dz E_{\lambda,z}(z) e^{j\omega_a \frac{z}{c}} \quad (76)$$

$$= e^{-\omega_d t} e^{j\omega_a t} K_\lambda \int_0^d dz E_{\lambda,z}(z) e^{j\omega_a \frac{z}{c}} \quad (77)$$

$(t \stackrel{\text{def}}{=} t_1 - t_0)$

となる。ここで、試験電荷が空洞を通過する時の電場の減衰は無視できるとした。すなわち、

$$\omega_d \frac{d}{c} \ll 1 \quad (78)$$

を仮定した。

上式 (77) から、電圧の位相が  $\omega_a t$  で回転していることがわかる。 $\omega_a \cong \omega_{rf}$  であることを考慮すれば、普段は電圧として式 (77) を  $e^{j\omega_{rf} t}$  で割ったものと考えると便利である。そこで今後は、すべての複素量を  $\omega_{rf}$  で回転している座標系から見ることにする。位相の基準としては、粒子が最大のエネルギーを得る電圧を実軸の正の向きに取る。そうすると、試験電荷が時刻  $t$  で空洞に入った時に受ける電圧は、

$$\mathbf{V}_b = e^{-\omega_d t} e^{j(\omega_a - \omega_{rf})t} \mathbf{V}_{b0} \quad (79)$$

$$\mathbf{V}_{b0} = K_\lambda \int_0^d dz E_{\lambda,z}(z) e^{j\omega_a \frac{z}{c}} \quad (80)$$

となる。但し、時刻  $t = 0$  の時にウェーク場が作られたとする。 $\mathbf{V}_{b0}$  は、点電荷が一度だけ空洞を通った時に誘起される電圧である。

次に、点電荷  $q$  が空洞を通過した時の  $\mathbf{V}_{b0}$  を空洞固有の量である  $R_a/Q_0$  で表してみよう。まず、点電荷  $q$  が得るエネルギー  $\Delta U_q$  は、この節の最後で説明する Fundamental theory of beam loading と式 (79),(80) より、

$$\Delta U_q = \frac{q}{2} \Re \{ \mathbf{V}_b(t=0^+) \} \quad (81)$$

$$= \frac{q}{2} \Re \{ \mathbf{V}_{b0} \} \quad (82)$$

$$= \frac{q}{2} V_{b0} \quad (83)$$

と書ける。ここで、証明は省略するが  $\mathbf{V}_{b0}$  が実数であるという事実を使い  $\mathbf{V}_{b0} = V_{b0}$  とおいた。一方、点電荷  $q$  の通過で空洞内に励振される加速モードの電磁場エネルギー  $\Delta U_c$  は、式 (72) より、

$$\Delta U_c = \frac{V_{b0}^2}{\omega_a \frac{R_a}{Q_0}} \quad (84)$$

となるので、 $\Delta U_q = -\Delta U_c$  より以下の式を得る。

$$V_{b0} = \frac{\omega_a R_a}{2 Q_0} q \quad (85)$$

従って、 $\mathbf{V}_{b0}$  は  $R_a/Q_0$  に比例することがわかる。

これまではバンチが軸方向に構造を持たない場合 (点電荷) を扱ってきた。しかし、実際のバンチは有限の広がりを持っている。そこで、バンチが軸方向に  $\sigma_z$  の広がりを持つガウス分布をしている場合を考えてみよう。バンチの全電荷を  $q$  とすると、バンチ電荷の軸方向分布関数は、

$$\frac{q}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{z^2}{2\sigma_z^2} \right\} \quad (86)$$

なので、式 (76) は、

$$\mathbf{V} = \int_{-\infty}^{\infty} d(ct_0) \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(ct_0)^2}{2\sigma_z^2} \right\} \times e^{j(\omega_a + j\omega_d)(t_1 - t_0)} \times K_\lambda \int_0^d dz E_{\lambda,z}(z) e^{j\omega_a \frac{z}{c}} \quad (87)$$

$$= e^{-\omega_d t_1} e^{j\omega_a t_1} e^{-\frac{\omega_d^2 \sigma_z^2}{2c^2}} \times K_\lambda \int_0^d dz E_{\lambda,z}(z) e^{j\omega_a \frac{z}{c}} \quad (88)$$

となる。ここで、ガウス分布に対するフーリエ変換の公式を用いた。

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\xi x} e^{-ax^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \quad (89)$$

また、バンチと試験電荷の距離はバンチ長よりも十分長いとした ( $ct \gg \sigma_z$ )。式 (77) と (88) を比べてみると、バンチ長さ有り ( $\mathbf{V}_b \mathbf{0}(\sigma_z)$ ) と無し ( $\mathbf{V}_b \mathbf{0}(0)$ ) で、

$$\mathbf{V}_b \mathbf{0}(\sigma_z) = e^{-\frac{\omega_d^2 \sigma_z^2}{2c^2}} \mathbf{V}_b \mathbf{0}(0) \quad (90)$$

という関係になっている。バンチ全体が作る電圧の重ね合わせの結果、バンチが長くなると電圧は小さくなるのである。

これまではウェーク場を作る電荷の後に追う試験電荷の受ける電圧について議論してきた。ここで、ウェーク場を作る粒子自身に着目してみる。その粒子はウェーク場を残すので当然エネルギーを失う。ということは、自分自身の作るウェーク場に対して減速の電場を感じるようになる。この場合は  $t = t_1 - t_0 = 0$  に対応するが、はたして  $\mathbf{V}_b(t=0) = \mathbf{V}_b(t=0^+)$  であろうか？<sup>11</sup> 答えはノーである。しかし、ちょうど半分、つまり、

$$\mathbf{V}_b(t=0) = \frac{1}{2} \mathbf{V}_b(t=0^+) \quad (91)$$

となっている。これを、Fundamental theory of beam loading と言う<sup>12</sup>。証明の方法はいろいろあるが、参考文献 [10] などで確認しておいて欲しい。

### 3.2 多バンチの場合

まず、2バンチの場合を考える。それらのバンチの時間間隔を  $T_b$  とすると、前のバンチの作るウェーク場による電圧は、式 (55),(56) より、

$$\mathbf{V}_b^{(1)} = \mathbf{V}_{b0} \times e^{-\tau} e^{j\delta} \quad (92)$$

となる。ここで、

$$\tau \stackrel{\text{def}}{=} \frac{T_b}{T_f} \quad (93)$$

$$\delta \stackrel{\text{def}}{=} (\omega_a - \omega_{rf}) T_b \quad (94)$$

である。次に、自分の作るウェーク場からの電圧は、式 (91) より、

$$\mathbf{V}_b^{(0)} = \frac{1}{2} \mathbf{V}_{b0} \quad (95)$$

なので、全電圧は以下のようになる。

$$\mathbf{V}_b = \mathbf{V}_b^{(0)} + \mathbf{V}_b^{(1)} \quad (96)$$

$$= \mathbf{V}_{b0} \times \left( \frac{1}{2} + e^{-\tau} e^{j\delta} \right) \quad (97)$$

バンチ数が非常に多い場合（数学的取り扱いを簡単にするために無限個あるとしよう）は、前方にあるバンチの影響をすべて足し合わせることになる。従って、バンチ間隔を  $T_b$  で一定とすると、全電圧は、

$$\mathbf{V}_b = \mathbf{V}_{b0} \times \quad (98)$$

$$\left( \frac{1}{2} + e^{-\tau} e^{j\delta} + e^{-2\tau} e^{j2\delta} + e^{-3\tau} e^{j3\delta} + \dots \right) \quad (99)$$

$$= \mathbf{V}_{b0} \times \left[ \frac{1}{1 - e^{-\tau} e^{j\delta}} - \frac{1}{2} \right] \quad (100)$$

となる。

<sup>11</sup>0<sup>+</sup> は正の側から 0 への極限を意味する。

<sup>12</sup>ビーム粒子が光速で走っている場合に限られる。

ここで、KEKB の場合の  $\tau$  の大きさを考えてみる。KEKB では現在  $T_b \sim 10 \text{ ns}$ 、 $\omega_a \sim 2\pi \times 500 \text{ MHz}$ 。常伝導加速空洞では  $Q_0 \sim 1.1 \times 10^5$ 、 $\beta \sim 2.8$  なので、式 (56),(59) より、

$$T_f = 2 \times \frac{Q_0}{\omega_a(1+\beta)} \quad (101)$$

$$\sim 18 \mu\text{s} \quad (102)$$

となり、

$$T_b \ll T_f \quad (103)$$

である。従って、減衰よりもずっと早く次のバンチが来るので、ビームローディングは連続的に見える。以後、上の関係を仮定する。また、 $|\omega_a - \omega_{rf}|$  はビーム不安定の関係で円形加速器の周回周波数 (KEKB の場合は 99kHz) 程度以下となっているので、

$$\tau \lesssim 10^{-3} \quad (104)$$

つまり、

$$e^{-\tau} \cong 1 - \tau \quad (105)$$

と近似できる。式 (100),(105),(85) より、

$$\mathbf{V}_b \cong -V_{b0} \frac{\tau + j\delta}{\tau^2 + \delta^2} \quad (106)$$

が得られる。

次に、以下で定義される空洞の同調角 (tuning angle)  $\psi$  を導入する。

$$\tan \psi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\delta}{\tau} \quad (107)$$

$$= T_f (\omega_a - \omega_{rf}) \quad (108)$$

$$= \frac{\omega_a - \omega_{rf}}{\omega_a} \times 2Q_L \quad (109)$$

上式 (108) からわかるように、 $\psi$  は入力 RF 周波数と空洞共振周波数との差の目安である。これを使って式 (106) の中から  $\delta$  を消去すると、

$$\mathbf{V}_b \cong -V_{b0} \frac{\tau + j\tau \tan \psi}{\tau^2 + (\tau \tan \psi)^2} \quad (110)$$

$$= -V_{b0} \frac{\cos \psi}{\tau} (\cos \psi + j \sin \psi) \quad (111)$$

となる。さらに、式 (85),(93),(59), (56) より、

$$\mathbf{V}_b \cong -\frac{R_a I}{1+\beta} \cos \psi (\cos \psi + j \sin \psi) \quad (112)$$

を得る。 $I \stackrel{\text{def}}{=}} q/T_f$  はビーム電流である。

ここで、ビームがある場合の入力パワー関係のことを調べてみよう。クライストロン等のパワー源により励起される空洞電圧を  $\mathbf{V}_g$ 、ビームによるものを  $\mathbf{V}_b$  とする。また、入力高周波の周波数が空洞の共振周波数に等しい

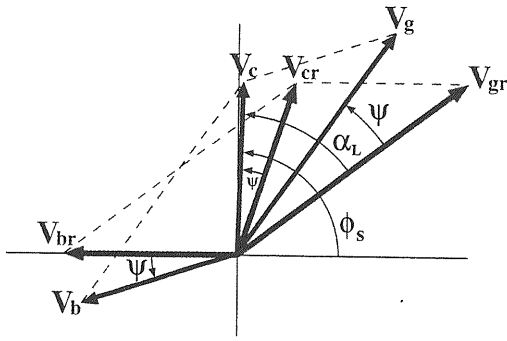


図 10: 電圧ベクトルの相互関係。

時の  $V_g, V_b$  をそれぞれ  $V_{gr}, V_{br}$  とする。すると、上の二つの場合の空洞電圧はそれぞれ、

$$V_c = V_g + V_b \quad (113)$$

$$V_{cr} = V_{gr} + V_{br} \quad (114)$$

となる。式 (112) より、

$$V_g = V_{gr} \cos \psi e^{j\psi} \quad (115)$$

$$V_b = V_{br} \cos \psi e^{j\psi} \quad (116)$$

$$V_{br} = \frac{R_a I}{1 + \beta} \quad (117)$$

となる。また、入力パワー  $P_g$  と  $V_{gr}$  の関係は、空洞からの反射パワーが  $\Gamma^2 P_g$  であることを考慮すると、式 (69), (60), (61) より、

$$V_{gr} = \sqrt{R_a(1 - \Gamma^2)P_g} \quad (118)$$

$$= \frac{2\sqrt{\beta}}{1 + \beta} \sqrt{R_a P_g} \quad (119)$$

が得られる。

ここで、図 10 のように、 $V_c$  と  $V_{gr}$  のなす角を  $\alpha_L$ 、 $\phi_s$  を synchronous angle (つまり  $V_c \cos \phi_s = \Re\{V_c\}$ ) とすると、式 (114) の両辺に  $V_c/V_c$  または  $e^{i\pi/2} V_c/V_c$  をかけて実部をとる (ベクトル内積をとる) と、それぞれ、

$$V_{gr} \cos \alpha_L = V_{cr} \cos \psi - V_{br} \cos(\pi - \phi_s) \quad (120)$$

$$V_{gr} \sin \alpha_L = V_{cr} \sin \psi + V_{br} \cos(\pi - \phi_s) \quad (121)$$

となる。上の 2 式から  $\alpha_L$  は以下のように書ける。

$$\tan \alpha_L = \frac{V_{cr} \sin \psi + V_{br} \sin \phi_s}{V_{cr} \cos \psi + V_{br} \cos \phi_s} \quad (122)$$

$$= \frac{\tan \psi + V_{br} \sin \phi_s / V_c}{1 + V_{br} \cos \phi_s / V_c} \quad (123)$$

ここで、式 (113), (114), (115), (116) より、

$$V_c = V_{cr} \cos \psi \quad (124)$$

であることを使った。式 (120) に (124) を代入すると、

$$V_{gr} = \frac{V_c + V_{br} \cos \phi_s}{\cos \alpha_L} \quad (125)$$

となるので、上式と式 (119) より、

$$P_g = \frac{(1 + \beta)^2}{4\beta R_a} \left( \frac{V_c + V_{br} \cos \phi_s}{\cos \alpha_L} \right)^2 \quad (126)$$

となる。上式で  $\omega_{rf}$  に依存する部分は  $\alpha_L$  のみである。そこで、 $\alpha_L = 0$  となるように  $\omega_{rf}$  を調整すれば同じ大きさの  $V_c$  に対して最も小さい入力電力  $P_g$  で済み、効率的である。 $\alpha_L = 0$  の時を optimum tuning という。この時、式 (123) より  $\psi$  は、

$$\tan \psi = -\frac{V_{br}}{V_c} \sin \phi_s \quad (127)$$

となる。またこの時、式 (108), (56), (59), (117) より、optimum tuning にするための離調量は、

$$\Delta f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega_a - \omega_{rf}}{2\pi} \quad (128)$$

$$= -\frac{I \sin \phi_s R_a}{2V_c Q_0} f_a \quad (129)$$

であることがわかる。上式からわかるように、optimum tuning にするためには周波数の低い方へ離調 (detune) しなければならない。そして、その離調量は貯蔵するビーム電流に比例して大きくなる。

式 (129) は入力高周波の周波数をパラメータとして入力電力を最小にする時として求めたが、同じことを結合度  $\beta$  に関してやってみよう。 $P_g$  の最小を与える  $\beta$  は

$$\frac{\partial P_g}{\partial \beta} = 0 \quad (130)$$

が成り立つ時である。方程式 (130) を解くと、

$$\beta = 1 + \frac{P_b}{P_c} \quad (131)$$

となる。ここで、

$$P_b = IV_c \cos \phi_s \quad (132)$$

はビームに与えられるパワー、

$$P_c = \frac{V_c^2}{R_a} \quad (133)$$

は空洞壁面でのパワー損失である。式 (131) が成り立つ時の結合度を optimum coupling と言い、より大きなパワーを効率的にビームに与えるためにはより大きな結合度が必要であることがわかる。

尚、計算を省略するが、optimum tuning かつ optimum coupling の時には、反射パワー  $P_r$  :

$$P_r \stackrel{\text{def}}{=} P_g - P_b - P_c \quad (134)$$

はゼロになる。

## 4 結合バンチ不安定性

これまでは空洞に関する諸性質を空洞中心に考えてきたが、この節からは空洞を通るビーム・バンチ<sup>13</sup>を主役として話を進める。この場合、加速空洞はビームパイプ等と共に「環境」として扱われる。

この節の目的は加速モードに起因する縦方向ビーム不安定性を説明することである。加速モードは原理的に減衰器などで減衰させることができないので、大電流用の加速空洞を設計する際には重大な課題となる。

バンチはある基準粒子の軌道のまわりを縦方向、及び、横方向に振動している。縦方向をシンクロトロン振動、横方向をベータトロン振動と言う。本節では加速空洞にとって最も重要なシンクロトロン振動について取り扱う。

シンクロトロン振動とは、加速高周波に同期して常に同じ加速を受ける粒子（これを同期粒子と言う）に対して、縦方向、つまりエネルギーの増減の振動のことである。これは位相安定性の原理と関係することで、ここでは詳しくは触れないが、重要なことなので各人勉強しておいて欲しい。

シンクロトロン振動はバンチ全体の振動であるため、重心の運動が本質的である。そこで、ここでの議論ではバンチを1つの粒子（これを macroparticle と呼ぶ）として扱う。そして、ビーム不安定性を定量的に表す式を導き出すことを目標とする。

それではまず、加速器でのビーム不安定性を議論するための基礎概念の説明から入ろう。尚、この節での説明は A. Chao の有名な教科書 [10] に基づいている。また、参考文献 [11] も参考にさせて頂いた。

### 4.1 ウェーク関数とインピーダンス

加速空洞などのように、ビームの進行方向で一様でないところがあるとビームはそこでエネルギーを失う。これを parasitic loss という。イメージとしては図 11 のようになる。簡単のため、ビームパイプと加速空洞は完全導体でできているとしよう。そして、バンチが一様なビームパイプの中を光速で進んでいるとする（図 11-(a)）。この時、バンチはエネルギーを失うことはない。また、電場分布は相対論的效果により横方向に限られる。空洞

<sup>13</sup>本書では、ビームがバンチ構造をしている場合のみを考えている。

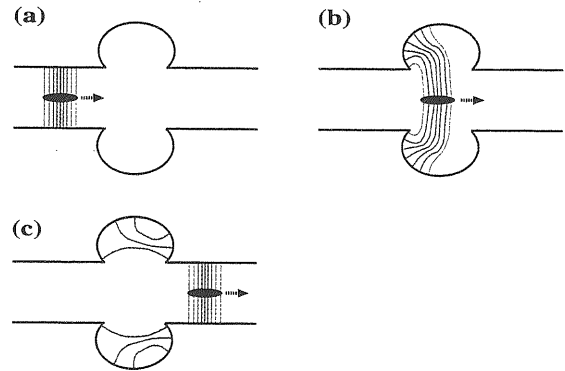


図 11: 空洞を通過するビーム・バンチとその電場分布。(a) 通過前、(b) 通過途中、(c) 通過後。尚、電場分布は定性的であり正確なものではない。

を通過中の電場は図 11-(b) のように空洞内に広がる。そして、バンチが空洞を通り過ぎる時に、空洞内に広がった電磁場の一部が削り取られ残る（図 11-(c)）。この残された電磁場がウェーク場 (wake field) である。ウェーク場はやがて空洞表面の壁面損失になったり、ビームパイプを伝わって逃げたりして減衰していく。

ウェーク場とその関連する物理をスマートに説明するために、空洞の中心軸から  $a$  だけ離れたところを走る点電荷  $q$  の電荷、及び、電流の分布をそれぞれ以下のように展開する。

$$\rho = \sum_{m=0}^{\infty} \rho_m \quad (135)$$

$$\vec{j} = \sum_{m=0}^{\infty} \vec{j}_m \quad (136)$$

$$\rho_m \stackrel{\text{def}}{=} \frac{I_m}{\pi a^{m+1}(1 + \delta_{m0})} \quad (137)$$

$$\times \delta(s - ct) \delta(r - a) \cos m\theta \quad (138)$$

$$\vec{j}_m \stackrel{\text{def}}{=} c \rho_m \vec{n}_s \quad (139)$$

ここで、ディラックのデルタ関数のフーリエ級数展開を用いた。上の展開は多重極展開と呼ばれ、 $m$  はビーム電荷分布のモーメントの次数、 $I_m$  は  $m$  次のモーメントの大きさである。次数が  $m = 0 \sim 2$  の場合の電荷分布を図 12-(b)~(d) に示す。それらの場合に電場分布がどうなるかを各自確かめておいて欲しい。尚、 $m = 0$  を単極 (monopole)、 $m = 1$  を双極 (dipole)、 $m = 2$  を四極 (quadrupole) などと言う。

ここで簡単のため空洞とビームパイプ（「環境」）は軸まわりで対称（軸対称）であるとしよう。この時、マク

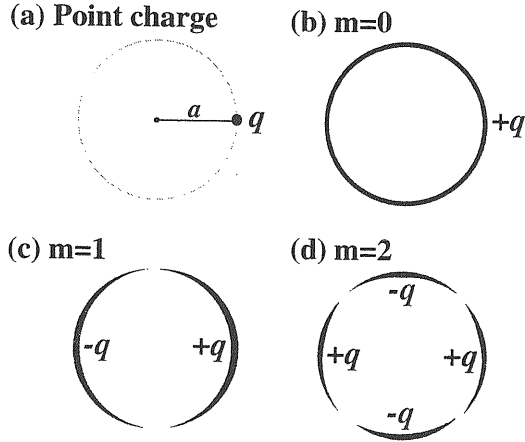


図 12: 点電荷ビーム（総和）とその多重極展開（(b)0次、(c)1次、(d)2次のモーメント）。

スウェル方程式を円筒座標系で解くことにより、以下の式が得られる。

$$\int ds F_L = -e I_m W_m^{\parallel}(\tilde{z}) r^m \cos m\theta \quad (140)$$

$$\int ds \vec{F}_T = -e I_m W_m^{\perp}(\tilde{z}) m r^{m-1} \times (\vec{n}_r \cos m\theta - \vec{n}_\theta \sin m\theta) \quad (142)$$

左辺は関係する加速器の区間（例えば、加速空洞）にわたるビーム粒子にかかる力の積分であり、ウェーク・ポテンシャルと言う。\$\tilde{z}\$ はウェーク場を生み出すビーム粒子とそれを感じる試験粒子との間の距離（符号付き）で、\$W\_m^{\parallel}(\tilde{z})\$ 及び \$W\_m^{\perp}(\tilde{z})\$ はそれぞれ縦ウェーク関数、横ウェーク関数と呼ばれている。これらウェーク関数の形は環境（ビームパイプや加速空洞）が定まれば一意的に決まる。また、因果律より \$\tilde{z} > 0\$ の時ウェーク関数はゼロとなる。さらに、上式からわかるように0次の横ウェーク関数はゼロである。ウェーク・ポテンシャルはビーム粒子にかかる力の時々刻々の変化の情報を含んでいない。しかし、ビーム不安定性の議論にはそのような情報は不要である。尚、証明は省略するが、縦ウェーク関数は縦ウェーク関数の微分である。

$$W_m^{\parallel}(\tilde{z}) = \frac{d}{d\tilde{z}} W_m^{\perp}(\tilde{z}) \quad (143)$$

次に、結合インピーダンス（以下、単にインピーダンス）という量をウェーク関数のフーリエ変換として以下のように定義する。

$$Z_m^{\parallel}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tilde{z}}{c} e^{-i\omega\tilde{z}/c} W_m^{\parallel}(\tilde{z}) \quad (144)$$

$$Z_m^{\perp}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tilde{z}}{c} e^{-i\omega\tilde{z}/c} W_m^{\perp}(\tilde{z}) \quad (145)$$

\$Z\_m^{\parallel}(\omega)\$ を縦方向インピーダンス、\$Z\_m^{\perp}(\omega)\$ を横方向インピーダンスと言う。\$Z\_m^{\perp}(\omega)\$ の定義に虚数単位 \$i\$ が付くのは便宜上の問題である。証明は省略するが、インピーダンスには以下のような性質がある。

$$\Re Z_m^{\parallel}(-\omega) = \Re Z_m^{\parallel}(\omega) \quad (146)$$

$$\Im Z_m^{\perp}(-\omega) = \Im Z_m^{\perp}(\omega) \quad (147)$$

$$\Im Z_m^{\parallel}(-\omega) = -\Im Z_m^{\parallel}(\omega) \quad (148)$$

$$\Re Z_m^{\perp}(-\omega) = -\Re Z_m^{\perp}(\omega) \quad (149)$$

ここで、ビーム電流にも多重極展開とフーリエ分解を適用すると<sup>14</sup>、

$$J_m(\tilde{z}, t) \stackrel{\text{def}}{=} |\vec{j}_m| e^{i(k\tilde{z} - \omega t)} \quad (150)$$

となり、ある考えている区間を通過する間に得るエネルギー \$V\_m\$ は、

$$V_m = -\frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{z}' J_m(\tilde{z}, t - \frac{\tilde{z}' - \tilde{z}}{c}) W_m^{\parallel}(\tilde{z} - \tilde{z}') \quad (151)$$

$$= -\frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} dz J_m(\tilde{z}, t + \frac{z}{c}) W_m^{\parallel}(z) \quad (152)$$

$$= -J_m Z_m^{\parallel} r^m \cos m\theta \quad (153)$$

となる。

多くの場合、最低次のモーメントだけでよい近似となる。また、単にウェークやインピーダンスと言うと最低次のことを意味する場合がある。本書では最低次のみを考慮し、ウェーク関数とインピーダンスをそれぞれ以下のように定義する。

$$W_L \stackrel{\text{def}}{=} W_0^{\parallel} \quad (154)$$

$$W_T \stackrel{\text{def}}{=} W_1^{\perp} \quad (155)$$

$$Z_L \stackrel{\text{def}}{=} Z_0^{\parallel} \quad (156)$$

$$Z_T \stackrel{\text{def}}{=} Z_1^{\perp} \quad (157)$$

そうすると、式(153)は、

$$V = -I \times Z_L \quad (158)$$

となり、これは回路理論で出て来るオームの法則と同形である。これで、ウェーク関数のフーリエ変換として定義したインピーダンスの意味を掴めてもらえたと思う。

ウェーク関数とインピーダンスは互いにフーリエ変換の関係にあるので、どちらで理論を展開しても数学的には同値である。（ウェーク関数を使う表記を time domain、インピーダンスを使う表記を frequency domain と言う。）しかし、物理的描像はまるで違い、場合によって使い分けることが重要である。

<sup>14</sup>この節では物理の分野でよく使われる虚数単位 \$i\$ を用いる。時間依存性に関して \$j\$ とは \$j = -i\$ の関係にあることに注意して欲しい。

最後に証明は省略するが、空洞を特徴付ける量で空洞の共鳴付近でのインピーダンスを書くと、

$$Z_L(\omega) = \frac{1}{2} \frac{R_a}{Q_0} \frac{Q_L}{1 + iQ_L(\omega'_a/\omega - \omega/\omega'_a)} \quad (159)$$

となる。これも入力インピーダンス (式 (52)) と同様、LCR 回路のインピーダンスと同形であり、高周波近似では半値幅が  $\omega'_a/Q_L$  となる。

## 4.2 単バンチの場合

さて、ここからがビーム不安定性の本題になる。まず最初に、円形加速器の中にバンチが1つだけまわっている場合 (単バンチ) を考える。バンチは加速空洞内にさまざまな固有モードのウェーク場を残す。ここでは問題となる加速モード (基本モード) のみを考える。加速モードは、例えば第 2.4 節で解説したような減衰器付きの空洞でも減衰させることは原理的にできない。従って、大電流を加速する空洞を開発する上では非常に深刻な問題となる。

バンチの縦方向振動であるシンクロトロン振動は以下のような方程式で記述される。

$$\frac{d}{dn} \tilde{z}_n = -\eta C \delta_n \quad (160)$$

$$\frac{d}{dn} \delta_n = \frac{(2\pi\nu_s)^2}{\eta C} \tilde{z}_n \quad (161)$$

ここで、 $n$  は周回 (revolution) の番号を表し、 $z_n$  は同期粒子の位置からのずれ、微分  $d/dn$  はバンチが一周する間の変化量を意味する。また、 $C$  は周長、 $\delta_n = \Delta P/P_0 \cong \Delta E/E_0$  は同期粒子のエネルギーに対するずれ、 $\nu_s$  は synchrotron tune (=  $\omega_s/\omega_{\text{rev}}$ ) である。式 (160) はバンチが一周する時の位置のずれで、それは周長とエネルギー差分に比例する。この時の比例定数が slippage factor と呼ばれるもので、以下の式で表されるように、加速器のラティスとビームエネルギーが決まれば定まるものである。

$$\eta = \alpha - \frac{1}{\gamma^2} \quad (162)$$

ここで、 $\alpha$  は momentum compaction factor で、通常は正の値をとる。また、高エネルギー電子貯蔵リングでは transition の上にいるので、常に  $\eta > 0$  である。尚、式 (160), (161) からはシンクロトロン振動を表す単純な単振動の方程式が得られる<sup>15</sup>。

$$\frac{d^2}{dn^2} \tilde{z}_n + (2\pi\nu_s)^2 \tilde{z}_n = 0 \quad (163)$$

しかし、上式では加速空洞などで失うエネルギーが考慮されておらず、ビーム強度が小さい場合でしか正しく

<sup>15</sup>実際は、こう書けるように加速器をモデル化した。

ない。そこで、バンチが一周した時のエネルギー変化量を表す式 (161) の右辺に新たにウェーク場によるエネルギー損失を追加する必要がある。そうすると、式 (161) は、式 (140) と (154) より、

$$\frac{d}{dn} \delta_n = \frac{(2\pi\nu_s)^2}{\eta C} \tilde{z}_n + \frac{eV(\tilde{z}_n)}{E} \quad (164)$$

$$= \frac{(2\pi\nu_s)^2}{\eta C} \tilde{z}_n \quad (165)$$

$$- \frac{Ne^2}{m_0\gamma c^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_L((kC - \tilde{z}_k) - (nC - \tilde{z}_n)) \quad (166)$$

$$= \frac{(2\pi\nu_s)^2}{\eta C} \tilde{z}_n \quad (167)$$

$$- \frac{Nr_0}{\gamma} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_L(kC - nC + \tilde{z}_n - \tilde{z}_k) \quad (168)$$

となる。ここで、 $r_0 \stackrel{\text{def}}{=} e^2/(m_0c^2)$  はビーム粒子の古典半径である。また、縦ウェーク関数  $W_L$  は加速器一周に関するものである。式 (160) と (168) を合わせれば、ウェーク場を考慮した場合のシンクロトロン振動の運動方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dn^2} \tilde{z}_n + (2\pi\nu_s)^2 \tilde{z}_n \\ &= \frac{Nr_0\eta C}{\gamma} \\ & \times \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_L(kC - nC + \tilde{z}_n - \tilde{z}_k) \quad (169) \end{aligned}$$

これは強制振動の方程式に他ならない。従って、シンクロトロン振動の振幅が増大するか減少するかはウェーク場のバンチに対する影響の仕方により決まる。

通常、シンクロトロン振動の振幅は加速モードの波長よりもずっと小さいので、以下の近似が使える。

$$\begin{aligned} & W_L(kC - nC + \tilde{z}_n - \tilde{z}_k) \\ & \cong W_L(kC - nC) + (\tilde{z}_n - \tilde{z}_k) W'_L(kC - nC) \quad (170) \end{aligned}$$

上式の第一項は  $k$  に依存しない静的な運動を表している。実際この項はビームローディングとなる。そこで、ここからは第二項だけを取り扱う。よって、式 (169), (170) より、

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dn^2} \tilde{z}_n + (2\pi\nu_s)^2 \tilde{z}_n \\ &= \frac{Nr_0\eta C}{\gamma} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\tilde{z}_n - \tilde{z}_k) W'_L(kC - nC) \quad (171) \end{aligned}$$

を得る。上式は  $\tilde{z}_n$  に関する線形 2 階微分方程式なので、解は以下の形となる。

$$\tilde{z}_n = \hat{z} e^{i\Omega n T_{\text{rev}}} \quad (172)$$

$$= \hat{z} e^{-\Im\{\Omega\} n T_{\text{rev}}} e^{i\Re\{\Omega\} n T_{\text{rev}}} \quad (173)$$



ここで、 $T_{\text{rev}} \stackrel{\text{def}}{=} C/c$  はバンチが加速器を一周するのに要する時間、 $\Omega$  は求めるべき複素量で、その実部 ( $\Re\{\Omega\}$ ) は振動数を、虚部 ( $\Im\{\Omega\}$ ) は振幅の増大率 ( $\Im\{\Omega\} < 0$ ) または減少率 ( $\Im\{\Omega\} > 0$ ) を表す。尚、ウエーク場が無い時は  $\Omega = \omega_s$  である。式 (172) を式 (171) に代入すると以下の式を得る。

$$\Omega^2 - \omega_s^2 = -\frac{Nr_0\eta c}{\gamma T_{\text{rev}}} \quad (174)$$

$$\times \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 - e^{-ik\Omega T_{\text{rev}}}) W'_L(kC) \quad (175)$$

ここで、 $\omega_s = \nu_s \omega_{\text{rev}}$  はシンクロトロン角周波数である。また、無限和の中で  $(k-n) \rightarrow k$  と置き換えた。

次に、式 (175) をインピーダンスで書き換えてみよう。Poisson の和公式：

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} F(kC) \equiv \frac{1}{C} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \tilde{F}\left(\frac{2\pi p}{C}\right) \quad (176)$$

$$\tilde{F}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\xi x} F(x) \quad (177)$$

と式 (144) より、

$$\begin{aligned} & \Omega^2 - \omega_s^2 \\ &= -i \frac{Nr_0\eta}{\gamma T_{\text{rev}}^2} \\ & \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left[ p\omega_{\text{rev}} Z_L(p\omega_{\text{rev}}) \right. \\ & \quad \left. - (p\omega_{\text{rev}} + \Omega) Z_L(p\omega_{\text{rev}} + \Omega) \right] \quad (178) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cong -i \frac{Nr_0\eta}{\gamma T_{\text{rev}}^2} \\ & \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left[ p\omega_{\text{rev}} Z_L(p\omega_{\text{rev}}) \right. \\ & \quad \left. - (p\omega_{\text{rev}} + \omega_s) Z_L(p\omega_{\text{rev}} + \omega_s) \right] \quad (179) \end{aligned}$$

と変形できる。上式によると、 $Z_L$  がわかればシンクロトロン振動が発散するか収束するかがわかる。

ここで、 $\Omega$  が  $\omega_s$  から大きくはずれていないという振動論的取り扱いをしよう。すると、式 (179) の左辺は、

$$\Omega^2 - \omega_s^2 = (\Omega + \omega_s)(\Omega - \omega_s) \quad (180)$$

$$\cong 2\omega_s(\Omega - \omega_s) \quad (181)$$

となり、右辺では  $\Omega \cong \omega_s$  とおける。よって、シンクロトロン振動の振動数変化量  $\Delta\omega_s$  と振幅増大率  $\tau^{-1}$  (負

の時は減衰率) は以下のようにになる。

$$\begin{aligned} \Delta\omega_s &= \Re\{\Omega - \omega_s\} \\ &\cong \frac{I_b e \eta}{2E_0 T_{\text{rev}} \omega_s} \\ & \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left[ p\omega_{\text{rev}} \Im Z_L(p\omega_{\text{rev}}) \right. \\ & \quad \left. - (p\omega_{\text{rev}} + \omega_s) \Im Z_L(p\omega_{\text{rev}} + \omega_s) \right] \quad (182) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau^{-1} &= \Im\{\Omega\} \\ &\cong \frac{I_b e \eta}{2E_0 T_{\text{rev}} \omega_s} \\ & \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left[ (p\omega_{\text{rev}} + \omega_s) \Re Z_L(p\omega_{\text{rev}} + \omega_s) \right] \quad (183) \end{aligned}$$

$I_b \stackrel{\text{def}}{=} Ne/T_{\text{rev}}$  はバンチ電流である。周波数変化量はインピーダンスの虚部に、増大率は実部に比例することに注意しよう。尚、増大率 (growth rate) の逆数である  $\tau$  を増大時間 (growth time) と言う。

ここで、増大率の式 (183) の物理的意味を考えてみよう。そのために、状況を簡単にする幾つかの仮定をする。加速器全体のインピーダンスは加速空洞のもので代表される。また、インピーダンスのピークは鋭く、その幅は  $\omega_{\text{rev}}$  よりもずっと小さいとする。さらに、 $\omega_{\text{rev}} \gg \omega_s$  を仮定する<sup>16</sup>。よって、harmonic number を  $h$  とすると、式 (183) の無限和の中では  $p = \pm h$  の場合のみが効くので、

$$\begin{aligned} \tau^{-1} &\cong \frac{I_b e \eta h \omega_{\text{rev}}}{2E_0 T_{\text{rev}} \omega_s} \\ & \times \left[ \Re Z_L(h\omega_{\text{rev}} + \omega_s) - \Re Z_L(h\omega_{\text{rev}} - \omega_s) \right] \quad (184) \end{aligned}$$

と近似される。ここで、 $\Re Z_L(\omega)$  が偶関数であること (式 (146)) を使った。通常は  $\eta > 0$  なので、式 (184) の第一項はシンクロトロン振動の増大に、第二項は減衰に寄与する。このことを図 13 に示した。

図 13 の例のように、少し下方に離調すると減少率が増大率に勝り安定となる (ただし、 $\eta > 0$  の場合)。もし、 $\Re Z_L(\omega)$  が  $\Delta\omega \sim \omega_s$  くらいの間でゆっくりと変化すればこの種の不安定性は起こらない。

この節で説明した不安定は Robinson 不安定として知られている [12]。

### 4.3 多バンチの場合

バンチの数が 2 個以上の場合は、Robinson 不安定に加えて、異なるバンチがウエーク場を介して影響し合う

<sup>16</sup>通常の加速器では  $\nu_s \ll 1$  なので、このように仮定しても一般性はあまり失われない。

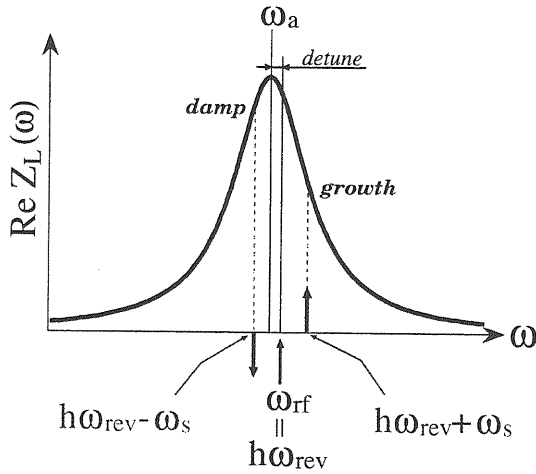


図 13: LCR インピーダンスと Robinson 不安定性。上向き（増大）または下向き（減衰）の矢印のあるところの周波数成分がそれぞれ不安定性または安定性に寄与する。

新しいタイプの不安定性：結合バンチ不安定性が起こる。この節では、Robinson 不安定性での結果を使って結合バンチ不安定性の増大率の式を求める。

簡単のため、加速器に  $M$  個のバンチがあるとし、それぞれは  $N$  個のビーム粒子を含むとする。バンチ間隔の時間  $T_b = T_{\text{rev}}/M$  よりも filling time ( $T_f$ ) が十分長ければ、あるバンチの誘起したウェーク場がその後のバンチに影響を与える。ここでは  $T_b \ll T_f$  の場合（式 103）を考える。シンクロトロン振動の観点からすると、全体は  $M$  個の連成振動系となり  $M$  個の基準振動モードが存在する。ここで、隣り合うバンチの位相差を  $2\pi\mu/M$  ( $\mu = 0, 1, 2, \dots, M-1$ )<sup>17</sup> とする。振動モードは例えば図 14 のようになる。

多バンチと単バンチの場合の違いを考えてみる。まず、バンチが一周しなくても  $T_{\text{rev}}/M$  時間経てば次のバンチが来るため、不安定性の観点からすれば周期が短くなったように見える。また、ここで問題にしているのはバンチ間振動の位相差のため、次々に来るバンチの位相がある点で観測すると、一周で  $2\pi\mu$  だけ位相が速く回るように見える。従って、単バンチの場合の増大率の式 (178) に対して以下の置き換えをすれば多バンチの場合になる

<sup>17</sup>隣り合うバンチの位相差は一周で足し上げると  $2\pi$  の整数倍になるべし、という条件から来る。

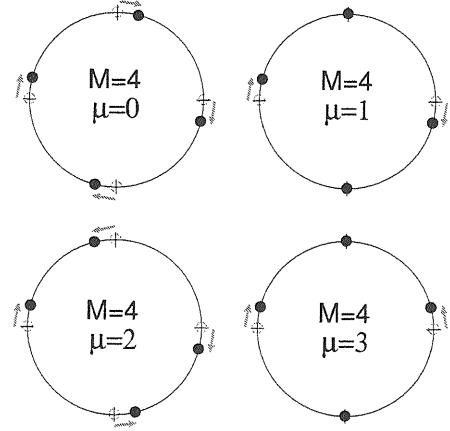


図 14: 円形加速器における縦方向結合バンチ不安定性の振動モードの例 ( $M = 4$ )。

ことがわかる。

$$T_{\text{rev}} \rightarrow T_{\text{rev}}/M \quad (185)$$

$$\omega_{\text{rev}} \rightarrow M\omega_{\text{rev}} \quad (186)$$

$$\Omega \rightarrow \Omega + \mu\omega_{\text{rev}} \quad (187)$$

式 (178) 以降と同じ近似を用いて、以下のような結合バンチ不安定性の増大率の式を得る。

$$\tau^{-1} \cong \frac{Ie\eta}{2E_0 T_{\text{rev}}\omega_s} \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left[ ((Mp + \mu)\omega_{\text{rev}} + \omega_s) \times \Re Z_L((Mp + \mu)\omega_{\text{rev}} + \omega_s) \right] \quad (188)$$

ここで注意して欲しいことは、Robinson 不安定性がバンチ電流に比例するのに対して、結合バンチ不安定性は全ビーム電流に比例することである。また、結合バンチ不安定性はバンチ数に依存しないという特徴を持っている。従って、KEKB のように多くのバンチ（1000 個以上）で運転する場合には Robinson 不安定性よりも結合バンチ不安定性の方が深刻な問題となることが多い。また、2つの不安定に共通の特徴だが、周長の大きな（すなわち周回周波数の低い）リングで低エネルギー・大電流を蓄積する場合にこれらの不安定は大きくなる。

ここで、式 (188) の理解を深めるために、空洞のインピーダンスの幅と周波数の離調量が共に  $\omega_{\text{rev}}$  程度である場合を例として考える。また、バンチ数は多く ( $h > M \gg 1$ )、それらは RF バケットに等間隔に入っているとする。そうすると、 $\Re Z_L(\omega)$  が偶関数であること（式

(148)) を使って以下の式を得る。

$$\begin{aligned}
\tau^{-1} &\cong \frac{Ie\eta}{2E_0T_{\text{rev}}\omega_s} \\
&\times \left[ \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ ((Mp + \mu)\omega_{\text{rev}} + \omega_s) \right. \right. \\
&\quad \times \Re Z_L((Mp + \mu)\omega_{\text{rev}} + \omega_s) \left. \left. \right\} \right. \\
&\quad + \sum_{p=-\infty}^{-1} \left\{ ((Mp + \mu)\omega_{\text{rev}} + \omega_s) \right. \\
&\quad \times \Re Z_L((Mp + \mu)\omega_{\text{rev}} + \omega_s) \left. \left. \right\} \right] \quad (189) \\
&= \frac{Ie\eta}{2E_0T_{\text{rev}}\omega_s} \\
&\times \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ ((Mp + \mu)\omega_{\text{rev}} + \omega_s) \right. \\
&\quad \times \Re Z_L((Mp + \mu)\omega_{\text{rev}} + \omega_s) \\
&\quad + ((-Mp + \mu)\omega_{\text{rev}} + \omega_s) \\
&\quad \times \Re Z_L((Mp - \mu)\omega_{\text{rev}} - \omega_s) \left. \right\} \quad (190) \\
&\cong \frac{Ie\eta\omega_{\text{rf}}}{2E_0T_{\text{rev}}\omega_s} \\
&\times \left\{ \Re Z_L(\omega_{\text{rf}} + \mu\omega_{\text{rev}} + \omega_s) \right. \\
&\quad \left. - \Re Z_L(\omega_{\text{rf}} - \mu\omega_{\text{rev}} - \omega_s) \right\} \quad (191)
\end{aligned}$$

ここで、 $p_0 \stackrel{\text{def}}{=} h/M$  ( $\omega_{\text{rf}} = h\omega_{\text{rev}} = Mp_0\omega_{\text{rev}}$ ) とおいた。式 (191) の図解を図 15 に示す。ここで重要なことは、同じ次数のモードの増大と減衰の寄与は  $\omega = \omega_{\text{rf}}$  ( $= h\omega_{\text{rev}}$ ) に関して左右対称に存在することである ( $\omega_s$  が十分小さければ)。従って、インピーダンスの幅や離調量が  $\omega_{\text{rev}}$  程度以上の場合、 $\omega_{\text{rf}}$  に関する非対称度が結合バンチ不安定性に寄与する。このことは、大電流によるビームローディングのために下方に離調しなければならない場合に問題となる。図 15 の例では  $\mu = -1$  ( $\mu = M - 1$ ) モードによる不安定性を抑えねばならないだろう。どのようにしたら抑えられるのかは第 5 節で説明する。

尚、以上と同様にして横方向の結合バンチ不安定性の増大率も求めることができる。結果のみを書けば以下のようなになる。

$$\begin{aligned}
\tau^{-1} &\cong -\frac{Iec}{2E_0T_{\text{rev}}\omega_\beta} \\
&\times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left[ \Re Z_T((Mp + \mu)\omega_{\text{rev}} + \omega_\beta) \right] \quad (192)
\end{aligned}$$

ここで、 $\omega_\beta$  はベータトロン振動 (横方向振動) の角周波数である。

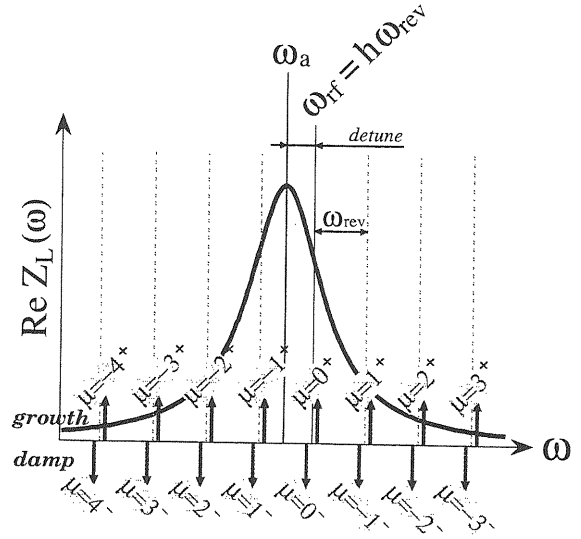


図 15: LCR インピーダンスと縦方向結合バンチ不安定性。上向き (増大) または下向き (減衰) の矢印のあるところの周波数成分がそれぞれ不安定性または安定性に寄与する。

空洞電圧	0.5 MV
$R_a/Q_0$	15Ω
$Q_0$	$1.1 \times 10^5$
$P_c$	150 kW
$U_s/U_a$	9

表 1: ARES 空洞 1 台のデザイン・パラメータ。

## 5 ARES 空洞

ARES<sup>18</sup>は KEKB の大電流を安定して加速・貯蔵するために KEK で独自に開発された常伝導加速空洞である。ARES の基本的なデザイン・パラメータを表 1 に示す。この節では簡単な紹介と、将来の SuperKEKB 計画へ向けてのアップグレードについて説明する。

### 5.1 3 空洞システム

ARES の最大の特徴は 3 空洞システムになっていることである。図 16 に一式の ARES 空洞システムを示す。ARES は高次モード減衰器付加速空洞の他に、エネルギー

<sup>18</sup>Accelerator Resonantly coupled with Energy Storage の略。

ギーの貯蔵を目的としたエネルギー貯蔵空洞（以下、貯蔵空洞）を持っている。貯蔵空洞は円筒形をしており、 $TE_{013}$  モード（図2を参照）で電磁場エネルギーを保持する。ちなみに、このモードでは原理的に空洞内放電は起こらない。また、貯蔵空洞単体でのこのモードの $Q_0$ 値は約 $1.7 \times 10^5$ と高い。

貯蔵空洞で大きなエネルギーを蓄積する目的は、離調量を減らし結合バンチ不安定性を抑えることにある。なぜ離調量を減すと結合バンチ不安定性を抑えられるかは、前の第4節を読み返して欲しい。さて、式(72)と(132)を使って式(129)を書き換えてみると、

$$\Delta f = -\frac{P_b \tan \phi_s}{4\pi U} \quad (193)$$

となる。従って、大電流の蓄積で大きくなる離調量を抑えるには空洞内に貯蔵されるエネルギーを増やせばよい<sup>19</sup>。貯蔵空洞はこの役割を担っている。

加速空洞と貯蔵空洞は、その間にある結合空洞を介して電磁氣的に結合している。従って、ARES 空洞システム一式の中で3つの基準振動モードが存在する（図17）。原理的には貯蔵空洞を直接加速空洞に繋ぐことも可能だが（2空洞システム）、ARESでは敢えて3空洞システムにして $\pi/2$ モードを加速モードとして採用している。これは $\pi/2$ モードに関する以下の利点による。

- エネルギー比 $U_s/U_a$ の変更が容易である。
- 離調（すなわちビームローディング）に対して電磁場が安定していて $U_s/U_a$ がほぼ一定に保たれる。
- 寄生モード（0と $\pi$ モード）を結合空洞から選択的に取り出せる。

上項目の1番目のエネルギー比に関しては第5.2.1節で説明する。2番目の安定性だが、0,  $\pi$ モードの電磁場が離調の影響を1次の摂動で受けるのに対して、 $\pi/2$ モードの電磁場は2次の摂動で受ける。3番目に関しては、寄生モード除去のためにアンテナ型のカップラー（寄生モード減衰器）が結合空洞中央に差し込まれている（図18）。 $\pi/2$ モードによっては結合空洞内電磁場は励振されないため（図17）、0,  $\pi$ モードの選択的減衰が可能である。我々はこの減衰器を「C-damper」と呼んでいる。C-damperの効果を図19に示す。

ARESの場合、結合バンチ不安定に関係するのは加速( $\pi/2$ )モードの離調量( $\Delta f_{\pi/2}$ )であり、それは加速空洞

<sup>19</sup>式(129)によると、空洞電圧 $V_c$ を増やすことでも離調量を抑えることができる。このことは超伝導加速空洞で有用である。

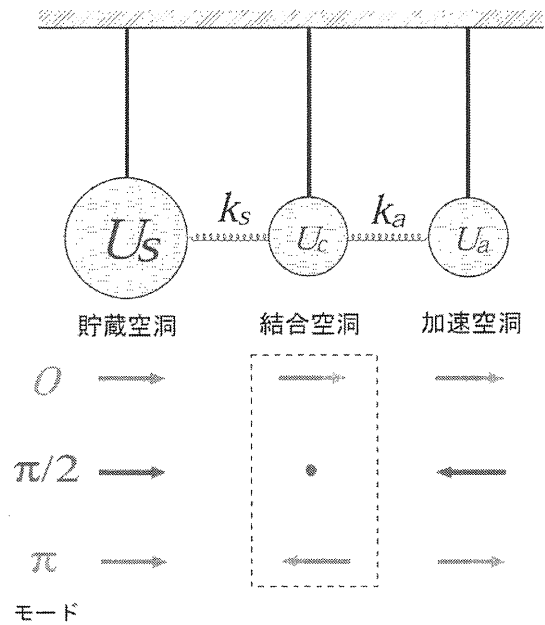


図17: 3空洞システムの基準振動モード。隣接空洞間の振動の位相差により、0,  $\pi/2$ ,  $\pi$ モードと呼ぶ。図中のそれぞれの振子は各空洞内の基本モード（加速空洞では $TM_{010}$ 、貯蔵空洞では $TE_{013}$ 、結合空洞では $TM_{010}$ ）を表している。また、 $k_s, k_a$ はそれぞれ図に示されている位置での電磁氣的な結合定数である。

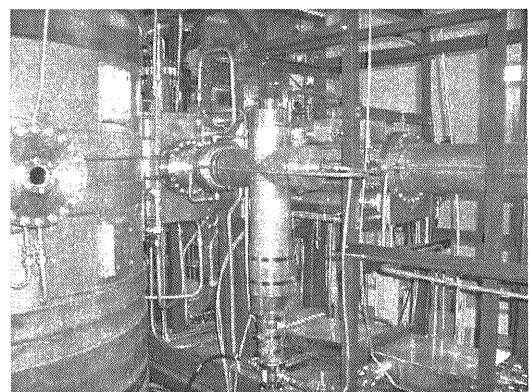
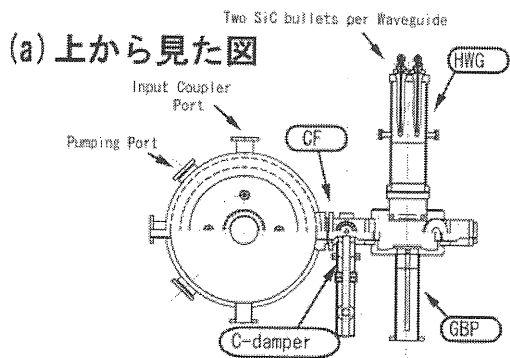
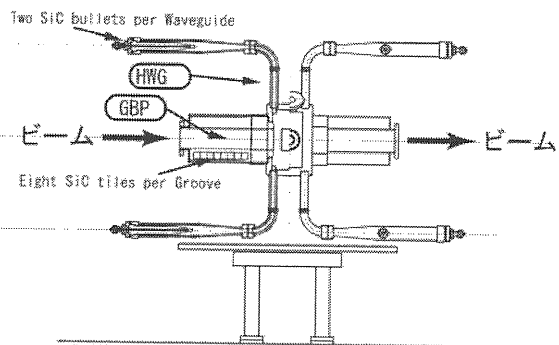
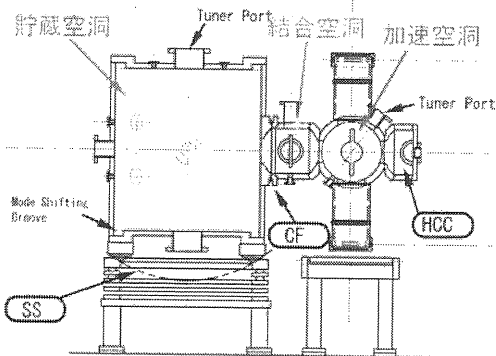


図18: 寄生モード減衰器：C-damper。



- 高次モード減衰器付加速空洞
- TE<sub>013</sub>モード・エネルギー貯蔵空洞
- 寄生モード減衰器付結合空洞



(b) 横から見た図 (ビームに垂直) (c) 横から見た図 (ビームに平行)

図 16: ARES 空洞システム一式。

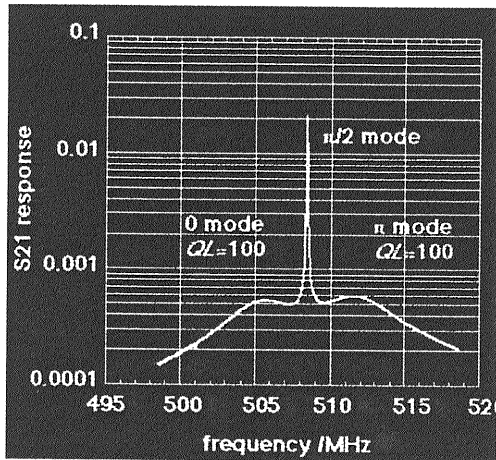


図 19: ARES 空洞システム一式の中に励振される電磁場の強さ (低パワーによる測定)。C-damper のため 0,  $\pi$  モードの電磁場は殆ど立たない。

単体の離調量  $\Delta f_a$  と以下の関係にある<sup>20</sup>[13]。

$$\Delta f_{\pi/2} = \frac{\Delta f_a}{1 + U_s/U_a} \quad (194)$$

ここで、 $\Delta f_a$  は optimum detuning で、ビーム電流と空洞電圧により決まるものである。また、 $U_s$ 、 $U_a$  はそれぞれ貯蔵空洞、加速空洞内の電磁場のエネルギーで、KEKB では  $U_s/U_a = 9$  となっている。加速空洞単体の optimum detuning 量は  $-200$  kHz と周回周波数の 2 倍もあるが、実際にビームが感じる加速モードの離調量は式 (194) に従いその 1/10 となる。図 20 に KEBK の LER (Low Energy Ring) に関する ARES 空洞一式あたりの  $\pi/2$  モード・インピーダンスを示す。ここでは KEBK のデザイン・パラメータを用いた。最近の LER 電流は  $\sim 1.6$  A で、インピーダンスの RF 周波数に関する非対称度はそれ程大きくはないが、 $\mu = -1$  モードの結合バンチ不安定性の影響が出て来ている。そこで、現在では SSB フィルターを用いた RF フィードバック・システムが有効的に働いている [14]。

次に、最近の ARES の運転状況を LER に関してのみ表 2 に示す。3 空洞システムのおかげで、大電流の蓄積でも安定した運転を実現している。

<sup>20</sup> ビームローディングに対する離調は加速空洞の可動チューナのみで行っている。

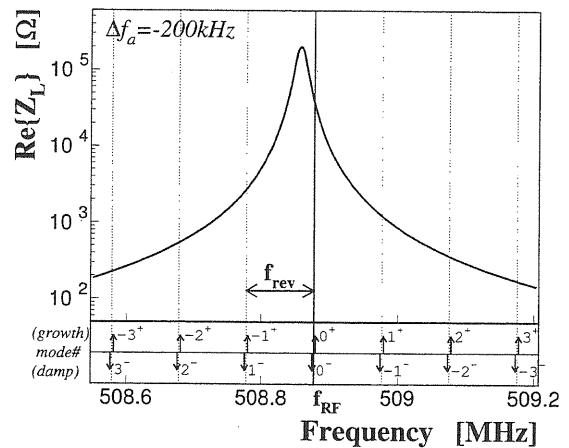


図 20: KEKB/LER に関する加速モードのインピーダンス (ARES 空洞 1 式あたり)。ビーム電流: 2.6 A、ARES 空洞 20 台、空洞電圧 0.5 MV で計算した。周回周波数は  $f_{rev} = 99$  kHz である。

全空洞電圧	8.0 MV
最大ビーム電流	$\sim 1.6$ A
高周波入力パワー	$\sim 300$ kW /cavity
HOM パワー	$> \sim 5$ kW /cavity
トリップ率	$\sim 1$ /cavity/3 months

表 2: 最近 (2004 年 6 月) の ARES の運転状況 (LER のみ)。

## 5.2 将来のアップグレード

KEKBは2003年5月、そのデザインである前人未踏のルミノシティ:  $10^{34} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$  に到達した。しかし、我々は未知の物理的存在の発見と、さらなるルミノシティ・フロンティアを目指して、 $10^{35} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$  またはそれ以上のBファクトリーへのアップグレードを計画している (SuperKEKB計画)。そこでは、HER電流: 4.1 A、LER電流: 9.4 Aを安定して加速・蓄積しなければならない。この電流はKEKBのデザインの実に3倍以上である。今までの経験と実績から、HERの4.1 Aは現在のARES空洞のデザインのまま台数を増やすだけで対応できることがわかっている。しかし、LERの9.4 Aに対してはARESのデザイン自体の変更を一部余儀なくされる。

SuperKEKBへ向けて、ARES空洞関係では以下の項目についてのアップグレードを計画している。

- エネルギー比  $U_s/U_a$
- HOM吸収体
- 入力カップラー

ここでは一番目のエネルギー比についてのみ解説する。HOM吸収体とカップラーに関しては現在R&Dが進行中であり、近い将来に他の機会で紹介できればと思う。

### 5.2.1 エネルギー比 $U_s/U_a$ の変更

SuperKEKBのLER用ARES空洞一式に関する加速モードのインピーダンスを図21に示す。もしエネルギー比  $U_s/U_a$  を現在のまま変えないとすると ( $U_s/U_a = 9$ )、加速モードの離調量が周回周波数程度まで大きくなってしまふことがわかる。加速モードにより誘起される結合バンチ不安定性の増大率を図22に示す。バンチの振動はシンクロトロン放射による放射減衰効果である程度までは何もしなくても収まってくれる。その目安が放射減衰時間で、SuperKEKBのLERでは30 msec くらいになる予定である。従って、不安定性の増大時間が30 msec 以下、すなわち、増大率が33.3/sec 以上の場合は放射減衰は効かない。 $U_s/U_a = 9$  の場合、 $\mu = -1$  モードのみならず  $\mu = -2$  と  $-3$  までが放射減衰効果の効かない程大きくなり、 $\mu = -1$  モードの増大時間は1 msec を大

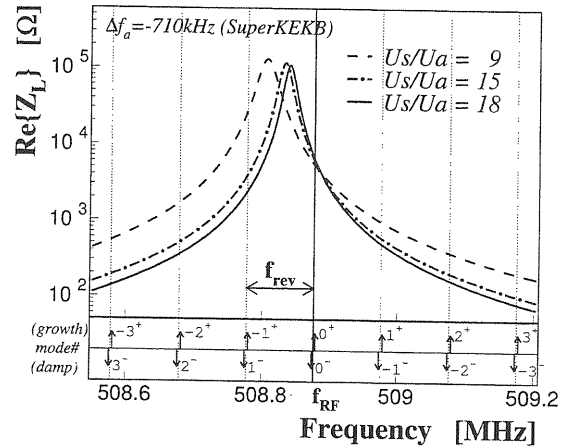


図 21: SuperKEKB/LER に関する加速モードのインピーダンス (ARES 空洞一式あたり)。ビーム電流: 9.4 A、ARES 空洞 28 台、空洞電圧 0.5 MV で計算した。周回周波数は  $f_{rev} = 99 \text{ kHz}$  である。

きく下回る。そこで、エネルギー比を  $U_s/U_a = 15$  まで引き上げることを予定している。これにより、増大率を約1桁落とすことができ、この場合最もシビアな  $\mu = -1$  モードの増大時間は1 msec 強となる。これは、現在稼働中の  $\mu = -1$  モード減衰システムのアップグレードで対応できる予定である。以上の他、寄生モードや HOM により誘起される結合バンチ不安定性の問題もあるが、それは次節 5.2.2 で解説する。

ここで、なぜもっと  $U_s/U_a$  を上げないのか?、と疑問に思われる方がいるかも知れない。しかし、 $U_s/U_a$  を上げると貯蔵空洞内に蓄えられるエネルギーが増え、その結果、壁面損失パワーも増えてしまう。貯蔵空洞の冷却能力は限られているので、許容できる壁面損失パワーには上限がある。図23にエネルギー比  $U_s/U_a$  の関数としての壁面損失パワーを示す。ARES テストスタンドでの経験から壁面損失が200 kW までは安定運転のできることが確認されている。 $U_s/U_a = 15$  は、それに安全ファクターのかかったものである。

さて、ここでどのようにしてエネルギー比  $U_s/U_a$  を変えることができるのか、ということについて説明しておきたい。 $\pi/2$  モードを加速に使用する場合は、等価回路を用いた考察により、 $U_s/U_a$  は空洞間の結合定数と以

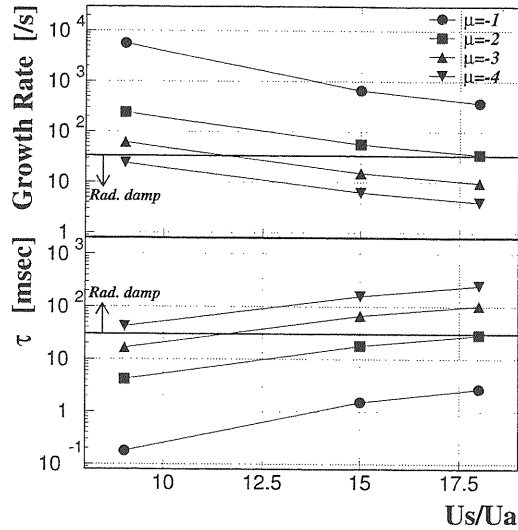


図 22: SuperKEKB/LER に関する加速モードによる縦方向結合パンチ不安定性の増大率 (上) と増大時間 (下) をエネルギー比  $U_s/U_a$  の関数として計算した結果。ビーム電流: 9.4 A、ARES 空洞 28 台、空洞電圧 0.5MV を仮定した。予定される放射減衰時間は  $\tau_{rad} = 30$  msec である。

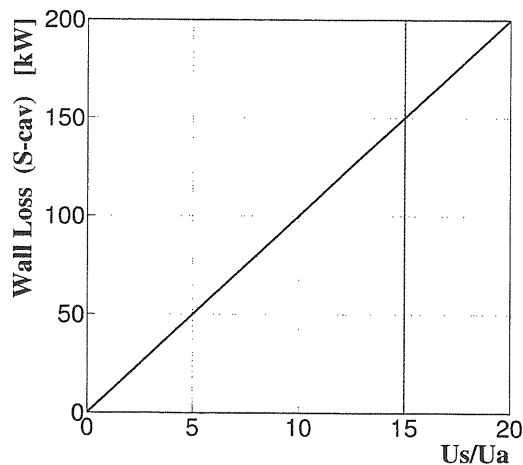


図 23: エネルギー比  $U_s/U_a$  の関数としての貯蔵空洞の壁面損失 (wall loss) パワー。

下のような関係にある [13]。

$$\frac{U_s}{U_a} = \frac{k_a^2}{k_s^2} \quad (195)$$

ここで、 $k_a$  は加速空洞と結合空洞間の電磁気的な結合定数、 $k_s$  は貯蔵空洞と結合空洞間の電磁気的な結合定数である。イメージとしては図 17 を見て頂きたい。そうすると、結合定数を変えることにより簡単に  $U_s/U_a$  を変更することができる。前にも述べたが、これは  $\pi/2$  モードを加速モードとして採用することの利点の一つである。

空洞間の結合定数を変えるということは、実際の空洞では空洞間を繋ぐ穴の大きさ (アパーチャ) を変えることに相当する。空洞の  $Q$  値を使って表現すると、

$$\frac{U_s}{U_a} = \frac{Q_{ext}^{(s)}}{Q_{ext}^{(a)}} \quad (196)$$

となる [6]。ここで、 $Q_{ext}^{(a)}$  は図 25 のように加速空洞に繋がっている結合空洞を導波管に置き換えた時の結合空洞側結合孔から導波管への外部  $Q$  値である。つまり、式 (46) の  $P_{rad}$  は結合空洞側結合孔を通して流出するパワーである。 $Q_{ext}^{(s)}$  は貯蔵空洞に関して同様に定義される。メカニカルな話だが、結合空洞は加速空洞にろう付けされている。そして、貯蔵空洞と加速空洞+結合空洞は KEKB のビームラインに据付ける時に合体させる。どうせ加速空洞の HOM 吸収体もアップグレードしなければならないことを考慮すれば、貯蔵空洞-結合空洞間ではなく加速空洞-結合空洞間のアパーチャを変更するのが賢い選択である。そうすれば、現在ある貯蔵空洞は SuperKEKB の LER でも再利用でき、コスト削減に貢献することができる。図 24 にアパーチャの高さの関数としての加速空洞の外部  $Q$  値とエネルギー比  $U_s/U_a$  を示す。目標とするエネルギー比にするためには、アパーチャの高さを 160 → 175 mm と変更すればよい。この変更はメカニカルには十分許容範囲内である。尚、この計算にはシミュレーション・コード HFSS を用いた。その時使用したジオメトリーを図 25 に示す。

### 5.2.2 寄生モードによる不安定性

ここで、寄生モードによる結合パンチ不安定性について説明する。まず、ビーム電流が非常に少なく、従って離調が殆ど無い場合を考えよう。この時の寄生モードのインピーダンスは図 26 の上図の点線のようになる。こ



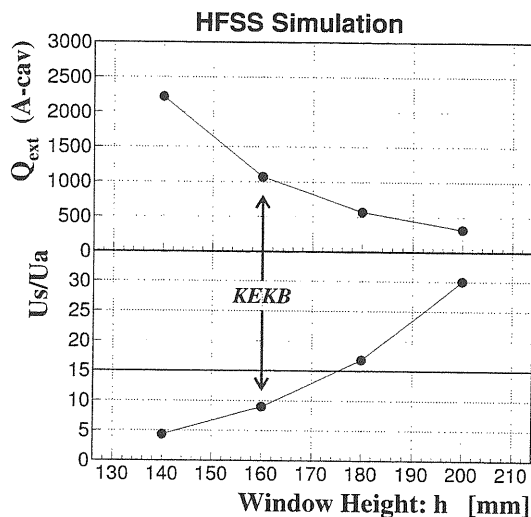


図 24: アパーチャの高さの関数としての加速空洞の外部 Q 値 (上) とエネルギー比  $U_s/U_a$  (下) の数値計算の結果。

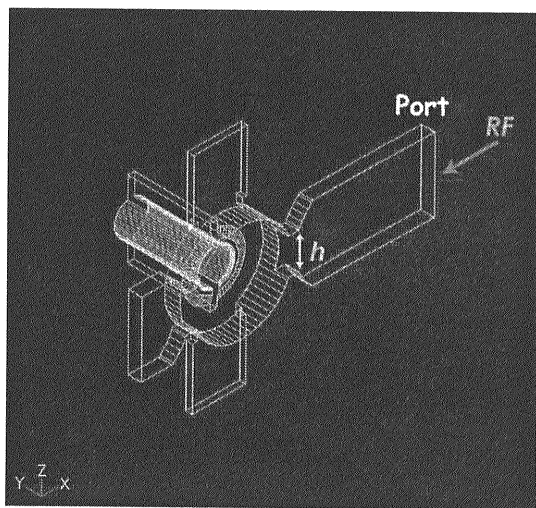


図 25: HFSS の数値計算で用いた加速空洞 + 結合空洞 (導波管に置換え) のジオメトリ。対称性を考慮してビーム軸に垂直な平面に対して片側のみを使用した。

の分布の広がりには周回周波数よりも遥かに大きいものだが、式 (191) または図 15 で説明したように、入力 RF 周波数に関して対称になっているので増大と減衰の寄与が打ち消しあう。よって離調が (ほぼ) 無い時には結合バンチ不安定性は起こらない。しかし、第 5.1 節で説明したように、寄生モードの電磁場は離調の影響を 1 次の摂動で受けてしまう。実際、KEKB/LER のデザイン値で運転した場合 (電流 2.6A、ARES20 台) の離調量は  $-200$  kHz であり、この時の寄生モードのインピーダンスは図 26 の上図の実線のようにになる。非対称度は図 26 の下図の実線で、これから計算される結合バンチ不安定性の増大時間は  $46$  msec である。幸いにも、これは KEKB/LER の放射減衰時間:  $23$  msec より十分長いので、少なくとも KEKB/LER をデザイン電流以下で運転する限りにおいては、寄生モードによる結合バンチ不安定性は問題にならない。

それでは SuperKEKB の場合はどうであろうか。SuperKEKB/LER のデザインパラメータ (電流 9.4A、ARES28 台) で運転した場合の空洞あたりのインピーダンスは図 27 のようになりにかなり非対称になる。この非対称度から計算される増大時間は  $3.3$  msec と SuperKEKB/LER の放射減衰時間  $30$  msec を遥かに下回る。エネルギー比  $U_s/U_a$  を大きくすることはこの非対称度を緩和する方向に働くが、摂動の大きさは  $1/\sqrt{U_s/U_a}$  のファクターでしか改善しない。従って、たとえエネルギー比を  $U_s/U_a = 18$  まで大きくしても増大時間は  $4.0$  msec までしか上がらない。

唐突な話だが、今まで説明してきた基本モードの他に HOM によって引き起こされる結合バンチ不安定性もある。現在のところ、もっとも短い増大時間は  $4$  msec くらいと見積もっている。結局、寄生モードや HOM による増大時間  $3 \sim 4$  msec の縦方向結合バンチ不安定性は空洞グループとしては受け入れ、問題の解決をビームフィードバック・グループにお任せするしかない。

## 謝辞

KEKB 高周波グループの赤井和憲氏と影山達也氏には私の原稿を見て頂き、また、貴重なアドバイスを頂きありがとうございました。

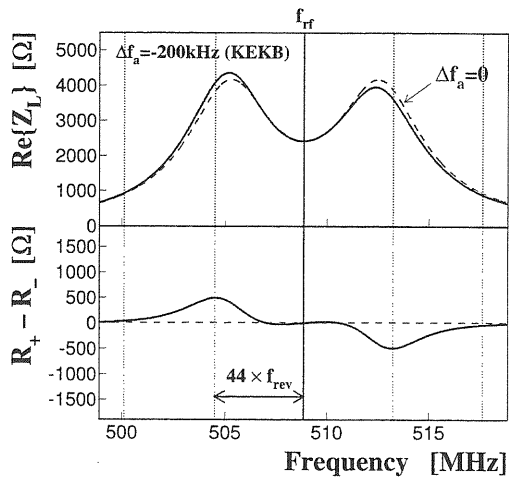


図 26: KEKB/ARES 空洞 1 台あたりの寄生モードのインピーダンス (上) とその入力 RF 周波数に関する非対称度 (下)。上の図で、左の山が 0 モード、右の山が  $\pi$  モードのものである。点線は離調のない場合、実線は KEKB/LER のデザイン・パラメータで運転した場合。

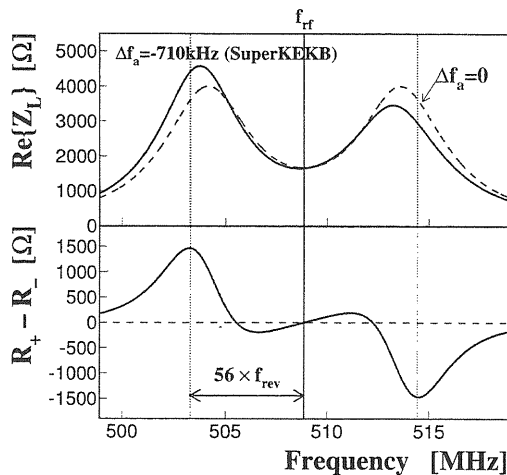


図 27: SuperKEKB/ARES 空洞 1 台あたりの寄生モードのインピーダンス (上) とその入力 RF 周波数に関する非対称度 (下)。上の図で、左の山が 0 モード、右の山が  $\pi$  モードのものである。点線は離調のない場合、実線は SuperKEKB/LER のデザイン・パラメータで運転した場合。エネルギー比  $U_s/U_a = 15$  を用いた。

## 参考文献

- [1] 絵面栄二：“RF フィードバック”，OHO'94 高エネルギー加速器セミナー講義録 (1994).
- [2] 古屋貴章：“超伝導空洞”，OHO'94 高エネルギー加速器セミナー講義録 (1994).
- [3] 赤井和憲：“RF システム”，OHO'94 高エネルギー加速器セミナー講義録 (1994).
- [4] 高田耕治：“高周波加速の基礎”，KEK Report 2003-11, KEK (2003).
- [5] 影山達也：“高次モード減衰型空洞”，OHO'94 高エネルギー加速器セミナー講義録 (1994).
- [6] J. C. Slater: “*Microwave Electronics*”, D. Van Nostrand (1950).
- [7] 竹内保直, 影山達也：“炭化珪素セラミックスの高周波誘電特性”，第 27 回リニアック技術研究会プロシーディングス (2002).
- [8] T. Weiland: “‘single mode cavities’: A possibility for fighting collective beam instabilities”. DESY 83-073.
- [9] T. Kageyama: “A Design of Beam Duct Cross-section for Damping Dipole Modes”. In the Proceedings of the 15th Linear Accelerator Meeting in Japan, p79, September 11-13, 1990.
- [10] A. W. Chao: “*Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators*”, John Wiley & Sons, Inc. (1993).
- [11] 陳榮浩：“ウェイク、インピーダンスとビーム不安定性”，OHO'96 高エネルギー加速器セミナー講義録 (1996).
- [12] K. W. Robinson: Cambridge Electron Accel. Report CEAL-1010 (1964).
- [13] Y. Yamazaki and T. Kageyama: “A Three Cavity System Which Suppresses the Coupled Bunch Instability Associated with the Accelerating Mode”, Part. Accel., **44**, pp. 107-127 (1994).

- [14] S. Yoshimoto, K. Akai and E. Ezura: “The - 1 mode damping system for kekb”. the 14th Symposium on Accelerator Science and Technology (SAST03), November 11-13, 2003, Tsukuba, Japan.