

はじめに

近年、放射光を使ったビーム計測技術は革新的な進歩を遂げており、加速器研究において非常に重要な役割を果たしている。特に加速器でのルミノシティを決める基本的な式は

$$L = \frac{N_{e^+} N_{e^-} f}{4\pi\sigma_x^* \sigma_y^*} R_L \quad (1)$$

N_{e^+} : 1バンチに含まれる陽電子の数
 N_{e^-} : 1バンチに含まれる電子の数
 f : バンチの衝突頻度
 R_L : 幾何学的要因による補正係数
 σ_x^* : 衝突点でのビームの水平方向サイズ
 σ_y^* : 衝突点でのビームの垂直方向サイズ

であらわされることからわかるように、KEKBでの世界最高ルミノシティ達成のためにビームサイズはコントロールすべき最も重要なパラメータの一つである。そこでマイクロメートルオーダーのビームサイズ測定が可能な放射光モニターは運転に必要な不可欠な要素となっている。放射光モニターは、光学的手法によって、ビームの横方向及び縦方向（時間軸方向）の大きさとビームサイズの時間変化を計測することを目的としている。

ビームの横方向の大きさを計測するためには、光の空間干渉性を利用したダブルスリット干渉計が開発された。また時間方向の計測はストリークカメラを使用するが、光学系の開発により、バンチごとの横方向の大きさも測定可能となった。

この章では放射光の原理を簡単に述べた後で、実際にKEKBで使用しているSRモニターシステムについて説明する。

1 放射光の原理

1.1 シンクロトロン放射

運動する電子が磁場中で軌道を曲げられると、運動の接線方向に電磁波を放出する。理論的には古くから知られていたが、実際にこの電磁波が観測されたのは1974年である。電子シンクロトロンにおいて始めて観測されたため、このような電磁波をシンクロトロン放射（SR）という。電子の速度が光速に比較して十分遅い場合、この放射光は \sin^2 に比例した強度分布を持つが、電子が光速に近づいた場合は、電子の周りの $\Delta\phi \sim 1/\gamma$ という狭い角度内に分布する（ここで γ は電子のエネルギーと静止エネルギーの比である）。[1]

電子軌道半径を ρ とすると、観測者は $\Delta s = \rho \Delta\phi$ だけ進む間に放射された光を見ることになるので、図1の様

にパルス状の光を観測することになる。電子が Δs だけ進むのにかかる時間は $(\rho/c)/\gamma$ だが、ドップラー効果を考慮すると観測者の見る光の大きさは $(\rho/c)/\gamma^3$ となる。このパルス状の光は広い連続スペクトルを持ち、最短波長は臨界波長 $\lambda_c = 4\pi\rho/3\gamma^3$ になる。

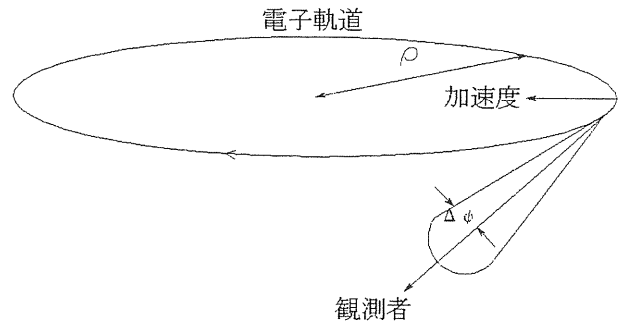


図 1：放射光の広がり

シンクロトロン放射には偏光特性という特徴もある。電子の軌道平面上($\phi=0$)では直線偏光であり、軌道平面から離れると楕円偏光となる。電気ベクトルが軌道面に平行および垂直な成分の角度分布は図2のようになる。

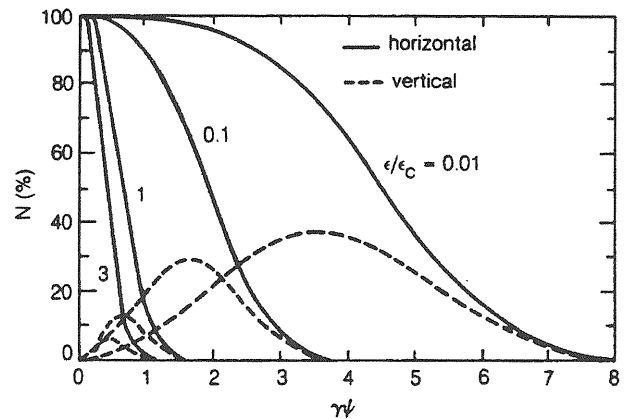


図 2：シンクロトロン放射光の角度分布高エネルギー加速器では、この放射によるエネルギー損失を補償するために巨大な加速空洞が必要であり、光による加熱から真空チャンバーを守るための冷却等が必要になる。その一方、放射光は

1. 高輝度の連続スペクトルを持つ
2. 指向性が良い
3. 偏光性がある
4. パルス特性 (1ns 以下) を持つ

5. 光源としての特性を計算できるので標準光源として使用できる
6. リングは超高真空下にあるため、完全に清浄な光源である

といった特長を持つため、光源として有用な役割を果たす。KEKB では、ビーム電流に比例する放射光強度の測定から、ビームの横方向、長手方向の大きさ、およびそのダイナミックな変化の計測を行っている。

以下の節は砂川重信著の「理論電磁気学」、M.ボルン著の「光学の原理」、平松成範氏の「加速器のビームモニター」講義ノートからの抜粋で、放射光から放射されるエネルギーと後に問題となる回折効果について述べる。詳しい議論はそれぞれの教科書を見ていただきたい。[2,3,4]

1.2 放射エネルギー

そもそも放射光とは、空間中の電荷分布の変動により、電磁場が変動し、それが空間中を波動として伝わっていく現象である。そこで真空中の電磁場を表す Maxwell 方程式から物事を考えなければならない。基本方程式は

$$\text{rot}\mathbf{E}(\mathbf{x},t) + \frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{x},t)}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

$$\text{rot}\mathbf{B}(\mathbf{x},t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \mu_0\mathbf{j}_e(\mathbf{x},t) \quad (3)$$

$$\text{div}\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = 0 \quad (4)$$

$$\text{div}\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_0(\mathbf{x},t) \quad (5)$$

である。これは電磁ポテンシャル \mathbf{A} と ϕ を用いて

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = -\frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{x},t)}{\partial t} - \text{grad}\phi(\mathbf{x},t) \quad (6)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \text{rot}\mathbf{A}(\mathbf{x},t) \quad (7)$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = -\mu_0\mathbf{j}_e(\mathbf{x},t) \quad (8)$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi(\mathbf{x},t) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho_e(\mathbf{x},t) \quad (9)$$

$$\text{div}\mathbf{A}(\mathbf{x},t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\phi(\mathbf{x},t)}{\partial t} = 0 \quad (10)$$

と書き換えることができる。ここで $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$ および $\phi(\mathbf{x},t)$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\mathbf{j}_e(\mathbf{x}',t)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}, \\ \phi(\mathbf{x},t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{\rho_e(\mathbf{x}',t)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \end{aligned} \quad (11)$$

$$t' = t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c} \quad (12)$$

で与えられる。

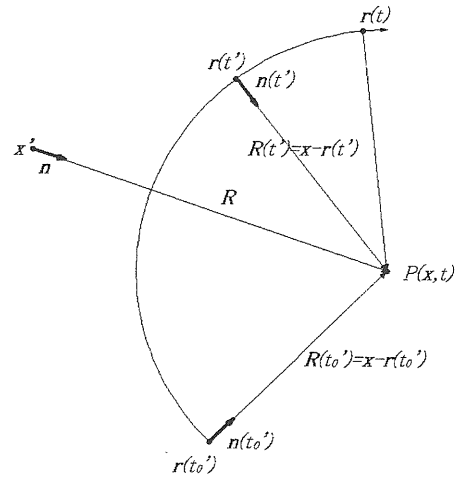


図 3 : Lienard-Wiechert のポテンシャル

図 3 に示すように電荷 e の点電荷の軌道を $\mathbf{r}(t)$ とすると、電荷密度と電流密度は

$$\begin{aligned} \rho_e(\mathbf{x},t) &= e\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{r}(t)) \\ \mathbf{j}_e(\mathbf{x},t) &= e\dot{\mathbf{r}}(t)\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{r}(t)) \end{aligned} \quad (13)$$

で与えられるので、これを式(11)に代入すると、

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x},t) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{\delta^3(\mathbf{x}'-\mathbf{r}(t'))}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta\left(t-t'-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \delta^3(\mathbf{x}'-\mathbf{r}(t')) \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta\left(t-t'-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t')|}{c}\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t')|} \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t)| - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{r}}(t_0') \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{r}(t_0'))} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \frac{e\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\mathbf{r}}(t_0')}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t)| - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{r}}(t_0') \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{r}(t_0'))} \quad (15)$$

となる。ここで

$$t_0' = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t_0')|}{c} \quad (16)$$

である。このポテンシャルを Lienard-Weichert のポテンシャルという。

$$\mathbf{n}(t') = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t'))}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|} \quad (17)$$

$$\mathbf{R}(t') = \mathbf{x} - \mathbf{r}(t') \quad (18)$$

$$\alpha(t_0') = 1 - n(t_0') \dot{\mathbf{r}}(t_0') \quad (19)$$

$$\beta(t_0') = \dot{\mathbf{r}}(t_0') / c \quad (20)$$

とおくと、式(6)(7)より加速された電荷による電磁波は

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{n}(t_0') - \beta(t_0'))(\mathbf{n}(t_0') \cdot \dot{\beta}(t_0')) - \dot{\beta}(t_0')(1 - \mathbf{n}(t_0') \cdot \dot{\beta}(t_0'))}{\alpha^3(t_0')R(t_0')} \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{n}(t_0') \times \{(\mathbf{n}(t_0') - \beta(t_0')) \times \dot{\beta}(t_0')\}}{c\alpha^3(t_0')R(t_0')} \quad (21) \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \mathbf{n}(t_0') \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad (22)$$

で与えられる。ここで Poynting ベクトル \mathbf{S} を導入することで、時刻 t_0' に点電荷から放射された電磁波が時刻 t に観測点 \mathbf{x} で測定されるとき単位時間、単位面積あたりのエネルギー量を求めることができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E}(\mathbf{x}, t))^2 \mathbf{n}(t_0') \\ &= \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{\mathbf{n}(t_0')}{c^2 \alpha^6(t_0') R^2(t_0')} \\ &\quad \cdot \left[\mathbf{n}(t_0') \times \{(\mathbf{n}(t_0') - \beta(t_0')) \times \dot{\beta}(t_0')\} \right]^2 \quad (23) \end{aligned}$$

より

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{\mu_0 c^3} \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \int d\Omega \frac{\left[\mathbf{n}(t) \times \{(\mathbf{n}(t) - \beta(t)) \times \dot{\beta}(t)\} \right]^2}{(1 - \mathbf{n}(t) \cdot \beta(t))^5} \quad (24)$$

が得られる。点電荷から観測点 P に向けての単位ベクトル

$$\mathbf{n} = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta), \quad \beta = (0, 0, \beta), \quad \dot{\beta} = (\alpha/c, 0, 0)$$

とすると、放射光の角分布は

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (25)$$

より

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= \frac{(\alpha/c)^2}{\mu_0 c^3} \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{(1 - \beta \cos\theta)^3} \\ &\quad \cdot \left[1 - \frac{(1 - \beta^2) \sin^2\theta \cos^2\phi}{(1 - \beta \cos\theta)^2} \right] \quad (26) \end{aligned}$$

となり、点電荷の進行方向に鋭いピークを持つことがわかる。角積分を実行すると

$$P = \frac{e^2 \alpha^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{1}{(1 - \beta^2)^2} \quad (27)$$

となる。電流値 I でエネルギー E の電子が距離 l の偏光磁石中で放出する単位時間当たりの全放射光のエネルギーは

$$P = 1.27 E^2 B^2 l \quad (28)$$

[kW] [GeV²T²Am]

と表すことが出来る[5]。これは全波長領域の積分値であるが、波長によって光の広がり異なるため、実際にモニターとして使用する際には、観測する波長領域に注意を払う必要がある。図2は式(29)を垂直方向 ϕ の関数としてプロットしたもののだが、波長が長くなるとその広がり1/γよりも大きくなっていることがわかる。

$$\left(\frac{d^2 F_\sigma}{d\omega d\Omega} \right) = \frac{3\alpha\gamma^2 I \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 (1 + \gamma^2 \psi^2)^2}{4\pi^2 \omega e \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)} \left(\frac{K_{2/3}^2(\eta)}{1 + \gamma^2 \psi^2} K_{1/3}^2(\eta) \right)$$

$$K_{2/3}(\eta) = \sqrt{3} \int_0^\infty \tau \sin \left\{ \frac{3}{2} \eta \left(\tau + \frac{1}{3} \tau^3 \right) \right\} d\tau$$

$$K_{1/3}(\eta) = \sqrt{3} \int_0^\infty \cos \left\{ \frac{3}{2} \eta \left(\tau + \frac{1}{3} \tau^3 \right) \right\} d\tau$$

$$\omega_c = 3c\gamma^3 / 2\rho \quad : \text{臨界周波数} \quad (29)$$

ちなみに、1個の電子から単位時間、単位波長あたり放出される放射光は

$$P(\lambda)[W/nm] = \frac{7.51 \times 10^{-7} (E[GeV])^7}{(\rho[m])^3} G(y)$$

$$y = \frac{\lambda_c}{\lambda} \quad (30)$$

$G(y)$: 第2種ベッセル関数を含む関数

で与えられる。また電子が1周当たり失うエネルギーを計算すると $\Delta E[keV/turn] = 88.5 \frac{(E[GeV])^4}{\rho[m]}$ となる。

1.3 FRAUNHOFER 回折

電磁波が媒質中を伝播する際に、障害物（または開口）の幾何学的な陰の部分に回りこんで伝播する現象を回折と呼び、放射光を使ってビーム計測を行う際には必ずこの回折効果を考慮する必要がある。回折効果を数学的に厳密に解くことは面倒で、通常は近似的な取り扱いをする。波源と観測点の両方から障害物（または開口）が十分遠く、入射波と回折波を平面波とみなせる場合の近似を Fraunhofer 回折、どちらかの距離が短く平面波とみなせない場合の近似を Fresnel 回折という。以下でその近似式を導く。

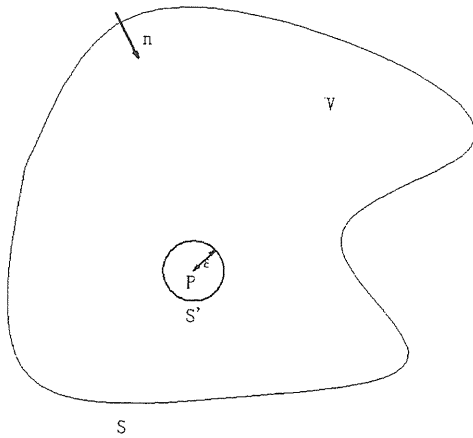


図 4 : Green の定理を当てはめる積分範囲

まず Kirchhoff の積分定理を使って、任意の点 P における波動の振幅 $U(P)$ を表現する。空間を伝播する電磁波の 1 成分を $V(x, y, z, t)$ とおくと、 V は波動方程式

$$\nabla^2 V = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad (31)$$

に従って伝播する。 V を単色波とすると

$$V(x, y, z, t) = U(x, y, z) e^{-i\omega t} \quad (32)$$

と表すことができ、

$$(\nabla^2 + k^2)U = 0 \quad (33)$$

が成り立つ。図 3 のように閉曲面 S で囲まれた領域 V を考え、点 P が V の中に含まれているとすると、Green の定理より

$$\iiint_V (U \nabla^2 U' - U' \nabla^2 U) dV = - \iint_S (U \frac{\partial U'}{\partial n} - U' \frac{\partial U}{\partial n}) dS \quad (34)$$

が成り立つ。 $\frac{\partial}{\partial n}$ は S 上の内向き法線方向に沿った微分である。

$$(\nabla^2 + k^2)U' = 0 \quad (35)$$

が成り立つとすると

$$U \nabla^2 U' - U' \nabla^2 U = k^2 (U U' - U' U) = 0$$

$$\iint_S (U \frac{\partial U'}{\partial n} - U' \frac{\partial U}{\partial n}) dS = 0 \quad (36)$$

となる。次に点 P を含んだ半径 ϵ の球面を S' とし、 S と S' で囲まれた領域で Green の定理を適用すると

$$\iint_{S+S'} (U \frac{\partial U'}{\partial n} - U' \frac{\partial U}{\partial n}) dS = 0$$

$$\iint_S (U \frac{\partial U'}{\partial n} - U' \frac{\partial U}{\partial n}) dS = - \iint_{S'} (U \frac{\partial U'}{\partial n} - U' \frac{\partial U}{\partial n}) dS' \quad (37)$$

となる。 U' は任意の関数なので点 P と (x, y, z) 間の距離を s と置いて

$$U'(x, y, z) = \frac{e^{iks}}{s} \quad (38)$$

と書くことが出来る。

$$\frac{\partial s}{\partial n} = \bar{n} \text{grad}(s) = \bar{n} \frac{\bar{s}}{s} = n^2 = 1 \quad (39)$$

より

$$\begin{aligned}
U \frac{\partial U'}{\partial n} - U' \frac{\partial U}{\partial n} &= U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{iks}}{s} \right) - \frac{e^{iks}}{s} \frac{\partial U}{\partial n} \\
&= U \frac{e^{iks}}{s} \left(ik - \frac{1}{s} \right) - \frac{e^{iks}}{s} \frac{\partial U}{\partial n} \\
\iint_S \left(U \frac{\partial U'}{\partial n} - U' \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS & \quad (40) \\
&= - \iint_{S'} \left(U \frac{e^{iks}}{s} \left(ik - \frac{1}{s} \right) - \frac{e^{iks}}{s} \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS' \\
&= - \iint_{4\pi} \left\{ U \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \left(ik - \frac{1}{\varepsilon} \right) - \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial n} \right\} \varepsilon^2 d\Omega
\end{aligned}$$

となる。 $dS' = \varepsilon^2 d\Omega$ である。ここで $\varepsilon \rightarrow 0$ とすると上式は $4\pi U(P)$ となることから

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{iks}}{s} \right) - \frac{e^{iks}}{s} \frac{\partial U}{\partial n} \right\} dS \quad (41)$$

が成り立つ。これは任意の点 P における波動振幅 $U(P)$ は P を含む閉曲面 S 上の波動振幅で現されることを示す。この関係を Helmholtz-Kirchhoff の積分定理という。

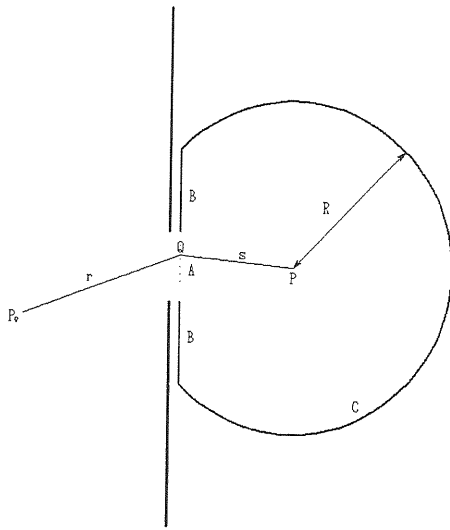


図 5 : Fresnel-Kirchhoff の回折積分

次に図 4 に示す様に光源点 P_0 からの光がスクリーン上の開口部 A を通って観測点 P に到達する場合を考える。A 上での入射波の振幅とその微分は

$$\begin{aligned}
U|_A &= \frac{Ae^{ikr}}{r} \\
\frac{\partial U}{\partial n}|_A &= \frac{Ae^{ikr}}{r} \left(ik - \frac{1}{r} \right) \cos(n, r) \quad (42)
\end{aligned}$$

となる。 $\cos(n, r)$ は A 上の法線 n と P_0Q のなす角のコサインである。A 上では

$$\frac{\partial s}{\partial n} = \bar{n} \text{grad}(s) = \bar{n} \frac{\bar{s}}{s} = \cos(n, s) \quad (43)$$

である。よって

$$\begin{aligned}
&\left[U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{iks}}{s} \right) - \frac{e^{iks}}{s} \frac{\partial U}{\partial n} \right]_A \\
&= \frac{Ae^{ikr}}{r} \frac{e^{iks}}{s} \left(ik - \frac{1}{s} \right) \frac{\partial s}{\partial n} - \frac{Ae^{ikr}}{r} \frac{e^{iks}}{s} \left(ik - \frac{1}{r} \right) \cos(n, r) \\
&= \frac{Ae^{ikr}}{r} \frac{e^{iks}}{s} \left(ik - \frac{1}{s} \right) \cos(n, s) - \frac{Ae^{ikr}}{r} \frac{e^{iks}}{s} \left(ik - \frac{1}{r} \right) \cos(n, r) \\
&= \frac{Ae^{ikr}}{r} \frac{e^{iks}}{s} \left\{ \left(ik - \frac{1}{s} \right) \cos(n, s) - \left(ik - \frac{1}{r} \right) \cos(n, r) \right\} \\
&\cong ik \frac{Ae^{ik(r+s)}}{rs} \{ \cos(n, s) - \cos(n, r) \}
\end{aligned}$$

$$\because k = 2\pi/\lambda \gg 1/r, 1/s$$

$$(44)$$

となり、

$$U(P) = -\frac{iA}{2\lambda} \iint_A \frac{e^{ik(r+s)}}{rs} \{ \cos(n, r) - \cos(n, s) \} dS \quad (45)$$

が成り立つ。この積分を Fresnel-Kirchhoff の回折積分という。

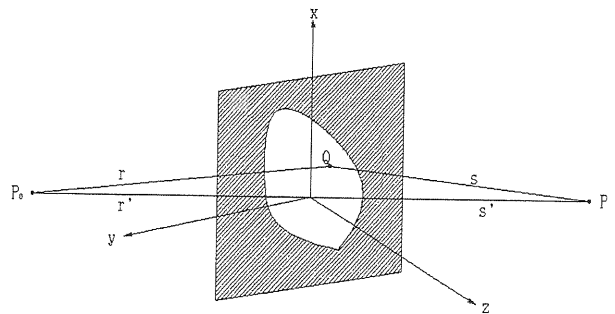


図 6 : スクリーン上の開口による回折

光源点 P_0 と開口部間の距離、観測点 P と開口部間の距離が、開口部の大きさに比べて十分大きい場合、

$\cos(n, r) - \cos(n, s)$ はほぼ一定値を取り、 P_0 と P を結ぶ直線 P_0P が開口と交わる点を O 、 P_0P とスクリーンの法線方向のなす角を δ とすると、

$$\cos(n, r) \approx -\cos(n, s) \approx \cos \delta \quad (46)$$

が成り立つ。ここで図 5 の様に (x, y) 平面がスクリーン面と平行な (x, y, z) 座標を考える。 P の座標を (x, y, z) 、 P_0 の座標を (x_0, y_0, z_0) 、開口面上の点 Q の座標を (ξ, η) 、 P_0P の方向余弦を (l_0, m_0) 、 OP の方向余弦を (l, m) とすると、

$$\begin{aligned} r^2 &= (x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 + z_0^2 \\ s^2 &= (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2 \\ r'^2 &= x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \\ s'^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned} \quad (47)$$

となり

$$\begin{aligned} r + s &= r' + s' + (l_0 - l)\xi + (m_0 - m)\eta \\ &+ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{s'} \right) (\xi^2 + \eta^2) - \frac{(l_0\xi + m_0\eta)^2}{r'} - \frac{(l\xi + m\eta)^2}{s'} \right] \end{aligned} \quad (48)$$

と近似できる。 ξ 、 η の 1 次までの近似を Fraunhofer 近似、2 次までの近似を Fresnel 近似という。ここで扱う光学系では Fraunhofer 近似がほとんどで

$$\begin{aligned} r' &\gg \frac{1}{\lambda} (\xi^2 + \eta^2)_{\max} \\ s' &\gg \frac{1}{\lambda} (\xi^2 + \eta^2)_{\max} \end{aligned} \quad (49)$$

がその条件である。Fraunhofer 近似が成り立つ場合の Fresnel-Kirchhoff の解析積分は

$$\begin{aligned} U(P) &= -\frac{icos\delta}{\lambda} \frac{Ae^{ik(r'+s')}}{r's'} \iint_A \frac{e^{ik(p\xi+q\eta)}}{rs} d\xi d\eta \\ &\quad \begin{aligned} p &= l - l_0 \\ q &= m - m_0 \end{aligned} \end{aligned} \quad (50)$$

となる。

$$C = \frac{icos\delta}{\lambda} \frac{Ae^{ik(r'+s')}}{r's'} \quad (51)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} U(P) &= \iint G(\xi, \eta) e^{-\frac{2\pi i}{\lambda}(p\xi+q\eta)} d\xi d\eta \\ G(\xi, \eta) &= C \quad (\text{一定}) : \text{開口内の点} \\ &0 \quad : \text{開口外の点} \end{aligned} \quad (52)$$

で与えられる。

$2a \times 2b$ の長方形の開口による Fraunhofer 回折では

$$\begin{aligned} U(P) &= C \iint_A e^{ik(p\xi+q\eta)} d\xi d\eta \\ &= C \int_a^a e^{-ikp\xi} d\xi \int_b^b e^{-ikq\eta} d\eta \\ &= 4abC \frac{\sin kpa}{kpa} \frac{\sin kqb}{kqb} \end{aligned} \quad (53)$$

となり、観測される光の強度は

$$\begin{aligned} I(P) &= |U(P)|^2 = \left(\frac{\sin kpa}{kpa} \right)^2 \left(\frac{\sin kqb}{kqb} \right)^2 I_0 \\ I_0 : p = q = 0 \quad (\text{回折パターン}の中心) \text{での強度} \end{aligned} \quad (54)$$

となる。これを光源点における座標

$$\begin{aligned} x &= pL \\ y &= qL \end{aligned} \quad (55)$$

であらわすと、

$$F(x, y) = \left(\frac{\sin(2\pi ax / \lambda L)}{2\pi ax / \lambda L} \right)^2 \left(\frac{\sin(2\pi by / \lambda L)}{2\pi by / \lambda L} \right)^2 \quad (56)$$

となり、

$$\begin{aligned} 2\pi ax / \lambda L &= \pm\pi, \pm 2\pi, \dots \\ x &= \frac{\lambda L}{2a} (\pm 1, \pm 2, \dots) \\ 2\pi by / \lambda L &= \pm\pi, \pm 2\pi, \dots \\ y &= \frac{\lambda L}{2b} (\pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned} \quad (57)$$

で 0 を取る。以上のような回折効果により、光学系を通してみる放射光は実際の分布よりもぼけてみえてしまう。

		E(GeV)	I(A)	B(T)	ρ (m)	Bend angle (mrad)	P(W/mrad)	Total P(MW)	λ_c (nm)
Normal	LER	3.5	2.6	0.76	16.2		380	2.4	0.21
	HER	8	1.1	0.258	105.3		642	3.94	0.11
Weak	LER	3.5	2.6	0.1795	65	5	84.7		0.847
	HER	8	1.1	0.0410	650	5	97.7		0.71

表 1 : KEKB normal bend と weak bend のパラメータ

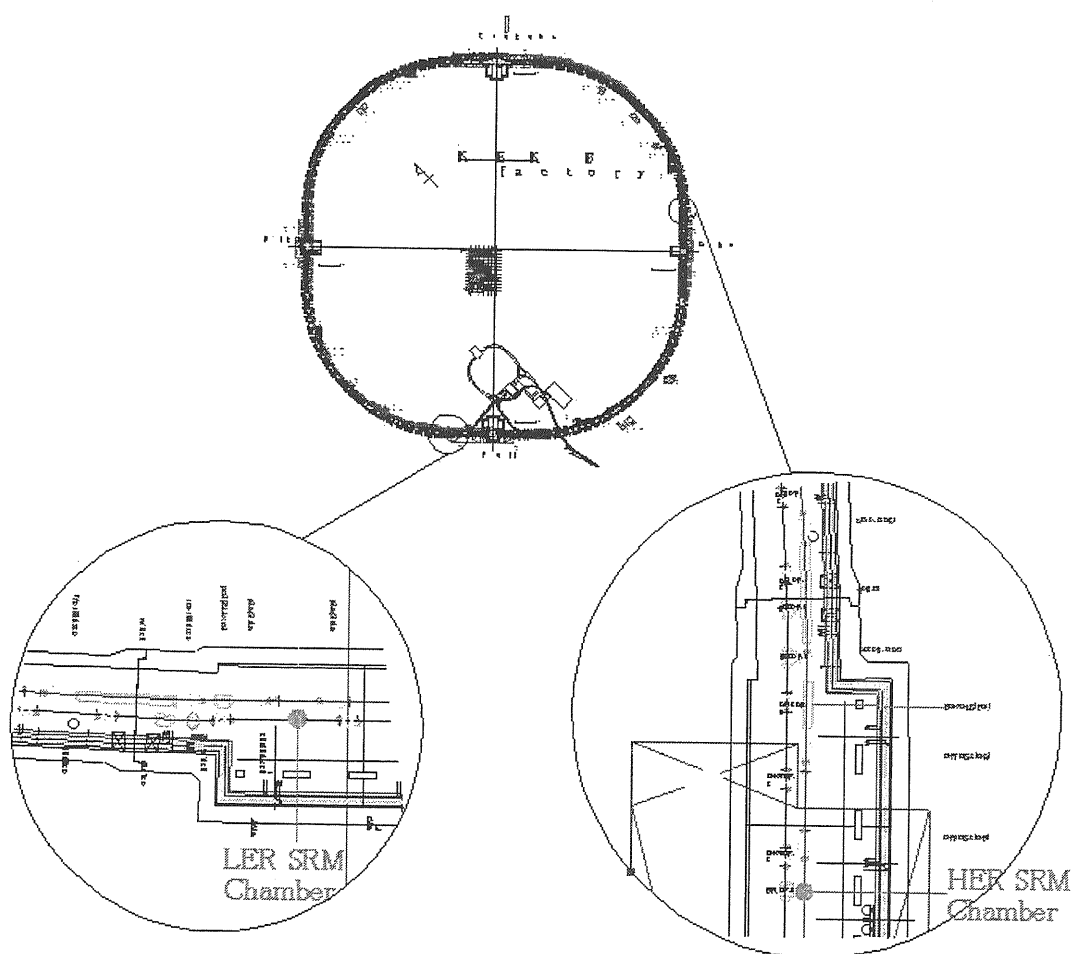


図 7 : KEKB Ring と両リングの SR モニターチェンバー

2 KEKB の SR モニター

2.1 放射光取出しチェンバー

KEKB ファクトリーの SR モニターは、KEKB 建設に伴い、光学の専門家である KEKPF の三橋氏により基本設計、構築がなされた。電子リング(HER) と陽電子リング(LER)

のそれぞれ 1 箇所放射光取出しのためのチェンバーを設置し、リングのアーチ部から直線部に移る最後の偏向磁石からの放射光を取り出す設計になっている。ただし通常の偏向磁石では放射強度が強すぎるため磁場の弱いウィークベンドからの放射光を使用する(図 7)。それぞれのパラメータは表 1 の通りである。実際に全パワーのうち反射されずに取り出し鏡に吸収されるのは半分程度である。ウィークベンドからの光は図 8 で示すとおり、磁石から約 10m 下流に設置したベリリウム反射鏡で反射し

て、クォーツ製の窓を通してビームパイプの外部へ取り出される。その後、リレーレンズ系によって光を収束しながら導くラインと、レンズ系を持たないダイレクトラインの2本で地上まで送られる。発光点から測定質に至る光路長は約40mである。レンズ系はビームの像の観測に用い、ダイレクトラインは干渉計やストリークカメラでの測定に使用している。[6]

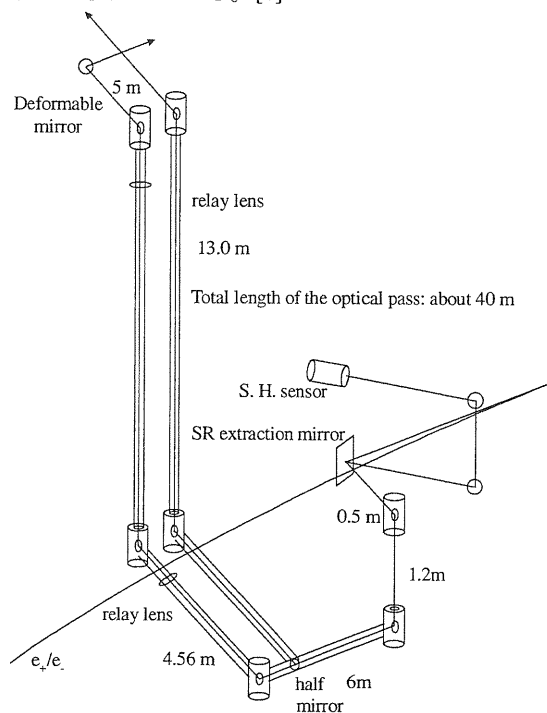


図 8 : KEKB 放射光取出し光路

KEKB 加速器の運転開始時(1998年)にはSRMの光取り出しチェンバーとしてHER、LERの両方にステンレス製のチェンバーがインストールされた(図9)。このチェンバーは2重構造になっており、内側のビームパイプ部は電気的に滑らかになるように円筒形を取っている。外側の円筒型のチェンバーによって全体の真空封じを行っており、またベリリウム鏡の角度調整のためのマニピュレータが装着されている。水冷式のベリリウム鏡は内側のビームパイプ切りかき部に45°の角度で押し付けられている。接触面はRFコンタクトフィンガーを溶接して鏡とチェンバー間の放電を防いでいる。

ビームパイプには放射光を取り出すためのものと、鏡の状態を監視するための2つの窓を並べてつけた。窓はチタンで薄く(0.5 μ m)コーティングされている。円筒チェンバーにはそれぞれの窓の延長線上にガラス窓を付けて放射光の取り出しと、鏡やコンタクトフィンガーの状態確認を可能にした。

運転開始後チェンバーの発熱状況をモニターするために円筒チェンバーの外側に温度計をつけていたが、SRM部での真空度は常に他と比べて悪く、ビーム電流が上がるにつれて真空度の悪化が見られたため、チェンバー内

部の温度も測定することにした。

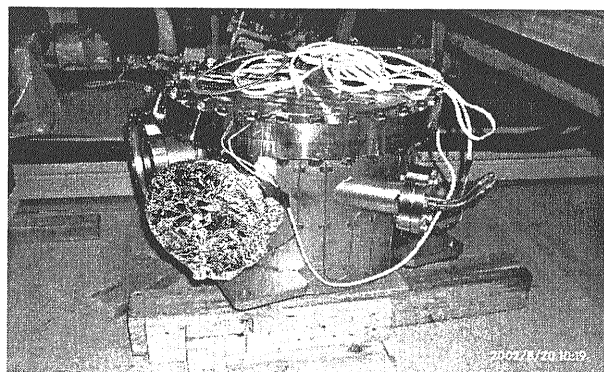


図 9 : ステンレスチェンバー

電流値の大きなLERのチェンバー内側のビームパイプに熱伝対を貼り付けて測定した結果が図10である。最大電流が700mAでの運転であるが、チェンバー温度が200度を超えていることがわかる。この測定の後、熱伝対はHOMに炙られたためと思われるが、放電を始め使用不能となった。

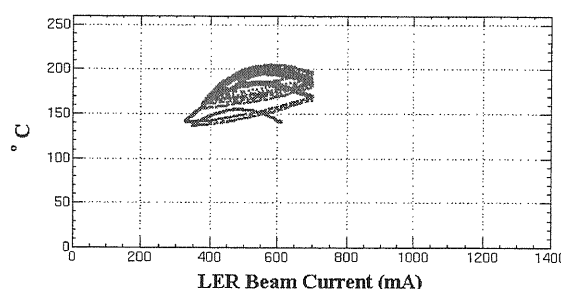


図 10 : ステンレスチェンバーでの加速器運転中の温度のビーム電流依存性

壁電流によるステンレス製チェンバーの発熱量を計算すると700mAで175度の温度上昇が予測された。これは加速器トンネル内の通常温度が25度であることを考慮すると測定結果と一致している。2000mAでの運転を仮定すると温度上昇は500度になると予想された。

2002年2月にLERのSRMチェンバー部で突然真空度が跳ね上がったため、加速器運転を一時停止し調べたところ、チェンバー内のビームパイプに溶接されていた窓枠(図11)が下に落ちていることがわかった。約10,000回に上るビーム電流の熱サイクルによる膨張収縮によって外れたと思われる。その後、窓枠は真空中から取り出し、夏季シャットダウンまでそのまま運転を続けたが、特に問題は起こらなかった。

チェンバーの発熱はSR光取り出し鏡の歪みを引き起こしていた。チェンバーの伸び縮みにより鏡が動くためである。その結果、ビーム電流の変化に従って光軸がず

れ、加速器運転中は光軸をフィードバック (FB) 調整しなければならなかった。干渉計に使う CCD カメラでの SR 光のプロファイルを常にモニターし、光が正しい位置に来るように SRM チェンバーのすぐ外に設置した可動鏡を自動的に縦横に動かすことで光軸を保持した[7]。特に縦方向についての最大偏移量は 1mrad になり(図 12)、FB なしでは約 30m 下流にある干渉計システムに光が届かず、加速器運転中のビームサイズ測定は不可能であった。

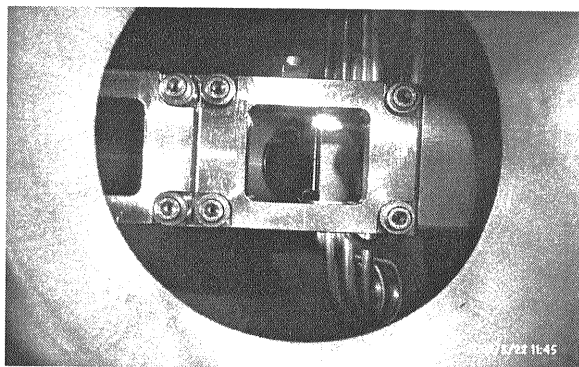


図 11：ステンレスの窓枠のぞき窓からベリリウム鏡を見る。

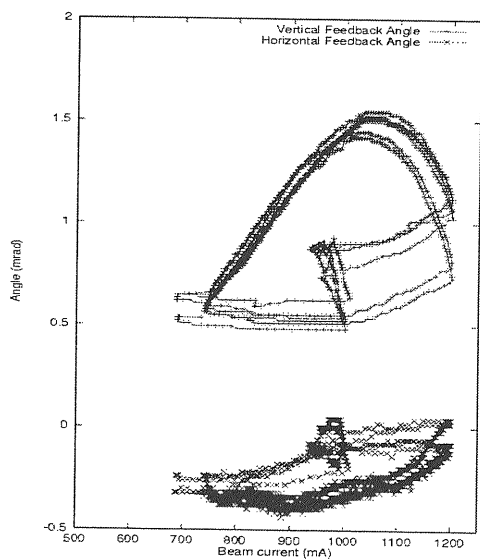


図 12：ステンレスチェンバーでの光軸変動のビーム電流依存性。

この問題点を解決するために、ステンレスに替わって銅を使ったチェンバーを製作した[8]。銅で作るのは内側のビームパイプの部分であり、外側のチェンバーと、ビームラインに繋ぎこむフランジ部分はステンレス製である(図 13 上)。

銅はステンレスに比べ電気伝導率が非常に高いため、壁電流による抵抗加熱が小さくなる。また熱伝導度が良いためチェンバー内で発生したエネルギーが分散され、局所的に温度が上昇することを押さえられる。

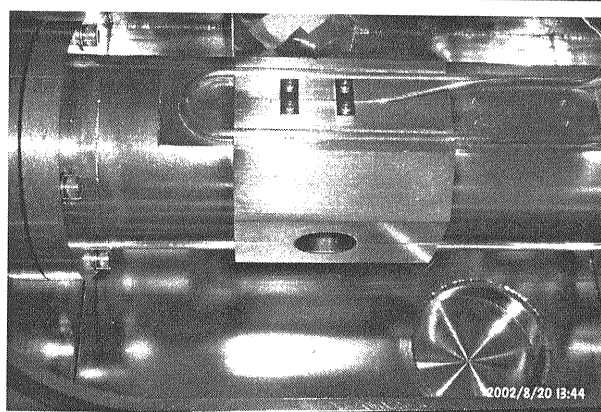
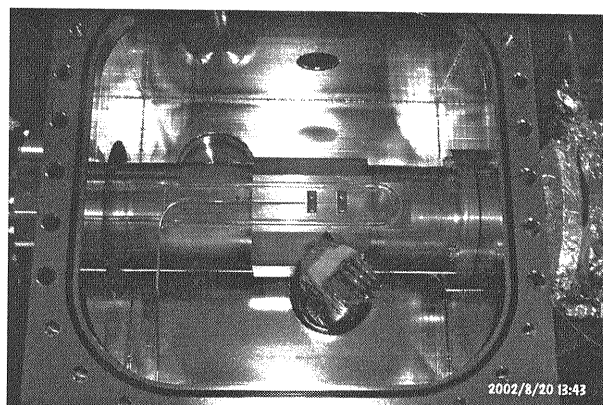
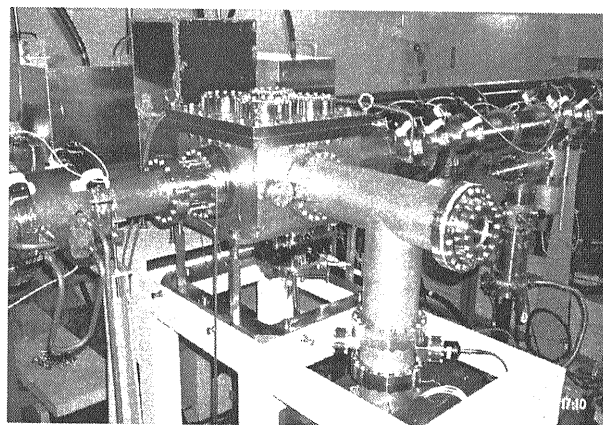


図 13：(上) 新しい SRM チェンバー外観。奥の暗箱に光軸調整用鏡が入っている。(中) SRM チェンバー内側。中央に走っている銅のビームパイプに右下からベリリウム鏡が 45 度の角度で取り付けられた。(下) SRM チェンバー内側の拡大図。ビームパイプ上部に熱伝対がねじ止めされている。右下に HOM 吸収剤取付用フランジが見える。

ステンレスの場合、1000mA、8n 秒スペーシングのビームを走らせた場合、チェンバー壁での発熱量は 20 W にな

る。冷却装置なしの場合、この発熱量は 140 度/10 cm の温度勾配をチェンバーにもたらす。チェンバーを銅に変えた場合の温度勾配は 3.5 度/10 cm となり問題にならず、冷却システムの整備も容易である。

MAFIA コードを使ったシミュレーションによると、元のデザインではビームパイプからの HOM パワーは最大電流になったときに問題となるレベルであることがわかった。そこで新しいチェンバーではビームパイプにあける穴は光を取り出すのに問題ない範囲で出来るだけ小さくすることにした。またビームパイプと外側のチェンバー間の空間も、チェンバー内の HOM パワーが最低になるように設計した (35mm×30mm)。

チェンバー内部の温度を測るためには、ビームパイプに銀でコーティングした熱伝対を設置した。熱伝対リード線の通路は HOM の影響を受けないように選んだ。

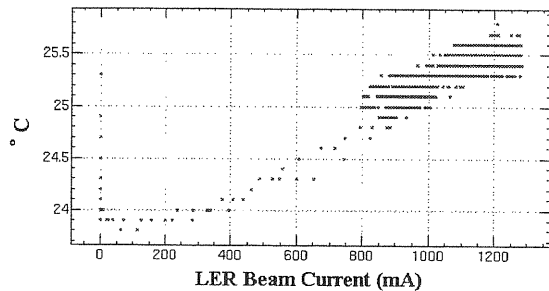


図 14 : 銅チェンバーの温度のビーム電流依存性。

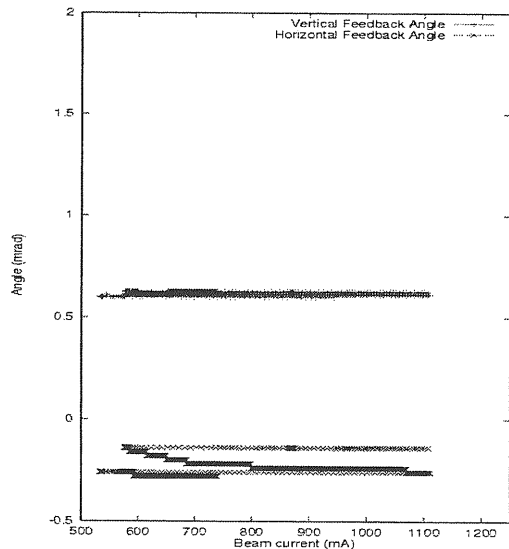


図 15 : 銅チェンバーでの光軸変動のビーム電流依存性。

図 14 に銅チェンバーに換えた後の温度のビーム電流依

存性を示すが、1200mA で 1.5 度に抑えられていることがわかる。2002 年 8 月に LER、翌 2003 年に HER のチェンバーを銅製のものに交換したが、図 15 に示すとおり以後温度上昇による鏡の変動もなくなり、光軸調整 FB 必要がなくなった。

2.2 ダブルスリット干渉計

放射光を使ってビームサイズを測定する際に問題となるのは先に説明した回折効果による像のボケである。そこで回折効果の影響を受けない測定方法が三橋氏により開発された[9]。これは Michelson の干渉計を放射光に応用し、ダブルスリットを通して得られる放射光の干渉縞を測定することで、ビームプロファイルを求める方法である。

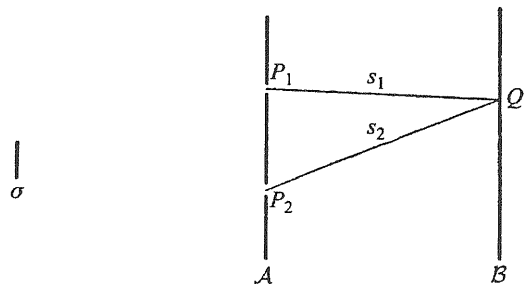


図 16 : 光源からの光を 2 つのスリットを通してスクリーン上で観測する。

任意の点 P における光の強度は P における波動関数 $V(P,t)$ の絶対値の 2 乗に比例するため

$$I(P) = \langle V(P,t)V^*(P,t) \rangle \\ = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{T/2}^{T/2} V(t)V^*(t) dt \quad (58)$$

を強度と定義する。図 16 の様に光源からの光をスクリーン A 上のスリット P_1 、 P_2 を通してスクリーン B 上の点 Q で観測する。 P_1 、 P_2 での波動関数を $V_1(t)$ 、 $V_2(t)$ とおくと、Q における波動関数は

$$V(Q,t) = K_1 V_1(t - s_1/c) + K_2 V_2(t - s_2/c) \quad (59) \\ \tau = (s_1 - s_2)/c$$

と書くことが出来る。ここで $V_1(t)$ 、 $V_2(t)$ の自己相関関数、相互相関関数を

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}(\tau) &= \langle V_1(t+\tau)V_1^*(t) \rangle \\ \Gamma_{22}(\tau) &= \langle V_2(t+\tau)V_2^*(t) \rangle \\ \Gamma_{12}(\tau) &= \langle V_1(t+\tau)V_2^*(t) \rangle\end{aligned}\quad (60)$$

と定義すると $\Gamma_{11}(0)$ 、 $\Gamma_{22}(0)$ は P_1 、 P_2 での光の強度 I_1 、 I_2 を表すので、点 Q での強度は

$$\begin{aligned}I(Q) &= \langle V(Q,t)V^*(Q,t) \rangle \\ &= |K_1|^2 \Gamma_{11}(0) + |K_2|^2 \Gamma_{22}(0) + |K_1||K_2| \Gamma_{12}(\tau) \\ &= I^{(1)}(Q) + I^{(2)}(Q) + 2\sqrt{I^{(1)}(Q)I^{(2)}(Q)} \operatorname{Re} \left[\frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{I_1} \sqrt{I_2}} \right]\end{aligned}\quad (61)$$

と書くことが出来る。

$$\begin{aligned}I^{(1)}(Q) &= |K_1|^2 I_1 \\ I^{(2)}(Q) &= |K_2|^2 I_2\end{aligned}\quad (62)$$

はスリットが P_1 または P_2 のみの時の Q 点での強度である。ここで $V(t)$ をフーリエ変換の形で書くと

$$V(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (63)$$

となる。

$$\begin{aligned}V_T(t) &= V(t) \quad (-T/2 \leq t \leq T/2) \\ &= 0 \quad (t < -T/2, t > T/2)\end{aligned}\quad (64)$$

と定義し、 V_T のフーリエ変換を $v_T(\omega)$ とすると

$$\begin{aligned}V_T(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v_T(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ \langle V(t)V^*(t) \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' v_T(\omega) v_T^*(\omega') e^{-i(\omega-\omega')t} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega \\ G(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{v_T(\omega) v_T^*(\omega)}{T} \right] : V(t) \text{ のスペクトル密度関数}\end{aligned}\quad (65)$$

となる。更に $V(t+\tau)$ と $V^*(t)$ の期待値は

$$\begin{aligned}\langle V(t+\tau)V^*(t) \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' v_T(\omega) v_T^*(\omega') e^{-i(\omega-\omega')t} e^{-i\omega\tau} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega\end{aligned}\quad (66)$$

と書ける。同様に

$$\begin{aligned}\langle V_1(t)V_2^*(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} G_{12}(\omega) d\omega \\ G_{12}(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{v_{1T}(\omega) v_{2T}^*(\omega)}{T} \right] : \text{相互スペクトル密度関数}\end{aligned}\quad (67)$$

と定義すると

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle V_1(t+\tau)V_2^*(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} G_{12}(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (68)$$

となる。入射光が準単色光で波長の広がり $\Delta\lambda$ が波長 λ に比較して十分小さいならば

$$\Delta\lambda/\lambda = \Delta\omega/\omega \ll 1 \quad (69)$$

と書くことが出来、 $G_{12}(\omega)$ は $\Delta\omega$ の範囲内でしか値を持たないので

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}(\tau) &= e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} G_{12}(\omega) d\omega = \Gamma_{12}(0) e^{-i\omega\tau} \\ \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{I_1 I_2}} &= \frac{\Gamma_{12}(0)}{\sqrt{I_1 I_2}} e^{-i\omega\tau} \equiv \gamma_{12} e^{-i\omega\tau}\end{aligned}\quad (70)$$

と近似できる。ここで

$$\gamma_{12} = |\gamma_{12}| e^{i\theta} \quad (71)$$

である。従って $K_1 = K_2 = K$ とすると

$$I(Q) = I_0(Q) \left[1 + 2 \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} |\gamma_{12}| \cos \left(\frac{2\pi(s_2 - s_1)}{\lambda} + \theta \right) \right] \quad (72)$$

$$I_0(Q) = I^{(1)}(Q) + I^{(2)}(Q)$$

である。

次に光源がある広がりを持っている場合を考える。\$V_{m1}\$、\$V_{m2}\$を光源の微小部分 \$d\sigma_m\$ からの光による \$P_1\$、\$P_2\$ での複素振幅とすると、光源 \$\sigma\$ 全体からの光による \$P_1\$、\$P_2\$ での複素振幅は

$$V_1(t) = \sum_m V_{m1}(t)$$

$$V_2(t) = \sum_m V_{m2}(t) \quad (73)$$

で与えられ \$P_1\$、\$P_2\$ における相互干渉度は

$$\Gamma_{12}(0) = \langle V_1(t) V_2^*(t) \rangle$$

$$= \sum_m \langle V_{m1}(t) V_{m2}^*(t) \rangle + \sum_m \sum_n \langle V_{m1}(t) V_{n2}^*(t) \rangle \quad (74)$$

と書けるが、光源はインコヒーレントなので

$$\langle V_{m1}(t) V_{n2}^*(t) \rangle = \langle V_{m1}(t) \rangle \langle V_{n2}(t) \rangle = 0 \quad m \neq n \quad (75)$$

である。光源からの光が球面波だとすると

$$V_{m1}(t) = A_m \left(t - \frac{R_{m1}}{c} \right) \frac{e^{-i2\pi\nu \left(t - \frac{R_{m1}}{c} \right)}}{R_{m1}}$$

$$V_{m2}(t) = A_m \left(t - \frac{R_{m2}}{c} \right) \frac{e^{-i2\pi\nu \left(t - \frac{R_{m2}}{c} \right)}}{R_{m2}}$$

$$\langle V_{m1}(t) V_{m2}^*(t) \rangle \quad (76)$$

$$= \left\langle A_m \left(t - \frac{R_{m1}}{c} \right) A_m^* \left(t - \frac{R_{m2}}{c} \right) \right\rangle \frac{e^{-i2\pi\nu \left(\frac{R_{m1}}{c} - \frac{R_{m2}}{c} \right)}}{R_{m1} R_{m2}}$$

$$= \left\langle A_m(t) A_m^* \left(t - \frac{R_{m2} - R_{m1}}{c} \right) \right\rangle \frac{e^{-i2\pi\nu \left(\frac{R_{m1} - R_{m2}}{c} \right)}}{R_{m1} R_{m2}}$$

と書ける。\$R_{m2} - R_{m1}\$ がコヒーレント長より短いものとする

$$t - (R_{m2} - R_{m1})/c \approx t$$

$$\Gamma_{12}(0) = \sum_m \left\langle A_m(t) A_m^*(t) \right\rangle \frac{e^{-i2\pi\nu \left(\frac{R_{m1} - R_{m2}}{c} \right)}}{R_{m1} R_{m2}} \quad (77)$$

となる。\$\langle A_m(t) A_m^*(t) \rangle = I(S_m) d\sigma_m\$ は \$d\sigma_m\$ からの光の強度なので

$$\Gamma_{12}(0) = \int_{\sigma} I(S) \frac{e^{ik(R_1 - R_2)}}{R_1 R_2} dS \quad (78)$$

$$\gamma_{12} = \frac{\Gamma_{12}(0)}{\sqrt{I_1 I_2}} = \frac{1}{\sqrt{I_1 I_2}} \frac{1}{R_1 R_2} \int_{\sigma} I(S) e^{ik(R_1 - R_2)} dS \quad (79)$$

上式を van Cittert Zernike 定理という。更に

$$I_1 = \langle V_1(t) V_1^*(t) \rangle = \sum_m \langle V_{m1}(t) V_{m1}^*(t) \rangle$$

$$= \sum_m \frac{1}{R_{m1}^2} \langle A_m(t) A_m^*(t) \rangle$$

$$= \frac{1}{R_1^2} \sum_m \langle A_m(t) A_m^*(t) \rangle \quad (80)$$

$$= \frac{1}{R_1^2} \int I(S) dS$$

$$I_2 = \frac{1}{R_2^2} \int I(S) dS$$

より

$$\sqrt{I_1 I_2} = \frac{1}{R_1 R_2} \int I(S) dS \quad (81)$$

であり、

$$\rho(S) = \frac{I(S)}{\int I(S) dS} \quad (82)$$

とおくと \$\rho(S)\$ は \$\int I(S) dS = 1\$ に規格化された光源の強度密度になり、

$$\gamma_{12} = \int \rho(S) e^{-ik(R_1 - R_2)} dS \quad (83)$$

が成り立つ。ここで光源の大きさと \$\gamma_{12}\$ を結びつけることが出来た。また \$I_1 = I_2\$ のときに

$$I(Q) = I_0(Q) \left[1 + |\gamma_{12}| \cos \left(\frac{2\pi(s_2 - s_1)}{\lambda} + \theta \right) \right] \quad (84)$$

の関係式が成り立ち、干渉縞の強度から $|\gamma_{12}|$ を求められることがわかる。

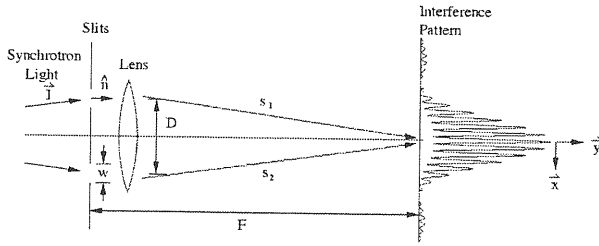


図 17 : 放射光干渉計

実際の干渉計として図 17 を考える。スリットから十分遠方にある光源からの光を、二つのスリットを通して焦点距離 f のレンズでスクリーン上に投影すると干渉パターンが観測される。ここで D は二つのスリット間隔、 F はレンズとスクリーン間の距離である。この時の干渉縞の強度分布を考える。光の波長を λ 、光源とスリットの感覚を L 、スリット幅を w として、スリットからレンズまでの距離は無視できるとすると、スリットからスクリーンまでの二つの光路の差は以下ようになる。

$$\begin{aligned} s_2 - s_1 &= \sqrt{F^2 + (D/2 + y)^2} - \sqrt{F^2 + (D/2 - y)^2} \\ &= F \left\{ 1 + \frac{1}{2F^2} \left(\frac{D^2}{4} + Dy + y^2 \right) \right\} - F \left\{ 1 + \frac{1}{2F^2} \left(\frac{D^2}{4} - Dy + y^2 \right) \right\} \\ &= \frac{D}{F} y \end{aligned} \quad (85)$$

従って

$$\frac{2\pi}{\lambda} (s_2 - s_1) = \frac{2\pi D}{\lambda F} y \quad (86)$$

が成り立つ。

$$\theta_0 = D/2L \quad (87)$$

とすると、光源から二つのスリットを見込む角 (光軸) はそれぞれ $\pm\theta_0$ である。従って、光軸から θ だけ異なる角度に進む光がスクリーン上に到達する際の位置 y と角度 ϕ は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y \\ \phi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & F \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm D/2 \\ \pm\theta_0 + \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \pm D(1 - F/f)/2 + F(\pm\theta_0 + \theta) \\ \mp D/2f \pm \theta_0 + \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (88)$$

で与えられる。二つのスリットの光軸がスクリーン上で一致するように F を選ぶと、

$$\begin{aligned} D(1 - F/f)/2 + F\theta_0 &= -D(1 - F/f)/2 - F\theta_0 \\ D(1 - F/f) + 2F\theta_0 &= 0 \\ F &= \frac{1}{1/f - 1/L} \cong f \end{aligned} \quad (89)$$

となり、

$$\begin{pmatrix} y \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F\theta \\ \mp D/2F + \theta \end{pmatrix} \quad (90)$$

となる。ここでは $f \ll L$ の関係を使用している。スリットによる回折が Fraunhofer 回折で近似できる ($L \gg w^2/\lambda$) とすると、各スリット後の光の強度は

$$\begin{aligned} I^{(1,2)}(\theta) &= I_0 \left\{ \frac{\sin(k \frac{w}{2} \theta)}{k \frac{w}{2} \theta} \right\}^2 \\ k &= 2\pi/\lambda : \text{波動ベクトル} \end{aligned} \quad (91)$$

で表される。ここで式 (91) の関係より $\theta = y/F$ が成り立つため、

$$I_0(Q) = I_0 \left\{ \frac{\sin(\pi w y / F)}{\pi w y / F} \right\}^2 \quad (92)$$

となり、干渉縞の強度分布は

$$\begin{aligned} I(x) &= I_0 \left\{ \frac{\sin(\pi w y / \lambda F)}{\pi w y / \lambda F} \right\}^2 \left\{ 1 + \gamma \cos \left(\frac{2\pi D}{\lambda F} y \right) \right\} \\ \gamma &= |\gamma_{12}| : \text{visibility} \\ \gamma_{12} &: \text{複素干渉度} \end{aligned} \quad (93)$$

となる。 γ_{12} は電子ビームの密度分布のフーリエ変換で与えられるため、ビームプロファイルがガウス分布をしている場合のビームサイズは

$$\rho(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-x^2/2\sigma_x^2} e^{-y^2/2\sigma_y^2}$$

$$\gamma_{12} = \exp\left(-i\frac{2\pi D}{\lambda}\theta_0\right) \exp\left\{-2\left(\frac{\pi D}{\lambda}\right)^2\sigma_{x,y}^2\right\} \quad (94)$$

$$\sigma_{x,y} = \frac{\lambda L}{\pi D} \sqrt{\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{\gamma}\right)}$$

で与えられる。

先に述べたとおり、KEKB でのビームサイズ測定にはダイレクトラインによって導かれた光を使用する。セットアップは図 18 の写真で示す通りで、スプリッターで垂直方向ビームサイズ測定用干渉計と水平方向測定用に分けられた光が干渉計用スリットに入射し、偏光フィルター、強度調整のためのニュートラルデンシティフィルター、光の波長を選択するバンドパスフィルター($\lambda=513\text{nm}$, $\Delta\lambda=87\text{nm}$ FWHM) を通した後で CCD カメラの受光面上に収束され、干渉パターンが観測される。

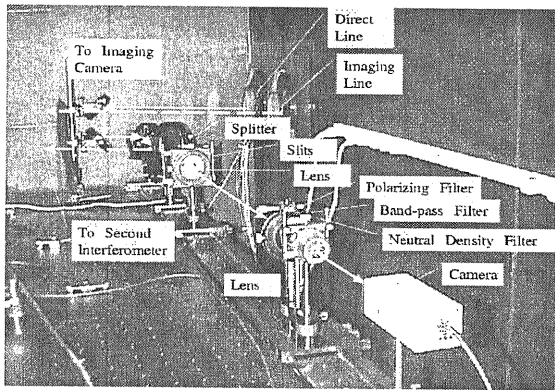


図 18 : KEKB 干渉計のセットアップ

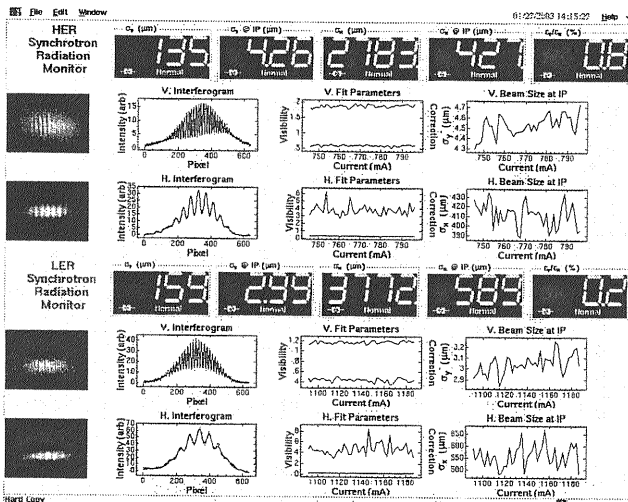


図 19 : 干渉計のモニター画面

計測された像はリアルタイムで干渉パターンのフィッティング処理がなされ、垂直方向、水平方向のビームサイズを制御室のディスプレイに表示し、加速器運転中は常に値をモニターし FB に用いている。図 19 がそのモニター画面である。ここで求められるビームサイズ ($\sigma_y=135\mu\text{m}$) はウィークベンドでのサイズなので、ベータatron 振幅関数を用いて衝突点での値 ($\sigma_y^*=4.26\mu\text{m}$) に焼きなおしている。

2.3 ストリークカメラでのビーム計測

ビームの長さ方向の測定にはストリークカメラを用いる[10]。ストリークカメラはフォトカソードからなる光電面から放出される光電子を加速、収束して、入射光と同期した高電圧高速度の電圧が印加された偏向電極で掃引し、MCP (多チャンネル電子増倍プレート) で電子数を増幅する。その結果得られる明るい掃引像を TV カメラで撮像し電気信号に変換する(図 20)。光電面では入射光強度に比例した電子が放出されるため、最終的な像は放射光を放出したビームの分布をそのまま反映する。このカメラの利点は、掃引することで時間を像の位置に変換するので、超高速の光現象を時間軸に沿って観測できることである。KEKB ではバンチ長は 10mm 以下なのでこのカメラは非常に有用である。更に水平方向の電極にも入射光と同期した高電圧を印加することにより、蛍光面上の横軸方向は縦軸よりもゆっくりした時間軸となり、トレイン中のバンチ毎の形状の変化を観測することが出来る。

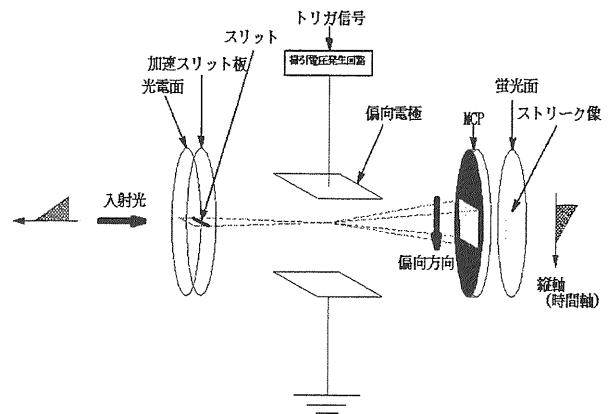


図 20 : ストリーク管の動作原理

このシステムで画期的なのは、図 21 に示す分散のない反射光学系による計測技術が開発されたことである。レンズに入射する光の波長によってガラスの中での屈折率は異なるため、焦点距離もそれぞれが異なった値をとる。そこでこれまでの屈折光学系では、フィルターを通してある一定の波長の光のみを取り出して計測に使用していた。しかし反射光学系ではすべての領域の光を使用することが出来るため、これまでに比べて光量が格段に増加した。

KEKB ではストリークカメラに光を導入する全ての結像システムに反射鏡を用いている。この技術により、KEKB では各バンチ 1 つ 1 つの様子を個別に測定することが可能である。図 22 は電流値によるバンチ長の変化を 2 種類のオブティックスで測定したときのストリーク像と測定結果である。

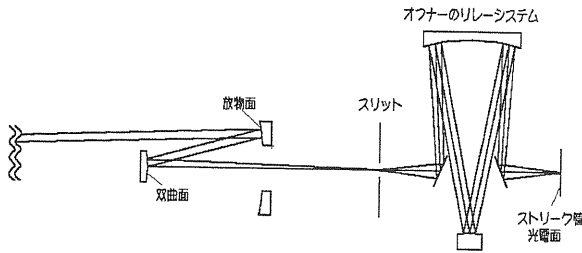


図 21：反射光学系を使った結像システム

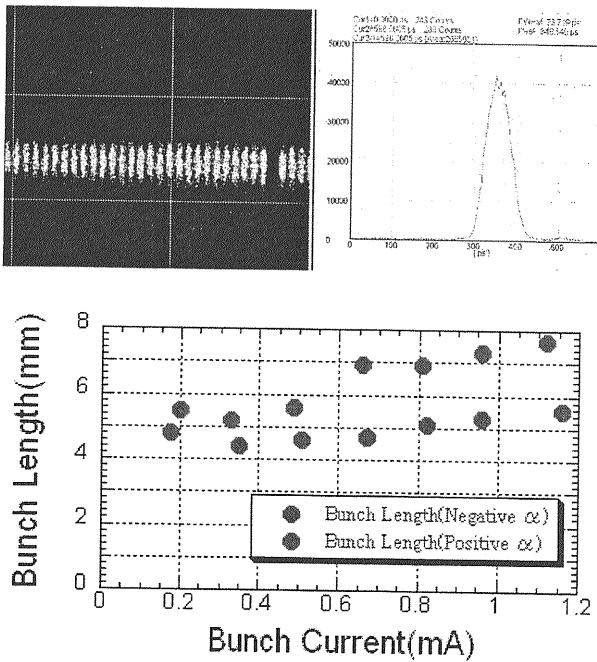


図 22：ストリークカメラで測定したバンチ像と Gauss fit で算出したバンチ長。ビームオブティックスの違いによる長さの違いがはっきり測定できた。

図 23 では横方向のビームサイズが各バンチで異なる様子がわかる。これらの横方向の計測と時間方向の計測をコンバインすることによりビームのダイナミクスな運動を計測する技術も開発されている。ただし、横方向の測定には光の回折効果による「ぼけ」があるので、絶対値評価には注意が必要である。(56) 式に実際のアパーチャーを代入してみると

$$\begin{aligned}
 a &= 5\text{cm} \\
 L &= 38\text{m} \\
 \lambda &= 500\text{nm} \\
 x &= \frac{\lambda L}{2a} = \frac{500 \times 10^{-9} \times 38}{2 \times 0.05} = 380 \times 10^{-6}
 \end{aligned} \tag{95}$$

となり、最初の極小点は $380 \mu\text{m}$ となる。分解能をピークから 50%程度と見積もると $380/2=190[\mu\text{m}]$ となる。実際にストリークカメラでの測定値(Gauss fit の sigma) を干渉計での測定値と比較したのが図 24 だが、ストリークでの測定値を σ_{streak} 、干渉計での測定値を σ_{SRM} として

$$\sigma_{streak} = \frac{1}{M_1} \sqrt{M_2^2 + \sigma_{SRM}^2} \tag{96}$$

の関数でフィットすると、

$$M_2 = 198.8$$

となり、計算値とほぼ一致する。

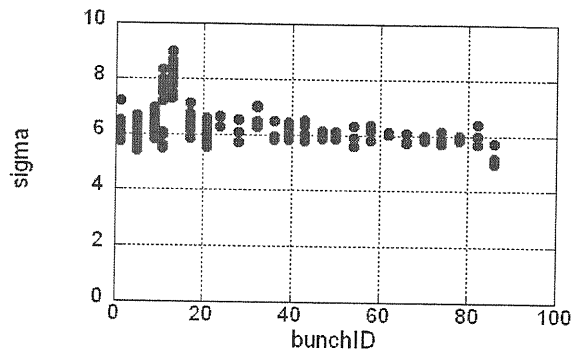
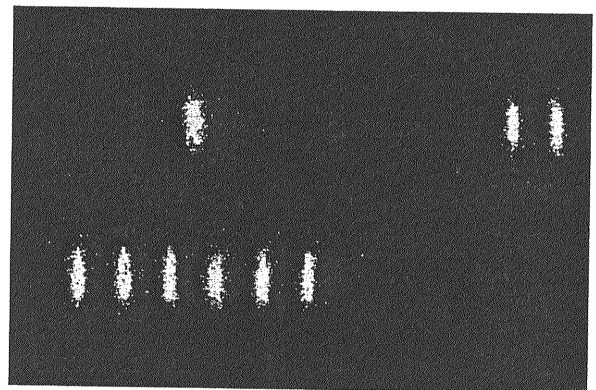


図 23：バンチの横方向サイズ計測

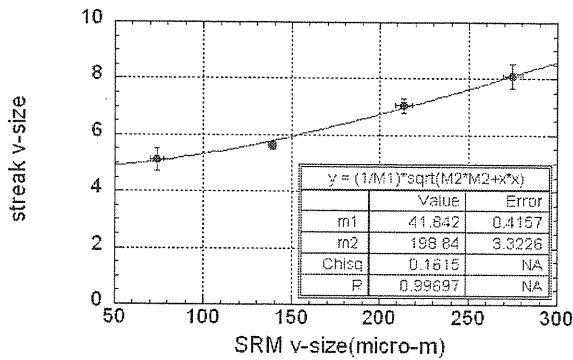


図 24 : ストリークカメラと干渉計でのビームサイズ測定の比較。ストリークカメラでの測定は光の回折によってぼける。

2.4 高速ゲートカメラでのビーム計測

高速ゲートカメラは、MCP を内蔵し、ゲート操作が可能な近接型イメージインテンシファイア、ゲート駆動回路、高圧電源から成り、容易にゲート動作が出来る。3ns からのゲート動作が可能のため、単バンチを取り出してそのプロファイルを測定することが出来る。

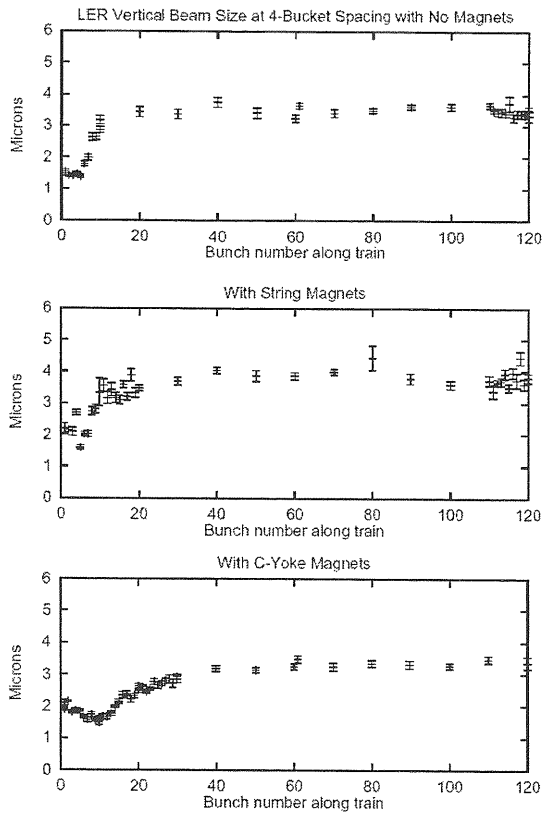


図 25 : ビームの条件を変えたときのゲートカメラでのバンチ毎のビームサイズ測定[11]

図 26 はゲートカメラを使った測定結果で、ビームの条件を変えたときのバンチの縦方向のサイズをプロットしている。トレインにそって最初の数バンチは後ろのバンチに比べて小さいことが良くわかる。

また、ゲートカメラは入射ビームの様子を観測したい時等に便利である。KEKB では連続入射モードで物理ランがなされているため、大電流が常に蓄積されている。この場合、入射ビームは蓄積ビームに比べて非常に強度が小さい ($\sim 10^{-5}$) ため測定が難しい。高速ゲートカメラでは少数バンチの切り出しが可能になるため図で示す通り、蓄積ビームと入射ビームを同時に見ることが可能である。更に蓄積電流が高くなった場合は、振動しない中心部を隠すことにより、入射ビームの振動を測定することが可能である。

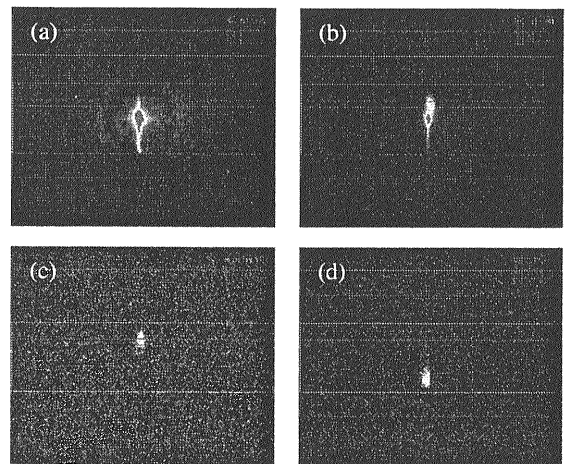


図 26 : 高速ゲートカメラによる入射ビームの測定 (a) 蓄積ビーム、(b) 蓄積ビームに入射ビームが加わる様子、(c) 1 ターン目の入射ビーム (d) 2 ターン目の入射ビーム。

最後に

このノートには KEKBSR モニターの全般をまとめようと努力しました。筆者の勉強不足によりフォローしきれていない部分が多々あると思われませんが、放射光モニターの有用性の一端でも理解いただければ幸いです。また三橋利行氏、平松成範氏、ジョンフラナガン氏がこれまでまとめてこられた結果を数多く使わせていただいたことをお断りし、感謝いたします。特に締め切りぎりぎりにもかかわらず、快く内容確認、指導して下さった平松成範氏に感謝いたします。

参考文献

[1] 物理学辞典 培風館

- [2] 「理論電磁気学」 砂川重信 紀伊国屋書店
- [3] 「光学の原理」 M.ボルン、E.ウオルフ 東海大学出版会
- [4] 「加速器のビームモニター」 平松成範 文部科学省高エネルギー加速器研究機構 平成 15 年度技術部職員専門研修
- [5] Kwang-Je Kim, “CHARACTERISTICS OF SYNCHROTRON RADIATION” Berkeley, CA94720.
- [6] M. Arinaga, *et al.*, “KEKB Beam Instrumentation System” KEKB Accelerator Papers, KEK Preprint 2001-157(2001).
- [7] J.W.Flanagan, *et al.*, “Improvement to Automated Beam-size Measurement System at KEKB,” Proceedings of the Second Asian Particle Accelerator Conference, Beijing, China (2001) pp. 639-641.
- [8] 「KEKBSRM 銅チェンバーの開発」 池田仁美 第 14 回加速器研究発表会 2P-019
- [9] T.Mitsuhashi, “Beam Measurement”, Proc. Joint US-CERN-Japan-Russia School on Particle Accelerators, 1998, Ed. By S.I.Kurokawa *et al.*, World Scientific, 1999, p.399.
- [10] ストリークカメラ取り扱い説明書 浜松ホトニクス
- [11] J.W.Flanagan *et al.*, “HIGH-SPEED GATED CAMERA OBSERVATIONS OF TRANSVERSE BEAM SIZE ALONG BUNCH TRAIN AT THE KEKB B-FACTORY” Proceedings of EPAC 2000, Vienna, Austria