

# 1. 高周波デバイスの基礎

## 1. はじめに

本年度の OHO の主題は ERL であるが、ERL のみに捉われず、一般的な高周波加速器を構成する高周波デバイスに設計に必要な基礎、シミュレーション、製作、試験方法について述べる事とした。超伝導加速器の設計には役に立たない事項も多く含んでいるかと思うが、結果の式だけは役に立つ事もあるだろう。

対象としては、既に電磁気学の勉強はしてきた方で、これから例えば修士課程で高周波デバイスの設計を行う事になる、学部4年生や修士1年の学生の参考書になればと考えている。電磁気学の教科書から、実際の高周波デバイスの設計へは若干の飛躍があるので、このギャップを埋める事を目的とした。マイクロ波工学といった書籍は非常に参考にはなるが、対象が通信関係である事が多く、加速器のように大電力を蓄積する目的で書かれていない。また加速器の本には高周波の事は断片的にしか書いていない事が多い。そこで修士課程で高周波デバイスの設計を行った、今まで指導してきた学生・関わりをもった学生の修論の序章等を参考にさせて頂き、専門的な部分は省いた内容とした。

まずは電子線形加速器について一般的な説明を行い。その後 Maxwell 方程式から電磁波の基礎、そして電磁波空洞について述べる。さらに加速器の装置全体での各コンポーネントについての簡単な説明を行う。

## 2. 加速器における高周波の役割とエネルギーフロー

### 2.1. 静電場加速

電子や荷電粒子の加速は、電場  $E$  を使って行われる。もっとも単純な加速方式は、Fig. 1 のようにコンデンサのようなギャップ間に 直流電圧をかけて、電子などの荷電粒子を加速させる方式である。この方式で電子を加速する場合は、印加した

電圧  $V$  により、 $eV$  ( $e$ : 素電荷) のエネルギーが得られる。たとえば、1V の電圧を使って得られる運動エネルギーは[eV] (エレクトロンボルト) という単位として使われる。

$1[\text{eV}] = 1.60217646 \times 10^{-19}[\text{J}]$  である。

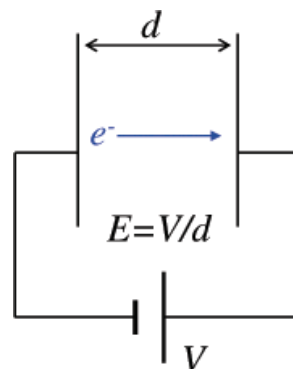


Fig. 1 静電場を用いた電子加速

静電場を使った加速器には、コッククロフト・ウォルトン型加速器、バンデグラフ型加速器がある。

静電場による加速は、加速器として電圧を上げる事は難しいが、電流は増やす事が可能である。例えば電子管内部では数 100kV 程度の電圧で、数 100A の電子を加速し、この電子ビームを変調させる事で高周波を増幅し、大電力の高周波を得ている。

### 2.2. 高周波加速

静電場を使った加速では、エネルギーを上げようとすればさらに高電圧が必要になる。高電圧を利用する場合には絶縁破壊が問題になり、ある一定以上の加速は困難になる。

そこで、電極に比較的低い電圧を与えながら粒子を何回も通して繰り返し加速する「多重加速」の考えが生まれた。この原理で初めて実現した本格的な加速器はサイクロトロンであった。Fig. 2 にサイクロトロンの原理図を示す。図のように磁場により運動する荷電粒子を回転させながら電極間に粒子がきたとき常に加速方向に電場が向くように高周波を印加している。

また、線形に電極を並べたヴィデレー型ライナックの原理図を Fig. 3 に示す。これも、ギャップ

間を粒子が通過するとき常に加速電場を受け  
るように粒子の速度と高周波の周波数を合わせ  
ておく。

しかし、ヴィデレー型ライナックで可能な周波  
数は 10MHz 程度であり、軽い粒子には適しては  
いない。そこで、さらに高周波を用いて効率よく  
加速するために共振空洞に高周波を共振させて  
加速させる方法が開発された。共振空洞を利用す  
るものには、Fig. 4 に示すようなヴィデレー型ラ  
イナック、Fig. 5 の円盤装荷導波管がある。

ヴィデレー型ライナックは共振空洞内の粒子  
が常に加速電場を感じるように空洞内にドリフ  
トチューブを挿入し、逆電場がかかるときにはド  
リフトチューブ内を粒子が通過するようにして  
いる。

円盤装荷型導波管では、もともと位相速度が光  
速を超えてしまう導波管の中に円盤を取り付け  
ることで位相速度を落とし粒子の速度と一致さ  
せることで常に加速電場を受けられるようにし  
ている。

また、ひとつの空洞共振器を何度も通過させ  
ることで加速を行う加速器をシンクロトロンと  
い Fig. 6 に示すような構造になっている。

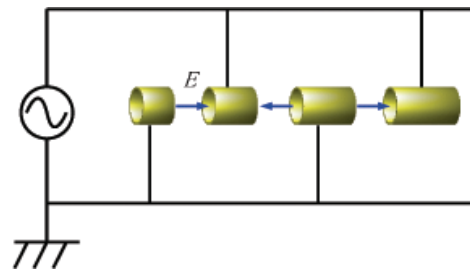


Fig. 3 ヴィデレー型ライナック

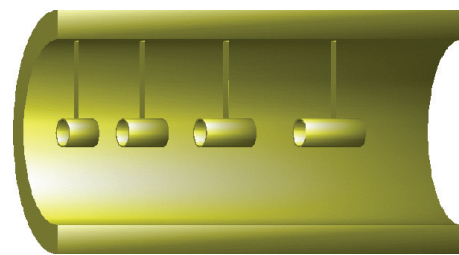


Fig. 4 アルバレ型ライナック

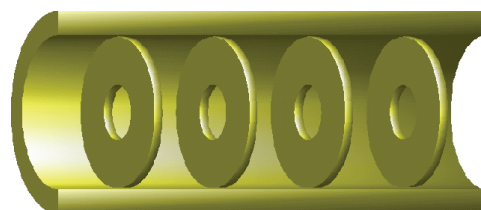


Fig. 5 円盤装荷導波管

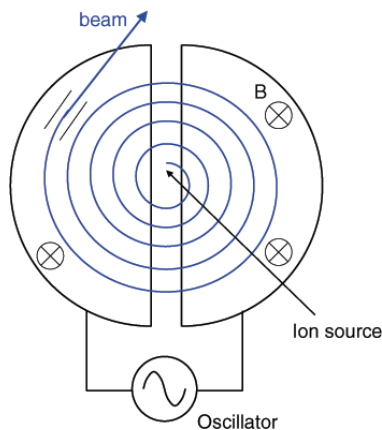


Fig. 2 サイクロトロン

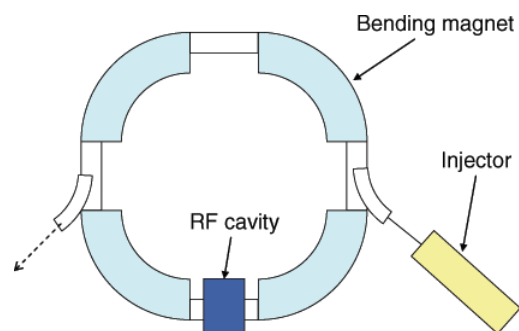


Fig. 6 シンクロトロン

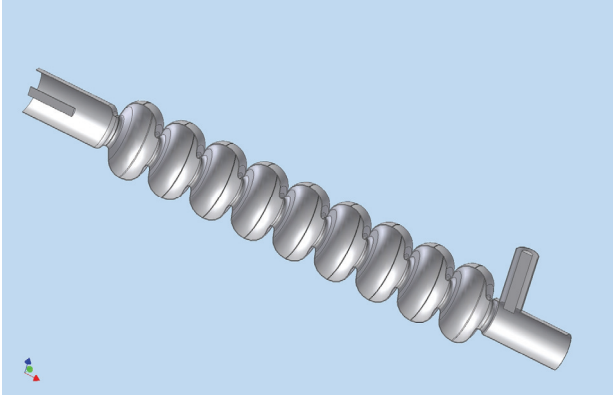


Fig. 7 ERL 用の超伝導空洞

2.2.1. 高周波空洞のギャップにおける荷電粒子との相互作用

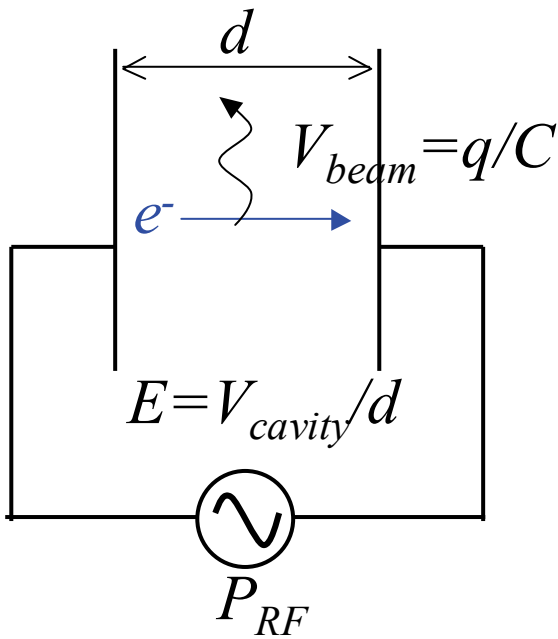


Fig. 8 空洞に入射する荷電粒子の概念図

C をギャップの容量、 $\omega$  を角振動数、空洞のパラメーターについては後述だが、とりあえずシャントインピーダンスを  $(R/Q)$ 、負荷 Q 値を  $Q_L$  などとおく。 $C = \frac{\epsilon S}{d} = \frac{1}{\omega(R/Q)}$  の平板に電荷 q の荷電

粒子が入射した場合に放射される電圧は  $\Delta V_{beam} = q/C$  となる。

蓄積されている電磁界のエネルギー W は

$$W = \frac{CV_{cavity}^2}{2} = \frac{\tilde{V}_{cavity}^2}{\omega(R/Q)}$$

$$\frac{V_{cavity}}{\sqrt{2}} = \tilde{V}_{cavity} = \sqrt{\omega(R/Q)W} = \sqrt{(R/Q)Q_L P_{RF}} \quad (2-1)$$

なので、荷電粒子が通過する前と後のエネルギーの差  $\Delta W$  は以下のように、電荷のポテンシャルエネルギーになる。

$$\Delta W = \frac{C(V_{cavity} \pm \Delta V_{beam})^2 - CV_{cavity}^2}{2} \quad (2-2)$$

$$\simeq \pm CV_{cavity} \Delta V_{beam} = \pm q V_{cavity}$$

これから、低い電圧で大電流のビームを、短いギャップ(小さい  $R/Q$ )かつ低い Q の空洞で減速して、高周波エネルギーを取り出し(電子管)、 $R/Q$  及び Q が高い空洞(加速管)に入れる事で回路におけるトランスのような働きができ、高電界での加速が可能になる事が分かる。

しかも高周波では位相速度をビームの速度に合わせる事で、連続的に加速ができるため、繰り返して、いくらでもエネルギーを上げられるというのが、高周波加速の非常に優れた点である。

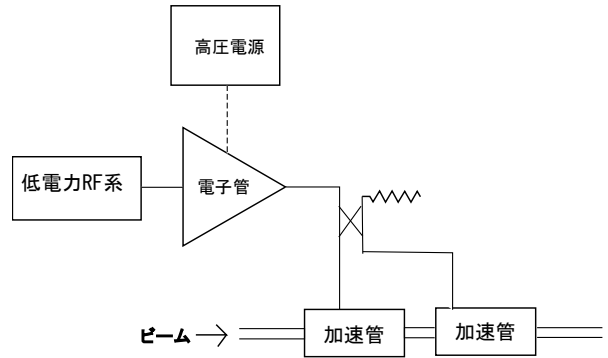


Fig. 9 高周波加速器の概念図

Fig. 9 は高周波加速器の概念図であり、全体のエネルギーの流れは以下のようになっている。

- DC 電圧(～100kV)、パルス高電圧(～500kV)の大電流(～数 100A)電子ビームのエネルギー ↓ (低電力RFによる変調)

- ギャップが短く(低い R/Q)、少ない高周波の蓄積(低い Q 値)の高周波空洞で高周波を取り出し

↓ (大電力高周波)

- 大きい高周波の蓄積(高い Q 値)で長いギャップ(高い R/Q)の高周波空洞に高周波を蓄積して、例えば数十 MV、数 100mA のビームの集群・加速

## 2.2.2. ビームの減速(エネルギー回収)

加速管に減速位相で入射した場合、ビームの減速により、加速空洞のエネルギーが上がる。ここで重要なのは、電磁波は単純に和であり、空洞の損失が少ない場合、ビームの減速による空洞電圧は線形に上がるので、空洞エネルギーは2乗で増えていく。V<sub>beam</sub> の足し算であつという間に増えてしまう事である。この性質がビームウェーク場による加速が興味深い所でもある。

ERL では、加速したビームを、再度加速管に減速位相で入射する事で、加速したビームエネルギーを回収し、一時的に例えば数 100MW という、投入電力よりもはるかに大きい総電力のビームを得る事ができる。ビーム電流の損失や位相のずれが無ければ、原理的には式(2-2)のビームによる損失エネルギーを  $\Delta W = qV_{cavity} - qV_{cavity} = 0$  にできる。実際には、位相のずれなどのエラーがあり、加速ビームの位相のずれは 0、減速ビームの位相のずれを  $\delta\phi$  とすれば、

$$\begin{aligned}\Delta V_{beam}^{\pm} &= -\Delta V_{beam} + \Delta V_{beam} e^{j\delta\phi} \\ &= \Delta V_{beam} (e^{j\delta\phi} - 1)\end{aligned}\quad (2-3)$$

この位相のずれた成分は、そのまま空洞に蓄積されていく。ここで空洞中の最大到達電圧は、荷電粒子流  $I = qf$  が通過する際のエネルギーと、空洞内部及び外部への損失エネルギーの総和が釣り合った時なので、

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dt} &= fCV_{beam}\Delta V_{beam}^{\pm} - P_L \\ &= \frac{V_{beam}\Delta V_{beam}^{\pm}}{2\pi(R/Q)} - \frac{V_{beam}^2}{(R/Q)Q_L}\end{aligned}\quad (2-4)$$

これが 0 になる時

$$V_{beam} = \frac{Q_L \Delta V_{beam}^{\pm}}{2\pi} = I(R/Q)Q_L(e^{j\delta\phi} - 1)\quad (2-5)$$

の電圧が空洞に発生する事になる。

## 3. 高周波の基礎

### 3.1. 電磁波の復習

電磁波は以下のマクスウェル方程式に従うことはよく知られている。

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\quad (3-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\quad (3-2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho\quad (3-3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0\quad (3-4)$$

これらは物質に無関係にいつでも成り立つ基本的な式であつてマクスウェルの基本方程式と呼ばれる。これに物質の性質に関する式、

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}\quad (3-5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}\quad (3-6)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}\quad (3-7)$$

が加わつて方程式系として完結する。

導波管など物体を伝わらせて電磁波を送る場合の伝送電磁波に対する方程式を求めるには以下のようにする。まず、電場・磁場を

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x, y)e^{j\omega t - \gamma_z z}\quad (3-8)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0(x, y)e^{j\omega t - \gamma_z z}\quad (3-9)$$



の形におき、 $\gamma_z$  が純虚数

(3-17)

$$\gamma_z = j\beta_z \quad (3-10)$$

となる場合に  $z$  方向に進む波となる。真空中のマクスウェル方程式( $\sigma = 0, \rho = 0$ )に式(3-8)、

(3-9)を代入すれば

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma_z H_y \\ -\gamma_z H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j\omega\epsilon E_x \\ j\omega\epsilon E_y \\ j\omega\epsilon E_z \end{pmatrix} \quad (3-11)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma_z E_y \\ -\gamma_z E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -j\omega\mu H_x \\ -j\omega\mu H_y \\ -j\omega\mu H_z \end{pmatrix} \quad (3-12)$$

となり、この式と  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$  から

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = -(\omega^2 \epsilon \mu + \gamma_z^2) E_z \quad (3-13)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} = -(\omega^2 \epsilon \mu + \gamma_z^2) H_z \quad (3-14)$$

$$(\omega^2 \epsilon \mu + \gamma_z^2) E_x = -j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} - \gamma_z \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (3-15)$$

$$(\omega^2 \epsilon \mu + \gamma_z^2) E_y = j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} - \gamma_z \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (3-16)$$

$$(\omega^2 \epsilon \mu + \gamma_z^2) H_x = j\omega\mu \frac{\partial E_z}{\partial y} - \gamma_z \frac{\partial H_z}{\partial x}$$

$$(\omega^2 \epsilon \mu + \gamma_z^2) H_y = -j\omega\mu \frac{\partial E_z}{\partial x} - \gamma_z \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (3-18)$$

が導かれる。

### 3.2. 境界条件

完全導体、完全磁気壁ではそれぞれ、接線方向のポテンシャル差が0であり、接線方向の電界、もしくは磁界が0である、従って、境界の法線方向を  $\mathbf{n}$  として、以下のような境界条件が成り立つ。

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_s = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_s = 0 & \quad \text{完全導体} \\ \mathbf{n} \times \mathbf{H}_s = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_s = 0 & \quad \text{完全磁気壁} \end{aligned} \quad (3-19)$$

また誘電率の違う媒質同士の境界条件は境界の接線方向を  $\mathbf{t}$  として以下である。

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_{s1} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_{s2}, \quad \mathbf{t} \cdot \mathbf{E}_{s1} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{E}_{s2}$$

### 3.3. Maxwell 方程式の積分形と TM/TE モード

Maxwell 方程式を積分形は、

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = & -\int_V G \left( \nabla \frac{\rho}{e} + j\omega\mu \mathbf{J}_0 \right) dV \\ & + \int_S \left[ -jkz \mathbf{H} \times \mathbf{n} - (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \right. \\ & \left. \times \nabla G - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \nabla G \right] dS \end{aligned} \quad (3-20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = & -\int_V G (-\nabla \times \mathbf{J}_0) dV \\ & + \int_S \left[ \left( \mathbf{J}_0 + j \frac{k}{Z} \mathbf{E} \right) \times \mathbf{n} - (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \right. \\ & \left. \times \nabla G - (\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}) \nabla G \right] dS \end{aligned} \quad (3-21)$$

この Maxwell 方程式の積分形は、結果の式は本や論文に書いてあるが、私の調べ方が悪いのだと思うが、導出過程の書物が見つからなかったため、私が導出した過程を付録に書いておいた。完全導体の境界条件の式(3-19)を代入すると、

$$\mathbf{E} = \int_S \left[ -jkz \mathbf{H}_s \times \mathbf{n} - (\mathbf{E}_s \cdot \mathbf{n}) \nabla G \right] dS \quad (3-22)$$

$$\mathbf{H} = \int_S -(\mathbf{n} \times \mathbf{H}_s) \times \nabla G dS \quad (3-23)$$

となる。ここで XY 平面上の 2 次的に囲まれ、z 軸方向に伸びている導波管などのパイプ形状の物を考え、境界表面での磁場を

$$\mathbf{H}_s = \mathbf{H}_s^{xy} + \mathbf{H}_s^z = \begin{pmatrix} H_s^x \\ H_s^y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H_s^z \end{pmatrix} \quad (3-24)$$

と XY 成分と Z 成分に分離する。なお  $\nabla G$  は面積分する、もしくは境界垂直面では、法線方向になる。 $\mathbf{H}_s = \mathbf{H}_s^{xy}$  の時は、導波管内部の磁場の z 成分  $H_z = 0$  だが、電界の z 成分  $E_z \neq 0$  となり、TM(Transverse Magnetic)モードと呼ばれる。また  $\mathbf{H}_s = \mathbf{H}_s^z$  の時は導波管内部の電界の z 成分  $E_z = 0$  だが、磁場の z 成分  $H_z \neq 0$  となり TE(Transverse Electric)モードと呼ばれる。これらから、導波管内を伝播する電磁波は TM モードと TE モードの重ね合わせである事が分かる。

### 3.4. 表面抵抗

#### 3.4.1. 常伝導の表面抵抗

導電体表面では導電率が大きく変位電流は無視できるため、以下のようになる。

$$\Delta \mathbf{H} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = j\omega \mu \sigma \mathbf{H} \quad (3-25)$$

これを導体の深さ方向を d として解くと

$$H(d) = H(0) e^{j\omega t} e^{-(1+j)\sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} d} \quad (3-26)$$

となり、電流は指数関数的に深さ方向に減衰する事が分かる。ここで電流もしくは磁界が 1/e になる深さを表皮深さ( $\delta$ )と言う。

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} \quad (3-27)$$

ここで表皮抵抗  $R_s$  を以下のようにおけば、

$$R_s = \frac{1}{\delta \sigma} = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2 \sigma}} = \frac{\omega \mu \delta}{2} \quad (3-28)$$

#### 3.4.2. 超伝導の表面抵抗

第一種超伝導体は BCS 理論に従っており、クーパーペアがマイクロ波により励起され常伝導電子となる電子の数は統計的に計算できる。これにより計算された BCS 理論値を  $R_{BCS}$ 、空洞の表面状態による残留抵抗を  $R_{res}$  として、全表面抵抗は以下のようになる。

$$R_s = R_{BCS} + R_{res} \quad (3-29)$$

$$R_{BCS} = A \frac{\omega^2}{T} \exp\left(-\frac{\Delta(0)}{k_B T_c} \cdot \frac{T_c}{T}\right) \quad (3-30)$$

ここで  $k_B$  はボルツマン定数、 $\Delta(0)$  は 0[K]でのギャップエネルギー、 $T_c$  は超伝導臨海温度である。係数 A は超伝導体によって決まる定数である。 $T < T_c$  の温度範囲では Nb では半実験式が使える。

$$R_{BCS} = 2 \times 10^{-4} \frac{1}{T} \left(\frac{f}{1.5}\right)^2 \exp\left(-\frac{17.67}{T}\right) \quad (3-31)$$

## 4. 伝送線路

伝送線路とは電磁波を輸送するための金属の管である[10]。電力は周波数が低い場合は通常の電線を用いるが、高周波になると漏洩が大きく普通の電線では電力を輸送することができない。そこで、低電力の場合は同軸線路、大電力の場合は導波管が用いられる。

### 4.1. 位相速度と群速度

単色平面波

$$u(x, t) = u_0 e^{j(\omega t - \beta x)} \quad (4-1)$$

の位相速度  $v_p$  は明らかに以下の式で示される。

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \quad (4-2)$$

もし、どの周波数においてもこの単色平面波の速度が等しいならば、このような波で構成された波束は同じ速度で伝わっていく。しかし、一般には伝播速度  $v_g$  は、波数  $\beta$  によって異なる。したがって、波束は新たな特徴を持つ。調和的な波動の重ね合わせの一般形は

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\beta) e^{j(\omega t - \beta x)} d\beta \quad (4-3)$$

ここで、 $u_0(\beta)$  は波数  $\beta$  に対する振幅である。この波の角振動数は  $\beta$  によって異なるので、

$$\omega = \omega(\beta) \quad (4-4)$$

と書ける。もし  $u_0(\beta)$  がある  $\beta_0$  の周りに鋭く分布していたとすると、 $\beta_0$  に近い波数の波のみが (4-3) に関与でき、(4-4) の線形近似

$$\omega(\beta) = \omega_0 + \left. \frac{d\omega}{d\beta} \right|_{\beta_0} (\beta - \beta_0) \quad (4-5)$$

で十分である。式(4-3)に代入すると

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{j\left(\omega_0 - \frac{d\omega}{d\beta}\bigg|_{\beta_0} t\right)} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\beta) e^{j\left[-\beta\left(x - \frac{d\omega}{d\beta}\bigg|_{\beta_0} t\right)\right]} d\beta \quad (4-6)$$

式(4-3)より、 $t=0$  のとき

$$u(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\beta) e^{-j\beta x} d\beta \quad (4-7)$$

したがって、式(4-6)の積分は  $u(x',0)$  と見なせる。

但し、 $x' = x - \frac{d\omega}{d\beta}\bigg|_{\beta_0} t$  である。よって

$$u(x,t) = u\left(x - \frac{d\omega}{d\beta}\bigg|_{\beta_0} t, 0\right) e^{j\left(\omega_0 - \beta_0 \frac{d\omega}{d\beta}\bigg|_{\beta_0} t\right)} \quad (4-8)$$

この波束の速度を群速度  $v_g$  と呼び、

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} \quad (4-9)$$

である。

## 4.2. 同軸線路

同軸線路は、原理的には周波数分散性が無く、カットオフ周波数も無いため、通常の高周波の伝送は同軸線路を用いる。同軸線路の伝送モードは、波長に比べて半径が十分小さい場合は TEM モードのみである。TEM モードでは、円筒座標で

$$E_z = E_\theta = H_z = H_r = 0 \quad (4-10)$$

となる。マクスウェル方程式は、以下となる。

$$\frac{\partial}{\partial r}(rH_\theta) = 0, \quad \frac{\partial E_r}{\partial r} = -j\omega\mu H_\theta \quad (4-11)$$

これから  $rH_\theta$  が定数である事が分かる。

外導体の内側と外側の経路積分を考えると

$$H_\theta(r) 2\pi r = I \quad (4-12)$$

また  $E_r = E_r e^{j(\omega t - k_z z)}$  を代入すると、

$$\begin{aligned} -k_z E_r &= -\omega\sqrt{\epsilon\mu} E_r = -j\omega\mu H_\theta \\ E_r &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H_\theta \end{aligned} \quad (4-13)$$

これを同軸線路の内導体の半径  $a$ 、外導体の半径  $b$  として、積分すると、

$$V = \int_a^b E_r dr = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{I}{2\pi} \log\left(\frac{b}{a}\right) \quad (4-14)$$

従って特性インピーダンスは以下となる。

$$Z_{TEM} = \frac{V}{I} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{b}{a}\right) \quad (4-15)$$

### 4.3. 導波管

#### 4.3.1. 矩形導波管

矩形導波管は、大電力高周波の輸送にもっともよく使われるものであり、四方を良導体で囲まれた筒状のものである。矩形導波管の形をFig. 10に示す。Fig. 10において電磁波は $z$ 方向に進む。

導波管の中を進む波のうち、 $E_z \neq 0, H_z = 0$ のものをTM波またはE波と呼ぶ。また、 $E_z = 0, H_z \neq 0$ のものをTE波またはH波と呼ぶ。

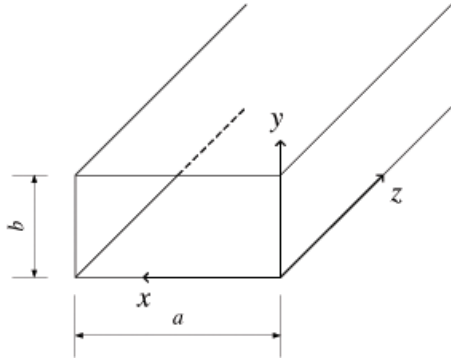


Fig. 10 矩形導波管

#### TMモード

TM波の方程式は、式(3-13)より、

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_c^2 E_z = 0 \quad (4-16)$$

$$k_c^2 = \omega^2 \varepsilon \mu + \gamma_z^2 = k^2 - \beta^2$$

という2次元の固有値問題になり、境界条件は金属表面で電場が垂直なので、 $x = 0, a$  および  $y = 0, b$  のときに  $E_z = 0$  である。

式(4-16)の解は、

$$E_z = (C_1 \sin k_x x + C_2 \cos k_x x) \times (C_3 \sin k_y y + C_4 \cos k_y y) \quad (4-17)$$

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2$$

の形をとる。ただし、境界条件  $x = 0, y = 0$  で  $E_z = 0$  を考慮すると、

$$E_z = A \sin k_x x \sin k_y y \quad (4-18)$$

となり、 $x = a, y = b$  で  $E_z = 0$  を考慮すると、

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b} \quad (4-19)$$

ただし、 $m, n$  は0でない整数である。したがって、固有値  $k$  が、

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \equiv k_{mn}^2$$

$$m, n = 1, 2, \dots \quad (4-20)$$

を満たすときのみ解が定まる。 $k_{mn}$  に対するものを  $\text{TM}_{mn}$  モードという。 $E_z$  を式(3-15)、(3-16)、(3-17)、(3-18)に代入すると他の成分も求められ以下のようなになる。

$$E_x = -A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$E_y = -A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}$$

$$E_z = A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$H_x = -\frac{E_y}{Z_{mn}} = A \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (4-21)$$

$$H_y = \frac{E_x}{Z_{mn}} = -A \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}$$

$$H_z = 0$$

$$Z_{mn} = \frac{\beta}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}} Z_0$$

導波管の中を電磁場が波として進行するためには  $\gamma_z$  が純虚数でなければならないから、 $\omega^2 \varepsilon \mu > k_c^2$  でなければならない。したがって、 $\text{TM}_{mn}$  モードは

$$\omega > \omega_c, \quad \omega_c = \frac{k_{mn}}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad (4-22)$$

の場合のみ導波管を通過し、 $\omega_c$  以下の角周波数は通過しない。 $\omega_c$  に対する周波数  $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$  を遮断周波数(cutoff frequency)と呼ぶ。

$\omega_c$  に対する波長  $\lambda_c$  は遮断波長と呼ぶが、 $\lambda_c$  よりも波長が短いものだけが導波管を通過できる。管内での波長  $\lambda_g$  は自由空間での波長  $\lambda$  より大きくなり、次の関係がある。

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{\omega_c \sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{2\pi}{k_{mn}} \quad (4-23)$$

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\epsilon\mu} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} \quad (4-24)$$

$$\frac{1}{\lambda_g} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_c^2}} \quad (4-25)$$

また、管内での波の群速度  $v_g$  は

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} \quad (4-26)$$

である。伝送電力と単位長当たりの伝送損失および減衰定数は次式のように求まる。

$$\begin{aligned} P_{\text{TM}} &= \int_S \text{Re}(S_z) dS = \frac{1}{2Z_{\text{TM}}} \int_S |E_T|^2 dS \\ &= A^2 \frac{1}{8Z_{\text{TM}}} \frac{\lambda_c^2}{\lambda \lambda_g} ab \end{aligned} \quad (4-27)$$

$$\begin{aligned} p_{\text{loss, TM}} &= \oint_C \text{Re}(-S_n) ds = \frac{R_s}{2} \oint_C |H_T|^2 ds \\ &= A^2 \frac{R_s}{2} \frac{\omega^2 \epsilon^2}{k_c^4} \left[ \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 b + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 a \right] \end{aligned} \quad (4-28)$$

$$\alpha = \frac{R_s \lambda_g \lambda_c^2}{2Z_{\text{TM}} \lambda} \frac{1}{ab} \left[ \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 b + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 a \right] \quad (4-29)$$

## TE モード

TE 波の方程式は、式(3-14)より、

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + k_c^2 H_z = 0 \quad (4-30)$$

という固有値問題になり、境界条件は金属表面では磁場の法線方向への微分が 0、 $\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0$  という条件である。よって、 $x = 0, a$  のとき  $\frac{\partial H_z}{\partial x} = 0$  であり  $y = 0, b$  のとき  $\frac{\partial H_z}{\partial y} = 0$  である。式(4-30)の解は、式(4-17)と同じ形になるが、境界条件を考慮すると、

$$H_z = A \cos k_x x \cos k_y y \quad (4-31)$$

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b} \quad (4-32)$$

となる。 $m, n$  は整数であるが、今の場合それらを 0 にしても  $H_z = 0$  にはならない。ただし、 $m = n = 0$  の場合においては  $k_c = 0$  となり、 $\omega = 0$  となってしまうから  $m, n$  のうち一つだけが 0 になりうる。ゆえに、

$$\begin{aligned} k_c^2 &= k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \equiv k_{mn}^2 \\ m, n &= 0, 1, 2, \dots \quad m = n = 0 \end{aligned} \quad (4-33)$$

を満たすときのみ解が定まる。 $k_{mn}$  に対するものを  $\text{TE}_{mn}$  モードという。 $H_z$  を式(3-15)、(3-16)、(3-17)、(3-18)に代入すると他の成分も求められ以下ようになる。



$$\begin{aligned}
E_x &= Z_{mn} H_y = A \frac{j\omega\mu n\pi}{k_c^2 b} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\
E_y &= -Z_{mn} H_x = -A \frac{j\omega\mu m\pi}{k_c^2 a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\
E_z &= 0 \\
H_x &= A \frac{j\beta m\pi}{k_c^2 a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\
H_y &= A \frac{j\beta n\pi}{k_c^2 b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\
H_z &= \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\
Z_{mn} &= \frac{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{\beta} Z_0
\end{aligned}
\tag{4-34}$$

普通、矩形導波管では  $\text{TE}_{01}$  モードを使って RF 輸送を行う。

伝送電力と単位長当たりの伝送損失および減衰定数は次式で与えられる。

$$P_{\text{TE}} = A^2 \frac{1}{2} \zeta \frac{\lambda_c^2}{\lambda \lambda_g} \frac{\varepsilon_n \varepsilon_m}{4} ab \left( \varepsilon_n = \begin{cases} 2 & n=0 \\ 1 & n \neq 0 \end{cases} \right)
\tag{4-35}$$

$$\begin{aligned}
p_{\text{loss,TE}} &= A^2 \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma_c \delta_s} \left\{ \frac{k^2 - k_c^2}{k_c^4} \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 a \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 b \right] + (a\varepsilon_m + b\varepsilon_n) \right\}
\end{aligned}
\tag{4-36}$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\eta}{\sigma_c \delta_s} \frac{\lambda \lambda_g}{\lambda_c^2} \frac{2}{\varepsilon_n \varepsilon_m} \frac{1}{ab} \left\{ \frac{k^2 - k_c^2}{k_c^2} \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 a \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 b \right] + (a\varepsilon_m + b\varepsilon_n) \right\}
\end{aligned}
\tag{4-37}$$

#### 4.3.2. 円形導波管

円形導波管は、矩形導波管と比べると実用的に使用されることはあまりないが、加速管の電磁場モ

ードの基礎になっているので非常に重要である。Fig. 11 に円形導波管の形と円柱座標系を示す。

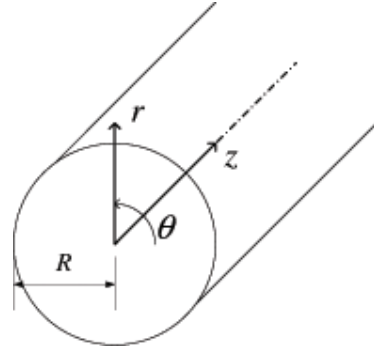


Fig. 11 円形導波管

#### TM モード

TM 波であるので  $H_z = 0$  として円柱座標系  $(r, \theta, z)$  を使い、式(3-13)を書き直すと

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} + k_c^2 E_z = 0
\tag{4-38}$$

となる。Fig. 11 のとおり導波管の半径を  $R$  とし、中心軸を  $z$  軸とすると、境界条件は  $r = R$  で  $E_z = 0$  である。式(4-38)の解は、 $m$  次の Bessel 関数 ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) を  $J_m$  とすると、

$$E_z = J_m(k_c r) (A \cos m\theta + B \sin m\theta)
\tag{4-39}$$

の形になる。ここで、境界条件を考慮すると、

$$J_m(k_c R) = 0
\tag{4-40}$$

となる。 $J_m$  の  $n$  番目の 0 点を  $j_{mn}$  と書くと、 $k$  として

$$\begin{aligned}
k_{mn} &= \frac{j_{mn}}{R} \\
(m &= 0, 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots)
\end{aligned}
\tag{4-41}$$

の値をとり、 $k_c^2 = \omega^2 \varepsilon \mu + \gamma_z^2 = (j_{mn} / R)^2$  である。

$$\begin{aligned}
H_z &= 0 \text{ として、} E_r = E_x \cos \theta + E_y \sin \theta, \\
E_\theta &= -E_x \sin \theta + E_y \cos \theta, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r},
\end{aligned}$$

$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial}{\partial r}$  を考慮すると式(3-15)、(3-16)、(3-17)、(3-18)は

$$E_r = -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} \quad (4-42)$$

$$E_\theta = -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \quad (4-43)$$

$$H_r = \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \quad (4-44)$$

$$H_\theta = -\frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} \quad (4-45)$$

となる。 $E_z = AJ_m(k_{mn}r)\cos m\theta$  として上記の式に代入すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} E_r &= -A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{j_{mn}}{R} J'_m \left( \frac{j_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta \\ E_\theta &= A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{m}{r} J_m \left( \frac{j_{mn}}{R} r \right) \sin m\theta \\ E_z &= AJ_m \left( \frac{j_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta \\ H_r &= -A \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{m}{r} J_m \left( \frac{j_{mn}}{R} r \right) \sin m\theta \\ H_\theta &= -A \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{j_{mn}}{R} J'_m \left( \frac{j_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta \\ H_z &= 0 \end{aligned} \quad (4-46)$$

この際の伝送電力、減衰定数は以下のようになる。

$$\begin{aligned} P_{TM} &= \frac{k\beta\pi}{4k_c^4 Z_0} j_{mn}^2 J_m^2(j_{mn}R)^2 \varepsilon_0 \\ \alpha &= \frac{R_s}{RZ_0} / \sqrt{1 - \frac{k_c^2}{k_0^4}} \end{aligned} \quad (4-47)$$

## TE モード

TM 波は  $E_z = 0$  として円柱座標系  $(r, \theta, z)$  を使い、式(3-14)を書き直すと

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \theta^2} + k_c^2 H_z = 0 \quad (4-48)$$

となる。ここで、境界条件は  $r = R$  で  $\frac{\partial H_z}{\partial r} = 0$  である。式(4-48)の解は、式(4-39)と同型になるが境界条件を考慮すると、

$$\begin{aligned} J'_m(k_c R) &= 0 \\ \left( J'_m(r) = \frac{dJ_m(r)}{dr} \right) \end{aligned} \quad (4-49)$$

となり、 $m$  次の Bessel 関数の微分  $J'_m$  の  $n$  番目の 0 点を  $j'_{mn}$  と書くと、 $k_c R = j'_{mn}$  となるように、

$k_{mn} = \frac{j'_{mn}}{R}$  ( $m = 0, 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots$ ) をとることになる。 $k^2$  のとり得る値は

$$k_c^2 = \left( \frac{j'_{mn}}{R} \right)^2 \quad (4-50)$$

である。

$E_z = 0$  として、 $E_r = E_x \cos\theta + E_y \sin\theta$  ,  
 $E_\theta = -E_x \sin\theta + E_y \cos\theta$  ,  $\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r}$  ,  
 $\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial}{\partial r}$  を考慮すると式(3-15)、(3-16)、(3-17)、(3-18)は

$$E_r = \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} \quad (4-51)$$

$$E_\theta = -\frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial r} \quad (4-52)$$

$$H_r = -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial r} \quad (4-53)$$

$$H_\theta = -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} \quad (4-54)$$

となる。 $H_z = AJ_m(k_{mn}r)\cos m\theta$  として上記の式に代入すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} E_r &= -A \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{m}{r} J_m\left(\frac{j'_{mn}}{R}r\right) \sin m\theta \\ E_\theta &= -A \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{j'_{mn}}{R} J'_m\left(\frac{j'_{mn}}{R}r\right) \cos m\theta \\ E_z &= 0 \\ H_r &= -A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{j'_{mn}}{R} J'_m\left(\frac{j'_{mn}}{R}r\right) \cos m\theta \\ H_\theta &= A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{m}{r} J_m\left(\frac{j'_{mn}}{R}r\right) \sin m\theta \\ H_z &= AJ_m\left(\frac{j'_{mn}}{R}r\right) \cos m\theta \end{aligned} \quad (4-55)$$

この際の伝送電力と、減衰定数は以下ようになる。

$$\begin{aligned} P_{TE} &= \frac{Z_0 k \beta \pi}{4k_c^4} (j'_{mn}{}^2 - m^2) J_m(j'_{mn}) \varepsilon_0 \\ \alpha &= \frac{R_s}{RZ_0} / \sqrt{1 - \frac{k_c^2}{k_0^4}} \times \left( \frac{k_c^2}{k_0^4} + \frac{m^2}{j'_{mn}{}^2 - m^2} \right) \end{aligned} \quad (4-56)$$

### 円形導波管の減衰率

円形導波管の減衰率の例として、Fig. 12 に内径 80mm φ の 円形導波管の様々な伝搬モードでの損失をプロットしてみた。

通常モードは単位長さ当たりの損失が最小になる周波数が存在する事が分かる。しかし  $TE_{0n}$  モードだけは特別で、周波数が上がれば着々と損失が減るため、長距離伝送に向いている事が分かる。

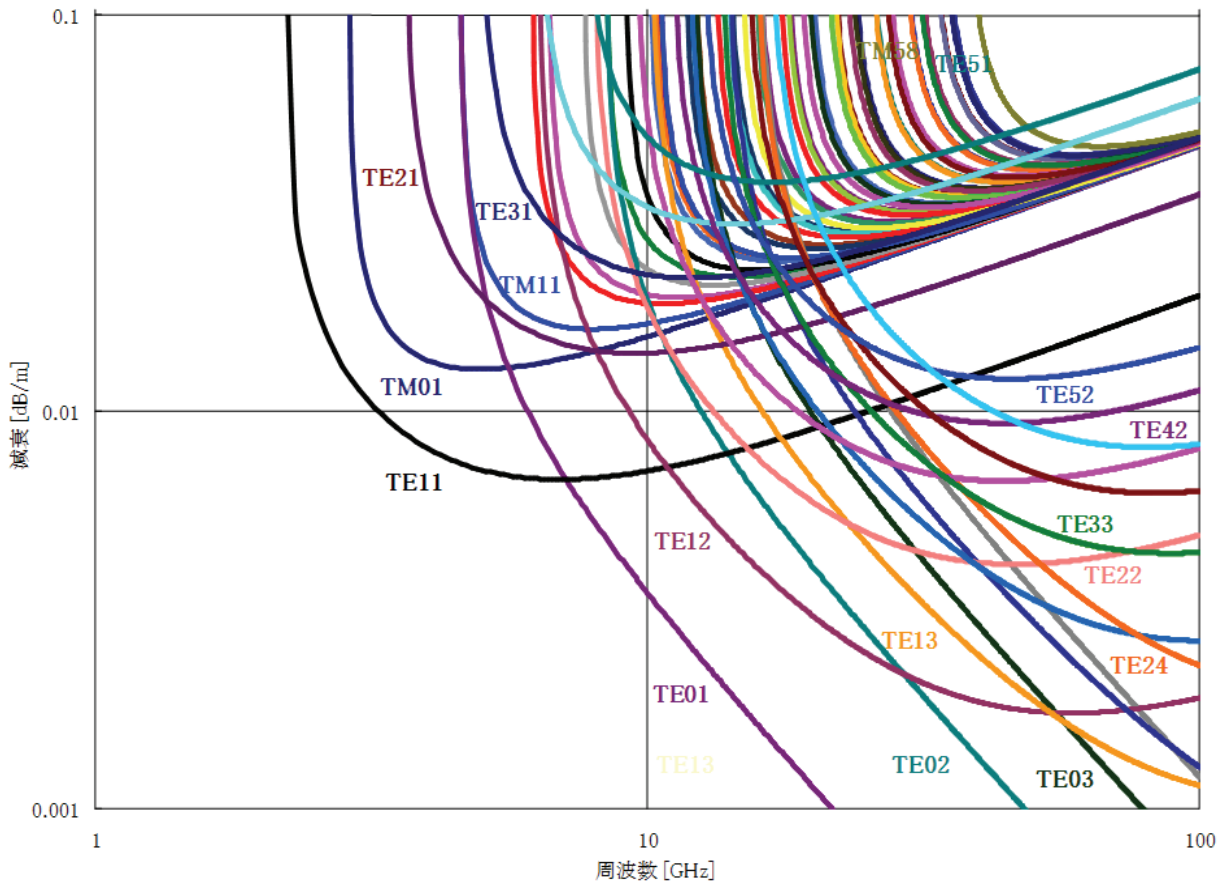


Fig. 12 円形導波管の減衰率

## 5. 空洞共振器

例えば、導波管をある長さのところで切り、両端に導体でふたをするとその中で電磁波が反射を繰り返して、波長の合うものが共振する。このように、閉じた導体中で電磁場の共振を生じさせるものを空洞共振器という。

これは、導波管にふたをしたものに限らず、どのような形のものでも共振を生じさせることができる。定在波加速管はまさにこの空洞共振器である。

空洞の内部の電磁波は以下のヘルムホルツ方程式

$$\begin{aligned}(\Delta + k_c^2)\mathbf{E} &= 0 \\ (\Delta + k_c^2)\mathbf{H} &= 0\end{aligned}\quad (5-1)$$

を、以下の境界条件で固有モードを解けば、

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \times \mathbf{E}_s &= 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_s = 0 && \text{完全導体} \\ \mathbf{n} \times \mathbf{H}_s &= 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_s = 0 && \text{完全磁気壁}\end{aligned}$$

以下のような直交関数の固有モードが得られる。

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E}_n &= -jk_n Z_n \mathbf{H}_n \\ \nabla \times \mathbf{H}_n &= j \frac{k_n}{Z_n} \mathbf{E}_n\end{aligned}\quad (5-2)$$

$$\int \mathbf{E}_n \cdot \mathbf{E}_m dV = \int Z_n \mathbf{H}_n \cdot Z_m \mathbf{H}_m dV = \delta_{nm}$$

なお完全導体ではなく、金属のような導体上の場合は、変位電流が無視できて、境界条件は前述の表皮抵抗を利用して、

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_s = -(1+j)R_s \mathbf{H}_s \quad \text{導体} \quad (5-3)$$

と書けるが、 $R_s$ は金属では小さいため、内部の電磁界の形にはほとんど影響を与えず、完全導体の場合の固有モードが通常はそのまま使える。

### 5.1. 直方体空洞共振器

直方体空洞共振器は、ある長さの矩形導波管の両端に導体でふたをしたものと考えられる。今、Fig.

13のように $x, y, z$ 座標軸をとり、それぞれの辺の長さが $a, b, d$ であるとする。

これは、 $z$ 方向の導波管が $z = 0, d$ で閉じたものと考え、両端で電磁波が反射し $z$ 方向と $-z$ 方向の波が重なり合い定在波を作る状態である。電磁波が $z$ 方向に進むときは、 $\gamma_z = j\beta$ であるが、 $-z$ 方向に進むときは、 $\gamma_z = -j\beta$ である。両端では、 $\mathbf{E}$ は端面に垂直であるので、 $E_x = E_y = 0$ である。

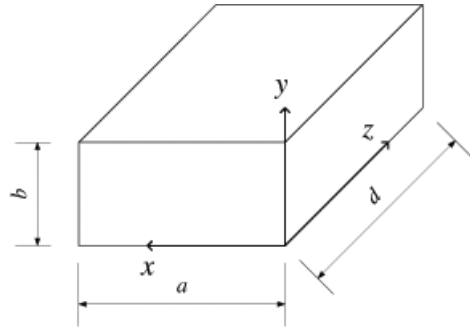


Fig. 13 直方体空洞共振器

#### TMモード

矩形導波管のTMモードの結果、式(4-21)より、 $z$ 方向に進む波（進行波）は

$$\begin{aligned}E_x &= -A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z} \\ E_y &= -A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z} \\ E_z &= A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z} \\ H_x &= A \frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z} \\ H_y &= -A \frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z} \\ H_z &= 0\end{aligned}\quad (5-4)$$

と表され、 $-z$ 方向に進む波（後退波）はこの結果の $\beta$ を $-\beta$ に置き換えたもので表されるので

$$\begin{aligned}
E_x &= A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{j\beta z} \\
E_y &= A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{j\beta z} \\
E_z &= A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{j\beta z} \\
H_x &= A \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{j\beta z} \\
H_y &= -A \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{j\beta z} \\
H_z &= 0
\end{aligned} \tag{5-5}$$

となる。ところで、

$$\begin{aligned}
& -je^{-j\beta z} + je^{j\beta z} \\
& = j(e^{-j\beta z} + e^{j\beta z}) = -2 \sin \beta z
\end{aligned} \tag{5-6}$$

であり、このとき

$$\beta = \frac{p\pi}{d} \quad (p = 0, 1, 2, \dots) \tag{5-7}$$

とすると  $z = 0, c$  で  $\sin \beta z = 0$  となる。したがって、進行波と後退波を足しあわせたとき、 $z = 0, c$  で  $E_x = E_y = 0$  とするためには式(5-7)の条件が必要になる。進行波と後退波の和をとり2で割ると以下の結果を得る。

$$\begin{aligned}
E_x &= -A \frac{1}{k_c^2} \frac{p\pi}{d} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{d} \\
E_y &= -A \frac{1}{k_c^2} \frac{p\pi}{d} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{d} \\
E_z &= A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{p\pi z}{d} \\
H_x &= A \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{p\pi z}{d} \\
H_y &= -A \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{p\pi z}{d} \\
H_z &= 0
\end{aligned} \tag{5-8}$$

このとき、

$$\begin{aligned}
\omega^2 \varepsilon \mu &= k_c^2 + \beta^2 = \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{d^2} \right) \pi^2 \\
(m &= 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots; p = 0, 1, 2, \dots)
\end{aligned} \tag{5-9}$$

となる。またこの空洞のQ値は以下である。

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{\lambda}{2\delta_s} \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right] \times \sqrt{\left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 + \left( \frac{p}{d} \right)^2} \\
& \quad / \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 \left( \frac{2}{a} + \frac{\varepsilon_p}{d} \right) + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \left( \frac{2}{b} + \frac{\varepsilon_p}{d} \right) \right] \\
& \quad \left( \varepsilon_p = \begin{cases} 1 & p = 0 \\ 2 & p \neq 0 \end{cases} \right)
\end{aligned} \tag{5-10}$$

### TEモード

矩形導波管のTEモードの結果、式(4-21)より、 $z$ 方向に進む波（進行波）は

$$\begin{aligned}
E_x &= A \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z} \\
E_y &= -A \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z} \\
E_z &= 0 \\
H_x &= A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z} \\
H_y &= A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z} \\
H_z &= \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}
\end{aligned} \tag{5-11}$$

と表され、 $-z$ 方向に進む波（後退波）は



$$\begin{aligned}
E_x &= \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} A \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{j\beta z} \\
E_y &= -\frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} A \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{j\beta z} \\
E_z &= 0 \\
H_x &= -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} A \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{j\beta z} \\
H_y &= -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} A \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{j\beta z} \\
H_z &= \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{j\beta z}
\end{aligned} \quad (5-12)$$

となる。この場合も進行波と後退波を足しあわせたときに  $E_x = E_y = 0$  となるためには、式(5-7)の条件が必要になる。

進行波と後退波の和をとると以下の結果を得る。

$$\begin{aligned}
E_x &= A \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{d} \\
E_y &= -A \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{d} \\
E_z &= 0 \\
H_x &= -A \frac{1}{k_c^2} \frac{p\pi}{d} \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{p\pi z}{d} \\
H_y &= -A \frac{1}{k_c^2} \frac{p\pi}{d} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{p\pi z}{d} \\
H_z &= \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{d}
\end{aligned} \quad (5-13)$$

このとき、

$$\begin{aligned}
\omega^2 \varepsilon \mu &= k_c^2 + \beta^2 = \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{d^2} \right) \pi^2 \\
(m &= 0, 1, 2, \dots; \quad n = 0, 1, 2, \dots; \\
p &= 1, 2, \dots; \quad m = n = 0)
\end{aligned} \quad (5-14)$$

となる。またこの空洞のQ値は以下である。

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{\lambda}{\delta_s} \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right] \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 + \left( \frac{p}{d} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \\
&\quad / 2 \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 \left( \frac{2}{a} + \frac{\varepsilon_n}{b} \right) + \left( \frac{p}{d} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. \left( \left( \frac{\varepsilon_n}{b} + \frac{2}{L} \right) \left( \frac{m}{a} \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{d} \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right) \right) \right] \\
\varepsilon_n &= \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 2 & n \neq 0 \end{cases}
\end{aligned} \quad (5-15)$$

## 5.2. 円筒形空洞共振器

円筒形空洞共振器は、ある長さの円形導波管の両端に導体でふたをしたものと考えられる。今、Fig. 14 のように  $r, \theta, z$  座標軸をとり、円の半径を  $R$ 、高さを  $h$  とする。

これは、 $z$  方向の導波管が  $z = 0, h$  で閉じたものと考えることができる。

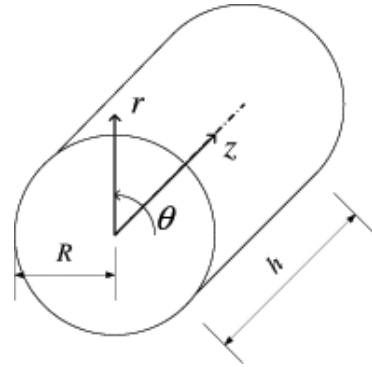


Fig. 14 円筒形空洞共振器

### TM モード

円形導波管の TM モードの結果、式(4-46)より、 $z$  方向に進む波（進行波）は

$$\begin{aligned}
E_r &= -A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{j_{mn}}{R} J'_m \left( \frac{j_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta e^{-j\beta z} \\
E_\theta &= A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{m}{r} J_m \left( \frac{j_{mn}}{R} r \right) \sin m\theta e^{-j\beta z} \\
E_z &= A J_m \left( \frac{j_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta e^{-j\beta z} \\
H_r &= -A \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{m}{r} J_m \left( \frac{j_{mn}}{R} r \right) \sin m\theta e^{-j\beta z} \\
H_\theta &= -A \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{j_{mn}}{R} J'_m \left( \frac{j_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta e^{-j\beta z} \\
H_z &= 0
\end{aligned} \tag{5-16}$$

と表され、 $-z$  方向に進む波（後退波）は

$$\begin{aligned}
E_r &= A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{j_{mn}}{R} J'_m \left( \frac{j_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta e^{j\beta z} \\
E_\theta &= -A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{m}{r} J_m \left( \frac{j_{mn}}{R} r \right) \sin m\theta e^{j\beta z} \\
E_z &= A J_m \left( \frac{j_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta e^{j\beta z} \\
H_r &= -A \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{m}{r} J_m \left( \frac{j_{mn}}{R} r \right) \sin m\theta e^{j\beta z} \\
H_\theta &= -A \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{j_{mn}}{R} J'_m \left( \frac{j_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta e^{j\beta z} \\
H_z &= 0
\end{aligned} \tag{5-17}$$

となる。進行波と後退波を足しあわせたときに  
 $E_r = E_\theta = 0$  となるためには、

$$\beta = \frac{p\pi}{h} \quad (p = 0, 1, 2, \dots) \tag{5-18}$$

の条件が必要になる。進行波と後退波の和をとり  
2 で割ると以下の結果になる。

$$\begin{aligned}
E_r &= -A \frac{1}{k_c^2} \frac{p\pi}{h} \frac{j_{mn}}{R} J'_m \left( \frac{j_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta \sin \frac{p\pi z}{h} \\
E_\theta &= A \frac{1}{k_c^2} \frac{p\pi}{h} \frac{m}{r} J_m \left( \frac{j_{mn}}{R} r \right) \sin m\theta \sin \frac{p\pi z}{h} \\
E_z &= A J_m \left( \frac{j_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta \cos \frac{p\pi z}{h} \\
H_r &= -A \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{m}{r} J_m \left( \frac{j_{mn}}{R} r \right) \sin m\theta \cos \frac{p\pi z}{h} \\
H_\theta &= -A \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{j_{mn}}{R} J'_m \left( \frac{j_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta \cos \frac{p\pi z}{h} \\
H_z &= 0
\end{aligned} \tag{5-19}$$

このとき、

$$\begin{aligned}
\omega^2 \varepsilon \mu &= k_c^2 + \beta^2 = \left( \frac{j_{mn}}{R} \right)^2 + \left( \frac{p^2}{d^2} \right)^2 \\
(m &= 0, 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots; \quad p = 0, 1, 2, \dots)
\end{aligned} \tag{5-20}$$

となる。またこの空洞のQ値は以下である。

$$Q = \frac{R}{\delta_s} / \left( 1 + \frac{\varepsilon_p R}{L} \right) \quad \left( \varepsilon_p = \begin{cases} 1 & p = 0 \\ 2 & p \neq 0 \end{cases} \right) \tag{5-21}$$

## TE モード

円形導波管の TE モードの結果、式(4-55)より、 $z$  方向に進む波（進行波）は

$$\begin{aligned}
 E_r &= -A \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{m}{r} J_m \left( \frac{j'_{mn}}{R} r \right) \sin m\theta e^{-j\beta z} \\
 E_\theta &= -A \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{j'_{mn}}{R} J'_m \left( \frac{j'_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta e^{-j\beta z} \\
 E_z &= 0 \\
 H_r &= -A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{j'_{mn}}{R} J'_m \left( \frac{j'_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta e^{-j\beta z} \\
 H_\theta &= A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{m}{r} J_m \left( \frac{j'_{mn}}{R} r \right) \sin m\theta e^{-j\beta z} \\
 H_z &= A J_m \left( \frac{j'_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta e^{-j\beta z}
 \end{aligned} \tag{5-22}$$

と表され、 $-z$  方向に進む波（後退波）は

$$\begin{aligned}
 E_r &= -A \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{m}{r} J_m \left( \frac{j'_{mn}}{R} r \right) \sin m\theta e^{j\beta z} \\
 E_\theta &= -A \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{j'_{mn}}{R} J'_m \left( \frac{j'_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta e^{j\beta z} \\
 E_z &= 0 \\
 H_r &= A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{j'_{mn}}{R} J'_m \left( \frac{j'_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta e^{j\beta z} \\
 H_\theta &= -A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{m}{r} J_m \left( \frac{j'_{mn}}{R} r \right) \sin m\theta e^{j\beta z} \\
 H_z &= A J_m \left( \frac{j'_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta e^{j\beta z}
 \end{aligned} \tag{5-23}$$

進行波と後退波を足しあわせたときに  $E_r = E_\theta = 0$  となるために  $\beta$  は TM モードのときと同じ条件である。進行波と後退波の和をとり  $2i$  で割ると以下の結果になる。

$$\begin{aligned}
 E_r &= A \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{m}{r} J_m \left( \frac{j'_{mn}}{R} r \right) \sin m\theta \sin \frac{p\pi z}{h} \\
 E_\theta &= A \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{j'_{mn}}{R} J'_m \left( \frac{j'_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta \sin \frac{p\pi z}{h} \\
 E_z &= 0 \\
 H_r &= A \frac{1}{k_c^2} \frac{p\pi}{h} \frac{j'_{mn}}{R} J'_m \left( \frac{j'_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta \cos \frac{p\pi z}{h} \\
 H_\theta &= -A \frac{1}{k_c^2} \frac{p\pi}{h} \frac{m}{r} J_m \left( \frac{j'_{mn}}{R} r \right) \sin m\theta \cos \frac{p\pi z}{h} \\
 H_z &= A J_m \left( \frac{j'_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta \sin \frac{p\pi z}{h}
 \end{aligned} \tag{5-24}$$

このとき、

$$\begin{aligned}
 \omega^2\varepsilon\mu &= k_c^2 + \beta^2 = \left( \frac{j'_{mn}}{R} \right)^2 + \left( \frac{p^2}{d^2} \right)^2 \\
 (m &= 0, 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots; p = 1, 2, \dots)
 \end{aligned} \tag{5-25}$$

となる。またこの空洞の Q 値は以下である。

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{\lambda}{2\pi\delta_s} (j'_{mn}{}^2 - m^2) \left( j'_{mn}{}^2 + \left( \frac{\pi p R}{L} \right)^2 \right) \\
 & \quad / \left[ j'_{mn}{}^4 + 2(\pi p j'_{mn})^2 \left( \frac{R}{L} \right)^3 \right. \\
 & \quad \left. + \left( \frac{\pi m p R}{L} \right)^2 \left( 1 - \frac{2R}{L} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{5-26}$$

## 6. 空洞と伝送線路の結合

### 6.1. 共振空洞と伝送線路の結合のマクスウェル方程式からの導出

ポインティングベクトル  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  を面積積分し、Maxwell 方程式を代入すると以下ようになる。

$$\begin{aligned}
\int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS &= \int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV \\
&= \int_V (\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}) dV \\
&= -\int_V \left( \mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \varepsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) dV \quad (6-1) \\
&= -\int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV - \frac{d}{dt} \int_V \left( \frac{\mu H^2}{2} + \frac{\varepsilon E^2}{2} \right) dV \\
&= -P_{beam} - \frac{dW}{dt}
\end{aligned}$$

これは良く知られているように、ポインティングベクトルの面積分  $\int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS$  とビーム加速エネルギー  $P_{beam} = \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV$  と電磁波エネルギーの時間変化  $\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \left( \frac{\mu H^2}{2} + \frac{\varepsilon E^2}{2} \right) dV$  の総和が0であり、ポインティングベクトルが電磁波の単位面積当たりのエネルギー流である事が分かる。

ここで、ポインティングベクトルの面積分を結合孔と導体壁に分け、ポインティングベクトルと法線ベクトルの内積を書き換え、導体表面について式(5-3)で法線ベクトルの向きが逆なので  $\mathbf{H}_s = -\mathbf{H}$  として、

$$\begin{aligned}
\int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS &= \int_{S_{hole}} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS_{hole} + \int_{S_{wall}} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H} dS_{wall} \\
&= P_{ext} + (1+j)R_s \int_{S_{wall}} H^2 dS_{wall} \quad (6-2)
\end{aligned}$$

ここで  $P_{ext}$  は外部への結合孔からの電力流出を指している。この電力は、波高  $\sqrt{2}$  で位相が 45 度ずれている事を意味し、導体上での壁損失の平均電力は  $R_s \int_S H^2 dS$  となる。そこで、

$$\frac{1}{Q_{wall}} = \frac{R_s}{\omega \mu} \frac{\int_{S_{wall}} H^2 dS_{wall}}{\int_V H^2 dV} = \frac{\delta_s}{2} \frac{\int_{S_{wall}} H^2 dS_{wall}}{\int_V H^2 dV} \quad (6-3)$$

と無次元の量を定義すれば、式(6-1)と式(6-2)から

$$\frac{\omega}{Q_{wall}} W + P_{ext} = -P_{beam} - \frac{dW}{dt} \quad (6-4)$$

並び替えると

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{\omega}{Q_{wall}} W - P_{ext} - P_{beam} \quad (6-5)$$

となる。これは、振動を平均化したエネルギーの時間変化を表した物だが、実際には  $\mathbf{H}$  と  $\mathbf{E}$  は 90 度ずれた振動をしており、2 次の微分を計算すれば、振動解の時間発展の方程式を導出する事もできる。

## 6.2. 共振空洞と伝送線路の結合の過渡現象とフィリングタイム

空洞共振器は外部から励振されるため導波管などの伝送線路と結合されている。ここでは、空洞共振器を取り扱うとき重要になるパラメータについて説明する[11]。

空洞共振器を特徴付けるパラメータとしては、 $Q$  値と結合係数  $\beta$  がある。 $Q$  値は次式で定義される。

$$Q = \frac{\omega_0 W}{P} \quad (6-6)$$

ここで、 $\omega_0$  : 共振周波数、 $W$  : 空洞に蓄えられているエネルギー、 $P$  : 損失 (単位あたりに空洞から失われるエネルギー) である。

$Q$  値には 3 種類あり、

- (1) 無負荷の  $Q$  (unloaded  $Q$ ) -  $Q_0$
- (2) 外部の  $Q$  (external  $Q$ ) -  $Q_{ext}$
- (3) 負荷時の  $Q$  (loaded  $Q$ ) -  $Q_L$

がある。 $Q_0$  は空洞内で電磁場による壁電流で消費される電力  $P_0$  による  $Q$  である。 $Q_{ext}$  は空洞の結合孔から外に逃げていく電磁場の電力  $P_{ext}$  による  $Q$  である。この  $P_0$  と  $P_{ext}$  の和が空洞から失われるパワー  $P_L$  とすると次の関係がある。

$$P_L = P_0 + P_{ext} \quad (6-7)$$

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{ext}} \quad (6-8)$$

結合係数は、空洞と外部回路（普通は導波管）との結合の強さを表し、

$$\beta = \frac{P_{ext}}{P_0} = \frac{Q_0}{Q_{ext}} \quad (6-9)$$

で表され、 $\beta > 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\beta < 1$  に対して、それぞれ強結合、臨界結合、弱結合という。また、式(6-8)、(6-9)から

$$Q_L = \frac{1}{1 + \beta} Q_0 \quad (6-10)$$

の関係が導かれる。

ここで空洞電圧が0の状態、高周波入力矩形パルスとして、入力された場合の過渡現象を考える。Fig. 15のようなエネルギー変化をしている系を用いる。Gはアドミッタンス、Vは電圧、Pはパワーを表しており、添え字の0は空洞内、wgは導波管、inは入力、rは反射、extはQ値の説明のときに用いたカップリングによる損失を表している。空洞内のエネルギー変化は入力マイクロ波のパワー $P_{in}$ と空洞内に入らずに反射するマイクロ波のパワー $P_r$ 、そして、空洞から漏れ出てくるマイクロ波のパワー $P_{ext}$ を用いて、

$$\frac{dW_0}{dt} = P_{in} - P_r - P_0 \quad (6-11)$$

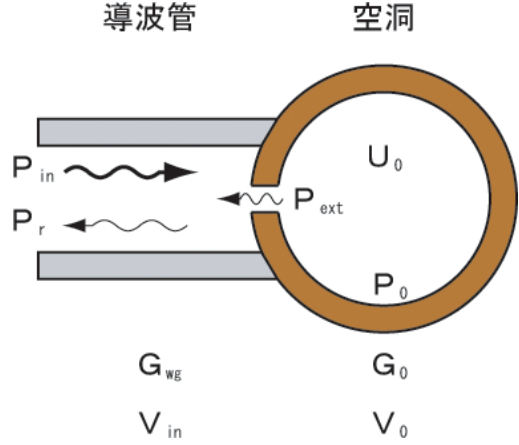


Fig. 15 空洞内のエネルギー変化を表した図 (Gはアドミッタンス、Vは電圧、Pはパワーを表しており、添え字の0は空洞内、wgは導波管、inは入力、rは反射、extはQ値の説明のときに用いたカップリングによる損失を表している)

と書くことができる。反射電圧は

$$V_r = -V_{in} + V_0 \quad (6-12)$$

なので、アドミッタンスと電圧を用いて書き直すと

$$\frac{dW_0}{dt} = G_{wg} V_{in}^2 - G_{wg} (V_0 - V_{in})^2 - G_0 V_0^2 \quad (6-13)$$

となる。ここで、

$$Q_0 = \frac{\omega W_0}{P_0} \quad (6-14)$$

という関係式を用いて式(6-13)を書き直すと

$$\begin{aligned} & \frac{Q_0}{\omega} \frac{d}{dt} (G_0 V_0^2) \\ &= G_{wg} V_{in}^2 - G_{wg} (V_0 - V_{in})^2 - G_0 V_0^2 \end{aligned} \quad (6-15)$$

とせる。また、

$$\beta = \frac{G_{gw}}{G_0} = \frac{P_{ext}}{P_0} \quad (6-16)$$

$$Q_L = \frac{\omega W_0}{P_0 + P_{ext}} = \frac{Q_0}{1 + \beta} \quad (6-17)$$



を用いて式(6-15)を書き直していくと

$$\begin{aligned}
& \frac{(1+\beta)Q_L}{\omega} \frac{d}{dt} (V_0)^2 G_0 \\
&= G_{wg} V_{in}^2 - G_{wg} V_0^2 - G_{wg} V_{in}^2 \\
& \quad + 2G_{wg} V_0 V_{in} - G_0 V_0^2 \\
& \frac{2(1+\beta)G_L}{\omega} \frac{dV_0}{dt} G_0 \\
&= -G_{wg} V_0 + 2G_{wg} V_{in} - G_0 V_0 \\
&= -\beta G_0 V_0 + 2\beta G_0 V_{in} - G_0 V_0 \\
& \frac{2(1+\beta)Q_L}{\omega} \frac{dV_0}{dt} \\
&= -\beta V_0 + 2\beta V_{in} - V_0 \\
&= -V_0(1+\beta) + 2\beta V_{in} \\
& \frac{2Q_L}{\omega} \frac{dV_0}{dt} \\
&= -V_0 + \frac{2\beta}{(1+\beta)} V_{in}
\end{aligned} \tag{6-18}$$

となる。そして、

$$T_c = \frac{2Q_L}{\omega} \tag{6-19}$$

$$\alpha = \frac{2\beta}{1+\beta} \tag{6-20}$$

と定義し式(6-18)を変形すると

$$T_c \frac{dV_0}{dt} + V_0 = \alpha V_{in} \tag{6-21}$$

と表せる。ここで、

$$V_0(t) = \tilde{V} e^{-\frac{t}{T_c}} \tag{6-22}$$

とおき、tで微分をすると

$$\frac{dV_0(t)}{dt} = \frac{d\tilde{V}}{dt} e^{-\frac{t}{T_c}} + \tilde{V} \left( -\frac{1}{T_c} \right) e^{-\frac{t}{T_c}} \tag{6-23}$$

となり、式(6-21)に式(6-22)、式(6-23)を代入し書き直すと

$$\begin{aligned}
T_c \left( \frac{d\tilde{V}}{dt} e^{-\frac{t}{T_c}} + \tilde{V} \left\{ -\frac{1}{T_c} \right\} e^{-\frac{t}{T_c}} \right) + \tilde{V} e^{-\frac{t}{T_c}} &= \alpha V_{in} \\
T_c \frac{d\tilde{V}}{dt} e^{-\frac{t}{T_c}} - \tilde{V} e^{-\frac{t}{T_c}} + \tilde{V} e^{-\frac{t}{T_c}} &= \alpha V_{in}
\end{aligned} \tag{6-24}$$

$$T_c \frac{d\tilde{V}}{dt} e^{-\frac{t}{T_c}} = \alpha V_{in}$$

$$\frac{d\tilde{V}}{dt} = \frac{1}{T_c} \alpha V_{in} e^{\frac{t}{T_c}}$$

と表せる。この式(6-24)を積分すると

$$\tilde{V} = \alpha V_{in} e^{\frac{t}{T_c}} + C \tag{6-25}$$

と表せ、式(6-22)に代入すると

$$\begin{aligned}
V_0(t) &= \left( \alpha V_{in} e^{\frac{t}{T_c}} + C \right) e^{-\frac{t}{T_c}} \\
&= \alpha V_{in} + C e^{-\frac{t}{T_c}}
\end{aligned} \tag{6-26}$$

となる。この時、初期条件 t=0 のとき、 $V_0(t) = 0$  を用いると以下のようにCが求まる。

$$\begin{aligned}
V_0(0) &= \alpha V_{in} + C = 0 \\
C &= -\alpha V_{in}
\end{aligned} \tag{6-27}$$

求めたCを式(6-26)に代入すると

$$\begin{aligned}
V_0(t) &= \alpha V_{in} - \alpha V_{in} e^{-\frac{t}{T_c}} \\
&= \alpha V_{in} \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_c}} \right)
\end{aligned} \tag{6-28}$$

と表せる。

ここで、

$$\omega = 2\pi f \tag{6-29}$$

という関係式と式(6-17)、(6-20)を用いて式(6-28)を書き直すと

$$\begin{aligned} V_0(t) &= \left(1 - e^{-\frac{\omega}{2Q_L}t}\right) \frac{2\beta}{1+\beta} V_{in} \\ &= \left(1 - e^{-\frac{2\pi f(1+\beta)}{1+2Q_0}t}\right) \frac{2\beta}{1+\beta} V_{in} \quad (6-30) \\ &= \left(1 - e^{-\frac{\pi f(1+\beta)}{Q_0}t}\right) \frac{2\beta}{1+\beta} V_{in} \end{aligned}$$

と表せる。この時、式(6-14)をアドミタンス  $G_{wg}$  を用いて書き換えると、

$$W_0 = \frac{Q_0}{\omega\beta} G_{wg} V_0^2 \quad (6-31)$$

と表せ、式(6-30)を用いると、

$$W_0 = \frac{Q_0 G_{wg}}{2\pi f\beta} \left[ \left(1 - e^{-\frac{\pi f(1+\beta)}{Q_0}t}\right) \frac{2\beta}{1+\beta} V_{in} \right]^2 \quad (6-32)$$

と表せる。式(6-32)は時間変化に伴う空洞内に溜まるエネルギー  $W_0$  を表しているため、エネルギーに関する **filling time** を表していると言える。また、空洞内に溜まるマイクロ波のエネルギー  $W_0$  と空洞内に立つ電場  $E_0$  には  $W_0 \sim E_0^2$  という関係があるため、時間変化に伴う空洞内に立つ電場についての関係は

$$\begin{aligned} V_0 &= \sqrt{\frac{Q_0 G_{wg}}{2\pi f} \left(1 - e^{-\frac{\pi f(1+\beta)}{Q_0}t}\right) \frac{2\sqrt{\beta}}{1+\beta} V_{in}} \\ &= 2\sqrt{\frac{Q_L G_{wg} \beta}{2\pi f(1+\beta)} \left(1 - e^{-\frac{\pi f}{Q_L}t}\right) V_{in}} \\ &= 2\sqrt{\frac{Q_L G_{wg} (Q_0 - Q_L)}{2\pi f Q_0} \left(1 - e^{-\frac{\pi f}{Q_L}t}\right) V_{in}} \quad (6-33) \end{aligned}$$

と  $Q_0$ 、 $Q_L$ 、 $\beta$  などを用いて表すことができる。この結果を用いることで、filling time を求めることができる。この様子を適当な時定数で書くと図ようになる。

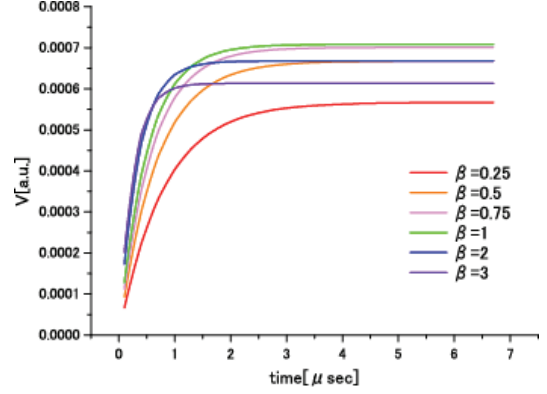


Fig. 16 空洞電圧の時間応答

## 7. 結合空洞(連成空洞)

### 7.1. マクスウェル方程式での空洞の結合

$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_{0s} = 0$ ,  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_{0s} = 0$  完全導体:0モード

$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_{\pi s} = 0$ ,  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_{\pi s} = 0$  完全磁気壁: $\pi$ モード

$$\nabla \times \mathbf{E}_\beta = -jk_\beta Z_\beta \mathbf{H}_\beta$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_\beta = j \frac{k_\beta}{Z_\beta} \mathbf{E}_\beta \quad (7-1)$$

$$\beta = 0, \pi$$

この0モードの界と $\pi$ モードの界をヘルムホルツ方程式と、ベクトル公式を利用し、境界条件を考慮すると、以下ようになる。

$$\begin{aligned} &(k_\pi^2 - k_0^2) \int_V \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_\pi dV \\ &= - \int_V (\mathbf{E}_0 \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_\pi - \mathbf{E}_\pi \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_0) dV \\ &= - \int_S (\mathbf{E}_0 \times \nabla \times \mathbf{E}_\pi - \mathbf{E}_\pi \times \nabla \times \mathbf{E}_0) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= - \int_S (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_\pi) \cdot \mathbf{n} dS + \int_S (\mathbf{E}_\pi \times \mathbf{H}_0) \cdot \mathbf{n} dS \quad (7-2) \\ &= - \int_{S_{hole}} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_\pi) \cdot \mathbf{E}_0 dS - \int_{S_{wall}} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0) \cdot \mathbf{H}_\pi dS \\ &\quad + \int_{S_{hole}} (\mathbf{E}_\pi \times \mathbf{H}_0) \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_{wall}} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_\pi) \cdot \mathbf{H}_0 dS \\ &= \int_{S_{hole}} (\mathbf{E}_\pi \times \mathbf{H}_0) \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned}$$

結合度  $k$  は結合孔のエネルギー流  $\int_{S_{hole}} (\mathbf{E}_\pi \times \mathbf{H}_0) \cdot \mathbf{n} dS$  と蓄積エネルギー  $\int_V \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_\pi dV$  の比で、これは  $\pi$  モードと 0 モードの 2 乗の差に比例する事が分かる。

$$k \sim \frac{\int_{S_{hole}} (\mathbf{E}_\pi \times \mathbf{H}_0) \cdot \mathbf{n} dS}{\int_V \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_\pi dV} = k_\pi^2 - k_0^2 \quad (7-3)$$

## 7.2. 等価回路

### 7.2.1. 結合空洞の等価回路

以上はエネルギーのやり取りを元にして、空洞の特性を表してきたが、エネルギーでは連成空洞の全ての特性を表す事ができない。そこで、等価回路を用いて空洞との結合を表す事にする。

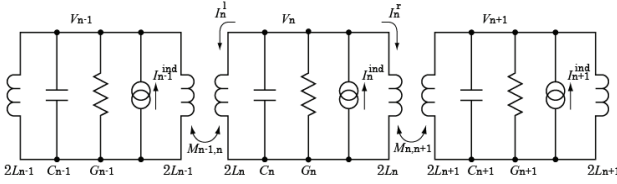


Fig. 17 結合空洞の等価回路

Fig. 17 は結合空洞の等価回路を表している。  $n$  番目の空洞で結合が無い場合のアドミッタンスは以下のように書ける。

$$\begin{aligned} Y_n &= j\omega C_n + \frac{1}{j\omega L_n} + G_n \\ &= \frac{1}{(R/Q)_n} \left[ j \left( \frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega_n}{\omega} \right) + \frac{1}{Q_n} \right] \end{aligned} \quad (7-4)$$

ここで、

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{L_n C_n}} \quad (7-5)$$

$$Q_n = \frac{\omega_n C_n}{G_n} = \frac{1}{\omega_n L_n G_n} \quad (7-6)$$

$$(R/Q)_n = \sqrt{\frac{L_n}{C_n}} = \omega_n L_n = \frac{1}{\omega_n C_n} \quad (7-7)$$

磁気的な結合がある場合を記述するため、まず  $n$  番目の空洞内部の電流を書くと

$$\begin{aligned} i_n^{ind} &= i_n^C + i_n^L + i_n^G \\ &= C_n \frac{dv_n}{dt} + i_n^l + i_n^r + G_n v_n \end{aligned} \quad (7-8)$$

式(7-5)、(7-6)、(7-7)、式(7-8) を使うと

$$\begin{aligned} \omega_n L_n i_n^{ind} &= (R/Q)_n i_n^{ind} \\ &= \frac{1}{\omega_n} \frac{dv_n}{dt} + \omega_n L_n (i_n^l + i_n^r) + \frac{1}{Q_n} v_n \end{aligned} \quad (7-9)$$

$n$  番目の空洞の左側の磁気結合は、以下のように表せる。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_n \\ v_{n-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2L_n & M_{n,n-1} \\ M_{n,n-1} & 2L_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{di_n^l}{dt} \\ \frac{di_{n-1}^r}{dt} \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} 1 & k_{n-1,n} \sqrt{\frac{L_n}{L_{n-1}}} \\ k_{n-1,n} \sqrt{\frac{L_{n-1}}{L_n}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_n \frac{di_n^l}{dt} \\ L_{n-1} \frac{di_{n-1}^r}{dt} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7-10)$$

同様に右側の磁気結合は、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_n \\ v_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2L_n & M_{n,n+1} \\ M_{n,n+1} & 2L_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{di_n^r}{dt} \\ \frac{di_{n+1}^l}{dt} \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} 1 & k_{n,n+1} \sqrt{\frac{L_n}{L_{n+1}}} \\ k_{n,n+1} \sqrt{\frac{L_{n+1}}{L_n}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_n \frac{di_n^r}{dt} \\ L_{n+1} \frac{di_{n+1}^l}{dt} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7-11)$$

ここで  $M$  は磁気結合の相互インダクタンスで、結合度  $k$  と以下のような関係である。

$$\begin{aligned} M_{n-1,n} &= k_{n-1,n} \sqrt{4L_{n-1}L_n} \\ M_{n,n+1} &= k_{n,n+1} \sqrt{4L_nL_{n+1}} \end{aligned} \quad (7-12)$$

式(7-9)から、

$$\frac{dv_n}{dt} = -\omega_n^2(L_n i_n^l + L_n i_n^r) - \frac{\omega_n}{Q_n} v_n + \omega_n(R/Q)_n i_n^{ind} \quad (7-13)$$

式(7-10)、(7-11)の逆行列から電流の微分である  $\frac{d(L_n i_n^l)}{dt}$  と  $\frac{d(L_n i_n^r)}{dt}$  の式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{d(L_n i_n^l)}{dt} &= \frac{v_n - k_{n-1,n}^* v_{n-1}}{2(1 - k_{n-1,n}^2)} \\ \frac{d(L_n i_n^r)}{dt} &= \frac{v_n - k_{n,n+1}^* v_{n+1}}{2(1 - k_{n,n+1}^2)} \end{aligned} \quad (7-14)$$

ここで式を簡単にするために、結合度を以下の  $k^*$  として置き換えた。

$$\begin{aligned} k_{n-1,n}^* &= k_{n-1,n} \sqrt{\frac{L_n}{L_{n-1}}} \\ &= k_{n-1,n} \sqrt{\frac{\omega_{n-1}(R/Q)_n}{\omega_n(R/Q)_{n-1}}} \\ k_{n,n+1}^* &= k_{n,n+1} \sqrt{\frac{L_n}{L_{n+1}}} \\ &= k_{n,n+1} \sqrt{\frac{\omega_{n+1}(R/Q)_n}{\omega_n(R/Q)_{n+1}}} \end{aligned} \quad (7-15)$$

式(7-13)、(7-14)は時系列の連立微分方程式であり、 $v_n$ 、 $L_n i_n^l$ 、 $L_n i_n^r$  が変数である。

さらに、式(7-9)を微分し、式(7-14)を使って、さらに  $k$  は小さいとして2次の項  $k^2$  は無視した場合、以下の2次の微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} (R/Q)_n \frac{di_n^{ind}}{dt} &= \frac{1}{\omega_n} \frac{d^2 v_n}{dt^2} + \omega_n v_n + \frac{1}{Q_n} \frac{dv_n}{dt} \\ &\quad - \frac{\omega_n}{2} (k_{n-1,n}^* v_{n-1} + k_{n,n+1}^* v_{n+1}) \end{aligned} \quad (7-16)$$

この式をフーリエ変換により  $\frac{d}{dt} = j\omega$  と置き換え、 $v_n = V_n e^{j\omega t}$ 、 $i_n^{ind} = I_n^{ind} e^{j\omega t}$  とする事により、以下の定常解を得る事ができる。

$$\begin{aligned} (R/Q)_n I_n^{ind} &= \left[ j \left( \frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega_n}{\omega} \right) + \frac{1}{Q_n} \right] V_n \\ &\quad + \frac{j\omega_n}{2\omega} (k_{n-1,n}^* V_{n-1} + k_{n,n+1}^* V_{n+1}) \end{aligned} \quad (7-17)$$

以上は良く教科書に載っている2次の項  $k^2$  は無視した式であるが、空洞列が一様な場合には、以下のように変数変換すると、式が簡単になるので2次の項を省略せず計算を進める事ができる。

$$\begin{aligned} k_{n,n+1} &= k_{n,n+1}^* = k \\ \omega_n &= \omega_c \sqrt{1 - k^2} \\ Q_n &= Q_c \sqrt{1 - k^2} \\ (R/Q)_n &= \frac{(R/Q)_c}{\sqrt{1 - k^2}} \end{aligned} \quad (7-18)$$

式(7-9)を微分し、式(7-14)を使って、以上の関係式を使うと、 $k$  の2次の項を無視しない式(7-16)は以下ようになる。

$$\begin{aligned} (R/Q)_c \frac{di_c^{ind}}{dt} &= \frac{1}{\omega_c} \frac{d^2 v_n}{dt^2} + \omega_c v_n + \frac{1}{Q_c} \frac{dv_n}{dt} \\ &\quad - k\omega_c \frac{v_{n-1} + v_{n+1}}{2} \end{aligned} \quad (7-19)$$

前と同様に  $v_n = V_n e^{j\omega t}$ 、 $i_n^{ind} = I_n^{ind} e^{j\omega t}$  とすれば、

$$\begin{aligned} (R/Q)_c I_n^{ind} &= \left[ j \left( \frac{\omega}{\omega_c} - \frac{\omega_c}{\omega} \right) + \frac{1}{Q_c} \right] V_n \\ &\quad + jk \frac{\omega_c}{\omega} \frac{V_{n-1} + V_{n+1}}{2} \end{aligned} \quad (7-20)$$

これに伝播定数  $\gamma = \alpha + j\beta$  の電磁波  $v_n = V_n e^{-\gamma z} = V_0 e^{j\omega t - \gamma z} = V_0 e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)}$  を代入し、さらに

$$\frac{1}{Q_c^*} = \frac{1}{Q_c} - (R/Q)_c \frac{I_n^{ind}}{V_n} = \frac{1}{Q_c} - (R/Q)_c G^{ind}$$

とすると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} & \left[ j \left( \frac{\omega}{\omega_c} - \frac{\omega_c}{\omega} \right) + \frac{1}{Q_c^*} \right] V_n \\ & + jk \frac{\omega_c}{\omega} \frac{e^{-\gamma D} + e^{\gamma D}}{2} \\ = & \left[ j \left( \frac{\omega}{\omega_c} - \frac{\omega_c}{\omega} \right) + \frac{1}{Q_c^*} \right] V_n \\ & + jk \frac{\omega_c}{\omega} (\cosh(\alpha D) \cos(\beta D) \\ & + j \sinh(\alpha D) \sin(\beta D)) \\ = & 0 \end{aligned} \quad (7-21)$$

ここで式の実数と虚数はそれぞれ一致しないといけないので、以下の2つの関係式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{\omega_c^2} &= 1 - k \cosh(\alpha D) \cos(\beta D) \\ \frac{1}{Q_c^*} &= k \frac{\omega_c}{\omega} \sinh(\alpha D) \sin(\beta D) \end{aligned} \quad (7-22)$$

式(7-22)は2次の項などを省略していない分散関係の式である。ここでこれを解くと非常に複雑になってしまうため、ここまでで初めての近似として、 $\alpha D \ll 1$  とすれば、 $\sinh(\alpha D) = \alpha D$ 、 $\cosh(\alpha D) = 1$  なので、

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\omega_c} &= \sqrt{1 - k \cos(\beta D)} \\ \alpha D &= \frac{1}{Q_c^*} \frac{\omega}{\omega_c} \frac{1}{k \sin(\beta D)} \\ &= \frac{1}{Q_c^*} \frac{\sqrt{1 - k \cos(\beta D)}}{k \sin(\beta D)} \end{aligned} \quad (7-23)$$

が得られる。

この関係を  $\beta D \leq \pi$  の基本ブリリアン帯について描くと Fig. 18 のようになる。この曲線を分散曲線 (dispersion curve) といい、 $\omega_c \sqrt{1-k}$  と  $\omega_c \sqrt{1+k}$  の間の周波数を通過帯 (pass band) という。

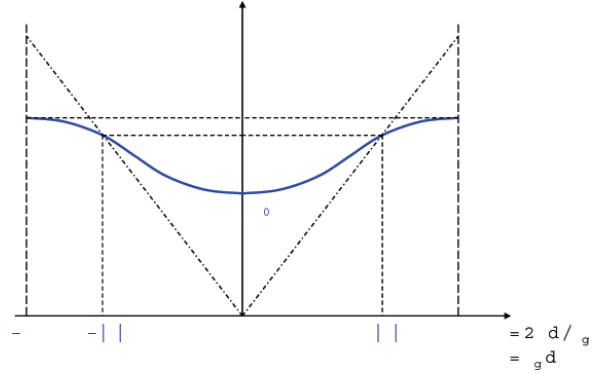


Fig. 18 無限周期構造の分散曲線 (基本ブリリアン帯)。D はセルの長さ、 $\lambda_g$  は管内波長

また通過帯に属するひとつの周波数  $\omega$  にはセル間の位相差が  $\pm \beta D$  の2つの波が存在する。

なお  $\beta D$  が  $0, \pi/2, \pi$  の時をそれぞれ 0-モード、 $\pi/2$ -モード、 $\pi$ -モードなどと呼ぶが、それらの共振周波数は以下ようになる。

$$\begin{aligned} f_0 &= f_c \sqrt{1-k} = \frac{1}{2\pi\sqrt{CL}} \frac{1}{\sqrt{1+k}} \\ f_{\pi/2} &= f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{CL}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \\ f_\pi &= f_c \sqrt{1+k} = \frac{1}{2\pi\sqrt{CL}} \frac{1}{\sqrt{1-k}} \end{aligned} \quad (7-24)$$

なお結合度  $k$  と空洞周波数  $f_c$  を 0モード及び  $\pi$ モードの周波数から求めると、

$$\begin{aligned} k &= \frac{f_\pi^2 - f_0^2}{f_\pi^2 + f_0^2} \\ f_c &= \sqrt{\frac{2f_\pi^2 f_0^2}{f_\pi^2 + f_0^2}} \end{aligned} \quad (7-25)$$



となる。再確認だが、これらの式が成り立つのは  $\alpha D \ll 1$  の時であり、 $k^2$  が無視できないような結合度が大きい場合でも成り立つ。

$\alpha D \ll 1$  と見なせないような損失の大きい媒体の場合は、式(7-22)から計算する必要がある。実際に私が以前開発した周期構造型減衰器で、等価回路設計と電磁波特性が異なる結果になった事がある。

また二重周期型(APS)空洞のように  $k_{n,n+2}$  が無視できない場合についての式も導出できるが、複雑になるので、ここでは記述しない。

### 7.2.2. 結合度の計算(2セル結合空洞)

前述のように結合度の計算には  $\beta D$  が  $0, \pi$  となる  $0$ -モード、 $\pi$ モードの共振周波数の計算をするのが良い。このためには2セル結合空洞の計算が必要である。Fig. 19 に示すような、ピルボックス空洞を2つ並べ、その2つの間に円孔をあけた形を考える。

同形のセルが2個何らかの方法で結合した連成振動系では、2セル間の振動が同位相(位相差=0)になるものと逆位相になるものの2つの基準モードが存在する。Fig. 19 の構成で、 $TM_{010}$ モードの場合を例にとれば、2つの基準モードは Fig. 20、Fig. 21 のようになる。

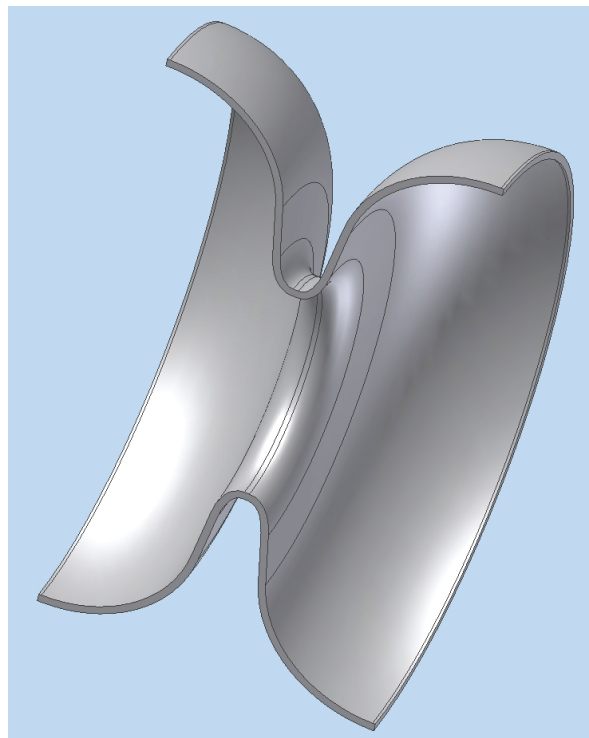


Fig. 19 円孔で結合した2ハーフセル超伝導空洞

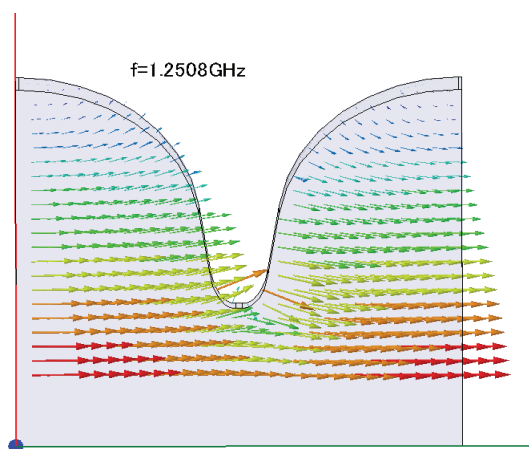


Fig. 20 2ハーフセル空洞の0モードでの電場分布

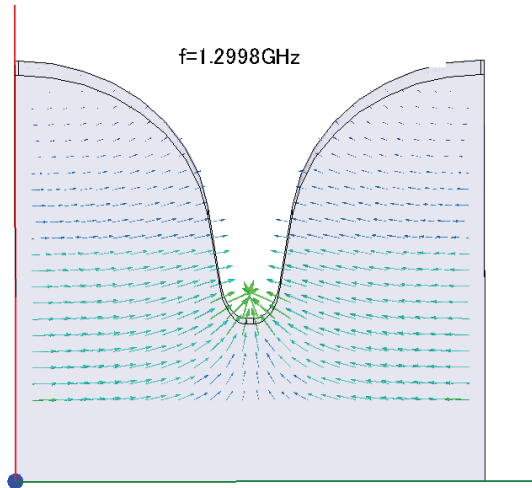


Fig. 21 2ハーフセル空洞の  
πモードでの電場分布

この2セルピルボックス空洞の等価回路を式(7-20)を使って行列で表すと以下のようなになる。

$$\begin{bmatrix} j\left(\frac{\omega}{\omega_c} - \frac{\omega_c}{\omega}\right) + \frac{1}{Q_c^*} & jk\frac{\omega_c}{\omega} \\ jk\frac{\omega_c}{\omega} & j\left(\frac{\omega}{\omega_c} - \frac{\omega_c}{\omega}\right) + \frac{1}{Q_c^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7-26)$$

この式が、 $V_1 = V_2 = 0$ 以外の解を持つための条件は左辺の行列式が0になる事であり、以下が成り立つ必要がある。

$$j\left(\frac{\omega}{\omega_c} - \frac{\omega_c}{\omega}\right) + \frac{1}{Q_c^*} = \pm jk\frac{\omega_c}{\omega} \quad (7-27)$$

壁損失を0とした場合には、

$$\omega = \omega_c \sqrt{1 \pm k} \quad (7-28)$$

となる。これは2セル結合空洞の固有モードであり、式(7-24)と比較すると、それぞれ $\beta D = 0, \pi$ の0・モードと $\pi$ ・モードと対応している事が分かる。

### 7.2.3. 連成空洞の群速度

式(7-23)から群速度は

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{\omega_c^2}{2\omega} kD \sin(\beta D) \quad (7-29)$$

これから群速度が最大になるのはおよそ $\pi/2$ モードの時である事が分かる。

### 7.2.4. 入力空洞の等価回路

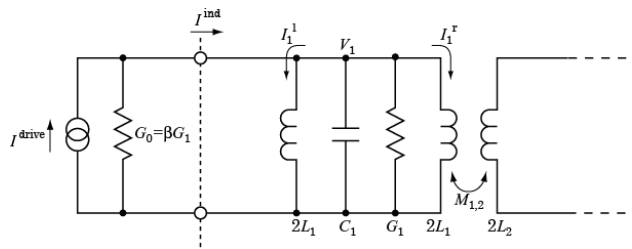


Fig. 22 入力空洞の等価回路

入力空洞は $G_0 = \beta G_1$ の伝送線路と結合している。図は入力空洞部の等価回路である。

$$\begin{aligned} I_1^{ind} &= I^{drive} - G_0 V_1 \\ &= I^{drive} - \frac{V_1}{(R/Q)_1 Q_{ext}} \end{aligned} \quad (7-30)$$

ここで外部Qである $Q_{ext}$ は以下のように定義される。

$$Q_{ext} = \frac{1}{(R/Q)_1 G_0} = \frac{Q_1}{\beta} \quad (7-31)$$

式(7-30)、式(7-17)を使うと入力空洞( $n=1$ )は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} (R/Q)_1 I^{drive} &= \left[ j\left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega}\right) + \frac{1}{Q_L} \right] V_1 \\ &\quad + \frac{j\omega_1}{2\omega} (k_{12}^* V_2) \end{aligned} \quad (7-32)$$

ここで負荷Qは以下の関係が成り立つ。

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_{ext}} \quad (7-33)$$

## 8. 高周波源

加速器における高周波源は、電子ビームを変調し、マイクロ波を増幅する事で、大電力高周波を得ている。本稿は高周波的な特性について限定したため、荷電粒子を含む系については触れない事にし、必要に応じて結果の式のみとした。

### 8.1. 電子銃

大電力高周波源である電子管では、電子銃が欠かせない。電子銃には、熱カソード DC 電子銃、フォトカソード RF 電子銃、熱カソード RF 電子銃などがあるが、ここでは熱カソード DC 電子銃いわゆる熱電子銃について簡単に説明する[6]。

熱電子銃は、カソードから熱電子放出により真空中に放出された電子を静電場によって取り出す電子銃である。静電場の代わりに高周波による電場を用いて電子を取り出すものを RF 電子銃という。熱電子放出とは、金属を高温に熱することで伝導体の自由電子がエネルギーを得て表面障壁を越えて真空中に放出された電子である。

熱カソードから放出された電子の電流量は、アノード、カソード間に印加された電圧により変化する。

まず、電場が 0 付近では電子が有している初速度によりアノードへの到達電流が決定される。電子の初速度はカソード温度によって変化するので、この電流値はカソード温度により変化する。

徐々に電圧を上げていくと電流がカソードからの放出ではなくビーム自身が作る電場、すなわち空間中に存在する空間電荷によって制限される領域となる。この領域を空間電荷制限領域という。ここでは電流はほぼ電圧の 3/2 乗に比例し、3/2 乗則(three-halves law)が近似的に成り立つ。電流がカソードからの放出ではなく空間電荷により制限されるのでカソード温度に対して電流はほとんど 変化しない。

さらに電場を上げていくと、電場に対して電流は飽和する。この領域を電圧飽和領域という。この領域では電流は再び陰極からの放出電流により制限されているため、カソード温度により電流も変化する。

熱電子銃は空間電荷制限領域で運転されることが多い。陰極からの電流は陰極の温度や陰極自身の劣化などにより変化するので、長期にわたり一定に保つことは困難である。一方で、両極間の電圧を一定に保つことは容易である。この領域においては得られる電流はカソードからの放出電流には依存せずに、アノード・カソード間の電圧により決定されるので、結果的に安定した電流が容易に得られるのである。

空間電荷制限領域では、平行電極の場合、両極間の距離  $d$ 、アノード電位  $V_A$  (カソードがアース) とすると、熱カソードから取り出せる最大電流密度  $J$  は、

$$J = 2.33 \times 10^{-6} \frac{V_A^{3/2}}{d^2} \quad [\text{A/m}^2] \quad (8-1)$$

となることが知られている。この式を 3/2 乗則あるいはチャイルド・ラングミュアの法則(Child-Langmuir law)という。ここで 3/2 乗則における比例係数

$$P = \frac{J}{V_A^{3/2}} \quad [\text{AV}^{2/3}] \quad (8-2)$$

をパービアンズと呼び、電子銃の性質を表す量として用いる。パービアンズの高い電子銃は低い極電圧で大きなビーム電流を取り出せる。

カソード面積を  $S$  とおくと、平行ビームのパービアンズは式(8-1)を変形して、

$$P = 2.33 \times 10^{-6} \frac{S}{d^2} \quad [\text{AV}^{2/3}] \quad (8-3)$$

のように表される。つまりパービアンズはカソード面積に比例し、かつアノード・カソード間隔の 2 乗に反比例する。

## 8.2. Inductive Output Tube (IOT) = Klystrode

ERL 計画では、主線形加速器の高周波源として IOT が候補になっている。IOT は 3 極管の一種で、グリッド-カソード間に高周波をかけた後、直流電圧で加速して、高周波の増幅を行うものである。

IOT の利点は

- 効率が 70%程度と高い。
- 入出力特性が線形に近く、低電力制御に都合が良い。

逆に IOT の欠点は

- 大電力化が難しく、1 本当たりの電力はクライストロンに遠く及ばない。結果として単価が相当下がらないと、対電力価格ではクライストロンに劣る。
- 高周波になるとカソード-グリッド間の間隔が縮まり製造が困難になる。
- 増幅度が 20dB 程度しかないため、前段にもう一段の IOT が必要になる

## 8.3. クライストロン

クライストロン(klystron)は加速器用の RF 源としてはもっともよく用いられるもので、ハイパワーの RF が得られる[7]。クライストロンには直進形クライストロンと反射形クライストロンがある。加速器の RF 源として用いられるものは直進形クライストロンである。また、近年はマルチビームクライストロンの開発も進められている[8], [9]。

Fig. 23 に直進形クライストロンの原理を示す。Buncher cavity に種となる RF を入れてやることで電子銃から発生した電子ビームにモジュレーションをかけ、バンチングした電子ビームを Catcher cavity に打ち込む。このバンチングした電子ビームが作る電磁場を Catcher cavity に溜めて出力 RF として取り出す。

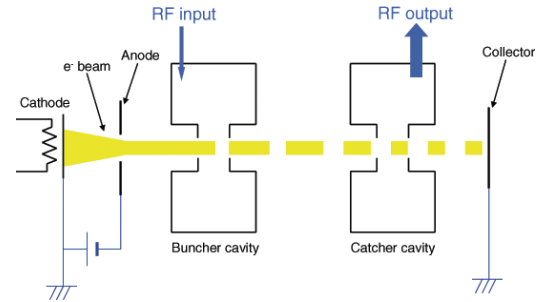


Fig. 23 直進形クライストロンの原理

直進型クライストロンの特徴を以下に示す。

- 効率が 40%にも達するので大電力用に適する
- 空洞を多段にする事で、増幅度を大きくでき、60dB にも達する
- 入力 RF の周波数によって出力周波数が完全に決まるので、周波数安定度はきわめてよいが、周波数帯域は狭い

クライストロンのビーム電力や効率は電子ビームのパービアンズで決まっている。従って、ビーム一本当たりのパービアンズを下げるマルチビームクライストロンでは効率がよくできるため、開発が進められている[8]、[9]。

## 8.4. マグネトロン

マグネトロン(magnetron)は、磁電管とも呼ばれ、電場と磁場の相互作用によって振動をおこす RF 電子管である[4]。

Fig. 24 にマグネトロンの構造を示す。マグネトロンは図のように複数の RF 空洞を持った真空管であり、中心が陰極、外側の導体が陽極になっている。

空洞はそれぞれ同じ共振周波数をもつ空洞共振器になっており、隣り合う 2 つの空洞間の電磁場位相が 180 度( $\pi$ [rad])になる  $\pi$ モードが誘起されるようになっている。

中心のヒータ温度を上げることによって熱電子が放出され 陰極に向かって加速されるが、軸方向に加えられた磁場によって軌道がまげられ、作用空間を回転運動する。ここで空洞共振器の空隙部を通過する際、そこに加わる高周波電場によって加速、減速の速度変調を受ける。回転運動を

している電子のうち、加速電場を受けたもの（電場からエネルギーを奪うもの）は、ここで加速されるので直ちに陽極に到達してしまい、作用空間にとどまることができない。したがって、作用空間には減速電場を受けたもの、すなわち、電場にエネルギーを与え、発振に役立つものばかりになる。作用空間にできる減速電場は、空洞共振器の数の 1/2 であるので、作用空間の電子も減速電場と同じ数だけの塊になる。この塊を電子極と呼び、発振に役立つ電子は必ずいずれかの電子極に含まれる。

電子極は、陽極電圧と磁場とによってある周期で作用空間を回転しながら、同じ周期で振動する空洞共振器の高周波電場にエネルギーを与えるので、空洞共振器は振動が持続する。

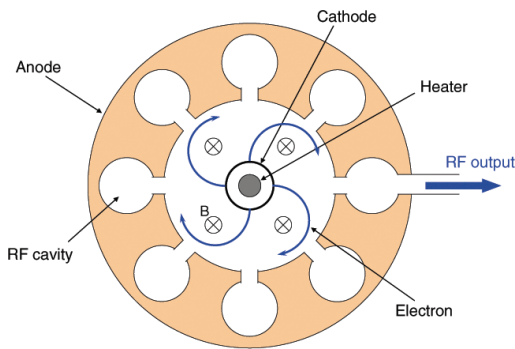


Fig. 24 マグネトロン構造

マグネトロンの特徴を以下に示す。

- 小型、堅固であり、取り扱いも比較的容易である
- 発振効率がよく、70%にも達する
- 自励発振であり直進形クライストロンに比べると周波数の安定性が悪い

## 9. 加速管

ここでは、電子線形加速器でもっとも重要な部分である加速管について説明する。電子線形加速器の加速管は円筒型導波管に円盤を装荷した形のものが使われ、円盤装荷導波管 (disc-loaded waveguide) と呼ばれる。円盤を装荷するのは、加速管のマイクロ波の位相速度を遅くして電子ビ

ームを加速できる速度 ( $v_p \leq c$ ) にするためである。これを遅波構造 (slow-wave structure) と呼ぶ [12]。

円盤装荷導波管には進行波管 (travelling-wave tube) と定在波管 (standing-wave tube) がある。超伝導空洞は通常は定在波管であるが、ここでは超伝導空洞のみに捉われず、この両方について説明し、加速管を電気回路的な等価回路に置き換えた解析方法について説明する。

### 9.1. シャントインピーダンス

さて、次に実際にシャントインピーダンスを計算する方法を示す。今、加速管の1周期ぶんの電磁場分布が分かっているとすると、これは、計算コードなどを使い知ることができる。ここで、得られる電磁場分布は当然共振周波数の周期で時間とともに変化するので複素数で表され

$$E(r, z) = E_R(r, z) + jE_I(r, z)$$

$$H(r, z) = H_R(r, z) + jH_I(r, z)$$

と表現される。また、電磁場が分かれば加速管表面電流が計算でき、その値と加速管の材質（普通は銅）の電気抵抗値・表皮深さから  $Q$  値や1セルでの消費電力  $P$  が導き出せる。

さきほど「加速に有効な」電場という表現をしたが、これは粒子が感じる電場であるので軸上の電場強度であり、時間的に移動する粒子の位置での電場強度である。1周期の間に粒子が感じる電位差を  $V$  とすると

$$V = \left| \int_0^{z(t)=D} E_z(0, z(t)) e^{j\omega t} dt \right| \quad (9-1)$$

と表される。ここで、 $L$  は1セル分の長さ、 $z(t)$  は粒子の位置である。粒子が光速で通過すれば  $z = ct$  なので、

$$V = \left| \int_0^D \frac{1}{c} E(0, z) e^{\frac{j\omega z}{c}} dz \right| \quad (9-2)$$



である。1セルあたりでの電位差 $V$ と電力損失 $P_D$ を用いるとシャントインピーダンスは

$$Z_s = \frac{V^2}{P_D D} = \frac{E_0^2}{P_D / D} = \frac{E_0^2}{P} \quad (9-3)$$

である。なお、 $P$ は単位長さの電力損失、 $E_0 = V / D$ は軸上電場の平均である。これを $R/Q$ で書くと以下ようになる。

$$R / Q = \frac{E_0^2}{\omega W} \quad (9-4)$$

### 9.1.1. Transit Time Factor

$E_D$ は加速管の $z$ 方向電場ピーク値 $E_z(r, z)$ を用いると

$$E_D = \frac{1}{D} \int_0^D E_z(0, z) dz \quad (9-5)$$

である。ここで、 $E_D$ はピーク値を積分したので必ずしも粒子が感じる電場強度ではない。そこで、粒子が感じる電場の値に換算するためのファクターを考える。それが **transit time factor**  $T$  である。粒子が感じる平均電場が  $TE_D$  となるように  $T$  を計算すると

$$T = \frac{\left| \int_0^D \frac{1}{c} E(0, z) e^{\frac{j\omega z}{c}} dz \right|}{\int_0^D E_z(0, z) dz} \quad (9-6)$$

である。ただし、粒子の速度が光速 $c$ であるとした。また、分子で絶対値を取っているのは最大加速電場を受ける位相で粒子が入射されたと仮定しているためである。

## 9.2. 進行波管

ERL とは逸れるが、常伝導の進行波管の構成を Fig. 25 に示す。進行波管は加速管の電子ビーム入射側から RF を投入して、加速管反対側まで流れた RF をダミーロードに捨てる。このように進

行波管は RF のエネルギーの流れが電子の進行方向と一致している。さらに、位相速度 $v_p$ を電子の速度と一致させている。

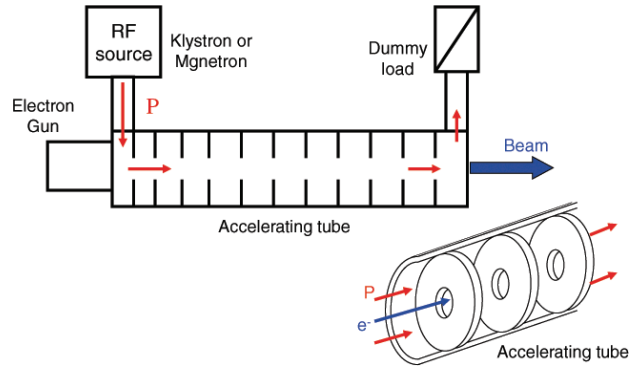


Fig. 25 進行波管

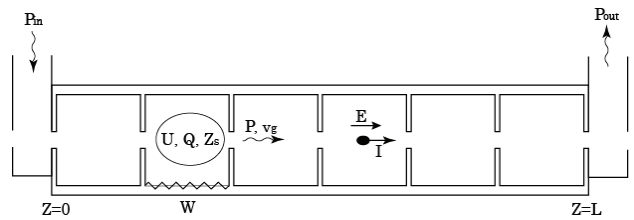


Fig. 26 進行波加速管の概念図

Fig. 26 は進行波加速管の概念図であり、以下のような関係が成り立っている。

$$P = v_g U \quad (9-7)$$

$$Q = \frac{\omega U}{W} \quad (9-8)$$

$$Z_s = \frac{E^2}{W} \quad (9-9)$$

$$\alpha = \frac{W}{2P} \quad (9-10)$$

$$\tau = \int_0^L \alpha dz \quad (9-11)$$

ここで式のパラメーターは以下のようになっている。

$P$	電力流
$U$	単位長さ当たりのエネルギー
$v_g$	群速度
$Q$	Q値
$W$	壁損失
$Z_s$	シャントインピーダンス
$E$	電界
$\alpha$	減衰率
$L$	実質的な加速管の長さ
$\tau$	全体の減衰係数

式から以下のような $\alpha$ と $v_g$ の関係が得られる。

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{W}{2P} = \frac{W}{2v_g U} \\ &= \frac{\omega}{2Q} \frac{1}{v_g} \end{aligned} \quad (9-12)$$

式(9-12)を $z$ で積分すると以下のような式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_0^z \alpha dz &= \frac{\omega}{2Q} \int_0^z \frac{dz}{v_g} \\ &= \frac{\omega}{2Q} t_z \\ &= \tau \frac{t_z}{t_f}, \end{aligned} \quad (9-13)$$

ここで $t_f$ は加速管のフィリングタイムで、以下のようになっている。

$$\begin{aligned} t_f &= \int_0^L \frac{dz}{v_g} \\ &= \frac{2Q}{\omega} \int_0^L \alpha dz \\ &= \frac{2Q\tau}{\omega}. \end{aligned} \quad (9-14)$$

加速管内での高周波の損失は壁損失と、ビームローディングである。従って、高周波の減衰は以下のように表せる。

$$\frac{dP}{dz} = -W - IE = -2\alpha P - IE \quad (9-15)$$

ここで $I$ は平均的な電流量である。

電力の全微分を以下のように偏微分で置き換えると、

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dz} &= \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial t} \frac{dt_z}{dz} \\ &= \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial P}{\partial t} \end{aligned} \quad (9-16)$$

式(9-15)は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial P}{\partial t} &= -W - IE \\ &= -2\alpha P - IE \end{aligned} \quad (9-17)$$

ビーム電流が無いと、電力損失は以下のようになる。

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -W = -2\alpha P \quad (9-18)$$

$$\begin{aligned} \frac{P}{P_{in}} &= e^{-2 \int_0^z \alpha dz} \\ \frac{P_{out}}{P_{in}} &= e^{-2 \int_0^L \alpha dz} = e^{-2\tau} \end{aligned} \quad (9-19)$$

ここで $P_{in}$ は高周波の加速管への入力電力であり、 $P_{out}$ は加速管出口からの出力電力である。

電界一定(Constant Gradient(CG))という条件で計算を行うと式(9-10)から $W$ は一定である。従って式(9-18)を以下のように書き換える事ができる。

$$\frac{\partial P_{CG}}{\partial z} = -W_{CG} = -2\alpha_{CG} P_{CG} = const \quad (9-20)$$



これから  $P_{CG}$  が以下のように求まる。

$$P_{CG} = P_{in} - W_{CG}z \quad (9-21)$$

式(9-19)と式(9-21)から、加速管出口での電力は

$$P_{CG}(L) = P_{out} = P_{in}e^{-2\tau} = P_{in} - W_{CG}L \quad (9-22)$$

$$W_{CG} = P_{in} \frac{1 - e^{-2\tau}}{L}$$

これから減衰率は以下のようにになる。

$$\alpha_{CG} = \frac{W_{CG}}{2P_{CG}} \quad (9-23)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\frac{1-e^{-2\tau}}{L}}{1 - \frac{1-e^{-2\tau}}{L}z}$$

ビームローディングがある場合でも、減衰率の関数形は同じで  $\alpha = \alpha_{CG}$  である。

式(9-10)、式(9-11)から電力流と壁損失の電界との関係は以下のようになっている。

$$W = \frac{E^2}{Z_s} \quad (9-24)$$

$$P = \frac{E^2}{2\alpha_{CG}Z_s}$$

これを式(9-17)に代入すると電界の満たす式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{E^2}{2\alpha_{CG}Z_s} \right) = -\frac{E^2}{Z_s} - IE \quad (9-25)$$

これを展開すると

$$\frac{\partial E}{\partial z} + \alpha_{CG}E \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2\alpha_{CG}} \right) + 1 \right\} = -\alpha_{CG}Z_s I \quad (9-26)$$

式(9-23)を使えば以下が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2\alpha_{CG}} \right) = -1 \quad (9-27)$$

従って式(9-26)を書き換えれば

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -\alpha_{CG}Z_s I \quad (9-28)$$

これを積分すれば、電界は以下のようにになる

$$E = E_0 - Z_s I \int_0^z \alpha_{CG} dz \quad (9-29)$$

ここで

$$E_0 = \sqrt{Z_s W(0)} = \sqrt{P_{in} Z_s \frac{1 - e^{-2\tau}}{L}} \quad (9-30)$$

これから

$$E = E_0 - Z_s I \tau \frac{t_z}{t_f} \quad (9-31)$$

加速電界の長さLの総和は積分すると得られ以下のようにになる。

$$E = E_0 - \frac{Z_s I}{2} \log \left( 1 - \frac{1 - e^{-2\tau}}{L} z \right) \quad (9-32)$$

$$V = E_0 L - \frac{Z_s I L}{2} \left( 1 - \frac{2\tau e^{-2\tau}}{1 - e^{-2\tau}} \right) \quad (9-33)$$

超伝導の連成空洞の場合では、 $Q$  が非常に大きい  
ため、減衰定数 $\tau$ を大きくするためには、群速度  
 $v_g$ を小さくする必要がある。結果結合度を小さく  
せねばならず、空洞の形状精度の面からも、ウェ  
ークフィールドの面からも不可能となる。

超伝導で進行波管が可能だとすれば還流型の進  
行波管だろう。

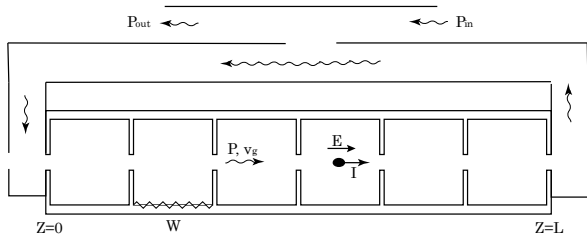


Fig. 27 還流型進行波管

Fig. 27 は還流型進行波管の概念図である。還流型にする事で、結合度は大きいままで、全体としては高いQの空洞に見せる事が可能になる。例えば、超伝導加速空洞の電界が  $20\text{MV/m}$  で  $R/Q=1000\ \Omega$  の場合、必要な蓄積エネルギーは、
$$W = \frac{E^2}{\omega(R/Q)} \sim 98 [J/m]$$
 であり、例えば  $\pi/2$  モードの進行波管で空洞間の結合度が ERL 用の空洞と同じ 4% 程度だとすると、
$$v_g/c = \frac{\omega_c^2}{2c\omega} kD \sin(\beta D) \sim 0.03$$
 である。これらから、還流電力は  $P = Wv_g \sim 900 [MW]$  となってしまふ。しかも超伝導で還流型にするには、還流部分まで超伝導にする必要があり、やはり難しい。

### 9.3. 定在波管

定在波管の構成を Fig. 28 に示す。定在波管は供給した RF がすべて加速管の中で消費され、進行波管のように RF を捨てることはしない。定在波管は導波管から見れば6節で示した空洞として見える。

加速管の中では、エネルギー束が両端の壁で反射され、進行波と後退波が入り混じった状態になり、定在波を作っている。常伝導の定在波管では位相が  $\pi/2$  だけ進む  $\pi/2$  モードが群速度最大であり、電磁場が安定になるため良く使われる。しかし  $\pi/2$  モードでは電界が小さい空洞が1つおきにできてしまうため、シャントインピーダンスが低い。これを解消するため APS 型や DAW 型、サイドカップル型などが開発された。

なおシャントインピーダンスがもっとも高くなるのは  $\pi$  モードである。しかし、 $\pi$  モードは群速度が 0 である完全な定在波であるため、電磁場

が不安定である。従って  $\pi$  モードでは、常伝導の加速管では空洞内の損失があるため長くすることはできず、数セルが限界である。超伝導加速の場合は、壁損失もほぼ 0 で、ビームローディングも小さいため、 $\pi$  モードの連成空洞も可能であり、実際 ILC や ERL 計画では 9 セルの  $\pi$  モードの定在波空洞が採用されている。

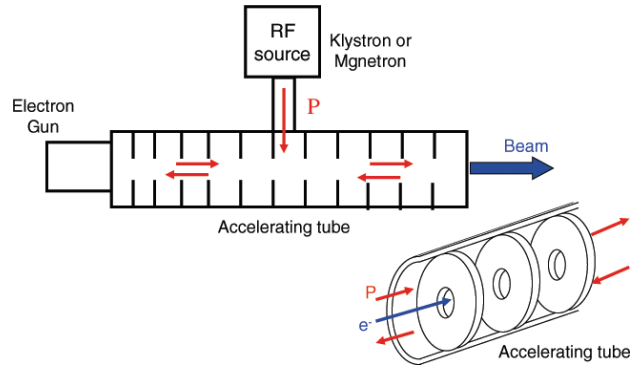


Fig. 28 定在波管

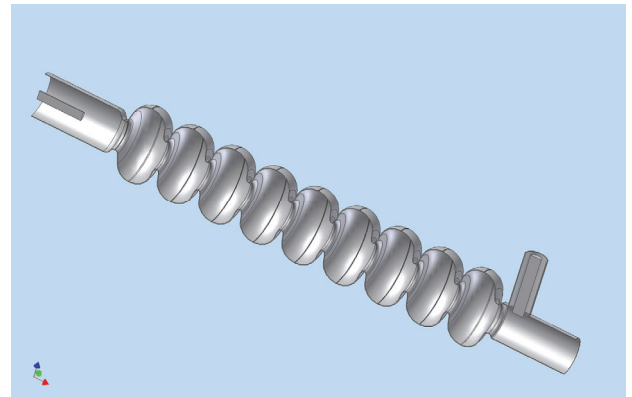


Fig. 29 ERL 用の超伝導空洞

超伝導では  $\alpha D \ll 1$  なので、 $\pi$  モードの群速度を検討するためには式(7-23)と式(7-29)から出発すれば良い。

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{\omega_c^2}{2\omega} kD \sin(\beta D) = \frac{\omega_c}{2\alpha Q_c^*}$$

つまり  $\pi$  モードというのは、損失がある事により、 $\beta D$  が  $\pi$  から微小にずれて、エネルギー流が生まれるという事を意味していると考えられる。

## 参考文献

- [1] 亀井亨、木原元央、「加速器科学」丸善株式会社
- [2] S. Y. Lee 、“Accelerator Physics Second Edition”、World Scientific Pub. Co. Inc. 2004
- [3] 小林仁、「電子線形加速器」、OHO' 88 高エネルギー加速器セミナー、(財) 高エネルギー加速器科学研究奨励会 1988
- [4] 中島将光、「マイクロ波工学」、森北出版株式会社
- [5] 鈴木清、「マイクロ波回路の基礎」、啓学出版株式会社
- [6] 栗木雅夫、「電子線形加速器の基礎 電子源」、OHO' 02 高エネルギー加速器セミナー、(財) 高エネルギー加速器科学研究奨励会 2002
- [7] 道園真一郎、「電子線形加速器の基礎 高周波源」、OHO' 02 高エネルギー加速器セミナー、(財) 高エネルギー加速器科学研究奨励会 2002
- [8] A. Larionov, V. Teryaev, S. Matsumoto, Y.H. Chin, “Design of Multi-Beam Klystron in X-Band”、 Proceeding of the 27th Linear Accelerator Meeting in Japan
- [9] A.Yano, S. Miyake, TOSHIBA ELCTRON TUBES & DEVICES Co., Ltd., Ohtawa-shi, Japan, S. Choroba, DESY, Hamburg, Germany, “DEVELOPMENT OF TOSHIBA L-BAND MULTI-BEAM KLYSTRON FOR EUROPEAN XFEL PROJECT”、 Proc. of Particle Accelerator Conference '07, June 25 - 29, 2007, Albuquerque, New Mexico
- [10] 後藤憲一、山崎修一郎、「電磁気学演習」、共立出版株式会社
- [11] 山口誠哉、「電子線形加速器の基礎 加速管・立体回路」、OHO' 02 高エネルギー加速器セミナー、(財) 高エネルギー加速器科学研究奨励会 2002
- [12] 高田耕治、「加速器の基礎理念」、高エネルギー加速器研究機構 加速器研究施設、2002年7月8日改訂
- [13] 高田耕治、「高周波加速の基礎」、高エネルギー加速器研究機構 加速器研究施設、2005年1月12日改訂
- [14] 肥後寿泰、「ディスクロード型加速構造のカプラーマッチングに関する簡単な等価回路解析」、JLC-note、No.42、1993年2月9日
- [15] D. E. Nagle, E. A. Knapp, B. C. Knapp, “Coupled Resonator Model for Standing Wave Accelerator Tanks”、 The Review of Scientific Instruments Volume 38. Number 11 November 1967 pp.1583-1587
- [16] E. A. Knapp, B. C. Knapp, J. M. Potter, “ Standing Wave High Energy Linear Accelerator Structures”、 The Review of Scientific Instruments Volume 39. Number 7 July 1968 pp.979-991
- [17] 鍛冶幸悦、岡田新之助、「電気回路(1)」、コロナ社
- [18] G. Wendt, in Handbuch der Physik, ed. S. Flügge, Vol. 16 (Springer, Berlin, 1958), p.140.
- [19] 夏井拓也、「可搬型非破壊検査用 X バンドライナックの実証」、修士論文、東京大学大学院工学系研究科、2008
- [20] 古田安彦、「マイクロ波アンジュレータの開発研究」、修士論文、東京理科大学大学院理工学研究科物理専攻、2007

## 付録 A

### 1. スカラーヘルムホルツ方程式の基本解

$$(\Delta + k^2)G = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1-1)$$

(3次元)

$$G = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$$

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \quad (1-2)$$

(2次元)

$$G = -\frac{jH_0^{(2)}(kR)}{4} = \frac{Y_0(kR) - jJ_0(kR)}{4} \quad (1-3)$$

ここで  $\nabla G$  を求める

$$\nabla G(kR) = G'(kR) \cdot k \cdot \nabla R = G'(kR) \cdot k \frac{\mathbf{R}}{R} \quad (1-4)$$

(3次元)

$$\nabla G = G \cdot \left( -\frac{1}{R} - jk \right) \frac{\mathbf{R}}{R} \quad (1-5)$$

(2次元)

$$\nabla G = -\frac{jH_1^{(2)}(kR)}{4} \cdot k \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{Y_1(kR) - jJ_1(kR)}{4} \cdot k \frac{\mathbf{R}}{R} \quad (1-6)$$

### 2. 基本解

スカラーヘルムホルツ方程式の基本解

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

$$(\Delta + \kappa^2)G = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2-1)$$

↓ベクトルヘルムホルツ方程式へ

$$\mathbf{u}_e = Ge$$

$$(\Delta + k^2)\mathbf{u}_e = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\mathbf{e} \quad (2-2)$$

( $\mathbf{e}$  は任意のベクトル)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{u}_e) &= \nabla \cdot (Ge) \\ &= G \cdot \nabla \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot \nabla G \\ &= \mathbf{e} \cdot \nabla G \end{aligned} \quad (2-3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_r &= \nabla \times (Ge) (= \nabla \times (\mathbf{u}_e)) \\ &= (\nabla G) \times \mathbf{e} + G(\nabla \times \mathbf{e}) \\ &= (\nabla G) \times \mathbf{e} \end{aligned} \quad (2-4)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u}_r &= \nabla \cdot \nabla \times (Ge) = 0 \\ \nabla \times \mathbf{u}_r &= \nabla \times \nabla \times (Ge) \\ &= \nabla \nabla \cdot (Ge) - \Delta(Ge) \\ &= \nabla \nabla \cdot (Ge) - (\Delta G)\mathbf{e} \\ &= \nabla \nabla \cdot (Ge) + (k^2 G + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'))\mathbf{e} \end{aligned} \quad (2-5)$$

$$\Delta \mathbf{u}_r - \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}_r + \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}_r = 0 \quad (2-6)$$

↓

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_r + \nabla \times \nabla \nabla \cdot (Ge) + k^2 \nabla \times (Ge) \\ + \nabla \times (\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\mathbf{e}) = 0 \end{aligned} \quad (2-7)$$

$$(\Delta + k^2)\mathbf{u}_r = -\nabla \times (\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\mathbf{e}) \quad (2-8)$$

### 3. 体積積分→面積分

$\int_V (\mathbf{u} \Delta \mathbf{A} - \mathbf{A} \Delta \mathbf{u}) dV$  を面積分に変換するため  
 $= \int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{\psi} dV) = \int_S \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{n} dS$  となる  $\boldsymbol{\psi}$  を求める  
 ここで  $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b}$  を利用し  
 て

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \nabla \times \mathbf{A}) &= \nabla \times \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{u} - \mathbf{u} \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} \\ &= \nabla \times \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{u} - \mathbf{u} \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{u} \Delta \mathbf{A} \end{aligned} \quad (3-1)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{u}) = \nabla \times \mathbf{u} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{A} \Delta \mathbf{u} \quad (3-2)$$

さらに  $\nabla \nabla \cdot$  の項を消去するため、  
 $\nabla \cdot (\phi \cdot \mathbf{a}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla \phi$  を利用して

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{A}) = \nabla \cdot \mathbf{A} \cdot \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (3-3)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \nabla \cdot \mathbf{u}) = \nabla \cdot \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (3-4)$$

これから  $\boldsymbol{\psi} = (3-1) + (3-3) - (3-2) - (3-4)$  である  
 従って

$$\begin{aligned} & \int_V (\mathbf{u} \Delta \mathbf{A} - \mathbf{A} \Delta \mathbf{u}) dV \\ &= \int_S (\mathbf{u} \times \nabla \times \mathbf{A} + \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{u} - \mathbf{A} \nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (3-5)$$

#### 4. ベクトルヘルムホルツ方程式の積分形

$$\begin{aligned} & \int_V (\mathbf{u} (\Delta + k^2) \mathbf{A} - \mathbf{A} (\Delta + k^2) \mathbf{u}) \\ &= \int_V (\mathbf{u} \Delta \mathbf{A} - \mathbf{A} \Delta \mathbf{u}) dV \end{aligned} \quad (4-1)$$

(1)  $\mathbf{u} = (G, G, G)$  として  $\mathbf{A}$  の各成分  $A_i$  にスカラーヘルムホルツ方程式として解く

$$\begin{aligned} & \int_V (G (\Delta + \kappa^2) A_i - A_i (\Delta + \kappa^2) G) dV \\ &= \int_S \left( G \frac{\partial A_i}{\partial n} - A_i \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS \end{aligned} \quad (4-2)$$

$$\begin{aligned} cA_i &= - \int_V G (\Delta + \kappa^2) A_i dV \\ &+ \int_S \left( G \frac{\partial A_i}{\partial n} - A_i \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS \end{aligned} \quad (4-3)$$

$$\left( c = \int_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV \right) \quad (4-4)$$

(2)  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_e$  として  $\mathbf{A}$  を求める

$$\begin{aligned} & \int_V (\mathbf{u}_e (\Delta + k^2) \mathbf{A} - \mathbf{A} (\Delta + k^2) \mathbf{u}_e) dV \\ &= \int_S \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (4-5)$$

$$\begin{aligned} c\mathbf{A} \cdot \mathbf{e} &= - \int_V \mathbf{u}_e (\Delta + k^2) \mathbf{A} dV \\ &+ \int_S (\mathbf{u}_e \times \nabla \times \mathbf{A} + \mathbf{u}_e \nabla \cdot \mathbf{A} \\ &- \mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{u}_e - \mathbf{A} \nabla \cdot \mathbf{u}_e) \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (4-6)$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}_e = G \mathbf{e} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_e = \mathbf{e} \cdot \nabla G \\ \nabla \times \mathbf{u}_e = (\nabla G) \times \mathbf{e} \end{cases} \quad (4-7)$$

$$\begin{aligned} c\mathbf{A} \cdot \mathbf{e} &= - \int_V \mathbf{u}_e (\Delta + \kappa^2) \mathbf{A} dV \\ &+ \int_S \left[ ((\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{n}) \cdot G \mathbf{e} + G (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{e} \right. \\ &\left. - (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) \cdot ((\nabla G) \times \mathbf{e}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{e} \cdot \nabla G) \right] dS \end{aligned} \quad (4-8)$$

$$((\mathbf{n} \times \mathbf{A}) \times \nabla G) \cdot \mathbf{e}$$

$$\begin{aligned} c\mathbf{A} \cdot \mathbf{e} &= - \int_V G \mathbf{e} \cdot (\Delta + \kappa^2) \mathbf{A} dV \\ &+ \int_S \left[ ((\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{n} + \mathbf{n} \nabla \cdot \mathbf{A}) G \right. \\ &\left. - (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) \times \nabla G - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) \nabla G \right] \cdot \mathbf{e} dS \end{aligned} \quad (4-9)$$

(3)  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_r$  として  $\nabla \times \mathbf{A}$  を求める

$$\begin{aligned} & \int_V (\mathbf{u}_r (\Delta + k^2) \mathbf{A} - \mathbf{A} (\Delta + k^2) \mathbf{u}_r) dV \\ &= \int_S \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (4-10)$$

$$\nabla \times \mathbf{u}_e = \nabla \times (G \mathbf{e}) - \nabla \times (\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{e})$$

ここで左辺を整理するため

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b} \quad (4-11)$$

を利用して

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot (\mathbf{A} \times (\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{e})) \\ &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{e} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \nabla \times (\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{e}) \end{aligned} \quad (4-12)$$

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot (\mathbf{u}_e \times ((\Delta + k^2) \mathbf{A})) \\ &= \nabla \times \mathbf{u}_e \cdot (\Delta + k^2) \mathbf{A} - \mathbf{u}_e \cdot (\nabla \times (\Delta + k^2) \mathbf{A}) \end{aligned} \quad (4-13)$$

また

$$\begin{aligned} \nabla \times \Delta \mathbf{A} &= \nabla \times (\nabla \nabla \cdot - \nabla \times \nabla \times) \mathbf{A} \\ &= -\nabla \times \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \\ &= (\Delta - \nabla \nabla \cdot) \nabla \times \mathbf{A} \\ &= \Delta \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned} \quad (4-14)$$

より

$$\nabla \times (\Delta + k^2) \mathbf{A} = (\Delta + k^2) \nabla \times \mathbf{A} \quad (4-15)$$

これらを代入して

$$\begin{aligned} & \int_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{e} \cdot \nabla \times \mathbf{A} dV \\ &= -\int_V \mathbf{u}_e \cdot ((\Delta + \kappa^2) \nabla \times \mathbf{A}) dV \\ &+ \int_S [\psi + \mathbf{A} \times (\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{e}) \\ &- \mathbf{u}_e \times ((\Delta + \kappa^2) \mathbf{A})] \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (4-16)$$

$$\begin{aligned} & c(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{e} \\ &= -\int_V \mathbf{u}_e \cdot ((\Delta + k^2) \nabla \times \mathbf{A}) dV \\ &+ \int_S [((\nabla G) \times \mathbf{e}) \times \nabla \times \mathbf{A} + ((\nabla G) \times \mathbf{e}) \nabla \cdot \mathbf{A} \\ &- \mathbf{A} \times (\nabla(\mathbf{e} \cdot \nabla G) + (k^2 G + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) \mathbf{e}) \\ &+ \mathbf{A} \times (\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{e}) - G \mathbf{e} \times ((\Delta + k^2) \mathbf{A})] \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (4-17)$$

表面積分の項を整理するため  
公式

$$\nabla \times \phi \mathbf{A} = \nabla \phi \times \mathbf{A} + \phi \nabla \times \mathbf{A} \quad (4-18)$$

を利用して

$\phi = \mathbf{e} \cdot \nabla G$  とすれば

$$\begin{aligned} & \mathbf{A} \times \nabla(\mathbf{e} \cdot \nabla G) \\ &= (\mathbf{e} \cdot \nabla G) \nabla \times \mathbf{A} - \nabla \times ((\mathbf{e} \cdot \nabla G) \cdot \mathbf{A}) \\ & \int_S [\mathbf{A} \times \nabla(\mathbf{e} \cdot \nabla G)] \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int_S [(\mathbf{e} \cdot \nabla G) \nabla \times \mathbf{A}] \cdot \mathbf{n} dS \\ &- \int_V \nabla \cdot (\nabla \times (\mathbf{e} \cdot \nabla G) \cdot \mathbf{A}) dV \end{aligned} \quad (4-19)$$

これを代入すると

$$\begin{aligned} & c(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{e} \\ &= -\int_V \mathbf{u}_e \cdot ((\Delta + k^2) \nabla \times \mathbf{A}) dV \\ &+ \int_S [((\nabla G) \times \mathbf{e}) \times \nabla \times \mathbf{A} + ((\nabla G) \times \mathbf{e}) \nabla \cdot \mathbf{A} \\ &- (\mathbf{e} \cdot \nabla G) \nabla \times \mathbf{A} - G \mathbf{e} \times (\nabla \nabla \cdot - \nabla \times \nabla \times) \mathbf{A}] \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (4-20)$$

$\mathbf{e}$  で整理すると

$$\begin{aligned} & c(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{e} \\ &= -\int_V G \mathbf{e} \cdot ((\Delta + k^2) \nabla \times \mathbf{A}) dV \\ &+ \int_S [ \{ (\nabla \times \nabla \times - \nabla \nabla \cdot) \mathbf{A} \} \times \mathbf{n} \cdot G - (\nabla G \times \mathbf{n}) \nabla \cdot \mathbf{A} \\ &- (\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{A}) \times \nabla G - ((\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}) \nabla G ] \cdot \mathbf{e} dS \end{aligned} \quad (4-21)$$

これは  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  の時  $\nabla \times \mathbf{A}$  に対して(2)の結果と一致した。

## 5. Maxwell eq.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -j\omega \mu \mathbf{H} \quad (5-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}_0 + (\sigma + j\epsilon\omega) \mathbf{E} \quad (5-2)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{E} &= \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} \\ &= \nabla \frac{\rho}{\epsilon} + j\omega \mu \mathbf{J}_0 + j\omega \mu (\sigma + j\omega \epsilon) \mathbf{E} \end{aligned} \quad (5-3)$$

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{H} &= \nabla \nabla \cdot \mathbf{H} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} \\ &= -\nabla \times \mathbf{J}_0 + (\sigma + j\epsilon\omega) j\omega\mu \mathbf{H}\end{aligned}\quad (5-4)$$

$$k^2 = -(\sigma + j\epsilon\omega) j\omega\mu = \omega\mu(\omega\epsilon - j\sigma) \quad (5-5)$$

$$(\Delta + k^2) \mathbf{E} = \nabla \frac{\sigma}{\epsilon} + j\omega\mu \mathbf{J}_0 \quad (5-6)$$

$$(\Delta + k^2) \mathbf{H} = -\nabla \times \mathbf{J}_0 \quad (5-7)$$

これらの積分型は、式(4-9)の  $\mathbf{A} = \mathbf{E}$  として  $\mathbf{e}$  は自由に選べることから

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\int_V G \left( \nabla \frac{\rho}{\epsilon} + j\omega\mu \mathbf{J}_0 \right) dV \\ &+ \int_S \left[ -jkz \mathbf{H} \times \mathbf{n} - (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \nabla G \right. \\ &\quad \left. - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \nabla G \right] dS\end{aligned}\quad (5-8)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= -\int_V G (-\nabla \times \mathbf{J}_0) dV \\ &+ \int_S \left[ \left( \mathbf{J}_0 + j \frac{k}{z} \mathbf{E} \right) \times \mathbf{n} - (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \times \nabla G \right. \\ &\quad \left. - (\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}) \nabla G \right] dS\end{aligned}\quad (5-9)$$



## 2. 高周波デバイスの設計とシミュレーション

### 1. 電磁波の数値シミュレーション

#### 1.1. はじめに

偏微分方程式の数値シミュレーションにはいくつかの方法があり、様々なソフトウェアが存在するが、電磁波という古典的な計算でも、ソフトウェアによって大きな食い違いが生じる事がある。その際に、偏微分方程式の数値解法の特徴を知っていれば、問題解決の糸口になるかもしれない。

なお電磁波シミュレーションと合わせた荷電粒子シミュレーションまで記述したかったが、専門的になってしまうので別の機会にする事にして、今回は省いた。

#### 1.2. 有限要素法(FEM)

有限要素法はメッシュの形状が自由に選べるため、境界条件に適合しやすく、さらに次数を上げれば精度が出易い方法である。

公開されている、もしくは商用のソフトウェアとしては軸対称では Superfish、3次元では HFSS など非常に精度の高いプログラムがあり、従来のマイクロ波設計では欠かせないシミュレーション方法となっていた。しかし境界に適合したメッシュを生成するという事は、荷電粒子との相互作用を計算する上では、どのメッシュの中に粒子が存在するのかを判定するのに多くの計算時間を要するため、電磁波計算だけなら良いが、荷電粒子を組み込むと、あまり良い方法とは言えない。

電磁波の固有モードを計算する Superfish の場合も、荷電粒子のトラッキングを行う Parmera に電磁界分布を渡す際には、補間して直交格子に変換している。従ってここでは有限要素法の基礎を説明するにとどまる事とする。

##### 1.2.1. Galerkin FEM

領域 S 内の 2 次元のヘルムホルツ方程式の厳密解を  $u$  とする。その境界 C1 上で  $u = \bar{u}$ 、C2 上で

の法線方向の導関数が  $u_n = \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{u}_n$  とする。これらに重さ関数  $v$  を、両辺にかける。

$$\int_S ((\Delta + k^2)u) v dA + \int_{C_2} (\bar{u}_n - u_n) v ds = 0 \quad (1-1)$$

この 1 項目はヘルムホルツ方程式の誤差に  $v$  をかけた物の積分を表し、2 項は境界での残差の積分である。これを部分積分し、以下の式を得る。

$$\begin{aligned} & \int_S ((\Delta + k^2)u) v dA \\ &= \int_C u_n v ds - \int_S \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dA \end{aligned} \quad (1-2)$$

ここで境界 C1 では  $v = 0$  なので、1 項目は消え以下になる。

$$\int_S \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dA - \int_{C_2} \bar{u}_n v ds = 0 \quad (1-3)$$

この式は弱形式と呼ばれる。ここで  $v$  は境界 C1 上で 0 になる以外は任意なので、 $v = \delta u$  とする。

$$\int_S \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial y} \right) dA - \int_{C_2} \bar{u}_n \delta u ds = 0 \quad (1-4)$$

これは次のように変形できる。

$$\frac{1}{2} \int_S \delta \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dA - \int_{C_2} \bar{u}_n \delta u ds = 0 \quad (1-5)$$

従って

$$\delta \left\{ \frac{1}{2} \int_S \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dA - \int_{C_2} \bar{u}_n u ds \right\} = 0 \quad (1-6)$$

これは、汎関数  $F$  に対して、 $\delta F = 0$  を解けば良い事を意味し、Rayleigh-Ritz 法とも対応がついている。

$$F = \frac{1}{2} \int_S \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dA - \int_{C_2} \bar{u}_n u ds \quad (1-7)$$

$$\delta F = 0$$

### 1.2.2. 電磁波の汎関数

ここでは、電磁波の磁場の空間分布を示す式

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = k^2 \mathbf{H} \quad (1-8)$$

の汎関数を示す。電場についての式

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = k^2 \mathbf{E} \quad (1-9)$$

も同じである。

式(1-8)の汎関数は

$$\begin{aligned} F[\mathbf{H}] &= \int [(\nabla \times \mathbf{H}) \cdot (\nabla \times \mathbf{H}^*) - k^2 \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*] dV \\ &\quad (1-10) \end{aligned}$$

である。ここで、 $\mathbf{H}$  は磁場の空間分布である。また、汎関数はエネルギーに関係していることが多く、このようにすると磁場のエネルギーに関係した量になるのである。わざわざ、複素共役を使わないで計算しても同じ結果が得られる。この場合は、汎関数が複素数になる。

それでは、この式の第1変分がゼロになる条件が式(1-8)を満足するかどうか調べる。第一変分は、 $\mathbf{H}$  を  $\delta \mathbf{H}$  変化させたときの微小変化量で

$$\begin{aligned} \delta F &= F[\mathbf{H} + \delta \mathbf{H}] - F[\mathbf{H}] \\ &= \int [ \{ \nabla \times (\mathbf{H} + \delta \mathbf{H}) \} \cdot \{ \nabla \times (\mathbf{H}^* + \delta \mathbf{H}^*) \} \\ &\quad - k^2 (\mathbf{H} + \delta \mathbf{H}) \cdot (\mathbf{H}^* + \delta \mathbf{H}^*) ] dV \\ &\quad - \int [ (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot (\nabla \times \mathbf{H}^*) - k^2 \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* ] dV \\ &\quad \text{2次の微分を無視すると} \\ &= \int [ (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot (\nabla \times \delta \mathbf{H}^*) \\ &\quad + (\nabla \times \mathbf{H}^*) \cdot (\nabla \times \delta \mathbf{H}) \\ &\quad - k^2 \{ \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{H}^* + \mathbf{H}^* \cdot \delta \mathbf{H} \} ] dV \\ \nabla \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{W}) &= \mathbf{W} \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) - \mathbf{V} \cdot (\nabla \times \mathbf{W}) \\ &\quad \text{を使って} \\ \mathbf{V} &= (\nabla \times \mathbf{H}) \text{あるいは} (\nabla \times \mathbf{H}^*), \\ \mathbf{W} &= \delta \mathbf{H}^* \text{あるいは} \delta \mathbf{H} \text{とする} \\ &= \int [ -\nabla \cdot \{ (\nabla \times \mathbf{H}) \times \delta \mathbf{H}^* \} + \delta \mathbf{H}^* \\ &\quad \cdot \{ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) \} - k^2 (\mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{H}^*) ] dV \\ &\quad + \int [ -\nabla \cdot \{ (\nabla \times \mathbf{H}^*) \times \delta \mathbf{H} \} \\ &\quad + \delta \mathbf{H} \cdot \{ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}^*) \} \\ &\quad - k^2 (\mathbf{H}^* \cdot \delta \mathbf{H}) ] dV \\ &\quad \text{この式に発散定理を使い、} \\ &\quad \text{式を整理すると} \\ &= - \int [ (\nabla \times \mathbf{H}) \times \delta \mathbf{H}^* \\ &\quad + (\nabla \times \mathbf{H}^*) \times \delta \mathbf{H} ] \cdot n dS \\ &\quad + \int [ \{ \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} - k^2 \mathbf{H} \} \cdot \delta \mathbf{H}^* \\ &\quad + \{ \nabla \times \nabla \times \mathbf{H}^* - k^2 \mathbf{H}^* \} \cdot \delta \mathbf{H} ] dV \\ &\quad (1-11) \end{aligned}$$

となる。

いつものように、任意の  $\delta \mathbf{H}$  に対して、この第一変分  $\delta F$  がゼロになる条件を考える。第1変分  $\delta F$  は実数であるが、 $\mathbf{H}$  や  $\delta \mathbf{H}$  は複素数である。この複素数の実数部と虚数部の変化に対して、第1変分がゼロとならなくてはならない。わかりやすくするために、複素数になっている部分を

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_r + i\mathbf{H}_i \quad (1-12)$$

$$\delta\mathbf{H} = \delta\mathbf{H}_r + i\delta\mathbf{H}_i \quad (1-13)$$

と実数部と虚数部に分ける。これらを、式(1-11)に代入すると、

$$\begin{aligned} \delta F = & -2 \int [(\nabla \times \mathbf{H}_r) \times \delta\mathbf{H}_r \\ & + (\nabla \times \mathbf{H}_i) \times \delta\mathbf{H}_i] \cdot n dS \\ & + 2 \int \left[ \left\{ \nabla \times \nabla \times \mathbf{H}_r - k^2 \mathbf{H}_r \right\} \cdot \delta\mathbf{H}_r \right. \\ & \left. + \left\{ \nabla \times \nabla \times \mathbf{H}_i - k^2 \mathbf{H}_i \right\} \cdot \delta\mathbf{H}_i \right] dV \end{aligned} \quad (1-14)$$

となる。これが、実数部と虚数部に分けた汎関数の第1変分である。もちろん、任意の $\delta\mathbf{H}$ に対して、これがゼロになる条件を考えるのである。任意の $\delta\mathbf{H}$ と言うことは、任意の $\delta\mathbf{H}_r$ と $\delta\mathbf{H}_i$ に対して、第1変分がゼロになる条件を探すのである。

そのためには、この式の右辺第1項と2項がともにゼロにならなくてはならない。右辺第1項は、境界条件を表し、

$$\begin{cases} (\nabla \times \mathbf{H}_r) \times \mathbf{n} = 0 & \text{または} & \delta\mathbf{H}_r = 0 \\ \text{かつ} & & \\ (\nabla \times \mathbf{H}_i) \times \mathbf{n} = 0 & \text{または} & \delta\mathbf{H}_i = 0 \end{cases} \quad (1-15)$$

の場合、ゼロとなる。通常は、 $(\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{n} = 0$ とする。これが自然境界条件で、ノイマン条件となる。この磁場の回転は、マクスウェル方程式より、 $\nabla \times \mathbf{H} = i\omega\epsilon_0 \mathbf{E}$ となる。従って、ノイマン条件は、 $\mathbf{E} \times \mathbf{n}$ と書き直すことができる。すなわち、電場と境界の法線方向が一致するのである。これは、金属の境界条件である。すなわち、境界を指定しなければ、自然に金属の境界条件が満足されるのである。一方、 $\delta\mathbf{H} = 0$ はディレクイ条件で、境界の値を指定した場合である。

第2項がゼロとなるのは、

$$\begin{cases} \nabla \times \nabla \times \mathbf{H}_r - k^2 \mathbf{H}_r = 0 \\ \text{かつ} \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{H}_i - k^2 \mathbf{H}_i = 0 \end{cases} \quad (1-16)$$

となる必要がある。これは、マクスウェルの方程式から導かれた磁場の偏微分方程式と同等である。

以上のことから、高周波の電磁場の磁場を計算するためには、式(1-10)の第一変分をゼロにすればよいことが分かる。静磁場のマクスウェルの方程式は、式(1-10)の第1変分をゼロにするのと同じなのである。

電場については、ここでは計算しないが、全く同じ手順で求められる。そして、結果も全く同じである。

### 1.2.3. 軸対称定在波問題

軸対称空洞内部の電磁場を求めるための汎関数を示す。問題は定在波に限るものとする。

軸対称問題は、円柱座標系を使うのがセオリーである。この場合、空洞の形状は完全軸対称である。定在波の場合、磁場は実数として取り扱うことができる。式(1-10)では円柱座標系の回転の演算が表れ、それは

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} = & \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial z} \right] \hat{\mathbf{r}} \\ & + \left[ \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ & + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (rH_\theta) - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right] \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (1-17)$$

である。

一般には、これを、汎関数の式(1-10)に代入することになる。しかし、通常の空洞では最も共振周波数の低いモードが重要になる。加速空洞の場合、通常は最低次のTMモードが運転に使われる。これが、運転モードとなり、真っ先に解析したいモードである。このモードは、場が $\boldsymbol{\theta}$ 方向の依存性を持たず、磁場は $H_\theta$ のみである。このモードの磁場の回転は、

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \left[ -\frac{\partial H_\theta}{\partial z} \right] \hat{r} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (rH_\theta) \right] \hat{z} \\ &= \left( -\frac{\partial H_\theta}{\partial z} \right) \hat{r} + \left( \frac{H_\theta}{r} + \frac{\partial H_\theta}{\partial r} \right) \hat{z}\end{aligned}\quad (1-18)$$

となる。この回転の結果を汎関数の式(1-10)に適用すると以下の式になる。

$$\begin{aligned}F[H_\theta] &= \int \left[ \left( \frac{\partial H_\theta}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (rH_\theta)}{\partial r} \right)^2 - k^2 H_\theta^2 \right] dV \\ &= \int \left[ \left( \frac{\partial H_\theta}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial H_\theta}{\partial r} \right)^2 + 2 \frac{H_\theta}{r} \frac{\partial H_\theta}{\partial r} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{H_\theta}{r} \right)^2 - k^2 H_\theta^2 \right] 2\pi r dr dz\end{aligned}\quad (1-19)$$

### 電場の計算

有限要素法を用いて、式(1-19)の第1変分がゼロとなる  $H_\theta$  が、軸対称空洞の磁場になる。この磁場から、電場を求めるためには、マクスウェル方程式を使う。これを時間の微分の項を  $-j\omega$  に置き換えると、

$$\nabla \times \mathbf{H} = -j\omega \mathbf{D} \quad (1-20)$$

となる。これから電場は

$$\mathbf{E} = \frac{j}{\varepsilon_0 \omega} \nabla \times \mathbf{H} \quad (1-21)$$

と求められる。ここで、円柱座標系の回転を計算することになる。それは、式(1-17)のとおりで、ここでは  $H_\theta$  のみなので、先に示した式(1-18)のようになる。従って、電場は以下のようになる。

$$E_r = -\frac{j}{\varepsilon_0 \omega} \frac{\partial H_\theta}{\partial z} \quad (1-22)$$

$$E_z = \frac{j}{\varepsilon_0 \omega} \left( \frac{H_\theta}{r} + \frac{\partial H_\theta}{\partial r} \right) \quad (1-23)$$

### 1.3. 境界要素法

境界要素法が非常に興味深いのは、計算格子を計算空間内部に配置する必要が無く、表面のみに形成すれば良いため、複雑な3次元CAD形状において正確かつ、簡単に格子の形成が可能な事である。境界要素法は、マクスウェル方程式の積分形から出発する。スカラーヘルムホルツ方程式に帰着できる場合は、通常の本に載っている解法で計算が可能であるが、3次元の電磁波解析を行う場合、ベクトルヘルムホルツ方程式の解法が必要である。ベクトルヘルムホルツ方程式の積分形は、結果の式は本や論文に書いてあるが、私の調べ方が悪いのだと思うが、導出過程の書物が見つからなかったため、私が導出した過程を1の付録に書いておいた。付録の計算に従うと、結果として以下のような式が得られる。

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\int_V G \left( \nabla \frac{\rho}{\varepsilon} + j\omega \mu \mathbf{J}_0 \right) dV \\ &\quad + \int_S \left[ -jkz \mathbf{H} \times \mathbf{n} - (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \right. \\ &\quad \left. \times \nabla G - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \nabla G \right] dS\end{aligned}\quad (1-24)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= -\int_V G (-\nabla \times \mathbf{J}_0) dV \\ &\quad + \int_S \left[ \left( \mathbf{J}_0 + j \frac{k}{z} \mathbf{E} \right) \times \mathbf{n} - (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \right. \\ &\quad \left. \times \nabla G - (\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}) \nabla G \right] dS\end{aligned}\quad (1-25)$$

この式は既に、電界、磁界は表面のみに帰着できているため、これを離散化すれば、行列が得られ、表面の解が計算できる。離散化する際の注意点としてはグリーン関数の体積積分は、表面上では立体角になるため、左辺に係数Cがかかる事である。またこの定数Cを単純に立体角とするより、ラプラス方程式の基本解  $G_l$  を使って

$C = -\int_S \frac{\partial G_l}{\partial n} dS$  として求めた方が積分の誤差が吸収でき、精度が上がるようである。

なお有限要素法と比較した場合の問題点は以下の通りである。

- 行列要素が複素数で、かつ密になり、有限要素法のようなバンドマトリクスを効率良く解く方法が使えない。ただ逆に行列が密なので開き直って高次の補間を使う事はできる。
- 波数  $k$  がグリーン関数に入っており、 $k$  に対して行列が線形でないため、行列の固有値問題に帰着できない。従って固有モードの計算には  $\det(\mathbf{M})=0$  を  $k$  を変えて探索するしかなく、膨大な時間がかかる。
- 2次元ではグリーン関数がハンケル関数になり計算に非常に時間がかかる。
- 軸対称問題を2次元問題に帰着できない。

これらを打破する方法として多重極子展開法など、近接するノードを一まとめにして、多重極子展開する事で、計算を高速化し、かつ行列を帯状にする試みがなされている。

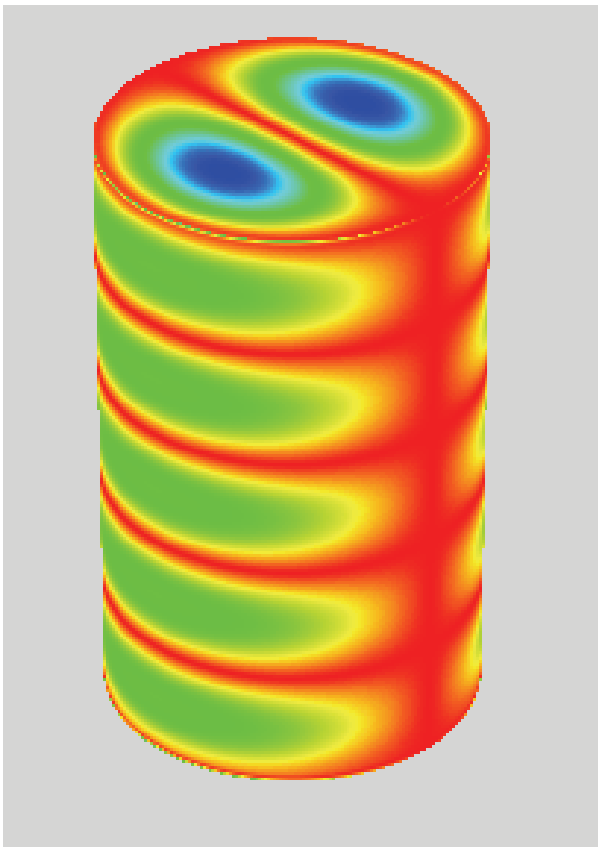


Fig. 1 境界要素法により計算した  $\text{TM}_{115}$  モード

Fig. 1 は、境界要素法で円筒空洞の高次固有モード( $\text{TM}_{115}$ )を計算した結果である。円筒部及び端板部は高次のラグランジ補間を用いて離散化したため、少ないメモリ消費でこのような高次モードを正確に解けた。しかし固有モードを求めるためには、 $\det(\mathbf{M})=0$  を探索するのに膨大な時間がかかった。ただし、このような問題は伝搬解析では起こらないので問題は無い。

#### 1.4. 差分法

差分法と言えば昔は精度が悪いという印象があり、有限要素法や境界要素法が好まれてきた。しかし、様々な精度向上の試みにより、有限要素法等と同等な精度が得られるようになり、近年は計算の単純な差分法も再び台頭するようになってきた。

マクスウェル方程式を計算するための差分法としては、FDTD 法や FIM 法、等価回路を用いた TLM 法、微分を連続させた CIP 法などがある。この中で最も単純な差分法は FDTD 法であるので、まずは FDTD 法について述べる。その後差分法における精度向上について簡単に説明する。

##### 1.4.1. FDTD 法

時間領域差分法とは、差分法を時間領域まで拡張した数値計算方法である。この章では、まず一般的な差分化について述べ、マクスウェル方程式を空間領域における差分化を行う。その後、時間領域における差分化を行い、空間、時間領域における差分化を行う。

#### 差分化

2次元の任意の座標位置  $(i, j)$  (但し  $i, j$  は整数)、時間ステップ  $n$  における関数  $F$  を

$$F^n(i, j) = F(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t) \quad (1-26)$$

と定義する。中央差分を用いて空間、時間の差分化の式は次のように表される。

$$\frac{\partial F^n(i, j)}{\partial x} = \frac{F^n(i + \frac{1}{2}, j) - F^n(i - \frac{1}{2}, j)}{\Delta x} \quad (1-27)$$

$$\frac{\partial F^n(i, j)}{\partial t} = \frac{F^{n+\frac{1}{2}}(i, j) - F^{n-\frac{1}{2}}(i, j)}{\Delta t} \quad (1-28)$$

関数  $F$  の  $F$  を電場  $E$  あるいは磁場  $H$  と考えると電磁波について差分化することができる。

### 空間領域における差分化

2次元での  $TE_{10}$  モード時 ( $E_z = 0$ ) のマクスウェル方程式は

$$\varepsilon_0 \dot{E}_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (1-29)$$

$$\varepsilon_0 \dot{E}_y = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (1-30)$$

$$\mu_0 \dot{H}_z = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (1-31)$$

と表すことができる。この場合、それぞれの方程式はFig. 2を参考にすると2点間の中央差分によって表すことができる。すなわち、式(1-29)で表させる  $\dot{E}_x$  (□印) は  $H_z$  (×印) の中央差分によって示され、式(1-30)で表させる  $\dot{E}_y$  (○印) は  $H_z$  (×印) の中央差分によって示され、さらに式(1-31)で表させる  $H_z$  (×印) は  $\dot{E}_x$  (□印) と  $\dot{E}_y$  (○印) のそれぞれの中央差分で示されることがわかる。

このような一連の考えから、Fig. 2の右図のような一つのセルを考える。ここで、座標に一般性を持たせる為次式のように定義する。

$$\begin{aligned} E_x \left( i + \frac{1}{2}, j \right) &= E_x \\ \left[ x = \left( i + \frac{1}{2} \right) \Delta x, y = j \Delta y \right] \end{aligned} \quad (1-32)$$

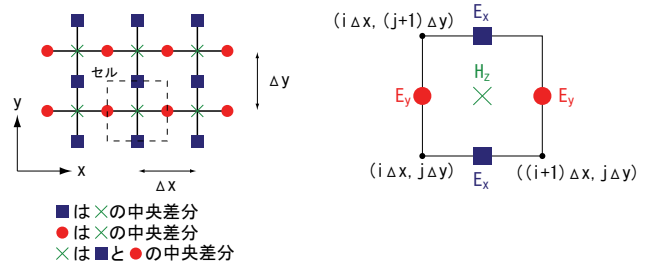


Fig. 2 二次元問題における解析モデルとセル構成

式(1-32)の定義を用いてマクスウェル方程式を空間領域で差分化すると、

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \dot{E}_x \left( i + \frac{1}{2}, j \right) &= \frac{\partial H_z \left( i + \frac{1}{2}, j \right)}{\partial y} \\ &= \frac{H_z \left( i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2} \right) - H_z \left( i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2} \right)}{\Delta y} \end{aligned} \quad (1-33)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \dot{E}_y \left( i, j + \frac{1}{2} \right) &= -\frac{\partial H_x \left( i + \frac{1}{2}, j \right)}{\partial x} \\ &= -\frac{H_z \left( i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2} \right) - H_z \left( i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2} \right)}{\Delta x} \end{aligned} \quad (1-34)$$

$$\begin{aligned} \mu_0 \dot{H}_z \left( i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2} \right) &= \frac{\partial E_x \left( i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2} \right)}{\partial y} - \frac{\partial E_y \left( i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2} \right)}{\partial x} \\ &= \frac{E_x \left( i + \frac{1}{2}, j + 1 \right) - E_x \left( i + \frac{1}{2}, j \right)}{\Delta y} \\ &\quad - \frac{E_y \left( i + 1, j + \frac{1}{2} \right) - E_y \left( i, j + \frac{1}{2} \right)}{\Delta x} \end{aligned} \quad (1-35)$$

と表すことができる。



### 時間領域における差分化

時間領域における差分化のために次のように時間の定義を行う。

$$E_x^n = E_x(t = t_0 + n\Delta t) \quad (1-36)$$

ここで、

- $\Delta t$ : 時間ステップ
- $n$ : 繰り返し回数
- $t_0$ : 基準となる時間

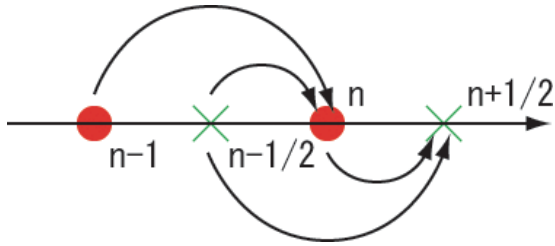


Fig. 3 電界と磁界の時間の関係

である。この定義を用いてマクスウェル方程式を時間領域で差分化すると、

$$\epsilon_0 \dot{E}^{n-\frac{1}{2}} \approx \epsilon_0 \frac{E^n - E^{n-1}}{\Delta t} = \nabla \times H^{n-\frac{1}{2}} \quad (1-37)$$

$$E^n = E^{n-1} \frac{\Delta t}{\epsilon_0} \nabla \times H^{n-\frac{1}{2}}$$

$$\mu_0 \dot{H}^n \approx \mu_0 \frac{H^{n+\frac{1}{2}} - H^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -\nabla \times E^n \quad (1-38)$$

$$H^{n+\frac{1}{2}} = H^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\mu_0} \nabla \times E^n$$

と表すことができる。この式の意味するところを Fig. 3 を用いて説明をする。 $n$  回目に計算された電界  $E^n$  は一周期前の  $E^{n-1}$  とその半周期前の  $H^{n-\frac{1}{2}}$  によって計算され、またそれに対応する磁界  $H^{n+\frac{1}{2}}$  は、 $E^n$  と  $H^{n-1}$  によって計算されることを示している。

### 空間、時間領域における差分化

(1-27)、(1-28)で求めた結果を用いて、マクスウェル方程式の空間、時間領域における差分化 (2次元) を行うと、

$$\begin{aligned} & E_x^{n+1}\left(i + \frac{1}{2}, j\right) \\ &= E_x^n\left(i + \frac{1}{2}, j\right) + \frac{\Delta t}{\epsilon_0 \Delta y} \\ & \quad \left[ H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}\right) - H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (1-39)$$

$$\begin{aligned} & E_y^{n+1}\left(i, j + \frac{1}{2}\right) \\ &= E_y^n\left(i, j + \frac{1}{2}\right) - \frac{\Delta t}{\epsilon_0 \Delta x} \\ & \quad \left[ H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}\right) - H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (1-40)$$

$$\begin{aligned} & H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}\right) \\ &= H_z^{n-\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}\right) \\ & \quad + \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta y} \left[ E_x^n\left(i + \frac{1}{2}, j + 1\right) - E_x^n\left(i + \frac{1}{2}, j\right) \right] \\ & \quad - \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta x} \left[ E_y^n\left(i + 1, j + \frac{1}{2}\right) - E_y^n\left(i, j + \frac{1}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (1-41)$$

と表すことができる。今回は2次元で空間、時間領域における差分化を行ったが、3次元に拡張することで実際の空洞共振器内でのマイクロ波シミュレーションを行うことができる。

#### 1.4.2. 軸対称問題

軸対称における rot は以下のようにになっている。



$$\text{rot}(A) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial r} \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_z \end{pmatrix} \quad (1-42)$$

これを書き直すと、以下のようになる。

$$\text{rot}(A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial r} \\ -\frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r \\ rA_\theta \\ A_z \end{pmatrix} \quad (1-43)$$

従って、通常の2次元の rot の計算を軸対称にするには、通常のデカルト座標の rot で

$$\begin{aligned} A_x &= A_r \\ A_y &= rA_\theta \end{aligned} \quad (1-44)$$

として計算し、計算後に  $A_x, A_z$  に  $1/r$  し  $A_y$  に  $r$  をかければ計算できる。

### 1.4.3. 差分法の精度向上

従来差分法は有限要素法などに比べて、精度が劣ると思われてきたが、これは境界上での物理値が重要な流体などが対象だったからだと思われる。マクスウェル方程式のように、波長より十分に小さい形状の正確な差異が問題にならず、境界に適合し、空間内部のみが正確に解ければ良いような方程式の解法では、差分法でも精度向上が簡単に可能である。

精度向上に必要な事は、差分法に限らず、

- 次数の向上
- 境界適合

である。次数の向上については、差分法の際に空間差分の次数や時間差分の次数を上げれば良いだけで、式が複雑になるだけなので、ここでは述べない。

境界適合については、例えば FDTD 法に対しては Contour-Path 法が簡単であるので、境界適合の例として、簡単に述べる。Fig. 4 は Contour-Path 法による導体への境界適合の概念図である。

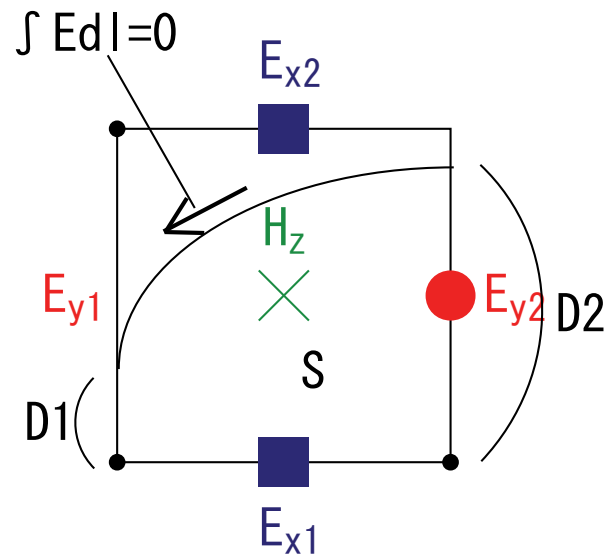


Fig. 4 Contour-Path 法による境界適合

マクスウェル方程式を表面積分し、導体上での接線方向の電界の経路積分が0である事を利用すると、Fig. 4 に対応した式は以下のようになる。

$$\begin{aligned} -\mu \frac{\Delta H}{\Delta t} &= \text{rot } E \\ \int_S H dS &= -\frac{\Delta t}{\mu} \int_C E dl \\ H_z S &= -\frac{\Delta t}{\mu} (E_{x1} D + E_{y2} D2 - E_{y1} D1) \end{aligned} \quad (1-45)$$

このように単純な計算で、格子を境界に適合する事なく、境界適合が可能である。

## 2. 回路シミュレーションとエネルギー

### 2.1. 等価回路シミュレーション

等価回路シミュレーションの利点は、電磁波解析では非常に時間がかかる結合空洞の周波数特性や、何万波もの過渡解析が高速にできる事である。結合空洞の回路シミュレーションをするため

には、それぞれの空洞の固有モードと、結合度が  
必要になる。

## 2.2. 周波数領域の計算

Spice などの通常の回路シミュレーターで計算が  
可能である。

## 2.3. 過渡解析

高周波空洞の過渡解析が必要なのは以下のよう  
な場合である。

- 進行波管などで分散特性を考慮したい場合
- 入力 RF をフィードバックなどのため変調し  
た場合の応答が知りたい場合
- ビームローディングの過渡応答を考慮した  
い場合

Spice などの通常の回路シミュレーターで、  
LCR 回路を書けば簡単にシミュレーションでき  
る。

しかし一般的な回路シミュレーターは連立微  
分方程式を解くのに 4 次のルンゲクッタ法を用  
いているため、高  $Q$  の空洞の振動解の過渡シミュ  
レーションには精度が足りない。高  $Q$  空洞の過渡  
解析を行うには、以下の 2 つの方法がある。

- (1) 振動解を変数変換して取り除き、エンベロー  
プのみを解く
- (2) 振動解をさらに高精度の微分方程式ソルバ  
ーで解く。

(1)の方がもちろん高速で賢い方法だが、最近  
は計算機に汚染され、賢さでは先人には遠く及  
ばないので、私は汎用性もある(2)を勧める。

(2)の場合、要は回路シミュレーターを製作す  
れば良いわけだが、高精度の微分方程式ソルバ  
ーが必要になる。Numerical Recipes によれば、  
有理関数補外を利用した Bulirsch-Stoer 法が最  
も良い方法だという事である。実際、Bulirsch-  
Stoer 法を試してみた所 100 万波程度の長時  
間の振動解の過渡解析が安定にできる事が分か  
ったので、この方法を採用するのが良いと思  
う。

## 3. モデルの作成とシミュレーションソフトの使い方

### 3.1. 3次元データ形式

電磁界解析や形状作成には現在は非常に多様  
多様な物が存在し、クロスチェックも可能にな  
った。従来はこれらのツールを独立に使用して  
きた。つまりそれぞれのシミュレーションソフト  
のデータ形式はあまり互換性が無く、それぞれ  
専用の形式で記述して、図面は別に図面用のソ  
フトウェアで 2 次元の物を書いていた。

しかし近年 ACIS などの 3 次元干渉形状計算  
カーネルの進歩により、いくつかのソフトウェア  
では共通のデータとして、例えば SAT/IGES/SHP  
形式等のファイルが読み書きできるようになっ  
ている。

ここでは我々が通常行っている 3 次元 CAD  
である Autodesk 社の Inventor で 3 次元図面を  
書き、それを Ansoft 社 HFSS や CST 社  
MW-STUDIO へインポートしてシミュレーショ  
ンする。計算が完了したら、元の 3 次元図面を  
2 次元図面にし加工会社、もしくは CAM 加工  
のできる加工会社へ直接 3 次元データを送付す  
るという流れで説明を行う事とした。こうする  
事で、一貫性のある設計と、従来良くあった  
寸法ミスを減らす事ができるという利点がある。  
しかし 3 次元 CAD とシミュレーションソフトは  
連携して動くわけではないので、シミュレーシ  
ョンソフトに組み込まれた形状最適化機能など  
は使用できない。ただ、最適化は一般的には  
数点形状を変えて計算すれば、簡単に行える事  
が多いので、あまり問題にはならないだろう。

### 3.2. Autodesk 社 Inventor の使い方

(1) パーツを作成する

①[ファイル]>[新規作成]の順にクリックする。

②[新規ファイル]ダイアログ ボックスで、  
Standard.ipt をダブルクリックする。

③新しいパーツ ファイルを開くと、スケッチ モードで作業できる。

④スケッチは[2D スケッチパネル]を利用し、2次元でスケッチを行う。

⑤スケッチが終わったら、右クリックをして[スケッチを終了]を選択する。

⑥スケッチを元に[パーツフューチャーパネル]を用いて、押し出しや回転などを行い、3次元のパーツを作成する。

⑦1回のスケッチでできない場合にはさらに先ほど書いた3次元の形状の面を右クリックし、新しいスケッチを選択する。

⑧④～⑥を繰り返してパーツを作る。

⑨[ファイル]>[保存]から名前を付けて保存する。

(2)アセンブリを作成する  
パーツを組み合わせた組図を作成する

①[ファイル]>[新規作成]の順にクリックする。

②[新規ファイル]ダイアログボックスで、**Standard.iam** をダブルクリックする。

③アセンブリパネルから[コンポーネントを配置]を選択し、先ほど作成したパーツを開いて配置する。

④アセンブリパネルを用いて、コンポーネント同士に拘束条件などを付けて、組み合わせていく。

⑤③～④を繰り返し、コンポーネントを組み合わせる。

⑥出来上がったら、[ファイル]>[保存]を選択して名前を付けて保存する。

(3)シミュレーションソフトにインポートする  
**HFSS** や **MW STUDIO** に読み込ませて、電磁界計算を行う場合には、[ファイル]>[コピーに名前をつけて保存]を選択して、ファイルの種類に[**SAT ファイル**]を選択して保存する。

(4)加工図面を作成する  
設計して、実際作成するためには2次元の図面を作成しなければならない。

①[ファイル]>[新規作成]の順にクリックする。

②[新規ファイル]ダイアログボックスで、**Standard.idw** をダブルクリックする。

③図面ビューパネルから[ベースビュー]を選択し、図面にしたいファイルを選択し尺度、方向を決めて配置する。

④さらに[図面ビューパネル]を利用し、投影図や断面図、詳細図を加える。

⑤[図面注記パネル]を利用し、寸法や公差などを記入し図面を完成させる。

⑥[ファイル]>[iproperty]で作成者やパーツ名、材質、個数などを右下の表題欄を記入して、加工図面を完成させる。

⑦この作業を1つ1つの部品ごとに行い、部品図面を作り、部品をくみ上げたときの組図も作成すると、1式の図面が完成する。

### 3.3. 電磁波シミュレーション

電磁界シミュレーションソフトとして主に **HFSS** と **MWSTUDIO** などが使われている。ソフトによって解析方法に特徴があり、目的によって使い分けたり、複数のソフトでシミュレーションを行い、確認を行ったりすることが重要である。

ここでは空洞のシミュレーションを例に HFSS と MW STUDIO の使い方を説明する。

### 3.3.1. HFSS

#### 3.3.1.1. HFSS の概要

HFSS には 3 つの解析方法があり、解析したいモデルの状況により適切に解析方法を選ぶ必要がある。

#### Driven Modal :

伝搬モードに着目した電磁界解析。導波管などの解析に用いる。

#### Driven Terminal :

ノードに着目した電磁界解析。デジタル信号の解析に用いる。

#### Eigenmode :

固有値解析。どんな電磁波が閉じ込めることができるかを調べる解析。

この中で空洞の設計で用いられる Driven Modal と Eigenmode の解析手順についてそれぞれ説明する。

#### 3.3.1.2. Driven Modal での解析手順

##### (1) プロジェクトの作成

[File]>[New]をクリックして新しい Project を開く。

##### (2) 3D モデルの作成

- ①シミュレーションモデルは Autodesk 社 Inventor で作成し、ファイル形式を\*.sat で保存する。(HFSS で直接作成することも可能。)
- ②[3D Modeler]>[Import... ]をクリックすると Import File 選択ダイアログが立ち上がる。
- ③作成したモデルの sat ファイルを選択して[開く]をクリックすると HFSS にモデルを読み込む。

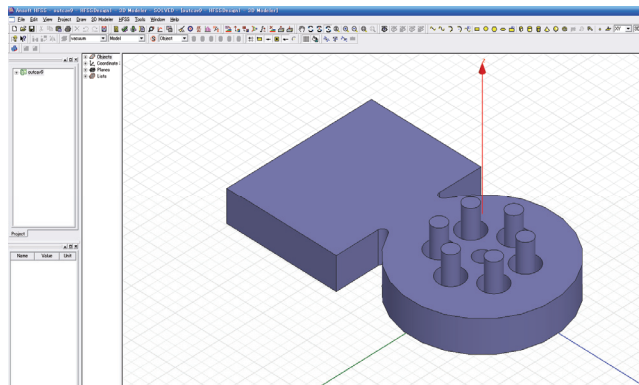


Fig. 5 モデルのインポート

##### (3) 単位の設定

- ①[3D Modeler]>[Units]をクリックすると、Set Model Units ダイアログが立ち上がる。
- ②Select units から単位(mm)を選択し、[OK]をクリックする。

##### (4) 材質の設定

- ①[Edit]>[Select]>[ Objects]を選択する。
- ②3D Modeler ダイアログで材質を決めたい Object をクリックすると紫色に変わる。

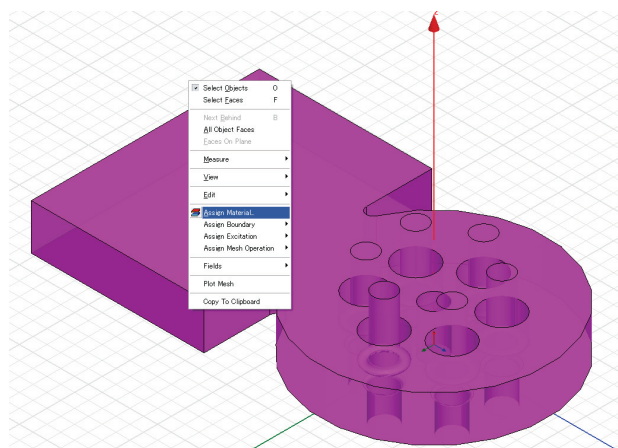


Fig. 6 材質の設定

- ③[3DModeler]>[Assign Material]をクリックすると、Select Definition ダイアログボックスが立ち上がる。

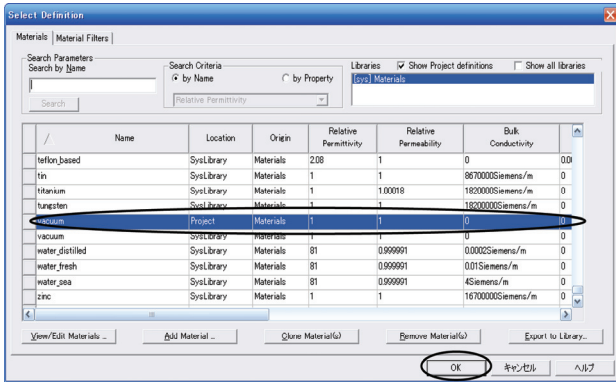


Fig. 7 Select Definition ダイアログボックス

④材質 (vacuum) を選んで、[OK]をクリックする。

(5) 境界条件の設定

①[Edit]>[Select]>[ Face ]を選択する。

②3D Modeler ダイアログで境界条件を決めたいモデルの面をクリックすると紫色に変わる。

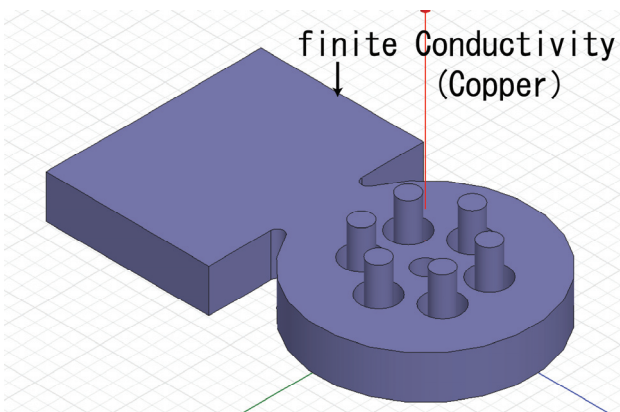


Fig. 8 モデルの境界条件

③[HFSS]>[Boundaries]>[Assign]>[境界条件(下記の中より)]をクリックし境界条件を設定する。

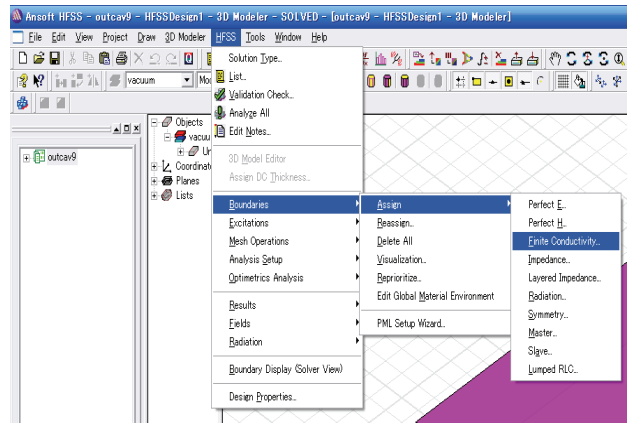


Fig. 9 境界条件の設定

• **Perfect E :**

完全導体、電界が境界面に対して垂直になる。(デフォルト)

• **Perfect H :**

磁界が境界面に対して垂直になる。主に対象境界時に使用。

• **Finite Conductivity :**

指定した導電率と透磁率を適用。

クリック後 Finite Conductivity Boundary ダイアログでパラメーターを指定  
デフォルトで以下の状態では境界材質が銅である。

Conductivity; 5800000

Relative Permittivity; 1

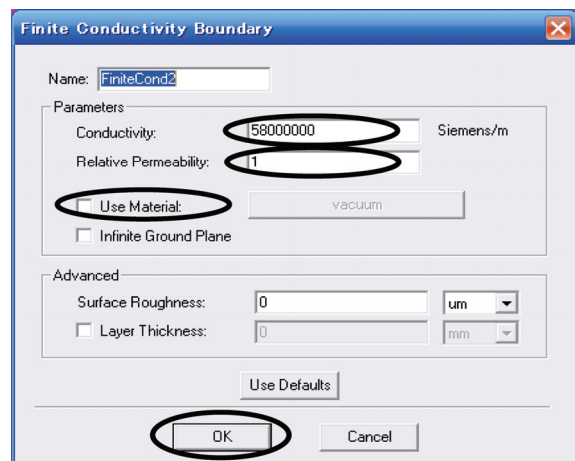


Fig. 10 Finite Conductivity の設定

Use Material で指定の材質に設定も可能である。



• **Impedance :**

波動インピーダンスを適用

• **Layered Impedance :**

表面の粗さ、メッキ処理

• **Radiation :**

電磁波をそのまま放射

• **Symmetry :**

対称境界条件、電磁波のふるまいが対象、Perfect E、または Perfect H に設定

• **Master&Slave :**

周期境界条件

その他 PML(完全吸収境界)、Lumped RLC などがある。

※ポートと境界条件の重複はできない。

(6) メッシュの設定

通常は自動で行われるため、今回は特に設定する必要はない。しかし、メッシュがさらに必要な場合はマニュアルメッシュを設定する。

①3D Modeler ウィンドウでメッシュを指定したい面やオブジェクトをクリックする。

②[HFSS]>[Mesh Operations]>[Assign]>[マニュアルメッシュの種類]をクリックする。

**On Selection :**

オブジェクト表面のメッシュを制御する。

**Inside Selection :**

オブジェクト内部のメッシュを制御する。

③各々のマニュアルメッシュの設定をして[OK]をクリックする。

(7) Solution type の選択

①[HFSS]>[Solution Type]をクリックすると Solution Type ダイアログが開く。

②以下の中から [Driven Modal] を選んで [OK] をクリックする。

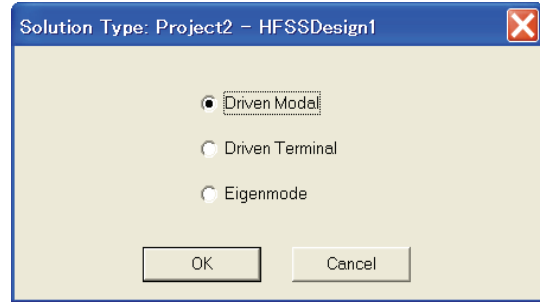


Fig. 11 Solution type の選択

(8) 解析の設定

a. ポートを設定する。

①[Edit]>[Select]>[ Face]を選択する。

②3D Modeler ウィンドウでポートにしたいモデルの面をクリックすると紫色に変わる。

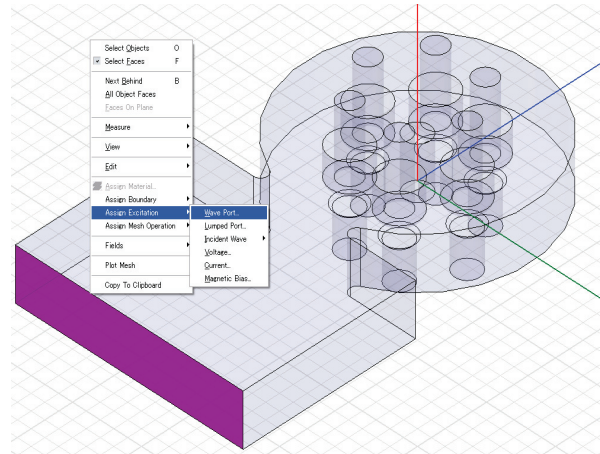


Fig. 12 ポートの設定

③[HFSS]>[Excitations]>[Assign]>[Wave Port] をクリックする。

※port には Wave Port と Lumped Port があるが、空洞設計には主に Wave Port を用いる。

④Wave Port ダイアログが開き、port の設定を行い、完了したら[OK]をクリックする。

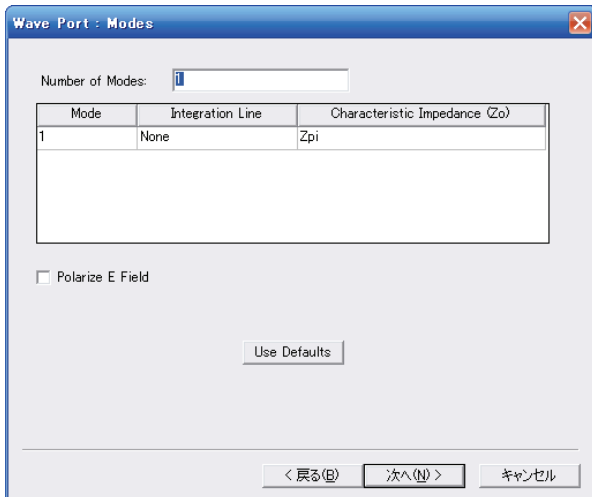


Fig. 13 ポートモードの設定

Modes のタブにおいて

**Number of Modes : 1**

解析を行いたいモードの数  
(高次モードの解析を行う場合以外は通常 1)

**Integration Line &**

**Characteristic Impedance : None , Zpi**

S-parameter 算出時に使用  
導波管を port にする場合は None&Zpi

※入射波源、入射波の種類などを指定することも可能である。

b. Driven Modal 解析のセットアップ

- ①[HFSS]>[Analysis Setup]>[Add Solution Setup]をクリックする。
- ②Edit Sweep ダイアログの General のタブから以下の設定を行う。

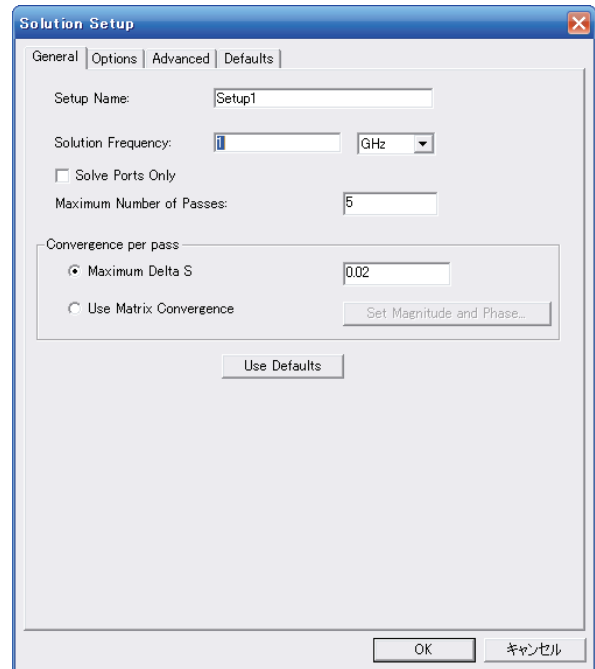


Fig. 14 Setup の設定

**Solution Frequency : 1.3GHz**

解析したい周波数付近の値を入れる。

**Maximum Number of Passes : 10**

メッシュの粗さはここで決まり、数値が大きいほど精度が増す。

- ③[OK]をクリックする。
- ④[HFSS]>[Analysis Setup]>[Add Sweep]を選択する。
- ⑤Edit Sweep ダイアログで設定を行う。

**Sweep Type :** 必要に応じて[Discrete]にチェックを入れる。[Discrete]を選ぶと、それぞれの値において解析を行うため 3 つの中で精度が最も良く、カットオフ周波数が周波数範囲にあっても解析ができるが、解析時間はかかる。[Fast]の場合は選択したポートのモードのカットオフに入らないように周波数の範囲を選ぶ。

Frequency Setup;

**Type :** [Linear Step]

**Start • Stop :** 1.28GHz • 1.32GHz

解析をしたい周波数の範囲

**Step Size :** 0.001GHz

解析したい周波数間隔



フィールドを保存するには[Save Fields (All Frequency)]にチェックを入れる

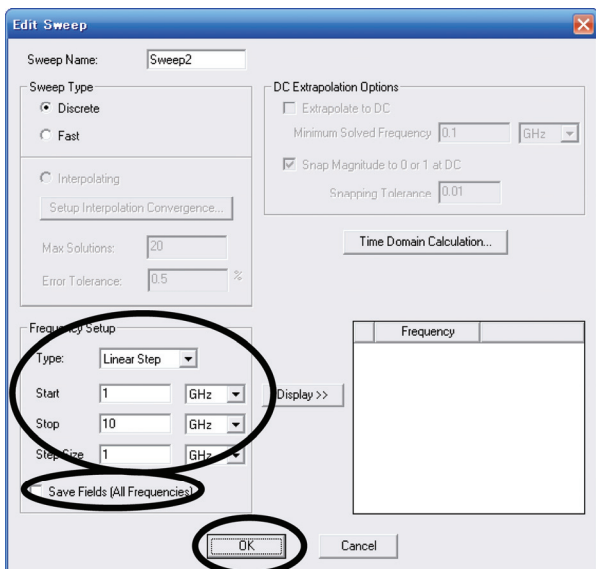


Fig. 15 Sweep の設定

- ⑥設定が終わったら[OK]をクリックする。
- ⑦[HFSS]>[Analyze All]をクリックすると解析が始まる。

(9) Driven Modal での結果の見方

a. ポートモードをみる

Wave port から入射させたマイクロ波のモードを確認する。

左のウィンドウから[Port Field Display]>[Wave Port 名]>[Mode N]を選択する。

b. S-parameter や Smith Chart をみる

①[HFSS]>[Results]>[Create Report]をクリックする。

②Create Report ダイアログで Report Type と Display Type を選ぶ。

\*S-parameter の場合

**Report Type** : Modal Solution Data

**Display Type** : Rectangular Plot

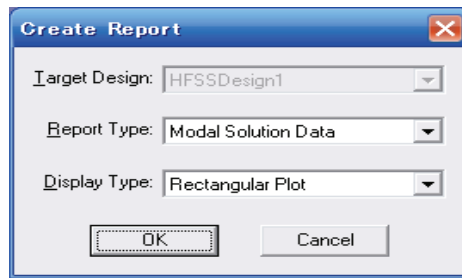


Fig. 16 Create Report ダイアログ

次に Traces タブで以下のような設定をする。

**Solution** : 解析した Setup 名

(例 Setup1:sweep1)

**Category** : S Parameter

**Quantity** : 必要な S パラメーター

**Function** : 単位(mag)

設定できたら Add Trace をクリックして Done をクリックする。

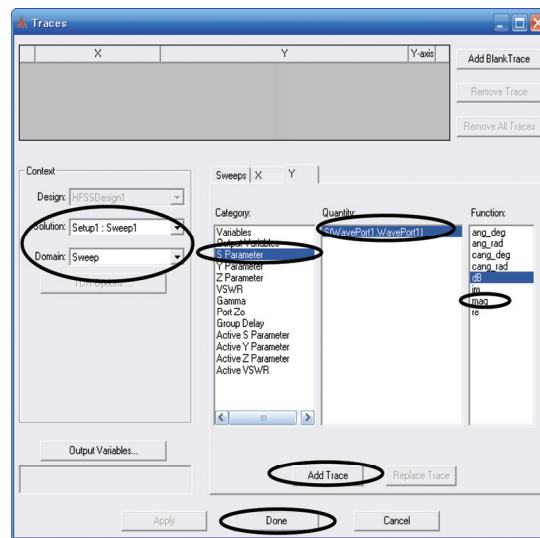


Fig. 17 S-パラメーターの設定

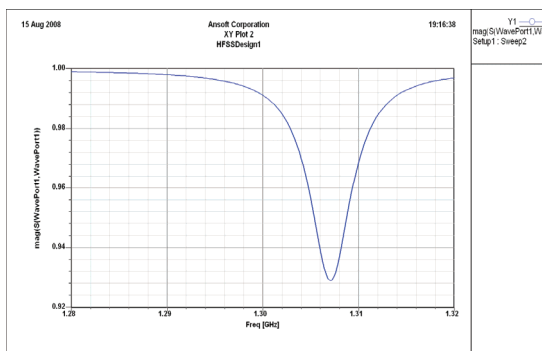


Fig. 18 S-パラメータ(結果)

\* Smith Chart を見る

**Report Type** : Modal Solution Data

**Display Type** : Smith Chart

次に Traces タブで以下のような設定をする。

**Solution** : 解析した Setup 名  
(例 Setup1:sweep1)

**Category** : S Parameter

**Quantity** : 必要な S パラメータ

**Function** : 単位(None)

設定できたら Add Trace をクリックして Done をクリックする。

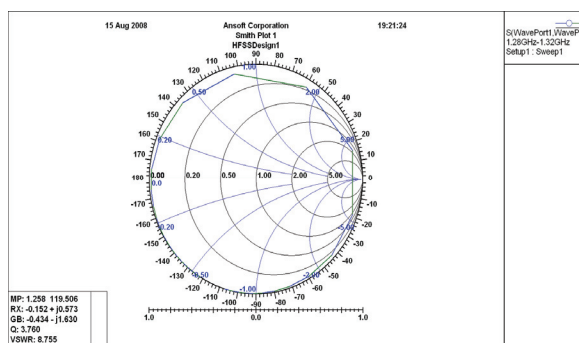


Fig. 19 スミスチャート

c. Field を見る

- ① Field を見たいオブジェクトまたは面をクリックして、選択する。
- ② [HFSS]>[Fields]>[見たい Field(E、H など)]>[Mag(強度)か Vector(ベクトル)]をクリックすると、Create Field Plot ダイアログが開く。

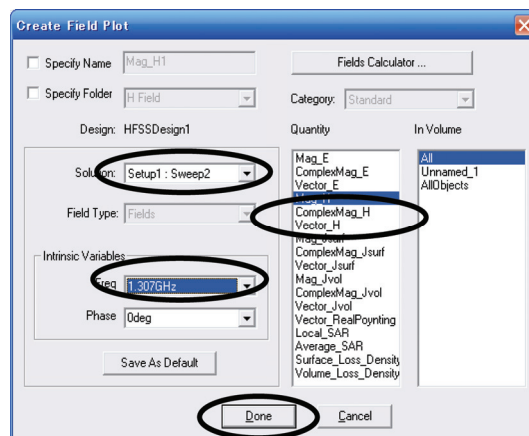


Fig. 20 フィールドプロットの設定

③ Create Field Plot ダイアログで、見たいフィールドの設定を行う。

**Solution** : 解析した Setup 名  
(例 Setup1:sweep1)

**Intrinsic Variables** ;

**Freq** : 周波数(例 1.307GHz)

**Phase** : 位相(例 0deg)

設定が終わったら [Done] をクリックすると、フィールドが表示される。

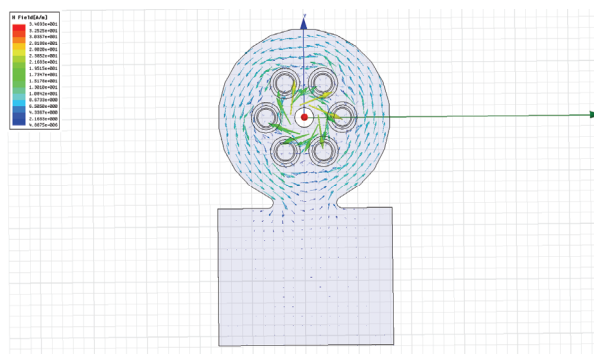


Fig. 21 共振周波数での磁場のベクトル分布

d. フィールドの出力

電場や磁場の各方向成分の分布をファイルに出力することができる。

- ① [HFSS]>[Field]>[Calculator] を選択すると、Field Calculator ダイアログが開く。

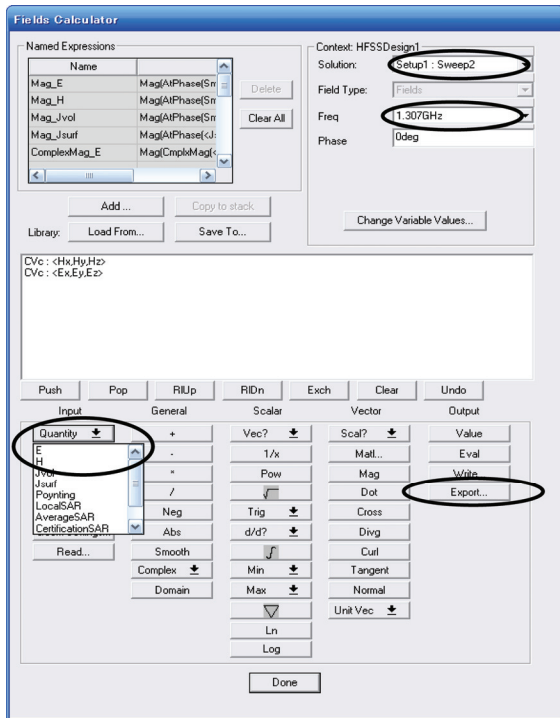


Fig. 22 出力するフィールドの選択

②Field Calculator ダイアログで設定を行う。

Context ;

**Solution** : 出力したい Setup 名  
(例 Setup1:sweep1)

**Freq** : 周波数(例 1.307GHz)

**Phase** : 位相(例 0deg)

Input の Quantity で出力したいフィールドを追加する。(例、E と H)

設定したら Output の Export をクリックする。

③Export Solution ダイアログが開くので、以下のような設定を行う。

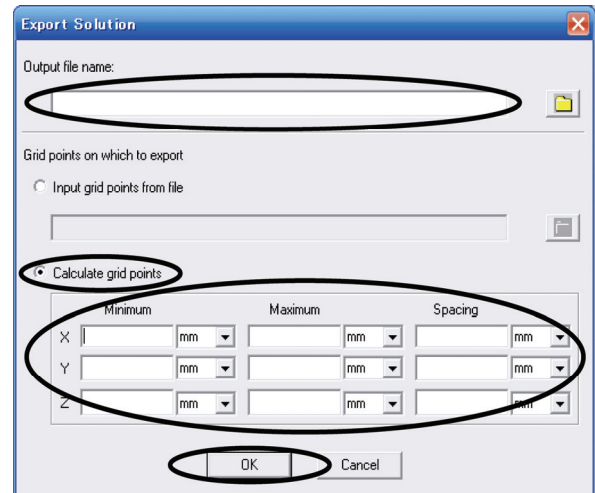


Fig. 23 出力するフィールドの設定

**Output file name** : 出力するファイル名

**Grid points on which to export** :

Calculate grid points にチェックを入れ、X,Y,Z についてフィールドデータがほしいグリッドの格子点の Minimum(最小値)と Maximum(最大値)、Spacing(間隔)を入力する。設定が終わったら、[OK]をクリックする。

### 3.3.1.3. Eigenmode での解析手順

手順(1)~(6)までは Driven Modal での解析手順と一緒である。詳しくは Driven Modal の解析手順を参照。

(1) プロジェクトの作成

(2) 3D モデルの作成

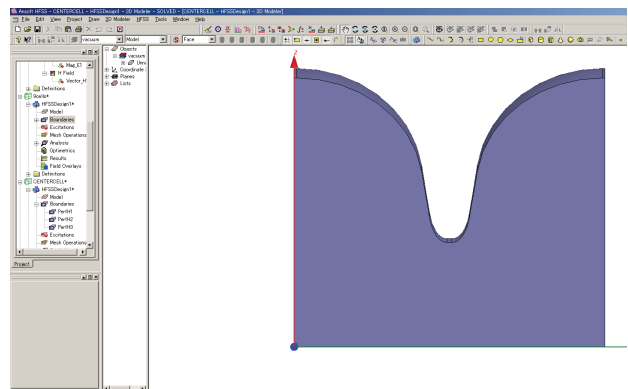


Fig. 24 Eigenmode シミュレーションモデル

(3) 単位の設定  
[mm]を選択する。

(4) 材質の設定  
Vacuum に設定する。

(5) 境界条件の設定  
下図のような境界条件をとる。

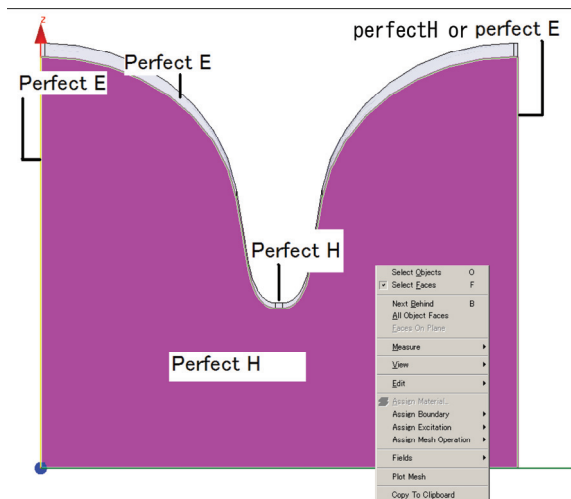


Fig. 25 境界条件の設定

(6) メッシュの設定  
今回は特に設定を行う必要はない。

(7) Solution type の選択  
①[HFSS]>[Solution Type]をクリックすると  
Solution Type ダイアログが開く。

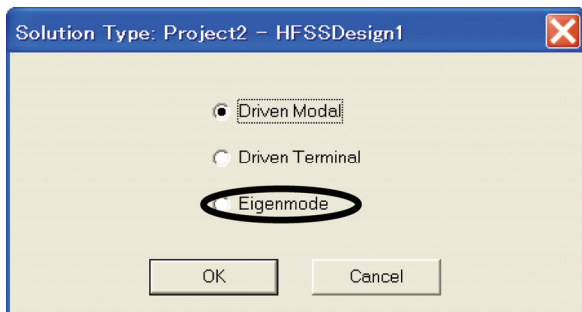


Fig. 26 Solution type の選択

②以下の中から[Eigenmode]を選んで[OK]をクリックする。

(8) 解析の設定

①[HFSS]>[Analysis Setup]>[Add Solution Setup]をクリックすると、Solution Setup ダイアログが立ち上がる。

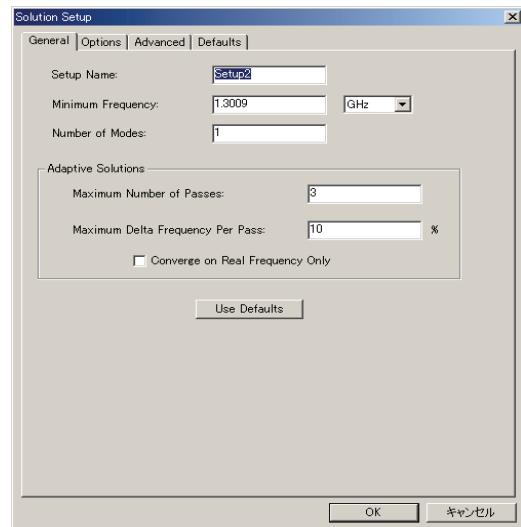


Fig. 27 Solution Setup ダイアログ

General のタブから以下の設定を行う。

**Minimum Frequency** : 1GHz

解析したい最低の周波数の値を入れる。

**Number of Modes** : 5

探索させる共振モードの数。

**Maximum Number of Passes** : 10

メッシュの粗さはここで決まり、数値が大きいほど精度が増す。

**Maximum Delta Frequency Per Pass** : 0.1%

計算の精度がここで決まり、数値を小さくするほど精度が増す。

②[OK]をクリックする。

③[HFSS]>[Analyze All]をクリックすると解析が始まる。

(9) Eigenmode での結果の見方

a. 共振モードの周波数を確認する。

①[HFSS]>[Results]>[Solution Data]を選択すると、Solutions ダイアログが開く。

②[Eigenmode data]タブを選択するとそれぞれのモードの共振周波数が表示される。

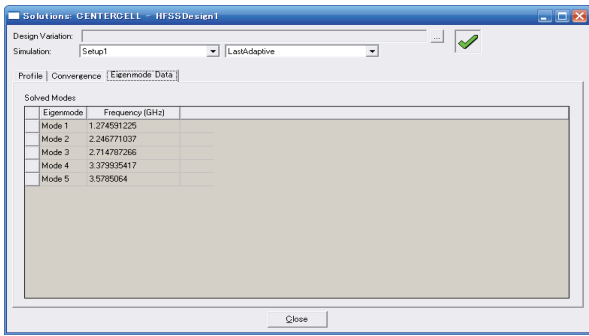


Fig. 28 Eigenmode data

- b. 各モードのフィールドを確認する。
- ①フィールドを見たいオブジェクトまたは面をクリックして、選択する。
  - ②[HFSS]>[Fields]>[見たい Field(E、H など)]>[Mag(強度)か Vector(ベクトル)]をクリックする。
  - ③Create Filed Plot ダイアログが開くので、プロットの設定を行い、[Done]をクリックする。

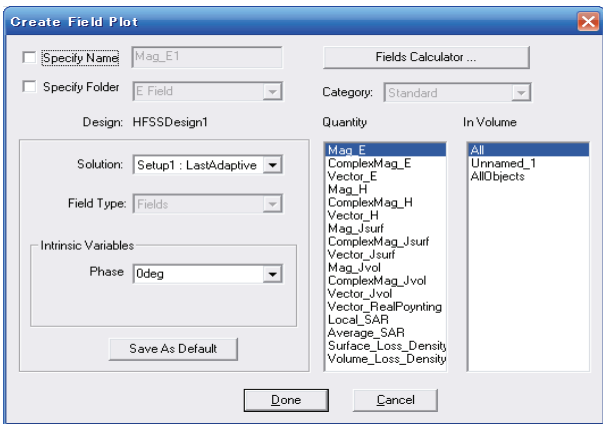


Fig. 29 フィールドプロットの設定

- ④左のウィンドウから[Field Overlays]を右クリックして、[Edit Sources]をクリックすると、Edit Sources ダイアログが開く。ここで、見たいフィールドのモードの[Scaling Factor]を 1 にするとそのモードのフィールドの状態が表示される。

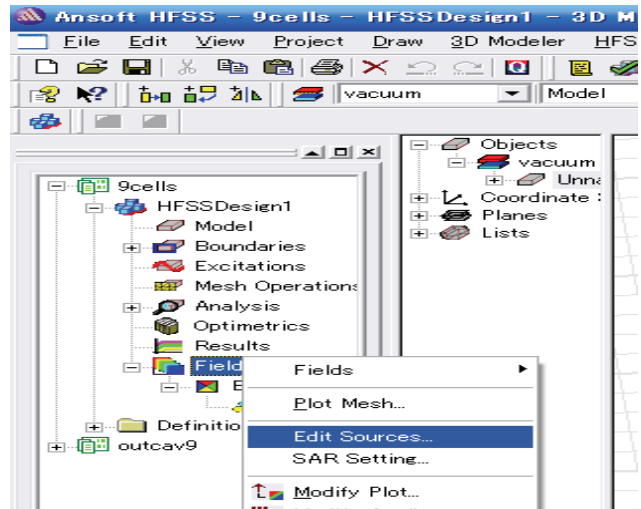


Fig. 30 モードの選択

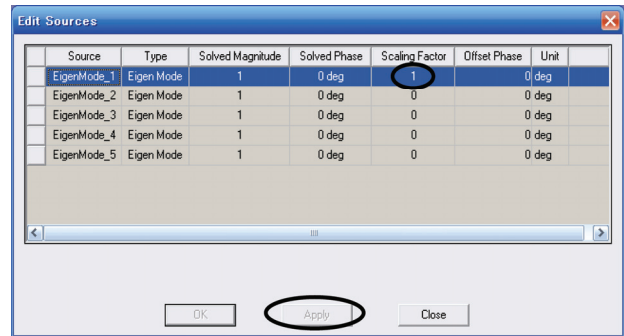


Fig. 31 Edit Sources ダイアログ

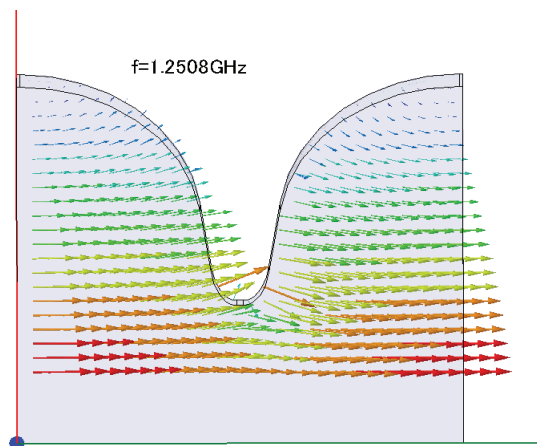


Fig. 32 0モードでの電場分布

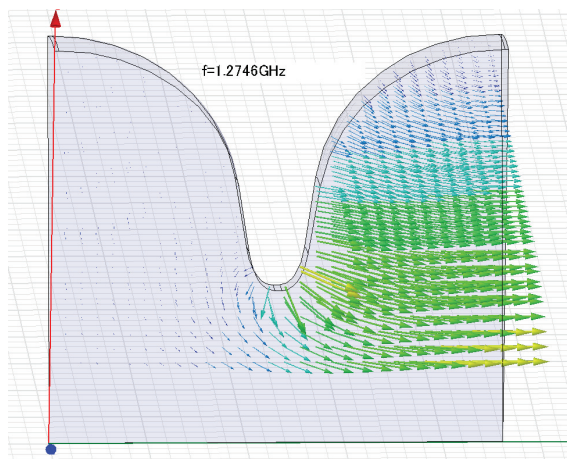


Fig. 33  $\pi/2$  モードでの電場分布

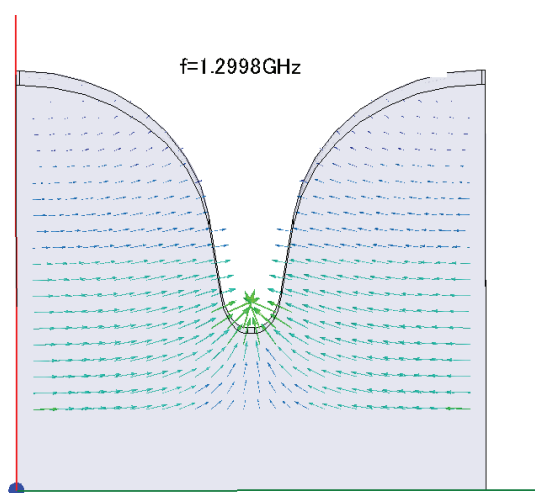


Fig. 34  $\pi$  モードでの電場分布

### 3.3.2. MW-STUDIO

#### 3.3.2.1. MW-STUDIO の使い方

MW STUDIO とは、高周波における電磁界シミュレーションを行うソフトです。

このソフトには4つのシミュレーションソルバがあり、状況により適切に選ぶ必要があります。

- **時間領域ソルバ：**

時間領域で計算してフーリエ変換により広帯域周波数にわたる計算を行う。

- **周波数領域ソルバ：**

周波数ごとに計算を行う。

- **Eigenmode ソルバ：**

共振モードの計算を行う。

- **Integral Equation ソルバ：**

電氣的に非常に大きな構造の場合に有効。

#### 3.3.2.2. 時間領域ソルバでの解析手順

- (1) CST DESIGN ENVIRONMENT を起動し、[Create a new project] から [CST MICROWAVE STUDIO] を選択し、[OK] をクリックする。

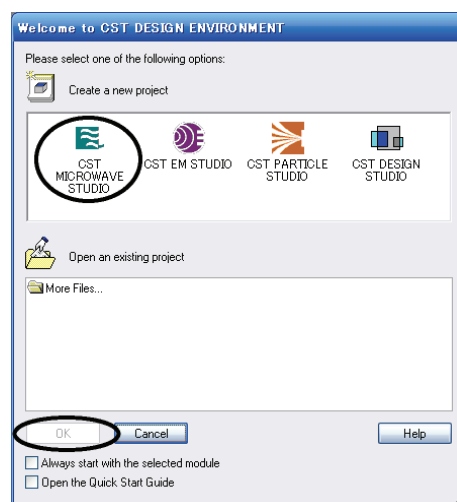


Fig. 35 プロジェクトの選択

- (2) プロジェクトテンプレートのダイアログが開くので、シミュレーション対象のデバイスに最も近いテンプレートを選択する。わからない場合は<None>を選択し[OK]をクリックする。



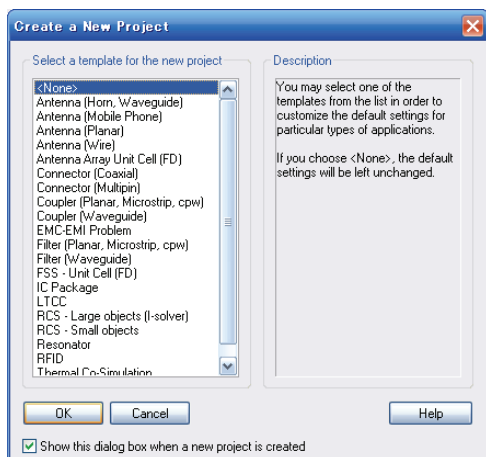


Fig. 36 テンプレートの選択

### (3) 単位の定義

テンプレートを選択すると設定されるが変更する場合、[Solve]>[Units]を選択し、Units ダイアログに入力する。

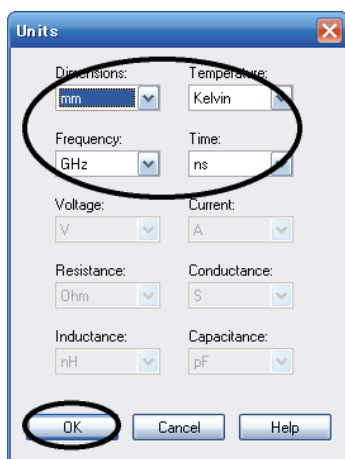


Fig. 37 単位の設定

### (4) 背景材質の定義

テンプレートを選択すると設定されるが変更する場合、[Solve]>[Background Material]を選択し、ダイアログボックスで背景材質を設定します。

\*背景材質として設定できるのは Vacuum と PEC(完全導体)のみであるので Copper などにした場合には、[Multiple layers]にチェックをして、物質と物質の層の高さを設定する。

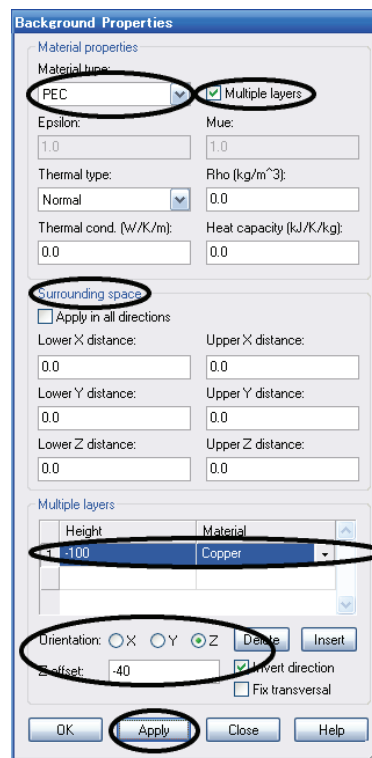


Fig. 38 背景材質の定義

### (5) モデルの作成

①モデルの作成は Inventor で行い、\*.sat ファイル形式で保存する。

※CST STUDIO で直接、モデルを作成することも可能。

②[File]>[Import]>[SAT(up to R17)]を選択し、Inventor で作成した sat ファイルをインポートする。



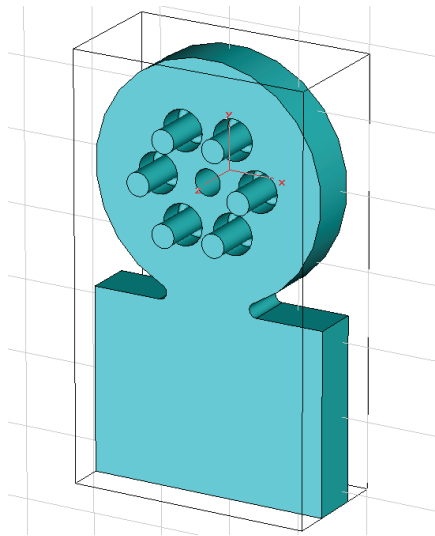


Fig. 39 モデルのインポート

#### (6) 材質の定義

左のナビゲーションツリーから [Components]>[default]>[インポートしたファイル]を右クリックして、[Change Material]をクリックすると、ダイアログボックスが開き Material で材質を選択する。

材質は[Load from Material Library]から読み出してくることができる。

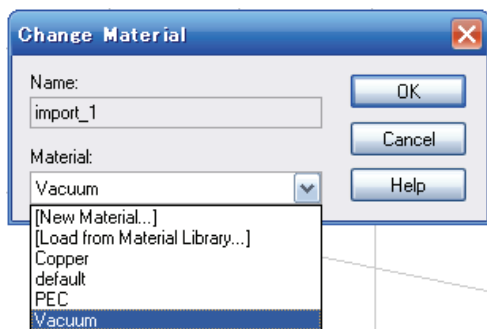


Fig. 40 材質の定義

#### (7) 周波数範囲の設定

[Solve]>[Frequency]を選択して、Frequency Range Setting ダイアログボックスで解析する最低周波数と最高周波数を設定する。

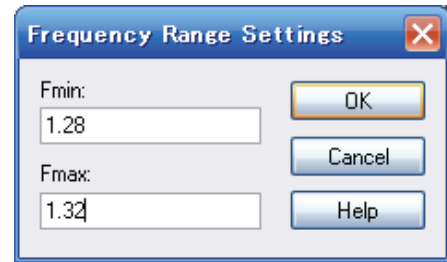


Fig. 41 周波数範囲の定義

#### (8) 境界条件と対象条件の設定

①[Solve]>[Boundary Conditions]を選択し、Boundary Conditions ダイアログボックスで境界条件を設定する。

また、[symmetry planes]のタブから対称条件を設定することもできる。

②それぞれの面に対する境界条件を以下の中から選択し、[OK]をクリックする。

**electric** : 完全電気導体( $E_t=0$ )

**magnetic** : 完全磁気導体( $H_t=0$ )

**open** : 自由空間

**open(add space)** : 自由空間

遠方界計算のための余裕空間を追加。

**periodic** :

向かい合う 2 面の境界を周期的境界条件とする。

**conducting wall** :

損失のある金属材質の壁として動作

**unit cell** :

周期的境界条件、2次元の周期性に加え、座標軸の方向も定義できる。

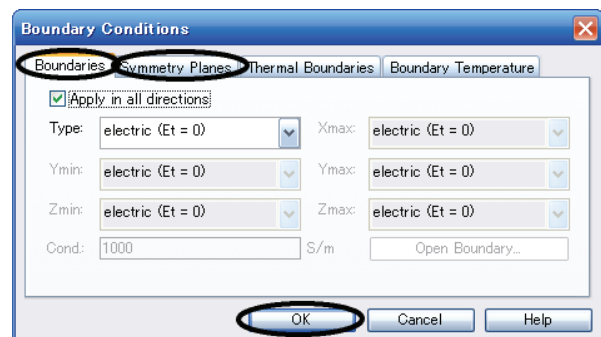


Fig. 42 境界条件の設定

### (9) メッシュの可視化

[Mesh]>[Mesh View]を選択するとメッシュモードとなり、メッシュが表示される。

メッシュの面の方向は、[Mesh]>[X/Y/Z Plane Normal]で変更し、メッシュ面を移動させるには [Mesh]>[Increment/Decrement Index]を選択する。

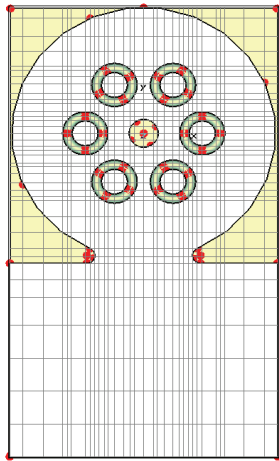


Fig. 43 メッシュビュー

多くの場合、自動メッシュ生成機能が生成するメッシュは初期メッシュとして妥当なメッシュであるが、表示されたメッシュを変更したい場合、[Mesh]>[global Mesh Properties]を選択すると変更させることができる。

また、部分的に(特定のオブジェクトだけの)メッシュを変更したい場合には、左のナビゲーションツリーから[Components]>[default]>[メッシュの変更したいオブジェクト]を右クリックして、[local mesh property]をクリックすれば変更することができる。

### (10) ポートの定義

- ①[Object]>[Pick]>[Pick Face]をクリックして、Face ピックツールを起動する。
- ②ポートにしたい面をクリックして選択すると選択された面はハイライト表示される。

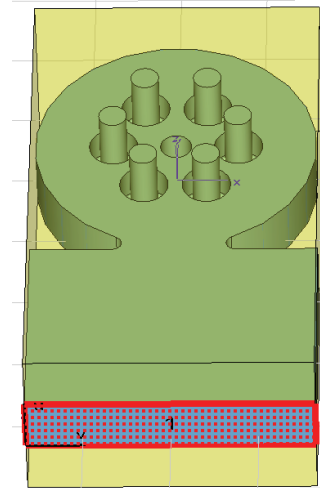


Fig. 44 ポートの定義

- ③[Solve]>[Waveguide Ports]を選択すると Ports ダイアログボックスが開く。

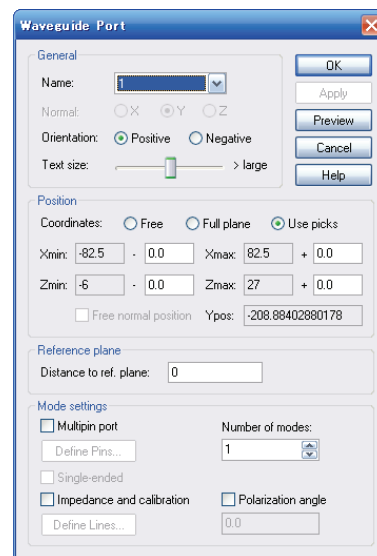


Fig. 45 Port ダイアログ

ここで設定を確認後、[OK]をクリックする。

### (11) 時間領域ソルバの設定

[Solve]>[Transient Solver]を選択し時間領域ソルバのダイアログボックスで設定を行う。

#### Accuracy :

定常状態モニタを定義する設定。値を下げるほど精度は良くなる。

#### Source Type :

励振させたいポートを設定する。

All Port はすべてのポートを1個ずつ励起、させていく。

**Mode** : 励振させるモードの数

**S-parameter setting** :

自動的に計算、正規化したい場合、[Normalize to fixed impedance]を選択する。

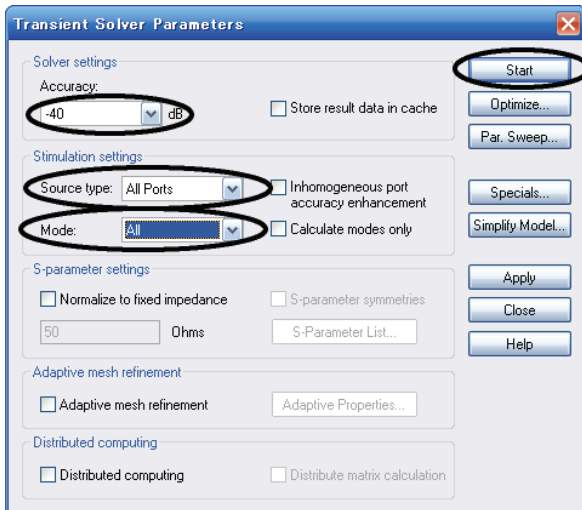


Fig. 46 時間領域ソルバの設定

設定が終わったら、[Start]をクリックし、シミュレーションが開始する。

(12) ポートモードの解析

ナビゲーションツリーから [2D/3D Results]>[Port Modes]>[ポート名]>[見たいモードと電界か地場か(e1 や h1 など)]を選択すると、ポートモードとそれに関連したパラメーターが表示される。

この表示を調整するには [Results]>[Plot Properties]を選択してプロットプロパティダイアログを開いてプロットオプションを変更させる。

(13) S-パラメーターの解析

シミュレーションが終了したら、ナビゲーションツリーの[1D Results]>[Port signals]を選択し、ポートモードの時間信号を確認する。ここでシミュレーション終了前にすべての時間信号が0まで減衰していることが重要である。

S-パラメーターを表示させるには、ナビゲーションツリーの[1D Results]>[|S| linear]/[|S| dB]を選択することにより表示される。

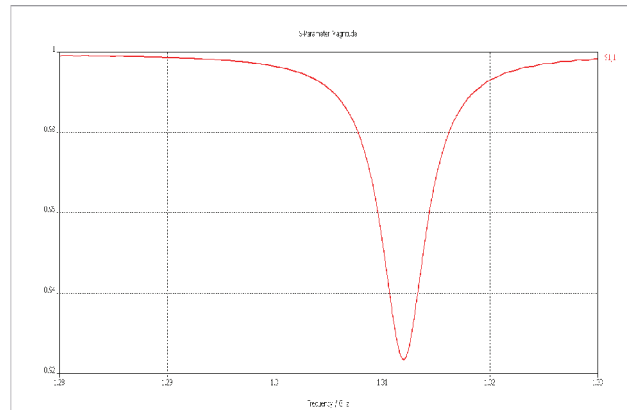


Fig. 47 S-parameter

また、スミスチャートも [1D Results]>[Smith Chart]を選択することにより表示される。

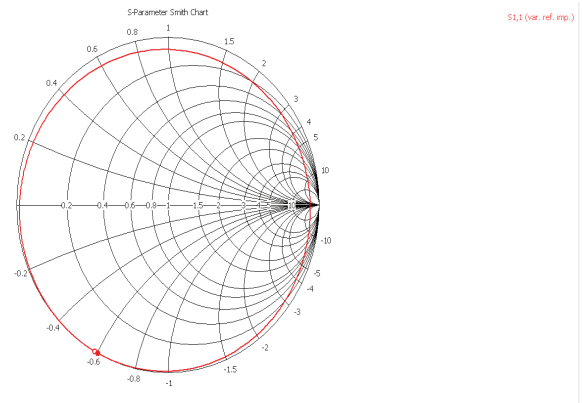


Fig. 48 スミスチャート

(14) 適応メッシュリファイン

ソルバ結果を基に改善し、メッシュを適応させる適応メッシュリファイン機能を備えている。この機能は Solver Parameters ダイアログで [Adaptive mesh refinement]をチェックすると有効になる。

[Start]をクリックすると、ソルバは連続したパス間で S-パラメーターが大きく変異しないようになるまでメッシュリファインのパスを実行します。このパスが実行され、終了すると以下のように

なダイアログボックスが表示され、メッシュがリファインできる。  
ここで[Yes]をクリックしてメッシュ適応機能をオフにして、再度解析をしてもメッシュは有効となっている。

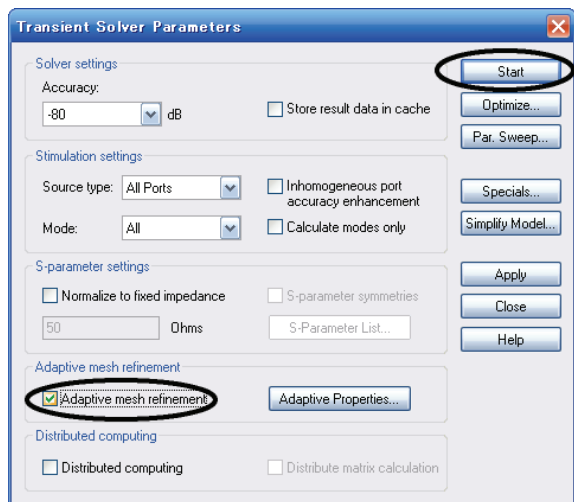


Fig. 49 適応メッシュリファイン

(15) 複数の周波数での電磁界解析  
[Solve]>[Field Monitors]でモニタを定義することで、シミュレーション中に任意の周波数における電磁界を記録することができる。  
Monitor のダイアログで、モニタの種類(Type)と Frequency フィールドで周波数を指定し、[Apply]をクリックし設定を保存する。

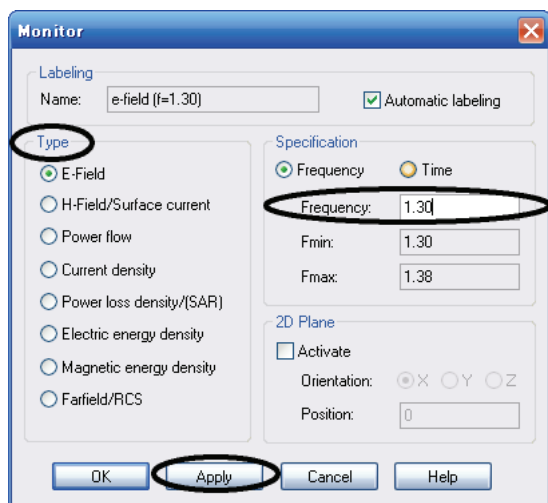


Fig. 50 モニタの設定

記録した電磁界分布を表示させるには、ナビゲーションツリーの[2D/3D Results]>[E-field] or [H-field]>[表示させたいフィールド]を選択する。  
[Results]>[Plot Properties]から3Dベクトルプロットのオプションを変更することによりいろいろと表示することができる。  
また、構造の断面表示は[Results]>[3D Fields on 2D Plane]を選択することにより表示ができる。

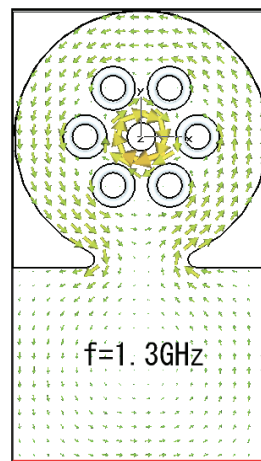


Fig. 51 磁場分布

(16) 周波数領域ソルバでのシミュレーション  
時間領域ソルバは高速に計算を行うが、周波数領域ソルバは周波数のサンプルポイントごとに計算を行うため非常に時間がかかる。しかし、MW STUDIO の周波数ソルバは特殊な広帯域周波数スイープ技術を用いて、比較的少ない周波数サンプルから広帯域スペクトルを導き出すことができる。

[Solve]>[Frequency Domain Solver]を選択し、Frequency Domain Solver Parameter ダイアログで設定を行う。

**Method** : General purpose

(一般的なソルバ、他は対象を特化したソルバ)

**Mesh type** : Tetrahedral Mesh

(四面体メッシュ)

スイープ技術を用いるには Frequency Samples で Frequency 行の[Auto]にチェックを入れ、周波

数ポイントの自動サンプリングを有効にした後、  
[Use broadband frequency sweep]にチェックを  
入れる。  
これで[Start]をクリックすると、解析が開始され  
る。

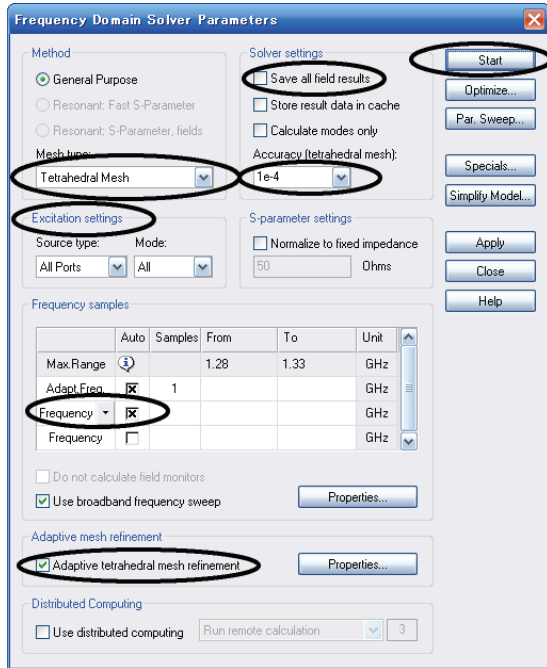


Fig. 52 周波数領域ソルバの設定

### 3.3.2.3. Eigenmode ソルバでの解析手順

手順(1)～(9)までは時間領域ソルバでの解析手順  
と一緒である。詳しくは時間領域ソルバの解析手  
順を参照。

- (1) 新しいプロジェクトを開く。
- (2) テンプレートを選択する。
- (3) 単位を定義する。  
**Dimensions** : mm  
**Frequency** : GHz
- (4) 背景材質を定義する。  
 PIC とする。
- (5) モデルをインポートする。

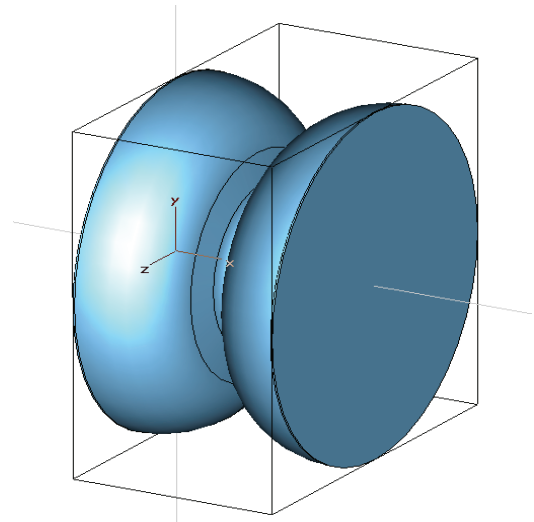


Fig. 53 Eigenmode モデル

- (6) 材質の定義  
 Vacuum とする。
- (7) 周波数範囲の設定  
 1.2GHz～3.5GHz とする。
- (8) 境界条件と対象条件の設定

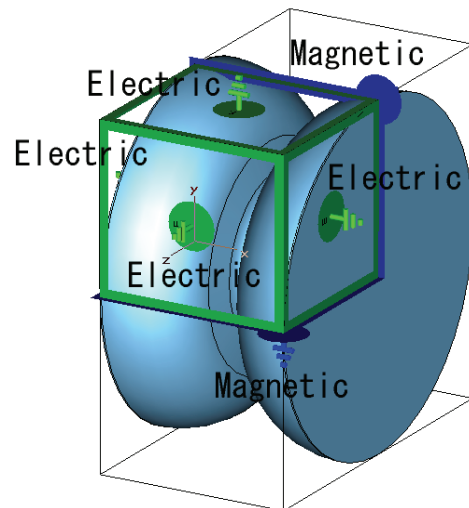


Fig. 54 境界・対象条件の定義

(9) メッシュの可視化

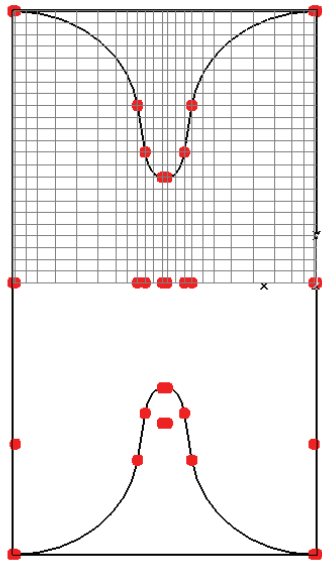


Fig. 55 メッシュの確認

(10) Eigenmode ソルバの設定

固有モードソルバは、閉じたデバイスの有限個の電磁界共振モード分布を計算する。そのため、ポートの定義は必要ない。

固有モードで計算するには[Solve]>[Eigenmode Solver]で Eigenmode Solver Parameters ダイアログで設定を行う。

Solver setting ;

**Method :**

モードの数に応じて、適切なソルバメソッドを選択する。

- ・ 損失がある問題⇒JDM
- ・ 損失がない問題+モードの数(1~5)⇒JDM
- ・ 損失がない問題+モードの数(5以上)⇒AKS

**Mode :** 必要なモードの数を入力する。

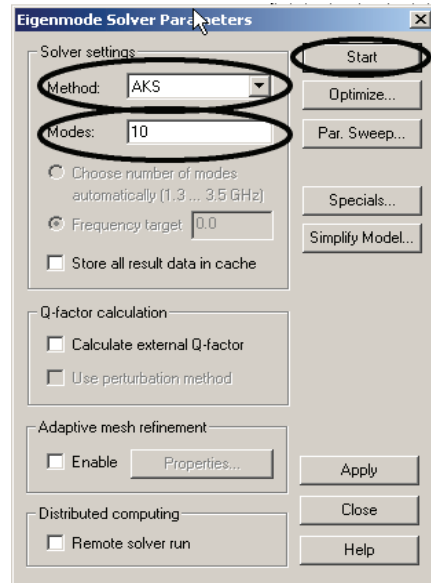


Fig. 56 Eigenmode の設定

設定が完了したら、[Start]をクリックすると、解析が開始する。

(11) 結果の見方

固有モードソルバの N 次モードの結果はナビゲーションツリーからアクセスすることができる。

Table 1 結果の表示

Navigation tree	Type of results
[2D/3D Results] > [Mode] > [Mode N] > [e]	Electric field
[2D/3D Results] > [Mode] > [Mode N] > [h]	Magnetic field
[2D/3D Results] > [Mode] > [ModeN] > [Surface Current]	Surface current field
[2D/3D Results] > [Mode] > [Mode N] > [Energy density]	Energy density



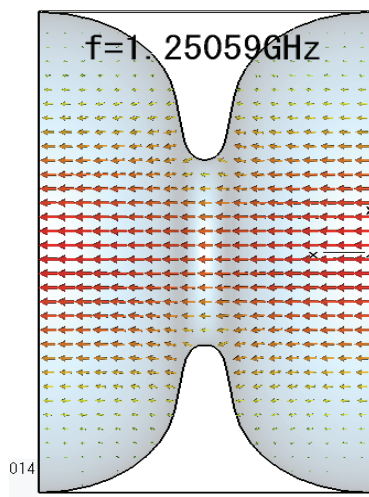


Fig. 570 モードの電場分布

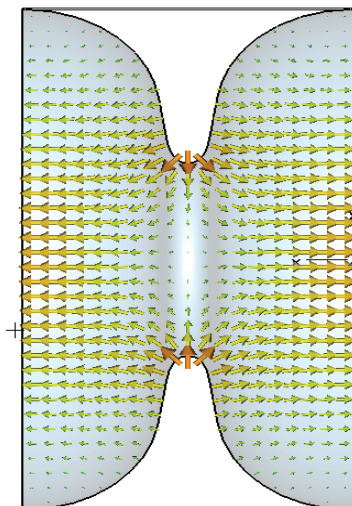


Fig. 58  $\pi$ モードの電場分布

- [5] 伊藤耿一、「大学院情報理工学3 計算力学」、講談社サイエンティフィク
- [6] 中田高義／高橋則雄、「電気工学の有限要素法」、森北出版

## 参考文献

- [1] 神谷紀生、「有限要素法と境界要素法」、サイエンス社
- [2] 山下榮吉、「マイクロ波シミュレータの基礎」、電子情報通信学会
- [3] 加川幸雄／小柴正則／池内雅紀／鏡愼、「電気・電子のための有限／境界要素法－波動問題への応用－」、オーム社
- [4] 橋本修／阿部琢美、「FDTD 時間領域差分法入門」、森北出版

### 3. 高周波デバイスの設計・製作・試験

#### 1. はじめに

通常の RF デバイスのほとんどは、近年は設計～製造まで可能な会社が多数あり、電子管～超伝導空洞まで、性能仕様での発注による丸投げが可能である。さらに小規模な加速器であれば加速器全体を性能仕様で発注という事も可能でしょう。例えば、私の現在の専門である電子管は、企業での技術レベルが非常に上がってきており、近年は研究所での開発項目では無いとさえ囁かれております。

しかし製造過程を知らないばかりに、そもそも無理のある仕様を押し付けた挙句に、仕様を満たさないのを外注先の技術力のせいにするという事態を引き起こす事もある。また従来より性能を上げたい場合や、研究用等で試行錯誤が必要な場合、コスト削減などを目的として、試作に関しては、自力で仕様の決定～電気設計～機械設計～試験までを行い、製作のみ個別発注する事をお勧めしたい。

その後量産の最初は構造仕様で発注し、量産に入ったら性能仕様発注というのが正しい流れだと思わる。「事前の準備もなく予算が付いたのでとにかく性能仕様で発注」という事態も多いかと思いますが、そういった結果泥沼化する事もあり、試作を自力で行う事で、無理の無い仕様を認識するのが早道だったりもするのではないのでしょうか。

というわけで、ここでは高周波デバイスの試作をするための、"設計は全部自分でやって製作のみ個別発注" という前提で進める事とします。当然設計～評価まで自力で行うという事は、非常に大きな労力を必要とするため、合理的にかつ効率良く工程を進めるのに必要な情報を集めたつもりです。

個別発注の場合、

- 仕様の検討
- 電気・熱設計
- 機械設計
- 見積～製作～工程管理～組立

が主な仕事となる。

#### 2. 電気設計

##### 2.1. 電磁波シミュレーションの計算結果とその評価

基本仕様は理論式から検討が可能ですが、最終的には電磁波シミュレーションによる計算が必要になる事が多い。電磁波シミュレーションにおいて重要なのは、何をどのシミュレーターで効率良く計算するかを考え、むやみにシミュレーションをしない事でしょう。そこで例えば以下のようなポイントが参考になるかもしれません。

- 固有モード、S-パラメーター、タイムドメイン等の様々な方法を効率良く組み合わせて使用する。
- 計算格子の間隔は波長から決まるため、同じ周波数では、一般的に計算対象の体積に比例して計算時間が増えます。逆に例えば電磁波のモードの対称性などを利用して、計算時間を減らす事ができる。
- 必要なのは正確な絶対量ではなく、相対値である事が多い。この2つは所要計算が全く違う。
- Qの高い空洞のS-パラメーターを計算しない。

##### 2.2. 反射係数と定在波比

マイクロ波の振る舞いについて記述する際、等価回路を用いて記述する場合がある。本節でも、反射係数と定在波比の説明をする為、Fig. 1 のような回路を用いて説明する。

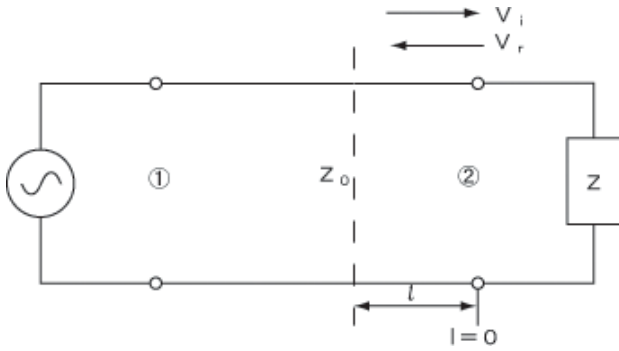


Fig. 1 伝送経路と不可インピーダンス

まず、反射係数について述べる。Fig. 1 のように、特性インピーダンス  $Z_0$  の伝送線路の出力端（開口②）に被測定インピーダンス  $Z$  ( $Z = R + jX$ ) が接続された場合、

$$z = \frac{Z}{Z_0} = r + jx \quad (2-1)$$

$$y = \frac{Z_0}{Z} = \frac{1}{z} = g + jb \quad (2-2)$$

と表すことができる  $z$  および  $y$  をそれぞれ  $Z$  の  $Z_0$  に関する規準化インピーダンスおよび、規準化アドミタンスと称する。ここで  $Z = Z_0$  ( $z = 1$ ) の場合を整合状態といい、 $Z \neq Z_0$  ( $z \neq 1$ ) の場合を不整合状態という。

入力端（開口①）から高周波電力を加えたとき、一般的に  $z \neq 1$  の場合、伝送線上には入力波と反射波とが存在する。すなわち、高周波電源から負荷にむかって進行する入射波については

$$\text{入射波電圧} = V_i \exp j(\omega t + \beta l) \quad (2-3)$$

$$\text{入射波電流} = (V_i / Z_0) \exp j(\omega t + \beta l) \quad (2-4)$$

負荷から電源に向かって進行する反射波については

$$\text{入射波電圧} = V_r \exp j(\omega t - \beta l) \quad (2-5)$$

$$\text{入射波電流} = -(V_r / Z_0) \exp j(\omega t - \beta l) \quad (2-6)$$

となる。ここで  $V_i, V_r$  は  $l = 0$  での入射波および反射波電圧であり、 $\beta$  は位相定数で  $\beta = 2\pi / \lambda_g$ 、 $\lambda_g$  は管内波長である。

伝送線上負荷から、 $l$  なる点における電圧、電流はその点における入射波と反射波の合成であり、その比はその点から負荷側をみたインピーダンス  $Z_l$  となる。すなわち、

$$Z_l = \frac{V_i e^{j\beta l} + V_r e^{-j\beta l}}{V_i e^{j\beta l} - V_r e^{-j\beta l}} Z_0 \quad (2-7)$$

ここで、 $l = 0$  となる場合の  $Z_l$  がすなわち  $Z$  であるから

$$Z = \frac{V_i + V_r}{V_i - V_r} Z_0 \quad (2-8)$$

となり、これより

$$\frac{V_r}{V_i} = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} = \frac{z - 1}{z + 1} \equiv \Gamma \quad (2-9)$$

となり、 $\Gamma$  を電圧反射係数といい、式(2-3)~(2-6)より、電流反射係数は  $-\Gamma$  であることがわかる。また、 $V_r, V_i, z$  はいずれも複素量であるため、 $\Gamma$  も複素量となり、一般的に極座標をもちいて  $\Gamma = |\Gamma| \exp j\theta$  で表わす。そして、電圧反射係数  $\Gamma$  は S-パラメーターと以下のような関係がある。

$$\Gamma = S_{11} \quad (2-10)$$

その為、ネットワークアナライザーで反射法を用いた場合、電圧反射係数を測定していると言い換えることもできる。

次に定在波比について述べる。伝送線上の電圧分布について考えてみると、 $l$  なる点における電圧  $V$  は式(2-3)、(2-4)および(2-9)から次のようになる。

$$\begin{aligned}
V &= V_i e^{j(\omega t + \beta l)} + V_i e^{j(\omega t - \beta l)} \\
&= V_i e^{j(\omega t + \beta l)} (1 + \Gamma \cdot e^{-j2\beta l}) \\
&= V_i e^{j(\omega t + \beta l)} (1 + |\Gamma| \cdot e^{j(\theta - 2\beta l)})
\end{aligned}
\tag{2-11}$$

したがって、 $V$ の絶対値は

$$|V| = |V_i| \sqrt{1 + |\Gamma|^2 + 2|\Gamma| \cos(\theta - 2\beta l)}
\tag{2-12}$$

となり、Fig. 2 のように  $\lambda_g / 2$  を周期として波状的に変化する。このような場合、伝送線上には定在波が存在しているという。この定在波の腹、および谷にあたる電圧は、式(2-11)より、

$$|V_{max}| = |V_i| (1 + |\Gamma|)
\tag{2-13}$$

$$|V_{min}| = |V_i| (1 - |\Gamma|)
\tag{2-14}$$

となる。ここで  $|V_{max}|$  と  $|V_{min}|$  の比を  $\rho$  とすると、

$$\rho = \frac{|V_{max}|}{|V_{min}|} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}
\tag{2-15}$$

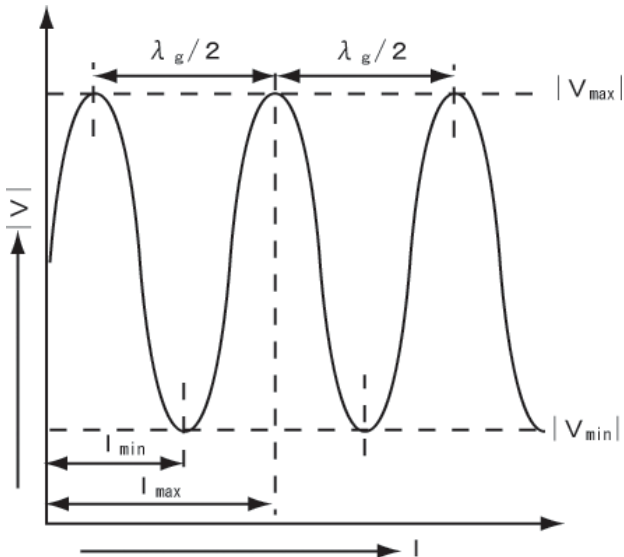


Fig. 2 定在波形

となり、この  $\rho$  を電圧定在波比という。先に求めた式(2-9)、式(2-15)を用いると、

$$|\Gamma| = \frac{\rho - 1}{\rho + 1}
\tag{2-16}$$

$$z = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}
\tag{2-17}$$

という関係式を導きだすことができる。

### 2.3. スミスチャート

スミスチャートとは、インピーダンスと反射係数を対応させた計算図表である。今、 $z = r + jx$ 、 $\Gamma = |\Gamma| e^{j\theta} = \Gamma_I + j\Gamma_Q$  として、式(2-16)に代入し、 $r$ 、 $x$  を求めると、

$$r = \frac{1 - \Gamma_I^2 - \Gamma_Q^2}{(1 - \Gamma_I)^2 + \Gamma_Q^2}
\tag{2-18}$$

$$x = \frac{2\Gamma_Q}{(1 - \Gamma_I)^2 + \Gamma_Q^2}
\tag{2-19}$$

となり、これよりさらに

$$\left(1 - \frac{r}{r+1}\right)^2 + \Gamma_Q^2 = \frac{1}{(r+1)^2}
\tag{2-20}$$

$$(\Gamma_I - 1)^2 + \left(\Gamma_Q - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}
\tag{2-21}$$

となり、 $\Gamma$  平面状で  $r = \text{一定}$  の軌跡は中心が  $\Gamma_I = r / (r + 1)$ 、 $\Gamma_Q = 0$  で半径が  $1 / (r + 1)$  なる円群となり、また  $x = \text{一定}$  の軌跡は中心が  $\Gamma_I = 1$ 、 $\Gamma_Q = 1 / x$  で半径が  $1 / x$  なる円群となることがわかるFig. 3。一方、 $\Gamma$  を極座標で表したときの軌跡はFig. 4 のようになる。Fig. 3 の外周の半径は 1 ( $r = 0$  の場合) であり、Fig. 4 の外周の半径も 1 ( $|\Gamma| \leq 1$ ) であるので、この両者を重ねて書いたのが実際のスミスチャートである Fig. 5。

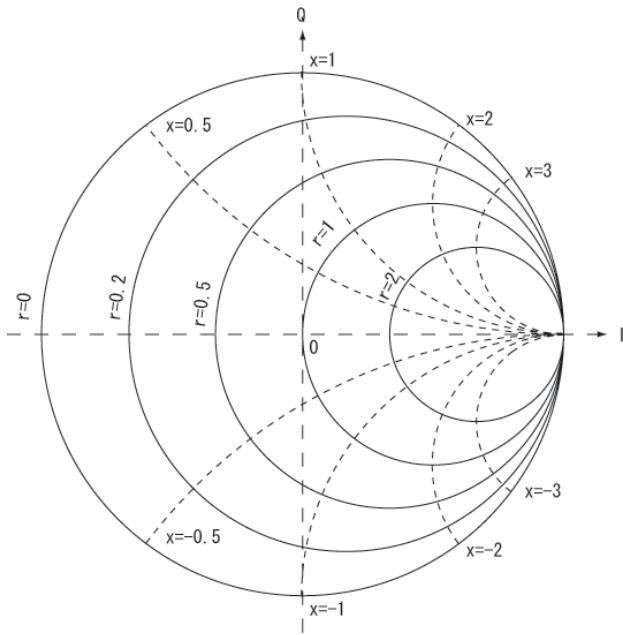


Fig. 3  $\Gamma = (z-1)/(z+1)$

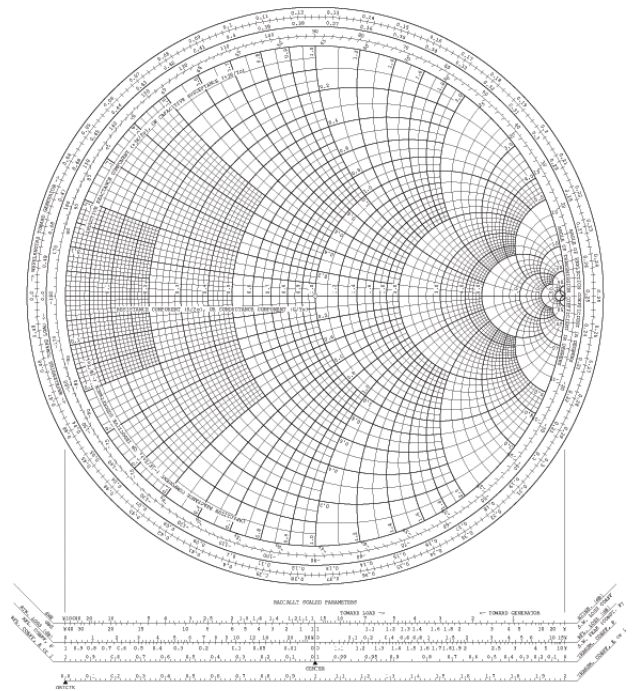


Fig. 5 スミスチャート

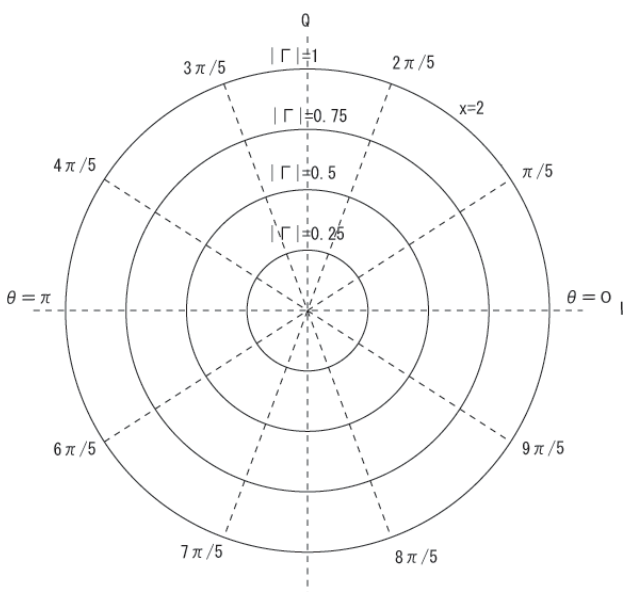


Fig. 4  $\Gamma = |\Gamma|e^{j\theta}$

#### 2.4. スミスチャートを用いた Q 値の求め方

実際にスミスチャートを用いて Q 値を求める方法について説明する。はじめに、空洞共振器は等価回路を用いてあらわすことができ、Fig. 6 のように表すことにする。

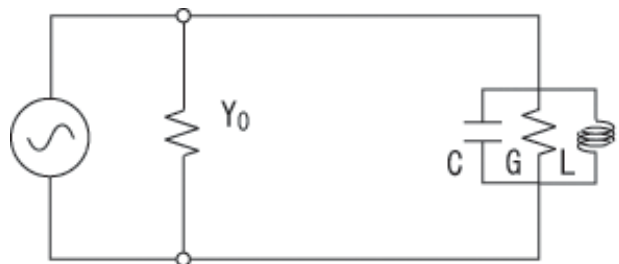


Fig. 6 空洞共振器の等価回路

伝送線に損失がないとすると、共振角周波数を  $\omega_0$ 、無負荷時の Q (unloaded Q) を  $Q_0$  とすると、

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (2-22)$$

$$Q_0 = \frac{\omega_0 C}{G} \quad (2-23)$$

となり、入力角周波数を  $\omega$  とすると入力アドミタンスは

$$Y_{in} = G + j\sqrt{\frac{C}{L}}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \quad (2-24)$$

と書くことができ、この時、

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega \quad (2-25)$$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1 \quad (2-26)$$

という関係を用いると、

$$Y_{in} = G\left(1 + 2jQ_0\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) \quad (2-27)$$

と書き直すことができる。

結合された伝送線は空洞からみると負荷となり、全体からみるとそれだけ損失を増すことになり、全体の系の  $Q$  は低下する。この  $Q$  を負荷時の  $Q$  (loaded  $Q$ ) といい、 $Q_L$  で表すと、

$$Q_L = \frac{\omega_0 C}{G + Y_0} \quad (2-28)$$

となり、結合によって電力が外部に流出し、 $Q$  が低下することを表す量として外部の  $Q$  (external  $Q$ ) を  $Q_{ext}$  で表し、次のように定義する。

$$Q_{ext} = \frac{\omega_0 C}{Y_0} \quad (2-29)$$

したがって、式(2-23)、式(2-28)、式(2-29)より、

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{ext}} \quad (2-30)$$

という関係式を得られる。

一方、空洞の共振時のアドミタンスと伝送線のアドミタンスの比は、空洞と伝送線の結合度を表し、これを結合度 (結合係数) といい、

$$\beta = \frac{Y_0}{G} \quad (2-31)$$

で表す。この結合度  $\beta$  は外部の  $Q$  と関係があり、

$$\beta = \frac{Q_0}{Q_{ext}} \quad (2-32)$$

と表すこともでき、上記の式と式(2-30)を用いると

$$Q_L = \frac{Q_0}{1 + \beta} \quad (2-33)$$

それでは具体的に結合度  $\beta$  の求め方について説明する。式(2-26)で求めた入力アドミタンスを特性アドミタンスで割ると

$$\frac{Y_{in}}{Y_0} = \frac{G}{Y_0}\left(1 + 2jQ_0\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) = g + jb \quad (2-34)$$

となり、これより反射係数を求めると、

$$\Gamma = \frac{Y_0 - Y_{in}}{Y_0 + Y_{in}} = \frac{(1 - g) - jb}{(1 - g) + jb} \quad (2-35)$$

という関係式を得ることができる。 $\Gamma$  の周波数特性をスミスチャート上にかくと Fig. 7 のようになる。

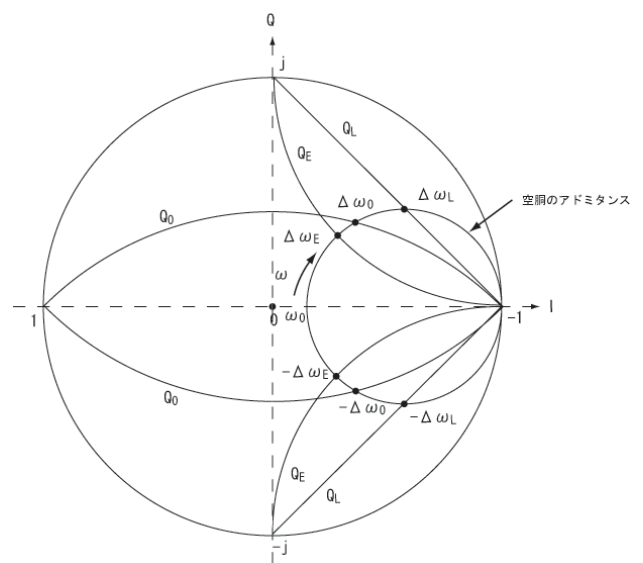


Fig. 7 空洞アドミタンスと  $Q$  値



$b = \pm g$ となる場合を考えると、式(2-34)より、

$$2Q_0 \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 1 \quad (2-36)$$

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega}$$

となり、このときの共振周波数からのズレを $\Delta\omega_0$ とすると、

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega_0} \quad (2-37)$$

となる。Fig. 7 のスミスチャートにおいて、 $b = \pm g$ の曲線は $Q_0$ で示した円弧になる為、 $\Delta\omega_0$ はこの円弧とアドミタンス円の交点の周波数から求められる。

次に $b = \pm 1$ となる場合を考えると、式(2-31)、式(2-34)より、

$$\frac{G}{Y_0} \times 2Q_0 \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 1 \quad (2-38)$$

$$\frac{\omega_0}{2\Delta\omega} = Q_0 \times \frac{1}{\beta} = Q_{ext}$$

となり、このときの共振周波数からのズレを $\Delta\omega_{ext}$ とすると、

$$Q_{ext} = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega_{ext}} \quad (2-39)$$

なる。Fig. 7 のスミスチャートにおいて、 $b = \pm 1$ の曲線は $Q_{ext}$ で示した円弧になる為、 $\Delta\omega_{ext}$ はこの円弧とアドミタンス円の交点の周波数から求められる。

次に $b = \pm(1 + g)$ となる場合を考えると、式(2-31)、式(2-33)、式(2-34)より、

$$\frac{G}{Y_0} \times 2Q_0 \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 1 + \frac{G}{Y_0} \quad (2-40)$$

$$\frac{\omega_0}{2\Delta\omega} = Q_0 \times \frac{1}{\beta + 1} = Q_L$$

となり、このときの共振周波数からのズレを $\Delta\omega_L$ とすると、

$$Q_L = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega_L} \quad (2-41)$$

となる。Fig. 7 のスミスチャートにおいて、 $b = \pm(1 + g)$ は $Q_L$ で示した直線になる為、 $\Delta\omega_L$ はこの円弧とアドミタンス円の交点の周波数から求められる。

以上の方法で、 $Q_L$ 、 $Q_0$ 、 $Q_{ext}$ が求められ、式(2-32)を用いることで結合度 $\beta$ も求めることができる。

## 2.5. 固有モードによる結合度の計算

Sパラメーターを用いた方法では、Q値が大きいと、共振周波数が先にある程度分かっていないと、計算できない。そのためにしばしば固有モードを先に解くと思うが、この固有モードを解く際に同調曲線を利用すれば、結合度は計算できる。同調曲線とは、結合孔に接続されている伝送線路に可変短絡を取り付けた際の共振周波数の変化を表す。これを定式化するのは式(2-7)で無損失の空洞が伝送線路に接続されているとして、

$$Z_0 = \frac{1}{jQ_{ext} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \quad (2-42)$$

とすれば良く、

$$Z_l = \frac{V_i e^{j\beta l} + V_r e^{-j\beta l}}{V_i e^{j\beta l} - V_r e^{-j\beta l}} \frac{1}{jQ_{ext} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \quad (2-43)$$

となる。ここで伝送線路終端を短絡した場合

$$Z_l = 0 \quad (2-44)$$

$$V_i = -V_r$$

なので、

$$0 = \frac{\cos(\beta l)}{j \sin(\beta l)} \frac{1}{j Q_{ext} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \quad (2-45)$$

と書き換えられ、

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q_{ext}} &= \tan \left( \frac{2\pi l}{\lambda_g(\omega)} \right) \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \\ &\approx -\frac{2\pi \Delta l}{\lambda_{g0}} \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} \\ &\left( \Delta l = l - \frac{\lambda_{g0}}{2}, \lambda_{g0} = \lambda_g(\omega_0) \right) \end{aligned} \quad (2-46)$$

となる。正確には1行目の関数を用いて関数をフィットするのが正しいが、一般的には2行目の式で十分である。まず導波管の長さを管内波長 $\lambda_g$ の1/4にすると、導波管内にエネルギーが溜まらないため、 $\Delta\omega=0$ となり $\omega_0$ が求まる( $\Delta\omega$ の原点が定まる)。その後導波管の長さを半波長程度にし、その付近で $\Delta l$ を変えながら、導波管の共振による全体の共振周波数のずれを見る事で、外部Qが求まり、結合度が求まる。ただし $\Delta l$ の原点は分からないので、何点か計算する必要がある。

この方法は、実際の測定でも可変短絡器を使い、空洞に小さな穴を開けてアンテナを挿入するなどして同様な測定が可能である。

## 2.6. タイムドメインでの結合度の計算

Q値が非常に高く、結合度も1に近い場合、伝送線路側から空洞を見るというやり方は非常に計算時間が分かる。一般的に加速器の空洞の場合、空洞内部の固有モードは単純なモードでQ0も既知の事が多い。従って、空洞に固有モードを立てた状態から、タイムドメインで計算をし、結合孔から漏れ出てくる電磁波の電力を計算すれば、内部に蓄積されているエネルギーとの比から、QLが求まり、簡単に結合度が計算できる。

## 2.7. 差分情報

空洞の計算で最低限必要なのは、正確な絶対値ではなく、およその絶対値とおよその差分情報のみ

である、近年は計算機の向上により、正確な絶対値を追い求める事もできるようになってきたが、一般的にはシミュレーションは適当にやって、物を安全側に製作してから測定した後、調整機構によりチューニングもしくは、調整加工を行った方が早く製作できる。例えば空洞の長さLに対しての共振周波数の差分 $\Delta f/\Delta L$ や、結合度では結合孔の半径rに対しての、 $\Delta k/\Delta r$ などである。

この際の $\Delta L$ 、 $\Delta r$ などはシミュレーションのメッシュ等よりも十分に大きくして、この1次の差分情報を求めれば十分である事が多い。

## 3. 製造工程

### 3.1. 構造仕様・図面

構造仕様を決める際や図面作成の際に気をつけるべき点としては、

- 機械加工における無理を強くない。
- 材料はできるだけ規格品を使う。
- 旋盤、次にフライスというように精度の出る順番で製造できる構造にする。
- 刃物の先端径をできるだけ大きい物を使用して角のRが大きくできる物はできる限り大きくする事で、刃物の振動を抑え、切削速度を速め、かつ平坦度を増す事ができる。
- 新しい製造方法、材料を使用する際には十分な試作費、試作時間を考慮する
- 超高真空機器なので材料、接合技術が非常に限定的である
- 材料は高純度かつ欠陥の無い物が求められる。必要に応じてだが、例えば銅の場合は電子管用無酸素銅、ステンレスの場合は低カーボンの物(SUS316L)を選択する。高純度材料は時期によって入手に数ヶ月かかる事もあるので、納期も考慮する必要がある。
- 超高真空機器における一般的な接合技術はロウ付け、TIG溶接、電子ビーム溶接、HIPなどと限られている。気密性はもちろん、放出ガスが少ない事や、ベーキングに耐えられる必要があるからである。当たり前だが、例

えばハンダ付け、接着剤はもちろん使えない。またゴムの O リングなども材質がバイトンでも耐熱温度は 200℃程度なので、ベーキング温度によっては使えない。

これらを踏まえた上で、JIS 規格に従って図面を書く。図面は組み立て図と、部品図で構成され、部品図は必ず 1 品一枚とする。1 : 1 にできる物は 1 : 1 で書くと加工の方が物を合わせて確認ができる。

### 3.2. 機械加工

先端技術は日進月歩で進歩している割には、機械加工で高精度に製作できる形状は工作機械の種類や刃物の形状で制限されるため、昔からあまり変わっていない。大きく変化したのは CAM による多軸加工が可能になったため、斜めや曲線の加工をするのに、以前のように冶具を工夫したりする必要がなくなった事だが、CAM のソフトウェアは現時点では高価であり、また専任のオペレーターが必要であるため、町工場にまで普及しているとは言えない。

#### • 旋盤

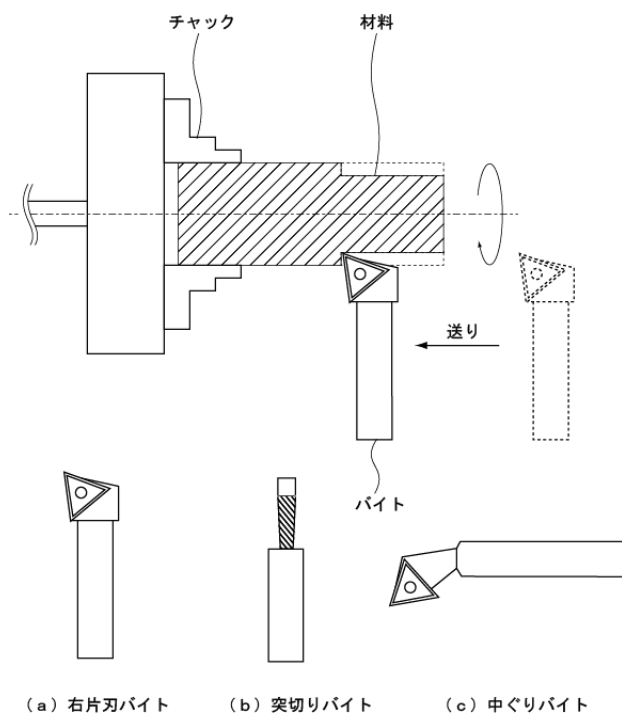


Fig. 8 旋盤

#### • フライス

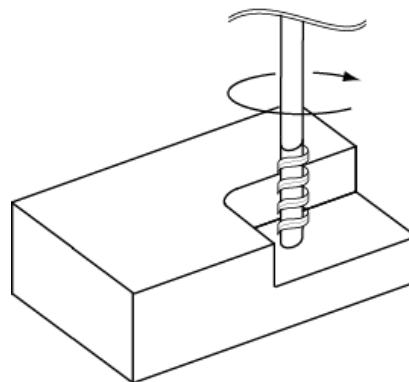


Fig. 9 フライス

#### • NC 加工機と CAM

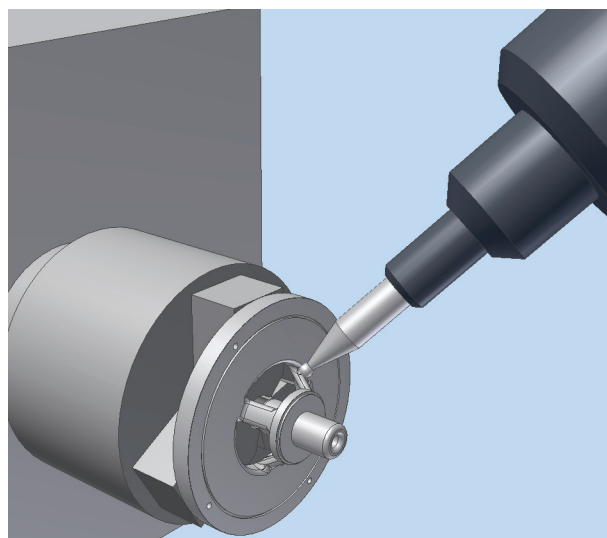


Fig. 10 多軸ターニングセンターの概念図

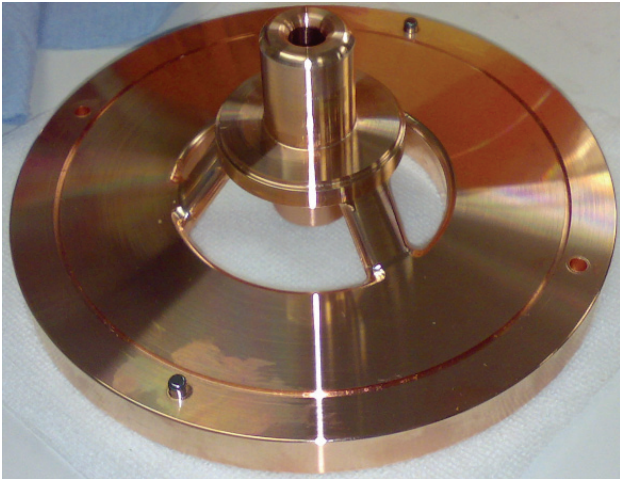


Fig. 11 実際に加工した高周波空洞の写真

### ダイヤモンドバイト

非常に高い耐摩耗性により長時間使用でき、良好な仕上面が得られる。(0.025 μmRa) また高速度の切削にも耐えられる。ただし、鉄系金属材料や、欠陥のある材料で使用したり、刃物を普通のバイトと同様に物に当たると刃物が欠けるため、細心の注意が必要である。

### 放電加工

ワイヤー放電加工と、形彫り放電加工がある。形彫り放電加工は被加工物に形成したい形状に対応する形に作られたグラファイト電極または銅電極等を、被加工物に近付けるように送ってゆく。ワイヤー放電加工は、細い金属ワイヤーを被加工物に近付けるように送ってゆく。ワイヤーはポピンから一定の速さで供給され、上下のガイドで保持される。一対のガイドが相対的に運動することによりテーパ加工、上下任意形状の加工を行うことができる。金属ならほとんど何でも加工可能であるが、放電加工面は溶解・再凝固を繰り返すため脆化するため、そのままでは空洞内壁の表面などには使えない。

### 3.3. 塑性加工

金属の塑性を利用した加工方法であり、加速器でも、例えば導波管は引き抜き加工により製造されている。また拡管による円形導波管の製作や、深絞り加工による空洞の試作などが行われている。

加工歪や弾性により加工時やロウ付け時に変形する事がある。

### 3.4. 表面処理

常伝導加速空洞では一般的には、ダイヤモンドバイトによる加工後、表面処理はしないのが最も良いとされている。しかし超伝導加速空洞では、空洞が塑性加工などで成形されるため、表面処理が性能を決める。

Table 1 表面処理法

技術	電解複合研磨	浸漬電解研磨	科学研磨	パフ研磨
	ECB	EP	CP	BUFF
平滑性	◎	○	△	○
下地面前処理	不要	必要 (下地粗さに依存)	必要 (下地粗さに依存)	～
研磨表面	(超)鏡面	半光沢	光沢なし	光沢
実効面積	極小 (マクロ的粗さ改善)	中 (ミクロ的粗さ改善)	大	大
非付着性	◎	○	×	△
剥離性	◎	○	×	△
加工歪	なし	なし	なし	あり
耐食性	○	○	△	×

## 4. 接合技術

### 4.1. ろう付

ろう付けとは、金属を接合する方法の一つで、接合する母材よりも融点の低い合金(ろう)を溶かして一種の接着剤として用いる事により、母材自体を溶融させずに複数の部品を接合する方法である。

#### 4.1.1. 炉の種類

接合する母材とろうを暖めるために炉と呼ばれる窯を用いる。ろう付けする際、炉の内部は高温になり、母材やろうが酸化しやすいため、酸素を除去するなどの対策が必要になる。炉には真空

炉、不活性ガス炉、水素ガス炉などがあり、以下それぞれについて説明する。

### 真空炉

真空炉とは真空ポンプを用いて炉の中を高真空の状態にしている炉のことである。炉を暖める場合は内部が真空の為、対流が起こらず、対流が起こる場合より時間がかかり、温度を下げる場合も同様に時間がかかる。

### 不活性ガス炉

不活性ガス炉とは 10-4torr くらいまで炉の内部の真空を引き、その後、窒素やアルゴンなどの不活性ガスで置換した炉のことである。一度真空にしてから、不活性ガスで置換するため、隅々までガスが行き渡る。

### 水素ガス炉

水素ガス炉とは不活性ガス炉と同様に 10-4torr くらいまで真空を引き、その後、水素ガスで置換した炉のことである。水素ガスは還元作用がある為、ろう付けする金属表面の酸化膜などを除去してくれるという利点もある一方、酸素との比率で爆発する可能性もある為、取り扱いには注意が必要である。

#### 4.1.2. ろう付け時の炉の温度調整

ろう付け時の炉の温度調整について説明する。炉の温度を縦軸、時間を横軸にとったグラフをFig. 12 に示す。グラフの形は真空炉でも不活性ガス炉や水素ガス炉でも同じであるが、今回は真空炉の場合を考える。このグラフはろう付けする母材のある一箇所での温度のグラフであり、通常は数箇所の温度を測定しながらろう付けを行う。

グラフに振ってある数字の箇所ごとに、ろう付けする際の炉の温度変化、温度調整について説明する。

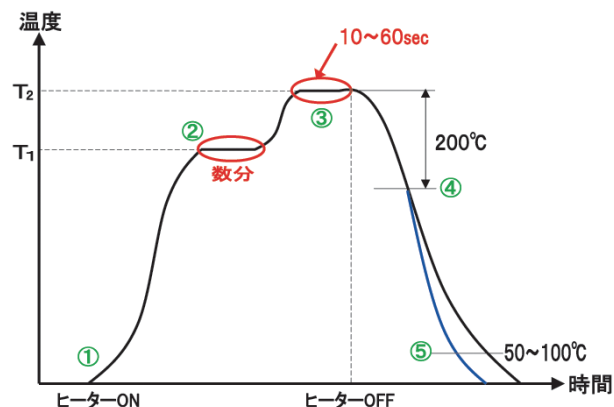


Fig. 12 ろう付け時の炉の温度変化

- (1) ヒーターをつけると exp 的に温度が上がっていく。この時ゆっくり温度を上げていく。
- (2) すべての測定箇所の温度が  $T_1$  になったら数分間温度が一定になるようにヒーターを調整する。この温度  $T_1$  は固相線温度といい、この温度以下の場合、ろうは完全に固体である。なぜこの温度で数分間一定に保つかというと、ろう付けする物体の温度が一様になるようにする為である。その為、物体の形や大きさによって時間は変わってくる。
- (3) すべての測定箇所の温度が  $T_2$  になったら数秒間温度が一定になるようにヒーターを調整する。その後ヒーターを OFF にし、そのままの状態ですぐ温度を下げていく。この温度  $T_2$  は液相線温度といい、この温度以上の場合、ろうは完全に液体である。なぜこの温度で数秒間一定に保った後、ヒーターを OFF にするかというと、この温度ではろうが液体になっている為、あまり長時間一定にしているとろうが流れ出てしまう為である。
- (4)  $T_2 - 200^\circ\text{C}$  付近で液体になっていたろうが固体に戻る。この後、このままの状態ですぐ温度を下がるのを待つ方法と、窒素やアルゴンを炉の中に注入する方法の二通りある。前者は炉の内部が真空で対流がない為、温度が下がりにくい。後者は窒素やアルゴンを注入することで対流が生まれ、温度を早く下げることができる。後者の場合をグラフの青い線で示す。



(5) 50～100℃になったら炉から取り出す。この温度よりも早く出してしまうと、酸化する可能性がある為、注意が必要である。

#### 4.1.3. 母材の洗浄

ろう付けする面が汚れていると母材同士がうまく接合しない場合がある。その為、ろう付けをする前に母材を洗浄する必要がある。特に加速管など、高真空、高温で使用する母材の場合は複数回洗浄する。以下に洗浄を行う順に洗浄方法を説明する。

##### (1) 酸洗

硫酸などの2～5%の溶液で洗う。  
長く洗うと酸化するので注意が必要。

##### (2) 純水洗

純水を用いて洗う。

##### (3) 純水液中で超音波洗浄

超音波を用いることで、細部まで洗うことができる。

##### (4) 純水洗（高温）＋攪拌

鏡面加工の銅などは40℃以下  
SUS（ステンレス）は70℃以下

しかし、このように念入りな洗浄が必要な場合はとても特殊で、一般のろう付けはアクセサリなどに用いられており、その場合はこれほど丁寧に洗浄はしない。その為、ろう付けを依頼する場合は、高真空、高温で使用するものであることを相手に伝える必要がある。

#### 4.1.4. ろうの種類

ろうには銅ろう、金ろう、パラジウムろう、銀ろうなどの種類があり、それぞれワイヤー状、帯状、粒状または粉末状などの形状がある。ろうの種類により固相線温度や液相線温度が異なり、またワイヤー状のろうを用いる場合はろう溝を切る必要がある。Fig. 13 に大まかなろうの種類によるろう付け温度の違い、Fig. 14 にろうの名前と形状、Table 2 には代表的なろうの化学成分、Table

3 には固相線温度、液相線温度、ろう付け温度を示す。

複数回ろう付けをする場合、この温度差を用いてろう付け温度が高いものから先にろう付けをする。


温度	ろうの種類	ろう付け温度(参考)
	Cu (銅ろう)	1090℃
	Au (金ろう)	1040℃
	Pd (パラジウムろう)	900℃
	Ag (銀ろう)	750℃

Fig. 13 ろうの種類によるろう付け温度




名前	形状	ろう溝
線ろう材	ワイヤー 	○
リボンろう材	帯 	×
粉末ろう材	粒 	×

Fig. 14 ろうの形状



Table 2 真空用貴金属ろうの種類と化学成分

種類		化学成分 (mass%)			
記号 A	記号 B	Ag	Au	Cu	その他
BVAg-0	BV-Ag100-961	99.95 以上	-	0.05 以下	-
BVAg-6B	BV-Cu50-780/870	49.0 ~ 51.0	-	残部	-
BVAg-8	BV-Ag72Cu-780	71.0 ~ 73.0	-	残部	-
BVAg-8B	BV-Ag71CuNi-780/795	70.5 ~ 72.5	-	残部	Ni : 0.3 ~ 0.7
BVAg-18	BV-Ag60CuSn-600/720	59.0 ~ 61.0	-	残部	Sn : 9.5 ~ 10.5
BVAg-29	BV-Ag61CuIn-625/710	60.5 ~ 62.5	-	残部	In : 14.0 ~ 15.0
BVAg-30	BV-Ag68CuPb-805/810	67.0 ~ 69.0	-	残部	Pd : 4.5 ~ 5.5
BVAg-31	BV-Ag58CuPd-825/850	57.0 ~ 59.0	-	残部	Pd : 9.5 ~ 10.5
BVAg-32	BV-Ag54PdCu-900/950	53.0 ~ 55.0	-	残部	Ni : 24.5 ~ 25.5
BVAu-1	BV-Cu63Au-990/1015	-	37.0 ~ 38.0	残部	-
BVAu-2	BV-Au80Cu-890	-	79.5 ~ 80.5	残部	-
BVAu-3	BV-Cu62AuNi-975/1030	-	34.5 ~ 35.5	残部	Ni : 2.5 ~ 3.5
BVAu-4	BV-Au82Cu-950	-	81.5 ~ 82.5	-	Ni : 残部
BVAu-11	BV-Cu50Au-955/970	-	49.5 ~ 50.5	残部	-
BVAu-12	BV-Au75CuAg-880/895	12.0 ~ 13.0	74.5 ~ 75.5	残部	-

Table 3 真空用貴金属ろうの種類と温度

種類		温度 (参考) °C		
記号 A	記号 B	固相線	液相線	ろう付温度
BVAg-0	BV-Ag100-961	約 961	約 961	961 ~ 1080
BVAg-6B	BV-Cu50-780/870	約 780	約 870	870 ~ 980
BVAg-8	BV-Ag72Cu-780	約 780	約 780	780 ~ 900
BVAg-8B	BV-Ag71CuNi-780/795	約 780	約 795	795 ~ 900
BVAg-18	BV-Ag60CuSn-600/720	約 600	約 720	720 ~ 840
BVAg-29	BV-Ag61CuIn-625/710	約 625	約 710	710 ~ 790
BVAg-30	BV-Ag68CuPb-805/810	約 805	約 810	810 ~ 930
BVAg-31	BV-Ag58CuPd-825/850	約 825	約 850	850 ~ 890
BVAg-32	BV-Ag54PdCu-900/950	約 900	約 950	950 ~ 990
BVAu-1	BV-Cu63Au-990/1015	約 990	約 1015	1015 ~ 1095
BVAu-2	BV-Au80Cu-890	約 890	約 890	890 ~ 1010
BVAu-3	BV-Cu62AuNi-975/1030	約 975	約 1030	1030 ~ 1090
BVAu-4	BV-Au82Cu-950	約 950	約 950	955 ~ 1005
BVAu-11	BV-Cu50Au-955/970	約 955	約 970	970 ~ 1020
BVAu-12	BV-Au75CuAg-880/895	約 880	約 895	895 ~ 950

#### 4.1.5. ろう溝

带状や粒子状のろうを用いる場合は、接合する箇所へろうを置くだけだが、ワイヤー状の線ろうを用いる場合は、母材へろうが入る大きさの溝を切る必要がある、その溝をろう溝という。ろう溝はろう付けする際の母材の置き方で、溝の切り方が変わる。以下 2 つの場合について説明する。

#### Fig. 15 のように二つのパーツを縦に重ねてろう付けをする場合

ろう溝は経験上パーツ 2 の方に切ったほうが失敗が少ない。ろう溝は Fig. 16 の様に切り、溝はろう材がきちんと収まるようにろう材の直径 + 0.1mm の幅、深さで切る。青く塗りつぶされている箇所がろう溝であり、Fig. 15 は 1mmφ のろう材を用いた場合のろう溝が描かれている。

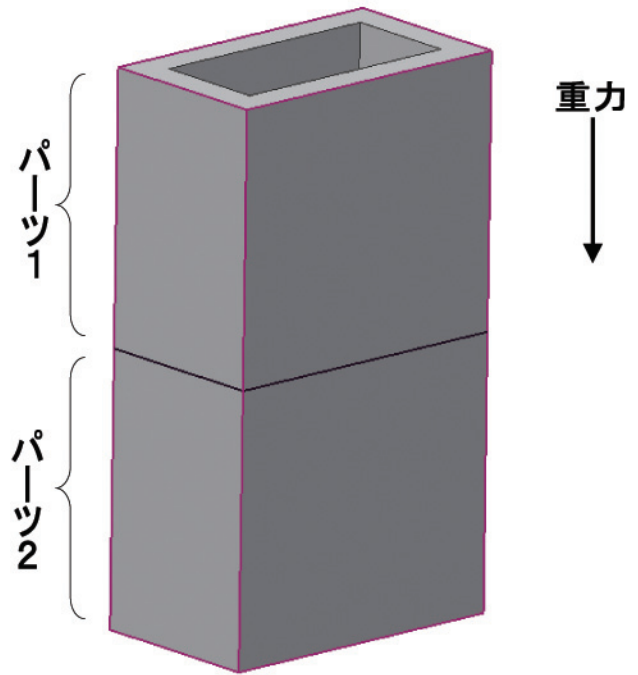


Fig. 15 縦置きの場合

#### Fig. 17 のように二つのパーツを横に重ねてろう付けする場合

ろう溝はパーツ 1、パーツ 2 どちらに切ってもよい。Fig. 16 の様に溝を切ると、重力で上のろうがすべて下に流れてしまい上の部分がろう付けされないということが起こる。その為、Fig. 18 の様に溝を分割することにより、ろうが流れ出てしまうことを防ぐ必要がある。しかし、分割した溝が長すぎると先ほどを同じことが起こる為、注意が必要である。また、Fig. 19 の様に溝の端が揃っていない場合、上の溝から染み出てきたろうが下の溝へ流れ込みにくい為、ろう付けに隙間ができてしまう可能性がある。その為、Fig. 20 の様に溝の端を揃える必要がある。揃えることで、上の溝から染み出てきたろうが下の溝に流れ込み、隙間なくろう付けされる。

今回は矩形のもので説明をしたが、円形のものや他の形のものでも同じように考えることができる。

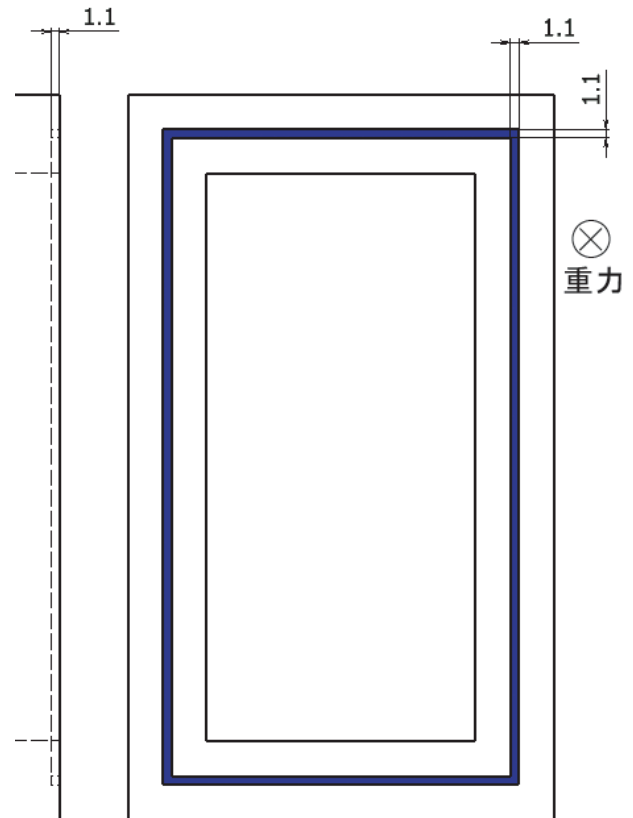


Fig. 16 縦置きの場合のろう溝

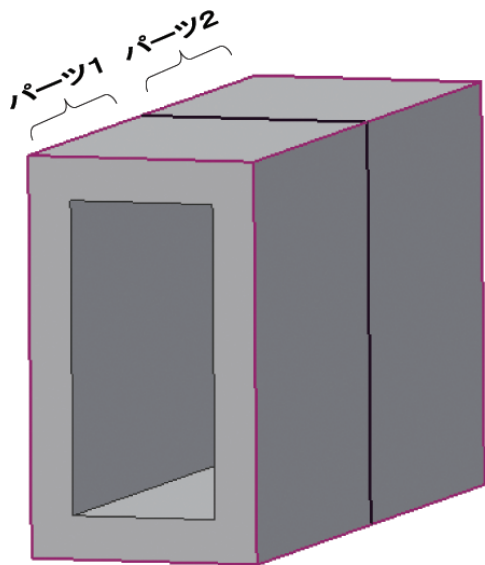
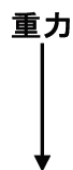


Fig. 17 横置きの場合



重力で上の溝から  
下の溝へろうが流れ込む  
しかし、溝の端が  
合っていない為  
溝と溝の間は  
ろう付けされない  
ろう付けされない  
箇所が出来てしまう。

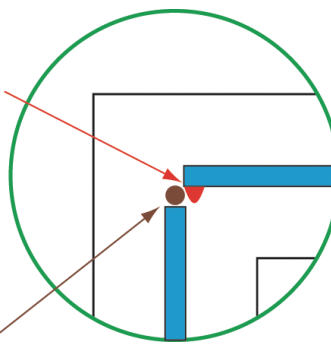


Fig. 19 正しくない溝の切り方

重力で上の溝から  
下の溝へろうが流れ込む  
溝と溝の間が  
ろう付けされる

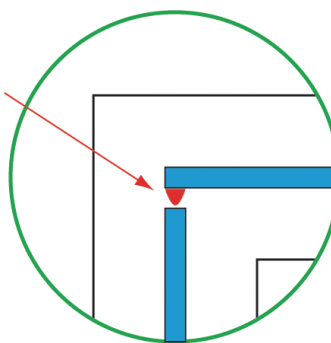


Fig. 20 正しい溝の切り方

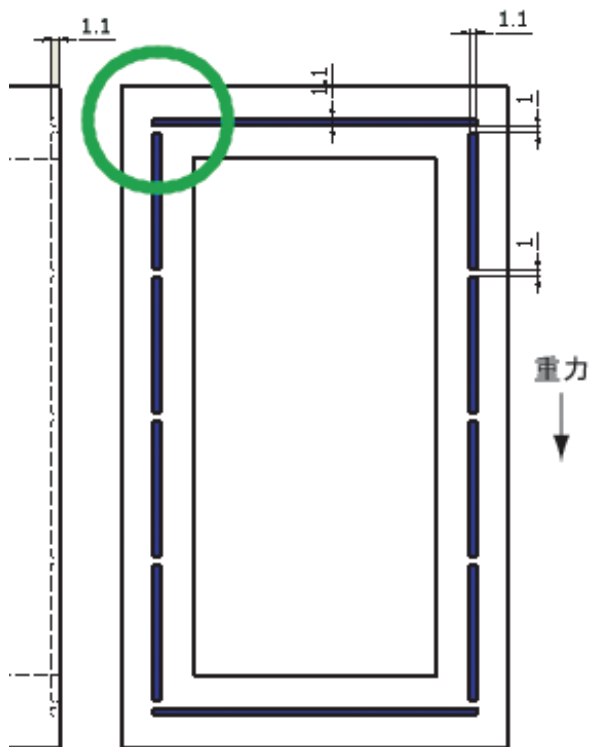


Fig. 18 横置きの場合のろう溝

#### 4.1.6. ろうの動き

炉で温められたろうがどのような動きをするのか説明する。Fig. 15 の1部を横から見た図をFig. 21 のIに示す。

Fig. 21-Iの状態を温度を上げていくと、ろうが溶け始める。また、ろう溝の中にある気体の圧力も上がっていく (Fig. 21-II) ろう溝の中の気体に押され、ろうが母材と母材の間に毛細管現象で進んでいく (Fig. 21-III)。毛細管現象とは細い空間内を、重力や上下左右に関係なく液体が浸透していく現象である。ろうはそのまま母材の端まで進みすこしはみ出た状態で固まる。加速管など高電圧をかける場合はこのろうの引っ張りが原因で放電が起こることがある (Fig. 21-IV)。その為、母材の角をろう材の半径～直径の cut やフィレットをし、ろう材が外に出っ張らないようにする必要がある (Fig. 21-V)。

先の説明は線ろう材の場合であったが、帯状や粉末状のろう材の場合もろう溝からろうが染み

出るという行程以外は線ろう材の場合と同じである。

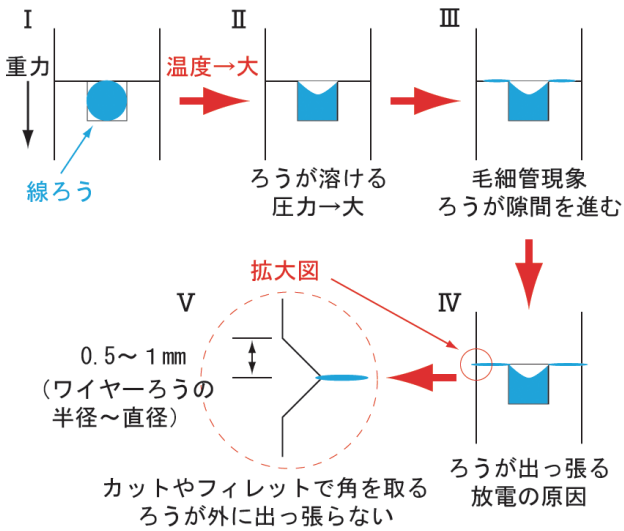


Fig. 21 ろうの動き

## 4.2. TIG 溶接

アーク溶接の一種。融点の非常に高いタングステン棒からアークを出し、その熱で母材を溶かす。アルゴンなどのシールドガスを用いる。溶加材を足すことも可能。精密な溶接に向く。高圧パイプや精密機器の溶接などに使われる。高融点のタングステンを電極にしているため電極自体は減りづらいがアーク熱を発生させるだけで溶着金属を付加するために左手で溶接棒を添加しなければならない。非鉄金属に対する溶接に適応力が広い。

### 4.2.1. 直流TIG溶接法

最も一般的な溶接法で、直流の定電流特性の溶接電源を用いたタングステン電極を陰極に接続してアークを発生させます。直流TIG溶接法は、アルミニウムやマグネシウムなどの活性金属以外のほとんどすべての金属の溶接に適用できます。

### 4.2.2. 交流TIG溶接法

アルミニウムやマグネシウム合金などの溶接では、母材表面の酸化皮膜を除去する必要があるため、母材側を陰極にしてアークのクリーニング作

用を利用する必要があります。しかし母材を陰極にするとタングステン電極は陽極となり、電極側へのアークの入熱量が大きくなるため、電極の消耗が激しくなって実用性に欠けます。この問題を解決したのが交流TIG溶接法で、電極棒マイナス、棒プラスの両極性の特徴を引き出しています。すなわちクリーニング作用を確保しつつ、電極消耗を極力抑えながら溶け込みを、棒マイナス時と棒プラス時の中間の形となって確保できます。

### 4.2.3. パルスTIG溶接法

#### (1) 直流パルスTIG溶接法

直流パルスTIG溶接法は溶接電流を一定周期でパルス状に変化させ、パルス電流が流れている時間に母材を溶融し、ベース電流が流れている時にはその溶融池を冷却凝固させて、周期的にできる溶融スポットを重ね合せながら溶接する方法です。直流パルスを使ったステンレス鋼の溶接は、数珠状のビードになり溶融スポットの重なり部分は溶接速度やパルス周波数によって制御されます。薄板や板厚違いの溶接や、裏波溶接、難姿勢溶接などが容易にできるなどの特徴があります。

#### (2) 交流パルスTIG溶接法

交流パルスTIG溶接法のパルスの原理は直流パルスTIGと同様です。アルミニウムの薄板溶接や裏波溶接、美しいビード外観やTIG溶加棒とタイミングに合わせて溶接ができるなどの特徴があります。

### 4.2.4. TIG溶接の特徴

- 不活性ガスシールドなので、溶接金属への不純物混入が少なく、高品質。
- スパッタの発生がなく、溶接作業が容易。
- あらゆる継手形状に適用でき、かつ溶接姿勢に制限がない。
- 小電流でも安定したアークが得られ、薄板溶接にも適用でき、また裏波溶接がしやすい。

#### 4.2.5. TIG 溶接の欠点

- 人の手で作業を行うため熟練が必要であり比較的難易度が高い。場合によって免許も必要。
- 比較的高価な不活性ガスを大気放出で必要とすること
- 溶接速度が MIG 溶接などの溶極式アーク溶接法に比べて遅いこと
- ガスシールドアーク溶接特有の風の影響を受けやすい

#### 4.3. 電子ビーム溶接

電子ビーム溶接とは、高真空中でフィラメント（陰極）を加熱して、放出した数 100mA 程度の電子を数 10kV 程度の高電圧で加速し、電磁コイル（集束コイル等）で集束し、被溶接部に衝突させ、電子ビームの運動エネルギーを熱エネルギーに変換して溶接する方法です。

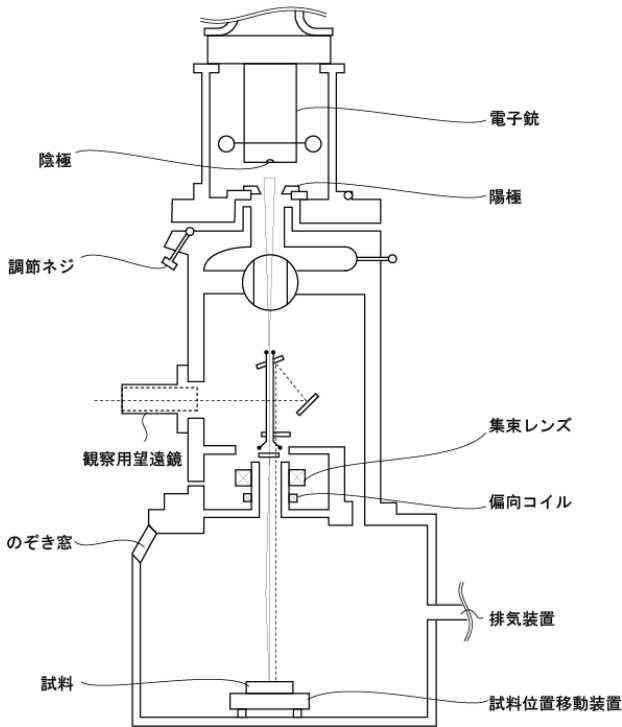


Fig. 22 電子ビーム溶接機概念図

#### 4.3.1. 電子ビーム溶接の特徴

- 高エネルギービーム熱源（TIG 溶接の数千倍）なので、TIG 溶接では接合が難しい銅・アルミニウムなど高熱伝導率の金属の厚板でも予熱なしで溶接可能。また熱伝導を超える熱流入により異種金属の溶接が可能。
- 幅の狭い深溶け込み溶接が可能で、開先を取る必要がなく、突合せだけでよいので、低熱歪で段取りも簡単。
- 厚板から薄板まで欠陥の少ない溶接が可能で、溶接部の結晶粒が小さく、機械的性質に優れ、溶接部の切削も可能。
- 真空中での溶接なので、母材および溶接部の酸化と窒化を抑制し、Nb, Ti, Mg, Al 等活性な金属も容易に溶接が可能。また真空中なのでコンタミネーションも非常に少ない。
- NC 機構が付いているので複雑な溶接線にもならうことができ高信頼性繰り返し生産が可能。

#### 4.3.2. 異種金属の接合

異種金属の接合の良好さは Table 4 のようになっている。例えば超伝導空洞材料の Nb と Ti の溶接性は良好である事が分かる。また異種金属の接合の際注意すべき事としては、熱伝導率の違いにより、溶け込みが違うため、オフセットして電子ビームを打つ必要がある事である。このオフセット量については各社データを持っているようだが、テストピースを一度接合した後、切断して断面の溶け込み状態を確認した方が良い。

Table 4 異種金属の接合の良好さ

	Ag	Al	Au	Be	Cd	Co	Cr	Cu	Fe	Mg	Mn	Mo	Nb	Ni	Pb	Pt	Re	Sn	Ta	Ti	V	W	Zr
Ag		○	◎	×	○	△	○	○	△	×	○	△	▲	○	○	◎	△	○	△	○	△	△	×
Al	○		×	○	×	×	×	○	×	○	×	×	×	×	○	×	▲	○	×	×	×	×	×
Au	◎	×		×	×	○	△	◎	○	×	×	○	▲	◎	×	◎	▲	×	▲	×	△	▲	×
Be	×	○	×		▲	×	×	×	×	×	×	×	×	×	▲	×	×	△	△	×	×	×	×
Cd	○	×	×	▲		△	△	×	△	◎	△	▲	▲	△	○	×	▲	○	▲	×	▲	▲	△
Co	△	×	○	×	△		○	○	○	×	○	×	×	◎	○	◎	◎	×	×	×	×	×	×
Cr	○	×	△	×	△	○		○	○	×	○	◎	×	○	○	○	◎	○	×	◎	△	◎	×
Cu	○	○	◎	×	×	○	○		○	×	◎	△	△	◎	○	◎	△	○	△	×	△	△	×
Fe	△	×	○	×	△	○	○	○		△	○	○	×	○	○	◎	×	×	×	×	◎	×	×
Mg	×	○	×	×	◎	×	×	×	△		×	△	▲	×	×	×	▲	×	▲	△	▲	△	△
Mn	○	×	×	×	△	○	○	◎	○	×		△	×	○	○	×	▲	×	×	×	×	△	×
Mo	△	×	○	×	▲	×	◎	△	○	△	△		◎	×	△	△	×	△	◎	◎	◎	◎	×
Nb	▲	×	▲	×	▲	×	×	△	×	▲	×	◎		×	▲	×	×	×	△	◎	◎	△	◎
Ni	○	×	◎	×	△	◎	○	◎	○	×	○	×	×		○	◎	△	×	×	×	×	×	×
Pb	○	○	×	▲	○	○	○	○	○	×	○	△	▲	○		×	▲	○	○	×	▲	△	×
Pt	◎	×	◎	×	×	◎	○	◎	◎	×	×	△	×	◎	×		○	×	×	×	×	×	×
Re	△	▲	▲	×	▲	◎	◎	△	×	▲	▲	×	×	△	▲	○		△	△	×	△	×	×
Sn	○	○	×	△	○	×	○	○	×	×	×	△	×	×	○	×	△		×	×	×	△	×
Ta	△	×	▲	△	▲	×	×	△	×	▲	×	◎	△	×	○	×	△	×		◎	△	△	×
Ti	○	×	×	×	×	×	◎	×	×	△	×	◎	◎	×	×	×	×	×	◎		◎	○	◎
V	△	×	△	×	▲	×	△	△	◎	▲	×	◎	◎	×	▲	×	△	×	△	◎		△	×
W	△	×	▲	×	▲	×	◎	△	×	△	△	◎	△	×	△	×	×	△	△	○	△		×
Zr	×	×	×	×	△	×	×	×	×	△	×	×	◎	×	×	×	×	×	×	◎	×	×	



#### 4.4. HIP(熱間等方圧加圧法/Hot Isostatic Pressing)による拡散接合

表面を非常に平滑にすれば重さと温度だけで拡散接合が可能であり、超精密加工で製作された X バンドの加速管などでは従来行われてきた。しかしこの方法は通常加工の平面度や平滑度では使えない。

HIP はアルゴンなどの不活性ガスを圧力媒体とし、通常 100MPa 以上の圧力と 1000°C 以上の温度との相乗効果を利用して加圧処理する技術です。HIP は、高い等方圧力（あらゆる方向から均等に加わる圧力）と高温の相乗効果を利用する原理的に優れた方法であり、粉末の加圧焼結、鋳造品、焼結品の内部欠陥除去、拡散接合などに利用する事ができる。

異種材料の接合をする際には、全体を缶に入れ、内部を真空に引きながら、HIP を行う事で、接合が可能である。これにより数  $\mu\text{m}$  の拡散層が得られ、混合率によって脆くなるような金属同士でない限り、強固な接合が可能である。従って、HIP で接合した塊は接合後に機械加工を行う事も可能である。

#### 4.5. その他

摩擦圧接など新しい接合技術も開発されている。

### 5. 低電力測定

#### 5.1. DBM の仕組み

低電力測定に必須なのがダブルバランスドミキサ(DBM)です。パッシブな DBM はダイオードで構成されており、ダイオードの I-V 特性は

$$I_s(V_s) = I_T \left( e^{\frac{V_s}{\eta V_T}} - 1 \right) \approx I_F e^{\frac{V_s - V_F}{\eta V_T}} \quad (5-1)$$

$$V_T = \frac{kT}{e} = 0.0257 \text{ [V @ 25°C]}$$

ここで

$I_s$ : ダイオードの飽和電流

$V_s$ : PN 接合への印加電圧

$\eta$ : 1~2 の定数

k: ボルツマン定数

T: 温度

である。

DBM には  $V_F$  が低い事が望まれるため、片側を金属にしてショットキ障壁で  $V_F$  を下げた、ショットキーバリアダイオードが用いられている。例えば超高速スイッチングダイオード 1S1588 では  $V_F=0.7 \text{ V @ } I_s=1\text{mA}$  だが、ミキサー用ショットキーバリアダイオードである 1SS315 では、 $V_F=0.25 \text{ V @ } I_s=1\text{mA}$  となっている。

ダイオードに以下のように RF と LO から入力された高周波の和を印加すると  $V_s$  は以下のようになる。

$$V_s = V_{RF} \sin(\omega_{RF} t) + V_{LO} \sin(\omega_{LO} t) \quad (5-2)$$

$$= \eta V_T (v_{RF} \sin(\omega_{RF} t) + v_{LO} \sin(\omega_{LO} t))$$

これを式(5-1)に代入し、2 次の項までテイラー展開すると、

$$i_s = \frac{I_s}{I_T} = v_{RF} \sin(\omega_{RF} t) + v_{LO} \sin(\omega_{LO} t) + \frac{1}{2} \left( v_{RF}^2 \frac{1 - \cos(2\omega_{RF} t)}{2} + v_{RF} v_{LO} (\cos((\omega_{RF} - \omega_{LO}) t) - \cos(\omega_{RF} + \omega_{LO} t)) + v_{LO}^2 \frac{1 - \cos(2\omega_{LO} t)}{2} \right) \quad (5-3)$$

これにより、差と和の項を含んでいる事が分かりミキサー用の素子として利用できる。実際には 3 次以上の項もあり、 $\omega = m\omega_{RF} + n\omega_{LO}$  の電流出力が含まれる。

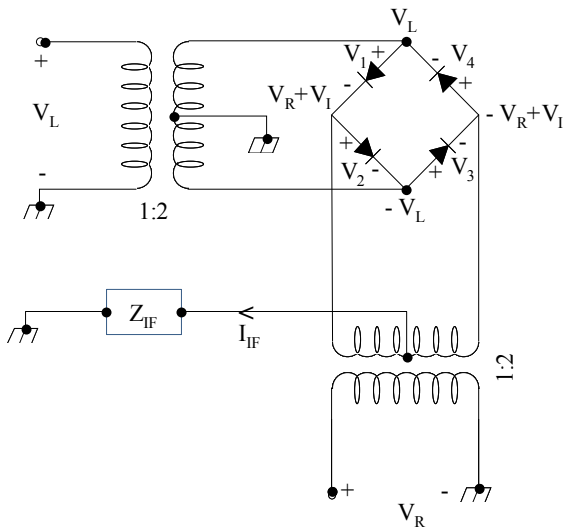


Fig. 23 DBM の回路の 1 例

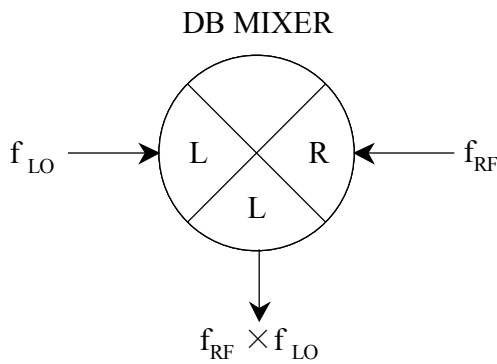


Fig. 24 DBM の概略記号

このダイオードの性質を利用して、ダイオード 4 つを使い Fig. 23 のような回路を構成する。例えば  $V_L, V_R$  が入力で  $IF$  を出力とした場合、 $V_L=$  正、 $V_R=$  正の時  $V_2$  が ON になり、式(5-3)のような電流が流れる事になり、 $IF$  に和と差周波数の出力が得られる。一般的に  $LO$  と  $RF$  が高周波側、 $LO$  が低周波側となっているため、フィルターを通す事により  $IF$  に差周波数の情報が得られ、ダウンコンバーターとして利用できる。逆に  $LO$  と  $IF$  を入力として  $RF$  を出力とした場合、和周波数の出力が得られ、アップコンバーターや  $RF$  スイッチとして利用できる。

## 5.2. 周波数ドメイン (ベクトルネットワークアナライザー)

周波数ドメインでの測定は、昔はスリット付きの導波管を用いて定在波比の測定などによっていたが、現在はベクトルネットワークアナライザーを用いて行う。ベクトルネットワークアナライザーは周波数を掃引した高周波をポートから測定物に送り、反射と透過の信号の強さと位相を測ることにより、 $S$ -パラメーターを測定し、入射した周波数に対する測定物の特性を測定するものである。広帯域のベクトルネットワークアナライザーは一般的には狭帯域  $IF$  検波という方法により実現されており、内部は Fig. 25 のような構成になっている。

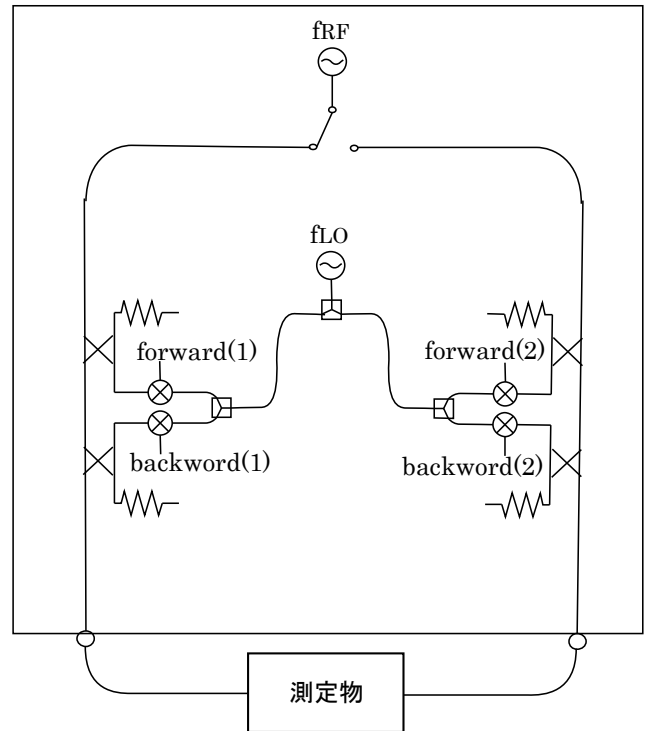


Fig. 25 ベクトルネットワークアナライザーの概念図

ネットワークアナライザーで被測定物の測定を行う際、高い  $Q$  値の空洞の共振周波数を測るだけであれば、同軸ケーブルの先端を切断し加工したアンテナなどを用いれば良い。しかし、反射率や透過率などを測る際には、ネットワークアナライザーの校正が必要である。

### ネットワークアナライザの校正

伝送線路は、伝送線路自体の損失や、コネクタによる変換、また導波管などへの変換による、損失や反射がある。これらは本当に測定したい反射や透過係数に被さった形で、測定されてしまう。そこで、ネットワークアナライザには真の測定値を得るために、伝送線路を無反射終端と、透過、位相を変えた2つの短絡を用いて、校正を行う機能が備わっている。一般的に校正を行う際には

無反射終端 (load)

透過 (thru)

短絡1 (例えば 1/8 short)

短絡2 (例えば 3/8 short)

を使用し、伝送線路終端での無反射終端を、真の0点に、短絡をスミスチャート上での半径1の円に変換する事で、真の測定値を得られる。

### 5.3. タイムドメイン

周波数ドメインでの測定とタイムドメインでの測定には常にフーリエ変換の関係が成り立つため、一般にはタイムドメインでの測定は必要無い。そもそも加速器ではタイムドメインな使用をする際の特性を予測するために、簡単に正確な測定が可能な周波数ドメインの量をターゲットとして設計を行っていると言って良いだろう。その過程には物理量の変換があるわけで、例えば結合度  $k$  の定在波、進行波での違いなど、変換で係数を間違える事もあるだろう。

そこで設計した物理量が本当に正しいかどうかを間違いなく確認するためには、低電力でタイムドメインの測定を行うのが良いだろう。

#### DBM を使ったタイムドメイン測定

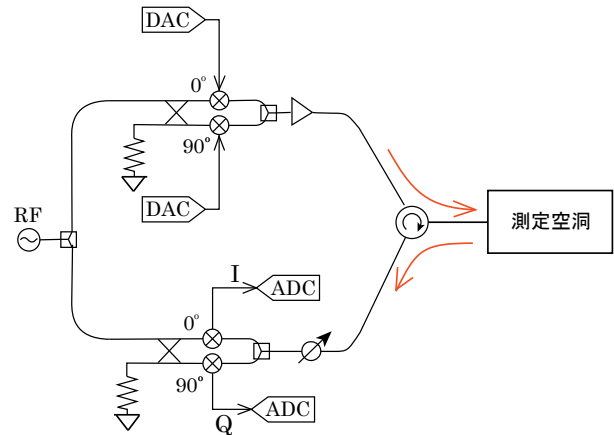


Fig. 26 タイムドメイン測定の例

### 5.4. Slater の摂動理論による電場の測定

空洞に小型の誘電体や導体球などの摂動体( $V_\delta$ )を入れた場合の共振周波数のずれは、以下の Slater の摂動式で表せる。

$$\begin{aligned} \frac{f^2}{f_0^2} &= 1 + \kappa \frac{\int_{V_\delta} (\mu H^2 - \epsilon E^2) dV_\delta}{\int_V (\mu H^2 + \epsilon E^2) dV} \\ &= 1 + \frac{\kappa}{2W} \int_{V_\delta} (\mu H^2 - \epsilon E^2) dV_\delta \end{aligned} \quad (5-4)$$

ここで  $\kappa$  は摂動体の形によって決まる定数であり、空洞内部のエネルギーを  $W$  とした。摂動が小さく、加速管のようにビームが走行する中心部に限定すれば磁場は小さいので無視でき、

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{f - f_0}{f_0} \approx \frac{f^2 - f_0^2}{2f_0^2} \\ &\approx \frac{-\kappa \epsilon E^2 V_\delta}{4W} \end{aligned} \quad (5-5)$$

となる。つまり摂導体を動かしながら、共振周波数の変化を測定すれば、電場の分布を知る事ができる。

### 5.5. 空洞の固有モードの測定

シミュレーションによる計算の確認などのために、空洞内部の固有モードの周波数だけが知りたい事が良くある。このためには同軸ケーブルを切

断して、内導体の先端を直線、L型、ループ型などのアンテナにし、空洞共振周波数に与えない程度の結合で、小さい穴から挿入し、ネットワークアナライザーで測定する事で、固有モードの周波数が測定できる。またアンテナの先端の向きによる結合を考慮する事によりおよそのモードも推定できる。

## 5.6. 雰囲気・温度補正

共振周波数の測定は一般に窒素雰囲気の室温で行われるが、実際の運転状態での共振周波数に補正を行う必要がある。補正項目としては

- 窒素の誘電率は 1.000547
- 物温から、実際の使用温度への熱膨張係数の積分
- 真空にする事による変形
- フランジを閉めた事による変形

があり、常伝導ではQ値内にほぼ正確に補正できるが、超伝導ではこれらを見込むのが難しく試験が必要である。

## 6. 大電力での試験

低電力での試験との違いは

- 耐圧が必要になるため、伝送路に導波管を使用する必要がある事。また伝送電力によって超高真空・加圧ガス・乾燥窒素などを適切に選ぶ必要がある事。
- 電子ビームを通す部分は少なくとも超高真空にする必要がある事。
- 高電圧によりマルチパクタ・絶縁破壊などの放電が起きる。またこの放電により破壊させずにエージングをさせて伝送電力を徐々に上げていく要領が、経験による勘所に頼る部分が多い事。
- 超高真空や加圧ガスを破らずに切り離せる構造にするためにはセラミックの真空窓等が必要である事
- 発熱による共振周波数や位相のずれ、超伝導の破れが生じる事

- 冷却による振動や腐食等がある事
- 放電などが原因で真空度の悪化などによる装置のインターロックが必要であり、休止時間をその都度設ける必要がある事
- 電圧の高い箇所から放射線が出る事があり、途中放射線の検査が必要である事。
- 大電力試験時は原因の箇所の特定が難しく、放射線や、放電音の分析が異常個所の特定をする手段である事。
- サーキュレーター等では磁場の B-H 特性により伝送特性が違う事
- 導波管の伝送電力を測定するには、ベータホールカプラー等の方向性結合器が必要になる。

なお、大電力試験に必要な導波管の規格や、高周波コンポーネントである 3dB ハイブリッド、サーキュレーターなどのコンポーネントは[1]に詳しく書いてあるので、それを参照して頂きたい。

## 参考文献

- [1] 福田茂樹、「高周波電力源の考え方とその設計」、OHO'06 高エネルギー加速器セミナー、(財)高エネルギー加速器科学研究奨励会 2006
- [2] J.C.Slater, Microwave Electronics
- [3] A.H.メレカ著、寺井清訳、「電子ビーム溶接：原理と実際」、産報