

## 第1章 はじめに

KEKB は B メソン系の CP の破れの検証を目的とした加速器であって、デザイン値として  $1 \times 10^{34} / \text{cm}^2 / \text{sec}$  と非常に高いルミノシティを目指した加速器である。

高いルミノシティを得るためには、

1. 衝突点で垂直方向のベータ関数を出来るだけ小さいする
2. 蓄積電流値を出来る限り高くする
3. ビーム・ビームパラメータという値を出来る限り大きくする

必要がある。

これまでの実験ではビーム・ビームパラメータにはビーム・ビームリミットという不思議な上限値があることが分かっており、この上限値を説明しようとする理論、シミュレーションの研究が行われてきた。しかし、ビーム・ビーム相互作用が本質的に非線形相互作用であるため、この上限値を説明し、予言出来るような理論やシミュレーション・コードが存在してこなかった。KEKB の設計段階においても、シミュレーション・コードはある程度参考にはなるものの、ビーム・ビームパラメータを予言するまでには至らなかった。最近になってようやく、実験値をシミュレーションで、ある程度説明できるようになって来たのは計算機速度が上がり、実際に近いモデルを計算機上で取り扱えるようになってきたためである。

本講義では、KEKB を題材にして、ビーム・ビーム相互作用の基本的な事柄について説明する。具体的には、(1) ビーム・ビーム力、(2) リング中に新たに線形な要素が加わった場合の影響、(3) バンチ長を考慮した場合のビーム・ビーム相互作用、(4) 有限交差角度を持った衝突、(5) ビーム・ビームリミット、(6) シミュレーション・モデルなどについて述べる。

## 第2章 ビーム・ビーム力

ビームが相手のビームと衝突する時に、相手のビームから電磁力により、キック力を受ける。テスト粒子が相手ビームから受ける力について求めてみよう。ここでは簡単のため以下の仮定をする。

- 電荷分布はガウス分布をしている。
- ビーム同士は正面衝突する。
- バンチの長さが断面のビームサイズよりも十分長く、電磁場を 2 次元で考えて良いことにする。

Gauss 分布した軸対称ビームとフラット・ビームの場合について、それぞれキック力を求めてみよう。

### 2.1 軸対称ビーム

軸対称 ( $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ ) の Gauss 分布をしている場合についてキック力を求める。電荷分布  $\rho(r)$  は

$$\rho(r) = \frac{Ne}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right] \quad (2.1)$$

と表すことができる。但し、 $N$  はバンチ当たりの粒子数である。

ビームの中心から半径  $r$  の距離の場所にいる test charge が受けるローレンツ力は

$$\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = e(E_r \pm \beta c B_\phi) \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (2.2)$$

である。ここでの  $\pm$  は同じバンチ内の粒子に対しては  $+$ 、相手バンチの粒子に対しては  $-$  を指す。

$E_r$  は、Gauss の法則を使うと、

$$2\pi r E_r = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r 2\pi r' \rho(r') dr'$$

であるので、

$$E_r = \frac{Ne}{2\pi r \epsilon_0} \left(1 - e^{-r^2/2\sigma^2}\right) \quad (2.3)$$

と求まる。 $B_\phi$  についても、同様に Ampère の法則を使うと、

$$2\pi r B_\phi = \mu_0 \int_0^r 2\pi r' \beta c \rho(r') dr'$$

から、

$$B_\phi = \frac{Ne\mu_0\beta c}{2\pi r} \left(1 - e^{-r^2/2\sigma^2}\right) \quad (2.4)$$

である。

test charge が受ける力  $F_r$  は

$$F_r = \frac{Ne^2}{2\pi r \epsilon_0} (1 \pm \beta^2) \left(1 - e^{-r^2/2\sigma^2}\right) \quad (2.5)$$

となる。 $\beta \sim c$  では、同じバンチ内の粒子に働く力はゼロになり、相手バンチの粒子だけに力が働く。力を受ける方向は電荷の符号によって決まり、同じ電荷符号の場合は斥力、異なる電荷符号の場合は引力となる。

従って、 $y = 0$  の平面において、粒子が相手の単位長さあたりに受けるキック力は

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \frac{\Delta p_x}{p_0} \\ &= \frac{Nr_e}{\gamma\sigma^2} \frac{x}{(r^2/2\sigma^2)} \left(1 - \exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right]\right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

と表せる。ただし、 $r_e$  は電子古典半径  $r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$  で、 $\gamma$  は Lorentz factor である。

$y = 0$  で  $x/\sigma_x$  を横軸にしてグラフに表すと、図 2.1 のようになる。 $r$  が  $\pm 1.5\sigma$  ぐらいでは、ほぼ線形力とみなすことができるが、それより大きいところでは非線形力となっている。

## 2.2 フラット・ビームの場合

次に  $\sigma_x \gg \sigma_y$  の場合について kick 力を求める。一般に、電荷分布  $\rho(\vec{x})$  が与えられた時、静電ポテンシャル  $\phi(\vec{x})$  は

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \quad (2.7)$$

と表せる。電荷分布  $\rho(\vec{x})$  が

$$\rho(\vec{x}) = \frac{Ne}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right] \quad (2.8)$$

のように  $\sigma_x \neq \sigma_y$  である Gauss 分布をしている場合には静電ポテンシャル  $\phi(x, y)$  は

$$\phi(x, y) = \frac{Ne}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{\exp\left(\frac{x^2}{2\sigma_x^2+t} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2+t}\right) - 1}{\sqrt{2\sigma_x^2+t} \sqrt{2\sigma_y^2+t}} dt \quad (2.9)$$

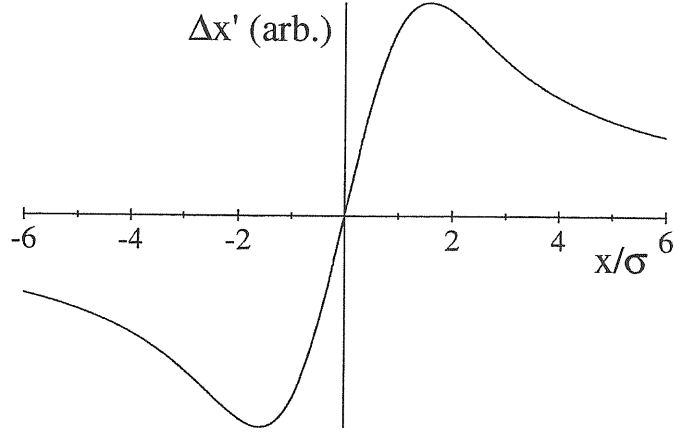


図 2.1: 軸対称なガウシアン形状のビームによるビーム・ビームキック。  $x/\sigma \ll 1$  の小さい領域ではほぼ線形な力と見なせる。  $x/\sigma \gg 1$  では、ほぼ  $(x/\sigma)^{-1}$  に比例して小さくなる。

のように書き表すことができる。(導出方法については Appendix A を参照)

ビーム・ビームキック力はこの静電ポテンシャルを微分することで求めることができる。

$$\Delta x' = \frac{\Delta p_x}{p_0} = \frac{e}{p_0} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \Delta y' = \frac{\Delta p_y}{p_0} = \frac{e}{p_0} \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (2.10)$$

$\sigma_x \gg \sigma_y$  であることを使うと、粒子が受けるキック量はそれぞれ、

$$\Delta x' = \frac{-iNr_e}{\gamma} \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}} I_m \left[ w \left( \frac{x + iy}{\sqrt{2(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}} \right) - \exp \left[ -\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2} \right] w \left( \frac{\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x + i\frac{\sigma_x}{\sigma_y}y}{\sqrt{2(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}} \right) \right] \quad (2.11)$$

$$\Delta y' = \frac{Nr_e}{\gamma} \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}} R_e \left[ w \left( \frac{x + iy}{\sqrt{2(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}} \right) - \exp \left[ -\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2} \right] w \left( \frac{\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x + i\frac{\sigma_x}{\sigma_y}y}{\sqrt{2(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}} \right) \right] \quad (2.12)$$

と表される。ここで  $i$  は虚数単位で、 $w$  は Complex error function と呼ばれるものであり、

$$w(z) \equiv \exp[-z^2] \left( 1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp[\xi^2] d\xi \right) \quad (2.13)$$

で定義される。

(2.10) 式を  $x \ll \sigma_x$ 、 $y \ll \sigma_y$  として線形に近似すると、

$$\Delta x' = \frac{Nr_e}{\gamma} \frac{x}{2\pi\sigma_x(\sigma_x + \sigma_y)}, \quad \Delta y' = \frac{Nr_e}{\gamma} \frac{y}{2\pi\sigma_y(\sigma_x + \sigma_y)} \quad (2.14)$$

と簡単な形で書ける。

### 2.3 Collision scan

(2.11)、(2.12) 式を利用している具体例として、KEKB での collision scan について説明しよう。

KEKB 加速器では二つのビームを衝突させるために、一方のビームを水平方向と垂直方向にそれぞれスキャンして、衝突位置を探している。具体的には、水平方向、垂直方向にビームをオフセットさせた量  $(x, y)$  に対して、パンチ長の効果は無視すると、ビーム・ビームキック量  $(\Delta x', \Delta y')$  は (2.11)、(2.12) 式におい

て、 $x \rightarrow x - x_0$ 、 $y \rightarrow y - y_0$  と置き換えて、(2.11) 式で  $y - y_0 = 0$ 、(2.12) 式で  $x - x_0 = 0$  とすると、それぞれ、

$$\Delta x' = i \frac{Nr_e}{\gamma} \sqrt{\frac{2\pi}{\Sigma_x^2(1-\kappa^2)}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\Sigma_x^2(1-\kappa^2)}\right) \left[ \operatorname{Erf}\left(\frac{-i\kappa(x-x_0)}{\sqrt{2\Sigma_x^2(1-\kappa^2)}}\right) - \operatorname{Erf}\left(\frac{-i(x-x_0)}{\sqrt{2\Sigma_x^2(1-\kappa^2)}}\right) \right] \quad (2.15)$$

$$\Delta y' = -\frac{Nr_e}{\gamma} \sqrt{\frac{2\pi}{\Sigma_x^2(1-\kappa^2)}} \exp\left(-\frac{(y-y_0)^2}{2\Sigma_x^2(1-\kappa^2)}\right) \left[ \operatorname{Erf}\left(\frac{\kappa^{-1}(y-y_0)}{\sqrt{2\Sigma_x^2(1-\kappa^2)}}\right) - \operatorname{Erf}\left(\frac{(y-y_0)}{\sqrt{2\Sigma_x^2(1-\kappa^2)}}\right) \right] \quad (2.16)$$

と書ける。但し、 $\Sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2(e) + \sigma_x^2(p)}$ 、 $\Sigma_y = \sqrt{\sigma_y^2(e) + \sigma_y^2(p)}$ 、 $\kappa = \Sigma_y/\Sigma_x$ 、 $\operatorname{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$  である。 $x$  または  $y$  を変えていって  $\Delta x'$ 、 $\Delta y'$  を測定する。その結果を、この式で fitting することで  $x_0$ 、 $y_0$ 、 $\Sigma_x$ 、 $\kappa$  が求まる。

円形加速器において、 $s = s_0$  で強さ  $\theta$  の kick があった時に  $s = s_1$  での BPM の読みの変位量は

$$\Delta x(s_1) = \frac{\sqrt{\beta(s_0)\beta(s_1)}}{2 \sin \pi\nu} \cos(\pi\nu - |\phi_0 - \phi_1|) \theta \quad (2.17)$$

と表すことができるので、ビーム・ビームキック量は衝突点から  $\pm\pi/2$  だけ位相の進んだ場所の BPM で観測して、次の量を計算することで  $\Delta x'$  を求めている。

$$\Delta x' \propto \frac{\Delta x(+\pi/2)}{\sqrt{\beta_x^* \beta_x(+\pi/2)}} + \frac{\Delta x(-\pi/2)}{\sqrt{\beta_x^* \beta_x(-\pi/2)}} \quad (2.18)$$

$\pm\pi/2$  での値を足しあわせているのは、軌道変動の影響をキャンセルためである。

図 2.2 に KEKB で数十 mA 程度の小電流において、水平方向と垂直方向にビーム・ビームスキャンした実験結果を示す。

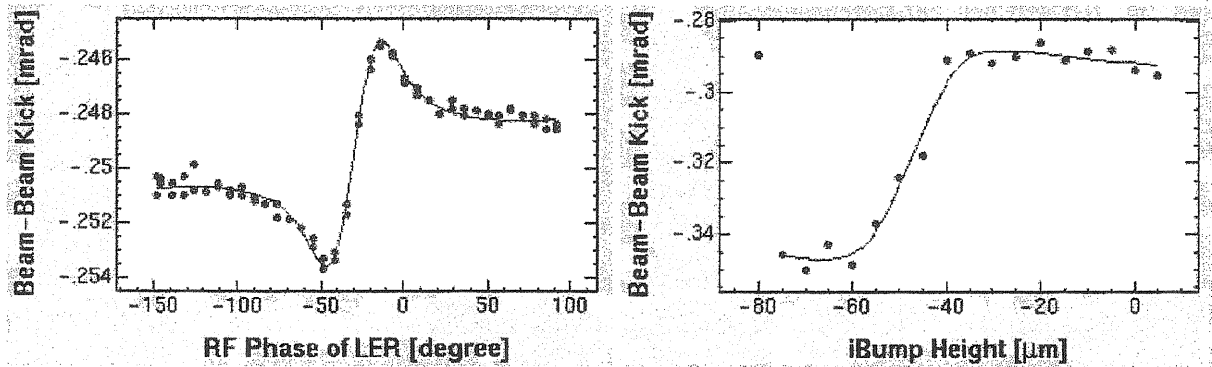


図 2.2: 水平方向 (左図) と垂直方向 (右図) のビーム・ビームスキャン。KEKB では水平方向方向には 22 mrad の交差角を使って、LER の RF の位相を変えることでビームをオフセットさせている。垂直方向には HER に衝突点近傍だけの局所的なバンプを作ることで行っている。線はデータ点を (2.15)、(2.16) 式を使って fitting したものである。

### 第3章 線形なビーム・ビーム力による影響

図 2.1 から分かるようにビーム中心近傍ではビーム・ビーム相互作用による力は線形であるので、ビーム・ビーム相互作用は焦点距離  $f$  である線形な集束レンズが衝突点にあるものと見なすことができる。ビーム・ビーム相互作用による集束力は四極電磁石と異なり水平方向、垂直方向どちらの方向に対しても集束力となっている。

焦点距離  $f$  の大きさは、軸対称ビームの場合、

$$\begin{aligned}\frac{1}{f} &= \frac{\Delta x'}{x} \\ &= \frac{Nr_e}{\gamma\sigma^2} \equiv k\end{aligned}\quad (3.1)$$

であり、フラット・ビームの場合には、

$$\frac{1}{f_x} = \frac{Nr_e}{\gamma} \frac{1}{2\pi\sigma_x(\sigma_x + \sigma_y)}, \quad \frac{1}{f_y} = \frac{Nr_e}{\gamma} \frac{1}{2\pi\sigma_y(\sigma_x + \sigma_y)}\quad (3.2)$$

である。

適当な値を上式に入れると分かるように、ビーム・ビーム力は通常四極電磁石よりもかなり強い集束力をもつ。次に線形な集束レンズ (四極磁石) をリングの一箇所 ( $s = s_0$ ) に挿入することによって、どのような影響を受けるかについて見てみよう。

#### 3.1 チューンシフト

リングの周回行列を

$$M = \begin{pmatrix} \cos \mu_0 & \beta_0^* \sin \mu_0 \\ -\frac{1}{\beta_0^*} \sin \mu_0 & \cos \mu_0 \end{pmatrix}\quad (3.3)$$

として、衝突点に線形な集束レンズ

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix}\quad (3.4)$$

が挿入されたとしよう。この時、一周行列は新たな一周行列  $M'$  に変化する。行列で書き表すと、

$$M' = K^{1/2} M K^{1/2}\quad (3.5)$$

$$\begin{pmatrix} \cos \mu & \beta^* \sin \mu \\ -\frac{1}{\beta^*} \sin \mu & \cos \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \mu_0 & \beta_0^* \sin \mu_0 \\ -\frac{1}{\beta_0^*} \sin \mu_0 & \cos \mu_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k/2 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

これから固有値を求めると、チューンのずれが分かる。

$$\begin{aligned}\cos \mu &= \cos \mu_0 - \frac{\beta_0^* k}{2} \sin \mu_0 \\ &= \cos \mu_0 - 2\pi\xi_0 \sin \mu_0\end{aligned}\quad (3.6)$$

となる。ここで、

$$\xi_0 \equiv \frac{Nr_e\beta_0^*}{4\pi\sigma^2\gamma} \quad (3.7)$$

とおいた。この  $\xi_0$  をビーム・ビームパラメータと呼び、ビーム・ビーム相互作用の強さを表す良いパラメータになっている。

フラット・ビームの場合には、ビーム・ビームパラメータは

$$\xi_x \equiv \frac{Nr_e}{\gamma} \frac{\beta_x^*}{2\pi\sigma_x^*(\sigma_x^* + \sigma_y^*)}, \quad \xi_y \equiv \frac{Nr_e}{\gamma} \frac{\beta_y^*}{2\pi\sigma_y^*(\sigma_x^* + \sigma_y^*)} \quad (3.8)$$

と定義される。

$\mu = \mu_0 + \Delta\mu$  とおき、 $\Delta\mu$  が十分小さいとして左辺を展開して整理すると、

$$\Delta\nu = \frac{\Delta\mu}{2\pi} = \xi_0 \quad (3.9)$$

となる。従って、衝突点に四極磁石を挿入したことにより、チューンの値がずれる。その時のチューンシフト量  $\Delta\nu$  はビーム・ビームパラメータ  $\xi_0$  と等しい。

## 3.2 安定性

### 3.2.1 Incoherent 安定性

挿入した四極磁石の強さが強過ぎるとバンチ中の粒子はリング中を周回できなくなる。安定であるためには (3.5) 式の行列の trace が 2 以下である必要がある。すなわち、

$$\begin{aligned} \cos \mu_0 - 2\pi\xi_0 \sin \mu_0 &\leq 1 \\ \xi_0 &\leq \frac{1}{2\pi} \cot \frac{\mu_0}{2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

これを  $\nu_0$  を横軸、 $\xi_0$  を縦軸にとってグラフに書くと、図 3.1 のようになる。曲線より下側が安定な領域を示している。

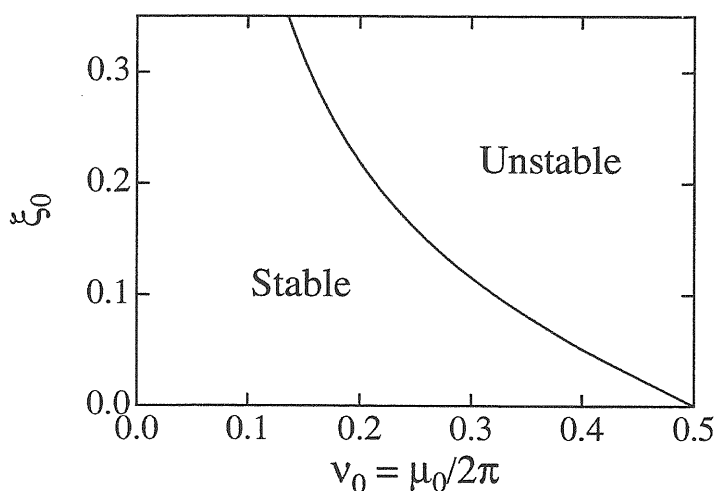


図 3.1:  $(\nu_0, \xi_0)$  空間における安定領域

実際の  $e^+e^-$  のリングコライダーで得られているビーム・ビームパラメータの値としては 0.05~0.08 程度の値であり、ハドロンのリングコライダーではさらにそれより一桁程度低い値である。実際の値とくらべてこのグラフの安定な領域は明らかに大きすぎる事が分かる。

ビーム・ビーム力は  $x$  が  $\pm 1.5\sigma$  より大きいところでは非線形力であり、安定性について議論するには非線形性が重要となってくる。

### 3.2.2 Coherent 安定性

同じ強さのビーム同士の場合、一方のバンチの重心が他方に対してオフセットしてずれると、条件によってはバンチ全体が coherent 振動を起し不安定になる。

リング中にお互いのビームに 1 バンチずつある場合にも、ビーム・ビームキック力を

$$\Delta p^\pm = -k' (y^\pm - y^\mp) \quad (3.11)$$

と線形な力とする。但し、 $y^\pm$  はそれぞれのバンチの重心位置であり、 $k' = 2\pi\xi_0/\beta_0^*$  である。 $k'$  は incoherent な場合の半分の値を取る。バンチ全体の動きを

$$\begin{pmatrix} y^+ \\ p_y^+ \\ y^- \\ p_y^- \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

というベクトルで表すと、キック力は

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -k' & 1 & k' & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ k' & 0 & -k' & 1 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

と書き直せる。また、周回行列  $M$  を

$$M = \begin{pmatrix} \cos \mu_0 & \beta_0^* \sin \mu_0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\beta_0^*} \sin \mu_0 & \cos \mu_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \mu_0 & \beta_0^* \sin \mu_0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\beta_0^*} \sin \mu_0 & \cos \mu_0 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

で表す。

行列  $KM$  の固有値方程式を解くと、 $e^{\pm\mu_0}$  と、 $e^{\pm\mu'}$  の固有値が得られる。但し、 $\mu'$  は

$$\cos \mu' = \cos \mu_0 - 4\pi\xi_0 \sin \mu_0 \quad (3.15)$$

を満たすものである。

$\mu_0$  に対応する振動を 0-mode と、 $\mu' \simeq \mu_0 + \xi_0$  に対応する振動を  $\pi$ -mode と呼ばれている。0-mode は衝突点において互いのバンチが上下あるいは左右に一緒に動く mode であり、 $\pi$ -mode は逆方向へ動く mode である。0-mode は同じ方向へ動くため安定であるが、 $\pi$ -mode は安定であるためには、

$$\xi_0 \leq \frac{1}{4\pi} \cot \frac{\mu_0}{2} \quad (3.16)$$

の条件を満たしている場合に安定である。この条件は incoherent 安定性よりも厳しい条件となっているが、実験で得られている値に比べると、まだ大きい値である。

### 3.3 ダイナミック・ベータ

四極磁石を挿入することで衝突点のベータ関数がどのように歪むか計算してみよう。衝突点を挟んで挿入する四極磁石二つに分けて、新しい一周行列を計算する。

$$\begin{pmatrix} \cos \mu & \beta \sin \mu \\ -\frac{1}{\beta} \sin \mu & \cos \mu \end{pmatrix} = K^{1/2} M K^{1/2} \quad (3.17)$$

右辺の行列を展開して計算すると、

$$\begin{pmatrix} \cos \mu & \beta \sin \mu \\ -\frac{1}{\beta} \sin \mu & \cos \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \mu_0 - 2\pi\xi_0 \sin \mu_0 & \beta_0 \sin \mu_0 \\ * & \cos \mu_0 - 2\pi\xi_0 \sin \mu_0 \end{pmatrix}$$

これから衝突点における新しいベータ関数は

$$\beta = \beta_0 \frac{\sin \mu_0}{\sin \mu} = \frac{\beta_0}{\sqrt{1 + 4\pi\xi_0 \cot \mu_0 - 4\pi^2\xi_0^2}} \quad (3.18)$$

と求められる。

### 3.4 ダイナミック・エミッタンス

エミッタンスを計算するためには、シンクロトロン放射の効果を考慮に入れる必要がある。

まず、衝突点に四極磁石がない場合について考えてみよう。周回行列は

$$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ p' \end{pmatrix} = \lambda M \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

と書ける。ここで  $\lambda$  は

$$\lambda = e^{-\delta} \quad (3.20)$$

であり、減衰項 (radiation damping) を表す。  $\lambda$  は 1 よりわずかに小さな値である。  $\delta$  は damping decrement と呼ばれる量で通常、  $\delta = 1/10000 \sim 1/1000$  程度の値をとる。 KEKB 加速器では  $\delta = 1/4000$  である。  $r_1, r_2$  は平均が 0、標準偏差 1 のガウス乱数を表し、散逸項 (quantum excitation を表す) である。  $\alpha$  はオプティクスやビームエネルギーから決まる定数である。

シンクロトロン放射は確率過程であり、個々の粒子の軌道を計算するだけでは不十分で、粒子全体の統計的な量を計算をする必要がある。

ここで次のような 2 次モーメント行列を定義する。

$$\Sigma \equiv \begin{pmatrix} \langle (x - \bar{x})^2 \rangle & \langle (x - \bar{x})(p - \bar{p}) \rangle \\ \langle (x - \bar{x})(p - \bar{p}) \rangle & \langle (p - \bar{p})^2 \rangle \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

1 次モーメント  $\bar{x} = \langle x \rangle$ ,  $\bar{p} = \langle p \rangle$  はそれぞれの重心位置を表す。  $\Sigma$  を用いると (3.19) 式と同値な式は

$$\Sigma \longrightarrow \Sigma' = (\lambda M) \Sigma (\lambda M)^t + \alpha^2 I \quad (3.22)$$

と書ける。平衡状態における  $\Sigma$  を  $\Sigma_\infty$  と書くと、平衡状態において上式は、

$$\Sigma_\infty = (\lambda M) \Sigma_\infty (\lambda M)^t + \alpha^2 I \quad (3.23)$$

と書ける。その解は

$$\Sigma_\infty = \frac{\alpha^2}{1 - \lambda^2} I \quad (3.24)$$



と求めることができる。そして、平衡状態のエミッタンスは

$$\epsilon = \sqrt{\det \Sigma_\infty} = \frac{\alpha^2}{1 - \lambda^2} \quad (3.25)$$

と拡散項と減衰項の比によって決まっている。また、平衡状態における分布関数は

$$\psi(x, p) = \frac{1}{2\pi\epsilon} \exp\left(-\frac{x^2 + p^2}{2\epsilon}\right) \quad (3.26)$$

と Gauss 分布になる。

次に、四極磁石を衝突点に挿入したとする。この場合、周回行列は

$$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ p' \end{pmatrix} = \lambda MK \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} \hat{r}_1 \\ \hat{r}_2 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

となる。 $\Sigma$  を用いると、(3.27) 式と同値な式は

$$\Sigma \longrightarrow \Sigma' = (\lambda MK)\Sigma(\lambda MK)^t + \alpha^2 I \quad (3.28)$$

と書け、平衡状態における  $\Sigma$  を  $\Sigma_\infty$  と書くと、上式は

$$\Sigma_\infty = (\lambda MK)\Sigma_\infty(\lambda MK)^t + \alpha^2 I \quad (3.29)$$

となる。この式は (大変であるが) 解くことができる。近似的には次のように書ける。

$$\Sigma_\infty \simeq \frac{1 + 4\pi\xi_0 \cot \frac{\mu_0}{2}}{1 + \frac{4\pi\xi_0}{\beta_0} \cot \mu_0 - \left(\frac{4\pi\xi_0}{\beta_0}\right)^2 / 4} \epsilon_0 \begin{pmatrix} 1 & \frac{4\pi\xi_0}{\beta_0} \\ \frac{4\pi\xi_0}{\beta_0} & 1 + \frac{4\pi\xi_0}{\beta_0} \cot \mu_0 \end{pmatrix} + O(\delta) \quad (3.30)$$

従って、新しい平衡エミッタンスは

$$\epsilon = \sqrt{\det M_\infty} = \epsilon_0 \frac{1 + 4\pi\xi_0 \cot \mu_0}{\sqrt{1 + 4\pi\xi_0 \cot \mu_0 - 4\pi^2 \xi_0^2}} + O(\delta) \quad (3.31)$$

となる。この平衡エミッタンスを求める手法は envelop formalism と呼ばれ、SAD でエミッタンスを求め際にも用いられている。

このように相手のビームの強さ  $\xi_0$  によってベータ関数、エミッタンスが動的に変化することをダイナミック・ベータ、ダイナミック・エミッタンスと呼んでいる。

(3.18)、(3.31) 式から、 $\nu_0 = \mu_0/2\pi$  に対する  $\beta/\beta_0$ 、 $\epsilon/\epsilon_0$ 、 $\sigma/\sigma_0$ 、 $\sigma/\sigma_0 = \sqrt{\epsilon\beta}/\sqrt{\epsilon_0\beta_0}$  のグラフを図 3.2 に示す。 $\nu_0$  が整数あるいは半整数に近付くと、 $\beta$  は 0 に近付くが、一方でエミッタンス  $\epsilon$  は大きくなる。ビームサイズ  $\sigma = \sqrt{\epsilon\beta}$  は小さくなる。従って、チューンはできる限り、整数あるいは半整数に近付いた方がビームサイズを小さくすることができる。KEKB 加速器の HER/LER の Horizontal tune は 0.512/0.506 程度まで半整数に近付いている。

また、Horizontal のビーム・ビームパラメータの値も

$$\xi_x = \frac{Nr_e}{2\pi\gamma} \frac{\beta_x^*}{\sigma_x^*(\sigma_x^* + \sigma_y^*)} \simeq \frac{Nr_e}{2\pi\gamma} \frac{\beta_x^*}{(\sigma_x^*)^2} = \frac{Nr_e}{2\pi\gamma} \frac{1}{\epsilon_x}$$

と  $\epsilon_x$  に反比例するため小さくなる。

## 第 4 章 バンチ長を考慮した場合のビーム・ビーム相互作用

バンチ長の長さ  $\sigma_z$  が  $\beta_y^*$  程度の長さの場合には、ビームビーム力についてバンチ長の効果を考慮する必要がある。ここでは粒子間の衝突点位置、バンチ長を考慮した場合のビーム・ビーム力の計算方法 (synchro-beam mapping)、衝突点近傍におけるベータ関数の変化 (hourglass 効果) について述べる。

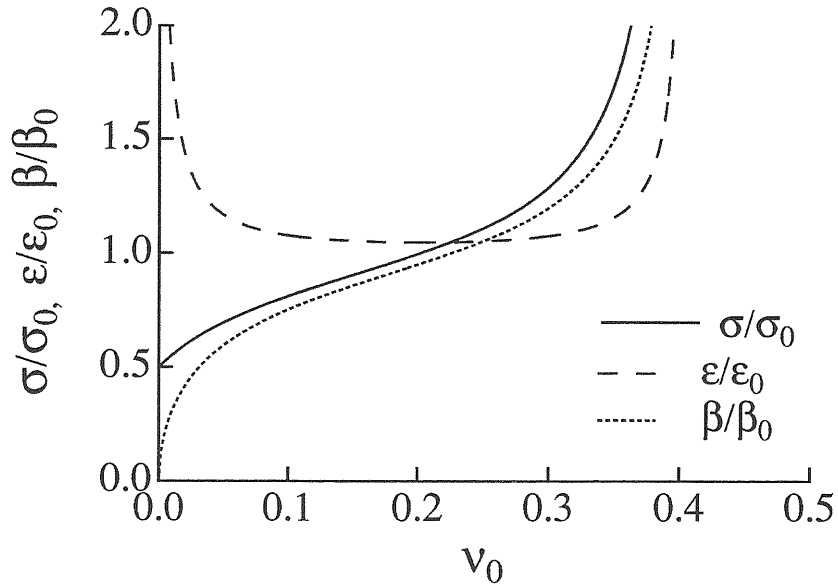


図 3.2:  $\xi_0 = 0.05$  の場合のチューン  $\nu_0 = \mu_0/2\pi$  に対するビームサイズ、ダイナミック・エミッタンス、ダイナミック・エミッタンス

#### 4.1 粒子間の衝突点位置

各々のバンチの中の粒子が衝突する場所は、IP で衝突するとは限らず、粒子がバンチの中心から離れている距離 ( $z$ ) に依存する。例えば、 $s = 0$  をバンチの重心が衝突する場所 (IP) だとすると、各々の粒子がバンチ中心から  $z^+$  と  $z^-$  だけ離れている粒子同士の衝突位置は

$$s = S(z^+, z^-) = (z^+ - z^-)/2 \quad (4.1)$$

となる。

#### 4.2 synchro-beam mapping

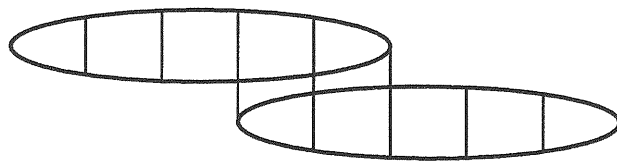


図 4.1: それぞれのバンチを longitudinal 方向に、いくつかのスライスに分割する。そして、各々のスライスについて、他方のビームのスライス中のマクロ粒子に対するビーム・ビームキック力を計算する。そして、1つのスライス分ずらして、ビーム・ビームキック力を同様に計算する。

電子、陽電子ともエネルギーが相対論的領域であるので、ビーム・ビーム力は transverse 方向で相手ビームのみに働く。従って、あるバンチ形状が与えられた時、longitudinal 方向にいくつかのスライスに分割して、各スライスについて transverse 方向へのキック力を計算すれば良い。(図 4.1)

一方のビーム中のあるスライスによって他方ビーム中の粒子がキックされるのを計算するには synchro-

beam mapping<sup>1</sup>という方法で計算を行う必要がある。

synchro-beam mapping は3つの引き続いたマッピング

$$\vec{x}_{IP} \xrightarrow{\text{virtual drift}} \vec{X}_{IP} \xrightarrow{\text{b-b}} \vec{X}_{IP}^{\text{new}} \xrightarrow{\text{virtual drift}} \vec{x}_{IP}^{\text{new}}$$

からなっている。第一番目のマッピングは

$$\vec{X}(S) = \exp\left(-: \frac{(p_x^2 + p_y^2)S}{2} : \right) \vec{x}(0) \quad (4.2)$$

という正準変換により、 $\vec{x} = (x, p_x, y, p_y, z, \delta)$  から  $\vec{X} = (X, P_X, Y, P_Y, Z, P_Z)$  へ変換してやる。ここで  
: A : は Lie 変換を表すオペレータ

$$: A : \vec{x} = [A, \vec{x}], \quad (4.3)$$

であり、[,] は Poisson bracket である。(Appendix C 参照)

(4.2) 式を書き直すと、

$$\begin{aligned} X &= x + p_x S(z, z_i), & P_x &= p_x, \\ Y &= y + p_y S(z, z_i), & P_y &= p_y, \\ Z &= z, & P_z &= \delta - \frac{p_x^2 + p_y^2}{4} \end{aligned} \quad (4.4)$$

となる。これは仮想的な drift を行い、粒子とスライスを衝突点位置  $(S(z, z_i))$  まで運んでやることを意味する。粒子の longitudinal 位置  $(z)$  と相手のビームの  $i$ -th のスライスの位置  $(z_i)$  の間の衝突点位置  $(S(z, z_i))$  は  $S(z, z_i) = (z - z_i)/2$  である。

2番目のマッピングは変数  $\vec{X}$  に関するビーム・ビーム力を計算して、キックを与える。

$$\begin{aligned} P_X^{\text{new}} &= P_X - f_X(X, Y, Z), & f_X(X, Y, Z) &= \frac{\partial \phi}{\partial X}, \\ P_Y^{\text{new}} &= P_Y - f_Y(X, Y, Z), & f_Y(X, Y, Z) &= \frac{\partial \phi}{\partial Y}, \\ P_Z^{\text{new}} &= P_Z - g(X, Y, Z), & g(X, Y, Z) &= \frac{\partial \phi}{\partial Z} \end{aligned} \quad (4.5)$$

最後のマッピングは  $\vec{X}$  から  $\vec{x}$  へ仮想的なドリフトのマッピングである。再度、粒子とスライスを  $-S(z, z_i)$  ドリフトさせて、元の位置に戻してやる。

結局、3つのマッピングをまとめて、元の変数で書き表すと、

$$\begin{aligned} x^{\text{new}} &= x + S(z, z_i) f_X(X, Y, Z), & p_x^{\text{new}} &= p_x - f_X(X, Y, Z), \\ y^{\text{new}} &= y + S(z, z_i) f_Y(X, Y, Z), & p_y^{\text{new}} &= p_y - f_Y(X, Y, Z), \\ z^{\text{new}} &= z, & \delta^{\text{new}} &= \delta - \frac{1}{2} f_X(X, Y, Z) [p_x - \frac{1}{2} f_X(X, Y, Z)] \\ & & & - \frac{1}{2} f_Y(X, Y, Z) [p_y - \frac{1}{2} f_Y(X, Y, Z)] - g(X, Y, Z) \end{aligned} \quad (4.6)$$

と表せることが出来る。

ここで、

$$\begin{aligned} f_X(X, Y, Z) &= -\frac{e}{E_0} \tilde{E}_x, \\ f_Y(X, Y, Z) &= -\frac{e}{E_0} \tilde{E}_y, \\ g(X, Y, Z) &= \frac{\partial S}{\partial Z} \frac{\partial \phi}{\partial S} = -\frac{e}{2E_0} \tilde{E}_z \end{aligned} \quad (4.7)$$

<sup>1</sup>この呼び方は、一般的ではないかも知れないが、ここではこのように呼ぶ。

のように書くと、synchro-beam mapping は

$$\begin{aligned}
x^{new} &= x - \frac{eS(z, z_i)}{E_0} \tilde{E}_x, & p_x^{new} &= p_x - \frac{e}{E_0} \tilde{E}_x, \\
y^{new} &= y - \frac{eS(z, z_i)}{E_0} \tilde{E}_y, & p_y^{new} &= p_y - \frac{e}{E_0} \tilde{E}_y, \\
z^{new} &= z, & \delta^{new} &= \delta + \frac{1}{2} \frac{e}{E_0} \tilde{E}_x \left[ p_x + \frac{1}{2} \frac{e}{E_0} \tilde{E}_x \right] \\
& & & + \frac{1}{2} \frac{e}{E_0} \tilde{E}_y \left[ p_y + \frac{1}{2} \frac{e}{E_0} \tilde{E}_y \right] + \frac{e}{2E_0} \tilde{E}_z
\end{aligned} \tag{4.8}$$

と書き直せる。 $p_x, p_y$  の変化はスライスの電磁場による transverse 方向へのキックを表している。実際には  $p_x, p_y$  へのキックは電場によるものと磁場によるものとで2倍になるが、スライスを横切る時間がスライスが静止している場合の半分になるので、1/2 が掛かる。また、 $x, y$  の変化は  $s = S(z, z_i)$  で衝突することを表している。

一方、 $\delta$  については

$$\begin{aligned}
\delta^{new} &= \delta + \frac{e}{2E_0} \left( \tilde{E}_x \frac{x^{new} + x^{old}}{2S} + \tilde{E}_y \frac{y^{new} + y^{old}}{2S} + \tilde{E}_z \right) \\
&\simeq \delta + \frac{e}{2E_0} \left( \tilde{E}_x x' + \tilde{E}_y y' + \tilde{E}_z \right)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

と変形できる。

電場による粒子のエネルギー変化は

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{e}{E_0} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = \frac{ce}{E_0} (E_x x' + E_y y' + E_z) \tag{4.10}$$

と書けるので、 $\delta \rightarrow \delta^{new}$  への変換は、スライスの電場によって粒子のエネルギーが変化することを表している。なお、1/2 の係数はスライスを横切る時間から出て来る。

### 4.3 ベータ関数の変化

バンチの重心同士の衝突点 (IP) におけるベータ関数を  $\beta_0^*$  としたとき、drift 空間中のベータ関数は

$$\beta = \beta_0^* + \frac{s^2}{\beta_0^*} \tag{4.11}$$

と書ける。図 4.2 のようにバンチ長さの範囲でバンチ重心の衝突点から離れるに従いベータ関数が大きくなることを、hourglass 効果と呼んでいる。ビームサイズ  $\sigma(s) = \sqrt{\beta\epsilon}$  は  $s$  の関数として大きくなる。ルミノシティを大きくする上では、バンチ長  $\sigma_z$  は  $\beta_0^*$  よりも短い方が望ましい。

バンチ長の中でビームサイズが変わるので、ビーム・ビームキック力も当然変わる。本来は各マクロ粒子の軸方向の位置に応じてキック力を計算する必要があるが、それではあまりに計算時間が掛かり過ぎるので、KEKB のビーム・ビーム・シミュレーション・コードでは、マクロ粒子の含まれるスライスの前面と後面でのキックを求めておいて、それを補間することで、各マクロ粒子へのキック力を求めている。

$$\phi_i(s) = \phi_i(s_b) + \frac{\phi_i(s_f) - \phi_i(s_b)}{s_f - s_b} (s - s_b) \tag{4.12}$$

$s_f, s_b$  はマクロ粒子の含まれるスライスの前面と後面位置である。

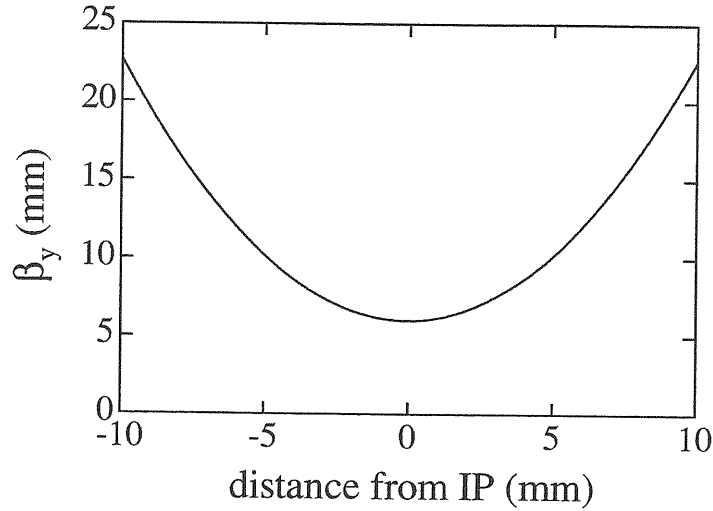


図 4.2: 衝突点 (IP) 近傍における、ベータ関数の変化の様子。( $\beta_y^* = 6\text{mm}$ )

#### 4.4 beam disruption

互いに正負の電荷をもったビームの場合、互いの電磁場で粒子軌道が曲げられることで、元のビームサイズより小さく絞られる。この効果のことを disruption 効果と呼ばれている。

この効果を表す量として、Disruption parameter  $D$  をバンチ長とビーム・ビームによる焦点距離の比として定義する。即ち、

$$D_{x,y} = \frac{2Nr_e\sigma_z}{\gamma\sigma_{x,y}(\sigma_x + \sigma_y)} \quad (4.13)$$

と定義する。ビームが絞られることによってルミノシティも大きくなるため、特にリニアコライダ-の場合には、このパラメータが重要となってくる。 $D_{x,y} \ll 1$  の場合には、集束力は小さく、 $D_{x,y} > 1$  のときは集束力が強いことを意味する。また、 $D_{x,y}$  は相手ビームの中で何回ぐらい振動するかを表しているものと見ることも出来る。

$D_y$  をビーム・ビームパラメータで書き直すと、

$$D_y = 4\pi\xi\frac{\sigma_z}{\beta_y^*} \quad (4.14)$$

とかける。

通常、 $e^+e^-$  リングコライダ-では、 $\sigma_z/\beta_y^* \simeq 1$ 、 $\xi \simeq 0.05$  程度の値をとるので、 $D = 0.6$  程度の値となる。

## 第5章 ルミノシティ

### 5.1 ルミノシティ

ルミノシティは加速器の性能で決まる量であり、

$$L = f_0 \int dx dy dz ds ds' \rho^+(x, y, s) \rho^-(x, y, s') \quad (5.1)$$

で定義される量である。それぞれのバンチが Gauss 分布をしているとすると、上式は

$$L = \frac{f_0 N^2}{4\pi\sigma_x^* \sigma_y^*} = \frac{1}{4\pi e^2 f_0} \frac{I^2}{\sigma_x^* \sigma_y^*} \quad (5.2)$$

と書きなおせる。

また、KEKBようにビームサイズ、ビーム電流が異なるビーム同士の場合にはルミノシティは

$$L = \frac{f_0 N^+ N^-}{2\pi \Sigma_x^* \Sigma_y^*} = \frac{1}{2\pi e^2 f_0} \frac{I^+ I^-}{\Sigma_x^* \Sigma_y^*} \quad (5.3)$$

と書ける。但し、 $\Sigma_x^* = \sqrt{(\sigma_x^{+*})^2 + (\sigma_x^{-*})^2}$ 、 $\Sigma_y^* = \sqrt{(\sigma_y^{+*})^2 + (\sigma_y^{-*})^2}$  である。

これらはビーム同士が正面衝突している場合であり、何らかのエラー、例えば、Gauss分布をしたビームが  $\Delta y$  だけオフセットして衝突している場合には

$$L = \frac{f_0 N^2}{4\pi \sigma_x^* \sigma_y^*} \exp\left[-\frac{\Delta y^2}{4\sigma_y^{*2}}\right] \quad (5.4)$$

となり、ルミノシティは減る。

## 5.2 ビーム・ビームリミット

実際の加速器でのルミノシティの電流依存性のグラフを図 5.1 に示す。

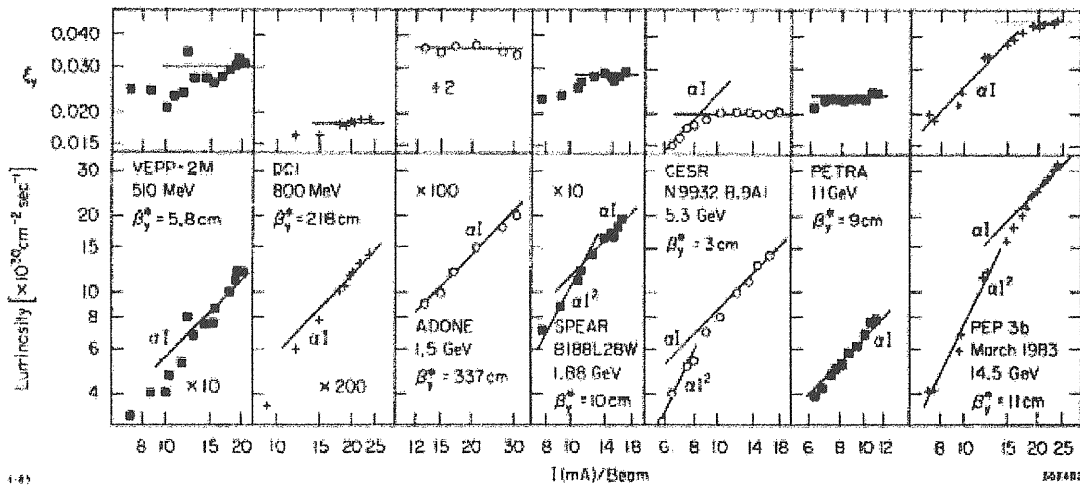


図 5.1: ルミノシティとビーム・ビームパラメータ。VEPP-2M (Novosibirsk)、DCI (Orsay)、ADONE (Frascati)、SPEAR (Stanford)、CESR (Cornel)、PETRA (DESY)、PEP (Stanford) 加速器におけるビーム電流に対するルミノシティとビーム・ビームパラメータ。ルミノシティはある電流のところまでは  $I^2$  に比例して増えていくが、途中から  $I$  に比例するようになる。

どの加速器においても、ルミノシティは低い電流値のところでは  $L \propto I^2$  に比例して増加しているが、あるところから  $L \propto I$  に比例して増加していることが分かる。

(5.2) 式から  $\sigma_x^*, \sigma_y^*$  を消去して、ルミノシティをビーム・ビームパラメータで表すと、

$$L = \frac{I\gamma}{2er_e} \left( \frac{\xi_x}{\beta_x^*} + \frac{\xi_y}{\beta_y^*} \right)$$

と書ける、特に、flat beam ( $\sigma_x^* \gg \sigma_y^*$ ) の場合には、

$$L \simeq \frac{I\gamma}{2er_e} \frac{\xi_y}{\beta_y^*} \quad (5.5)$$

と簡単な形で書き表せる。

図 5.1 では、ビーム・ビームパラメータ  $\xi_y$  の値は低い電流値では、 $\xi_y \propto I$  であるがあるところで飽和して、0.02 ~ 0.08 に制限されている。 $\xi_y$  の値が一定であることは、 $\sigma_x \sigma_y$  が電流とともに増えていることを意味するが、実際には、horizontal beam size は変わらず、vertical beam size だけが電流に比例して太くなっている。

これがビーム・ビームリミットと言われているものである。電流値を上げていくと途中で、ルミノシティが  $I^2$  に比例しなくなるため、大きな問題とされてきた。これについては後で述べる。

## 第6章 有限交差角をもったビーム・ビーム衝突

KEKB は  $e^+e^-$  が 22 mrad の有限交差角度をもって衝突している。有限な交差角度を採用する利点は

- 衝突点以外の場所におけるバンチ間の寄生的な衝突 (Parasitic Collision) を避けることができる。
- 正面衝突では必須となるビーム分離用の二極電磁石を用いなくて済む。したがって、その電磁石の出す強い放射光をなくすことができる。放射光はディテクターへのバックグラウンドの原因となるばかりでなく、真空ダクトの発熱の原因にもなる。
- 衝突点領域のデザインを比較的、簡単にすることができる。

逆に問題点としては、

- 幾何学的に交差する部分が減少するため、交差角度を付けない場合に比べてルミノシティが低くなる。
- シンクロ・ベータトロン共鳴を起こしやすくなる。

以下、有限交差角度をもったビーム・ビーム衝突について簡単に説明してする。

### 6.1 ルミノシティ

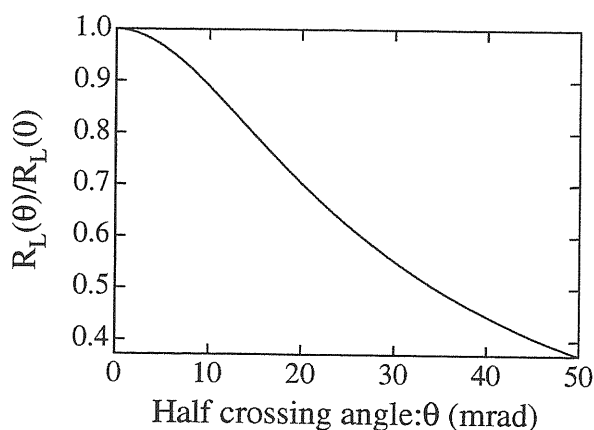


図 6.1: 交差角度に対するルミノシティの reduction 係数

交差角度をもって衝突する場合や、hourglass 効果を入れた場合にはビーム同士が幾何学的に重なる部分が減るため、ルミノシティは低くなる。その係数は

$$\frac{L}{L_0} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} a e^b K_0(b) \quad (6.1)$$

と表される、但し、 $2\theta_x$  は水平交差角度、 $K_0$  は変形 Bessel 関数、

$$a = \frac{\beta_y^*}{\sqrt{2}\sigma_z}, b = a^2 \left[ 1 + \left( \frac{\sigma_z^*}{\sigma_x^*} \tan \theta_x \right)^2 \right]$$

である。KEKB のパラメータで交差角度に対して  $R_L$  をプロットしたものを図 6.1 に示す。交差角度 22 mrad では  $R_L(11\text{mrad})/R_L(0\text{mrad})$  は約 87%程度になる。

もし、交差角度  $2\theta_x$  が十分小さく、バンチ長の範囲における  $\beta$  関数の変化が十分小さい場合、即ち  $\beta_y^* \gg \sigma_z$  の場合には、上式は

$$\frac{L}{L_0} = \left( 1 + \frac{\sigma_z^2}{\sigma_x^2} \theta_x^2 \right)^{-1/2} \quad (6.2)$$

と簡単に表せる。

## 6.2 Parasitic collision

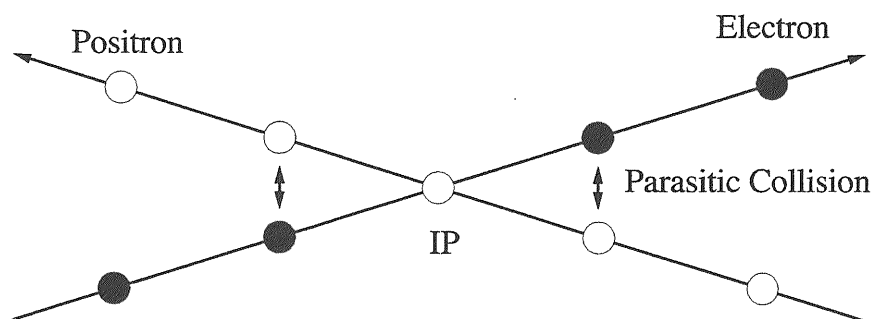


図 6.2: バンチ間隔が小さい場合のビーム衝突の様子を示す。衝突点以外の場所での寄生的なビーム・ビーム相互作用の存在を示している。

寄生的な衝突 (Parasitic collision) とは、リング中に多くのバンチを蓄積する場合に、図 6.2 に示すように、衝突点以外のところですれ違う時に感じる電磁力によるビーム・ビーム効果のことを指している。Parasitic collision による影響としては、(1) オプティクスが乱れてダイナミック・アパーチャが減少する。(2) 非線形力によりビームサイズが太る。(3) バンチ毎に軌道が異なる。(4) チューンに拡がりが出る。といった事がある。

KEKB ではこの寄生的な衝突を避けるために、衝突点で有限交差角度 22mrad をとることにより、ビーム分離を速やかに行っている。バンチ間隔を 60cm に取った時には、2つのビーム分離は 6.6mm になる。逆に言うと、ビーム分離を素早く行うことが出来るために、バンチ間隔を小さくすることが出来、多くのバンチを詰めることが出来る。しかし、実際の KEKB においてはバンチ間隔を詰めると、バンチ当たりのルミノシティが低下してしまう問題に直面しており、デザインでは約 5000 個のバンチ数に対して、現状では 1300 個のバンチ数しか入れていない。

## 6.3 シンクロ・ベータトロン共鳴

有限交差角度を持った衝突では、ベータトロン振動とシンクロトロン振動がビーム・ビーム相互作用を通して結び付いていることになる。ベータトロン振動 ( $\nu_x, \nu_y$ ) とシンクロトロン振動 ( $\nu_s$ ) の間に

$$n\nu_x + m\nu_y + l\nu_s = \text{integer} \quad (6.3)$$



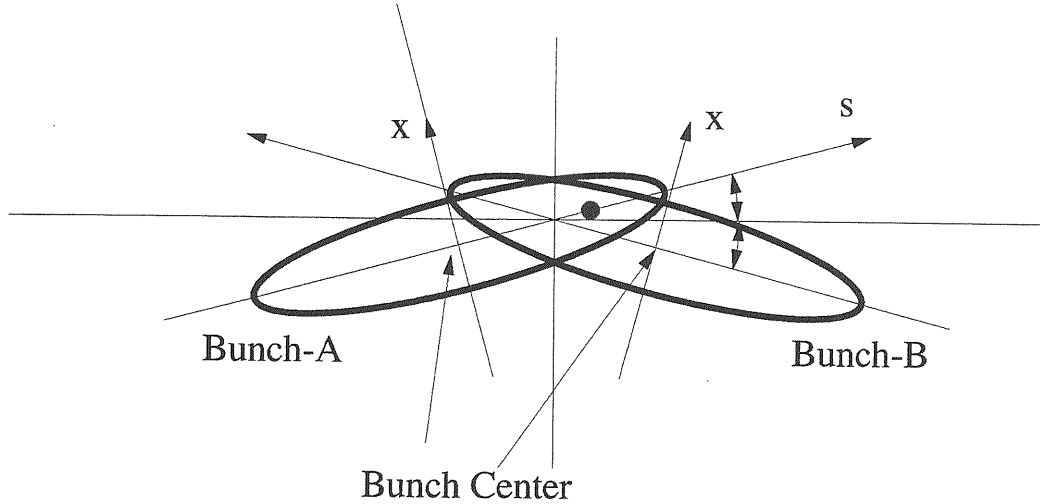


図 6.3: 有限交差角度を持ったバンチ同士の衝突

の共振条件が成り立つとき、シンクロ・ベータトロン共鳴が起こる。但し、 $n, m, l$  は整数とする。共鳴が起きると粒子は安定にリングを周回することが出来なくなる。

図 6.3 のように互いのバンチが  $2\theta_x$  の有限な交差角度を持って衝突する場合について考えてみよう。バンチ A 中の粒子は、バンチ B により、transverse 方向と longitudinal 方向へ同時にキックを受ける。transverse 方向へは

$$\Delta p_x \simeq f(x + z\theta_x) \quad (6.4)$$

のキック力を受けると同時に、エネルギーも

$$\delta = \frac{\Delta E}{E} \simeq f(x + z\theta_x)\theta_x \quad (6.5)$$

の変化を受ける。

振動量が微小な場合には、キック力  $f$  は

$$f(x + z\theta_x) = -k(x + z\theta_x) = -\frac{4\pi\xi_x}{\beta_x}(x + z\theta_x) \quad (6.6)$$

と線形で近似出来る。したがって、

$$\begin{pmatrix} x \\ p_x \\ z \\ \delta \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

のベクトルに対して、transverse 方向と longitudinal 方向のカップリングを入れた周回行列は

$$KM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 1 & -k\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -k\theta_x & 0 & -k\theta_x^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \mu_x & \beta_x \sin \mu_x & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\beta_x} \sin \mu_x & \cos \mu_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \mu_s & -\beta_s \sin \mu_s \\ 0 & 0 & \frac{1}{\beta_s} \sin \mu_s & \cos \mu_s \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

となる。この行列の固有値からチューンが分かる。 $k\beta_x \sin \mu_x \ll 1$ 、 $\theta_x^2 k\beta_s \sin \mu_s \ll 1$  という条件を用いる

と、チューンは

$$\mu_1 \simeq \mu_x + 2\pi\xi_x \pm 2\pi\xi_x\theta_x \sqrt{\frac{-\alpha_p C}{\beta_x \sin \mu_x}} \quad (6.9)$$

$$\mu_2 \simeq \mu_s - 2\pi\xi_x\theta_x^2 \frac{\alpha_p C}{\mu_s \beta_x} \pm 2\pi\xi_x\theta_x \sqrt{\frac{-\alpha_p C}{\beta_x \sin \mu_x}} \quad (6.10)$$

という形で書き表される。但し、 $\alpha_p$  は momentum compaction factor であり、 $C$  は周長である。

## 第7章 シミュレーション・モデル

ビーム・ビーム相互作用は非線型相互作用であるため、解析的に解くことは難しく、計算機シミュレーションに頼るほかない。

ここではビーム・ビーム相互作用を計算するのに用いられているシミュレーションモデルについて説明する。モデルとしては、(1)weak strong model と (2)strong strong model と呼ばれる 2 つのものに大別することができる。

### 7.1 Weak-strong model

weak-strong model は一方のビーム (strong-beam) のビーム形状は途中で変わらないとして、もう一方のビーム (weak-beam) をマクロ粒子で表し、その変化を調べる方法である。

メリットとしては

- strong-beam のビーム形状はターン毎に変化しないため、(2.11)、(2.12) 式で表される電磁場を 1 回計算して、テーブルにしておき、毎ターンの衝突ではそのテーブルから補間して、キック量を計算する。
- 電磁場の計算が 1 回だけなので、計算速度は速い。
- 多くのマクロ粒子の多数のターンを追跡することが可能である。従って、ビーム・ハローやビーム寿命の計算に用いることができる。

逆にデメリットとしては、

- self-consistent でない。例えば、weak-beam の平衡分布のビームサイズに対して、strong-beam のビームサイズは consistent な分布になっていない。
- incoherent な効果についてのみ計算可能であるが、coherent な効果については計算することが出来ない。

### 7.2 Strong-strong model

strong-strong model は両方のビームをマクロ粒子で表し、毎ターン毎に相互の電磁場を計算して、ビーム分布の変化の様子を追跡する方法である。メリットとしては

- self-consistent な解が得られ、ビーム・ビームリミットの値を計算するのに有効である。
- coherent、incoherent な効果の両方について計算可能である。

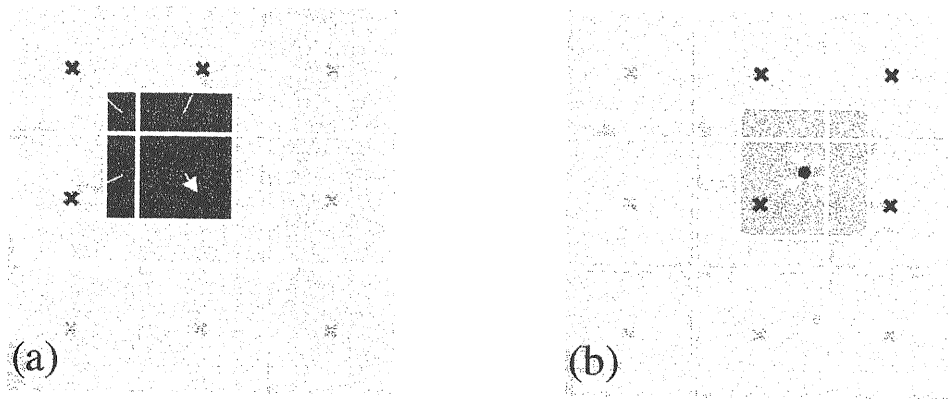


図 7.1: この図では一個のマクロ粒子を隣りあった 4 個ののグリッドへ割り当てている (CIC)。●をマクロ粒子、×をグリッド点とする。(a) グリッド点への電荷の割り当て、(b) マクロ粒子へのキック力を示す。

デメリットとしては、ターン毎に各々のビームの電磁場を計算するため、計算が非常に遅い。

strong-strong model では静電ポテンシャルを求めるのに、PIC(Particle-In-Cell) 法を用いている。PIC は図 7.1(a) に示すように、それぞれのマクロ粒子を近くの四角いグリッド点にウェイトを掛けて割り当て、グリッド点に割り当てた電荷分布からグリッド点における静電ポテンシャルを計算する。そして、近くの点の静電ポテンシャルにウェイトを掛けて相手粒子に対するキック力を出す。(図 7.1) 計算時間の大部分はグリッドに割り当てた電荷分布から静電ポテンシャルを計算するのに掛かっている。

実際、KEKB で用いているコードでは、transverse 方向に  $128 \times 256$  のメッシュで、ビーム軸進行方向には 5 スライスに切った場合で、ピーク性能 12GFLOPS のスーパーコンピュータを用いても、 $10^5$  個づつのマクロ粒子を  $10^4$  ターン計算するのに、約 8 時間掛かっている。

## 第 8 章 シミュレーション結果

ビーム・ビーム相互作用の非線形性については、理論的に求めることは難しく、粒子のトラッキング・シミュレーションによる他には手だてがない。ここではシミュレーションの結果から分かる事柄について簡単に説明する。

### 8.1 ポアンカレプロット

weak-strong model による計算では、一方のビームのビームサイズを固定してしまうため、self-consistent な解が得ることができず、実験とは一致しないが、ビーム・ビーム相互作用の性質を調べるのには有効な方法である。

図 8.1 に weak-strong model を使って、ビーム・ビームパラメータを変えていった時のポアンカレプロットを示す。どれも中心付近は楕円の軌跡を描いているが、ビーム・ビームパラメータが大きくなると、振幅が大きいところでは、離れ島のような共鳴による楕円が現れてくる。ビーム・ビームパラメータが大きくなるに従い、この離れ島は互いに近付き、さらに別の高次の共鳴の楕円も現れてきて、カオス的な振舞いを見せるようになる。

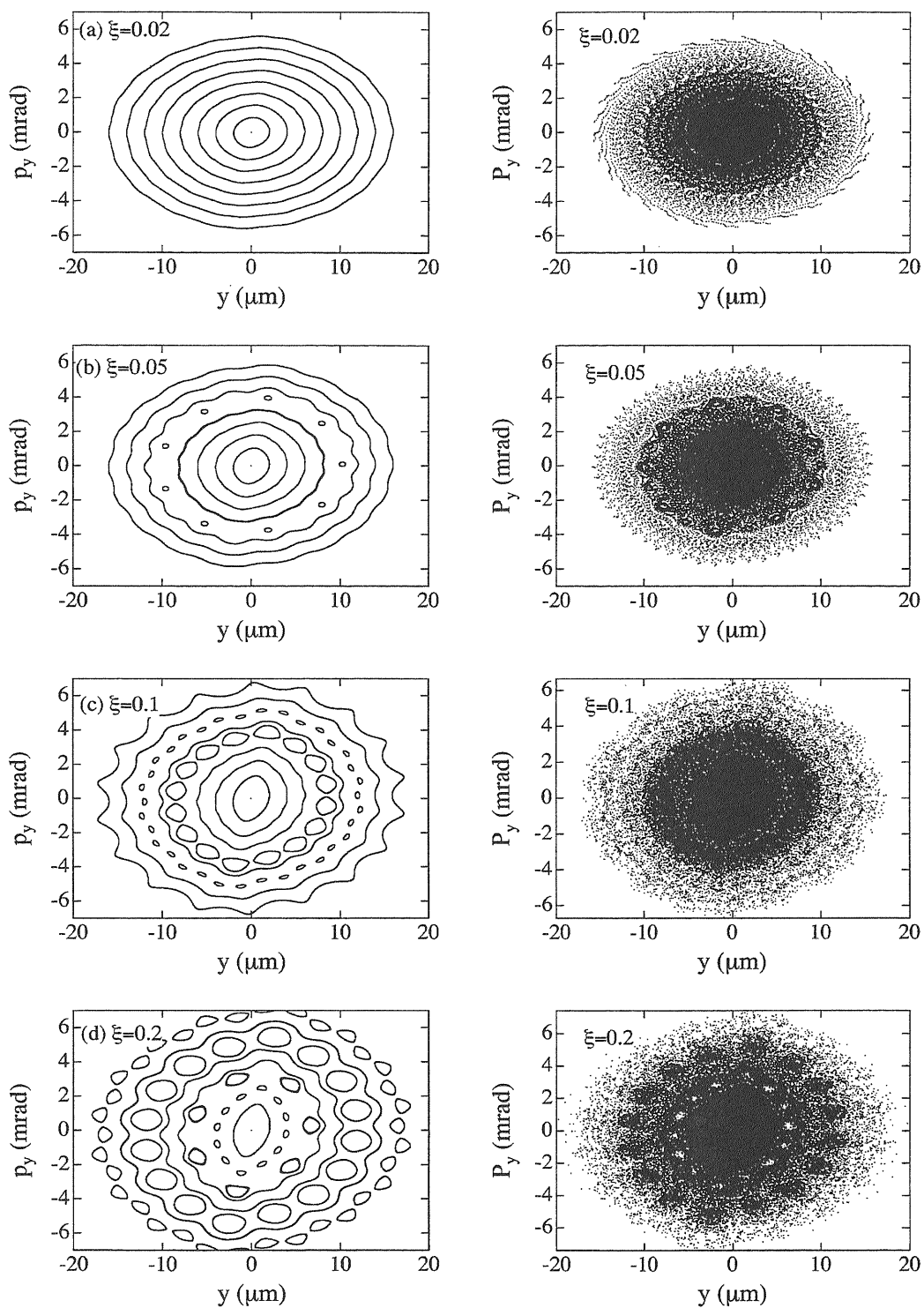


図 8.1:  $\xi_y = 0.02, 0.05, 0.1, 0.2$  の場合のポアンカレプロット、それぞれ、左図はシンクロトロン放射効果を入れた場合、右図はシンクロトロン放射入れない場合。

## 8.2 拡散

リングのビームサイズは quantum excitation による拡散と radiation damping による減衰との釣合いによって決まっている。拡散速度を  $D$ 、damping rate を  $\tau/T_0$  とすると、粒子分布を決める拡散方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = Bx\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,t) + \frac{\tau}{T_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) \quad (8.1)$$

で表される。平衡状態 ( $\partial\Psi/\partial t = 0$ ) では粒子分布は

$$\Psi(x,t) = \exp\left[-\frac{x^2}{2T_0/B\tau}\right] \quad (8.2)$$

となる。従って、ビームサイズ  $\sigma^2 = B\tau/T_0$  は初期状態に依らない。KEKB のパラメータでは、synchrotron radiation による拡散速度は、horizontal、vertical にそれぞれ  $5.4(\mu m^2)$ 、 $6.3 \times 10^{-4}(\mu m^2)$  である。

radiation damping がない場合は拡散項がなくなり、粒子分布は

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = B\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) \quad (8.3)$$

に従う。但し、 $B$  は拡散係数で一定と仮定する。初期状態を  $\Psi(x,0) = \delta(x-x_0)$  と仮定すると、時刻  $t$  における粒子分布は

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Bt}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4Bt}\right] \quad (8.4)$$

と書き表せる。従って、時刻  $t$  における分布も Gauss 分布であり、ビームサイズは

$$\sigma^2(t) = \sigma_0^2 + 2Bt \quad (8.5)$$

と時刻  $t$  に比例して大きくなる。radiation の効果を入れずに weak-strong model で交差角度を変えて、垂

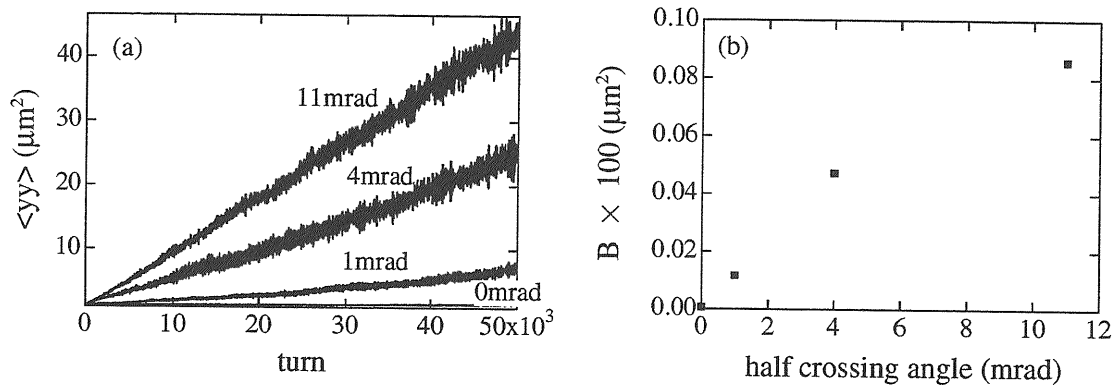


図 8.2: (a) weak-strong model によって計算したビームサイズの変化、(b) 交差角度に対する拡散係数

直方向のビームサイズを計算し、周回ターン数を横軸にビームサイズの 2 乗をプロットしたものを図 8.2(a) に示す。(8.5) 式のように、ほぼ直線で増えていることが分かる。水平方向に有限交差角度をつけたにもかかわらず、垂直方向のビームサイズが大きくなっている。多自由度でかつ非線形な力が働く系で起こるこのような拡散のことを Arnold 拡散と呼ぶ。それぞれの傾きから拡散係数を出すと、図 8.2(b) のようになる。従って、ビーム・ビーム相互作用と有限交差角が同時に存在すると、拡散をより強くし、ビームサイズを太らせることが分かる。ルミノシティはビームが太るために幾何学的に減るルミノシティよりも減少する。

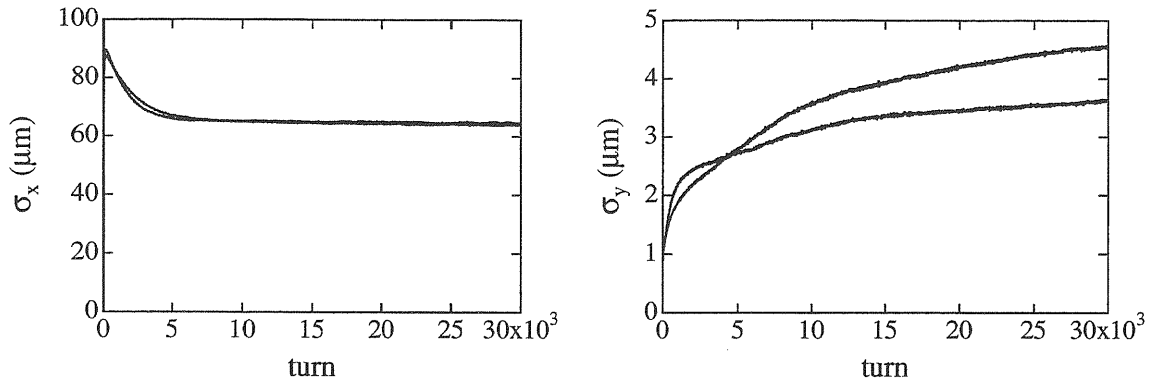


図 8.3: strong-strong model によって計算した水平、垂直方向それぞれのビームサイズの変化

### 8.3 ビーム・ビームリミット

ビーム・ビームリミットという上限値について、strong-strong model を用いたシミュレーションを用いて、見ていこう。図 8.6 に示すように、ビーム・ビームパラメータはある電流値で飽和し、一定の値を示す。ビーム・ビームリミットが働く電流値で、周回ターンを追ってビームサイズを見ると、図 8.3 のようになる。周回ターンが増えるに従い、水平方向のビームサイズは一定値に収束しているが、垂直方向のビームサイズは次第に大きくなっている。150、170、200、25000 ターン目の垂直方向のビームの分布を図 8.4

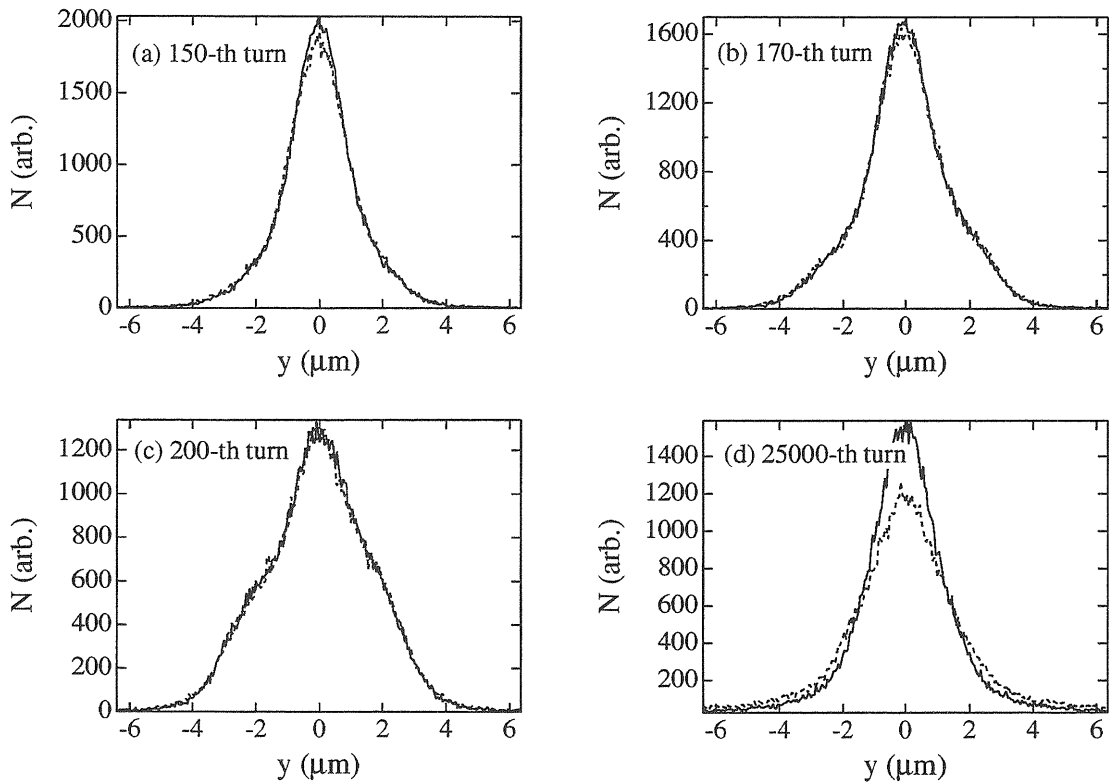


図 8.4: 150、170、200、25000 ターン目の vertical beam 分布

に示す。この図から分かるように、元は Gauss 分布していたものがターンを重ねていくと Gauss 分布からずれていく様子が分かる。

Gauss 分布からのずれを定量的に表すのに、尖り度 (Kurtosis) と呼ばれる量  $\kappa$  を次のように定義する。

$$\kappa = \frac{\langle y^4 \rangle}{3\langle y^2 \rangle^2} \quad (8.6)$$

Gauss 分布をしていると  $\kappa = 1$  である。 $\kappa$  を横軸ターンでプロットと、図 8.5 のようになる。このグラフから、一旦、Gauss 分布から大きく外れた後、図 8.4 の (d) の形状に落ちついていくことが分かる。

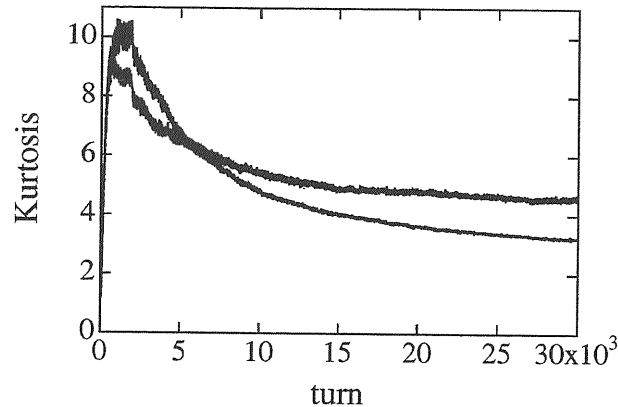


図 8.5: vertical ビームサイズの尖り度 (Kurtosis)

ビーム・ビームリミットはビーム・ビームの非線型な力によって、このようにビーム形状が Gauss 分布から変形してしまうために起こる現象である。

## 8.4 有限交差角衝突

交差角度がある場合とない場合について、weak-strong model、strong-strong model それぞれについての計算したものを、図 8.6 に示す。低い電流値ではそれぞれ電流に比例しているが、途中から飽和し一定の値 (ビーム・ビームリミット) を取っている。交差角度があると、それぞれ飽和しているビーム・ビームリミット値も低い。有限交差角によるビーム・ビームパラメータの減少は拡散による影響であり、weak-strong と strong-strong のビーム・ビームリミットの違いはビーム分布が Gauss 分布からずれるためである。

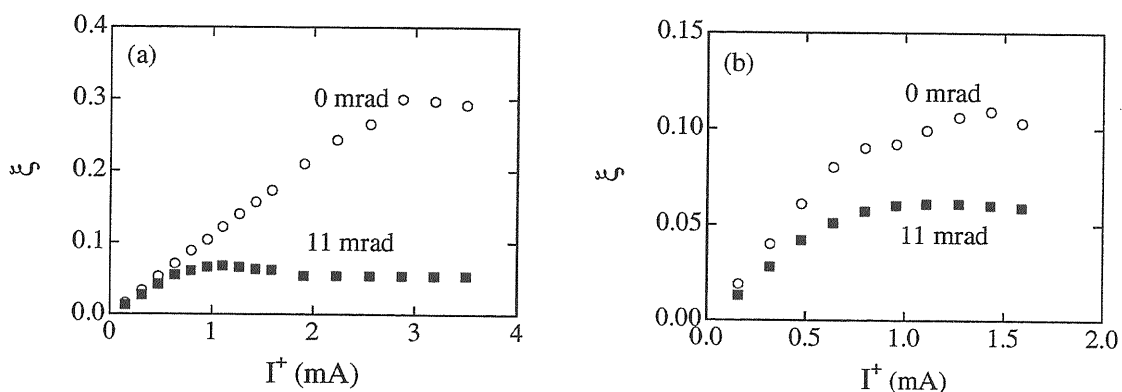


図 8.6: 正面衝突の場合と交差角度 22 mrad を持って衝突した場合のビーム・ビームパラメータの電流依存性。(a) は weak-strong model、(b) は strong-strong model による計算結果。

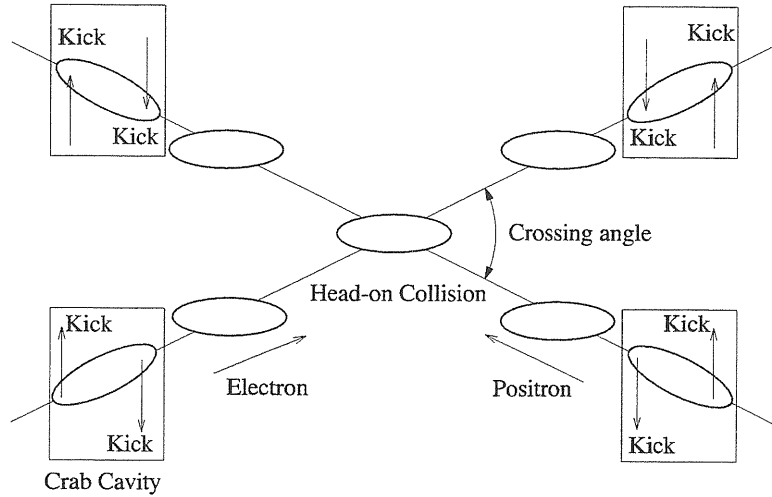


図 8.7: Crab crossing の概念図

このルミノシティ減少や前述のシンクロ・ベータトロン共鳴の問題を解決するために、crab crossing という方法が考案された。図 8.7 に示すように、衝突する前にバンチの先頭と後方で逆方向にキックして、バンチの進行方向に対して傾けてやり、衝突点では正面衝突するようにする方法である。衝突後には再度バンチは逆方向にキックされ、元の方向に戻してやる。このための空洞をクラブ空洞と呼び、現在 KEKB ではクラブ空洞を開発しており、導入を予定している。

## 8.5 チューン・サーベイ

図 8.8 は KEKB HER リングについての strong-strong model による計算結果である。横軸、縦軸に水平方向、垂直方向のチューンを取ってルミノシティを等高線で表してある。この図からも分かるように、ルミノシティはチューン (特に horizontal tune) に非常に敏感である。実際の KEKB の運転上でも、より高いルミノシティを目指してチューン・サーベイが日々行われている。現在、KEKB HER リングで運転では  $(\nu_x, \nu_y) = (0.513, 0.582)$  近辺のチューンが用いられている。また、共鳴線が 0.51 近辺にシンクロ・ベータトロン共鳴  $2\nu_x + \nu_s = n$  が存在している。実際上もこのシンクロ・ベータトロン共鳴線によってチューン  $\nu_x$  を半整数に近付けるのを阻んでいる。

## 第9章 ビーム・ビーム効果の補正

ビーム・ビーム効果を補正あるいは制御してルミノシティを上げようというアイデアもいくつか検討されている。例えば、

- ワイヤーにパルス的な電場を加えて、ビーム・ビームキック力が  $1/r$  に比例する程度の距離の離れた場合のビーム・ビーム効果の補正を行う方法。ダイナミック・アパーチャに効果があると考えられている。LHC でも検討されている。
- $e^+e^-$  のビーム 2 つずつを衝突点で衝突させ、4 つのビームでビーム・ビーム相互作用を補正する方法。 $e^+e^-$  の衝突では、電場成分は打ち消しあうが磁場成分は消すことが出来ない。同符号の粒子同士の衝突では、磁場成分は消せても、電場成分を消すことが出来ない。 $e^+e^-$  それぞれ 2 つのビームを衝突させることでビーム・ビームのキック力を補正する。



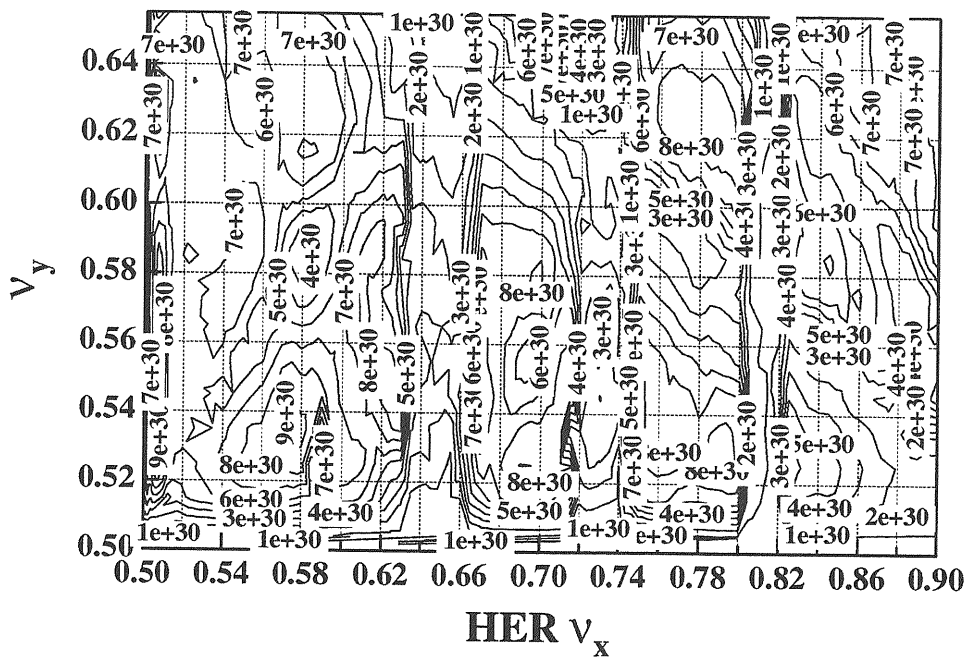


図 8.8: strong-strong model で計算した KEKB HER リングのチューン・ダイアグラム

- 衝突点とは別の場所で、短いバンチ長の電子ビームにより電子レンズを作り、反陽子のバンチ毎にチューンシフトを補正しようとする方法。この方法ではビーム・ビーム相互作用の線型、非線型の力を補正できる可能性がある。TEVATRON で試みられている。

いくつか検討がなされ、また実験で試みられてもいるが、未だ、実際にビーム・ビーム効果の補正に成功していない。

## 謝辞

本稿をまとめるのにあたって、多くのことを勉強させていただきました。大見和史助教授、船越義裕助教授には本稿について貴重な助言を頂きましたことを感謝いたします。また、セミナー講師の機会を与えて頂いた高エネルギー加速器科学研究奨励会並びに、生田勝宣主幹、鎌田進教授に感謝いたします。

## 参考文献

- [1] M. Bassetti and G. A. Erskine, CERN-ISR-TH/80-06.
- [2] K. Takayama, Lett. al nuvo cimento **34** 190 (1982).
- [3] K. Hirata and F. Ruggiero, LEP Note 611 (1988).
- [4] 平田光司, 加速器とビームの物理, 岩波書店, (2002).

- [5] 平田光司, ビームトラッキング, OHO'85 (1985).
- [6] 船越義裕, 電子貯蔵リングにおけるビームダイナミクス, OHO'94 (1994).
- [7] N. Toge and K. Hirata, KEK Preprint 94-160 (1994).
- [8] K. Hirata, Phys. Rev. Lett. **74** 2228-2231 (1995).
- [9] L. R. Evans and J. Gareyte, CERN 87-03.
- [10] K. Ohmi, Phys. Rev. E **62** 7287 (2000).
- [11] K. Ohmi et. al., Phys. Rev. Lett. **92** 214801 (2004).
- [12] K. Ohmi et. al., KEK Preprint 2004-17 (2004).
- [13] A. W. Chao and M. Tigner, Handbook of accelerator physics and engineering, World Scientific.

## 付録 A 静電ポテンシャルの導出方法

一般に電荷分布  $\rho(\vec{x})$  が与えられた時、静電ポテンシャル  $\phi(\vec{x})$  は Green 関数  $G(\vec{x}, \vec{x}')$  を用いて、

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int G(\vec{x} - \vec{x}') \rho(\vec{x}') dV' \quad (\text{A.1})$$

と表すことができる。但し、 $G(\vec{x}, \vec{x}')$  は

$$\Delta G(\vec{x} - \vec{x}') = -\frac{\delta(\vec{x} - \vec{x}')}{\epsilon_0} \quad (\text{A.2})$$

を満たすものとする。これを満たす Green 関数の形はよく知られていて、

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (\text{A.3})$$

である。

$$\int_0^\infty e^{-a^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \quad (\text{A.4})$$

であることを使うと、

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp[-|\vec{x} - \vec{x}'|^2 q^2] dq \quad (\text{A.5})$$

と積分で表すことができる。ここで、 $t = \frac{1}{q^2}$  とおいて変数変換して、

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\exp[-|\vec{x} - \vec{x}'|^2 t^2]}{t^{\frac{3}{2}}} dt \quad (\text{A.6})$$

である。これを (A.1) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_{-\infty}^\infty G(\vec{x} - \vec{x}') \rho(\vec{x}') dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^\infty \rho(\vec{x}') \exp\left[-\frac{|\vec{x} - \vec{x}'|^2}{t}\right] dV' \end{aligned}$$

となる。電荷  $Ne$  を持ったビームの分布が Gauss 分布であると仮定すると、 $\rho(\vec{x})$  は

$$\rho(\vec{x}) = \frac{Ne}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sigma_x \sigma_y \sigma_z} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2} - \frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right] \quad (\text{A.7})$$

と書きあらわせるので、これを上式に代入すると、

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{Ne}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sigma_x \sigma_y \sigma_z} \int_0^\infty \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^\infty \exp\left[-\frac{|\vec{x} - \vec{x}'|^2}{t} - \frac{x'^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y'^2}{2\sigma_y^2} - \frac{z'^2}{2\sigma_z^2}\right] dV'$$

となる。ここで、

$$\int_{-\infty}^\infty \exp[-a^2 x^2 + bx] dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp\left[\frac{b^2}{4a^2}\right] \quad (\text{A.8})$$

であることを使うと、結局、

$$\phi(\vec{x}) = \frac{Ne}{4\pi\epsilon_0\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma_x^2+t} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2+t} - \frac{z^2}{2\sigma_z^2+t}\right]}{\sqrt{(2\sigma_x^2+t)(2\sigma_y^2+t)(2\sigma_z^2+t)}} dt \quad (\text{A.9})$$

という形で表すことができる。

## 付録B Baseti & Erskine formula

電荷分布  $\rho(x, y)$ :

$$\rho(x, y) = \frac{Ne}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right] \quad (\text{B.1})$$

が与えられた時に、Poisson 方程式：

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{B.2})$$

を満たす  $\phi(\vec{x})$  は

$$\phi(\vec{x}) = \frac{Ne}{4\pi\epsilon_0\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma_x^2+t} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2+t}\right] - 1}{\sqrt{(2\sigma_x^2+t)(2\sigma_y^2+t)}} dt \quad (\text{B.3})$$

と表せる。分子の  $-1$  の項は定数項で  $\frac{\partial}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial}{\partial y}$  で微分した際に消えるので無視する。

$\sigma_x \gg \sigma_y$  の場合には、

$$t^2 = \frac{2\sigma_y^2 + q}{2\sigma_x^2 + q}, \quad r = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}, \quad a = \frac{x}{\sqrt{2(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}}, \quad b = \frac{y}{\sqrt{2(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}} \quad (\text{B.4})$$

と  $q, \sigma_x, \sigma_y, x, y$  を  $t, r, a, b$  で表すと、 $\phi$  は

$$\phi = -\frac{Ne}{2\pi\epsilon_0} \int_r^1 \frac{\exp\left[a^2(t^2 - 1) + b^2\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)\right]}{t^2 - 1} dt \quad (\text{B.5})$$

と書き直せる。

ここで、 $z = x + iy$  として複素数  $z$  を導入すると、電場  $E_x, E_y$  は次のように書き表すことができる。

$$\begin{aligned} E_x - iE_y &= -\frac{\partial\phi}{\partial z} \\ &= -\frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\phi}{\partial y} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}} \left( \frac{\partial\phi}{\partial a} - i\frac{\partial\phi}{\partial b} \right) \\ &= \frac{Ne}{\pi\epsilon_0\sqrt{2(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}} \int_r^1 \left( a - \frac{ib}{t^2} \right) \exp\left[ a^2(t^2 - 1) + b^2\left(1 - \frac{1}{t^2}\right) \right] dt \\ &= \frac{Ne}{\pi\epsilon_0\sqrt{2(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}} \int_r^1 \left( a - \frac{ib}{t^2} \right) \exp\left[ \left( at + i\frac{b}{t} \right)^2 \right] dt \\ &= \frac{Ne}{\pi\epsilon_0\sqrt{2(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}} \exp\left[ -(a + ib)^2 \right] \int_{ar+i\frac{b}{r}}^{a+ib} \exp[\xi^2] d\xi \end{aligned}$$

ここで  $\xi = at + i\frac{b}{r}$  とおいた。次式で定義される Complex error function と呼ばれる

$$w(z) = \exp[-z^2] \left( 1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp[\xi^2] d\xi \right) \quad (\text{B.6})$$

を導入すると、

$$E_x - iE_y = -\frac{iNe}{2\epsilon_0\sqrt{2(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}} \left[ w(a + ib) - \exp\left[-(a + ib)^2 + \left(ar + i\frac{b}{r}\right)^2\right] w\left(ar + i\frac{b}{r}\right) \right] \quad (\text{B.7})$$

と書くことができる。  $E_x, E_y$  は、それぞれ、

$$E_x = \frac{Ne}{2\epsilon_0\sqrt{2\pi(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}} I_m \left[ w\left(\frac{x + iy}{\sqrt{2(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}}\right) - \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right] w\left(\frac{x\frac{\sigma_y}{\sigma_x} + iy\frac{\sigma_x}{\sigma_y}}{\sqrt{2(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}}\right) \right]$$

$$E_y = \frac{Ne}{2\epsilon_0\sqrt{2\pi(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}} R_e \left[ w\left(\frac{x + iy}{\sqrt{2(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}}\right) - \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right] w\left(\frac{x\frac{\sigma_y}{\sigma_x} + iy\frac{\sigma_x}{\sigma_y}}{\sqrt{2(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}}\right) \right]$$

となる。ここで Complex error function を使うのは、(B.5) を数値計算するより Complex error function を使った方が計算が速いためである。

## 付 録 C Lie 変換

ハミルトニアン方程式

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (\text{C.1})$$

はポアソン括弧

$$[A, B] = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial p} \quad (\text{C.2})$$

を使って、

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= -[H, x] \equiv - : H : x, \\ \frac{dp}{ds} &= -[H, p] \equiv - : H : p \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

と書き直すことが出来る。この  $: H :$  を Lie 演算子と呼ぶ。この式は形式的に

$$\begin{aligned} x(s) &= \exp(- : H : s)x(0) \\ p(s) &= \exp(- : H : s)p(0) \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

と解くことが出来る。但し、

$$\exp(: H :) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{n} (: H :)^n \quad (\text{C.5})$$

である。  $\exp(: H :)$  をリー変換という。例えば、  $H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{k}{2}k^2$  を C.3 に代入して計算してみよ。

## 付録D Head-on frame への変換

水平方向に有限な交差角度 ( $2\theta_x$ ) を持つバンチ同士のビーム・ビーム相互作用を計算するには、お互いのバンチをローレンツ変換により、head-on frame へ変換する必要がある。

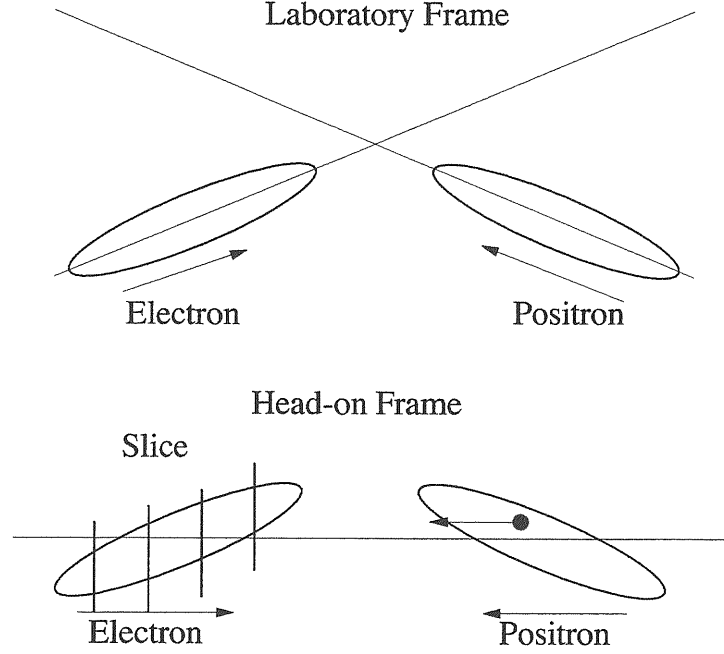


図 D.1: 実験室系から head-on frame への変換

粒子の座標は加速器座標  $\vec{x} = (x, p_x, y, p_y, z, p_z; h, s)$  で表されているので、一旦、実験室座標  $\vec{X} = (X, Y, Z, P_X, P_Y, P_Z; H, T)$  に移してやる。ここで、 $(p_x, p_y) = m\gamma \left( \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right) / P_0$ 、 $z = s - ct(s)$ 、 $p_z = (|\vec{P}| - P_0) / P_0$ 、 $P_0$  は基準粒子の運動量  $\mathbf{P}$  の絶対値である。

$$h = (1 + p_z) - \sqrt{(1 + p_z)^2 - p_x^2 - p_y^2} \quad (\text{D.1})$$

であり、 $H$  はハミルトニアンである。加速器座標と実験室座標の変換は

$$\begin{pmatrix} CT \\ X \\ Z \\ Y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} z(s) \\ x(s) \\ s \\ y(s) \end{pmatrix}, \quad P_0 \begin{pmatrix} p_z \\ p_x \\ h \\ p_y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B^{-1}} \begin{pmatrix} H/c - P_0 \\ P_X \\ P_Z - P_0 \\ P_Y \end{pmatrix} \quad (\text{D.2})$$

で表される。

$xz$  平面で  $\theta_x$  だけ回転させ、回転した  $x$  軸方向へ並行移動移動させることで、head-on frame に変換される。この変換は

$$\begin{pmatrix} CT^* \\ X^* \\ Z^* \\ Y^* \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} CT \\ X \\ Z \\ Y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} H^*/c \\ P_X^* \\ P_Z^* \\ P_Y^* \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} H/c \\ P_X \\ P_Z \\ P_Y \end{pmatrix} \quad (\text{D.3})$$

と表される。但し、

$$L = \begin{pmatrix} 1/\cos\theta_x & -\sin\theta_x & -\tan\theta_x & 0 \\ -\tan\theta_x & 1 & \tan\theta_x & 0 \\ 0 & -\sin\theta_x & \cos\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.4})$$

である。

従って、加速器座標系の粒子に対する変換は

$$\begin{pmatrix} z^*(s^*) \\ x^*(s^*) \\ s^* \\ y^*(s^*) \end{pmatrix} = A^{-1}LA \begin{pmatrix} z(0) \\ x(0) \\ 0 \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\cos\theta_x & 0 & 0 & 0 \\ \tan\theta_x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(0) \\ x(0) \\ 0 \\ y(0) \end{pmatrix} \quad (\text{D.5})$$

$$\begin{pmatrix} p_z^* \\ p_x^* \\ h^* \\ p_y^* \end{pmatrix} = B^{-1}LB \begin{pmatrix} p_z \\ p_x \\ h \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\tan\theta_x & \tan^2\theta_x & 0 \\ 0 & 1/\cos\theta_x & -\tan\theta_x/\cos\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 1/\cos^2\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\cos\theta_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x \\ h \\ p_y \end{pmatrix} \quad (\text{D.6})$$

ここで、 $s^*$  と書いたのは、 $s=0$  の点は必ずしも  $s^*=0$  に移される分けではないためである。 $x(0)$  から  $x^*(0^*)$  へ移すためにはさらに、

$$w_i^*(0^*) = w_i^*(s^*) - \frac{dw_i^*(0^*)}{ds^*} s^* = w_i^*(s^*) + h_i^* \sin\theta_x x(0) \quad (\text{D.7})$$

の拘束条件を付けてやる必要がある。ここで、 $w_i$  は  $x, y, z$  と  $h_i^*$  のことを指す。但し、

$$h_i^* = \frac{\partial h^*}{\partial p_i^*}, \quad h^* = h(p_x^*, p_y^*, p_z^*)$$

である。また、(D.1) 式から

$$h^*(p_x^*, p_y^*, p_z^*; P_0^*) = \frac{1}{\cos^2\theta_x} h(p_x, p_y, p_z; P_0) = h(p_x^*, p_y^*, p_z^*; P_0^*) \quad (\text{D.8})$$

なので、従って、head-on frame への変換は

$$\begin{aligned} x^* &= \tan\theta_x z + \left(1 + \frac{p_x^*}{p_s^*} \sin\theta_x\right) x, & p_x^* &= \frac{p_x - \tan\theta_x h}{\cos\theta_x} \\ y^* &= y + \sin\theta_x \frac{p_y^*}{p_s^*} x, & p_y^* &= p_y / \cos\theta_x \\ z^* &= \frac{z}{\cos\theta_x} - \frac{h^*}{p_s^*} \sin\theta_x x, & p_z^* &= p_z - \tan\theta_x p_x + \tan^2\theta_x h \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

と表せる。これらの式から線形部分だけを取ると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \tan\theta_x & 0 \\ 0 & 1/\cos\theta_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\cos\theta_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\cos\theta_x & 0 \\ 0 & -\tan\theta_x & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.10})$$

となる。この行列の Jacobian は  $|M| = 1/\cos^3\theta_x$  となり、シンプレクティックでないが、再度、head-on frame から戻す時に、 $\cos^3\theta_x$  が掛かるので問題はない。