

ここでは、主リニアックとバンチ圧縮装置 (bunch compressor) のビームダイナミクスについて述べる。

1. 主リニアック

1. はじめに

主リニアックは LC の中で圧倒的に長い部分であるが、ビームダイナミクスの観点からは単純な基本要素の繰り返しであり、数が非常に多いことを除き、LC のほかの部分と比べて複雑な部分ではない。

同じ要素の多数の繰り返しであるため、後でみるように、ある程度解析的な計算が有力である場合も多い。しかしながら、軌道の補正などを含めるには解析的な計算のためには問題が複雑になりすぎる。したがって、ほとんどの場合、計算機を使ったシミュレーションが欠かせないものとなっている。

2. ILC 主リニアックの構成

2.1. パラメーターと基本構成単位

Table 1 に、衝突点での重心系エネルギー 500 GeV の場合の現時点 (2006 年 7 月) での ILC 主リニアックのパラメーターのうち、ビームダイナミクスに特に関係するものを示す。パラメーターは一つの決まった値でなく、ある幅を持っている。

主リニアックは、基本的に Fig 1 のようなクライオモジュール 3 つからなる構成単位の繰り返しである。電子、陽電子それぞれの主リニアックには、この単位が約 320 個ある。

24 個の加速空洞毎に、4 極磁石が置かれる。4 極磁石の両側には BPM (ビーム位置モニター) とステアリング磁石 (主に補正用の弱い 2 極磁石) がある。

Table 1, Parameter of ILC Main Linac (ECM=500 GeV)

Beam energy	13~15 GeV to 250 GeV
Acc. Gradient	31.5 MV/m
Bunch Population	$1 \sim 2 \times 10^{10}$ /bunch
Number of bunches	≤ 5640 /pulse
Total particles	$\leq 5.64 \times 10^{13}$ /pulse
Bunch spacing	≥ 150 ns
Bunch Length	0.15 ~ 0.3 mm
Emittance x	$8/10 \sim 12 \times 10^{-6}$ m-rad
Emittance y (at DR exit/IP)	$2/3 \sim 8 \times 10^{-8}$ m-rad

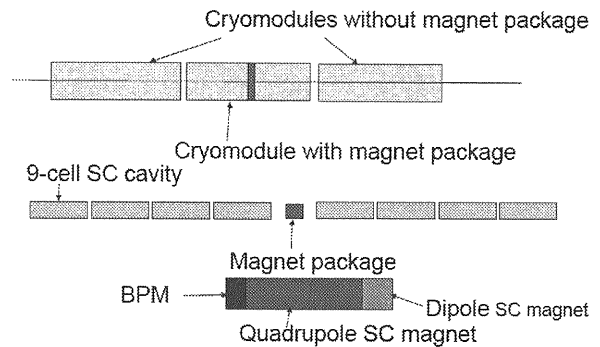


Fig. 1, Unit in Main Linac. There will be about 320 units per Linac.

ただし、32個の加速空洞毎に、つまり、4個のクライオモジュールのうちの一台中に4極磁石を1個置くという案もある。今年の7月まではこれが標準の設計であったため、以下に出てくる図や数値にはこのような構成を仮定しているものもある。このため数値の若干の違いがあるが、重要な性能上の違いはないはずである。

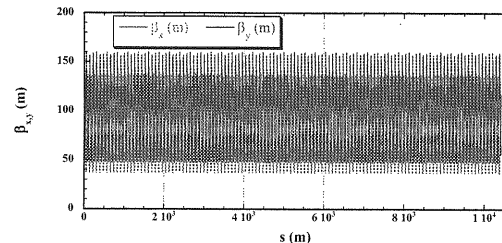
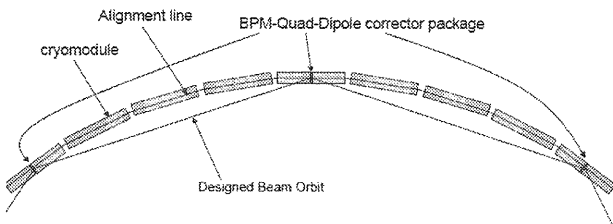


Fig. 2, Beta-function vs distance.

Fig. 2 に4クライオモジュールに1個の4極磁石を置く場合のベータ関数を示す。単純な FODO であり、この設計では、FODO セル当たりの位相の進みは水平方向 75、垂直方向 65 度で、リニアックのどこでも一定である。

2.2. 地球の表面に沿うリニアック

長い距離にわたって超伝導空洞に液体ヘリウムを供給するための技術的な理由から、主リニアックのクライオモジュール（に沿ったヘリウム供給ライン）は、重力に対して垂直（水平面に対して平行）に設置されるのが望ましい。つまり、主リニアックは地球の表面に沿った曲線になる。ビーム옵ティクスとしてセル当たりの位相の進みが一定の FODO を仮定し、アラインメントの設計基準線（全てのコンポーネントがこれを基準にして設置される）を円とし、ビームが4極磁石の中心を通るようにすると、ビームの設計軌道は Fig.3, 4 のようになる。ステアリング磁石は補正のためだけでなく、このような軌道を作るためにも使用する。



(Vertical scale is extremely exaggerated)

Fig. 3, Schematic view of alignment and beam orbit which are following the earth curvature.

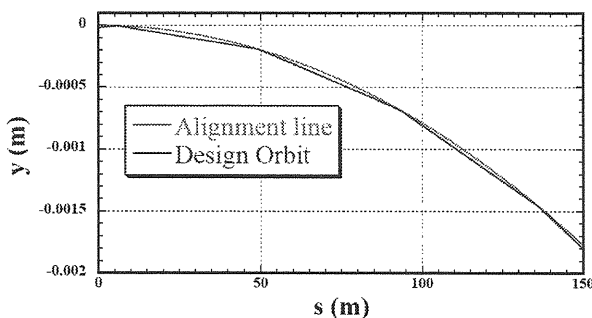


Fig. 4, Alignment line and beam orbit, 150 m of the main linac.

この曲がり滑らかで緩やかであれば、ビームダイナミクスの観点からは問題にならないと考え

られるが、これはきちんと確認しておく必要がある（次節以降参照）。

3. ビームの質

主リニアックの役目は、当然ながらビームを加速することであるが、「ビームダイナミクス」の研究の主な目的は、「いかに質の良さを保ちながらビームを加速するか」であると言える。

「ビームの質」とはなにか？大雑把には、全ての方向についてビームのばらつきが小さいことであると言える。

この「方向」は普通、縦方向（ビーム軸方向）と横方向に分けられる。また、横方向は、水平方向と垂直方向に分ける。これら3つの「方向」（自由度）各々について2次元（位置と運動量、など）となる位相空間を考えるのが普通である。

ビームは、この合計6次元の位相空間の中に分布しているわけだが、大雑把に言えば、この分布が安定しており（どのパルスのどのバンチも同じような分布を持つ）、分布の範囲が狭い（バンチのサイズが小さい、など）ビームが「良質」であると言える。

ビームの「質の良さ」は基本的にダンピングリングで作られ、その下流では、この質をいかに保っていくかが課題になる。

4. エネルギーの広がり と 安定性

まず、縦方向を考える。これは、粒子の縦方向の運動量と位置の2次元としてもよいが、エネルギーと時刻（ある位置に到達する相対的な時刻）と考えてもよい。主リニアックの場合、ビームエネルギーが高く、超相対論的であることから、縦方向の位置は固定されていると考えてよい。縦方向の位置の変化はバンチ圧縮装置では非常に重要になるが、主リニアックでは、エネルギーの分布の変化のみを考えておけばよい。

従って、主リニアックに関するビームの縦方向の質は、

- (1) エネルギーの安定性、
- (2) エネルギーの広がり の小さいこと、

である。

エネルギーの不安定や広がりが増大は、2つの影響をもたらす。すなわち、

- (a) 重心系エネルギーの安定性、精度の悪化
- (b) 粒子のエネルギーに依存した横方向の運動(粒子軌道)の変化。それによるルミノシティの減少。

ただし、(a)は、物理のテーマによるがほとんどの場合 (b)ほどは問題にならないと思われる。

一方、(b)は、理想的には存在しないものであるが、実際上はより重要になる場合が多い。

4.1. 単バンチのエネルギーの広がり

まず、単バンチのエネルギーを考える。

高周波による加速と加速空洞でのウェーク場を考慮する必要がある。

線電荷密度を $\lambda(z)$ 、ウェーク関数を $W(z)$ とすると、位置 z にある粒子がウェーク場のために失うエネルギーは

$$E_{loss} = e \int_{-\infty}^z dz' \lambda(z') W(z-z') \quad (4-1)$$

と書ける。

Fig. 5には、短距離でのウェーク関数[1]と電荷密度($\sigma=0.3$ mmの正規分布)を、Fig.6に式(4-1)から計算したエネルギー損失を示した。

高周波による加速勾配の設計値が31.5MV/mであるから、ウェーク場の効果は最も大きいところで約0.25%になる。

高周波によるエネルギー増、ウェーク場によるエネルギー減、これらの合計をしめしたのがFig.7である。

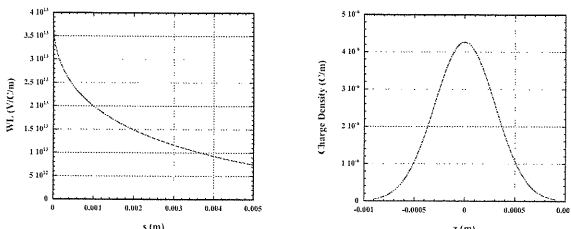


Fig.5, Wake function (left) and charge density in a bunch.

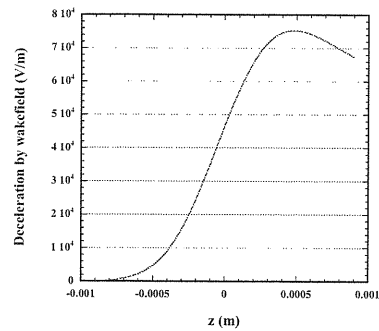


Fig. 6, Energy loss per unit length of accelerating cavity due to wakefield. Single bunch.

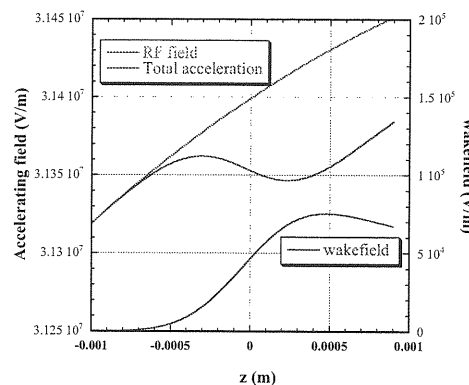


Fig. 7, Energy gain from RF field, energy loss due to wakefield and total energy gain per unit length.

図に示したように、エネルギーの広がりを最小にするためにバンチの中心は高周波電場のピークではなく約5度ずれたタイミングに置いている。エネルギーの広がりは一線アックの中ではあまり増加しない。加速があるために相対的なエネルギーの広がり減少する。Fig.8に、これを示した。電子ビームの場合は陽電子生成のためのアンジュレーターを通る部分でエネルギーの広がりが増大する。(エネルギーは減少する。)

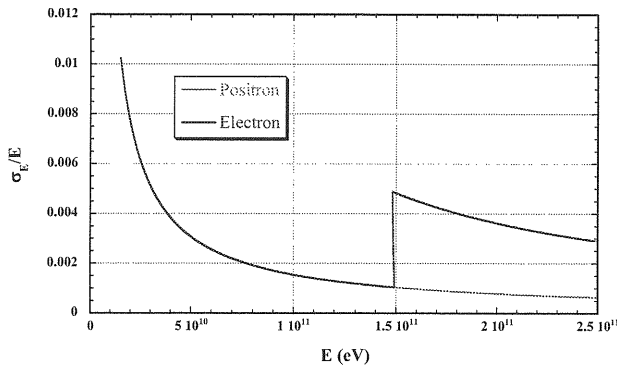


Fig. 8, Relative energy spread in the main linacs.

エネルギーの広がり設計よりも増大する要因としては、高周波の位相のずれなどが考えられるが、すぐ後でみるエネルギー（の中心）の安定性からの要求に比べれば、要求される精度は非常に緩い。

4.2. バンチ間のエネルギーのばらつき

次に、バンチ間でのエネルギーの違いを考える。バンチ内のエネルギーの広がり避けられないものであるから、バンチ間の差はこれに比べて十分に小さくなっていけばよい。

バンチ毎のエネルギーの安定性は、「ローレンツデチューニング」やビーム入射時に変動するビームローディングなどを補償する、高周波の制御の精度に依存している（他の講義参照）。

バンチ内では（短距離の）ウェーク場が重要であったが、バンチ間で働く長距離の高次モードのウェーク場はあまり問題にならない。減衰と、周波数が空洞ごとにわずかながらばらつくことにより、バンチが多数あってもウェーク場の影響が蓄積しないためである（5.3.6 横方向のウェーク場の議論を参照）。

4.3. エネルギーの安定性

エネルギーは当然なるべく安定であったほうがよいが、要求される安定性の目安は、単バンチのエネルギーの広がりより（十分）小さいということである。

エネルギーの安定性は、高周波電場の振幅と位相の安定性から決まる。

高周波電場の振幅と位相の変動が、クライストロンからの高周波の変動によるとき、個々のクライストロンの変動が独立であるとする、ビームエネルギーの変動の RMS (Root Mean Square) δE は、

$$\delta E / E \approx \frac{1}{\sqrt{n_{\text{kly}}}} \left(\delta_{\text{amplitude}} + \delta_{\text{phase}} \left| \sin \phi_0 / \cos \phi_0 \right| \right) \quad (4-1)$$

となる。ただし、 E は平均加速エネルギー、 n_{kly} はクライストロンの数、 $\delta_{\text{amplitude}}$ は各クライストロン出力の振幅の相対的な変動の RMS、 δ_{phase} は位相の変動、 ϕ_0 は平均の位相。

リニアックの全ての高周波が全て共通の変動を持つ（大本の電源の変動、全システムの標準となるの高周波ラインの変動など）とすると、ビームエネルギーのずれ ΔE は、

$$\Delta E / E \approx \Delta_{\text{amplitude}} - \Delta_{\text{phase}} \sin \phi_0 / \cos \phi_0 \quad (4-2)$$

となる。ただし、 $\Delta_{\text{amplitude}}$ は振幅の相対的なずれ、 Δ_{phase} は位相のずれである。

それぞれ項目の、主リニアックの終点（ビームエネルギー 250 GeV）でのエネルギー変動への寄与の許容値を 0.02 % とすると、 $(n_{\text{kly}} \approx 320, \phi_0 \approx 5^\circ)$ として、

$$\begin{aligned} \delta_{\text{amplitude}} &< 3.6 \times 10^{-3} \\ \delta_{\text{phase}} &< 3.6 \times 10^{-2} \text{ rad} \approx 1.8^\circ \\ \Delta_{\text{amplitude}} &< 2 \times 10^{-4} \\ \Delta_{\text{phase}} &< 2 \times 10^{-3} \text{ rad} \approx 0.1^\circ \end{aligned} \quad (4-3)$$

となる。

ただし、ゆっくりした変動はフィードバックによって補正することが可能であり、ここで計算した許容値はフィードバックできないような速い変動についてもものである。ILC の繰り返しは 5 Hz

であり、これよりも十分遅い変動に対する許容値は、はるかに緩いものとなる。

5. 横方向のビームの質

良質のビームとは、高いルミノシティの得られるビームである。横方向の運動を考えた場合、それは

- (1) 衝突点でのビーム位置の安定性。
- (2) 衝突点でのビームの広がり（ビームサイズ）が小さいこと。

の2つだと言える。

衝突点でのビーム-ビーム相互作用の考察から、ビームの断面の形は丸でなく扁平なほうがよい。ビームの大きさの下限は、エミッタンスによって制限される（Oide-limit, Hour-glass effect, 他の講義参照）ため、低エミッタンスを得やすい垂直方向のビームサイズを水平方向のサイズよりも小さくする。ILC の設計値は垂直方向のエミッタンスは水平方向の 1/200 以下、衝突点での垂直方向のビームサイズは水平方向の約 1/100 である。そのため、ビーム位置の安定性や、ビームサイズの増大によるルミノシティの減少は、垂直方向の影響が水平方向に比べて非常に大きい。

従って、ここでは、垂直方向のみを考える。

5.1. ビーム位置の安定性

衝突点で、2つのビームの位置がビームサイズと同程度以上にずれていれば、ルミノシティの大きな減少をもたらす。従って、ビーム位置の変動はビームサイズよりも（十分）小さい必要がある。ビーム位置（ビーム軌道）の変動をもたらす主リニアック内の主要な原因は、

- (1) 4 極磁石の振動によるビーム位置のずれ
- (2) 磁場強度の変動によるビーム位置のずれ
- (3) 加速空洞の傾きと電場の変動による位置のずれ

と考えられる。

5.1.1. 4 極磁石の振動によるビーム位置の変動

ここでは、統計的な考察から、4 極磁石がでたために振動することによるビーム軌道の変動を解析的に計算し、振動の大きさの許容値を概算してみる。

ある 1 個の 4 極磁石が垂直方向に a_i だけ動くと、ビーム軌道の角度がこの場所で $a_i k_i$ 変化するので、リニアックの終点でのビーム位置の変化は、

$$y = -a_i k_i \sqrt{E_i / E} \sqrt{\beta \beta_i} \sin \varphi_i \quad (5-1)$$

と書ける（係数 $\sqrt{E_i / E}$ については付録を、 $\sqrt{\beta \beta_i} \sin \varphi_i$ については他の講義参照）。ここで、 k_i はこの 4 極磁石の k 値（焦点距離の逆数）、 E_i 、 β_i はこの磁石の場所でのビームエネルギーとベータ関数、 E 、 β は終点でのビームエネルギーとベータ関数、 $\sin \varphi_i$ はこの磁石の場所から終点までのベータatron振動の位相の進みである。これを全ての 4 極磁石に対して足し合わせたものがビーム位置の変化であり、

$$y = -\sum_i a_i k_i \sqrt{E_i / E} \sqrt{\beta \beta_i} \sin \varphi_i \quad (5-2)$$

となる。

ここで、ビーム位置変化の分散

$$\langle y^2 \rangle = \left\langle \left(\sum_i a_i k_i \sqrt{E_i / E} \sqrt{\beta \beta_i} \sin \varphi_i \right)^2 \right\rangle \quad (5-3)$$

を求めてみる。 $\langle \rangle$ は期待値を表し、多数の異なる磁石のずれに対する平均である（磁石が振動する場合、時間的な平均）。

全ての磁石の位置が独立かつでたために変化している場合

$$\langle a_i a_j \rangle = \delta_{ij} a_i^2 \quad (5-4)$$

であるから、

$$\langle y^2 \rangle = \frac{\beta}{E} \sum_i a_i^2 k_i^2 \beta_i E_i \sin^2 \varphi_i \quad (5-5)$$

であり、さらに、全ての磁石の変位が同じ RMS a を持つとし、オブティクスが Fig.2 のようにエネルギーによって変化しないとすると、

$$\langle y^2 \rangle = a^2 \frac{\beta}{E} k^2 \overline{\beta \sum_i E_i \sin^2 \varphi_i} \quad (5-6)$$

となる。 $k^2 \beta$ の上の棒は、リニアック内での平均 ($\langle \rangle$) とは意味が違うことに注意) を表す。4 極磁石が多数ある場合を考えれば、 E_0 をリニアック始点でのビームエネルギー、 N_q を 4 極磁石の数として、

$$\begin{aligned} \sin^2 \varphi_i &\rightarrow 1/2 \\ \sum_i E_i &\rightarrow N_q (E_0 + E) / 2 \end{aligned} \quad (5-7)$$

となるので、

$$\langle y^2 \rangle = a^2 N_q \beta k^2 \overline{\beta} \frac{(E_0 + E)}{4E} \quad (5-8)$$

が得られる。

この位置の変動は、ビームサイズよりも十分小さければ許容できる。ビームサイズ (σ_y) の 3 分の 1 まではよいとすると、

$$\sqrt{\langle y^2 \rangle} / \sigma_y = a \sqrt{N_q k^2 \beta \frac{(E_0 + E)}{4mc^2 \gamma \epsilon_y}} < 1/3 \quad (5-9)$$

ただし、 $\gamma \epsilon_y$ を垂直方向の規格化エミッタンスとした。また、 $\sigma_y = \sqrt{\epsilon_y \beta}$ を使った。

主リニアックのパラメーターより、 $k^2 \beta \approx 0.08$ 、 $\gamma \epsilon_y \approx 2 \times 10^{-8}$ m、 $E_0 + E = 265$ GeV などであるから、

$$a < 26 \text{ nm} \quad (5-10)$$

が許容値となる。

ただしこの場合も、ゆっくりした変動はフィードバックによって補正することが可能であり、計算した許容値はフィードバックできないような速い変動についてのものである。繰り返し (5 Hz) よりも十分遅い変動に対する許容値は、はるかに緩いものとなる。又、パルス内でのフィードバック

が有効に働けば、より速い変動 (kHz 程度まで) にも対処できる。

5.1.2. 磁場強度の変動によるビーム位置の変動

2 極電磁石が励磁されている場合、ビーム軌道が 4 極磁石の中心からずれている場合、これらの磁石の磁場強度が変動するとビームの軌道も変動する。

1 個の磁石 (i) での角度の変化を $\Delta \theta_i$ とすると、リニアック終点での位置のずれは、全節と同様に

$$y = \Delta \theta_i \sqrt{E_i / E} \sqrt{\beta \beta_i} \sin \varphi_i \quad (5-11)$$

となる。

全ての磁石の変動が独立と仮定すれば、前節と同様にビーム位置変動の分散を計算できる。

i 番目の 4 極磁石の中心とビーム軌道のずれを $y_{q,i}$ とし、相対的な磁場の変動を $\delta_{q,i}$ とすると、

$$\Delta \theta_i = y_{q,i} k_i \delta_{q,i} \quad (5-12)$$

であり、磁場変動からの寄与は、前節の式で $-a_i k_i$ を $y_{q,i} k_i \delta_{q,i}$ で置き換えればよいことがわかる。

$y_{q,i}$ 、 $\delta_{q,i}$ の RMS を y_q 、 δ_q とすると

$$\langle y^2 \rangle = y_q^2 \delta_q^2 N_q \beta k^2 \overline{\beta} \frac{(E_0 + E)}{4E} \quad (5-13)$$

y_q を約 300 μm (磁石の設置誤差程度) と仮定すると、位置の変動をビームサイズ (σ_y) の 3 分の 1 以下とするためには、

$$\delta_q < 9 \times 10^{-5} \quad (5-14)$$

程度であればよいことになる。

次に、2 極磁石の磁場変動による角度変化は、蹴り角を θ_i 、相対的な磁場の変動を $\delta_{d,i}$ とすると

$$\Delta \theta_i = \delta_{d,i} \theta_i \quad (5-15)$$

であるから、前節の式で $-a_i k_i$ を $\delta_{d,i} \theta_i$ で置き換えればよく、 θ_i 、 $\delta_{d,i}$ のRMSを θ 、 δ_d とする

$$\langle y^2 \rangle = \theta^2 \delta_d^2 N_q \beta \bar{\beta} \frac{(E_0 + E)}{4E} \quad (5-16)$$

となる。

ここで、2極磁石の蹴り角として、地球の曲率に沿って曲げるためのものを考えると、 $\theta_i \approx 5 \times 10^{-6}$ であるから、位置の変動をビームサイズ(σ_y)の3分の1以下とするためには、

$$\delta_d < 1.7 \times 10^{-4} \quad (5-17)$$

程度であればよいことになる。

5.1.3. 加速空洞の傾きと電場変動によるビーム位置の変動

加速空洞が傾いていると、加速モードの電場（エラーがなければビーム軸方向のみ）によって、ビームが横方向に蹴られる。この電場が変動すれば、この蹴り角も同じ割合で変動するため、（電場変動によるエネルギーの変動の効果を見ても）結果としてビームの軌道が変化する。

この効果の大きさも、前節と同様な取り扱いで見積もることが出来る。

i 番目の加速空洞の加速電圧、傾き角度、電圧の変動を V_i 、 ψ_i 、 $\delta_{c,i}$ とすると、ここでの軌道角の変化は

$$\Delta \theta_i = \delta_{c,i} \psi_i V_i / 2E_i \quad (5-18)$$

と書ける（係数1/2については付録参照）。従って1個の空洞による終点での位置の変動は、

$$y = \delta_{c,i} \psi_i V_i \sqrt{1/E_i E} \sqrt{\beta \bar{\beta}} \sin \varphi_i / 2 \quad (5-19)$$

となる。さらに、

$$\begin{aligned} \langle y^2 \rangle &= \frac{\beta}{E} \sum_i \frac{\delta_{c,i}^2 \psi_i^2 V_i^2 \beta_i \sin^2 \varphi_i}{4E_i} \\ &\approx \frac{\beta \delta_c^2 \psi^2 V^2 \bar{\beta}}{8E} \sum_i \frac{1}{E_i} \approx \frac{\beta \delta_c^2 \psi^2 V \bar{\beta}}{8E} \log \left(\frac{E}{E_0} \right) \end{aligned} \quad (5-20)$$

となる。ただし、1空洞当たりの加速電圧 V は全空洞で等しく、 ψ 、 δ_c を傾き角度、電圧の相対的な変動のRMSとする。ここで、

$$\sum_i \frac{1}{E_i} \rightarrow \int di \frac{1}{E_0 + ieV} \approx \frac{1}{eV} \log \left(\frac{E}{E_0} \right) \quad (5-21)$$

を使った（ i は始点から数えた空洞の数、 $E_i = E_0 + ieV$ ）。

前と同様に、 $\sqrt{\langle y^2 \rangle} / \sigma_y < 1/3$ を要求することになると、

$$\delta_c \psi < \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8mc^2 \gamma \epsilon_y}{V \beta \log(E/E_0)}} \approx 1.2 \times 10^{-6} \quad (5-22)$$

ψ が0.3 mrad程度であれば、 δ_c の許容値は0.4%となり、エネルギーの安定性から要求される許容値と同程度である。（式(4-3)）

5.2. エミッタンス

多くの場合、ビームの横方向の質を論ずる場合、エミッタンスを使う。主リニアックにおいては特にそうである。一方、我々が本当に求めるものはルミノシティであり、エミッタンスが必ずしも常にルミノシティとよい相関を持つとはいえない。特に、横方向ウェーク場によってバンチの前と後ろの位置がずれた状態で衝突する場合にエミッタンスの悪化以上にルミノシティが低下することが知られている（バナナのようにバンチが曲がる場合の効果なので”banana-effect”などと呼ばれている）。

しかしながら、（1）粒子の分布が正規分布に近い場合にはエミッタンスはルミノシティとよい相関を持ち、（2）他にルミノシティの指標となるようなよいパラメーターがない、という理由により、エミッタンスがビームの質の指標として使われる。

主リニアックにおいて、エミッタンスの悪化する要因は主に、

- （1）加速空洞の横方向ウェーク場

(2) エネルギーに依存した軌道のずれ (dispersive effect) である。

5.3. 加速空洞の横方向ウェーク場によるエミッタンス悪化

荷電粒子が加速空洞などの構造の中を通過すると、そこに電磁場を励起し、この電磁場をウェーク場と呼ぶ。粒子のエネルギーが高い (超相対論的) ため、ウェーク場の影響はビーム中の前方の粒子から後方の粒子へ及ぼされる。後方の粒子の励起した電磁場が前方の粒子に影響を与えることはない。

加速空洞内の横方向のウェーク場 (後方の荷電粒子に横方向の力を与える) は、荷電粒子が加速空洞の中心からずれた位置を通過することによって励起される。従って、ウェーク場の影響は、

(1) 先行する粒子の横方向の振動 (ベータatron振動) が後方の粒子の振動を励起してその振幅を増大させる効果 (BBU: Beam Break Up)

(2) 加速空洞の設置誤差により (軌道と空洞中心が相対的にずれる) 横方向ウェーク場が励起され、後方の粒子の軌道を変化させる効果。

の2つに分けて考えることが出来る。(厳密には、(2) の効果で励起された振動により、さらに後方で (1) の効果が生ずる。この2つは完全に分離することは出来ないが、実際上分けて考えてよい場合が多い。)

又、ウェーク場は、バンチ内で働く短距離のウェークと、バンチ間で作用する長距離でのウェークに分けることが出来る。

5.3.1. BBU(Beam Break Up)

ビームが何らかの理由で横方向に振動 (ベータatron振動) するとき、先行する粒子の励起するウェーク場によって後方の粒子の振動が増大する可能性がある。この効果が大きいと、エミッタンスが増大し、さらに振動が大きくなるとビームの一部が失われてしまう。これを、BBU (Beam Break Up)と呼んでいる。

以下、この効果を2粒子モデルを使って簡単に調べてみる。先行する粒子とその後方の粒子の2個だけを考え、後方粒子が受けるウェーク場の影響を計算する。

$y_0(s)$ と $y_1(s)$ を距離 s での先行する粒子と後方の粒子の横方向の位置とし E_0 、 E_1 をエネルギー、 K を収束力、 q を先行粒子の電荷、 W をウェーク関数とすると、それぞれの粒子の運動方程式は、

$$y_0''(s) = -\frac{K}{E_0} y_0(s) \quad (5-23a)$$

$$y_1''(s) = -\frac{K}{E_1} y_1(s) + \frac{eqW}{E_1} y_0(s) \quad (5-23b)$$

と書ける。空洞等の設置誤差はないとする。

ここで、 E_0 、 E_1 、 K 、 q 、 W を s によらない定数とし (加速なし、一定の連続した収束力)、さらに $E_0 = E_1$ と仮定すると、先行粒子は単振動、後方の粒子は強制振動し、

$$y_0(s) = y_0(0) \cos(ks) + y_0'(0) \sin(ks) / k \quad (5-24a)$$

$$y_1(s) = y_1(0) \cos(ks) + y_1'(0) \sin(ks) / k + s \frac{eqW}{2E_0k} (y_0(0) \sin(ks) - y_0'(0) \cos(ks) / k) \quad (5-24b)$$

となる。ただし、 $k \equiv \sqrt{K/E_0}$ とした。

後方の粒子の強制振動の振幅は、距離に比例して増大する。(加速なしの場合)

一定の加速 g がある場合に振動の振幅の変化を計算してみると、リニアック入り口から距離 s でのエネルギーを $E(s) = E(0) + gs$ とすると、 s での先行粒子の振幅はエネルギーの平方根に逆比例して小さくなり、

$$a_0(s) \approx a_0(0) \sqrt{E(0)/E(s)} \quad (5-25)$$

(付録参照)、後方の粒子の強制振動の振幅は、

$$a_1(s) \approx \begin{cases} a_0(s) eqW \beta \log \left(\frac{E(s)}{E(0)} \right) / 2g & (g > 0) \\ a_0(s) eqW \beta s / 2 & (g = 0) \end{cases} \quad (5-26)$$

のように相対的に増加することがわかる。
($\beta=1/k$ はベータ関数。)

ILC の 1 個のバンチを前後 2 つに分け、各々がバンチ半分の電荷を持ち、距離が 2 シグマ離れているという 2 粒子モデルを考えよう。

($1q \approx 1.6 \text{ nC}$ 、 $W \approx W(0.6\text{mm}) \approx 30\text{V/pC/m}^2$)
主リニアックのパラメーター、 $E(0)=15 \text{ GeV}$ 、 $E(\text{final})=250 \text{ GeV}$ 、 $\beta \approx 70 \text{ m}$ 、 $g \approx 31.5 \text{ MeV/m}$ 、

を入れてリニアックの最後での強制振動の振幅を計算すると、

$$\frac{a_1(s)}{a_0(s)} \approx \frac{eqW\beta \log(E(s)/E(0))}{2g} \approx 0.15 \quad (5-27)$$

となる。

即ち、バンチの後半は、バンチの前半のベータatron振動の励起するウェーク場によって、その振幅の 0.15 倍の強制振動を励起される。この程度のもは許容できるかと思われるが、先にも出てきた「banana-effect」を考慮すると、無視してよいかどうか、衝突でのビームとビームの相互作用まで考えて判断する必要がある。

5.3.2. BNS ダンピング

バンチ内のウェーク場による BBU を抑制する方法として、BNS ダンピング、あるいは Auto-phasing というものがよく知られている。これは、バンチの前部と後部のエネルギーに差をつけることによって共鳴による強制振動の増大を抑えようとするものである。

式 (5-23) において、もし

$$\frac{K}{E_0} = \frac{K}{E_1} - \frac{eqW}{E_1} \quad (5-28)$$

であれば、

$$y_1(s) = y_0(s) \quad (5-29)$$

が後方の粒子の運動方程式の解になることが容易にわかる。即ち、ウェーク場の効果とエネルギー差の効果がちょうど釣り合っ、(初期状態が同じであれば) 後方粒子は前方粒子と完全に同じ軌道を持ち、強制運動の振幅が増大していかない。これを「Auto-phasing」と呼んでいる。

さらにバンチの前部と後部のエネルギーの差を大きくすると、初期状態が同じ後方粒子の振幅を小さくすることが出来る。これは、ウェーク場が振動を抑える方向に働くからである。これを 3 人の提案者の名前の頭文字を取って「BNS ダンピング」と呼んでいる。

このようなバンチの前部と後部のエネルギーに差をつけるためには、加速高周波電場のバンチ中心に対する相対的な位相を Fig. 7 のところから少しずらしてやればよい。

ただし、前節で見たように、ILC においては、短距離のウェーク場がそれほど小さくなく、BBU は深刻な問題ではない。このため、BNS ダンピングなどの手段を使う必要はないと考えられている。

5.3.3. 加速空洞の設置誤差による影響

ビームのベータatron振動がない、あるいは非常に小さい場合でも、加速空洞が横方向にずれていればそのためにビームの後方の粒子が横に蹴られる。ここでは、5.1 節と同様に、その効果を近似的に表す式を導いてみる。

i 番目の加速空洞の設置誤差を a_i 、空洞の長さを L_c 、横方向ウェーク関数を $W_i(z)$ とすると、 k 番目の電子 (又は陽電子) が受ける横方向の角度変化は、

$$\begin{aligned} \Delta\theta_{k,i} &= -\frac{ea_iL_c}{E_i} \sum_{z_l < z_k} eW_i(z_k - z_l) \\ &= -\frac{ea_iL_c}{E_i} W_{k,i} \end{aligned} \quad (5-30)$$

となる。ただし、 z_l は l 番目の粒子の縦 (ビーム軸) 方向の相対的な位置であり、和は k より前方の全粒子についてとる。 E_i はこの空洞の場所でのビームエネルギーである。また、 i 番目の加速空洞の k 番目の電子 (又は陽電子) に対する「sum-wake」を以下のように定義した。

$$W_{k,i} \equiv \sum_{z_l < z_k} eW_i(z_k - z_l) \quad (5-31)$$

多数の空洞の寄与を足し合わせて、リニアック終点での k 番目の電子の位置のずれは、

$$y_k = -e \sum_i a_i L_c W_{k,i} \sqrt{1/EE_i} \sqrt{\beta\beta_i} \sin \varphi_i \quad (5-32)$$

個々の空洞の設置誤差が独立とすると、位置のずれの分散は、

$$\begin{aligned} \langle y_k^2 \rangle &= e^2 a^2 L_c^2 \frac{\beta}{E} \sum_i W_{k,i}^2 \frac{\beta_i}{E_i} \sin^2 \varphi_i \\ &\approx e^2 a^2 L_c \frac{\overline{\beta\beta W_k^2}}{2Eg} \log \frac{E}{E_0} \end{aligned} \quad (5-33)$$

$$\sqrt{\langle y_k^2 \rangle} / \sigma_y \approx a \sqrt{L_c \frac{\overline{\beta\beta e^2 W_k^2}}{2mc^2 (\gamma\epsilon) g} \log \frac{E}{E_0}} \quad (5-34)$$

となる。「 $\overline{\quad}$ 」はリニアック全体での平均を表す。(ビームエネルギー、ベータ関数、ウェーク関数の間には相関がないと仮定。)

5.3.4. 単距離ウェークー単バンチ内の効果

バンチ内の横方向のウェーク場の影響を見てみる。

TESLA の加速空洞のウェーク関数の例が Fig. 9 である。(TESLA TDR より計算。)

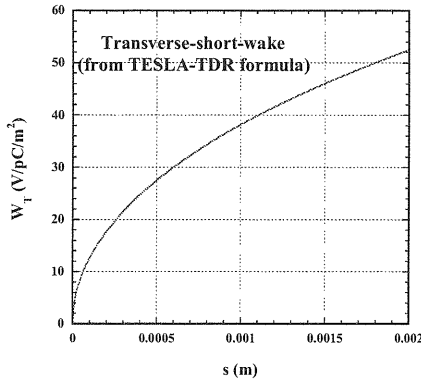


Fig. 9, Shortrange Transverse Wakefunction of TESLA Cavity

このウェーク関数を仮定して、トラッキングシミュレーションをした結果が Fig. 10 である。ビームサイズの 1-シグマの入射位置のずれがあってもエミッタンスは 1%程度しか増加しないことがわかる。

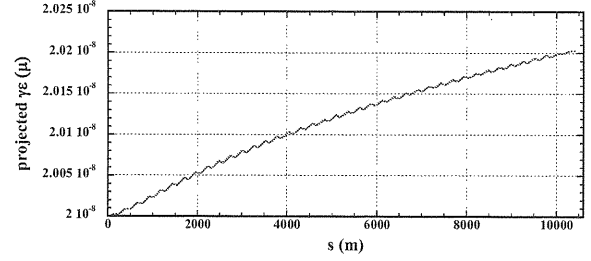


Fig. 10, Normalized emittance along linac. Simulation result for single bunch BBU, with injection offset 1-sigma, in perfectly aligned linac, monochromatic beam.

次に、空洞の設置誤差 (offset) の効果を見る。

Fig. 11 は、バンチ内 (+3sigma でカット) の線電荷密度 (標準パラメータ) と TESLA 空洞のウェーク関数から計算した「sum-wake」を示した。バンチ中心と後方の sum-wake は約 $3 \times 10^2 \text{ V/m}^4$ と $1 \times 10^5 \text{ V/m}^2$ である。

まず、これを前節の式 (5-34) にいれてみると、空洞設置誤差の RMS (a) が 0.5 mm に対し、

$$\sqrt{\langle y_k^2 \rangle} / \sigma_y \approx 0.3 (\text{center}), 0.9 (\text{tail}) \quad \text{となり、問題になるかどうか、微妙な数字であり、このあたりに許容値がありそうと言える。}$$

問題になるかどうか、微妙な数字であり、このあたりに許容値がありそうと言える。

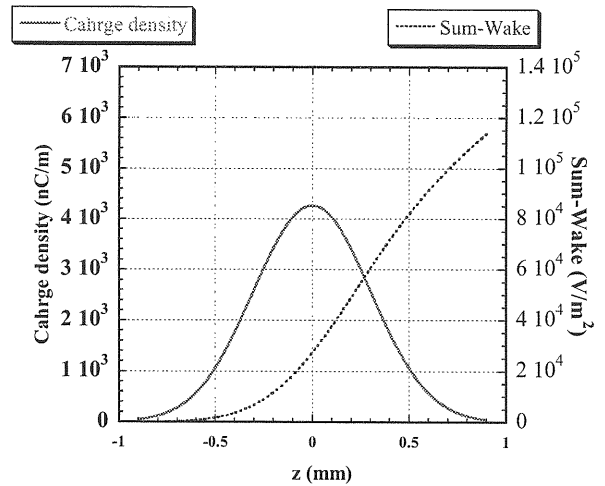


Fig. 11, Charge density and Sum-Wake

トラッキングシミュレーションの結果が Fig. 12 である。空洞設置誤差の RMS 0.5 mm で、エミッタンス増加は約 7%程度であり、この程度の精

度で設置できれば大きな問題とはならないことがわかる。

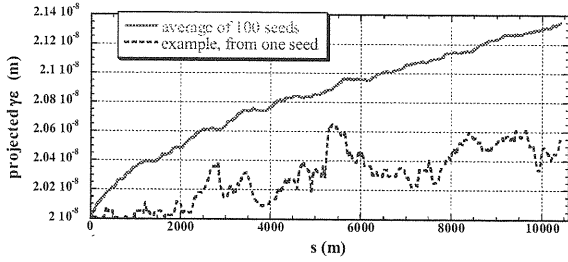


Fig. 12, Normalized emittance along linac. Simulation result for single bunch with cavity misalignment 0.5 mm RMS, monochromatic beam.(Dotted: one example, Solid: average of 100 random seeds.)

5.3.5. 長距離ウェークー多バンチ間の効果

横方向のウェーク場は短距離では Fig. 9 のように距離とともに単調に増加するが、長距離のウェーク場は多くの振動（共振）するモードの和として表される。

TESLA TDR[1] に書かれているウェーク場の 14 個のモードのパラメータが Table 2 で、これを元にモードの和を計算した結果が Fig.13 である。

Table 2, Parameters of transverse wakefield of TESLA Cavity (from TESLA-TDR)

Frequency (ave. meas.) [GHz]	Loss factor (simulation) [V/pC/m ²]	R/Q (simulation) [Ω/cm ²]	Q (meas.)
TE₁₁₁-like			
1.6506	19.98	0.76	7.0·10 ⁴
1.6991	301.86	11.21	5.0·10 ⁴
1.7252	423.41	15.51	2.0·10 ⁴
1.7545	59.86	2.16	2.0·10 ⁴
1.7831	49.20	1.75	7.5·10 ³
TM₁₁₀-like			
1.7949	21.70	0.77	1.0·10 ⁴
1.8342	13.28	0.46	5.0·10 ⁴
1.8509	11.26	0.39	2.5·10 ⁴
1.8643	191.56	6.54	5.0·10 ⁴
1.8731	255.71	8.69	7.0·10 ⁴
1.8795	50.80	1.72	1.0·10 ⁵
TE-like			
2.5630	42.41	1.05	1.0·10 ⁵
2.5704	20.05	0.50	1.0·10 ⁵
2.5751	961.28	23.80	5.0·10 ⁴

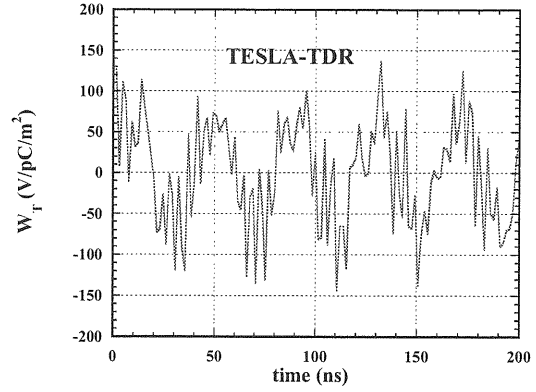


Fig.13, Long Range Longitudinal Wakefunction of TESLA Cavity (calculated from TESLA-TDR parameters).

長距離のウェーク場の距離（時間と言ってもよい）に依存した変化はバンチの長さ比べて緩やかなので、長距離ウェーク場の影響を考える場合、とりあえず、各バンチを1個の大きさのない荷電粒子とみなす。

そうすると、「 k 番目のバンチに対する sum-wake」が、 $W(z)$ をウェーク関数、 q_l を l 番目のバンチの電荷として、

$$W_k \equiv \sum_{l < k} q_l W(z_k - z_l) \quad (5-35)$$

と定義できる。これを、Table 2 と、ILC の標準ビームパラメーターを使って計算したのが Fig. 14 である（減衰なしと仮定）。

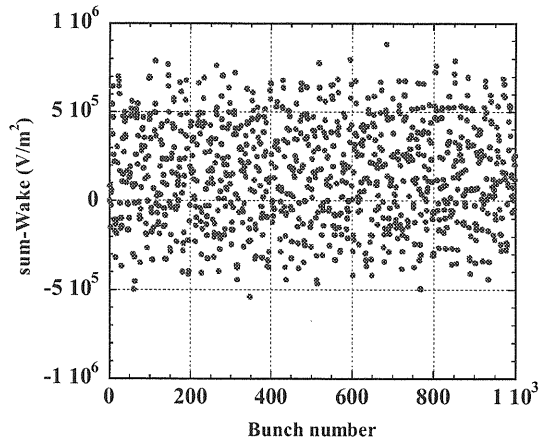


Fig. 14, Sum-wake as function of bunch number. No damping. Bunch spacing is set as 219/650E6 sec.

Sum-wake の大きさは、バンチ間隔に強く依存するので注意が必要だが、Fig. 11, 14 から、この場合はバンチ間（長距離）の sum-wake がバンチ内（短距離）の sum-wake よりもはるかに（1桁）大きいことがわかる。実際にこのようなウェーク場があれば、後方のバンチが大きな横方向の力を受け、バンチごとの軌道の差が大きくなる。この長距離ウェーク場の問題を解決するのが、減衰（damping）とデチューニング（detuning）である。

5.3.6. ダンピングとデチューニング

超伝導空洞では、空洞内部での電磁場エネルギーの損失がほとんどないので、励起されたウェーク場を減衰させるためには空洞の外に引き出す必要がある。このために、HOM（Higher Order Mode）カプラーと呼ばれるカプラーを取り付ける。これは、問題を引き起こすウェーク場（HOM：高次モード）は外に引き出すが、加速に使われる電磁場（加速モード）は閉じ込めておくような特別な構造でなければならない。

Table 2 にあるように、全ての高次モードについて、Q 値（電磁場のエネルギーが何周期で 1/e になるかという値。小さいほど減衰が強い。）が 10^4 から 10^5 以下になると見積もられている。

この減衰をいれて sum-wake を計算したものを Fig. 15 に示した。100 バンチ目あたりから後ろのバンチ全てに対しては sum-wake がほとんど変化しないことがわかる。

この程度の減衰は、かなりの長距離では有効だが、10 バンチ程度まではあまり効かない。この比較的短いところでウェーク場の影響、特に BBU、を抑えるのが「デチューニング」である。BBU を考えると、ベータトロン関数程度の長さ（ベータトロン振動の周期の $1/2\pi$ ）ではあまり位置が変化せず、その間にある加速空洞から同じ方向のウェーク場を受ける。ここで、ベータトロン関数程度の長さの中にある加速空洞の数を n とおくと、この n 個の空洞でのウェーク場の影響は、これらの空洞のウェーク関数の和から決まる。

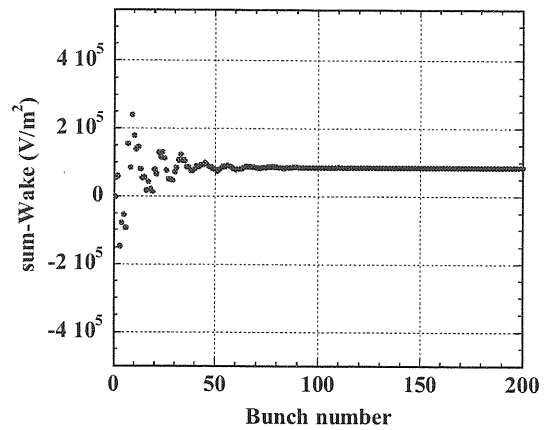


Fig. 15, Sum-wake as function of bunch number. No damping. Bunch spacing is set as 219/650E6 sec.

「デチューニング」を簡単に説明するために、1 個の高次モードのみ考え、 i 番目の加速空洞でのこのモードの角周波数を ω_i とすると、 n 個の空洞のウェーク関数の和は、

$$W_{\text{effective}}(z) = \sum_{i=1}^n W_i(z) = \sum_{i=1}^n W_0 \sin(\omega_i z / c) \quad (5-36)$$

と書ける。ただし、 $W_i(z)$ は、 i 番目の加速空洞のウェーク関数、 W_0 はこのモードのウェーク関数の振幅（全ての空洞で共通と仮定）で、減衰は無視する。

ω_i が全加速空洞で等しければ、これは当然 n 倍になるだけ、

$$W_{\text{effective}}(z) = nW_i(z) \quad (5-37)$$

である。

ω_i が δ_ω 程度の幅でばらつきをもっていたらどうか。 $z/c \approx 2\pi/\delta_\omega$ となるような長距離では、 $\sin \omega_i$ が ± 1 の範囲で随分分布し、従って、 $W_{\text{effective}}(z)$ の大きさは ($n \gg 1$ と仮定)、

$$|W_{\text{effective}}(z)| \approx \sqrt{n/2} |W_i(z)| \quad (z/c \approx 2\pi/\delta_\omega) \quad (5-38)$$

となる。すなわち、

$$\left| W_{\text{effective}}(\delta_{\omega} \approx \frac{2\pi c}{z}) \right| \quad (5-39)$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2n}} \left| W_{\text{effective}}(\delta_{\omega} = 0) \right|$$

となり、実質的なウェーク場の振幅を $1/\sqrt{2n}$ にできる。ILC では、 $n \approx 60$ であり、約一桁減らせることになる。

Fig. 16 に、減衰のみの場合と、減衰に加えて全てのモードについて $\delta_{\omega} = 0.001$ の周波数のばらつきがある場合（この計算では $n=50$ としている）のウェーク場のエンベロップを示した。デチューニングがはじめの 300 ns 程度（ILC のバンチ間隔程度）のところで非常に有効であることがわかる。

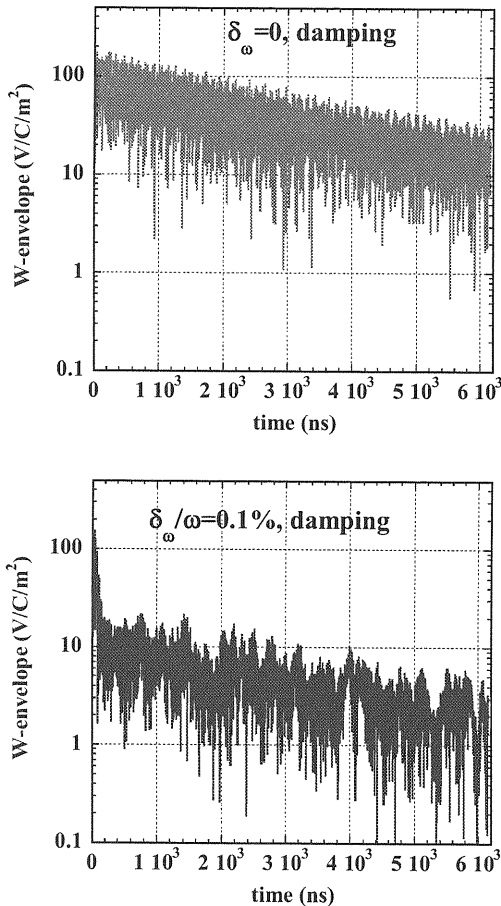


Fig. 16, Envelope of effective transverse wakefunction, sum of 50 cavities. Top: with damping and without detuning, Bottom; with damping and with detuning.

$\delta_{\omega} = 0.001$ 程度のばらつきは、超伝導空洞の場合にはその製作誤差から自然に生ずると考えられ

ている。しかし、周波数のばらつきが不十分だと予想されるようであれば、うまくデチューニングされるようなばらつきを持つように何種類かの異なる形状の空洞を作る必要がある。

5.3.7. 多バンチのシミュレーションの結果

以下、各バンチを1個の荷電粒子と見做したトラッキングシミュレーションの結果を示す。

Fig. 17(a)~(c) は、設置誤差の無いリニアックでビームサイズ1シグマ分の入射誤差を仮定した場合のリニアック終点での200バンチ目までの各バンチの垂直方向の位置を示した。(a)は長距離のウェーク場の減衰もデチューニングも無い場合、(b)は減衰のある場合、(c)は減衰もデチューニングもある場合である。（縦軸のスケールの大きな違いに注意。）

リニアック終点でのビームサイズは xxx ミクロンであるので、これ以上のずれがあるようだと問題がある。

(a) 減衰もデチューニングも無ければ、後方のバンチほど振動がどんどん大きくなることがわかる。(b) 減衰の効果はあきらかだが、後方のバンチの振幅はビームサイズ（先頭バンチの振幅）よりかなり大きく、十分でない。(c) 減衰とデチューニング両方ある場合は、後方のバンチの運動は先頭バンチとほとんど異ならないので問題ない。

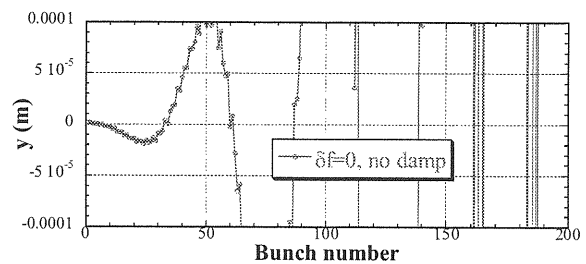


Fig. 17(a), Position vs. bunch number at the end of linac. Injection error of 1-sigma of beam size. Wakefield has no damping and no detuning.

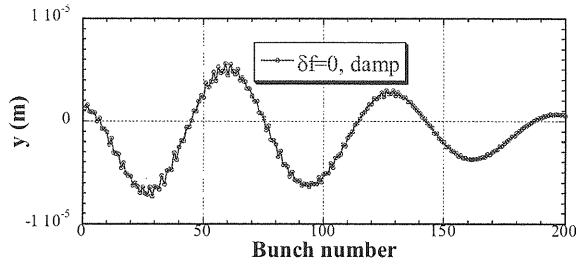


Fig. 17(b), Same as (a) but wakefield has damping and no detuning. Note the different vertical scale.

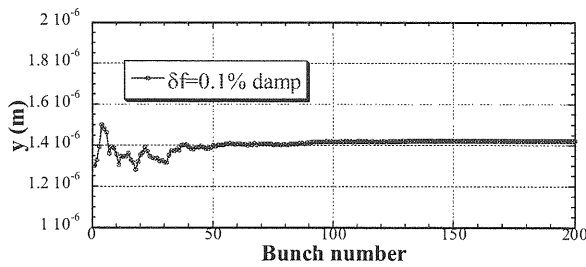


Fig. 17(c), Same as (a) but wakefield has damping and detuning. Note the different vertical scale.

Fig. 18(a)~(c) は、加速空洞の設置誤差 0.5 mm(RMS)を仮定した場合のリニアック終点での 300 バンチ目までの各バンチの垂直方向の位置を示した。(a)は長距離のウェーク場の減衰もデチューニングも無い場合、(b)は減衰のある場合、(c)は減衰もデチューニングもある場合である。(a) 減衰もデチューニングも無ければ、後方のバンチほど振動がどんどん大きくなるのがわかる。(b) 減衰の効果はあきらかだが、後方のバンチの振幅はビームサイズより大きく、十分でない。(c) 減衰とデチューニング両方ある場合は、約 30 バンチ以降の運動がほとんど同じであり、問題ないことがわかる。

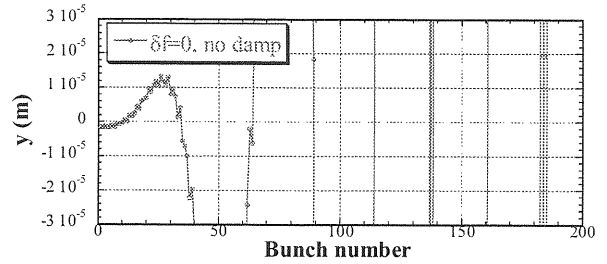


Fig. 18(a), Position vs. bunch number at the end of linac. Cavity misalignment 0.5 mm RMS. Wakefield has no damping and no detuning.

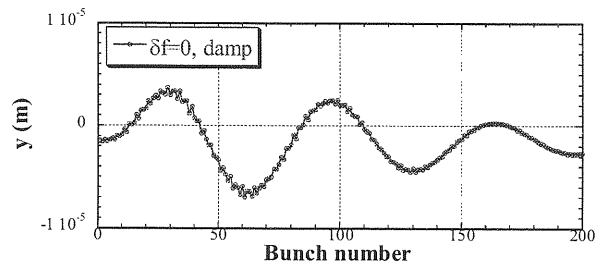


Fig. 18(b), Same as (a) but wakefield has damping and no detuning. Note the different vertical scale.

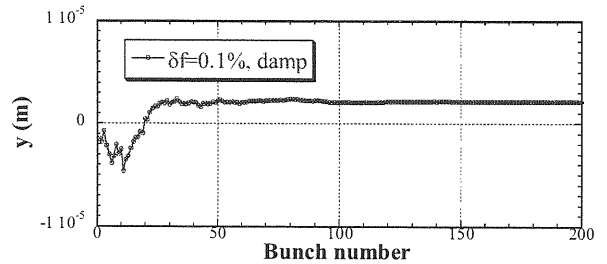


Fig. 18(c), Same as (a) but wakefield has damping and no detuning. Note the different vertical scale.

5.3.8. ウェーク関数のスケーリングについて

主リニアックに超伝導空洞を使用する ILC においては、常伝導空洞で設計されていた GLC, NLC などに比べて、ウェーク場の影響はるかに小さい。これは、超伝導空洞の場合、比較的周波数が低い (1.3GHz。常伝導では 11GHz 以上。RF エネルギーをビームに伝える効率の最適化の結果が、超伝導と常伝導ではまったく異なるため。) ため、周波数に反比例して空洞の大きさ、特に開口部の大きさが増大し、その結果ウェーク場が弱くなるためである。

完全に相似形の空洞の場合、ウェーク関数の各モードの振幅は $|W| \propto f^3$ のように、周波数の3乗に比例し、 $z \rightarrow 0$ でのウェーク場の傾きは、 $dW/ds \propto f^4$ のように4乗に比例する。従って、減衰やデチューニングを考えず、又ビームパラメータが同じであれば、1.3GHz の ILC では、11GHz の常伝導 LC に比べて、ウェーク場の影響が長距離（バンチ間）で 1/600、短距離（バンチ内）では 1/5000 程度ということになる。（実際には、減衰やデチューニングのやり易さ、ビームパラメータの違いなどのためこれほどの大きな差はない。）

5.4. Dispersive Effect によるエミッタンス悪化

5.4.1. Dispersive Effect とは

異なるエネルギーを持つ荷電粒子は、同じ電磁場によって横方向に同じ力を受けたときの軌道の角度変化が異なる（角度変化はエネルギーに反比例）。そのため、ビームエネルギーの広がりがあると、それに伴い軌道にも広がりが生じる可能性がある。その結果エミッタンスの増大につながる。このような、エネルギーに依存して横方向の運動の差が生じる効果を *dispersive effect* と呼ぶ。

5.4.2. 1次ディスパージョン補正後のエミッタンス

リニアックの終点や最終収束系付近では必ずビームの計測が行われ、エネルギーに依存した横方向の位置の分布が時々測定されるはずである。この依存の1次の成分が「1次 dispersion」であるが、測定できればこれを補正することは可能であると思われる。

また、リニアックは地球の曲率に沿って曲がっているため、必ず dispersion が生ずるが、これもリニアックの終点以降で必ず補正されなければならない。

従って、問題となるのは1次 dispersion を補正した後で残るもの（高次の dispersion）であり、リ

ニアックでの変動しないエラーによって引き起こされるエミッタンスの増大を考える場合には、「1次 dispersion を補正後のエミッタンス」を見る必要がある。（補正が追いつかないような速く変化するエラーが引き起こすエミッタンス増大を調べる場合には、このような補正を考慮してはいけない。）

この補正をしない y （垂直）方向のエミッタンスは、

$$\varepsilon_y \equiv [(\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2)(\langle y'^2 \rangle - \langle y' \rangle^2) - (\langle yy' \rangle - \langle y \rangle \langle y' \rangle)^2]^{1/2} \quad (5-40)$$

のように定義されるが、「1次 dispersion を補正後のエミッタンス」は、

$$\varepsilon_{\eta\text{-cor},y} \equiv [(\langle (y - \eta\delta)^2 \rangle - \langle y - \eta\delta \rangle^2) \times (\langle (y' - \eta'\delta)^2 \rangle - \langle y' - \eta'\delta \rangle^2) - (\langle (y - \eta\delta)(y' - \eta'\delta) \rangle - \langle y - \eta\delta \rangle \langle y' - \eta'\delta \rangle)^2]^{1/2} \quad (5-41)$$

と定義できる。ただし y, y' は位置と角度、 δ は相対エネルギーのずれ、 η, η' は位置と角度の1次 dispersion であり、 $\langle \rangle$ は全ビーム粒子の平均を表す。

5.4.3. 入射誤差による Dispersive Effect

まず設計通りで全く誤差のないリニアックで、入射位置（角度でもよい）のずれがある場合、Fig. 19 は *filamentation* と呼ばれる現象を簡単に示している。横軸と縦軸は基本的に、粒子の位置と角度を表し、1個の丸はあるエネルギーを持つ粒子の分布を表す。エネルギーに差があると、ベータatron振動の位相の進みが異なるために、このように粒子の分布が位相空間上で広がっていく。

右上のような状態ならば、dispersion が線形に近い場合、1次の補正が有効だが、左下のようになってしまうと、（実際には、他の要因から作り出される dispersion も重なり合って複雑になるため）これを補正するのはほとんど不可能であろう。

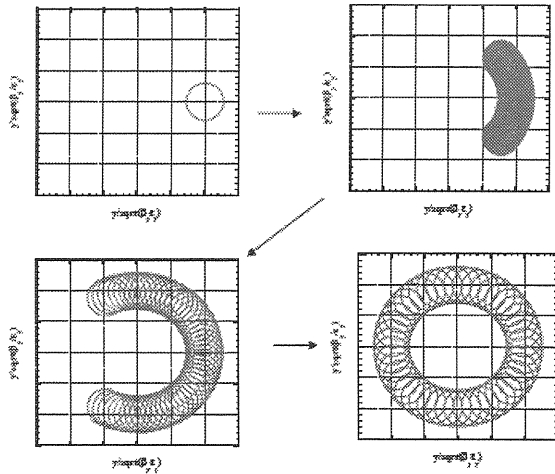


Fig.19, Schematic explanation of filamentation.

リニアック全体での位相の進みの広がり、

$$\sigma_{\varphi} \approx \int \frac{\sigma_E(s) ds}{E(s)\beta(s)} \quad (5-42)$$

と見積もることが出来る ($E(s)$ 、 $\sigma_E(s)$ 、 $\beta(s)$ は距離 s でのビームエネルギー、エネルギー広がり、ベータ関数)。

ILC の場合、 $\sigma_E(s) \approx 200 \text{ MeV}$ 、 $\beta(s) \approx 70 \text{ m}$ 、

$$\int \frac{ds}{E(s)} \approx \frac{1}{g_{\text{eff}}} \log \frac{E}{E_0} \approx 0.4 \approx 2\pi \times 0.07 \quad (5-43)$$

ただし、 $g_{\text{eff}} \approx 20 \text{ MeV/m}$ は、実効的な加速勾配 (空洞以外の部分の長さを含む、長さあたりのエネルギー増)。従って、位相の広がり (RMS) は、 2π の 7% 程度であり、あまり問題にならないことがわかる。

5.4.4. 4 極磁石の横方向設置誤差による Dispersive Effect

Dispersion が無い場所では、4 極磁石の磁場中心と粒子の軌道のずれは (エネルギーに反比例した角度変化をもたらすので) 1 次の dispersion を作る。1 次の dispersion ある場所ではエネルギーの異なる粒子は 4 極磁石の異なる場所を通るため異なる磁場を感じ、さらに異なる角度変化を受け、結局 2 次の dispersion も作られる。以下同様にして、 n 個の 4 極磁石を通過すると、 n 次の

dispersion まで作られる。エネルギーの広がりあまり大きくないために、高次の dispersion はあまり効いてこないと期待できるが、4 極磁石の場所での 1 次の dispersion があまりに大きいと、それによって作られる 2 次の dispersion も大きくなってしまい、問題を生ずる。

4 極磁石の設置誤差の RMS を 1 ミクロンとして補正を全くしない場合のトラッキングシミュレーションの結果を Fig. 20 に示した (ウェーク場はなし)。

1 次ディスパージョン補正後のエミッタンスは 5% 増大する。この値は、設置誤差の 2 乗に比例する。従って、設置誤差が 100 ミクロンあれば、1 次ディスパージョン補正後のエミッタンスは 500 倍になり、とても許容できない。設置誤差は数百ミクロンと見積もられているため、何らかの補正が必須であることがわかる。

一方、設置誤差 1 ミクロンで 1 次ディスパージョン補正なしのエミッタンスは 45% 増大するから、補正が効かないような速い 4 極磁石の振動が 100 nm 程度であれば、エミッタンスは 0.45% 程度の増大で済みそうだ、と予測できる。

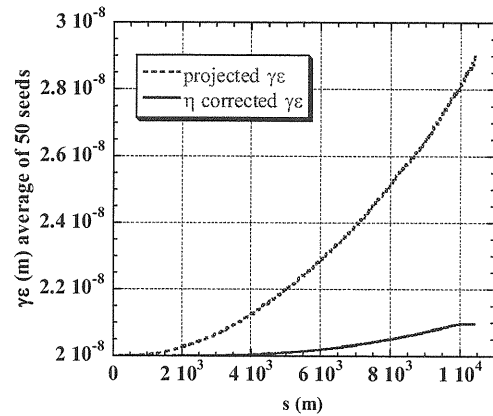


Fig. 20, Projected and dispersion-corrected Emittance (dashed line and solid line) along linac, average of 50 random seeds. Quad misalignment 1 micron.

5.4.5. 加速空洞の傾きによる Dispersive Effect

4 極磁石の設置誤差の他に、もう一つ dispersive effect をもたらす重要な誤差が、加速空洞の傾き (x 軸の周りの回転) である。

加速空洞が傾いていると、本来ビーム軸方向にしかない加速電場によって横方向に力を受ける。このとき変化する横方向の運動量は粒子のエネルギーによらない。従って、変化する角度は粒子のエネルギーに反比例する。これが、エネルギーに依存した軌道の変化をもたらす。これだけなら、1次の dispersion であるが、ビームはこの後4極磁石を通過するので、結局高次の dispersion も発生する。

空洞の傾きの RMS を 10 マイクロラジアンとして補正を全くしない場合のトラッキングシミュレーションの結果を Fig. 21 に示した（ウェーク場はなし）。

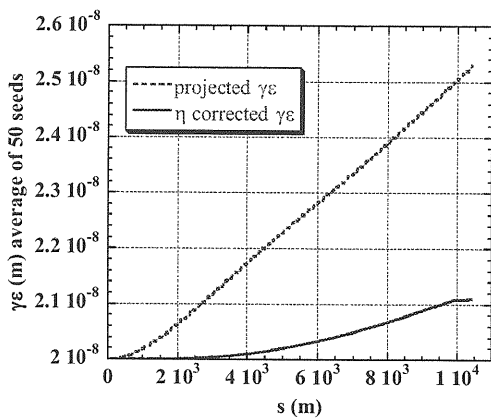


Fig. 21, Projected and dispersion-corrected Emittance (dashed line and solid line) along the linac, average of 50 random seeds. Cavity tilt 10 micro-radian.

1次ディスパージョン補正後のエミッタンスは5%増大する。この値は、傾き誤差の2乗に比例する。従って、傾きが100マイクロラジアンなら、1次ディスパージョン補正後のエミッタンスは5倍になり許容できない。傾き誤差は数百マイクロラジアンと見積もられているため、何らかの補正が必須であることがわかる。

一方、傾き誤差10マイクロラジアンで1次ディスパージョン補正なしのエミッタンスは約25%増大するから、補正が効かないような速い振動による傾きの変化が1マイクロラジアン程度以下であれば、エミッタンスは0.25%程度の増大で済みそうだ、と予測できる。

6. 時間変化のないエラーによる横方向の運動の補正

前節でみたように、現実的な設置誤差を仮定した場合、何も補正をしなければエミッタンスが巨大になってしてしまう。ILCの場合、このほとんどが dispersive effect による。特に4極磁石の設置誤差の影響が大きい。ここではいくつかの補正方法を述べる。

6.1. Quad Shunting による BPM の位置校正

ビーム位置の測定に基づく多くの補正方法では、4極磁石の磁場中心と、その磁石に付けられている BPM (ビーム位置モニター、Beam Position Monitor) の中心 (読みがゼロとなる位置) を正確に合わせておく必要がある。

1つの4極磁石の強さを変えて、その下流のビームの軌道の変化を測定する。軌道の変化から、その磁石の場所での角度の変化がわかる。この角度はビームと4極磁石の中心のずれに比例するはずであり、これからビームの磁場中心に対する位置が計算できる。このときの BPM の読みと比べることにより、磁場中心と BPM の相対的なずれがわかる。BPM のデータに対してこのずれを補正すれば磁場中心と BPM の中心を合わせることが出来る。(Fig. 22 参照)

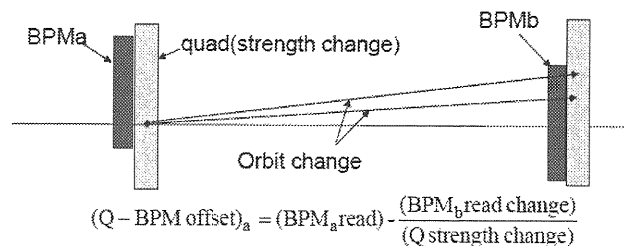


Fig. 22, Schematics of Quad-BPM offset calibration by Quad Shunting.

この結果の、4極磁場中心と BPM の中心の相対的な位置の誤差は、BPM の相対位置測定精度 (設置精度などは含まない、ビーム位置の変化量に対する誤差) に比例し、4極磁石の強さの変化量に反比例する。

6.2. 逐次位置補正

最も単純な補正として、ビーム位置を BPM の読みが全てゼロになるように、2 極磁石を使って上流から軌道補正していく方法がある（逐次位置補正）。ILC の今の設計では全ての 4 極磁石に BPM と補正用の 2 極磁石が付けられているので、上流から 1 個 1 個軌道を合わせていくことになる（one to one correction）。

Fig. 23 に、4 極磁石の設置誤差 0.3 mm(RMS)とした場合（他の誤差は無し）のシミュレーションの結果を示した。上の図は 4 極磁石の位置（丸）とビーム軌道（線）を示す。下の図はエミッタンスであり、リニアック終点では約 3 倍になってしまうことがわかる。4 極磁石の設置誤差をこれより小さくすることは困難と考えられるので、この補正だけではエミッタンスの増大を抑えられないことになる。

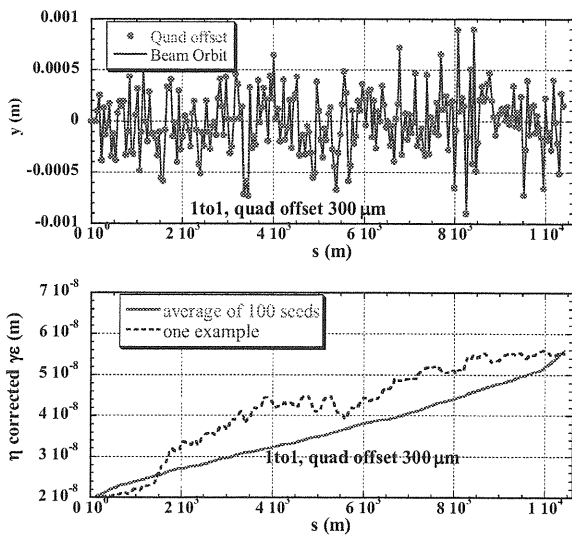


Fig. 23, Result of tracking simulation. Top: Quad offset and beam orbit after one to one correction, one example. Bottom: Emittance along linac, average of 100 different sets of misalignment (100 random seeds) and one example.

6.3. DFS (Dispersion Free Steering)

Dispersive effect を抑える自然な方法は、dispersion が小さくなるように軌道を変えることであろう。

「dispersion」の定義はリニアックでは一意的でないが、ビームエネルギーの差に依存した軌道の変化を最小にする軌道補正が DFS (Dispersion Free Steering) である。一般的には、正規のビームエネルギーでの軌道と、補正したい範囲の上流でエネルギーを変化させた場合の軌道の差が小さくなるように、補正用の 2 極磁石をセットする。各補正磁石に対して、それぞれのエネルギーのビーム軌道がどう変化するかはオプティクスから（ある誤差の範囲で）わかるので、実際にエネルギーを変化させてビーム位置を測定することでどのように補正磁石の強さを変えればよいか計算できる。

DFS といってもいろいろなバリエーションが世界中で研究されているが、基本的には、

$$\chi^2 \equiv \sum_{\text{BPM}} \left[w_1 (\Delta y_{\text{measure}} - \Delta y_{\text{design}})^2 + w_2 (y_{\text{measure}} - y_{\text{design}})^2 \right] \quad (6-1)$$

を最小にするように補正 2 極磁石を設定する。ただし、 y_{measure} は BPM の読み、 $\Delta y_{\text{measure}}$ はエネルギーの異なるビームに対する BPM の読みの差、 y_{design} と Δy_{design} はこれらの設計値（リニアックが曲がっているためゼロとは限らない、） w_1 と w_2 は重み係数であり、BPM について和をとる。 w_1 との比 w_2 は、BPM の絶対的な誤差と相対的な（2 つの測定値の差の）誤差の比の 2 乗程度にするべきである。

一例として、SLEPT (KEK で開発されているシミュレーションコードの名前) に組み込まれている DFS の結果を Fig. 24 に示した。4 極磁石の設置誤差 0.3 mm(RMS)とした（他の誤差は無し）。上の図は 4 極磁石の位置（丸）とビーム軌道（線）を示す。下の図はエミッタンスであり、リニアック終点で約 20% のエミッタンス増大が予測されるが、許容範囲かと考えられる。

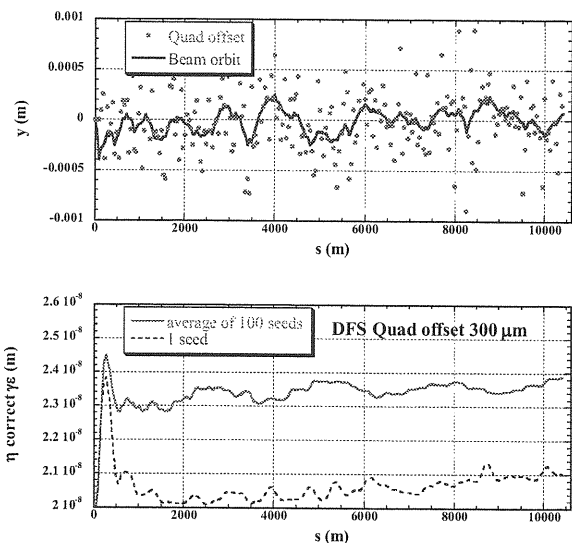


Fig. 24, Result of tracking simulation. Top: Quad offset and beam orbit after DFS, one example. Bottom: Emittance along linac, average of 100 different sets of misalignment (100 random seeds) and one example.

また、Fig. 25 には、4 極磁石の設置誤差と加速空洞の傾きの誤差に対する DFS 後のエミッタンスの依存性を示した。

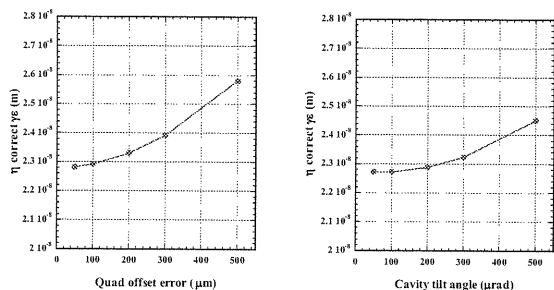


Fig. 25, Sensitivity of DFS to quad misalignment and cavity tilt.

6.4. 蹴角最小化 (Kick Minimization)

Dispersive effect の大きな原因の一つは、4 極磁石の場所で (ビームが磁場中心からずれた位置を通ることにより) ビームが横方向に蹴られることである。4 極磁石の隣には補正用の 2 極磁石が付けられているので 4 極磁石による蹴りと補正磁石による蹴りととの合計がその場所での実質的な

蹴りである。この実質的な蹴り角を小さくしようとするのが「Kick Minimization」である。

この補正では基本的に、

$$\chi^2 \equiv \sum_{\text{BPM}i} \left[w_1 (y_{\text{measure}} - y_{\text{design}} - \theta_i/k_i)^2 + w_2 (y_{\text{measure}} - y_{\text{design}})^2 \right] \quad (6-2)$$

を最小にするように補正 2 極磁石を設定する。 θ_i は各 BPM に対応する (同じ 4 極磁石についている) 補正 2 極磁石による蹴り角、 k_i は BPM に対応する 4 極磁石の k -値である。従って、

$$(y_{\text{measure}} - y_{\text{design}}) k_i \quad (6-3)$$

は、4 極磁石による余分の蹴り角、

$$(y_{\text{measure}} - y_{\text{design}} - \theta_i/k_i) \quad (6-4)$$

は、4 極磁石と補正 2 極磁石両方を合計した余分の蹴り角を k -値で割ったものになり、これを小さくすることは、ここでの蹴り角を小さくすることになる。

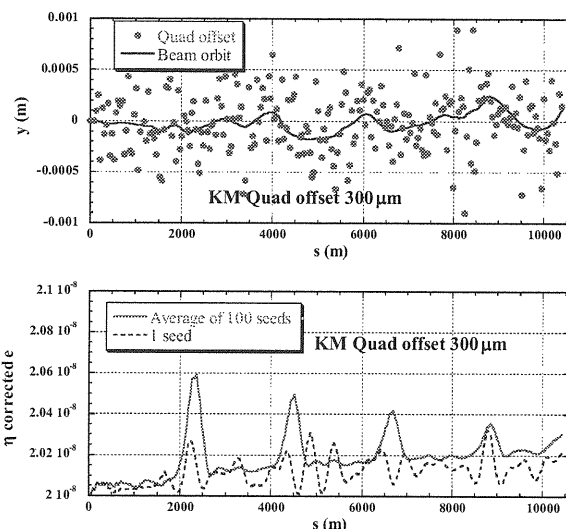


Fig. 26, Result of tracking simulation. Top: Quad offset and beam orbit after Kick Minimization, one example. Bottom: Emittance along linac, average of 100 different sets of misalignment (100 random seeds) and one example.

Fig.26、27 に、シミュレーション結果を示した。DFS の場合と同じ 4 極磁石の設置誤差 0.3 mm(RMS)とした (他の誤差は無し)。リニアック終点で予測されるエミッタンス増大はわずか 1%であり、許容範囲である。

この結果からもわかるように、この補正は4極磁石で生ずる dispersive effect には非常に有効であるが、加速空洞の傾きに対する補正ができないということに注意しなければならない。この補正を採用する場合、加速空洞の傾きの効果は別途補正する必要がある。

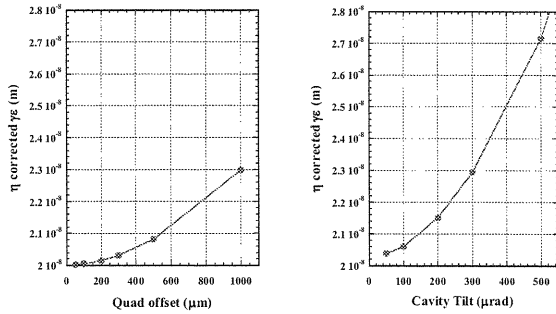


Fig. 27, Sensitivity of Kick minimization to quad misalignment and cavity tilt.

6.5. その他の軌道補正

上で述べた他にも様々な補正方法が考えられている。

エネルギーをある割合で下げたときの磁場による蹴り角の変化は、磁場を同じ割合で強くした場合の蹴り角の変化と同じはずである。そこで、エネルギー変化に対する軌道の変化を小さくする代わりに、ある区間の全ての磁石の磁場強度を一定の割合で変化させて、正規の設定での軌道との差を最小にする、という方法が考えられる。「Quad Shunting」ただし、特に超伝導の場合、磁場中心を変えないで、速い時間で、性格に磁場強度を変化させることが難しいといった問題がある。

他の例として、「Ballistic Alignment (BA)」と呼ばれる方法もある。まず、ある区間の全ての磁石の磁場をゼロにしてビームを通してビーム位置を測定する。磁場が無いので、この軌道は直線になっているはずである。4極磁石を正規に設定し、磁場ゼロの場合の BPM の読みが再現されるように軌道を（2極磁石を使って）補正する。以上が理想的に出来れば、ビーム軌道を直線にすることが出来る。ただし、ILCのように地球に沿って曲がっているリニアックでこの方法が使えるかどうか問題がある。

6.6. 大局的 (Global) 補正

これまで述べた補正はすべて、「局所的 (Local) 補正」と呼べる。即ち、リニアック全体に配置された補正ノブを使い、軌道、あるいは dispersion などを、リニアック全体に配置されたモニターである目標の値（直線のリニアックではゼロ）に近づけようとするものであった。

これに対し、少数（1または2個程度）の補正ノブを使い、リニアックの終点（あるいは、リニアックをいくつかの領域に分け、それぞれの終点数箇所）でのみある量为目标の値に近づけようとする補正が「大局的 (Global) 補正」である。

大局的補正の代表的な例として、「dispersion bump」、「wake bump」という方法がある。

ある狭い範囲でのみビーム軌道の変化（バンプ、dispersion bump）を与えることによって、下流の軌道は変えずに、ディスパージョンを作る（あるいは既にあるディスパージョンを打ち消す）ことができる。リニアック終点でのビームサイズ（あるいはエミッタンス）を測定しながら最もよいバンプの条件を見つける。結果的に、リニアック全体の誤差から生ずる dispersive effect と、バンプによって生じる dispersive effect とが打ち消しあうことになる。実際には、ベータトロン位相が約90度離れた2つの場所でのバンプの大きさを変化させる。

加速空洞のある場所で軌道を変化させれば、ウェーク場による効果を変化させることが出来る。下流の軌道とディスパージョンを変えないがウェーク場の効果のみが変わるようなバンプを「wake bump」と呼んでいる。これを使えば、dispersion bump と同様に、リニアック全体のウェーク場の効果のある狭い範囲で打ち消すように出来る。

これらの方法は、filamentation があまり大きくならない範囲、即ち、ベータトロンチューン（振動の回数）とエネルギーの相対的広がり積が大きい範囲で有効である。ILCの場合、主リニアックのベータトロンチューンが30以下と小さいため、この条件を満たしている。チューンが大

きいリニアックの場合は、filamentation が大きくなるようにいくつかに分けて補正する必要がある。

6.7. まとめ

主リニアックにおける設置誤差などの「固定された誤差」に対する補正についての検討は、多くの人たちが参加しており、かなり進んでいる。次節で述べるような時間的な変動による影響が小さければ、「現在設計されている主リニアックでは高品質のビームを加速できるであろう」と言える(と思う)。

7. 時間変化のあるエラーによる横方向の運動の補正

これまでは、とりあえず磁石や加速空洞の設置誤差といった「固定された誤差」をどう補正するかを述べた。実際には加速器のいろいろな誤差は時間とともに変化している。この変化の速さが、補正(ビーム測定、補正量の計算、補正の設定)に必要な時間より十分ゆっくりしたものであれば、実質的に固定された誤差とみなせる。しかし、例えば DFS などの補正には数分あるいは数十分の時間が必要と思われ、その間の変動に対しては別に対処する必要がある。

考えられる時間的に変化する誤差としては、以下のようなものが考えられる。

1. コンポーネントの位置の変動
 - (ア) 加速器自身による振動 (冷却ポンプの振動、冷却パイプ内の泡などによる)
 - (イ) 温度の変動
 - (ウ) 付近の自動車、工場などからの振動
 - (エ) 地盤の動き、地震など。
2. コンポーネントの電磁場の変動
 - (ア) 磁石の磁場変動
 - (イ) 加速空洞の電場の変動
 - (ウ) 環境の電磁場の変動 (地磁気、太陽風の変動など)

1 - (ア)、2 - (ア)、(イ)については加速器自体の問題であり、なるべく安定なシステムを作ることが重要である。1 - (ウ)、(エ)の振動については、加速器をどこに作るかに大きく依存する。2 - (ウ)は、低エネルギー部分では何も対処しなければ問題となるかもしれないが、主リニアックのような高エネルギー部分では問題にならないと考えられる。

Table 3, Dynamic errors and cures

変動の時間スケール	重要な要因	ビーム補正による対処
~100ns	DR キッカー電磁場強度	Feedforward in turnaround
1 μ s ~ 0.1s	4 極磁石の振動、加速空洞の電場変動	Intra-pulse feedback
1s ~ 100s	振動、磁石の磁場変動、加速空洞の電場変動、温度の変化	Pulse-to-pulse feedback
1000s ~	同上 + 地盤の動き等	"Static" correction

技術的、経済的理由により、装置をいくらでも安定にすることが出来るわけではない。残った変動には、(何もしないと問題であれば)ビーム補正によって対処する。考えられる変動の大雑把な時間スケールとそれへの対処を Table 3 にまとめてみた。一番下の Static correction は前節で述べたものである。フィードフォワード、フィードバックについて以下に述べる。

7.1. 折り返しでのフィードフォワード

ダンピングリングから取り出されるビームの軌道がバンチ毎に異なっている可能性がある。この変動はほとんど取り出しキッカーのパルス電源の変動からくると考えられる。

このバンチ毎の変動は、フィードフォワードによって補正するしかないが、これを直線部分で行うことは（高速を超える通信ができないので）不可能である。現在の設計では、ダンピングリングからビームを取り出す方向を主リニアックと反対向きにして向きを変える、折り返し部分（turnaround）を作ることによってフィードフォワードを可能にしている。ダンピングリングから出たバンチの軌道を測定し、その変動を打ち消すように主リニアックに入る前（バンチ圧縮機に入る前）に補正する。

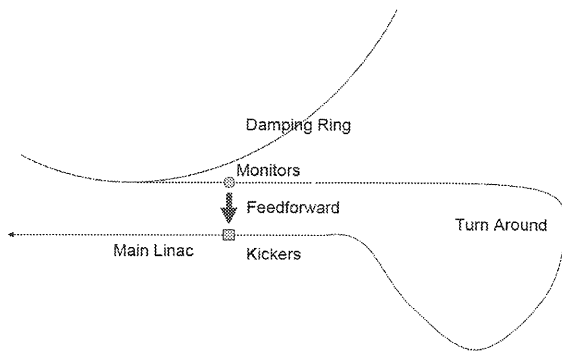


Fig. 28, Schematics of feedforward in turnaround.

7.2. パルス内のフィードバック

ILC の繰り返しは 5 Hz と遅いが、ビームパルスは 1 ms、バンチ数 3000 程度ある（標準パラメータの場合）ので、パルス内の前方のバンチの測定結果を使って後方のバンチを補正することが出来る。少なくとも、主リニアックの出口（BDS, Beam delivery system, の入り口）、と衝突点で、以下のようなパルス内のフィードバックが行われる予定である。

1. リニアック出口でビーム位置を（水平、垂直方向各々 2 箇所以上）測定し、軌道を補正する。
2. 衝突点の前の BPM でビーム位置を測定し、衝突点でのビーム軌道の角度を補正する。（垂直方向）
3. 衝突後（ビーム-ビーム相互作用により、ビーム間の相対位置に依存して、衝突後のビーム重心の角度が変わる）のビーム位置を測定

し、衝突点でのビーム軌道の位置を補正する。（垂直方向）

4. 衝突点での位置と角度を走査しながらルミノシティ最大となる場所を探す。（垂直方向）

7.3. パルス間のフィードバック

ILC の繰り返し 5 Hz よりもゆっくりした変動に対しては、パルス間のフィードバックが有効になる。

ダンピングリング出口から、衝突点の近くまでの領域全体にわたって、多数の BPM と補正用の 2 極磁石を使ったビーム軌道のフィードバックが行われる。基本的には、BPM の読みを一定に保つような補正である。

又、エネルギーのフィードバックは、リニアックの入り口、リニアックの出口などで行われる。これには、ディスパージョンのある場所での精密な位置測定が必要になる。

7.4. 注意点、他

様々なフィードバックが存在する場合、それらがどのように影響しあっているかを十分検討する必要がある。上流での補正は、当然下流に影響するので、多くのフィードバックを平行して行うには、これらを全て含めて制御することが必要であろう。

また、6 節で述べたような「固定された誤差」に対処するための補正は、かなりの時間をかけて測定と補正の設定を何度も繰り返す必要があるが、この間にいろいろな変動があっても補正が有効なのかどうか検討する必要がある。速い変動に対してフィードバックを行いながら、固定された誤差に対する補正をゆっくり行う、といったことが可能かどうか？などである。

これらの課題の検討は行われてはいるが、非常に複雑な問題も多く、今のところ必ずしも十分であるとは言えない。今後早急に検討すべき課題である。

2. バンチ圧縮機

8. はじめに

ここではバンチ圧縮機の原理、ビームダイナミクス上の課題などについて述べる。ILCにおけるこの部分のビームダイナミクスに関する検討はまだ十分とは言えない。従って、ここでは定量的な議論はほとんどせず、定性的な議論にとどめることにした。

9. バンチ圧縮はなぜ必要か

ダンピングリングから取り出されるバンチの長さは6 mm(シグマ)以上であるがそれを0.15 mmから0.3 mmまで短くするのがバンチ圧縮機の役目である。

ダンピングリング内のビームをより短くすることは現実的でない。理由の一つは、バンチ内の集団的な効果のためバンチ密度をあまり大きくすることが困難だということであり、低エミッタンスでかつ短いバンチのビームが作れないからである。(他にも、技術的、経済的な理由がある。)一方、長いバンチを衝突させて高いルミノシティを得ることは困難である。其の理由の一つが「砂時計効果 (hourglass effect)」である。高ルミノシティのためにはビームを小さく絞らなければならないが、焦点でのビームの大きさを小さくすると、焦点からビーム軸方向にずれた場所でのビームは大きくなってしまふ。これを式で表せば、以下ようになる。

焦点から距離 s でのビームの大きさ :

$$\sigma(s) = \varepsilon\beta(s) \quad (9-1)$$

ベター関数 :

$$\beta(s) = \beta(0) + s^2 / \beta(0) \quad (9-2)$$

ε はエミッタンスである。ビームを小さく絞るとは、 $\beta(0)$ を小さくすることであるが、ビームが小さいのは $|s| \sim \beta(0)$ 程度以下の領域であり、従って、 $\beta(0)$ をバンチ長よりも極端に小さくすると、かえってルミノシティが下がる。

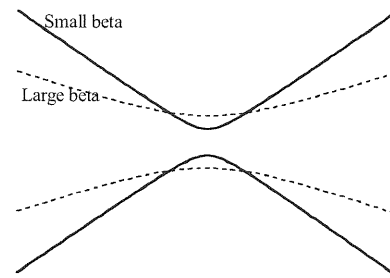


Fig. 29, Beam size around the focal point.

以上のような理由 (他にも理由があるが) で、ダンピングリングから出たビームのバンチ長を短くする必要がある。

10. バンチ圧縮の原理

バンチの圧縮は、

1. バンチ内でビーム軸方向の位置に依存したエネルギー差を作る。(高周波加速空洞を使う。バンチが高周波電場のゼロ交差付近に来るように位相を合わせることにより可能。)
2. バンチ内でエネルギーに依存した軌道長の差を作る。(円弧、シケイン、周期の大きいウィグラーなど、曲がったビームライン。)

という、2つの組み合わせで行うことができる。

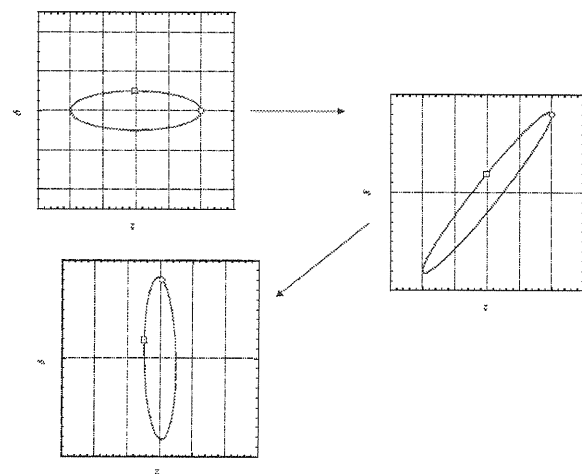


Fig. 30, Basic scheme of bunch compressor, including only linear d-z correlation. About 90 degree rotation in

the longitudinal phase space. (Vertical axis is $\delta = \Delta E/E$, relative energy deviation, and horizontal axis is z , the longitudinal position.) Each of the small circle and a small square represents a particle whose δ or z is zero at the beginning.

6次元の位相空間を

$$(x, x', y, y', z, \delta) \equiv (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6) \quad (10-1)$$

と表したとき、ある粒子の、あるビームラインの出口での座標は入り口での座標から、

$$w_i' = \sum_j R_{ij} w_j + \sum_{jk} T_{ijk} w_j w_k + \sum_{jkl} U_{ijkl} w_j w_k w_l + \dots \quad (10-2)$$

のように書けるであろう。

ここでは、縦方向（ビーム軸方向）、5, 6成分のみ考え、とりあえず、第2項以下を無視する（線形近似可能な場合）と、加速空洞（ゼロ交差の位相）では、

$$\begin{bmatrix} z' \\ \delta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ R_{65} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \delta \end{bmatrix} \quad (10-3)$$

$$R_{65} = \frac{eV\omega}{Ec} \quad (10-4)$$

となる。ただし、 E は平均エネルギー、 V は電圧、 ω は周波数である。

又、曲線を含むビームラインによって、 R_{56} を作ることが出来る。

最も単純な場合（Fig. 30と同様）、これら2つをつなげれば、出口の座標は入り口の座標で、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} z' \\ \delta' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & R_{56} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ R_{65} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \delta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+R_{56}R_{65} & R_{56} \\ R_{65} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \delta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10-5)$$

と表され、又、 $\sigma_{ij} \equiv \langle w_i w_j \rangle$ と書くことにすると（ $\langle \rangle$ は全粒子の平均、 $\sigma_{55} \equiv \sigma_z^2$ 、 $\sigma_{66} \equiv \sigma_\delta^2$ 等）、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_{55}' & \sigma_{56}' \\ \sigma_{65}' & \sigma_{66}' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1+R_{56}R_{65} & R_{56} \\ R_{65} & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \sigma_{55} & \sigma_{56} \\ \sigma_{65} & \sigma_{66} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1+R_{56}R_{65} & R_{65} \\ R_{56} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10-6)$$

となる。Fig. 30のように、はじめと終わりで $z-\delta$ 相関がない（楕円の軸が傾かない）ようにするには、

$$R_{56} = \frac{-R_{65}\sigma_z^2}{R_{65}^2\sigma_z^2 + \sigma_\delta^2} \quad (10-7)$$

であればよく、このとき、

$$\sigma_z'^2 = \frac{\sigma_z^2 \sigma_\delta^2}{R_{65}^2 \sigma_z^2 + \sigma_\delta^2} \quad (10-8)$$

$$\sigma_\delta'^2 = R_{65}^2 \sigma_z^2 + \sigma_\delta^2 \quad (10-9)$$

となる。

ここで、 $\sigma_z \sigma_\delta$ が不変（位相空間上での面積が保存：Liouvilleの定理）であることに注意。 σ_z を縮めるには σ_δ を同じ割合で増加させる必要がある。

又、Fig. 30の小さい丸と四角の位置からわかるように、このバンチ圧縮は位相空間上でほぼ90度の回転になっている。

ここでは、式(10-2)の第2項以下を無視したが、実際には、高周波の波長が有限であるから、加速空洞では R_{65} 以外の項が必ず出る。どのようなビームラインでも R_{56} だけ有限にし、高次の係数を完全にゼロにすることは出来ないであろう。高周波の波長を長くすれば高次の効果を減らすことが出来るが、電圧をその分大きくしなければならぬ。ビームラインを長く複雑にすれば（少なくとも設計上は）、高次の効果を減らせるであろうが、多くの場所と磁石が必要になる。従って、高

次の効果について十分検討して設計することが必要である。

10.1. R_{65} 及び高次項

加速空洞でのエネルギー変化の位置依存性をみる。(ウェーク場はとりあえず無視する。)

バンチ中心に対する高周波電場の位相を ϕ_0 とすると、相対位置 z の粒子の受けるエネルギー増は、

$$eV \cos(\phi_0 + \omega z/c) \quad (10-10)$$

となる。ただし V は電圧、 ω は高周波の周波数、 c は光速である。ここでの (平均) ビームエネルギーの設計値を E_0 とすると、

$$\begin{aligned} \frac{eV \cos(\phi_0 + \omega z/c) - eV \cos \phi_0}{E_0} \\ = R_{65}z + T_{655}z^2 + U_{6555}z^3 + \dots \end{aligned} \quad (10-11)$$

であり、 $\cos(\phi_0 + \omega z/c)$ をテイラー展開して、

$$\begin{aligned} R_{65} &= \frac{eV}{E_0} \frac{\omega}{c} \cos \phi_0 \\ T_{655} &= \frac{1}{2} \frac{eV}{E_0} \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \sin \phi_0 \\ U_{6555} &= -\frac{1}{6} \frac{eV}{E_0} \left(\frac{\omega}{c} \right)^3 \cos \phi_0 \end{aligned} \quad (10-12)$$

等となる。

当然ながら、周波数が低いほど高次の効果は小さくなり、線形に近い結果が得られるが、同じ R_{65} を得るのに必要な電圧は周波数に比例する。

10.2. R_{56} 及び高次項

次に、簡単な例として、Fig. 31 のような同じ強さと長さの4個の2極磁石からなるシケインでの R_{56} 及び高次の項を計算してみよう。

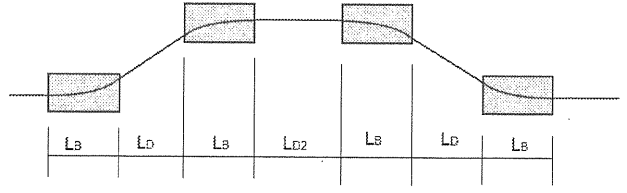


Fig. 31, Simple chicane.

各磁石の曲げ角を θ 、曲率半径を ρ とすると、

$$L_B = \rho \sin \theta \quad (10-13)$$

の関係がある。

最初の磁石の入り口から最後の磁石の出口までの軌道長は、図より

$$l = 4\rho\theta + 2L_D/\cos\theta + L_{D2} \quad (10-14)$$

であり、 θ が小さい (従って、 ρ が大きい) ととき、

$$\begin{aligned} \cos \theta &\approx 1 - \theta^2/2 \\ \sin \theta &\approx \theta - \theta^3/6 \end{aligned} \quad (10-15)$$

$$\rho = L_B / \sin \theta \approx L_B / \theta + L_B \theta / 6$$

$$\theta \approx L_B / \rho + (L_B / \rho)^3 / 6$$

などであるから、

$$\begin{aligned} l &\approx 4L_B + 2L_D + L_{D2} \\ &\quad + 2L_D \frac{\theta^2}{2} + 4L_B \frac{\theta^2}{6} + O(\theta^3) \\ &\approx 4L_B + 2L_D + L_{D2} \\ &\quad + 2L_D \frac{L_B^2}{2\rho^2} + 4L_B \frac{L_B^2}{6\rho^2} + O((1/\rho)^3) \end{aligned} \quad (10-16)$$

となる。

エネルギーのずれを $\delta \equiv \frac{E - E_0}{E_0}$ とすると、

$$\rho = (1 + \delta)\rho_0 \quad (10-17)$$

(ρ_0 は $\delta = 0$ での ρ) であるから、

$$\begin{aligned}
l &\approx l(\delta=0) \\
&+ \left(L_D L_B^2 + \frac{2}{3} L_B^3 \right) / \rho_0^2 (-2\delta + 3\delta^2 - 4\delta^4 + \dots) \\
&\approx l(\delta=0) \\
&+ \left(L_D + \frac{2}{3} L_B \right) \theta_0^2 (-2\delta + 3\delta^2 - 4\delta^4 + \dots)
\end{aligned} \tag{10-18}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
R_{56} &\approx -2 \left(L_D + \frac{2}{3} L_B \right) \theta_0^2 \\
T_{566} &\approx -\frac{3}{2} R_{56}
\end{aligned} \tag{10-19}$$

$$U_{5666} \approx 2R_{56}$$

であることがわかる。

11. 二段階圧縮

ILC では、バンチの長さを 20～40 倍以上縮めなければならない。ということは、エネルギーの広がり が 20～40 倍以上になる。大きなエネルギーの広がり は、縦方向の運動を考えた場合、高次の効果を増大させる。又、横方向の運動でも dispersive effect (主リニアックの節を参照) のような悪い影響を増大させる。そこで、エネルギーの相対的な広がり があまり大きくなならないよう、バンチ圧縮を 2 段階に分けて行うことが考えられている。すなわち、

バンチ圧縮 1 → 加速 → バンチ圧縮 2

とする。加速することにより、相対的なエネルギーの広がり を減少させることが出来る ($\delta = \Delta E / E$ の分子は変わらないが分母が大きくなる)。

現在の標準的設計では、5 GeV の平均ビームエネルギーの約 6 mm のバンチを第一段で約 1 mm まで圧縮し、15 GeV の平均ビームエネルギーの二段目で 0.3 mm ないし 0.15 mm にする。(二段目では、バンチを高周波のゼロ交差のところではな

く少し加速する位相に乗せることによって、加速と R_{65} を作ることを同時に行う。)

12. 90度回転と0度(180度)回転

Fig. 30 のようなバンチ圧縮は位相空間上で約 90 度の回転を伴うので、このような圧縮を 2 回行うと、位相空間上で約 180 度回転することになる。即ち、ダンピングリングから出てきたビームのエネルギーのずれは、主リニアックの入り口でもエネルギーのずれとなり、ダンピングリングから出てきたビームの時間(縦方向の位置)のずれは、主リニアックの入り口でも時間のずれとなる。

一般的に、リングから出てくるビームのエネルギーの中心値のエネルギー広がりに対する相対的な変動は非常に小さいのに対し、バンチの中心位置のバンチ長に対する相対的な変動はそれほど小さくない可能性が高い。

一方主リニアックの入り口では、エネルギーの変動はそれほど問題にならない(加速によって相対的に小さな効果しか持たなくなる)。それに対して、時間の変動は直接衝突点での時間のずれとなり、衝突の起こる縦方向の位置の変動となる。衝突位置の変動は、衝突が焦点からずれた位置で起こることを意味し、先に述べた「砂時計効果」と同様の理由により、ルミノシティの減少をもたらす。

そこで、位相空間上の回転の合計は、0 度、180 度でなく 90 度、270 度に近いほうが望ましいと考えられる。そのためには 2 段階圧縮の場合、二段目では 0 度又は 180 度に近い回転にする。Fig. 32 は約 0 度の回転で圧縮する例である。高周波電場の位相とビームラインの構成を変えることによって、この位相空間上の回転角を調整することが出来る。ILC の標準設計では、合計が 0 度にも 90 度にも調整出来るようなシステムになっている。

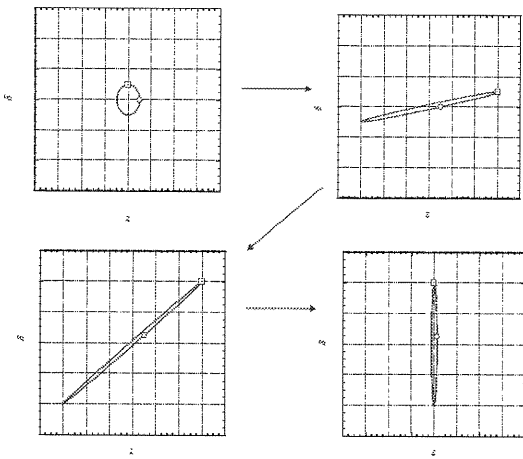


Fig. 32, Basic scheme of bunch compressor. About 0 rotation in the longitudinal phase space.

13. バンチ圧縮の調整

バンチの長さ、位置、エネルギーの設計値からのずれを許容できる範囲にするためには、これらを測定し、その結果から加速高周波の振幅、位相とビームラインのパラメーターを補正する必要がある。

様々な誤差がある場合にこの調整を具体的にどのように行うか、細かい検討はまだ行われていないようである。いずれにせよ、第一段の後と第二段の後其々でバンチ長、タイミング、エネルギー分布を測定できるようにすることが必要である。

14. 要求される安定性（縦方向）

縦方向（バンチ長、位置、エネルギー）の安定性のために最も重要なのが、高周波加速電場の位相と振幅の安定性である。位相変動の影響のうち、バンチ圧縮機の出口、つまり主リニアックの入り口での縦方向の位置（タイミング）の変動がエネルギーの変動よりも問題となる。これは、先にも述べたが、位置の変動はそのまま衝突点の位置変動になり、ルミノシティが下がるからである。

これから要求される位相と振幅の安定度は、各々 0.1 度、0.1% よりも厳しいと見積もられている。

15. 横方向エミッタンスの増大

15.1. 曲線部での設計水平エミッタンス増大

バンチ圧縮のためにはエネルギーに依存した軌道長の差を作らねばならず、そのためには、曲率のある部分にディスパージョンが無ければならない。あるビームラインの R_{56} は、そのラインに沿った積分で、

$$R_{56} = \int \frac{\eta(s)}{\rho(s)} ds \quad (15-1)$$

と書ける。ただし、 $\eta(s)$ 、 $\rho(s)$ はライン上の距離 s の場所での線形ディスパージョンと曲率半径である。曲率があるということは、そこで荷電粒子が曲げられ放射光が出るということである。よく知られているように、ディスパージョンがあるところで放射光が出るとエミッタンスが増大する（「加速器の基礎とダンピングリング」を参照）。このため、バンチ圧縮機ではエミッタンスが増大することが避けられない。

水平方向の設計エミッタンスは垂直方向の設計エミッタンスよりはるかに大きいので、エミッタンス増大の影響を小さくする（相対的な増大を小さく）するため、ビームラインの曲がりには水平方向にし、垂直方向には影響が無いようにする。

バンチ圧縮の最後に近い部分では、当然バンチが短くなる。短いバンチが曲げられると、普通のシンクロトロン放射だけでなく CSR (coherent synchrotron radiation) の影響が問題になってくる。個々の粒子がばらばらに放射光を出す (incoherent radiation、強度は粒子数に比例) だけでなく、多くの粒子が集団的に放射光を出す効果 (強度は粒子数の 2 乗に比例) である。ただし、CSR はバンチ長程度より長い波長のみしか出てこないため、長いバンチに対してはあまり影響が無い。

これらを考慮した結果、放射光のため水平方向のエミッタンスは数%増大すると計算されている。

15.2. 誤差によるエミッタンス増大

様々な誤差によって、水平、垂直エミッタンスは増大する。設計エミッタンスの小さい垂直方向が相対的に重要になる。

加速、及びエネルギースロープをつけるための加速空洞が並んだりニアック部分のエミッタンスについては、主リニアックと同様に考えられる。ただし、エネルギー広がり相対的に大きな部分があること、エネルギースロープがあること等のために問題が複雑になる。

シケイン又はウィグラー部分で垂直方向のディスパージョンがあると、放射によるエミッタンス増大が生ずるので、ディスパージョンを小さくするような調整が必要になるであろう。

ILCにおけるこれらの調整方法などについての詳しい検討は、現時点ではまだ十分行われていないと思われる。

16. 付録

16.1. 加速によるベータトロン振動の振幅の減小

加速がある場合、粒子の横方向の振動（ベータトロン振動）の振幅が、エネルギーの平方根に反比例して減少することを示す。加速によるエネルギー変化はゆっくりしており、振動1周期あたりの相対的な加速エネルギーは非常に小さいものとする。

簡単のため（本質的な仮定ではない）、ベータ関数（ β ）は一定（constant focus）とすると加速が無視できる短い範囲で、運動は、

$$\begin{aligned} y &= a \cos \phi \\ y' &= (a/\beta) \sin \phi \end{aligned} \quad (16-1)$$

と書ける。ここで、 a がこのあたりでの振幅、 $\phi = \phi_0 + s/\beta$ は振動の位相（ ϕ_0 は定数、 s は距離）である。ここでのビームエネルギーを E 、加速勾配（簡単のため一定とする）を g とすると、ある短い距離 ds での加速によって、エネルギーは、

$$E \rightarrow E + g ds \quad (16-2)$$

となり、その結果粒子の角度が

$$y' \rightarrow \frac{E}{E + g ds} y' \quad (16-3)$$

のように減少する、従って、振幅は、

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{y^2 + \beta^2 y'^2} \\ &\rightarrow \sqrt{a^2 \cos^2 \phi + a^2 \sin^2 \phi \left(\frac{E}{E + g ds} \right)^2} \end{aligned} \quad (16-4)$$

のように減少する。 $g ds \ll E$ と仮定したから、

$$a \rightarrow a \left(1 - \sin^2 \phi \frac{g ds}{E} \right) \quad (16-5)$$

となる。

ここで、ベータトロン振動1周期の間の E の変化が小さい（従って、 $\frac{g ds}{E}$ を定数とみなせる）とい

う仮定を使い、1周期あたりの振幅の変化は、

$$\begin{aligned} a &\rightarrow a \left(1 - \int \sin^2 \phi \frac{g ds}{E} \right) = a \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta E}{E} \right) \\ &\approx a \sqrt{E/(E + \Delta E)} \end{aligned} \quad (16-6)$$

となる。ただし、

$$\Delta E = 2\pi\beta g \quad (16-7)$$

は、1周期当たりの加速によるエネルギー増分である（ $\Delta E/E \ll 1$ と仮定）。

従って、はじめのエネルギーを E_0 とすると、 n 周期後のエネルギーは $E_n = E_0 + n\Delta E$ であり、そのときの振幅 $a(n)$ は、

$$\begin{aligned} a(n) &= a(0) \sqrt{\frac{E_{n-1}}{E_n}} \sqrt{\frac{E_{n-2}}{E_{n-1}}} \dots \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \sqrt{\frac{E_0}{E_1}} \\ &= a(0) \sqrt{\frac{E_0}{E_n}} \end{aligned} \quad (16-8)$$

であり、振幅がビームエネルギーの平方根に反比例することが示された。
 $(\Delta E/E \ll 1)$ が必要だが、 $(E_n - E_0)/E_0$ は大きくてもよいことに注意。

16.2. 加速空洞の傾きの効果

加速空洞の傾きがあると、Fig. 33 のように加速空洞内で斜め方向に加速されるため、横方向の成分の力を受ける。横方向の運動量変化は、 θ を傾き角度、 E を平均電場、 L を空洞の長さとして、

$$\Delta p_t = \theta eEL/c \quad (\text{in cavity}) \quad (16-9)$$

である。

一方、空洞の傾きのために、(まっすぐな) ビームは空洞の入口と出口を異なる横方向のずれを持って通過する (Fig. 34)。その差は $L\theta$ である。ビーム軌道の典型的な角度は、典型的な空洞の傾きに比べてはるかに小さいと考えられるので、ここではビームはまっすぐと近似できる。入口 (出口) を y のずれを持って通過する粒子は $-yeE/2$ ($+yeE/2$) だけの横方向の運動量変化を受ける (次の付録を参照)。その結果、入口と出口で受ける横方向の運動量変化の合計は、

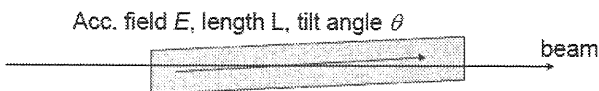
$$\Delta p_t = -\theta eEL/2c \quad (\text{at edges}) \quad (16-10)$$

となる。

これを空洞内での運動量変化と合わせれば、

$$\Delta p_t = \theta eEL/2c \quad (\text{total}) \quad (16-11)$$

となる。



Transverse kick in the cavity: $\Delta p_t = \theta eEL$

Fig. 33, Transverse kick in tilted cavity.

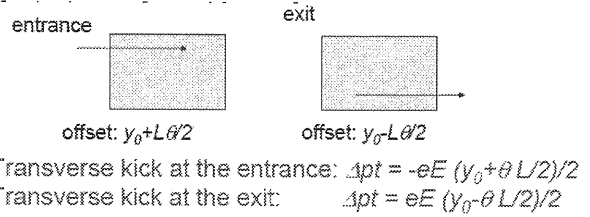


Fig. 34, Transverse kick at edges of tilted cavity.

空洞の端での収束力と発散力は、空洞の傾きの効果 (空洞内部での効果) を半減させることがわかる。

16.3. 加速空洞端部の収束 (発散) 力

加速空洞の端部で荷電粒子が受ける横方向の力を、ガウスの定理から導いてみる。

Fig. 35 のように、ビーム粒子が中心から r のずれを持って空洞に入ってくる場合を考える。半径 r で、一方の端は空洞の十分外に、一方の端は空洞の十分中にある円筒を考えて、ガウスの定理を適用してみる。

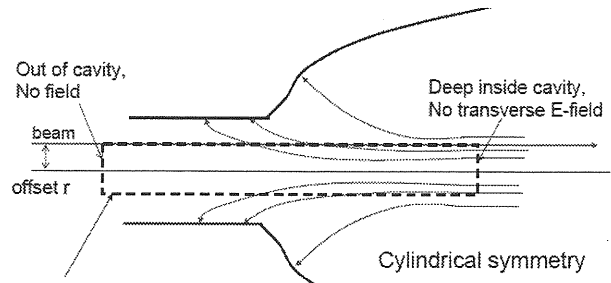


Fig. 35, Edge focus of accelerating cavity.

円筒内に電荷はないので、全表面での積分はゼロである。

$$\int \vec{E} \cdot n dS = 0 \quad (16-12)$$

空洞の外の端面は電磁場が無いので積分に寄与しない。空洞内の端面からの寄与は、 $E\pi r^2$ (E は加速電場) である。すべては空洞中心軸に対し

て回転対称であるから、円筒表面での垂直方向の電場を $E_r(s)$ とすれば、

$$2\pi r \int E_r(s) ds = -E\pi r^2 \quad (16-13)$$

であることがわかる。

$eE_r(s)$ は s においてビーム粒子が横方向に受ける力であるから、空洞の入口での横方向の運動量変化は、

$$\Delta p_t = e \int E_r(s) ds / c = -eEr/2c \quad (16-14)$$

であることが導かれたことになる。

空洞の出口でも電場の向きが反対になること以外は全く同様である。

参 考 文 献

[1] TESLA TDR (Technical Design Report),

http://flash.desy.de/tesla/tesla_documentation/index_eng.html#e1509

[2] TRC(International Linear Collider Technical Review Committee)-II Report,

<http://icdev.kek.jp/TRCII/INDEX.HTM>

[3] Tor Raubenheimer, SLAC-Report-387