

1 はじめに

世界には、電子、陽電子、陽子、反陽子、イオンなどを加速する加速器が存在するが、本書では主に電子(または陽電子)を加速する加速器を取り扱う。加速器の中では荷電粒子は基本的に電場によって進行方向に加速され、磁場によって横方向に曲げられる。このように荷電粒子が受ける力はローレンツ力と呼ばれる。ローレンツ力は

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1-1)$$

と表される。 \vec{E} は電場、 \vec{v} は荷電粒子の速度、 \vec{B} は磁場である。電磁場によって荷電粒子を加速する加速器には線形加速器(リニアック)と円型加速器(リング)の2種類に分類される。前者では荷電粒子は加速器の中を基本的に一度しか通過しないが、後者の場合は何度も加速器の中を周回する。本書では「ダンピングリング」をテーマとしているので円型加速器(リング)を解説する。ダンピングリングとは何かという話は後で詳述することにして電子を加速する円型加速器(電子リング)の基本的な話から始めたいと思う。

まず、電子とは何かというと負の電荷を持った質量0.511 MeVの荷電粒子である。電子の質量は陽子(938 MeV)の約2000分の1と非常に軽い。従って、電子を加速器で加速する場合、電子の速さは容易に光速近くまで到達する。ほとんどの場合、電子リングでは相対論的領域である。ここで相対論的速さ(β)とローレンツ因子(γ)を定義する

$$\beta = \frac{v}{c} \quad (1-2)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (1-3)$$

v は粒子の速さ、 c は光速、 3×10^8 m/sである。しばしば、ローレンツ因子を用いて

$\gamma \simeq 1$ 非相対論的 Non-relativistic

$\gamma > 1$ 相対論的 Relativistic

$\gamma \gg 1$ 超相対論的 Ultra-relativistic

と分類される。

エネルギー、運動量、質量の関係は

$$E^2 - (pc)^2 = (mc^2)^2 \quad (1-4)$$

であり、相対論的速さとローレンツ因子も

$$\beta = \frac{pc}{E} \quad (1-5)$$

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} \quad (1-6)$$

と表される(または $c=1$ として表現されることも多い)。

2 進行方向のビーム力学

Synchronous Acceleration

The third phase of accelerator history started with the addition of the concepts and techniques of “phase stability” to resonance acceleration. With these techniques particles can be kept in resonance with the radiofrequency electric field indefinitely, and can be accelerated to much higher energies.

The principle of phase-stable or “synchronous” acceleration was proposed independently and nearly simultaneously by V. Veksler of the U.S.S.R. and E. M. McMillan of the University of California, in 1945.

M. S. Livingston
“Resonance Acceleration”

電子リングにおいて周回する電子は偏向磁石で進路が曲げられると光を放出しエネルギーの一部を失う。この光はシンクロトロン放射光と呼ばれる。つまり、加速器中の電子の平均的なエネルギーを増大させるだけでなく、一定に保つ場合にもシンクロトロン放射によって失ったエネルギーを補充する(加速する)必要がある。このように荷電粒子を加速するための装置を高周波加速空洞(rf)と呼ぶ。高周波加速空洞に電磁波を送り定在波を立て進行方向に定在波の電場成分を作れば荷電粒子はローレンツ力によって加速される。電子リングに高周波加速空洞を設置したとしよう。高周波加速空洞にかかる電圧は

$$V(t) = V_c \sin(2\pi f_r f t) = V_c \sin(\omega_r f t) \quad (2-1)$$

と表される。 V_c はピーク電圧、 f_{rf} はrf周波数、 ω_{rf} は角rf周波数と呼ばれる。ちなみに、高周波と呼ばれるのはrf周波数が通常100 MHzのオーダーであるためである。従って、荷電粒子に最適なエネルギーを高周波加速空洞から補充するためには、ある決まった位相(時間間隔)のみでしか行えないことになる。このために電子ビームは進行方向に一樣な分布をすることはなく、バンチ(塊)を形成する。本書ではビームを一定のエネルギーで周回させるリングを考える。rf周波数と周回周波数(f_0)とは整数比関係があり、

$$f_{rf} = hf_0 \quad (2-2)$$

となる。 h は整数でハーモニック数¹と呼ばれる。

ここで、バンチの中に理想的な粒子である基準粒子(synchronous particle)を考える。この基準粒子をリングのある場所で観測していると何回周回しても、そのエネルギーは変化しない。また、最適な位相の上にいるので位相もずれない。では、基準粒子と比べて少し異なる位相、つまり進行方の位置が基準粒子から少しずれた粒子の振舞いはどうなるだろうか。バンチを形成するという事実から、このような粒子も不安定な状態に陥って失われてしまうことはなく、基準粒子のまわりで位相とエネルギーの振動をしながら分布することが予想される。

2.1 遷移エネルギー

リング1周の長さを C として、粒子が1周するのに要する周回時間を T とすると

$$T = \frac{C}{\beta c} \quad (2-3)$$

である。ここで、 T の微小変化を考えると

$$dT = +\frac{dC}{\beta c} - \frac{C}{\beta^2 c} d\beta \quad (2-4)$$

$$= T \frac{dC}{C} - T \frac{d\beta}{\beta} \quad (2-5)$$

となり、時間変化の割合は

$$\frac{dT}{T} = \frac{dC}{C} - \frac{d\beta}{\beta} \quad (2-6)$$

¹プランク定数と混同しないこと。

と書ける。ここで時間を変化させる要因として速さの違いと周長のずれがあることを示している。ここでいう周長のずれとはリングが物理的に伸び縮みするわけではなく、粒子の飛行距離が変化するということである。今、運動量 $p = mc\gamma\beta$ を導入すると

$$\frac{dp}{d\beta} = mc\gamma + mc\beta \frac{d\gamma}{d\beta} = p \frac{\gamma^2}{\beta} \quad (2-7)$$

$$\frac{d\beta}{\beta} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{dp}{p} \quad (2-8)$$

である。また、モーメントム・コンパクション(運動量縮約率)、 α_p を

$$\frac{dC}{C} = \alpha_p \frac{dp}{p} \quad (2-9)$$

と定義する。以上より周回時間の変化の割合は

$$\frac{dT}{T} = \left(\alpha_p - \frac{1}{\gamma^2} \right) \frac{dp}{p} \quad (2-10)$$

$$= \eta_s \frac{dp}{p} = \frac{\eta_s}{\beta^2} \frac{dE}{E} \quad (2-11)$$

と表現することができる。運動量とエネルギーの変換には式(1-4)と式(1-5)を用いた。ここで

$$\eta_s = \alpha_p - \frac{1}{\gamma^2} \quad (2-12)$$

はスリップ因子(slip factor)と呼ばれる。モーメントム・コンパクションは正負のどちらの量も取ることができるが、多くの加速器の場合、正の量で、1よりもずっと小さい。したがって、スリップ因子は

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\alpha_p}} \quad (2-13)$$

を境に正負の符号が変わる。このときのエネルギーを遷移エネルギーと呼ぶ。つまり、遷移エネルギーよりも小さいエネルギーの場合、 $\eta_s < 0$ なので運動量が大いほどリング1周にかかる時間が短くなる。逆に、遷移エネルギーよりも大きいエネルギーの場合、 $\eta_s > 0$ なので運動量が大いほどリング1周にかかる時間が長くなる。電子リングのほとんどの場合、遷移エネルギーよりも大きなエネルギー領域を考えることになる。したがって、電子の速度はほぼ光速に近く一定であ

り、基準粒子よりも大きな運動量を持った粒子はリングを大まわりすることにより1周にかかる時間が増えると解釈することができる。逆に、基準粒子よりも運動量の小さな粒子はリングを小まわりすることにより1周にかかる時間が減ることになる。

2.2 位相安定性の原理

電子がリング1周でシンクロトロン放射光を放出することによって失うエネルギーを U_0 とすると、これを高周波加速空洞によって補うためには

$$\Delta E = eV_c \sin(2\pi f_{rf}t) - U_0 \quad (2-14)$$

$$= eV_c \sin \phi - U_0 = 0 \quad (2-15)$$

でなければならない。 $f_{rf} = \omega_{rf}/2\pi$ は rf 周波数である。この時の位相 ϕ を同期位相と呼び1周期当たり2回現れる。但し、一方は安定位相で、他方は不安定位相となる。ここで基準粒子と同じエネルギーを持った電子が高周波加速空洞に遅れて通過する場合を考える。ここでは遷移エネルギーよりも大きなエネルギー領域とする。図1の $\phi_s(\text{stable})$ の位置から少し遅れた場合、図2の(1)を考える。電子が空洞から受け取るエネルギーは U_0 より少ないことになりエネルギーは次第に下がっていき、つまりリング1周する時間が短くなっていく。基準粒子と同じ位相に来たときエネルギーは基準粒子よりも低くなっている(2)。さらに1周する時間が短くなると電子が空洞から受け取るエネルギーは U_0 より多くなり、エネルギーは基準粒子と等しくなる(3)。しかし位相は進んでいるので、さらにエネルギーを受け取ることになり、リング1周する時間が長くなっていき基準粒子と同じ位相となる(4)。しかし、エネルギーは基準粒子よりも大きいので、位相は遅れていき空洞から受け取るエネルギーも減少してエネルギーも基準粒子と等しくなる(1)。このように同期位相、基準粒子のエネルギーから、わずかにずれた粒子は位相振動、エネルギー振動をするだけで安定な運動をする。このメカニズムのことを「位相安定性の原理」と呼ぶ。このように粒子の位相すなわち進行方向の位置とエネルギーを交換する力学的運動をシンクロトロン振動と呼ぶ。ま

た、図1の $\phi_s(\text{unstable})$ 近傍を考えると位相安定性の原理が働かないことがわかる。なぜなら、位相の遅れた粒子はさらに空洞からエネルギーを受け取りさらに位相が遅れていくからである。ちなみに、遷移エネルギーより小さなエネルギーでは図中の $\phi_s(\text{stable})$ と $\phi_s(\text{unstable})$ の位置が入れ替わる。

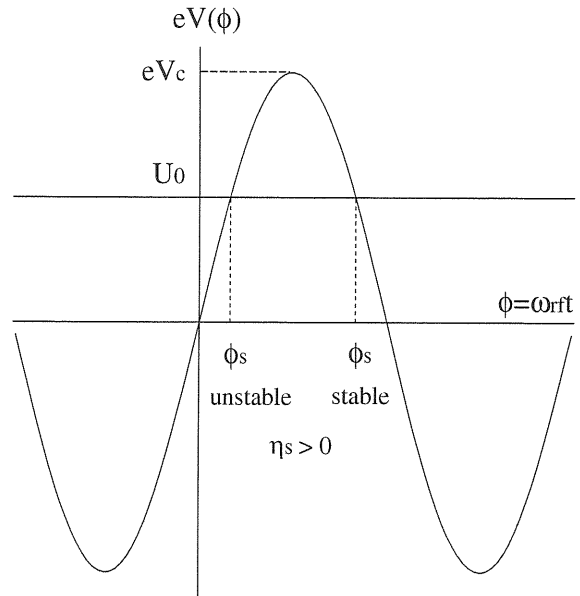


図1: 同期位相。遷移エネルギーよりも大きなエネルギー領域の場合。

基準粒子の位相 ϕ_s からずれた位相 ϕ である粒子を考える。実際にはシンクロトロン放射によって失うエネルギーは電子のエネルギーに依存するものであるがここでは U_0 は粒子のエネルギーに依存せず一定であると仮定する。この粒子のリング1周の間のエネルギー変化は

$$\Delta E = eV_c \sin \phi - U_0 \quad (2-16)$$

$$= eV_c \sin \phi - eV_c \sin \phi_s \quad (2-17)$$

である。さて、位相の時間変化は式(2-11)にrf角周波数を掛けて

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_{rf} \frac{\Delta T}{T_0} = \omega_{rf} \eta_s \frac{\Delta p}{p_0} = \frac{\omega_{rf} \eta_s}{\beta^2} \frac{\Delta E}{E_0} \quad (2-18)$$

と与えられる。ここで基準粒子の運動量を p_0 、エネルギーを E_0 、周回時間を T_0 した。 T_0 はシンクロトロン振動の周期よりも十分短いので位相の時

間についての二階微分は、式 (2-17) を代入して

$$\begin{aligned}\frac{d^2\phi}{dt^2} &= \frac{1}{T_0} \frac{d\phi}{dt} = \frac{\omega_{rf}\eta_s}{\beta^2 E_0 T_0} \Delta E \\ &= \frac{\omega_{rf}\eta_s e V_c}{\beta^2 E_0 T_0} (\sin\phi - \sin\phi_s) \quad (2-19)\end{aligned}$$

となる。

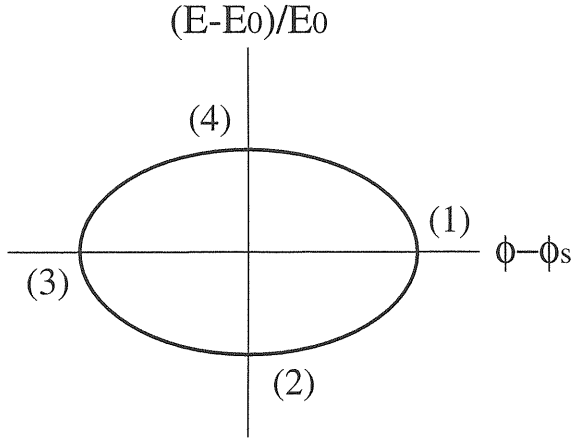


図 2: 微小位相振動の様子。

2.3 微小振幅のシンクロトロン振動

微小振動の場合、位相の小さなずれを $\Delta\phi$ とすると位相は

$$\phi = \phi_s + \Delta\phi \quad (2-20)$$

と書ける。したがって、式 (2-19) は $\Delta\phi$ についてテーラー展開して一次の項まで取ると

$$\begin{aligned}\frac{d^2\Delta\phi}{dt^2} &= \frac{\omega_{rf}\eta_s e V_c}{\beta^2 E_0 T_0} \{\sin(\phi_s + \Delta\phi) - \sin\phi_s\} \\ &\simeq -\frac{e V_c \omega_{rf}\eta_s (-\cos\phi_s)}{\beta^2 E_0 T_0} \Delta\phi \\ &= -\omega_s^2 \Delta\phi \quad (2-21)\end{aligned}$$

となる。これが微小振幅の場合のシンクロトロン振動の運動方程式となる。このとき

$$\omega_s = 2\pi f_s = 2\pi f_0 \nu_s \quad (2-22)$$

で f_s をシンクロトロン周波数、 ν_s をシンクロトロン・チューンと呼ぶ。シンクロトロン・チューンはリング一周のうちに何回シンクロトロン振動

するかを表す。 $\eta_s(-\cos\phi_s)$ は常に正なのでシンクロトロン・チューンは虚数になることはない。

また、微小振幅の場合のシンクロトロン振動の運動方程式は調和振動子と同様のものなので、その解は

$$\Delta\phi = \frac{\omega_{rf}\eta_s}{\omega_s} \sqrt{2J_z} \cos(\omega_s t + \theta_0) \quad (2-23)$$

$\delta = \Delta p/p_0$ を定義すると、式 (2-18)、式 (2-20) より

$$\delta = -\sqrt{2J_z} \sin(\omega_s t + \theta_0) \quad (2-24)$$

である。ここで J_z 、 θ_0 は初期条件によって決まるパラメータである。これらより

$$2J_z = \left(\frac{\omega_s}{\omega_{rf}\eta_s}\right)^2 (\Delta\phi)^2 + \delta^2 \quad (2-25)$$

なる保存量を定義することができる。これは図 2 に示すような $\Delta\phi - \delta$ の位相平面で楕円を表す。シンクロトロン振動は、スリップ因子が正の場合、位相点は楕円上を時計周りに回り、スリップ因子が負の場合、位相点は反時計周りに回ることに対応する。

2.4 大振幅のシンクロトロン振動

あらためて式 (2-19) を書くと

$$\begin{aligned}\frac{d^2\phi}{dt^2} &= -\frac{\omega_{rf}\eta_s e V_c}{\beta^2 E_0 T_0} (\sin\phi - \sin\phi_s) \\ &= -\frac{d\Phi(\phi)}{d\phi} \quad (2-26)\end{aligned}$$

である。上式の左辺を変位の二階微分、右辺を力と見なすと、これはニュートンの運動方程式である。

力を積分することによってポテンシャルは

$$\begin{aligned}\Phi(\phi) &= \frac{\omega_{rf}\eta_s e V_c}{\beta^2 E_0 T_0} \int_{\phi_s}^{\phi} (\sin\phi - \sin\phi_s) d\phi \\ &= \frac{\omega_{rf}\eta_s e V_c}{\beta^2 E_0 T_0} \{\cos\phi_s - \cos\phi \\ &\quad -(\phi - \phi_s) \sin\phi_s\} \quad (2-27)\end{aligned}$$

と表せる。また式 (2-26) の両辺に $d\phi/dt$ を掛けて t で積分すると

$$\int \frac{d\phi}{dt} \frac{d^2\phi}{dt^2} dt = - \int \frac{d\Phi(\phi)}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} dt \quad (2-28)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 = -\Phi(\phi) + W_0 \quad (2-29)$$

なので

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \Phi(\phi) = W_0 \quad (2-30)$$

ここで W_0 はある定数である。この式の意味するところは運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーの和が一定であるということである。つまり系の全エネルギーは保存する。また、式 (2-18) より δ を使って書くと

$$\frac{1}{2} \omega_{rf}^2 \eta_s^2 \delta^2 + \Phi(\phi) = W_0 \quad (2-31)$$

となる。図 3 に異なる W_0 を持つ粒子の軌跡を示す。

安定な振動のうち最大となるポテンシャル・エネルギーを求めてみる。それは $d\Phi(\phi)/d\phi = 0$ かつ $\delta = 0$ となる位相

$$\phi_1 = \pi - \phi_s \quad (2-32)$$

の時である。したがって

$$\begin{aligned} \Phi(\phi_1) &= \frac{\omega_{rf} \eta_s e V_c}{\beta^2 E_0 T_0} \{ \cos \phi_s - \cos(\pi - \phi_s) \\ &\quad - (\pi - 2\phi_s) \sin \phi_s \} \\ &= \frac{\omega_{rf} \eta_s U_0}{\beta^2 E_0 T_0} 2 \left\{ q \cos \phi_s - \left(\frac{\pi}{2} - \phi_s \right) \right\} \\ &= \frac{\omega_{rf} \eta_s U_0}{\beta^2 E_0 T_0} F(q) \end{aligned} \quad (2-33)$$

が最大値 Φ_{max} を取る。ここで、

$$q \equiv \frac{e V_c}{U_0} = \frac{1}{\sin \phi_s} \quad (2-34)$$

$$F(q) = 2 \left\{ \sqrt{q^2 - 1} - \cos^{-1} \left(\frac{1}{q} \right) \right\}$$

と置いた。 q は overvoltage factor と呼ばれ、関数 $F(q)$ は energy aperture function と呼ばれる。こ

れらより取り得る最大エネルギーは $W_0 = \Phi_{max}$ の時で

$$\begin{aligned} \delta_{max} &= \sqrt{\frac{2\Phi_{max}}{\omega_{rf}^2 \eta_s^2}} \\ &= \sqrt{\frac{2U_0 F(q)}{\omega_{rf} \eta_s \beta^2 E_0 T_0}} \\ &= \sqrt{\frac{U_0 F(q)}{\pi h \eta_s \beta^2 E_0}} \end{aligned} \quad (2-35)$$

となり、 δ_{max} は rf bucket height と呼ばれる。この rf bucket からこぼれた粒子は、もはや安定にリングを周回できなくなる。

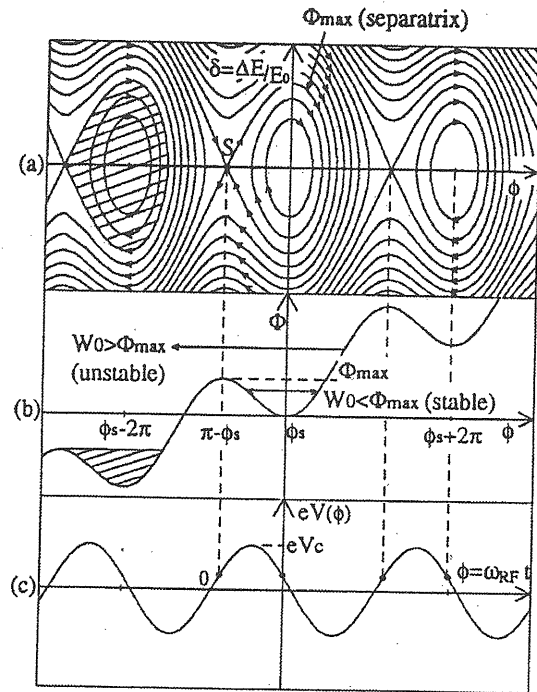


図 3: セパトトリックス (separatrix)。

3 横方向のビーム力学

The Strong-Focusing Synchrotron -New High Energy Accelerator-

Strong focusing forces result from the alternation of large positive and negative n-values in successive sectors of the magnetic guide field in a synchrotron. This sequence of alternately converging and diverging magnetic lenses of equal

strength is itself converging, and leads to significant reductions in oscillation amplitude, both for radial and axial displacements.

E. D. Courant, M. S. Livingston, H. S. Snyder
 “Phys. Rev. 88, 1190-1196 (1952)”

3.1 強収束の原理

長さ L の直線的なビームラインを考える。このビームラインの先頭から $L/4$ 離れたところに発散タイプの四極磁石、それから $L/2$ 離れて収束タイプの四極磁石を置く。収束四極磁石は光学系のレンズで言えば凸レンズに対応し、発散四極磁石は光学系のレンズで言えば凹レンズに対応する。これらの四極磁石の焦点距離は等しく f であるものとする。

一般に力学運動は位相点の正準変換と見なすことができるので、ビームラインの入口での位相点を $\vec{x}_1 = (x_1, x_1')$ 、および出口での位相点を $\vec{x}_2 = (x_2, x_2')$ とすると

$$\vec{x}_2 = M\vec{x}_1 \quad (3-1)$$

と表せる。この時、 M を転送行列と呼ぶ。ビームラインは区分的に考えることができるので、ビームライン1とビームライン2を繋ぎ合わせたビームラインの転送行列は、ビームライン1とビームライン2の転送行列の積として表すことができる。

さて、先ほどの2台の四極磁石を並べたビームラインの転送行列は収束四極磁石、ドリフト空間、発散四極磁石、ドリフト空間のそれぞれの転送行列の積で表される。ここでは四極磁石の厚みは無視するという近似を行う (thin lens 近似)。収束四極磁石の転送行列は焦点距離 f の凸レンズであるから

$$M_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad (3-2)$$

である。また、発散四極磁石の転送行列は焦点距離 f の凹レンズであるから

$$M_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad (3-3)$$

である。一方、ドリフト空間は何もない空間で、長さを $L/4$ とすると

$$M_O = \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3-4)$$

である。したがって、発散磁石と収束磁石の置かれた長さ L のビームラインの転送行列は

$$\begin{aligned} M &= M_O M_F M_O M_O M_D M_O \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{L}{2f} - \frac{L^2}{8f^2} & L - \frac{L^3}{32f^2} \\ -\frac{L}{2f^2} & 1 - \frac{L}{2f} - \frac{L^2}{8f^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3-5)$$

となる。まず、この転送行列の2行1列成分の符号に着目して欲しい。これは、まさしく収束四極磁石の2行1列成分の符号と同じになっている。これが何を意味するのかというと、収束四極磁石と発散四極磁石を規則正しく交互に並べたビームラインは全体的に収束作用を持つということである。磁石によるレンズは水平方向が収束なら垂直方向は発散作用を持つところが普通の光学レンズとは異なる。強収束の原理は、このアイデアを基礎としている。現在、強収束の原理は世界中の加速器で応用されている。

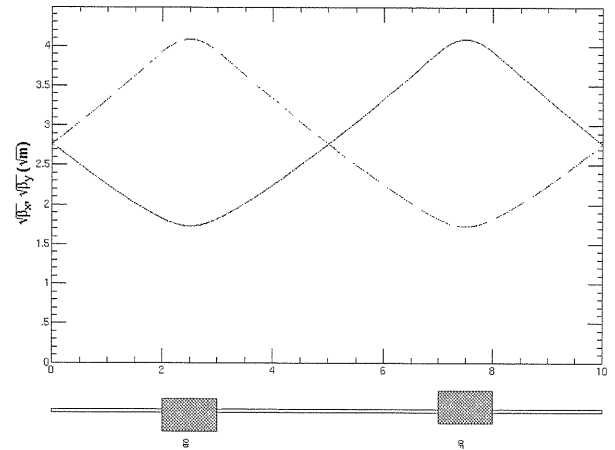


図 4: FODO ラティス (1 セル)。

収束四極磁石と発散四極磁石を交互に並べたビームラインは FODO ラティスと呼ばれる。今、この FODO ラティスを無限個並べたビームラインを考える。この場合、一つの FODO ラティスはセルと呼ばれ、一つのセルの長さは L である。ある位相点の粒子がこのビームラインによって安定に輸送されるためには転送行列のトレースの絶

対値が2以下になっていなければならないという事実がある。つまり、

$$\left| 2 - \frac{L^2}{4f^2} \right| \leq 2 \quad (3-6)$$

でなければならない。これを簡単に書くと

$$f \geq \frac{L}{4} \quad (3-7)$$

となり、焦点距離はセル長の四分の一より長くしなければならない。

磁石の収束、発散を表すパラメータとして k 値というものがよく使われる。これは焦点距離の逆数として定義され、 $k = 1/f$ である。 k 値を使って式 (3-5) の転送行列を表すと

$$M = \begin{pmatrix} 1 + \frac{kL}{2} - \frac{k^2 L^2}{8} & L - \frac{k^2 L^3}{32} \\ -\frac{k^2 L}{2} & 1 - \frac{kL}{2} - \frac{k^2 L^2}{8} \end{pmatrix} \quad (3-8)$$

となる。

3.2 ベータトロン振動

ハミルトニアンを

$$H = \frac{p_x^2}{2} + \frac{k}{2} x^2 \quad (3-9)$$

とする。 x は荷電粒子の横方向の変位、 p_x は正準運動量である。ここで x は水平方向の x 座標または垂直方向の y 座標を代表して表すものとする。運動方程式はハミルトン方程式

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\partial H}{\partial p_x} \quad (3-10)$$

$$\frac{dp_x}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (3-11)$$

より

$$\frac{d^2 x(s)}{ds^2} = -k(s)x(s) \quad (3-12)$$

と導かれる。基準粒子の速さを v 、時間を t とすると、 $s = vt$ であり加速器のある場所を示す。これはベータトロン振動の運動方程式と呼ばれる。 $k(s)$ は加速器中の磁場を表し場所の関数である。ベータトロン振動の運動方程式の解は

$$x(s) = A\omega(s) \cos \psi(s) + B\omega(s) \sin \psi(s) \quad (3-13)$$

と書ける。 A, B は運動の初期値によって決定される定数である。以後、 A, B を除いて現れるほとんどのパラメータは s の関数なので引数 s を省略する。しばしば、荷電粒子の運動量は $p_x = p_x/p_0 \simeq dx/ds$ と表現される。式 (3-13) から

$$\begin{aligned} x' &= A(\omega' \cos \psi - \omega \psi' \sin \psi) \\ &\quad + B(\omega' \sin \psi + \omega \psi' \cos \psi) \end{aligned} \quad (3-14)$$

である。今、 $s = s_2$ での位相点 (x_2, x_2') を書き表すと

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \omega_2 \cos \psi_2 & \\ \omega_2' \cos \psi_2 - \omega \psi_2' \sin \psi_2 & \\ & \omega_2 \sin \psi_2 \\ & \omega_2' \sin \psi_2 + \omega_2 \psi_2' \cos \psi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \omega_2 & 0 \\ \omega_2' & \omega_2 \psi_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi_2 & \sin \psi_2 \\ -\sin \psi_2 & \cos \psi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。また、 $s = s_1$ での位相点 (x_1, x_1') も同様に書き表せ、これらより定数 (A, B) を消去すると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \omega_2 & 0 \\ \omega_2' & \omega_2 \psi_2' \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} \cos \psi_2 & \sin \psi_2 \\ -\sin \psi_2 & \cos \psi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi_1 & \sin \psi_1 \\ -\sin \psi_1 & \cos \psi_1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ \omega_1' & \omega_1 \psi_1' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \omega_2 & 0 \\ \omega_2' & \omega_2 \psi_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Delta\psi & \sin \Delta\psi \\ -\sin \Delta\psi & \cos \Delta\psi \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ \omega_1' & \omega_1 \psi_1' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。これは簡単に書くと3つの行列の積による変換

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} = T_2^{-1} R_{21} T_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}$$

によって表現される。この3つの行列の積は、まさに転送行列である。ここで $\Delta\psi = \psi_2 - \psi_1$ とおいた。位相空間における回転角 $\Delta\psi$ をベータトロン位相の進み (betatron phase advance) と呼ぶ。位相の進みは $2n\pi$ の不定性があるが s に対して単調増加するように取られるのが通常である。 R_{21}

は位相空間における回転を表し T_1 、 T_2 は実座標から基準座標への変換を表している。転送行列がシンプレクティック行列であることから、 R_{21} 、 T_1 、 T_2 はいずれもシンプレクティック行列なので $\det T_1 = 1$ 、 $\det T_2 = 1$ より

$$\begin{aligned}\omega_1^2 \psi_1' &= 1 \\ \omega_2^2 \psi_2' &= 1\end{aligned}$$

という条件を得る。よって一般的に

$$\psi' = \frac{1}{\omega^2} \quad (3-15)$$

である。式 (3-15) より位相の進み $\Delta\psi$ は普通の単振動とは異なり位相空間における回転は独立変数 s に対して一様に進むわけではない。 ω は s の関数である。

逆行列を書き直すと、転送行列は

$$\begin{aligned}T_2^{-1}R_{21}T_1 &= \begin{pmatrix} \omega_2 \psi_2' & 0 \\ -\omega_2' & \omega_2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &\times \begin{pmatrix} \cos \Delta\psi & \sin \Delta\psi \\ -\sin \Delta\psi & \cos \Delta\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \psi_1' & 0 \\ -\omega_1' & \omega_1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。ここで変数を

$$\beta(s) = \omega^2(s) \quad (3-16)$$

$$\alpha(s) = -\omega(s)\omega'(s) \quad (3-17)$$

とおくと転送行列は、 $\omega = \sqrt{\beta}$ 、 $\omega\psi' = 1/\sqrt{\beta}$ 、 $-\omega' = \alpha/\sqrt{\beta}$ より

$$\begin{aligned}T_2^{-1}R_{21}T_1 &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\beta_2} & 0 \\ \alpha_2/\sqrt{\beta_2} & \sqrt{\beta_2} \end{pmatrix}^{-1} \times \\ &\begin{pmatrix} \cos \Delta\psi & \sin \Delta\psi \\ -\sin \Delta\psi & \cos \Delta\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\beta_1} & 0 \\ \alpha_1/\sqrt{\beta_1} & \sqrt{\beta_1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}}(\cos \Delta\psi + \alpha_1 \sin \Delta\psi) \\ -\frac{1+\alpha_2\alpha_1}{\sqrt{\beta_2\beta_1}} \sin \Delta\psi + \frac{\alpha_1-\alpha_2}{\sqrt{\beta_2\beta_1}} \cos \Delta\psi \\ \sqrt{\beta_2\beta_1} \sin \Delta\psi \\ \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}}(\cos \Delta\psi - \alpha_2 \sin \Delta\psi) \end{pmatrix} \\ &\equiv M_{21} \quad (3-18)\end{aligned}$$

となる。 β と α は Twiss パラメータと呼ばれる。また式 (3-15) は Twiss パラメータを用いて

$$\psi'(s) = \frac{1}{\beta(s)} \quad (3-19)$$

と書き表せる。やはり β が場所の関数であるために β が小さいところでは位相の進みは大きく逆に β が大きいところでは位相の進みは小さい。そして α は β の s に対する変化分を表し

$$\alpha(s) = -\frac{1}{2} \frac{d\beta(s)}{ds} \quad (3-20)$$

である。また α はこの運動がどれくらい調和振動子からずれているかを表している。

M_{21} は $s = s_1$ から $s = s_2$ への転送行列であるが、周期の長さを C として周期条件

$$\begin{aligned}\beta(s+C) &= \beta(s) \\ \alpha(s+C) &= \alpha(s) \\ \psi(s+C) &= \psi(s)\end{aligned}$$

がある場合、転送行列 M は

$$M = \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu & \beta \sin \mu \\ -\gamma \sin \mu & \cos \mu - \alpha \sin \mu \end{pmatrix} \quad (3-21)$$

となる。ここで

$$\gamma \equiv \frac{1+\alpha^2}{\beta} \quad (3-22)$$

と定義した。 μ は一周分位の位相の進みであり

$$\begin{aligned}\mu &= \psi(s+C) - \psi(s) \\ &= \int_s^{s+C} \frac{ds}{\beta(s)}\end{aligned} \quad (3-23)$$

である。また μ は

$$\mu = 2\pi\nu \quad (3-24)$$

と書き表され ν はベータトロン振動数またはベータトロン・チューン (betatron tune) と呼ばれる。ベータトロン・チューンは加速器において最も重要なパラメータの一つであり、

$$\begin{aligned}\nu &= \frac{\mu}{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_s^{s+C} \frac{ds}{\beta(s)}\end{aligned} \quad (3-25)$$

である。当然、それぞれのモードにおいてベータトロン・チューンは存在し、 x 方向については ν_x 、 y 方向については ν_y と表される。

Twissパラメータを使って式(3-13)と(3-14)を書いてみると

$$\begin{aligned} x(s) &= \sqrt{2J_x\beta(s)} \cos(\psi(s) + \psi_0) \\ x'(s) &= -\sqrt{\frac{2J_x}{\beta(s)}} \{ \alpha(s) \cos(\psi(s) + \psi_0) \\ &\quad + \sin(\psi(s) + \psi_0) \} \\ &= -\sqrt{2J_x\gamma(s)} \sin(\psi(s) + \psi_0) \end{aligned} \quad (3-26)$$

となる。ここで J_x と ψ_0 は初期条件によって決まる定数である。このようなビームの進行方向と垂直な平面での運動はベータatron振動と呼ばれている。

3.3 クーラン・シュナイダー不変量

実座標から基準座標への行列 T による変換

$$\begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\beta} & 0 \\ \alpha/\sqrt{\beta} & \sqrt{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} \quad (3-27)$$

を施すと (X, P) のビームラインに沿った変換は位相空間における回転であり、その軌跡は円を描く。ここで $p = x'$ 、 $P = X'$ と置いた。したがって、基準座標の運動は新しい座標 ψ と運動量 J を使って

$$X = a(J) \cos(\psi + \psi_0) \quad (3-28)$$

$$P = -a(J) \sin(\psi + \psi_0) \quad (3-29)$$

の形に書ける。これらの式を一つにまとめると

$$P = -X \tan(\psi + \psi_0) \quad (3-30)$$

となる。これを X で積分して基準座標における (X, P) から新しい正準変数 (ψ, J) への正準変換(シンプレクティック変換)を表す母関数

$$F(X, \psi) = -\frac{X^2}{2} \tan(\psi + \psi_0) \quad (3-31)$$

を使うことにする。この最も簡単な形をした母関数による変換式は

$$\begin{aligned} P &= \frac{\partial F}{\partial X} \\ &= -X \tan(\psi + \psi_0) \end{aligned} \quad (3-32)$$

$$\begin{aligned} J &= -\frac{\partial F}{\partial \psi} \\ &= \frac{X^2}{2 \cos^2(\psi + \psi_0)} \end{aligned} \quad (3-33)$$

$$= \frac{1}{2}(X^2 + P^2) \quad (3-34)$$

となる。式(3-34)より J は明らかに (X, P) が位相空間に描く円の面積を 2π で割ったものであり s に依らず一定である。また J は

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint P dX \quad (3-35)$$

で定義され、作用変数(action variable)と呼ばれる。一方、 J に正準共役な変数 ψ は角変数(angle variable)と呼ばれる。ところで式(3-34)で振幅の二乗和

$$2J = X^2 + P^2 \quad (3-36)$$

$$= \gamma x^2 + 2\alpha xp + \beta p^2 \quad (3-37)$$

は正準不変量であり、 $2J$ をクーラン・シュナイダー不変量(Courant-Snyder invariant)と呼ぶ。クーラン・シュナイダー不変量を用いて (X, P) を書き表すと式(3-33)と式(3-30)より

$$X = \sqrt{2J} \cos(\psi + \psi_0) \quad (3-38)$$

$$P = -\sqrt{2J} \sin(\psi + \psi_0) \quad (3-39)$$

となる。また $W = 2J$ として実座標で書き表すとベータatron振動の式(3-26)と一致する。これは (ψ, J) から (X, P) または (x, p) へのシンプレクティック変換と見なすことができる。

正準変換により新しいハミルトニアン K は母関数 F が s を陽に含んでいないので

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial s} \quad (3-40)$$

$$= H \quad (3-41)$$

である。またハミルトン方程式は

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{\partial K}{\partial J} \quad (3-42)$$

$$\frac{dJ}{ds} = -\frac{\partial K}{\partial \psi} \quad (3-43)$$

である。 J はやはり s に依らず一定であるから、式(3-43)より

$$\frac{\partial K}{\partial \psi} = 0 \quad (3-44)$$

である。 $\psi' = 1/\beta$ を用いて式(3-42)より新しいハミルトニアンは重要でない定数項を除いて

$$K = J \frac{d\psi}{ds} = \frac{J}{\beta(s)} \quad (3-45)$$

と書ける。

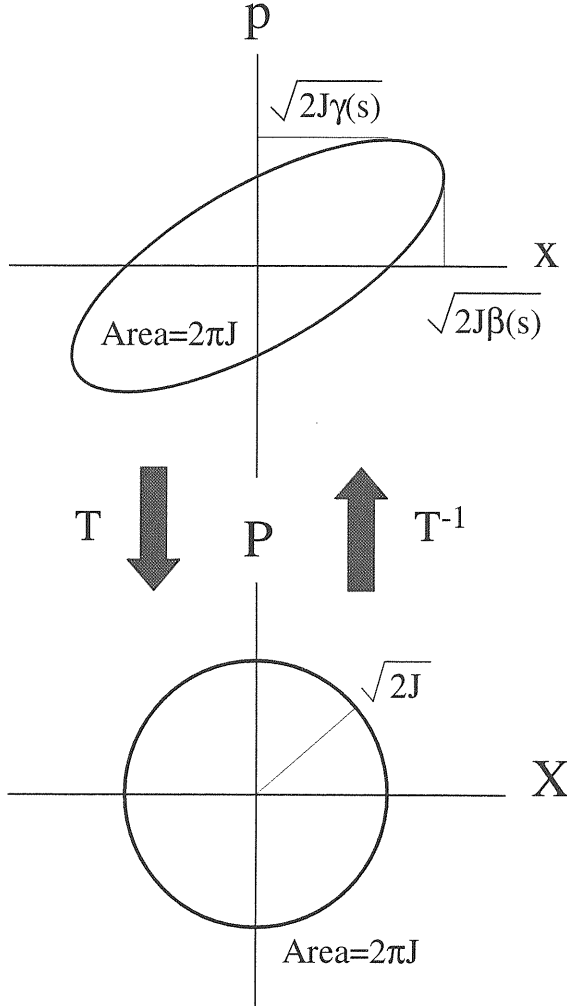


図 5: 実座標 (上) と基準座標 (下) の位相空間における楕円と円。

次に、一定の J を持ち、様々な初期位相 ψ_0 を持つ粒子の集まりを考える。図 5 のように、粒子の集まりは基準座標の位相空間では半径 $\sqrt{2J}$ の円周上に分布し、実座標については s によって形が決まる楕円の周上に分布する。基準座標の位相空間における円の面積と実座標の位相空間における楕円の面積は等しく $2\pi J$ で s に依らず一定である。さて、一般的に分布しているビームに対してエミッタンス (emittance) を定義する。まず一

次元の場合、 x^2 、 xp 、 p^2 の全粒子の平均値を用いて次のような行列を考える。

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \langle x^2 \rangle & \langle xp \rangle \\ \langle xp \rangle & \langle p^2 \rangle \end{pmatrix} \quad (3-46)$$

Σ はエンベロープと呼ばれる。エミッタンス ϵ を

$$\begin{aligned} \epsilon &\equiv \sqrt{\det \Sigma} \\ &= \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle p^2 \rangle - \langle xp \rangle^2} \end{aligned} \quad (3-47)$$

と定義する。 $s = s_1$ におけるエンベロープを Σ_1 、 $s = s_2$ におけるエンベロープを Σ_2 とすると s_1 から s_2 への転送行列 M によって

$$\Sigma_2 = M \Sigma_1 M^T \quad (3-48)$$

のように変換される。それでは $\det \Sigma_2$ に J を掛けたものは

$$\begin{aligned} \det \Sigma_2 J &= \Sigma_2^T J \Sigma_2 \\ &= (M \Sigma_1 M^T)^T J M \Sigma_1 M^T \\ &= M \Sigma_1^T M^T J M \Sigma_1 M^T \\ &= M \Sigma_1^T J \Sigma_1 M^T \\ &= \det \Sigma_1 M J M^T \\ &= \det \Sigma_1 J \end{aligned} \quad (3-49)$$

となり、シンプレクティック変換の不変量であることがわかる。ここで転送行列 M はシンプレクティック条件を満たすこと、一般に 2×2 行列 X は $\det X J = X^T J X$ となることを用いた。 2×2 行列がシンプレクティックであることと $\det X = 1$ は同値である。ビームラインの入口でエンベロープを

$$\Sigma_0 = \epsilon \begin{pmatrix} \beta_0 & -\alpha_0 \\ -\alpha_0 & \gamma_0 \end{pmatrix} \quad (3-50)$$

つまり

$$\begin{aligned} \langle x_0^2 \rangle &= \epsilon \beta_0 \\ \langle p_0^2 \rangle &= \epsilon \gamma_0 \\ \langle x_0 p_0 \rangle &= -\epsilon \alpha_0 \end{aligned} \quad (3-51)$$

と決めると

$$\beta_0 \gamma_0 - \alpha_0^2 = 1 \quad (3-52)$$

なのでエミッタンスの定義式(3-47)を満たす。基準座標においてもエンベロープは

$$\bar{\Sigma}_0 = \epsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3-53)$$

であり

$$\begin{aligned} \langle X_0^2 \rangle &= \epsilon \\ \langle P_0^2 \rangle &= \epsilon \\ \langle X_0 P_0 \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (3-54)$$

という関係が得られる。 s に対する変換は位相空間内の回転であるから任意の場所 s で

$$\begin{aligned} \langle X^2 \rangle &= \epsilon \\ \langle P^2 \rangle &= \epsilon \\ \langle XP \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (3-55)$$

が成り立つ。したがって実座標においても

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \epsilon\beta(s) \\ \langle p^2 \rangle &= \epsilon\gamma(s) \\ \langle xp \rangle &= -\epsilon\alpha(s) \end{aligned} \quad (3-56)$$

と表される。これはビームラインの入口で Twiss パラメータを式(3-51)のように選んだ結果である。また、実座標と基準座標は式(3-27)のように Twiss パラメータで結ばれているので基準座標を式(3-51)のように選んだ結果とも言える。このような基準座標はビームと適合(match)していると呼ばれる。

粒子の分布がガウス分布であると見なせる場合、分布関数は

$$\Psi(X, P) = \frac{1}{2\pi\epsilon} \exp\left(-\frac{X^2 + P^2}{2\epsilon}\right) \quad (3-57)$$

と書ける。 X^2 、 XP 、 P^2 の期待値は分布関数を掛けて積分することによって求まる。したがって、

$$\begin{aligned} \langle X^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X^2 \Psi(X, P) dX dP \\ &= \epsilon \\ \langle P^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P^2 \Psi(X, P) dX dP \\ &= \epsilon \\ \langle XP \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} XP \Psi(X, P) dX dP \\ &= 0 \end{aligned}$$

を得る。作用変数 J の期待値は、式(3-36)より

$$\begin{aligned} \langle J \rangle &= \frac{1}{2}(\langle X^2 \rangle + \langle P^2 \rangle) \\ &= \epsilon \end{aligned} \quad (3-58)$$

である。これより作用変数 J の期待値はエミッタンスを表していることがわかる。また、実座標の位相空間における x^2 、 p^2 、 xp の期待値は上式より式(3-56)を得る。やはり、ここでも作用変数 J の期待値はエミッタンスを表している。さて式(3-56)で $\langle x^2 \rangle$ は平均値 0 からのずれの二乗平均なので分散である。標準偏差は

$$\sigma_x(s) = \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{\epsilon\beta(s)} \quad (3-59)$$

である。したがって、ビームサイズを小さくしたければエミッタンス、 $\beta(s)$ を小さくすれば良い。電子・陽電子貯蔵リングの場合、ガウス分布の標準偏差をビームサイズと呼びビームサイズの二乗をベータ関数で割ったものをエミッタンスと呼んでいる。線形加速器や陽子ビームの場合、位相平面で 90 % の粒子が占める面積をもってエミッタンスと呼んでいる場合があるので注意を要する。

3.4 分散

運動量の基準粒子からのずれのある粒子を考える。この場合、横方向の運動方程式は

$$\frac{d^2x}{ds^2} + k(s)x = \frac{1}{\rho(s)}\delta \quad (3-60)$$

である。但し、 $\delta = \Delta p/p_0$ 。この方程式の解は

$$x(s) = C(s)x_1 + S(s)x'_1 + D(s)\delta_1 \quad (3-61)$$

また、軌道の傾きは

$$x'(s) = C'(s)x_1 + S'(s)x'_1 + D'(s)\delta_1 \quad (3-62)$$

と表すことができる。 x_1 、 x'_1 、 δ_1 は初期条件によって決まる。これを行列で書くと

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(s) & S(s) & D(s) \\ C'(s) & S'(s) & D'(s) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix}$$

ここで、分散関数、 $\eta(s)$ を

$$x(s) = \eta(s)\delta \quad (3-63)$$

のように、運動量が100%ずれた粒子の軌道であると定義し、周期条件を仮定する。つまり、

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(s) & S(s) & D(s) \\ C'(s) & S'(s) & D'(s) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \\ 1 \end{pmatrix}$$

を考える。または少し変形して

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(s) & S(s) \\ C'(s) & S'(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D(s) \\ D'(s) \end{pmatrix}$$

という二連の連立方程式となる。これを η 、 η' について解くと

$$\eta(s) = \frac{\{1 - S'(s)\}D(s) + S(s)D'(s)}{2(1 - \cos \mu)}$$

$$\eta'(s) = \frac{\{1 - C(s)\}D'(s) + C'(s)D(s)}{2(1 - \cos \mu)}$$

となる。ここで軌道は前節で述べたベータatron振動 x_β と運動量のずれの寄与 $x_p = \eta\delta$ の二つが考えられる。

$$x(s) = x_\beta(s) + x_p(s) \quad (3-64)$$

これと関連してビームサイズも

$$\sigma = \sqrt{\sigma_\beta^2 + (\eta\sigma_\delta)^2} \quad (3-65)$$

となる。ここで、 $\sigma_\delta = \sigma_p/p_0$ で σ_p は運動量の広がりを表す。

さて、モーメンタム・コンパクションは

$$\frac{\Delta C}{C} = \alpha_p \delta \quad (3-66)$$

と定義されている。基準粒子の飛行する周長は

$$C = \oint ds \quad (3-67)$$

で与えられる。また運動量のずれた粒子の周長も

$$C + \Delta C = \oint d\tilde{s} \quad (3-68)$$

で与えられる。しかし、加速器を周回する粒子の加速器上の回転角は両者共通であるから

$$d\theta = \frac{d\tilde{s}}{\rho + x_p} = \frac{ds}{\rho} \quad (3-69)$$

となり \tilde{s} から s への変換は

$$d\tilde{s} = \left(1 + \frac{x_p}{\rho}\right) ds \quad (3-70)$$

で与えられる。したがって、周長のずれは

$$\begin{aligned} \Delta C &= \oint \frac{x_p}{\rho} ds \\ &= \delta \oint \frac{\eta(s)}{\rho(s)} ds \end{aligned} \quad (3-71)$$

となる。 $x_p = \eta\delta$ を使った。結局、モーメンタム・コンパクションは

$$\alpha_p = \frac{1}{C} \oint \frac{\eta(s)}{\rho(s)} ds \quad (3-72)$$

と計算できる。

3.5 色収差 (クロマティシティ)

色収差とは粒子の運動量の違いによって収束力(焦点距離 = $1/k$)に差が生じることである。したがって、リングのある場所に

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k\delta & 1 \end{pmatrix} \quad (3-73)$$

という色収差による摂動が加わったものと一般的に考えることができる。運動量のずれのない周回転送行列に上の摂動が加わった新たな周回転送行列は

$$\begin{aligned} \tilde{M} &= \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu & \beta \sin \mu \\ -\gamma \sin \mu & \cos \mu - \alpha \sin \mu \end{pmatrix} \\ &\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k\delta & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3-74)$$

と表現できる。この周回転送行列のトレースは

$$\begin{aligned} \text{tr} \tilde{M} &= 2 \cos \mu + \delta k \beta \sin \mu \\ &= 2 \cos(\mu + \Delta\mu) \simeq 2(\cos \mu - \sin \mu \Delta\mu) \end{aligned} \quad (3-75)$$

なので、色収差によるベータatron・チューンのずれ(チューン・シフト)は

$$\Delta\mu = -\delta \frac{k(s)\beta(s)}{2} \quad (3-76)$$

となる。今まで一点についてのみ考えて来たがリング一周を考え、運動量のずれ当たりのベータトロン振動数のずれを色収差として

$$\xi_0 \equiv \frac{\Delta\nu}{\delta} = \frac{\Delta\mu}{2\pi\delta} = -\frac{1}{4\pi} \oint k(s)\beta(s)ds \quad (3-77)$$

と定義する。この量をクロマティシティと呼ぶことがある。特に、この色収差のことをナチュラル・クロマティシティと呼ぶ。

ナチュラル・クロマティシティは一般に水平、垂直方向ともに負の値となる。収束磁石の時は k の符号は正で、発散磁石の時は負の符号である。さらに、ベータ関数が高い場所に収束磁石を設置し、小さい場所に発散磁石を設置するためである。特に低エミッタンス・ラティスや衝突型リングの場合のように強い四極磁石を用いてベータ関数を絞るときはナチュラル・クロマティシティが負の大きな値となる。ナチュラル・クロマティシティが負の大きな値となるといくつかの問題が生じる。例えば、基準粒子のベータトロン・チューンを安定領域に設定したところで運動量のずれた粒子のベータトロン・チューンは最適値から大きくずれてしまって不安定領域に陥ってしまうかも知れない。これでは後で述べるダイナミック・アパーチャー (力学的口径) が狭いということになってしまう。別の問題としてはヘッド＝テイル不安定性というものがある。この不安定性はバンチ電流がある閾値を越えると現れ、バンチ前方の粒子で発生したウエーク場がバンチ後方の粒子に影響を及ぼしビームが不安定になる現象である。したがって、ナチュラル・クロマティシティを補正して色収差をゼロか少し正の値に持っていけば、これらの問題を抑制することができる。色収差の補正には分散のある場所に六極磁石を設置することによって補正する。基本的に収束四極磁石の近くには収束六極磁石 (SF) を、発散四極磁石の近くには発散六極磁石 (SD) を置く。六極磁石によるクロマティシティ補正は

$$\xi_{sext} = \frac{1}{4\pi} \oint k_2(s)\beta(s)\eta_x(s)ds \quad (3-78)$$

と書ける。ここで四極磁石と六極磁石の K 値を

$$K_1 = kL_Q = \frac{L_Q}{B\rho} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} \right) \quad (3-79)$$

$$K_2 = k_2L_S = \frac{L_S}{B\rho} \left(\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \right) \quad (3-80)$$

で定義する。 L_Q と L_S は四極、六極磁石の長さである。 K 値は水平方向に収束作用をもつ磁石の場合を正に取り、発散作用の磁石の場合を負に取ることにする。通常アーク部の複数のセルで同一の六極磁石を配置するため、共通した複数の六極磁石をファミリーと呼ぶ。SF と SD の二つのファミリーでクロマティシティをゼロになるように補正を行う場合、

$$\frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} \sum \beta_{x,SF} \eta_{x,SF} & \sum \beta_{x,SD} \eta_{x,SD} \\ -\sum \beta_{y,SF} \eta_{x,SF} & -\sum \beta_{y,SD} \eta_{x,SD} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} K_{2,SF} \\ K_{2,SD} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_{x0} \\ \xi_{y0} \end{pmatrix} = 0 \quad (3-81)$$

$$\begin{cases} \xi_{x0} = -\frac{1}{4\pi} \sum \beta_x K_1 \\ \xi_{y0} = \frac{1}{4\pi} \sum \beta_y K_1 \end{cases} \quad (3-82)$$

を解くことによって K_2 の値が得られる。

4 シンクロトロン放射

4.1 シンクロトロン振動の放射減衰

相対論領域にある電子が磁場 B で曲げられる時に放出する単位時間当たりのエネルギー (パワー) は

$$P_\gamma = \frac{2e^2 r_e \beta^2}{3(mc)^3} B^2 E^2 \quad (4-1)$$

で与えられる。電子の速さは、ほぼ光速であり $\beta \simeq 1$ なので、以後省略するものとする。 r_e は古典電子半径、 m は電子の質量、 E は電子のエネルギーである。したがって、電子がリング一周で失うエネルギーは

$$U(E) \propto B^2 E^2 \quad (4-2)$$

であり、今まで一定として来たが実は自身のエネルギーの二乗に比例する。今、基準粒子のエネルギーから ΔE だけわずかにずれた電子を考える

と、リング一周で失うエネルギーは

$$\begin{aligned} U(E_0 + \Delta E) &= U(E_0) + \frac{dU(E_0)}{dE} \Delta E + \dots \\ &\simeq U_0 + \left(\frac{dU}{dE} \right)_0 \Delta E \quad (4-3) \end{aligned}$$

である。シンクロトロン振動の微小な振幅の場合を再び考えてみよう。式(2-16)の U_0 を U に変更したものを式(2-19)に代入して

$$\frac{d^2 \Delta \phi}{dt^2} = \frac{\omega_{rf} \eta_s}{E_0 T_0} \{ eV_c \sin(\phi_s + \Delta \phi) - U(E) \}$$

結局、式(4-3)と式(2-18)を使って、

$$\frac{d^2 \Delta \phi}{dt^2} + \frac{1}{T_0} \left(\frac{dU}{dE} \right)_0 \frac{d\Delta \phi}{dt} + \omega_s^2 \Delta \phi = 0 \quad (4-4)$$

という運動方程式を得る。これは摩擦力と同様の位相の変化に比例した力の項が加わった減衰調和振動子を表す。この振動の減衰時間は

$$\frac{1}{\tau_s} = \frac{1}{2T_0} \left(\frac{dU}{dE} \right)_0 \quad (4-5)$$

となりシンクロトロン振動の放射減衰時間 (radiation damping time) と呼ばれる。また、解は

$$\begin{aligned} \Delta \phi(t) &= \Delta \phi_0 e^{-\frac{t}{\tau_s}} \cos \left(\sqrt{\omega_s^2 - \frac{1}{\tau_s^2} t} + \theta_0 \right) \\ &\simeq \Delta \phi_0 e^{-\frac{t}{\tau_s}} \cos(\omega_s t + \theta_0) \quad (4-6) \end{aligned}$$

と書ける。通常、減衰時間がシンクロトロン振動の周期に比べて十分長いので最後の式の近似は十分精度がある。では、具体的にシンクロトロン振動の減衰時間を計算してみよう。

電子がリング一周で放射光を放射して失うエネルギーは

$$\begin{aligned} U(E) &= \int P_\gamma dt \\ &= \oint P_\gamma \frac{d\tilde{s}}{c} \\ &= \frac{1}{c} \oint P_\gamma \left(1 + \frac{\eta \delta}{\rho} \right) ds \quad (4-7) \end{aligned}$$

である。これをエネルギーで微分して $E = E_0$ とすると

$$\begin{aligned} \left(\frac{dU}{dE} \right)_0 &= \frac{1}{c} \oint \left\{ \left(\frac{dP_\gamma}{dE} \right)_0 + P_\gamma \frac{\eta}{\rho_0 E_0} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{dP_\gamma}{dE} \right)_0 \frac{\eta \delta}{\rho_0} \right\} ds \quad (4-8) \\ &\simeq \frac{1}{c} \oint \left\{ \left(\frac{dP_\gamma}{dE} \right)_0 + P_\gamma \frac{\eta}{\rho_0 E_0} \right\} ds \end{aligned}$$

ここでは δ の一次の項は無視した。また、

$$\begin{aligned} \left(\frac{dP_\gamma}{dE} \right)_0 &= \frac{2P_\gamma}{E_0} + \frac{2P_\gamma}{B_0} \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right) \left(\frac{dx}{dE} \right) \\ &= \frac{2P_\gamma}{E_0} + \frac{2P_\gamma}{B_0} \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right) \frac{\eta}{E_0} \quad (4-9) \end{aligned}$$

dx/dE は分散の定義

$$dx = \eta \frac{dp}{p_0} \simeq \eta \frac{dE}{E_0} \quad (4-10)$$

を用いて表現した。したがって、式(4-9)を式(4-8)に代入して

$$\begin{aligned} \left(\frac{dU}{dE} \right)_0 &= \frac{1}{c} \oint \left\{ \frac{2P_\gamma}{E_0} + \frac{2P_\gamma}{B_0} \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right) \frac{\eta}{E_0} \right. \\ &\quad \left. + P_\gamma \frac{\eta}{\rho_0 E_0} \right\} ds \\ &= \frac{U_0}{E_0} \left\{ 2 + \frac{1}{U_0 c} \oint P_\gamma \eta \left(2\rho_0 k + \frac{1}{\rho_0} \right) ds \right\} \\ &= \frac{U_0}{E_0} (2 + D) \quad (4-11) \end{aligned}$$

を得る。ここで D を

$$D = \frac{1}{U_0 c} \oint P_\gamma \eta \left(2\rho_0 k + \frac{1}{\rho_0} \right) ds \quad (4-12)$$

k 値を

$$k = \frac{1}{B_0 \rho_0} \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right) \quad (4-13)$$

と置いた。この k 値は四極磁石の磁場を表す。これよりシンクロトロン振動の減衰時間は

$$\tau_s = \frac{2E_0 T_0}{U_0 J_s} \quad (4-14)$$

$$J_s = 2 + D \quad (4-15)$$

となり J_s はシンクロトロン振動のダンピング・パーティション数と呼ばれる。

ここで D についての有用な公式がある。放射光の放出によるエネルギー損失(パワー)は

$$P_\gamma \propto B^2 E^2 \propto \frac{E^4}{\rho^2} \quad (4-16)$$

である。任意の s の関数 $f(s)$ を考えると上式の比例関係から

$$\frac{1}{c} \oint P_\gamma f(s) ds \propto \frac{1}{c} \oint \frac{f(s)}{\rho^2} ds \quad (4-17)$$

である。また、

$$U_0 = \frac{1}{c} \oint P_\gamma ds \propto \frac{1}{c} \oint \frac{1}{\rho^2} ds \quad (4-18)$$

なので

$$\frac{1}{U_0 c} \oint P_\gamma f(s) ds = \frac{\oint f(s)/\rho^2 ds}{\oint 1/\rho^2 ds} \quad (4-19)$$

を得る。ここで D について考えてみると

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{U_0 c} \oint P_\gamma \eta \left(2\rho_0 k + \frac{1}{\rho_0} \right) ds \\ &= \frac{\oint (\eta/\rho_0^3) (2\rho_0^2 k + 1) ds}{\oint (1/\rho_0^2) ds} \end{aligned} \quad (4-20)$$

となる。

以下は荒い近似を用いたときの話。リング内の偏向磁石は全て同じ種類のものとする。

- セパレート型偏向磁石の場合。
 $\rho k = 0$ なので

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{U_0 c} \oint P_\gamma \frac{\eta}{\rho_0} ds \\ &= \frac{\oint (\eta/\rho_0^3) ds}{\oint (1/\rho_0^2) ds} \end{aligned} \quad (4-21)$$

$\eta \sim R/\nu_x^2$ という近似を使うとセクター型偏向磁石の場合、

$$D \simeq \frac{R}{\nu_x^2 \rho_0} \ll 1 \quad (4-22)$$

となり非常に小さい値となるが、さらにレクタングル型偏向磁石の場合、 $D \simeq 0$ である。

- コンバイン型偏向磁石の場合。
 $\eta \sim R/\nu_x^2$ 、 $k \sim (\nu_x/R)^2$ 、 $\rho_0 \sim R$ を使うと

$$D \simeq 2 + \frac{1}{\nu_x^2} > 1 \quad (4-23)$$

となり、後に説明するようにベータトロン振動は減衰せずに増大してしまう。

電子の放出する放射光のエネルギーが電子のエネルギーに依存することからシンクロトロン振動の減衰が生じるが、実際には振動がゼロとなるわけではない。なぜなら振動を励起するメカニズ

ムが存在し、そのような励起と放射減衰の平衡状態に到達するからである。このことは次に述べるベータトロン振動の減衰についても同様のことがあり、振動がゼロとなるわけではない。つまりエミッタンスも最終的にゼロとなるわけではなく、ある有限な値になる。

4.2 垂直方向ベータトロン振動の放射減衰

垂直方向には分散が無いものとする。分散がある場所で電子が放射光を放出すると軌道が変化するが、そのような影響がないと仮定する。簡単のため、加速空洞が1台リングに設置されているものとする。加速空洞を出た直後に運動量 p_0 を持った電子を考える。この電子の軌道の傾きは

$$y' = \frac{p_{y0}}{p_0} \quad (4-24)$$

である。この電子がリングを1周して放射光を放出してエネルギーを失い加速空洞の直前に来た時の軌道の傾きは、やはり同じく y' である。なぜならば放射光は軌道の接線方向に $1/\gamma$ の広がりを持って放出されるためである。したがって、垂直方向の運動量は全運動量の減少分を考慮して

$$p_{y1} = p_0 \left(1 - \frac{dp}{p_0} \right) y' \quad (4-25)$$

放射光を放出しただけでは軌道と軌道の傾きは変化しないで運動量成分だけが減少する。したがって、リング1周で放射光の放出過程を積分すると運動量は

$$p_y \simeq p_0 \left(1 - \frac{U_0}{E_0} \right) y' \quad (4-26)$$

$$p_z \simeq p_0 \left(1 - \frac{U_0}{E_0} \right) \quad (4-27)$$

となる。この後で加速空洞で進行方向に加速されて軌道の傾きが減少するわけだが、加速された後の進行方向の運動量は

$$p_z \simeq p_0 \left(1 - \frac{U_0}{E_0} \right) \left(1 + \frac{U_0}{E_0} \right) \simeq p_0 \quad (4-28)$$

なので加速空洞通過後の軌道の傾きは

$$y'_{rf} = \frac{p_y}{p_z} = \left(1 - \frac{U_0}{E_0} \right) y' \quad (4-29)$$

となり、軌道の傾きの変化は

$$\Delta y' = -\frac{U_0}{E_0} y' \quad (4-30)$$

となる。

さて、放射光放出と加速空洞によって加速される場合、クーラン・シュナイダー不変量に相当するものの変化を考える。垂直方向のベータトロン振動の振幅は

$$y = y_\beta \propto \sqrt{2J_y} \quad (4-31)$$

という関係にある。垂直方向のクーラン・シュナイダー不変量は

$$\left(\sqrt{2J_y}\right)^2 = \gamma_y y^2 + 2\alpha_y y y' + \beta_y y'^2 \quad (4-32)$$

であった。これはエネルギーの増減がない場合は不変量となるが、もやは不変量ではなくなっている。したがって、 $\sqrt{2J_y}$ の変化は

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{2J_y}\Delta\sqrt{2J_y} + \left(\Delta\sqrt{2J_y}\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{2J_y} + \Delta\sqrt{2J_y}\right)^2 - \left(\sqrt{2J_y}\right)^2 \\ &= \gamma_y(y + \Delta y)^2 + 2\alpha_y(y + \Delta y)(y' + \Delta y') \\ &\quad + \beta_y(y' + \Delta y')^2 - 2J_y \\ &= 2\{\gamma_y y \Delta y + \alpha_y(y \Delta y' + \Delta y y') + \beta_y y' \Delta y'\} \\ &\quad + \left(\gamma_y \Delta y^2 + 2\alpha_y \Delta y \Delta y' + \beta_y \Delta y'^2\right) \quad (4-33) \end{aligned}$$

となる。これより第一項は軌道の変化がない、つまり $\Delta y = 0$ であることを考慮して

$$\begin{aligned} \sqrt{2J_y}\Delta\sqrt{2J_y} &= \alpha_y y \Delta y' + \beta_y y' \Delta y' \\ &= -\left(\alpha_y y y' + \beta_y y'^2\right) \left(\frac{U_0}{E_0}\right) \end{aligned}$$

となる。最後は式(4-30)を使った。この両辺の平均をとると

$$\begin{aligned} \langle\sqrt{2J_y}\rangle\langle\Delta\sqrt{2J_y}\rangle &= -\left(\alpha_y\langle y y'\rangle + \beta_y\langle y'^2\rangle\right) \\ &\quad \times \left(\frac{U_0}{E_0}\right) \\ &= -\langle J_y\rangle\left(\frac{U_0}{E_0}\right) \end{aligned}$$

但し、

$$\begin{aligned} \langle y y'\rangle &= -\langle J_y\rangle\alpha_y \\ \langle y'^2\rangle &= \langle J_y\rangle\gamma_y \\ \gamma_y\beta_y - \alpha_y^2 &= 1 \end{aligned}$$

したがって、

$$\langle\Delta\sqrt{2J_y}\rangle = -\frac{U_0}{2E_0}\langle\sqrt{2J_y}\rangle \quad (4-34)$$

を得る。これより $\sqrt{2J_y}$ の時間変化は

$$\begin{aligned} \frac{d\langle\sqrt{2J_y}\rangle}{dt} &= \frac{\langle\Delta\sqrt{2J_y}\rangle}{T_0} \\ &= -\frac{U_0}{2E_0 T_0}\langle\sqrt{2J_y}\rangle \quad (4-35) \end{aligned}$$

と計算できる。したがって、垂直方向のベータトロン振動、つまり $\langle\sqrt{2J_y}\rangle$ の減衰時間は²

$$\tau_{\beta y} = \frac{2E_0 T_0}{U_0 J_{\beta y}} \quad (4-36)$$

となる。但し、 $J_{\beta y}$ はベータトロン振動の垂直方向のダンピング・パーティション数と呼ばれ、 $J_{\beta y} = 1$ である。

式(4-33)の第二項の時間的変化を考えると実は振動を励起することを表している。二次の微小量の時間変化なので微小時間を取れば無視できる量に思われるかも知れないが、放射光の放出過程がエネルギー、時間ともに連続ではなく量子論に基づく確率過程であるため無視できない量である。

4.3 水平方向ベータトロン振動の放射減衰

水平方向のベータトロン振動の減衰時間の計算は垂直方向と同様に行えるが、分散があるために放射光放出に伴うベータトロン振動の軌道変化を考慮する必要がある。今、電子の軌道を

$$x(s) = x_\beta(s) + x_p(s) \quad (4-37)$$

$$x'(s) = x'_\beta(s) + x'_p(s) \quad (4-38)$$

とする。 x_β はベータトロン振動の軌道を表し、 x_p はエネルギーのずれた粒子の軌道を表す。電子が放射光を放出したとしよう。放射光を放出しても軌道は変化しないので

$$\begin{aligned} \Delta x(s) &= \Delta x_\beta(s) + \eta(s)\frac{\Delta E}{E_0} \\ &= 0 \quad (4-39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta x'(s) &= \Delta x'_\beta(s) + \eta'(s)\frac{\Delta E}{E_0} \\ &= 0 \quad (4-40) \end{aligned}$$

² $df/dt = -f/\tau$ を満たす固有関数 f は $Ae^{-t/\tau}$ の形の関数である。

である。したがって、ベータトロン振動に以下の不連続点が現れる。

$$\Delta x_\beta = -\eta \frac{\Delta E}{E_0} \quad (4-41)$$

$$\Delta x'_\beta = -\eta' \frac{\Delta E}{E_0} \quad (4-42)$$

さて、水平方向のベータトロン振動の振幅も

$$x_\beta \propto \sqrt{2J_x} \quad (4-43)$$

という関係にあるが、式 (4-33) と同様に水平方向も

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{2J_x}\Delta\sqrt{2J_x} + (\Delta\sqrt{2J_x})^2 \\ &= (\sqrt{2J_x} + \Delta\sqrt{2J_x})^2 - (\sqrt{2J_x})^2 \\ &= 2\left\{\gamma_x x_\beta \Delta x_\beta + \alpha_x (x_\beta \Delta x'_\beta + \Delta x_\beta x'_\beta) \right. \\ &\quad \left. + \beta_x x'_\beta \Delta x'_\beta\right\} \\ &\quad + (\gamma_x \Delta x_\beta^2 + 2\alpha_x \Delta x_\beta \Delta x'_\beta + \beta_x \Delta x_\beta'^2) \end{aligned}$$

と書ける。例によって上式の第一項は

$$\begin{aligned} \sqrt{2J_x}\Delta\sqrt{2J_x} &= \{\gamma_x x_\beta \Delta x_\beta \\ &\quad + \alpha_x (x_\beta \Delta x'_\beta + \Delta x_\beta x'_\beta) + \beta_x x'_\beta \Delta x'_\beta\} \\ &= -\left\{\gamma_x \eta x_\beta + \alpha_x (\eta' x_\beta + \eta x'_\beta) \right. \\ &\quad \left. + \beta_x \eta' x'_\beta\right\} \frac{\Delta E}{E_0} \end{aligned} \quad (4-44)$$

また、第二項は

$$\begin{aligned} (\Delta\sqrt{2J_x})^2 &= \gamma_x \Delta x_\beta^2 + 2\alpha_x \Delta x_\beta \Delta x'_\beta \\ &\quad + \beta_x \Delta x_\beta'^2 \\ &= (\gamma_x \eta^2 + 2\alpha_x \eta \eta' + \beta_x \eta'^2) \left(\frac{\Delta E}{E_0}\right)^2 \end{aligned} \quad (4-45)$$

となる。第一項は減衰を表し第二項は励起を表す。

放射光を放出した時、周長に沿った単位長さ当たりのエネルギー変化は

$$\begin{aligned} \Delta E &= -P_\gamma \left(1 + \frac{x_\beta + x_p}{\rho_0}\right) \frac{\Delta s}{c} \\ &= -P_\gamma \left(1 + \frac{x_\beta + \eta\delta}{\rho_0}\right) \frac{\Delta s}{c} \end{aligned} \quad (4-46)$$

と計算できる。また、

$$P_\gamma \propto B^2 E^2 \quad (4-47)$$

なので、シンクロトロン振動によるエネルギーのずれ δ と $x = x_\beta + x_p$ を微小量として P_γ を展開する。磁場 B は x の関数であることに注意して

$$\begin{aligned} P_\gamma &= P_{\gamma 0} \left\{1 + 2\delta + \frac{2}{B_0} \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right) x\right\} \\ &= P_{\gamma 0} (1 + 2\delta + 2\rho_0 k x) \end{aligned} \quad (4-48)$$

となる。式 (4-46) と式 (4-48) を式 (4-44) に代入して

$$\begin{aligned} & \sqrt{2J_x}\Delta(\sqrt{2J_x}) \quad (4-49) \\ &= \left\{\gamma_x \eta x_\beta + \alpha_x (\eta' x_\beta + \eta x'_\beta) \right. \\ &\quad \left. + \beta_x \eta' x'_\beta\right\} \{1 + 2\delta + 2\rho_0 k (x_\beta + \eta\delta)\} \\ &\quad \times \left(1 + \frac{x_\beta + \eta\delta}{\rho_0}\right) \frac{P_{\gamma 0} \Delta s}{E_0 c} \end{aligned}$$

を得る。この両辺で平均を取る操作をするのであるが $\langle x_\beta^2 \rangle$ と $\langle x_\beta x'_\beta \rangle$ の項以外の $\langle x_\beta \rangle$ 、 $\langle x'_\beta \rangle$ 、 $\langle \delta \rangle$ 等は平均するとゼロである。したがって、

$$\begin{aligned} \langle \sqrt{2J_x} \rangle \langle \Delta \sqrt{2J_x} \rangle &= \frac{U_0}{E_0} \left\{ \gamma_x \eta \langle x_\beta^2 \rangle \right. \\ &\quad \left. + \alpha_x (\eta' \langle x_\beta^2 \rangle + \eta \langle x_\beta x'_\beta \rangle) + \beta_x \eta' \langle x_\beta x'_\beta \rangle \right\} \\ &\quad \times \frac{P_{\gamma 0}}{U_0 c} \left(2\rho_0 k + \frac{1}{\rho_0}\right) \Delta s \\ &= \langle 2J_x \rangle \frac{U_0}{2E_0} \frac{P_{\gamma 0}}{U_0 c} \eta \left(2\rho_0 k + \frac{1}{\rho_0}\right) \Delta s \end{aligned} \quad (4-50)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \langle x_\beta^2 \rangle &= \langle J_x \rangle \beta_x \\ \langle x_\beta x'_\beta \rangle &= -\langle J_x \rangle \alpha_x \\ \gamma_x \beta_x - \alpha_x^2 &= 1 \end{aligned}$$

である。これを一周について積分して、放射光の放出による $\sqrt{2J_x}$ の変化

$$\begin{aligned} \langle \Delta \sqrt{2J_x} \rangle_{rad} &= \langle \sqrt{2J_x} \rangle_{rad} \frac{U_0}{2E_0} \\ &\quad \times \frac{1}{U_0 c} \oint P_\gamma \eta \left(2\rho_0 k + \frac{1}{\rho_0}\right) ds \\ &= \langle \sqrt{2J_x} \rangle_{rad} \frac{U_0}{2E_0} D \end{aligned} \quad (4-51)$$

を得る。加速空洞を出た直後から加速空洞の直前までの $\sqrt{2J_x}$ が放射光の放出によってどのように変化するかを見て来たが、今度は、そうして失っ

たエネルギーが加速空洞によって補われる過程について $\sqrt{2J_x}$ の変化を計算する。最終的には放射光の放出と加速空洞によるエネルギー補償を合わせた過程について $\sqrt{2J_x}$ の変化を計算すれば減衰時間が計算できるはずである。加速空洞直前の軌道と軌道の傾きを

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{\beta 1} + \eta \frac{\Delta E_1}{E_0} \\ x'_1 &= x'_{\beta 1} + \eta' \frac{\Delta E_1}{E_0} \end{aligned}$$

とすると、加速空洞を出た直後の軌道と軌道の傾きは

$$\begin{aligned} x_2 &= x_{\beta 2} + \eta \frac{\Delta E_2}{E_0} = x_1 \\ x'_2 &= x'_{\beta 2} + \eta' \frac{\Delta E_2}{E_0} = \left(1 - \frac{U_0}{E_0}\right) x'_1 \end{aligned}$$

となる。これより

$$\begin{aligned} \Delta x_{rf} &= x_2 - x_1 = 0 \\ \Delta x'_{rf} &= x'_2 - x'_1 = x'_{\beta 2} - x'_{\beta 1} + \eta' \frac{\Delta E_2 - \Delta E_1}{E_0} \\ &= -\frac{U_0}{E_0} x'_1 \end{aligned} \quad (4-52)$$

したがって、加速空洞を通過した時の軌道と軌道の傾きの変化は

$$\begin{aligned} \Delta x_{\beta,rf} &= x_{\beta 2} - x_{\beta 1} \\ &= \eta \frac{\Delta E_2 - \Delta E_1}{E_0} = \eta \frac{U_0}{E_0} \\ \Delta x'_{\beta,rf} &= x'_{\beta 2} - x'_{\beta 1} \\ &= -\frac{U_0}{E_0} x'_{\beta 1} - \eta' \frac{U_0}{E_0} - \eta' \frac{U_0 \Delta E_1}{E_0^2} \end{aligned}$$

となる。また、加速空洞を通過することによるベータトロン振動の減衰は

$$\begin{aligned} \sqrt{2J_x} \Delta(\sqrt{2J_x}) &= \{\gamma_x x_{\beta} \Delta x_{\beta} \\ &\quad + \alpha_x (x_{\beta} \Delta x'_{\beta} + \Delta x_{\beta} x'_{\beta}) + \beta_x x'_{\beta} \Delta x'_{\beta}\} \end{aligned}$$

と書ける。これより加速空洞を通過した時の $\sqrt{2J_x}$ の変化は平均操作を行うと

$$\begin{aligned} \langle \sqrt{2J_x} \rangle_{rf} \langle \Delta \sqrt{2J_x} \rangle_{rf} &= -\frac{U_0}{E_0} \{\beta_x \langle x_{\beta} x'_{\beta} \rangle \\ &\quad + \alpha_x \langle x_{\beta}^2 \rangle\} \\ &= -\frac{U_0}{E_0} \langle J_x \rangle_{rf} \end{aligned} \quad (4-53)$$

$$\langle \Delta \sqrt{2J_x} \rangle_{rf} = -\frac{U_0}{2E_0} \langle \sqrt{2J_x} \rangle_{rf} \quad (4-54)$$

となる。以上より放射光の放出と加速空洞によるエネルギー補償による合計は

$$\begin{aligned} \langle \Delta \sqrt{2J_x} \rangle &= \langle \Delta \sqrt{2J_x} \rangle_{rad} + \langle \Delta \sqrt{2J_x} \rangle_{rf} \\ &= -\frac{U_0}{2E_0} (1 - D) \langle \sqrt{2J_x} \rangle \end{aligned} \quad (4-55)$$

である。時間変化を考えると

$$\begin{aligned} \frac{d \langle \sqrt{2J_x} \rangle}{dt} &= \frac{\langle \Delta \sqrt{2J_x} \rangle}{T_0} \\ &= -\frac{U_0}{2E_0 T_0} (1 - D) \langle \sqrt{2J_x} \rangle \end{aligned} \quad (4-56)$$

となり、水平方向のベータトロン振動、つまり $\langle \sqrt{2J_x} \rangle$ の減衰時間は

$$\tau_{\beta x} = \frac{2E_0 T_0}{U_0 J_{\beta x}} \quad (4-57)$$

となる。但し、 $J_{\beta x}$ はベータトロン振動の水平方向のダンピング・パーティション数と呼ばれ、 $J_{\beta x} = 1 - D$ である。このことから D が 1 より大きい場合、水平方向のベータトロン振動は減衰せず増幅されてしまうことがわかる。このためコンバインド型の偏向磁石を使う場合注意を要する。

4.4 ダンピング・パーティション数

放射光を放出して加速空洞によってエネルギーが補償される時のシンクロトロン振動とベータトロン振動の減衰時間は

$$\tau_s = \frac{2E_0 T_0}{U_0 J_s} \quad (4-58)$$

$$\tau_{\beta x} = \frac{2E_0 T_0}{U_0 J_{\beta x}} \quad (4-59)$$

$$\tau_{\beta y} = \frac{2E_0 T_0}{U_0 J_{\beta y}} \quad (4-60)$$

と書ける。但し、対応するダンピング・パーティション数は³

$$J_s = 2 + D \quad (4-61)$$

$$J_{\beta x} = 1 - D \quad (4-62)$$

$$J_{\beta y} = 1 \quad (4-63)$$

³ クーラン・シュナイダー不変量の $2J$ と混同しないこと。

である。これらより

$$J_s + J_{\beta x} + J_{\beta y} = 4 \quad (4-64)$$

という関係があることがわかる。これは減衰時間が周回時間に比べて十分長い場合、非常に一般的に成り立つ式である。 $D \simeq 0$ と近似できる場合

$$2\tau_s = \tau_{\beta x} = \tau_{\beta y} \quad (4-65)$$

となり、ベータトロン振動の減衰時間はシンクロトロン振動の2倍の減衰時間を必要とする。

4.5 シンクロトロン振動の放射励起

式(2-24)より

$$\delta = -\sqrt{2J_z} \sin(\omega_s t + \theta_0) \quad (4-66)$$

放射減衰がある場合

$$\sqrt{2J_z} = \sqrt{2J_{z0}} e^{-\frac{t}{\tau_s}} \quad (4-67)$$

なので $2J_z$ の放射減衰の時間変化は

$$\frac{d(2J_z)}{dt} = -\frac{2}{\tau_s}(2J_z) \quad (4-68)$$

である。一個の電子がエネルギー u の光子を放出した場合、 $2J_z$ の平均的な変化は

$$\begin{aligned} \langle \Delta 2J_z \rangle &= \left(\frac{\Delta E - u}{E_0} \right)^2 - \left(\frac{\Delta E}{E_0} \right)^2 \\ &= \frac{u^2}{E_0^2} - \frac{2u\delta}{E_0} \\ &= \frac{u^2}{E_0^2} \end{aligned} \quad (4-69)$$

となる。 δ は位相平均をとると消えてしまう。

$2J_z$ の時間的な変化はリング一周平均と確率的平均を取ると

$$\begin{aligned} \frac{d\langle 2J_z \rangle}{dt} &= \oint \frac{\langle \Delta 2J_z \rangle}{T_0} \frac{ds}{c} \\ &= \frac{1}{T_0 E_0^2} \oint \int_0^\infty u^2 n(u) du \frac{ds}{c} \\ &= \frac{55}{24\sqrt{3} E_0^2 T_0} \oint u_c P_\gamma \frac{ds}{c} \end{aligned} \quad (4-70)$$

但し、

$$\int_0^\infty u^2 n(u) du = \frac{55}{24\sqrt{3}} u_c P_\gamma \quad (4-71)$$

$$u_c = \frac{3 \hbar c \gamma^3}{2 \rho} \quad (4-72)$$

である。シンクロトロン振動の放射励起による $2J_z$ の変化は

$$\begin{aligned} \frac{d\langle 2J_z \rangle}{dt} &= \frac{55 \hbar \gamma^2 U_0}{16\sqrt{3} m c E_0 T_0} \frac{1}{U_0 c} \oint \frac{P_\gamma}{\rho} ds \\ &= 2C_q \frac{\gamma^2 U_0}{E_0 T_0} \oint \frac{ds/\rho_0^3}{ds/\rho_0^2} \end{aligned} \quad (4-73)$$

となる。 C_q は

$$C_q = \frac{55 \hbar}{32\sqrt{3} m c} \quad (4-74)$$

である。放射減衰と放射励起を合わせ、これが平衡状態になる条件は

$$\begin{aligned} \frac{d\langle 2J_z \rangle}{dt} &= -\frac{2}{\tau_s} \langle 2J_z \rangle + 2C_q \frac{\gamma^2 U_0}{E_0 T_0} \oint \frac{ds/\rho_0^3}{ds/\rho_0^2} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4-75)$$

である。したがって、平衡状態での $\langle 2J_z \rangle$ は

$$\langle 2J_z \rangle = \frac{2}{J_s} C_q \gamma^2 \oint \frac{ds/\rho_0^3}{ds/\rho_0^2} \quad (4-76)$$

となる。エネルギーのずれの二乗平均を考えると

$$\begin{aligned} \sigma_\delta^2 &= \langle \delta^2 \rangle = \left\langle 2J_z \frac{1 - \cos 2(\omega_s t + \theta_0)}{2} \right\rangle \\ &= \langle J_z \rangle \end{aligned} \quad (4-77)$$

$$= \frac{C_q \gamma^2}{J_s} \oint \frac{ds/\rho_0^3}{ds/\rho_0^2} \quad (4-78)$$

となる。全ての偏向磁石が同じ曲率を持っている場合

$$\sigma_\delta = \gamma \sqrt{\frac{C_q}{J_s \rho_0}} \quad (4-79)$$

となる。バンチの長さは位相のずれの二乗平均

$$\sigma_{\Delta\phi}^2 = \left(\frac{\omega_r f \eta_s}{\omega_s} \right)^2 \langle J_z \rangle \quad (4-80)$$

$$= \left(\frac{\omega_r f \eta_s}{\omega_s} \right)^2 \sigma_\delta^2 \quad (4-81)$$

をもとに計算できる。ここでスリップ因子は電子が光速に近い場合、 $\eta_s = \alpha_p - 1/\gamma^2 \simeq \alpha_p$ となりモーメント・コンパクションで置き換えられる。

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \frac{c \sigma_{\Delta\phi}}{\omega_{rf}} \\ &= \frac{c \alpha_p}{\omega_s} \sigma_{\delta} \quad (4-82)\end{aligned}$$

$$= \frac{C \alpha_p}{2\pi\nu_s} \sigma_{\delta} \quad (4-83)$$

と書ける。 C は周長である。

4.6 ベータトロン振動の放射励起

式(4-45)より一個の電子がエネルギー u の光子を放出した場合、の $2J_x$ 変化は

$$\begin{aligned}\Delta(2J_x) &= (\gamma_x \eta^2 + 2\alpha_x \eta \eta' + \beta_x \eta'^2) \left(\frac{u}{E_0}\right)^2 \\ &= H \left(\frac{u}{E_0}\right)^2 \quad (4-84)\end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned}\frac{d\langle 2J_x \rangle}{dt} &= \frac{1}{T_0} \oint \frac{H}{E_0^2} \int_0^\infty u^2 n(u) du \frac{ds}{c} \\ &= 2C_q \gamma^2 \frac{U_0}{E_0 T_0} \frac{1}{U_0 c} \oint \frac{H}{\rho} P_\gamma ds \\ &= 2C_q \gamma^2 \frac{U_0}{E_0 T_0} \frac{\oint (H/\rho_0^3) ds}{\oint ds/\rho_0^2} \quad (4-85)\end{aligned}$$

$2J_x$ の放射減衰は

$$\frac{d\langle 2J_x \rangle}{dt} = -\frac{U_0}{E_0 T_0} J_{\beta x} \langle 2J_x \rangle \quad (4-86)$$

である。放射減衰と放射励起を合わせ、これが平衡状態になる条件は

$$\begin{aligned}\frac{d\langle 2J_x \rangle}{dt} &= -\frac{U_0}{E_0 T_0} J_{\beta x} \langle 2J_x \rangle \\ &\quad + 2C_q \gamma^2 \frac{U_0}{E_0 T_0} \frac{\oint (H/\rho_0^3) ds}{\oint ds/\rho_0^2} \\ &= 0 \quad (4-87)\end{aligned}$$

したがって、

$$\langle 2J_x \rangle = \frac{2C_q \gamma^2 \oint (H/\rho_0^3) ds}{J_{\beta x} \oint ds/\rho_0^2} \quad (4-88)$$

となる。また、エミッタンスは

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \langle J_x \rangle \\ &= \frac{C_q}{J_{\beta x}} \gamma^2 \frac{\oint (H/\rho_0^3) ds}{\oint ds/\rho_0^2} \quad (4-89)\end{aligned}$$

となる。全ての偏向磁石で同じ曲率を持つ場合、

$$\varepsilon_x = \frac{C_q \gamma^2}{J_{\beta x} \rho_0} \frac{1}{2\pi \rho_0} \oint_{bend} H ds \quad (4-90)$$

$$= \frac{J_s}{J_{\beta x}} \frac{1}{2\pi \rho_0} \oint_{bend} H ds \quad (4-91)$$

となる。

5 放射積分

放射積分と呼ばれる次の積分を定義する。

$$I_1 = \oint \frac{\eta}{\rho} ds \quad (5-1)$$

$$I_2 = \oint \frac{1}{\rho^2} ds \quad (5-2)$$

$$I_3 = \oint \frac{\eta}{|\rho|^3} ds \quad (5-3)$$

$$I_4 = \oint \frac{\eta}{\rho^3} (2\rho^2 k + 1) ds \quad (5-4)$$

$$I_5 = \oint \frac{H}{|\rho|^3} ds \quad (5-5)$$

$$\frac{\Delta I_4}{\delta} = \oint 2k^2 \eta^2 ds \quad (5-6)$$

但し、上式で用いられている p 、 k 、 H の意味は

$$p = eB\rho \quad (5-7)$$

$$k = \frac{e}{p} \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right) \quad (5-8)$$

$$H = \gamma \eta^2 + 2\alpha \eta \eta' + \beta \eta'^2 \quad (5-9)$$

である。以上の式を用いて今までに表れたビーム力学上、基本的な量を表現してみることにする。まず、モーメント・コンパクションと電子が放射光を放出してリング一周で失うエネルギーは

$$\alpha_p = \frac{I_1}{C} \quad (5-10)$$

$$U_0 = \frac{2r_e}{3(mc^2)^3} E^4 I_2 \quad (5-11)$$

と表される。 C は周長である。ダンピング・パーティション数は

$$J_s = 2 + \frac{I_4}{I_2} \quad (5-12)$$

$$J_{\beta x} = 1 - \frac{I_4}{I_2} \quad (5-13)$$

$$J_{\beta y} = 1 \quad (5-14)$$

となる。シンクロトロン振動とベータトロン振動の放射減衰時間は、それぞれ

$$\begin{aligned} \tau_s &= \frac{3T_0}{r_e\gamma^3} \frac{1}{J_s I_2} \\ &= \frac{3T_0}{r_e\gamma^3} \left(\frac{1}{2I_2 + I_4} \right) \end{aligned} \quad (5-15)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\beta x} &= \frac{3T_0}{r_e\gamma^3} \frac{1}{J_{\beta x} I_2} \\ &= \frac{3T_0}{r_e\gamma^3} \left(\frac{1}{I_2 - I_4} \right) \end{aligned} \quad (5-16)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\beta y} &= \frac{3T_0}{r_e\gamma^3} \frac{1}{J_{\beta y} I_2} \\ &= \frac{3T_0}{r_e\gamma^3} \left(\frac{1}{I_2} \right) \end{aligned} \quad (5-17)$$

である。また、エネルギー広がりの二乗、パンチ長、エミッタンスは、

$$\begin{aligned} \sigma_\delta^2 &= C_q \gamma^2 \left(\frac{I_3}{J_s I_2} \right) \\ &= C_q \gamma^2 \left(\frac{I_3}{2I_2 + I_4} \right) \end{aligned} \quad (5-18)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{C\alpha_p}{2\pi\nu_s} \gamma \sqrt{C_q \left(\frac{I_3}{J_s I_2} \right)} \\ &= \frac{C\alpha_p}{2\pi\nu_s} \gamma \sqrt{C_q \left(\frac{I_3}{2I_2 + I_4} \right)} \end{aligned} \quad (5-19)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= C_q \gamma^2 \left(\frac{I_5}{J_{\beta x} I_2} \right) \\ &= C_q \gamma^2 \left(\frac{I_5}{I_2 - I_4} \right) \end{aligned} \quad (5-20)$$

である。

6 低エミッタンスを実現するために

偏向磁石は、すべて同じ曲率半径 ρ を持ち、一台の偏向磁石の偏向角を θ 、長さを $L_b = \rho\theta$ とする。基本的に閉軌道は考えていないので放射積

分は偏向磁石の中だけ行えばよい。しかも、全ての偏向磁石については同じ光学系となっているので一台の偏向磁石について着目する。エミッタンスは

$$\varepsilon_x = C_q \gamma^2 \frac{I_5}{J_{\beta x} I_2} \quad (6-1)$$

$$I_2 = \frac{L_b}{\rho^2} \quad (6-2)$$

$$I_5 = \frac{\int_b H ds}{\rho^3} \quad (6-3)$$

であるので、

$$\varepsilon_x = C_q \gamma^2 \frac{\langle H \rangle_b \theta}{J_{\beta x} L_b} \quad (6-4)$$

$$= C_q \gamma^2 \frac{\langle H \rangle_b}{J_{\beta x} \rho} \quad (6-5)$$

$$\langle H \rangle_b = \frac{\int_b H ds}{L_b} \quad (6-6)$$

となる。したがって、基本的に低エミッタンスを実現するためには $\langle H \rangle_b$ を小さくすれば良いことになる。 $\langle H \rangle_b$ を小さくする工夫は色々あるが、中でも Double Bend Achromat (DBA) と Triple Bend Achromat (TBA) は第三世代放射光リングでは良く使われているラティスである。さらに、リニアークライダのダンピングリングで提案されている Theoretical Minimum Emittance (TME) ラティスも低エミッタンスを目標としている。後節で述べるように、それぞれのラティスでのエミッタンスの大きさは FODO ラティスと比較して

$$\varepsilon_{x,FODO} : \varepsilon_{x,DBA} : \varepsilon_{x,TME} = \sim 300 : 3 : 1$$

である。

6.1 FODO

最初に低エミッタンスではないが、いろいろなラティスと比較するために 3.1 章で考えた FODO セルについてエミッタンスを計算してみる。FODO の一つのセルには二台の偏向磁石を配置する。さて、長さ L の FODO セルの転送行列は

$$M_{cell} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{kL}{2} - \frac{k^2 L^2}{8} & L - \frac{k^2 L^3}{32} \\ -\frac{k^2 L}{2} & 1 - \frac{kL}{2} - \frac{k^2 L^2}{8} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu & \beta \sin \mu \\ -\gamma \sin \mu & \cos \mu - \alpha \sin \mu \end{pmatrix}$$

である。 μ は一つのセルのベータトロン位相の進みである。 α 、 β 、 γ はビームライン入口の Twiss パラメータである。周期条件からビームライン入口と出口の Twiss パラメータは同じになっている。上式の二つの行列は等しいので

$$\alpha = \frac{kL}{2 \sin \mu} \quad (6-7)$$

$$\gamma = \frac{k^2 L}{2 \sin \mu} \quad (6-8)$$

$$\beta = \frac{L - \frac{k^2 L^3}{32}}{\sin \mu} \quad (6-9)$$

$$2 \cos \mu = 2 - \frac{k^2 L^2}{4} \quad (6-10)$$

である。ビームライン入口の分散を (η, η') とすると分散も周期的であるために

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} = M_{\text{cell}} \begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} + V_{\text{cell}} \quad (6-11)$$

という関係にある。 V_{cell} はエネルギーのずれを含めた 3×3 転送行列の 3 列目である。ここではセル当たり二台の偏向磁石は三つに分けて考えている。 V_{cell} は

$$\begin{aligned} V_{\text{cell}} &= V_{\frac{b}{2}} + M_O M_F M_O (V_b + M_O M_D M_O V_{\frac{b}{2}}) \\ &= \begin{pmatrix} (1 - kL/16 - k^2 L^2/64)L\theta \\ (2 - kL/2 - k^2 L^2/16)\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6-12)$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} V_b &= \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix} \\ V_{\frac{b}{2}} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \theta/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。したがって

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} = (I - M_{\text{cell}})^{-1} V_{\text{cell}} \quad (6-13)$$

を解くと

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{L\theta}{4(1 - \cos \mu)} \left(4 - \frac{k^2 L^2}{16} \right) \\ \eta' &= -\frac{\theta}{2(1 - \cos \mu)} kL \end{aligned} \quad (6-14)$$

を得る。先の Twiss パラメータとこれらの分散を使って $\langle H \rangle_b$ を求めると

$$\begin{aligned} \langle H \rangle_b &= L_b(\gamma\eta^2 + 2\alpha\eta\eta' + \beta\eta'^2)/L_b \\ &= \frac{L\theta^2}{2 \sin^3 \frac{\mu}{2} \cos \frac{\mu}{2}} \left(1 - \sin^2 \frac{\mu}{2} + \frac{1}{8} \sin^4 \frac{\mu}{2} \right) \end{aligned}$$

である。ここで

$$\sin^2 \frac{\mu}{2} = \frac{1 - \cos \mu}{2} = \frac{k^2 L^2}{16} \quad (6-15)$$

を使った。最終的に FODO ラティスのエミッタンスは

$$\varepsilon_x = C_q \gamma^2 \frac{L\theta^3}{2L_b J_{\beta x}} F(\mu) \quad (6-16)$$

$$F(\mu) = \frac{1 - \sin^2 \frac{\mu}{2} + \frac{1}{8} \sin^4 \frac{\mu}{2}}{\sin^3 \frac{\mu}{2} \cos \frac{\mu}{2}} \quad (6-17)$$

となる。これよりエミッタンスが最小になる条件は $\mu \simeq 2.54$ 、つまりベータトロン位相の進みが約 145° の時で

$$\varepsilon_x \simeq 0.743 \times C_q \gamma^2 \frac{L\theta^3}{2L_b J_{\beta x}} \quad (6-18)$$

によって最小エミッタンスが得られる。エミッタンスを小さくするには偏向角を小さくする、ダンピング・パーティションを大きくすることが考えられる。ダンピング・パーティションを大きくするといっても、シンクロトロン振動を減衰させるため、せいぜい $D \sim -2$ までが限界で $J_{\beta x} \sim 3$ である。セパレート型でレクタングル型偏向磁石の場合、 $J_{\beta x} \simeq 1$ なので、これの3倍程度しか大きくできない。偏向角を小さくすることについては3乗で効いてくるので磁石の数は増えるが非常に有効である。

6.2 Double Bend Achromat(DBA)

Double Bend Achromat(DBA) またはチャスマン＝グリーン (Chasman-Green) と呼ばれるラティスで、二台の偏向磁石で囲まれた部分で分散を局所的に作り (アクロマート、achromat)、その外側では分散はゼロである。したがって、収束系では分散がゼロなので、エミッタンスは偏向磁石によって発生する分散で決まる。セルの入口と出

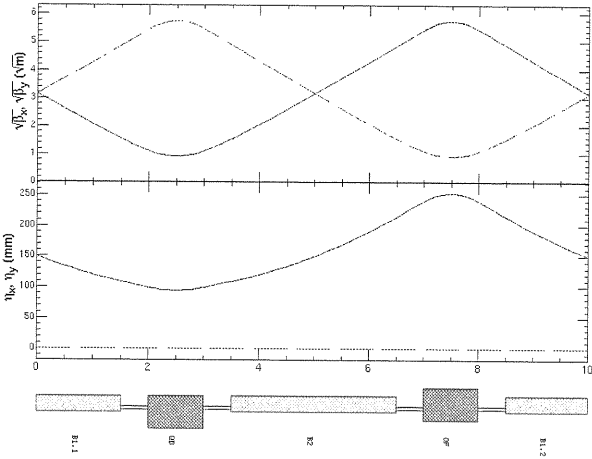


図 6: FODO ラティス (1 セル)。

口で分散がゼロとなっているので、分散がゼロでなければならぬビームライン、例えば高周波加速空洞の設置ラインまたは挿入光源ライン等の直線部へとアーク部から接続させる場合、普通必要なディスパージョン・サプレッサーを作らなくて済むのでリングの場所に対する無駄がない。ビーム光学系は二台の偏向磁石を挟んで対称となっているので一台の偏向磁石について着目する。偏向磁石入口の Twiss パラメータを $(\beta_0, \alpha_0, \gamma_0)$ 、分散を (η_0, η'_0) とすると偏向磁石内では

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = M_t \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \alpha_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} \quad (6-19)$$

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \\ 1 \end{pmatrix} = M_b \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \eta'_0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6-20)$$

と変換される。ここで M_b はセクター型の偏向磁石を表す水平方向の転送行列で、 M_t はその転送行列による Twiss パラメーターの変換を表す。

$$\begin{aligned} M_b &= \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6-21) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{\rho} & \rho \sin \frac{s}{\rho} & \rho (1 - \cos \frac{s}{\rho}) \\ -\frac{1}{\rho} \sin \frac{s}{\rho} & \cos \frac{s}{\rho} & \sin \frac{s}{\rho} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$M_t = \begin{pmatrix} m_{11}^2 & -2m_{11}m_{12} & m_{12}^2 \\ -m_{11}m_{21} & 1 + 2m_{12}m_{21} & -m_{12}m_{22} \\ m_{21}^2 & -2m_{21}m_{22} & m_{22}^2 \end{pmatrix}$$

である。即ち、Twiss パラメータは

$$\begin{aligned} \beta &= \beta_0 \cos^2 \frac{s}{\rho} - 2\alpha_0 \rho \cos \frac{s}{\rho} \sin \frac{s}{\rho} + \gamma_0 \rho^2 \sin^2 \frac{s}{\rho} \\ \alpha &= \frac{\beta_0}{\rho^2} \sin^2 \frac{s}{\rho} + \alpha_0 \left(1 - 2 \sin^2 \frac{s}{\rho} \right) - \gamma_0 \rho \cos \frac{s}{\rho} \sin \frac{s}{\rho} \\ \gamma &= \frac{\beta_0}{\rho^2} \sin^2 \frac{s}{\rho} + \frac{2\alpha_0}{\rho} \cos \frac{s}{\rho} \sin \frac{s}{\rho} + \gamma_0 \cos^2 \frac{s}{\rho} \end{aligned}$$

となり、分散は

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_0 \cos \frac{s}{\rho} + \eta'_0 \rho \sin \frac{s}{\rho} + \rho \left(1 - \cos \frac{s}{\rho} \right) \\ \eta' &= -\frac{\eta_0}{\rho} \sin \frac{s}{\rho} + \eta'_0 \cos \frac{s}{\rho} + \sin \frac{s}{\rho} \end{aligned} \quad (6-22)$$

となる。

偏向磁石内の H の積分を行うと

$$\begin{aligned} \int_0^L H ds &= \int_0^L (\gamma \eta^2 + 2\alpha \eta \eta' + \beta \eta'^2) ds \\ &= (\gamma_0 \eta_0^2 + 2\alpha_0 \eta_0 \eta'_0 + \beta_0 \eta_0'^2) L \\ &\quad + 2(\alpha_0 \eta_0 + \beta_0 \eta_0') \rho \left(1 - \cos \frac{L}{\rho} \right) \\ &\quad - 2(\alpha_0 \eta_0' + \gamma_0 \eta_0) \rho \left(L - \rho \sin \frac{L}{\rho} \right) \\ &\quad + \frac{\beta_0}{2} \left(L - \frac{\rho}{2} \sin \frac{2L}{\rho} \right) \\ &\quad - 2\alpha_0 \rho^2 \left(\frac{3}{4} - \cos \frac{L}{\rho} + \frac{1}{4} \cos \frac{2L}{\rho} \right) \\ &\quad + \gamma_0 \rho^2 \left(\frac{3L}{2} - 2\rho \sin \frac{L}{\rho} + \frac{\rho}{4} \sin \frac{2L}{\rho} \right) \end{aligned} \quad (6-23)$$

となる。これは一般的な式であるが、もともと DBA では偏向磁石入口での分散はゼロである。また、 L/ρ で展開して二次までとることになると結局

$$\begin{aligned} \langle H \rangle_b &= \frac{\int_0^L H ds}{L} \quad (6-24) \\ &= \left(\frac{\beta_0}{3} - \frac{\alpha_0 L}{4} + \frac{\gamma_0 L^2}{20} \right) \frac{L^2}{\rho^2} \end{aligned}$$

となる。したがって、エミッタンスは

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= C_q \gamma^2 \frac{\langle H \rangle_b \theta}{J_{\beta x} L} \quad (6-25) \\ &= C_q \gamma^2 \frac{\theta^3}{J_{\beta x}} \left(\frac{\beta_0}{3L} - \frac{\alpha_0}{4} + \frac{\gamma_0 L}{20} \right) \end{aligned}$$

となる。

$$\varepsilon_x \propto F(\beta_0, \alpha_0) = \left(\frac{\beta_0}{3L} - \frac{\alpha_0}{4} + \frac{\gamma_0 L}{20} \right) \quad (6-26)$$

であるから最小エミッタンスを求めるためには F の極小値を求めればよい。

$$\frac{\partial F}{\partial \beta_0} = \frac{1}{3L} - \frac{L}{20} \frac{(1 + \alpha_0^2)}{\beta_0^2} = 0 \quad (6-27)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_0} = -\frac{1}{4} + \frac{L}{10} \frac{\alpha_0}{\beta_0} = 0 \quad (6-28)$$

より最小エミッタンスとなる偏向磁石入口の Twiss パラメータは

$$\beta_{0,min} = \frac{2\sqrt{15}}{5} L \quad (6-29)$$

$$\alpha_{0,min} = \sqrt{15} \quad (6-30)$$

と求まる。したがって、最小エミッタンスは

$$\varepsilon_{x,min} = \frac{1}{4\sqrt{15}} \times C_q \gamma^2 \frac{\theta^3}{J_{\beta x}} \quad (6-31)$$

$$\simeq 0.0645 \times C_q \gamma^2 \frac{\theta^3}{J_{\beta x}} \quad (6-32)$$

となる。また、

$$\beta = \beta_0 \cos^2 \frac{s}{\rho} - 2\alpha_0 \rho \cos \frac{s}{\rho} \sin \frac{s}{\rho} + \gamma_0 \rho^2 \sin^2 \frac{s}{\rho}$$

$$\simeq \beta_0 + 2\alpha_0 s + \gamma_0 s^2 \quad (6-33)$$

$$(6-34)$$

よりベータ関数の極小値を求める。ベータ関数を s で微分してゼロとおいた

$$\frac{d\beta}{ds} = 2\alpha_{0,min} + 2\gamma_{0,min} s = 0 \quad (6-35)$$

より偏向磁石入口から $3L/8$ のところでベータ関数は極小となり

$$\beta_{min} = \frac{\sqrt{15}}{40} L \quad (6-36)$$

を得る。

6.3 Theoretical Minimum Emittance (TME)

数値的にあたるのが効率的である。低エミッタンスを実現するためには偏向磁石内の平均的な

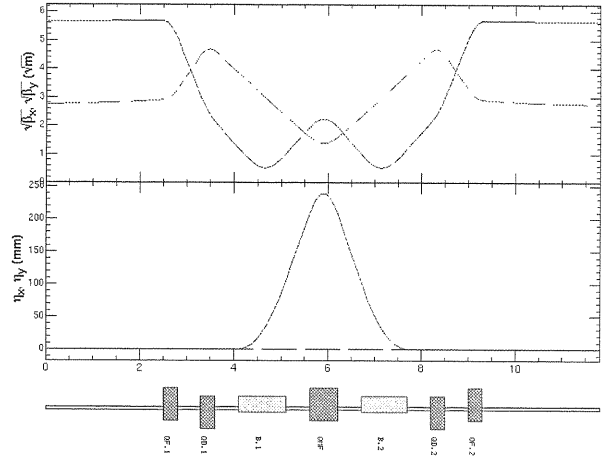


図 7: DBA ラティス (1 セル)。

$H(s)$ を最小化する必要がある。まず、偏向磁石に着目する。式 (6-22) でも示されているが、分散の一般的な解は

$$\eta'' + \frac{1}{\rho^2} \eta = \frac{1}{\rho} \quad (6-37)$$

を解くことにより、

$$\begin{aligned} \eta &= \rho \left(1 - a \cos \frac{s}{\rho} + b \sin \frac{s}{\rho} \right) \\ &\simeq \rho \left\{ 1 - a \left(1 - \frac{s^2}{2\rho^2} \right) + b \frac{s}{\rho} \right\} \\ &= \rho(1 - a) + bs + \frac{a}{2\rho} s^2 \end{aligned} \quad (6-38)$$

$$\begin{aligned} \eta' &= a \sin \frac{s}{\rho} + b \cos \frac{s}{\rho} \\ &\simeq a \frac{s}{\rho} + b \left(1 - \frac{s^2}{2\rho^2} \right) \\ &= b + \frac{a}{\rho} s - \frac{b}{2\rho^2} s^2 \end{aligned} \quad (6-39)$$

である。 $a = 1 - \eta_0/\rho$ と $b = \eta'_0$ は分散の初期値によって決まるパラメータである。

偏向磁石内の $s = s_m$ で最小となるベータ関数を β_m とする。任意の場所 s での Twiss パラメータは

$$\beta = \beta_m + \frac{(s - s_m)^2}{\beta_m} \quad (6-40)$$

$$\alpha = -\frac{s - s_m}{\beta_m} \quad (6-41)$$

$$\gamma = \frac{1}{\beta_m} \quad (6-42)$$

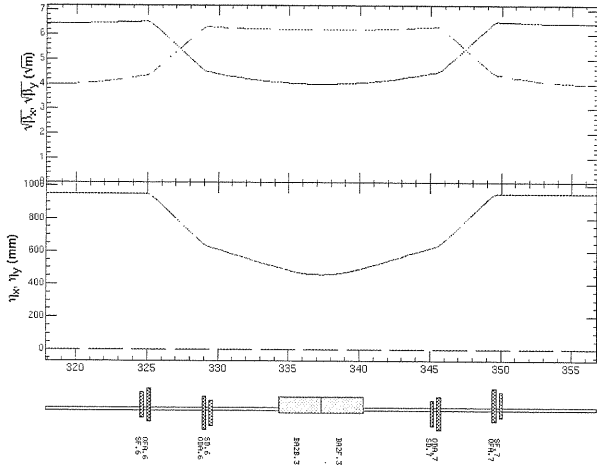


図 8: TME ラティス (1 セル)。ILC ダンピングリングとして検討された OCS リングのアーカ部に配置されている。

となる。以上より $\langle H \rangle_b$ を求めると

$$\begin{aligned} \langle H \rangle_b &= \frac{\int_0^L H ds}{L} \\ &= \beta_m A \\ &+ \frac{\rho^2}{\beta_m} \left\{ A\theta^2 \left(\frac{s_m}{L} \right)^2 + B\theta \left(\frac{s_m}{L} \right) + C \right\} \end{aligned} \quad (6-43)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} A &= b^2 + ab\theta + \frac{a^2 - b^2}{3}\theta^2 - \frac{ab}{4}\theta^3 + \frac{b^2}{20}\theta^4 \\ B &= 2b(1-a) + a(1-a)\theta - \frac{b}{3}\theta^2 - \frac{a^2 - b^2}{4}\theta^3 \\ &+ \frac{3ab}{10}\theta^4 - \frac{b^2}{12}\theta^5 \\ C &= (1-a)^2 - \frac{a(1-a)}{3}\theta^2 + \frac{b(1-a)}{4}\theta^3 \\ &+ \frac{a^2}{20}\theta^4 - \frac{ab}{12}\theta^5 + \frac{b^2}{28}\theta^6 \end{aligned} \quad (6-44)$$

である。 $\langle H \rangle_b$ が最小となる β_m を求める。

$$\begin{aligned} \frac{d\langle H \rangle_b}{d\beta_m} &= A - \frac{\rho^2}{\beta_m^2} \left\{ A\theta^2 \left(\frac{s_m}{L} \right)^2 + B\theta \left(\frac{s_m}{L} \right) + C \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

という条件より

$$\beta_m = \rho \sqrt{\theta^2 \left(\frac{s_m}{L} \right)^2 + \frac{B}{A}\theta \left(\frac{s_m}{L} \right) + \frac{C}{A}} \quad (6-45)$$

のとき最小の

$$\langle H \rangle_b = 2\rho \sqrt{A \left\{ A\theta^2 \left(\frac{s_m}{L} \right)^2 + B\theta \left(\frac{s_m}{L} \right) + C \right\}} \quad (6-46)$$

を得る。また、これより $\langle H \rangle_b$ となるためには

$$\frac{s_m}{L} = -\frac{B}{2A\theta} \quad (6-47)$$

にベータ関数の最小値を持ってこなければならぬ。ベータ関数が最小値となる場所を偏向磁石の真中、つまり $s_m = L/2$ という制限を加えると

$$\begin{aligned} A\theta + B &= \left(\theta - \frac{\theta^2}{12} \right) a^2 \\ &- \left(-2b + \theta + b\theta^2 + \frac{b}{20}\theta^4 \right) a \\ &- b \left(2 + b\theta - \frac{\theta^2}{3} - \frac{b}{12}\theta^3 - \frac{b}{30}\theta^5 \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6-48)$$

という条件式が得られる。

さて、 $s_m = L/2$ という制限のもと $\langle H \rangle_b$ の最小値を数値的に求めてみる。この条件のもとで式 (6-46) は

$$\langle H \rangle_b = \rho \sqrt{A \{ A\theta^2 + 2B\theta + 4C \}} \quad (6-49)$$

である。したがって TME のエミッタンスは

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= C_q \gamma^2 \frac{\langle H \rangle_b}{J_{\beta x} \rho} \\ &= C_q \gamma^2 \frac{1}{J_{\beta x}} \sqrt{A \{ A\theta^2 + 2B\theta + 4C \}} \end{aligned}$$

となる。一方、DBA のエミッタンスは

$$\varepsilon_x = C_q \gamma^2 \frac{1}{J_{\beta x}} \frac{\theta^3}{4\sqrt{15}} \quad (6-50)$$

であった。偏向角 θ をある値に固定して a と b を変えながら TME の DBA に対するエミッタンスの比を計算すると $b = -\theta/2$ 付近で比が最小となり TME のエミッタンスは DBA の約三分の一まで小さくすることができる。図 9 を参照。この時、式 (6-48) から θ の最低次の a を求めると

$$a = 1 - \frac{\theta^2}{6} \quad (6-51)$$

$$b = -\frac{\theta}{2} \quad (6-52)$$

となる。

$$A \simeq \frac{\theta^2}{12} \quad (6-53)$$

$$B \simeq -\frac{\theta^3}{12} \quad (6-54)$$

$$C \simeq \frac{\theta^4}{45} \quad (6-55)$$

$$\langle H \rangle_b = \frac{\rho\theta^3}{12\sqrt{15}} \quad (6-56)$$

と計算できて、

$$\varepsilon_{x,TME} = C_q \gamma^2 \frac{1}{J_{\beta x}} \frac{\theta^3}{12\sqrt{15}} \quad (6-57)$$

$$= \frac{1}{3} \varepsilon_{x,DBA} \quad (6-58)$$

となる。これが理論的に実現できる最小のエミッタンスである。

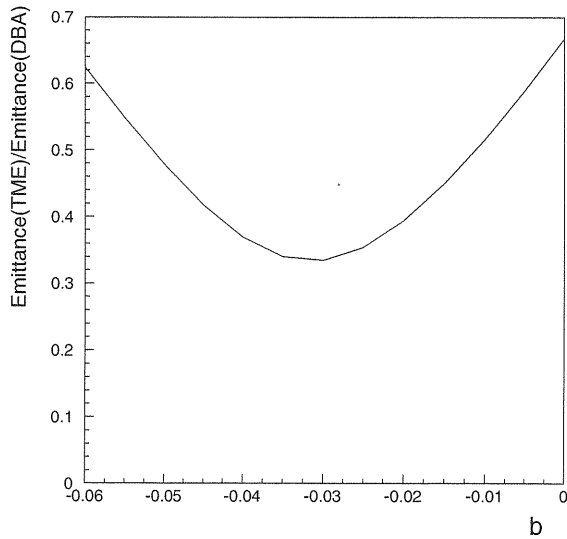


図 9: b を変化させて a をエミッタンスが最小になるように最適化した時の TME の DBA に対するエミッタンスの比。

ちなみに、TME のエミッタンスを計算した方法でも DBA のエミッタンスは計算できる。DBA では偏向磁石入口での分散はゼロなので $a = 1$ 、 $b = 0$ である。この時、式 (6-46) は

$$\langle H \rangle_b = \frac{2}{3} \rho\theta^3 \sqrt{\left(\frac{s_m}{L} - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{3}{320}} \quad (6-59)$$

となる。したがって、 $s_m = 3L/8$ の時、最小値は

$$\langle H \rangle_b = \frac{\rho\theta^3}{4\sqrt{15}} \quad (6-60)$$

となり、式 (6-50) を得る。

7 ILC のダンピングリング

7.1 概要

ILC のダンピングリングの役割は粒子源によって作られたビームのエミッタンスを小さくすることである。エミッタンスを減衰させる過程は既に述べた通りであるが、偏向磁石通過時の放射光放出と高周波加速空洞によるエネルギー補償の組合せによるものである。したがって、ダンピングリングの平衡エミッタンスは十分小さく、減衰時間も十分短いことが要求される。超電導ライナックを採用していることによりビームの構造には 1 msec という一つの長いパルスの中に 2820 バンチが詰め込まれているという特徴がある。このままでは、バンチ間隔が 337 nsec でダンピングリングの周長としては 300 km を必要としてしまう。これは現実的ではないので、実際にはリングへ入射する時にバンチ間隔を圧縮する。例えば、20 nsec まで圧縮できればリングの周長は 17 km で済む。さらに 6 nsec なら 6 km、3 nsec なら 3 km と必要とされる周長を短くすることが検討されている。しかしながら、バンチ間隔の圧縮には入射キッカーのパルスを如何に短くできるかに依存している。当然、射出する時には入射時のバンチ構造を復元するようにリニアックへ射出する。

リングのエネルギーは 5 GeV を基本として検討されている。もともと、入射キッカーの性能の制約上、20 nsec のバンチ間隔が限度であると考えられていたので TESLA のデザインでは周長 17 km のダンピングリングを採用していた。長い周長であるために建設コストを低減するためにアーク部を短くし直線部を増やして、直線部はメイン・ライナックのトンネルと共用する方針が取られていた。このためリングの形状は我々の思い描く「リング」とはほど遠く独特な形であるがために”dogbone”(犬の骨) リングと呼ばれる。dogbone リングは長い直線部を持つため、空間電

荷効果によるエミッタンス増加が問題となる。これを低減するために XY カップリングをわざと作って見かけ上ビームサイズを大きくするためのカップリング・バンプが直線部に採用されている。先に述べたビームのエネルギーは、こうした空間電荷効果、減衰時間、高周波加速空洞のパワー、アーク部の設計等を考慮に入れて決められている。前章で述べたように、アーク部は低エミッタンスのラティスである TME 等を採用しているがリングのエネルギーが高いため悲しいことにエミッタンスの減衰に寄与しているのは主にダンピング・ウイグラーである。このダンピング・ウイグラーのセクションは長く、ウイグラーの持つ非線形性がリングのダイナミック・アパーチャー(力学的口径)に対して問題となるかも知れない。

最近になって、入射キッカーのパルスを短くできる可能性が出て来たので周長が 6 km と 3 km のリングも検討された。こうした比較的短いリングの形状は円型に近い形またはレーストラックである。最終的に現在の段階では、6 km のリングが ILC の基本設計となっている。以下、ダンピングリングを単にリングと称することにする。

7.2 ダンピングリングに対する要求

最終的に射出されるビームのエミッタンスは

$$\varepsilon_{ext} = \varepsilon_{eq} + (\varepsilon_{inj} - \varepsilon_{eq})e^{-\frac{2T}{\tau_D}} \quad (7-1)$$

となる。 ε_{eq} はリングの平衡エミッタンス、 ε_{inj} は入射ビームのエミッタンス、 ε_{ext} は射出ビームのエミッタンスである。 τ_D は横方向のベータトロン振動の減衰時間、 T はリングでの蓄積時間である。バンチの詰まった一つのパルスに相当するものをトレインと呼ぶ。トレインのやってくる頻度は設計上 5 Hz なのでリングにビームを蓄積できる時間は最大 200 msec である。十分な減衰を得るために約 7 ダンピング時間を確保するためには横方向のベータトロン振動の減衰時間を 28 msec 以下にする必要がある。図 10 にシミュレーションによって得られた陽電子入射ビームのリングのエネルギーで規格化されたベータトロン振幅を示す。リングのエネルギーは 5 GeV である。最大規格化ベータトロン振幅で 0.09 m ある陽電子入射

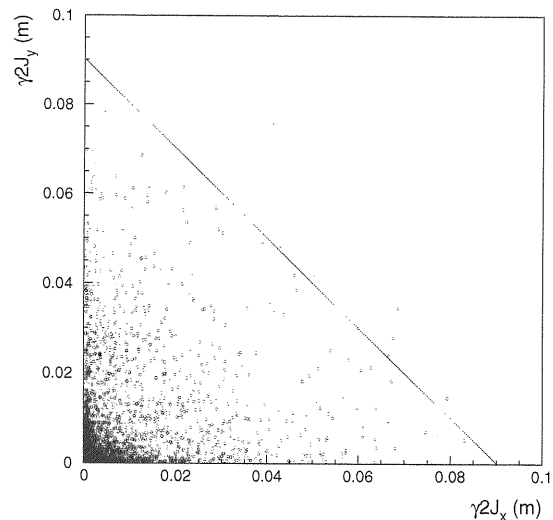


図 10: 陽電子入射ビームの規格化ベータトロン振幅 (シミュレーション)。

ビームを、水平方向の規格化エミッタンス $8 \mu\text{m}$ 、垂直方向の規格化エミッタンス $0.02 \mu\text{m}$ となるようにエミッタンスを減衰させて送りすことがリングに対して要求されている。そのためには、リングの平衡エミッタンスは 5 GeV で $5 \times 10^{-10} \text{ m}$ 、カップリングは 0.2 % が目標となる。

表 1: ダンピングリングへ入射されるビームのパラメータ。

	電子	陽電子	
トレインの繰り返し	5		Hz
トレイン内のバンチ数	2820		
バンチ内の粒子数	2×10^{10}		
$\gamma(2J_x + 2J_y)$	-	0.09	m
エネルギーのずれ許容値	-	0.5	%
入射規格化エミッタンス	45	-	μm
エネルギーの広がり	0.1	-	%
偏極度	>80	-	%

電子リングと陽電子リングの基本設計は同じである。したがって、電子入射ビームのエミッタンスは通常、陽電子入射ビームより小さいのでリングのダイナミック・アパーチャーは陽電子ビームを損失なく蓄積時間保てれば良い。陽電子入射ビームの電荷量は大きく、エミッタンスも大きいので

表 2: ダンピングリングから射出されるビームのパラメータ。

	電子	陽電子	
バンチの分離	337		nsec
規格化水平エミッタンス	8		μm
規格化垂直エミッタンス	0.02		μm
エネルギーの広がり	<0.15		%
バンチ長	6		m
垂直方向ジッター	<0.1 σ_y		
偏極度	>80	-	%

広いダイナミック・アパーチャーがリングには要求される。

7.3 ダンピングリングのデザイン

7.3.1 17 km リング

いわゆる TESLA タイプのリングで周長は 17 km と長い直線部と小さなアーク部を持つ dogbone 型のリングである。鳥瞰図を図 fig:TESLA-geom に示す。直線部には高周波加速空洞を設置するためのセクションとウイグラー・セクションがある。アーク部のラティスは TME である。また、アーク部のラティスとして FODO、 π セルのリングも検討されている。このリングには二本の直線部を共通のトンネルに設置するために順方向と逆方向へ曲げる二種類の偏向磁石がある。そのため、偏向角の総和は普通のリングでは 2π であるが dogbone の場合は $2\pi F_b$ で $F_b \simeq 2$ なので、ほぼ 4π となる。

リングのベータトロン振動の減衰時間は

$$\tau_{\beta x} = \frac{3T_0}{r_e \gamma^3} \frac{1}{J_{\beta x} I_2} \quad (7-2)$$

である。 I_2 はアーク部とウイグラー・セクションを考慮する。また、ウイグラーの偏向磁石はレクタングル型とし、ウイグラーでは $J_{\beta x} \simeq 1$ である。

$$\begin{aligned} J_{\beta x} I_{2 \text{ arc}} + I_{2 \text{ wig}} &= J_{\beta x} \frac{2\pi F_b}{\rho_b} + \frac{L_w}{\rho_w^2} \\ &= \frac{2\pi F_b}{\rho_b} (J_{\beta x} + F_w) \end{aligned}$$

$$F_w = \frac{I_{2 \text{ wig}}}{I_{2 \text{ arc}}} = \frac{L_w / \rho_w^2}{2\pi F_b / \rho_b}$$

ここでアーク部の偏向磁石の曲率半径を ρ_b 、ウイグラー・セクションの偏向磁石の曲率半径を ρ_w 、ウイグラー・セクションの長さを L_w とした。これより減衰時間は

$$\tau_{\beta x} = \frac{3T_0}{r_e \gamma^3} \frac{1}{J_{\beta x}} \frac{\rho_b}{2\pi F_b (J_{\beta x} + F_w)} \quad (7-3)$$

となる。通常のリングの場合 $F_b = 1$ であるが、dogbone の場合、 $F_b \simeq 2$ なので逆偏向磁石を導入することは減衰時間を短くすることに貢献している。

さて、エミッタンスはどうかというと

$$\varepsilon_x = C_q \gamma^2 \frac{I_{5 \text{ arc}} + I_{5 \text{ wig}}}{J_{\beta x} \frac{2\pi F_b}{\rho_b} + \frac{L_w}{\rho_w^2}} \quad (7-4)$$

$$= \frac{J_{\beta x} \varepsilon_{x \text{ arc}} + F_w \varepsilon_{x \text{ wig}}}{J_{\beta x} + F_w} \quad (7-5)$$

となる。 $\varepsilon_{x \text{ arc}}$ と $\varepsilon_{x \text{ wig}}$ はそれぞれアーク部とウイグラー・セクションの平衡エミッタンスである。アーク部の偏向磁石をセパレート型にすれば $J_{\beta x} \simeq 1$ である。 F_w を最適化することによって必要なエミッタンスと減衰時間が得られるように設計する。dogbone の場合、 $F_w \simeq 15$ となっている。

ビーム・エネルギーに比べて非常に長い周長をもつため空間電荷効果によるインコヒーレントなベータトロン・チューンの広がりを考慮しなければならない。空間電荷効果によるチューンの広がり

$$\Delta\nu_{x,y} \simeq \frac{r_e C N}{(2\pi)^{3/2} \gamma^2 \sqrt{\varepsilon_x \varepsilon_y} \sigma_z} \quad (7-6)$$

である。 N はバンチ内の粒子数、 C は周長、 σ_z はバンチ長である。リングからメイン・ライナックへとビームを戻す時バンチの長さを短くするためのバンチ圧縮システムによってリングの平衡バンチ長が制限されている。基本的にバンチ長の設計値は 6 mm である。チューンの広がりを低減するために直線部ではカップリング・バンプを採用し見掛け上垂直方向のエミッタンスを局所的に増やしている。カップリング・バンプにはスキュー四極磁石を用いて XY カップリングをつくり、直線部で閉じるようにしている。

7.3.2 6 km リング

基本的思想は TESLA のダンピングリングを縮小して長い直線部を省いた設計となっている。したがって、リングは周長約 6 km のほぼ円形でアーク部と短い直線部とからなる。アーク部のラティスは基本的には TME で FODO も検討されている。直線部にはウイグラー・セクションと高周波加速セクションがある。空間電荷効果によるチューンの広がりほとんど無視できる。

7.3.3 3 km リング

周長約 3 km の円形もしくはレーストラック形でアーク部と短い直線部とからなる。アーク部のラティスは基本的には TME で π セルも検討されている。周長 6 km のダウンスケール版である。6 km リングと同様、空間電荷効果によるチューンの広がりほとんど無視できる。

7.4 ダイナミック・アパーチャー

リングへの入射効率や蓄積ビームの Touschek 寿命はリングのアクセプタンスに依存している。一般的には真空容器の大きさで制限される物理的アパーチャーよりも色収差補正のための六極磁石などの非線形効果を含むラティス設計に依存したダイナミック・アパーチャーによってリングのアクセプタンスは決まっている。ダイナミック・アパーチャーの評価にはベータトロン振動の減衰時間の間のビームの安定度を調べる。横方向の減衰時間は約 28 msec なので TESLA タイプのリングでは約 500 ターンに相当する。ビームの安定度は解析的な手法では、ほとんど不可能なので数値計算に頼らざるを得ない。具体的にはトラッキングを行う。トラッキングとは具体的にいくつかの粒子をリングに入れて加速器の構成要素の中での振舞を逐次追いかけるシミュレーション手法である。トラッキングを行うツールには色々なものがあるが、ここでは SAD(Strategic Accelerator Design) によるトラッキングを用いた結果を紹介する。SAD は KEKB、KEK-ATF、ILC 等色々な加速器の設計や研究に幅広く使われている。

6次元の正準パラメータとして $(x, p_x, y, p_y, z, \delta)$

を粒子の運動を記述するパラメータを取る。 p_x と p_y は横方向の正準運動量で基準運動量で規格化されている。入射ビームの形は xy 平面では円形とし入射キッカーによる入射エラー(振動)は無視できるものと仮定する。粒子の初期条件として $y_0 = x_0, p_{x0} = p_{y0} = 0$ とする。あらかじめ定められたターン数まで安定に粒子が回ることができれば、その初期を持つ粒子は無限に安定に回ると仮定する。与えられる初期値を大きくしていき決められたターン数を回ることができる最大値を探す。その最大値を周回粒子の安定度としてダイナミック・アパーチャーと定義する。SAD では探索する領域を 51 分割して初期値の小さいところからトラッキングを始め定められたターン数回の初期値の最大値を探す。今の場合、定められたターン数は横方向の減衰時間に相当するターン数である。ダイナミック・アパーチャーで使われるターン数は一般に特に決められたものはないが、通常、放射減衰つきでトラッキングをする場合減衰時間くらいとれば評価には十分である。放射励起は確率過程なので乱数を使用する必要があり、いささか厄介なのでトラッキングをする場合入れないことが多く結果にはそれほど影響しない。

7.4.1 ウイグラーのフリンジ磁場

短い減衰時間と小さなエミッタンスを得るために長いウイグラー・セクションを持つ dogbone タイプのリングではウイグラー磁石の非線形効果がダイナミック・アパーチャーに影響を及ぼす可能性がある。ウイグラーの入っているリングの垂直方向ハミルトニアンは

$$H = H_0 + \frac{L_w}{4\rho_w^2}y^2 + \frac{L_w}{12\rho_w^2}k^2y^4 \quad (7-7)$$

であり、 H_0 はウイグラーの入っていない場合のハミルトニアンである。 $k = 2\pi/\lambda_w$ で λ_w はウイグラーのピリオド長である。したがって、ウイグラー磁石によるベータトロン・チューンシフトは

$$\Delta\nu_y = \frac{\beta_y}{4\pi} \left(\frac{L_w}{2\rho_w^2} + \frac{L_w k^2}{3\rho_w^2}y^2 \right) \quad (7-8)$$

となる。 β_y はウイグラー内の平均的なベータ関数である。第二項はウイグラーによるチューンシ

フトで振幅に依存する項を含んでいる。一方、ハミルトニアンをクーラン = シュナイダー不変量で展開した形は

$$H = 4\pi (\bar{\nu}_x J_x + \bar{\nu}_y J_y + \bar{\nu}_z J_z + c_{xx} J_x^2 + c_{yy} J_y^2 + c_{zz} J_z^2 + c_{xy} J_x J_y + c_{yz} J_y J_z + c_{zx} J_z J_x + \dots) \quad (7-9)$$

である。これより J_y の一次までとるとチューンは

$$\nu_y = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial H}{\partial J_y} = \bar{\nu}_y + 2c_{yy} J_y \quad (7-10)$$

となる。式 (7-8) と式 (7-10) を比較して、チューンの振幅に依存する項の係数は

$$c_{yy} = \frac{\beta_y^2 L_w k^2}{12\pi \rho_w^2} \quad (7-11)$$

となる。こうしたチューンの振幅依存が生じるのはウイグラー磁石のフリンジ磁場の非線形効果によるものである。ウイグラー磁石の非線形フリンジ磁場の影響を SAD のトラッキングを用いて調べてみた。SAD ではウイグラー磁石の磁場は進行方向には台形で近似し (図 11)、 $O(y^4)$ までの項がモデル計算に含まれている。フリンジ磁場の領域は

$$F_1 = 6 \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{B_y(s)}{B_0} - \left(\frac{B_y(s)}{B_0} \right)^2 \right\} ds \quad (7-12)$$

によってパラメータ定義する。 B_0 はウイグラー磁石のピーク磁場で $B_y(s)$ はウイグラー磁石の垂直方向の磁場で進行方向の場所の関数である。

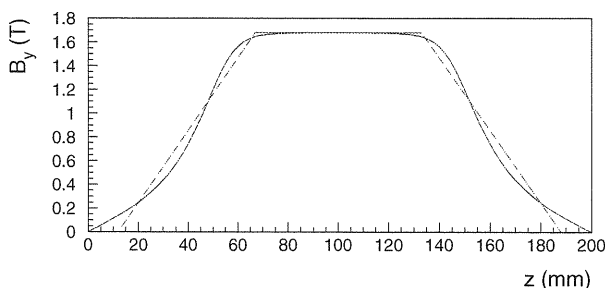


図 11: ウイグラーの磁場分布 (進行方向)。青線は実際のウイグラーの磁場分布で赤線は台形近似したもの。

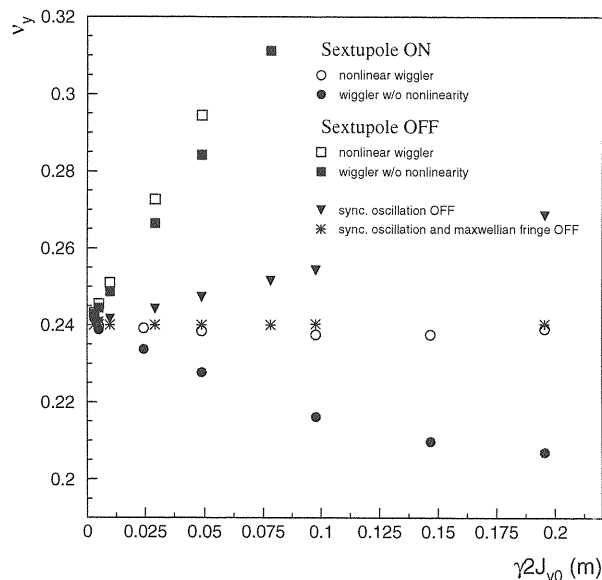


図 12: TESLA dogbone リングについての垂直方向のチューンの振幅依存。丸印は六極磁石をオン、四角印、三角印、バツ印はオフした場合。三角印はシンクロトロン振動をオフ。バツ印はシンクロトロン振動オフ、全ての磁石のマクセル・フリンジ磁場をオフ。

図 12 に TESLA dogbone リングについて SAD のトラッキングによって得られた垂直方向のチューンの振幅依存を示す。図から六極磁石をオンの場合とオフの場合について、ウイグラー磁石の台形フリンジ磁場の影響を c_{yy} で表現した結果を表 3 にまとめてみた。当然、シンクロトロン振動を

表 3: トラッキングによって求めた TESLA dogbone リングの非線形係数 c_{yy} 。ウイグラー磁石の台形フリンジ磁場による非線形のある場合とない場合。

六極	非線形なし	非線形あり	あり - なし
オン	-2361	-238	+2123
オフ	+8858	+11061	+2203

オフして全ての磁石のフリンジ磁場をオフすれば振幅に依存したチューンシフトは生じない。六極磁石をオンした場合とオフした場合でウイグラー磁石の台形フリンジ磁場の影響は、ほぼ同じで

約+2100である。式(7-11)を使って、解析的にウイグラー磁石の非線形効果による c_{yy} を計算してみる。TESLA dogboneリングにおけるウイグラー磁石での平均的なベータ関数を8.7 m、ウイグラー・セクションの長さを417 m、ウイグラー磁石の曲率半径を10 m、ピリオド長を0.4 mとすると c_{yy} は+2066となる。この値はSADによるトラッキングから得られた値と良く一致している。したがって、SADによるトラッキングはウイグラー磁石のフリンジ磁場をよく再現している。実際に、SADのトラッキングを使ってダイナミック・アパーチャーを計算してみる。図13にダイナミック・アパーチャーの計算結果を示す。図にあるようにウイグラー磁石の台形フリンジ磁場がある場合とない場合では、さほど大きな違いは見られなかった。したがって、この場合のウイグラー磁石のフリンジ磁場による非線形効果はダイナミック・アパーチャーに影響を及ぼしていないと考えられる。

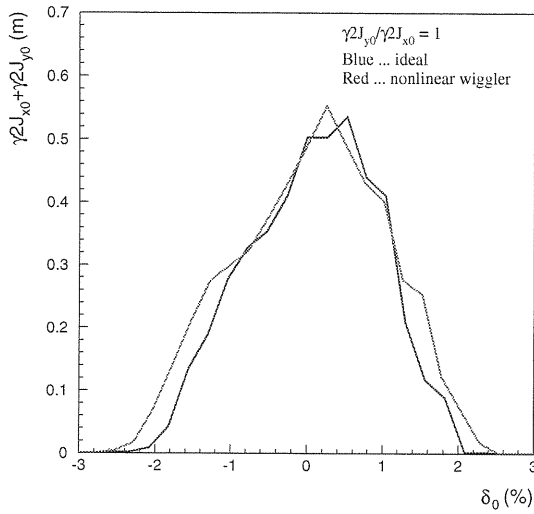


図 13: TESLA dogbone リングのダイナミック・アパーチャー。青線はウイグラー磁石の台形フリンジ磁場なし。赤線は台形フリンジ磁場あり。

7.4.2 ダイナミック・アパーチャー サーベイ

17 km、6 km、3 km リングのそれぞれについてダイナミック・アパーチャーの計算結果についてまとめておく。偏向磁石、四極磁石、六極磁石の磁場に誤差のない場合とマルチポール磁場によ

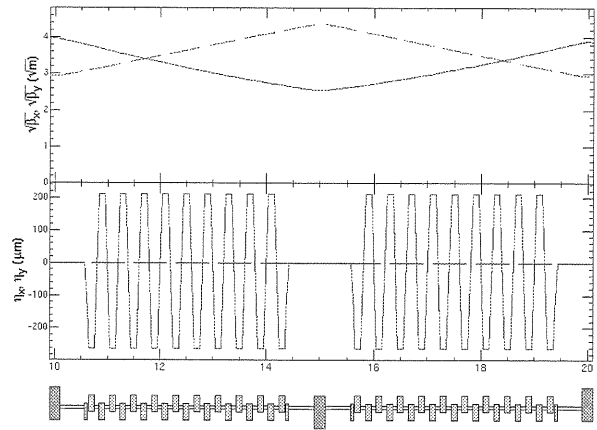


図 14: TESLA のウイグラー (1 セル)。

る誤差をいれた場合について調べてみた。マルチポール磁場による誤差としては既存の加速器であるSPEARやPEP-IIなどの経験または測定から、だいたいこんなものだろうという値を使用した。ダイナミック・アパーチャーを調べる時の初期条件は $J_{y0}/J_{x0} = 1$ とした。テストしたラティスは、TESLA dogbone(17 km、TME)、MCH(16 km、 π セル)、OCS(6 km、TME)、PPA(3 km、 π セル)のラティスである。図16にダイナミック・アパーチャーの計算結果を示す。図17と図18にチューン・サーベイの結果を示す。チューン・サーベイでは、チューンを少しずつ変えながらダイナミック・アパーチャーサーベイを行い、運動量のずれの初期値の絶対値が0.5%以内の範囲で最小のダイナミック・アパーチャーをプロットしたものである。一応、どのラティスも運動量のアクセプタンスが0.5%以内で $\gamma(2J_x + 2J_y) = 0.09$ mのダイナミック・アパーチャーを確保している。しかしながら、6 km リングのOCSというラティスがチューンスペース的に見ても一番ダイナミック・アパーチャーが広い。したがって、ダイナミック・アパーチャーが単に広いという理由だけではないがOCSがILCダンピングリングの基本設計となっている。検討を行ったラティスの一覧を表4に示す。

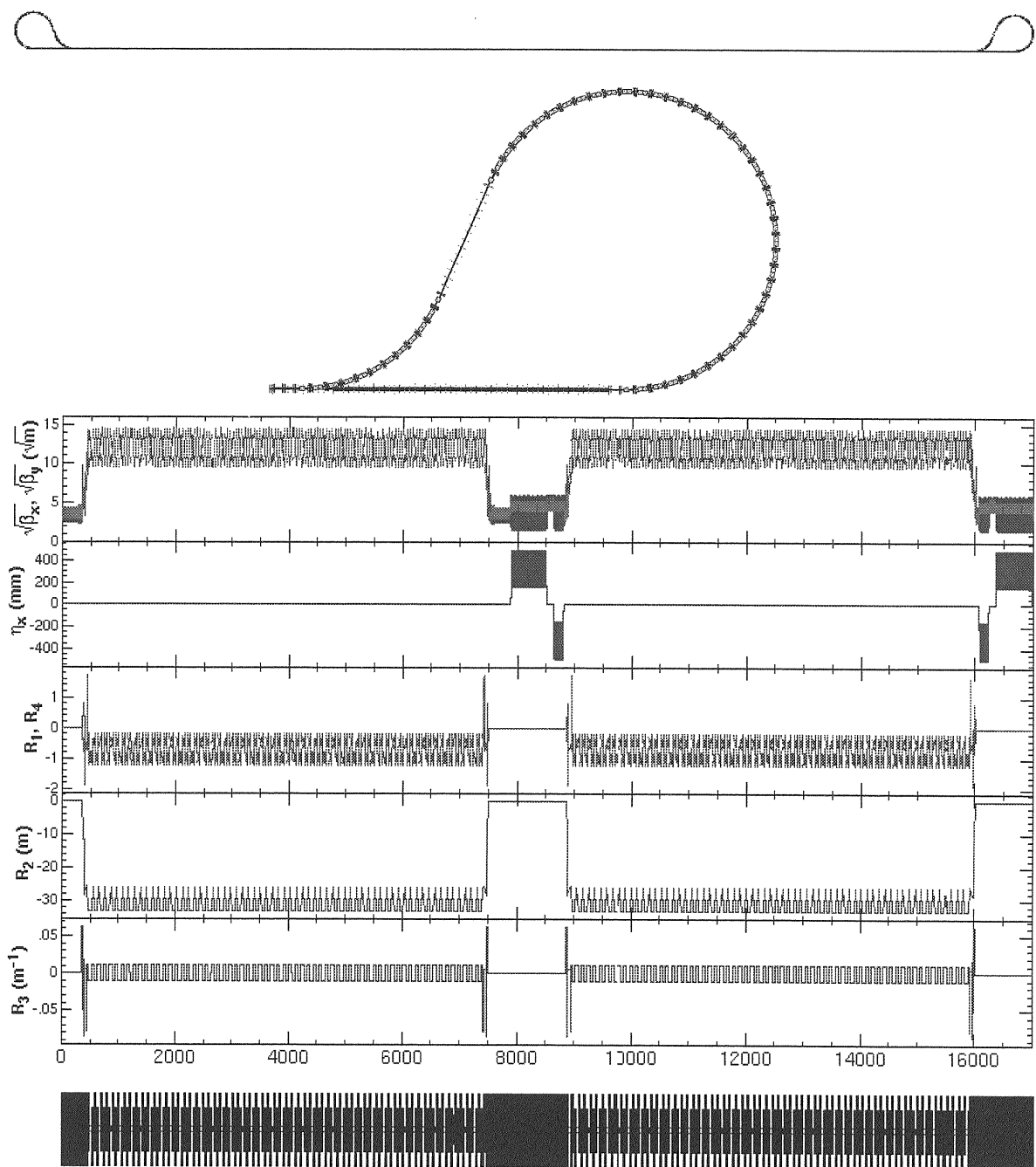


図 15: TESLA dogbone の鳥瞰図 (上)。片側のアーク部 (中)。TESLA dogbone のラティス (下)。

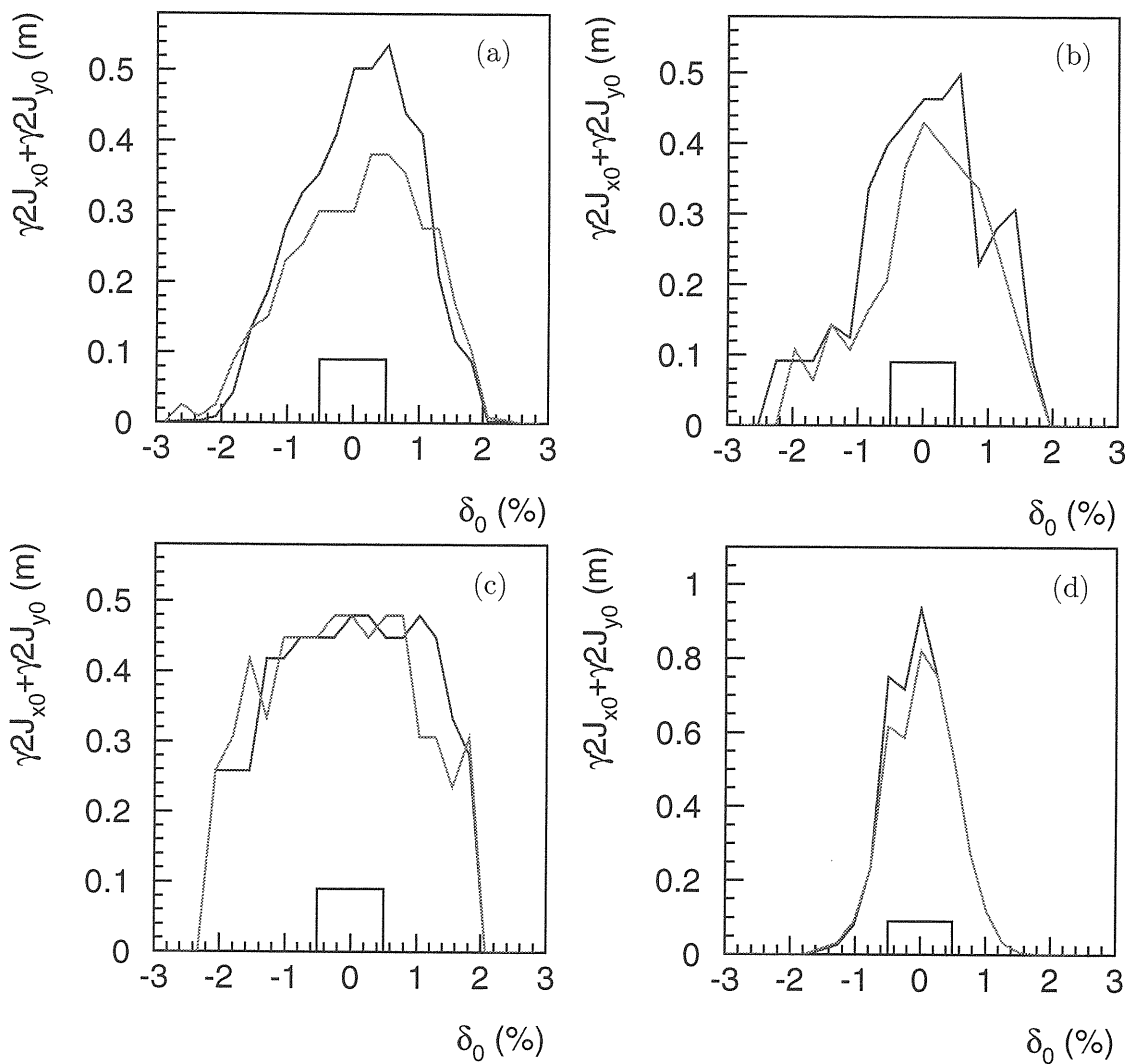


図 16: ダイナミック・アパーチャー。(a) TESLA dogbone、(b) MCH($V_c = 115$ MV)、(c) OCS、(d) PPA。青色は磁場の誤差のない場合、赤色はマルチポール磁場の誤差を入れた場合。

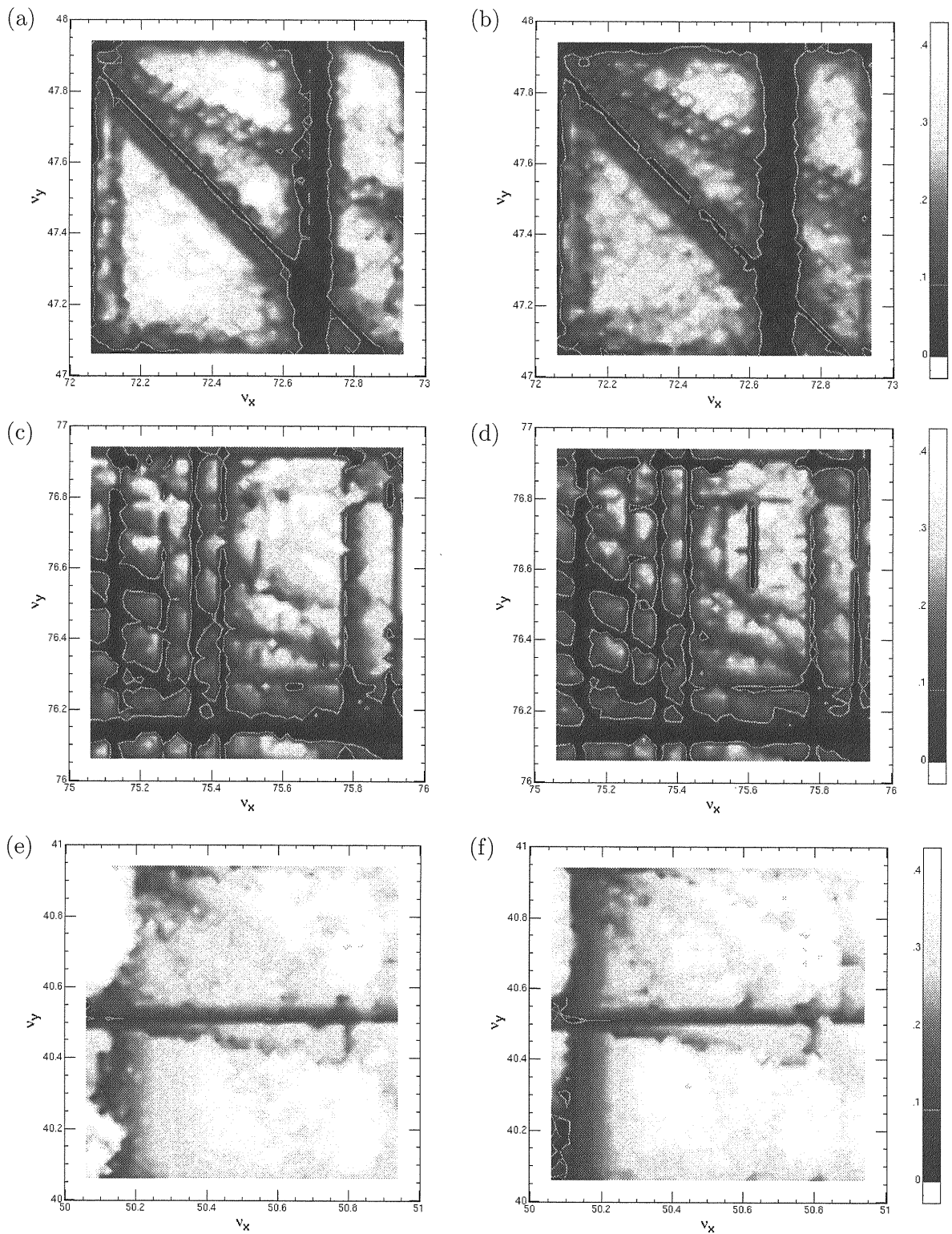


図 17: ダイナミック・アパーチャーのチューン・サーベイ。初期条件は $J_{y0}/J_{x0} = 1$ 。 $|\delta_0| < 0.5\%$ で最も小さい $\gamma 2J_{x0} + \gamma 2J_{y0}$ を表示。色が薄いほど大きなダイナミック・アパーチャーを示す。白い領域は 0.4 m より大きいダイナミック・アパーチャーがあるところ。左側は磁場の誤差のない場合。右側はマルチポール磁場の誤差を入れた場合。(a)(b) TESLA dogbone、(c)(d) MCH($V_c = 115\text{ MV}$)、(e)(f) OCS。

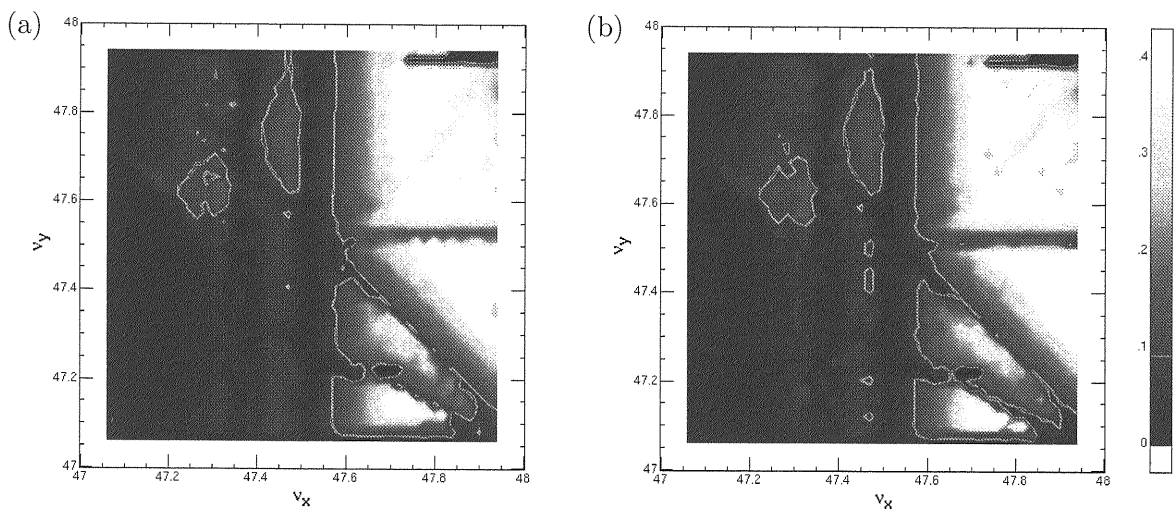


図 18: 図 17 と同様。(a)(b) PPA。

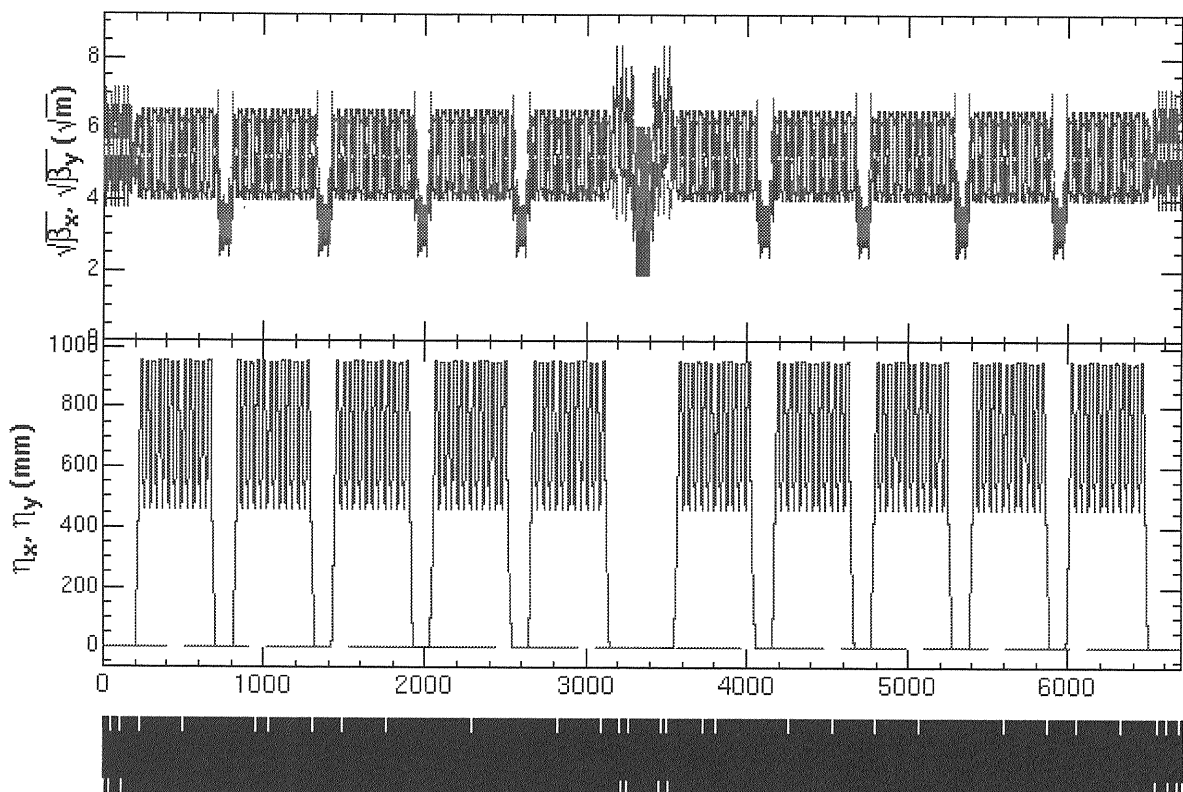


図 19: OCS ラティス。

表 4: ILC ダンピングリングとして検討されたラテイス。

種類	周長	アーク部	エネルギー
TESLA	17 km	TME	5 GeV
DAS	17 km	π	5 GeV
MCH	16 km	FODO	5 GeV
OCS	6.5 km	TME	5 GeV
BRU	6.3 km	FODO	3.74 GeV
OTW	3.2 km	TME	5 GeV
PPA	2.8 km	π	5 GeV

7.5 その他に検討すべきこと

ビーム力学として集団的効果について、以下の事も検討しなければならない項目である。

- 空間電荷効果
- イオン不安定効果 (電子リング)
- 光電子雲効果 (陽電子リング)

しかしながら、ここでは割愛させて頂く。その他、加速器のハードウェアとしての構成要素である真空システム、電磁石、高周波加速空洞等も割愛させて頂く。

8 あとがき

とにかく、短く限られた時間で原稿を書いたこともあって、計算違いやミスタイプ等の誤りがあるかも知れません。読者からのご質問、コメント、ご指摘、ご叱責を甘んじて受けるつもりです。以下のサイトに今回紹介できなかった内容の情報が 있습니다。意欲的な読者は参考にしてみてください。

<https://wiki.lepp.cornell.edu/ilc/bin/view/Public/DampingRings/ConfigStudy>

ILC のダンピングリングの設計は、まだまだ始まったばかりで建設のための具体的な検討の準備をしている段階です。ILC プロジェクトは長期にわたるプロジェクトで、あたかも惑星間宇宙旅行のようなもので一世代では到達し得ないものであ

ると思っています。したがって、もし興味があれば、特に若い世代の人々が積極的に参加されることを願っています。

参考文献

- [1] 神谷幸秀、OHO '84。
- [2] 大見和史、OHO '91。
- [3] 小林幸則、OHO '91。
- [4] 船越義裕、OHO '94。
- [5] “Configuration Studies and Recommendations for the ILC Damping Rings”, LBNL-59449, Cockroft-06-04。
- [6] D. Sagan et al, “A Magnetic Field Model for Wigglers and Undulators”, ICFA Beam Dyn. Newslett. 31:48-52, 2003。
- [7] M. Tischer, J. Pfluger and W. Decking, “A Permanent Magnet Wiggler Design for the TESLA Damping Ring”, TESLA 2000-20, Dec. 2003.。
- [8] Y. Cai, “Description of multipole errors used in acceptance simulations”, http://www.desy.de/~awolski/ILCDR/DRConfigurationStudy_files/Task1.htm.
- [9] SAD のホームページ、<http://acc-physics.kek.jp/SAD/sad.html>。