

高周波加速の基礎

1 主な加速器の構造とその原理

まず最初に、主な加速器の構造とその原理について、今回のセミナーのテーマである医療応用と合わせて整理しておく (医療応用については文献 [1] を参考にさせて頂いた)。

1.1 サイクロトロン

質量 m 、電荷 e の荷電粒子が速度 v で磁束密度 B の中を進むとき、受けるローレンツ力の大きさは、

$$F = evB \quad (1)$$

である。軌道半径を r とすると、ローレンツ力と遠心力のつりあいから、

$$\begin{aligned} m \frac{v^2}{r} &= evB \\ v &= \frac{erB}{m} \end{aligned} \quad (2)$$

となる。粒子が半径 r の円軌道を一周するのにかかる時間は

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{eB} \quad (3)$$

となり時間に依らず一定である。サイクロトロンは、この一定磁場内を周回する粒子が $v \ll c$ (質量 m が一定) であるときは、その速度に依らず一定の周波数で周回する原理を用いた加速器である。周回周波数 f は T の逆数で

$$f = \frac{1}{T} = \frac{eB}{2\pi m} \quad (4)$$

となり、サイクロトロン周波数と呼ばれる。図 1 にサイクロトロンの構造を示す。この周波数に同期した電場を電極に加える (空洞共振器を励振することによって粒子を加速する)。

PET (positron emission tomography) 用の放射性同位元素を作るために、10 から 20 MeV の陽子及び重陽子が用いられる。これらの加速には小型のサイクロトロンが用いられている。

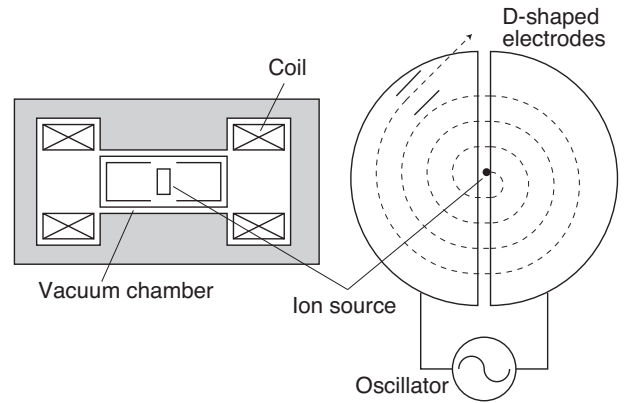


図 1: サイクロトロンの構造。

1.2 シンクロトロン

図 2 にシンクロトロンの基本構成を示す。シン

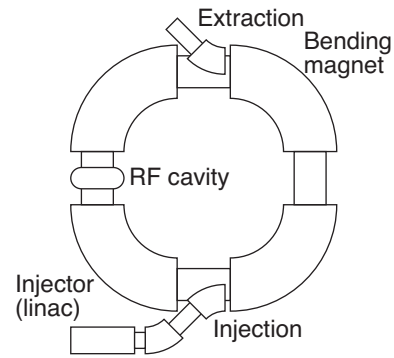


図 2: シンクロトロンの基本構成。

クロトロンは円形の加速器で、軌道半径を一定に保ちながら加速する装置である。従って、磁場は粒子のエネルギーの増加に応じて強くしてゆき、加速に用いる高周波の周波数も粒子の周回周波数に同期させるように増加させる。それぞれの変化は、粒子の運動量が時間 t の関数として $p(t)$ と表せ、軌道半径 r_0 を周回するものとする、式 (2) から磁束密度 B は

$$B = \frac{p(t)}{er_0} \quad (5)$$

となる。また、式 (4) より周回周波数 f_{rf} は

$$f_{rf} = \frac{eB(t)}{2\pi m(t)}$$

$$= \frac{f_0 pc}{\sqrt{(pc)^2 + (m_0 c^2)^2}} \quad (6)$$

となる。ここで $f_0 = c/2\pi r_0$ とした。

粒子線治療では、陽子の場合約 200 MeV、炭素の場合核子あたり 300 から 400 MeV のエネルギーが要求される。従って、このエネルギーまでこれらの粒子を加速させるための装置として、シンクロトロンが用いられている。

1.3 リニアック

粒子を直線に沿って加速する加速器を線形加速器 (liner accelerator) またはリニアックという。リニアックにも様々な種類があるが、電子の加速にはディスクロード型リニアックが良く用いられる (図 3 左)。これは加速管内を進む電磁波の速度 (位相速度) が電子の進む速度 (光速) と一致させ、常に電子の周りに電場が生じるようにすることで電子を加速するものである。

陽子 (イオン) の加速には、粒子のエネルギーに応じて、高周波四重極リニアック (radio frequency quadruple linac: RFQ)、アルバレ型リニアック (図 3 右)、結合空洞型リニアックなどが使い分けられている。これらはいずれも加速管内に励振された定在波でイオンを加速するものである。

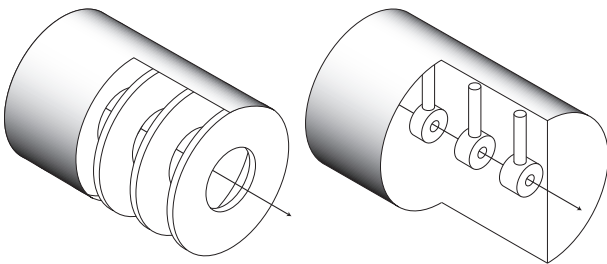


図 3: (左) ディスクロード型、(右) アルバレ型リニアック。

医療照射に用いる X 線発生源として多数の電子リニアックが用いられている。また陽子および重粒子線照射用シンクロトロンの入射器として、RFQ、アルバレ型リニアックが用いられている。

ここまで示した円形および線形の加速器では、いずれも導体の壁に囲まれた空洞共振器 (高周波加速空洞) を励振し、高周波 (電場) を用いて粒子を加速する。しかし、それぞれの空洞に要求される特性 (電極または加速ギャップなどの物理的形狀および共振周波数などの高周波特性) によって、加速空洞の構造はさまざまである。本講義では、これらの加速器の中でもリニアックに用いられる高周波加速空洞に的を絞って、次節以降、順次解説を述べる。

2 電磁気学の復習

高周波加速に用いる電磁場の振る舞いを理解するため、Maxwell 方程式に至る電磁気学の基本をおさらいしておく [2, 3]。

2.1 Maxwell 方程式

まずファラデーの電磁誘導の法則を図4に示す。

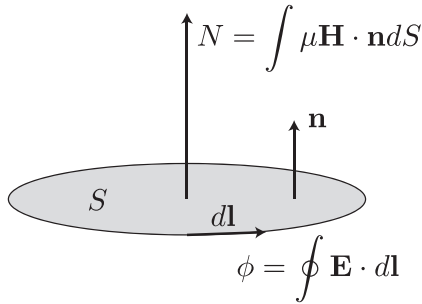


図 4: ファラデーの電磁誘導の法則。閉曲面 (コイル) によりきられる磁束 (閉曲面の法線方向成分) の時間変化するとき、閉回路 (コイル) にはその磁束変化を妨げる方向に起電力が生じる。

実験結果に対応する法則は、まず遠隔作用 (物体間の作用を媒介する物がなく、直接物体間に力が働く) の観点から

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \quad (7)$$

と表される。これに対して、これから扱う電磁場という場の考え方は、近接作用 (真空のゆがみを媒介として作用が伝わる) の観点に立つものである。よって、この考えかたにより相応しい形として、線積分 l と面積 S の微小極限をとった形 (微分形) に法則を書き直す。

ここで、ベクトル場の回転 (rot) はベクトル場の線積分 l と渦の面積 S の比の微小極限で定義することができる¹(図5参照)。

¹通常はベクトルの外積として $\text{rot } \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E}$ で定義される。その後ストークスの定理を用いてこれ以降の式変形が導かれるが、rot のイメージを説明するためこの定義を用いた。

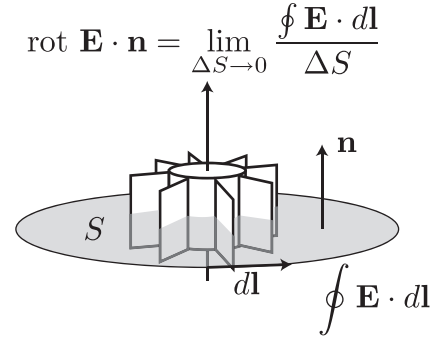


図 5: ベクトル場の回転 (rot)。ベクトル場 $\mathbf{E}$ を水の流れて考えると、 $\text{rot } \mathbf{E}$ は水面に差し込んだ水車の回転に相当する [4]。回転 (rot) はこの線積分 l と渦の面積 S を限りなく小さくしたものと考えられる。ここで正の法線方向は右ネジの進行方向である。

よって、式 (7) は、

$$\begin{aligned} \oint \text{rot } \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS &= - \int \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \end{aligned} \quad (8)$$

つまり、電磁場 (近接作用の観点) では、空間中の磁場 $\mathbf{H}$ が変化すると、その周囲に式 (8) で表される電場 $\mathbf{E}$ が発生すると考える。

次にガウスの法則を図6に示す。

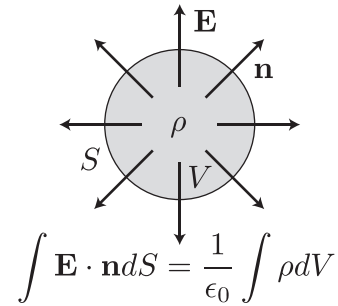


図 6: ガウスの法則。閉曲面をつらぬく電場の面積分は、(内部の電荷)/ ϵ_0 である。

ここで、ベクトル場の発散 (div) はベクトル場の面積分 S と内部の体積 V の比の微小極限で定義することができる (図7参照)。

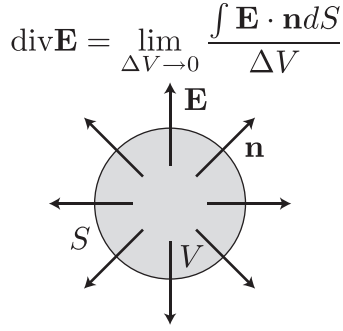


図 7: ベクトル場の発散 (div)。ベクトル場 $\mathbf{E}$ を水の流れて考えると、 $\text{div} \mathbf{E}$ は水の湧き出しに相当する。

よってガウスの法則は、

$$\begin{aligned} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS &= \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV \\ \text{div} \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (9)$$

と書き直すことができる。

次に同様にアンペールの法則を考える (図 8 参照)。

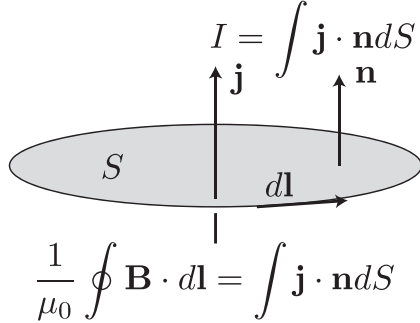


図 8: アンペールの法則。閉曲線に沿った磁場の線積分は、閉曲面をつらぬく電流 (の法線方向成分) の面積分に等しい。

実験結果に対応する法則は、

$$\frac{1}{\mu_0} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS$$

と表される。図 5 で示したように、線積分 l と面積 S の微小極限をとり、 rot を導入すると、

$$\frac{1}{\mu_0} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \oint \text{rot} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS \\ \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= \mathbf{j} \end{aligned} \quad (10)$$

と微分形に書き直すことができる。

ここで図 8 の電流の部分、平行平板コンデンサーで置き換えた場合を考察する (図 9 参照)。

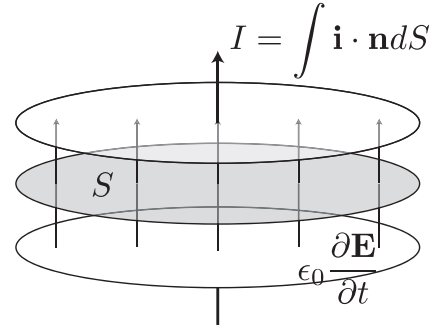


図 9: 変位電流。電流の流れと電場の変化

この導出はコンデンサーの極板における電荷保存則

$$\text{div} \mathbf{i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (11)$$

より、ガウスの法則 $\text{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ を代入すると、

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{i} &= -\frac{\partial}{\partial t} \epsilon_0 \text{div} \mathbf{E} \\ &= -\epsilon_0 \text{div} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \mathbf{i} &= -\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (12)$$

を得る (±の符号は極板から遠ざかる方向が正となる点に注意)。よって電流 i と電場の変化 $\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ が式 (10) の右辺において等価であることがわかる。

従って、式 (10) は

$$\frac{1}{\mu_0} \text{rot} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (13)$$

となる。つまり、電磁場では、電流 (密度) $\mathbf{j}$ が存在する場合だけでなく、空間中の電場 $\mathbf{E}$ が変化すると、その周囲に式 (13) で表される磁場 $\mathbf{B}$ が発生すると考えられる。

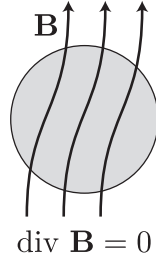


図 10: 磁場 $\mathbf{B}$ には湧き出しがない。

最後に、磁場には湧き出しがない (図 10 参照)。これを $\text{div } \mathbf{B} = 0$ で表す。

ここまでの結果をまとめると、電磁場は以下のマクスウェル方程式を用いて記述される。

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (14)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (15)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (16)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (17)$$

それぞれ、式 (14) はファラデーの電磁誘導の法則、式 (15) はアンペールの法則、式 (16) はガウスの法則を表しており、式 (17) は磁場に湧き出しがないことを意味している。

2.2 電磁波の伝搬と導波管内の電磁場

マクスウェル方程式の式 (14)、(15) により、電磁場が空間を伝播していく状況 (電磁波が進んでいく様子) を図 11、12 に示す。空間を伝播していく平面波では、電場 $\mathbf{E}$ と磁場 $\mathbf{B}$ は電磁波の進行方向に対して垂直な成分しかもたないので、TEM 波 (transverse electric and magnetic wave) とよばれる。

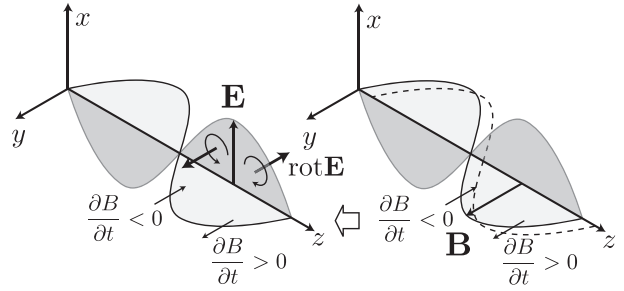


図 11: 平面波の伝搬 1。ファラデーの電磁誘導の法則によって、磁場 $\mathbf{B}$ の時間変化から電場 $\mathbf{E}$ が生じる [4]。

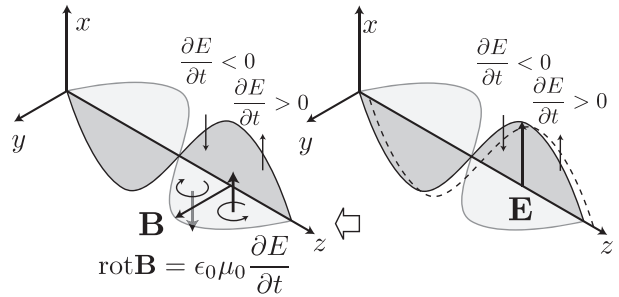


図 12: 平面波の伝搬 2。アンペールの法則によって、電場 $\mathbf{E}$ の時間変化から電場 $\mathbf{B}$ が生じる。ここで係数 $\epsilon_0 \mu_0$ が現れ、電磁場の伝搬速度 $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ を与える。

またここでポインティングベクトル $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ を考えると、 $\mathbf{E}$ の単位 V/m と、 $\mathbf{H}$ の単位 A/m から、 $\mathbf{S}$ は W/m^2 の次元を持ち、単位面積を単位時間あたりに通過するエネルギーの大きさを表している。

ここまでの電磁気学の基礎知識を前提に、加速器でどのように電磁波が使われているかを考えてみる。加速器では高周波源（クライストロンなど）で発生させた電磁波を、導波管もしくは同軸管を用いて加速空洞まで伝搬させる。導波管は電磁波を導体で囲んで閉じ込めたものと考えることができる。図 13 に、平面波（図 11、12）から同軸管、方形導波管および円形導波管への変化を示す（キャプション中にそれぞれの導波管内の電磁場についての解説を述べた）。

次にこの電磁場を用いてビームを加速することを考えてみる。加速空洞では電場でビームを加速するため、導波管の長手方向、つまり電磁波の進行方向に電場があるようなモードの方が都合が良い。そこで TE 波ではなく TM 波が用いられる。また断面形状として損失の少ない円形断面を用いる（定在波では特に重要）。円形であれば旋盤加工が可能であり、空洞の製作上も都合が良い。導波管と同様に進行波を用いて粒子の加速を行う加速管を進行波形加速管という。

さらに円形導波管において、電磁波の進行方向（ z 方向）の前後を導体壁で覆い短絡すると、電磁波は導体壁で反射され、定在波が生じる。この定在波を用いて粒子の加速を行う加速管を定在波型加速管という。円形導波管の基本モード（最も低い周波数のモード）は TE₁₁ モードである。しかし、このような円筒共振器において z 方向の長さを円筒の直径に比べて小さくとると、最低次のモードが TM₀₁ モードとなり、運転周波数 (TM₀₁) より低いモードの励起を考慮しなくてよいため、ビーム加速に都合が良い空洞共振器ができる。このような円筒共振器はピルボックス型空洞と呼ばれ、加速空洞の基本となる構造である。次節以降、ピルボックス型空洞を例に、加速空洞の基本的なパラメータについて述べる。

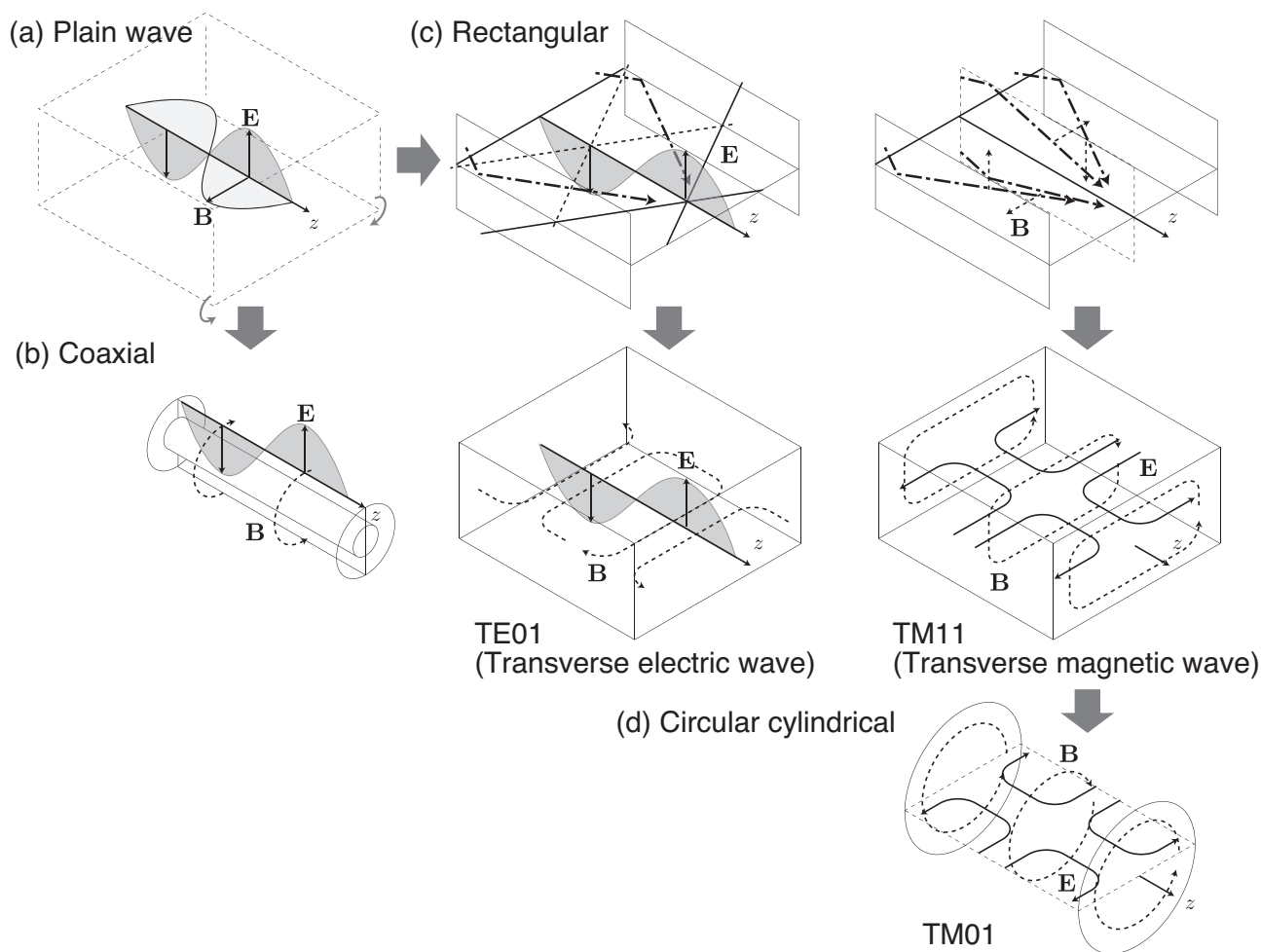


図 13: 同軸管、方形導波管、円形導波管中の電磁場。作図では導波管の外形の一部を表す点線を除き、実線は $\mathbf{E}$ 、点線は $\mathbf{B}$ 、一点鎖線は $\mathbf{S}$ を示す。(a) 平面波の上下 (E 面) に導体を設置しても電磁場の様子に変化はない。(b) 上下の導体をぐるっと巻くと同軸管になる (TEM 波)。(c) 左右の面を導体で覆うと、左右の面に沿って $\mathbf{E} = 0$ となる境界条件を満たすため平面波は斜行して反射しながら進む。左右の壁から反射された平面波が重ね合わさった結果、磁場は破線で示すように渦を巻く (TE 波となる)。同様に上下左右の壁で反射して磁場が進行方向に対して直角となる成分しか持たない場合は TM 波となる (同様に TE 波も成立可能で縮退している)。(d) 方形導波管の TM11 モードを円形導波管に変形すると、加速空洞で用いられる TM01 モードと考えることが出来る。いずれも導波管の中では平面波が壁面を反射しながら進んでいる (注: 上図で (a) の平面波の波長に対して TE01 は正しく作図したが、TM11, TM01 の管内波長は正しくない。電磁場のパターンのみを参照されたい)。これら導波管の中を進んでいく電磁場は進行波と呼ばれる。

3 ピルボックス空洞

ピルボックス空洞を例にとり、加速空洞の基本的なパラメータについて述べる。図14にピルボックス型空洞内の電場と磁場を示す²。ピルボックス型空洞では z 方向の前後で電磁波は反射され、空洞内には定在波が生じる。電磁波は導波管内の進行波とは異なり、電場と磁場が時間的に入れ替わって振動する点に注意されたい。ピルボックス型空洞は定在波型加速管の最も単純な例である。

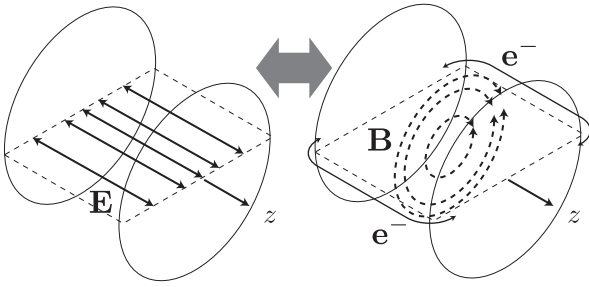


図 14: ピルボックス空洞内の電場 $\mathbf{E}$ と磁場 $\mathbf{B}$ 。時間的に電場と磁場が入れ替わる。 e^- は電子 (壁面電流) の動きを示したものの。

図14の右側にも示すように磁場 $\mathbf{B}$ が生じているときには、空洞内壁に沿って電流が流れる。つまり導体内を電流が流れるため損失 P_{wall} が発生する。加速空洞としては、空洞に電力を投入した際、ビーム軸上にどれだけの加速電圧 V が生じるかが重要である。ビームが無い場合には空洞に投入した電力はすべて空洞内壁の損失 P_{wall} となる。そこで投入電力 $P(= P_{wall})$ に対して、どれだけの加速電圧 V が生じるかを示す値としてシャントインピーダンス R_{sh} を

$$R_{sh} = \frac{V^2}{P} \quad (18)$$

と定義する。これはオームの法則に従うもので、電圧を (V)、電力を (W) とするとシャントイン

²ここでは Maxwell 方程式からの円形導波管 (ピルボックス型空洞) の固有モードについての数学的な導出は省略した。等価回路を含めたピルボックス空洞および多セル空洞については文献 [5] または [6] に詳しい。

ピーダンス R_{sh} は抵抗 (Ω) の次元をもつ。実用的には R_{sh} は製作された空洞で決まる値であるから、 $P = V^2/R$ として、投入電力の平方根が電圧になる (電力2倍なら電圧は $\sqrt{2}$ 倍) ことを覚えておくと良い。

加速空洞において、単位長さあたりの加速電場、つまり空洞の長さを L したときの加速勾配 $E_0 = V/L$ (V/m) は、単位長さでどれだけビームを加速出来るかを表す上で重要なパラメータである。そこで式 (18) を単位長さあたりの量で表すと、単位長さあたりのシャントインピーダンス $Z_{sh} = R_{sh}/L$ は

$$\begin{aligned} Z_{sh} &= \frac{V^2}{PL} \\ &= \frac{E_0^2}{P/L} \end{aligned} \quad (19)$$

と書き直すことが出来る。ここで Z_{sh} は (Ω/m) の次元をもつ。加速空洞で単にシャントインピーダンスという場合でも、こちらの単位長さあたりの値を意味する場合も多いので単位に気をつけると良いだろう。

ここでシャントインピーダンスと周波数 ω の関係について記しておく。まずピルボックス空洞の半径を b とすると、軸方向の電界 E_0 は壁面電流を半径 b で割ったものに比例する。

$$E_0 \propto \frac{i}{b} \quad (20)$$

一方、単位長さあたり空洞内壁の損失 P/L は、壁面電流 i の二乗と単位長さあたりの壁面抵抗 R の積に比例する。

$$P/L \propto i^2 R \quad (21)$$

ここで壁面抵抗 R は、壁面材料の電気抵抗率 $\rho(\Omega \cdot m)$ 、表皮深さ

$$\delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\omega\mu}} \quad (22)$$

(ここで μ は透磁率) を用いて、

$$R = \frac{\rho}{2\pi b\delta} \quad (23)$$

と書ける。また半径 b は周波数 ω に反比例する ($b \propto \omega^{-1}$) ことから、式 (19) から (22) までの式を用いて、最終的に

$$Z_{sh} \propto \sqrt{\omega} \quad (24)$$

という関係を得る。つまりシャントインピーダンスの点からみると周波数は出来るだけ高い方が良いことがわかる。

次に損失 P_{wall} に対して、電磁場の全エネルギー (stored energy) U と角振動数 ω の積との比、

$$Q_0 = \frac{\omega U}{P_{wall}} \quad (25)$$

を Q 値と呼ぶ。ここでは空洞内壁の損失 P_{wall} だけを考慮しているので、特に内部 Q 値と呼び Q_0 で表される。損失の少ない空洞、つまり Q_0 の値が大きい空洞はエネルギー効率が良いと言える。通常、常伝導空洞では空洞内壁の損失 P_{wall} を小さくするため、空洞の材質として電気伝導率の良い銅 (または銅メッキ³) を用いる。 Q_0 を劣化させない銅の加工や表面処理が空洞製作上重要となる。

式 (18)、(25) から P を消去すると、

$$\frac{R_{sh}}{Q_0} = \frac{V^2}{\omega U} \quad (26)$$

となる。この値 (R/Q) は空洞の材質に依存せず、空洞の形のみで決まる。つまり空洞の形で決まる加速効率を表している。また、右辺が示すビーム軸上電場と蓄積エネルギーの比は、ビーズ法などを用いて測定することができる。実用的には、空洞製作後に設計通りに空洞が製作できたかどうかを判断する指標となる。

ここまでは空洞側の高周波的なパラメータであった。次にビームとのタイミングに関するパラメータについて説明する。図 15 にリニアックに

おけるビームの位相安定性を示す。電子リニアックの場合。速度はほぼ光速で位相振動がないため、振幅最大となる位相 $\phi = 0$ を用いる。一方、陽子リニアックでは、電場が時間的に増加する側に同期位相をとる。これにより時間的に早い粒子は受ける電場が小さいため遅れ、一方、時間的に遅れてきた粒子は平衡点にある粒子よりも加速されるため、結果的に平衡点に近づく。同期位相を

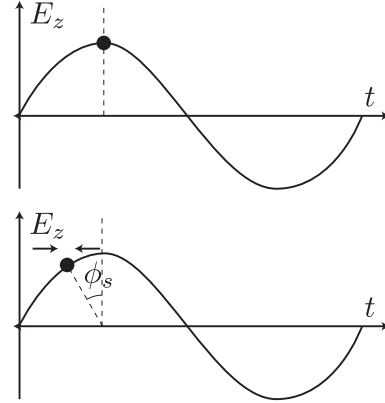


図 15: リニアックにおける同期位相。縦軸は加速ギャップ中央での電場振幅 E_z 、横軸は時間 t 。(上) 電子リニアックの場合。速度はほぼ光速に近いので位相振動がなく。振幅最大となる位相 $\phi = 0$ を用いる。(下) 陽子リニアックの場合。電場が時間的に増加する側では、時間的に早い粒子は受ける電場が小さいため遅れ、一方、時間的に遅れてきた粒子は平衡点にある粒子よりも加速されるため、結果的に平衡点に近づく。

ϕ_s とすると粒子が受ける電場は $\cos \phi_s$ だけ小さくなる。

次に、粒子が受ける加速電圧 (加速電場の積分値) を考える。粒子は時間的に正弦変化している電場を感じながら空洞を通過する。よって図 16 に示すように、粒子 p が受ける電場 E_z の積分値は、時間変化が無い場合に比べ、

$$T = \frac{\int_{-L/2}^{L/2} E_z(z) \cos(\omega z/v) dz}{\int_{-L/2}^{L/2} E_z(z) dz} \quad (27)$$

だけ小さくなる。

³高周波は表面から表皮厚さ δ 分 [式 (22) 参照] の厚みの範囲しか流れないので、その厚みの範囲の電気伝導率のみを考慮すればよい。ただしパワーが大きい (発熱が大きい) 場合にはメッキをおこなう母材の熱伝導や冷却を考慮する必要がある。

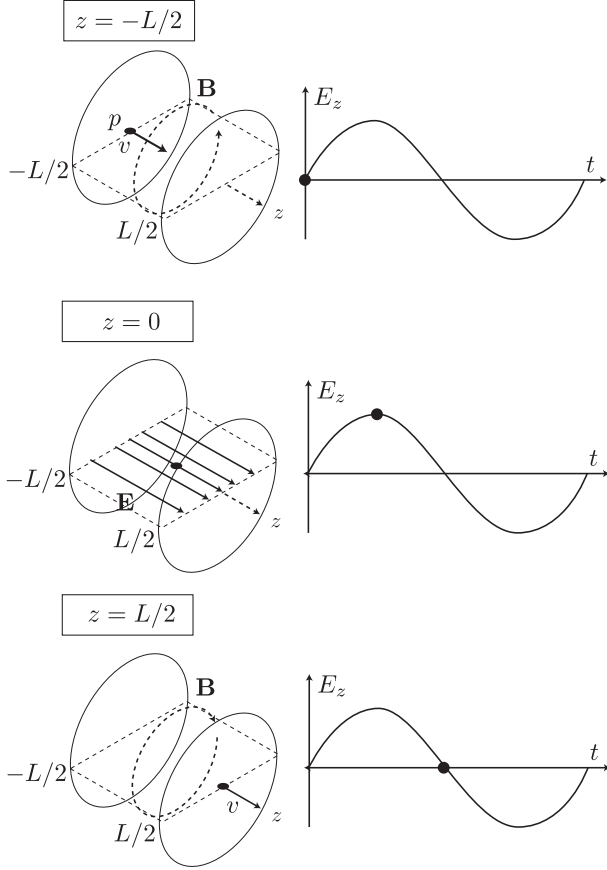


図 16: トランジットタイムファクター T 。粒子 p が空洞内を進む間に電場 E_z の振幅が時間的に正弦変化するため、係数 T だけ小さくなる。

ここで、(27) 式の分母（時間変化が無い場合の電場 E_z の積分値）を長さ L で割ったもの

$$E_0 = \int_{-L/2}^{L/2} E_z(z) dz / L \quad (28)$$

は時間変化が無い場合の平均加速勾配 E_0 を表す。よって実際の高周波加速で粒子 p が受ける加速勾配は $E_0 T$ であり、式 (19) の E_0 を $E_0 T$ で置き換えた、

$$Z_{eff} = Z_{sh} T^2 = \frac{E_0^2 T^2}{P/L} \quad (29)$$

実際に粒子が空洞から得る加速勾配を評価する尺度として、有効シャントインピーダンスと呼ぶ。

また、実際の高周波加速で粒子 p が受ける加速

電圧 V_{eff} は、同期位相 ϕ_s のとき (図 15 参照)、

$$V_{eff} = E_0 T L \cos \phi_s \quad (30)$$

で求められる。

4 進行波形空洞

4.1 導波管内の電磁場と分散関係

導波管内を電磁波は内面を反射しながら進んでいることについては図 13 の説明文で述べた。進行波形の空洞を解説するにあたって、導波管内の電磁波の速度や波長についてもう少し詳しく述べておきたい。

図 17 に導波管内を進む波の速さを示す。導波管内を進む波の見かけ上の速度を位相速度 v_p という。図 17 から $v_p = c / \cos \theta$ で、位相速度は光速 c を超えていることは明らかであろう。一方、導波管に沿って電磁場のエネルギー（つまりポインティングベクトル）の進む速度を群速度 v_g とい、元となる平面波の速度 c のうち導波管方向となる z 成分から $v_g = c \cos \theta$ で求められる。

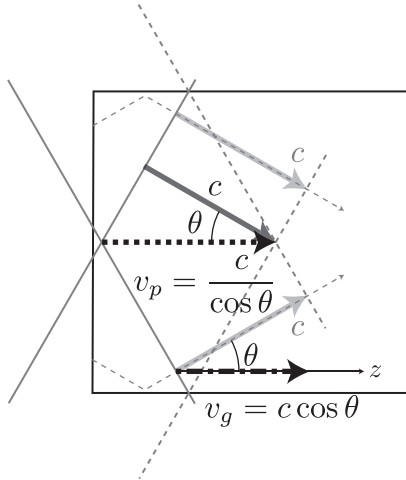


図 17: 導波管内の位相速度 v_p と群速度 v_g 。もとなる二つの波が光速 c で進むとき、見かけ上の速度は $v_p > c$ となることがわかる。

このように位相速度 v_p と群速度 v_g が一致しない場合、「分散がある」ことになる。そこで導波管における分散関係と、そのプロットである分散曲線を理解するために、導波管の管内波長 λ_g 、および自由空間での波長 λ_0 、遮断波長 λ_c の関係について整理しておく。

先の図 17 と同様の図 18 より、

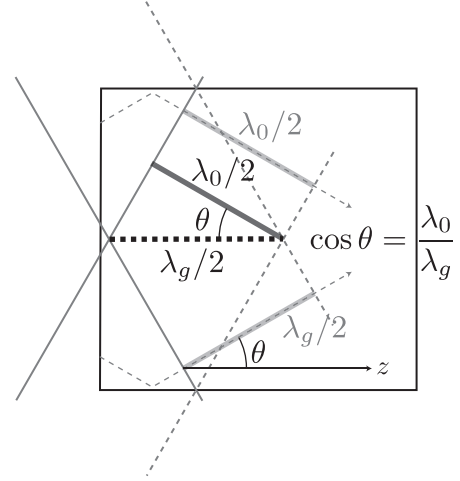


図 18: 自由空間での波長 λ_0 と導波管の管内波長 λ_g の関係。

$$\cos \theta = \frac{\lambda_0}{\lambda_g} \quad (31)$$

と書ける。

導波管の大きさがそのまま、波長 λ_0 が長くなっていくと、 θ はどんどん大きくならなければ、境界条件を満たすことができない (図 19)。導波管内を伝搬することができる最も大きな波長を遮断波長 λ_c といい、導波管の長辺は $\lambda_c/2$ に相当する。

そこで、再び図 20 で導波管の管内波長 λ_g と遮断波長 λ_c の関係を整理しておくと、

$$\tan \theta = \frac{\lambda_g}{\lambda_c} \quad (32)$$

と書ける。ここで式 (32) に式 (31) を代入すると、

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\lambda_g}{\lambda_c} \\ \sin \theta \frac{\lambda_g}{\lambda_0} &= \frac{\lambda_g}{\lambda_c} \\ \sin \theta &= \frac{\lambda_0}{\lambda_c} \end{aligned} \quad (33)$$

を得る。

式 (31)、(33) から、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ の関係を用いて θ を消去すると、

$$\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_g}\right)^2 = 1$$

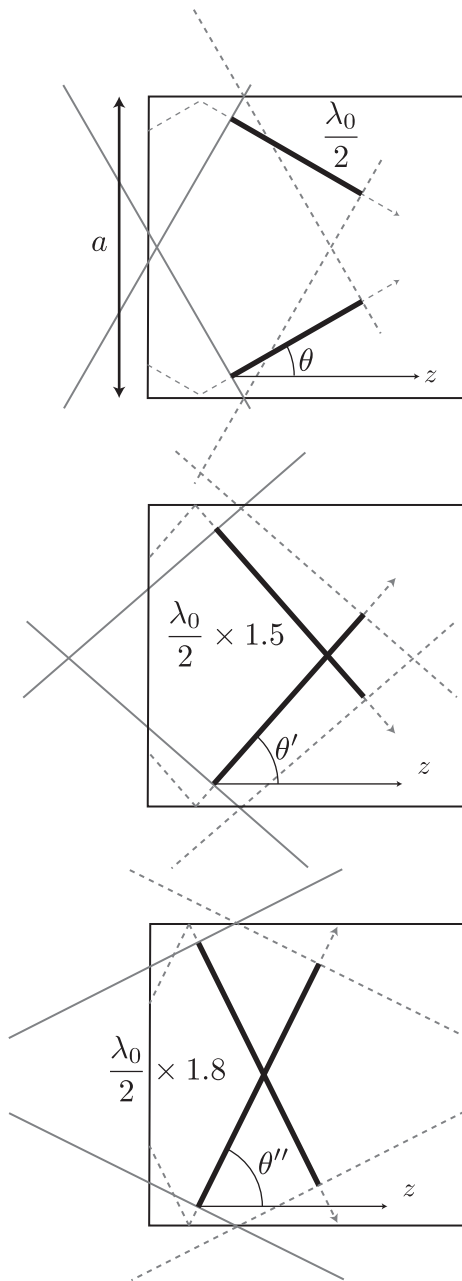


図 19: 自由空間での波長 λ_0 が長くなると、 z 方向と角度 θ が大きくなる。波長の上限 λ_c を遮断波長といい、導波管の長辺方向の長さ a と $a = \lambda_c/2$ なる関係をもつ。

$$\frac{1}{\lambda_c^2} + \frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{\lambda_0^2}$$

となり、導波管の形状で決まる $\frac{1}{\lambda_c^2}$ は定数である

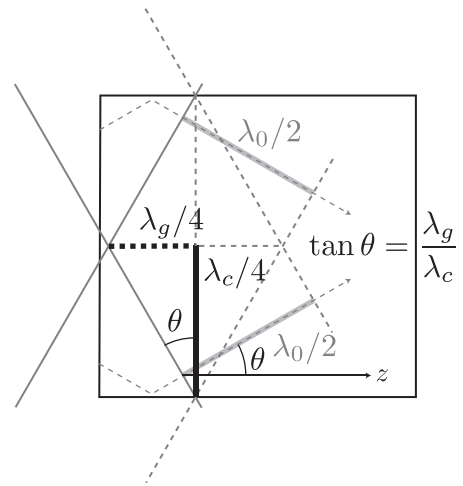


図 20: 遮断波長 λ_c と導波管の管内波長 λ_g の関係。

から右辺に移項して整理すると、

$$\frac{1}{\lambda_g^2} - \frac{1}{\lambda_0^2} = -\frac{1}{\lambda_c^2} \quad (34)$$

なる関係式が導かれる。上式は横軸 $\frac{1}{\lambda_g}$ 、縦軸 $\frac{1}{\lambda_0}$ とする双曲線であり、導波管内の分散関係を表すグラフ⁴となる (図 21)。

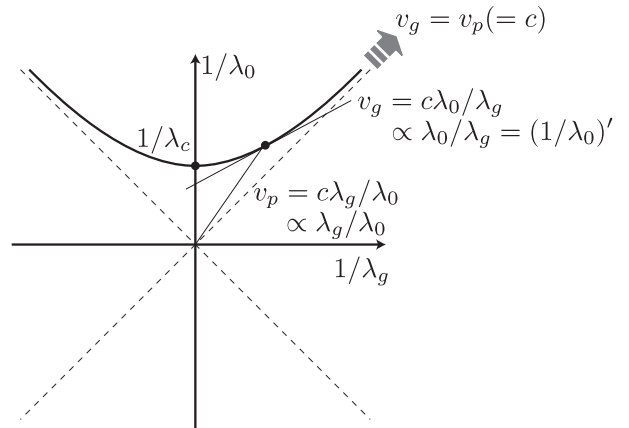


図 21: 導波管内の λ_0 と λ_g の関係を表すグラフ (分散曲線)。

図 17 から位相速度は $v_p = c / \cos \theta$ であり、式

⁴通常、波動における分散曲線は横軸を波数 $k = 2\pi/\lambda_g$ 、縦軸を角振動数 $\omega = 2\pi c/\lambda_0$ としてプロットされる。図 21 との違いは縦軸と横軸のスケールリングの問題であり、本質的な差はない。よって本講義録ではそのまま分散曲線と呼ぶことにする。

(31) から

$$\begin{aligned} v_p &= c \frac{\lambda_g}{\lambda_0} \\ v_p &= c \frac{1}{\lambda_0} / \frac{1}{\lambda_g} \end{aligned} \quad (35)$$

と書ける。つまり図 21 に示すように、グラフで双曲線上のある点と原点を結んだ直線の傾きは位相速度 v_p の (速度の単位を c としたときの) 係数を示している。

また、図 17 から群速度は $v_p = c \cos \theta$ であり、式 (31) から、

$$v_g = c \frac{\lambda_0}{\lambda_g} \quad (36)$$

と書ける。ここで式 (34) を $\frac{1}{\lambda_g}$ で微分して (陰関数の微分)、図 21 のグラフの傾きを求めてみると、

$$\begin{aligned} 2 \frac{1}{\lambda_g} - 2 \left(\frac{1}{\lambda_0} \right) \left(\frac{1}{\lambda_0} \right)' &= 0 \\ \left(\frac{1}{\lambda_0} \right)' &= \frac{\lambda_0}{\lambda_g} \end{aligned} \quad (37)$$

であることがわかる。よってグラフの傾きは、群速度 v_p の係数を示している。

4.2 ディスクロード型加速管

進行波型の加速管では、位相速度 v_p を光速 c に合わせる (波長で表現すると、管内波長 λ_g を自由空間の波長 λ_0 に合わせる) ために、円形導波管に円孔をもった円盤を周期的に並べたディスク装荷加速構造 (disk-loaded structure) が用いられる (図 22)。

ディスクロード型加速管は3節で説明した、ピルボックス型空洞がたくさん高周波的に円孔を通してつながったものと考えることができる。つまりある共振周波数 ω を持った空洞がたくさんつながったものであるから、そこを通過することのできる周波数はこの共振周波数 ω の前後の狭い帯域に限られたものになる。図 23 にディスクロード型加速管内の λ_0 と λ_g の関係 (分散曲線) をグラフで示す⁵。

⁵これは等価回路を用いた解析により求められる。文献 [5] または [6] に詳しい。

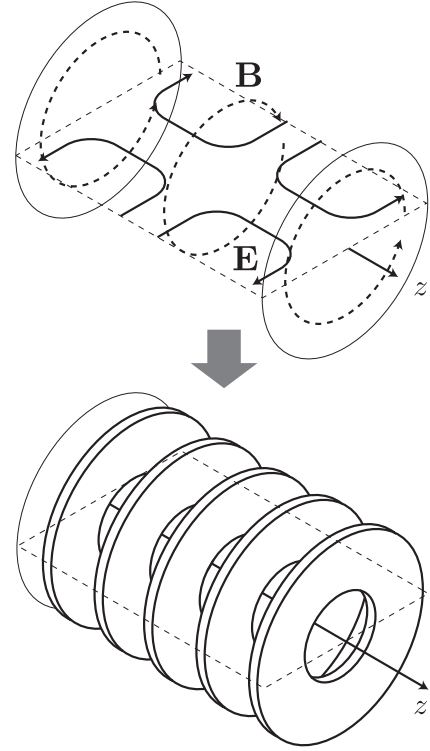


図 22: ディスク装荷加速構造 (ディスクロード型加速管)。

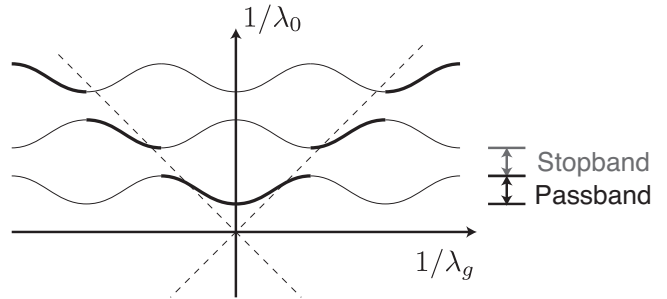


図 23: ディスクロード型加速管内の λ_0 と λ_g の関係を表すグラフ (分散曲線)。電磁波が通過することができる周波数帯域を通過帯 (passband) といい、逆に通過できない帯域を阻止帯 (stopband) という。

狭い帯域の中で、どのモードを加速に用いるかを考える。ピルボックス空洞の z 方向長さは、波長の約 $1/3$ でシャントインピーダンスが最も高くなる [6, p. 17]。そこでディスクロード型加速

管では、1セルが波長の $1/3$ の長さとなるモードを用いる。ここで光速 c で進む電子を加速するため、管内波長 λ_g は自由空間での波長 λ_0 であるから1セルの長さ d は $d = \lambda_0/3$ となる。この形の電場が位相速度 $v_p = c$ で進んでいく。これがディスクロード型加速管内の電磁波(進行波)である。図24に、 $2\pi/3$ モードにおける $1/4$ 周期毎の z 方向電界強度分布を示す。

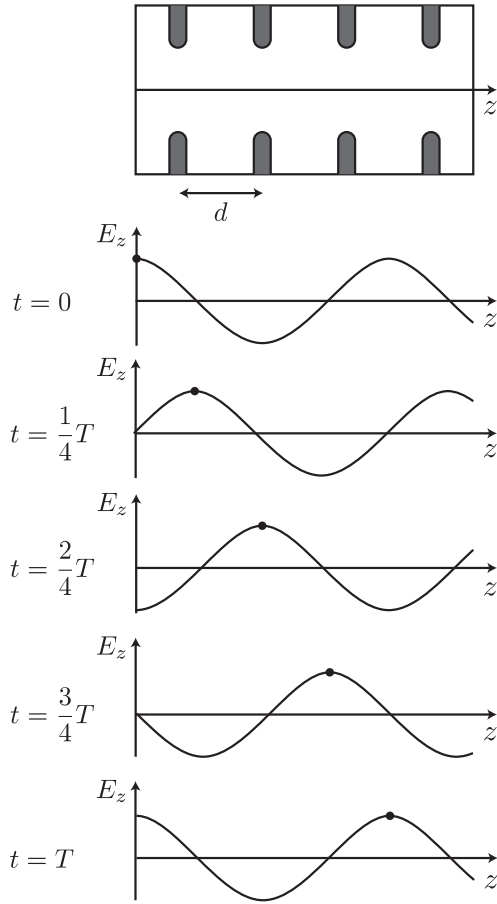


図 24: ディスクロード型加速管内の z 方向電界強度分布。 $2\pi/3$ モードでの $1/4$ 周期毎のスナップショットを示す。黒丸は電子の動きを示す。ここでは基本波のみを示した。(空間高調波を含めた電界強度分布については文献[7, p. 7]に詳しい。)

ピルボックス空洞と同様に、進行波形加速管の主なパラメータについて記しておく。

単位長さあたりのシャントインピーダンス Z_{sh}

は式 (19) と同様に、

$$Z_{sh} = -\frac{E_0^2}{dP/dz} \quad (38)$$

と書ける。ここで P は加速管内を進む電磁場のエネルギーであり、 z 方向に進むに従って表面損失により減少する ($dP/dz < 0$) ため負号とした。

次に Q 値についても式 (25) と同様に、

$$Q_0 = \frac{\omega U}{P_{wall}}$$

で定義される。ここでディスクロード型加速管は周期的な構造を持っており、 U も P も長さ(空洞数)に比例する。従って、単位長さあたりに空洞内に蓄えられているエネルギー (stored energy) を w とすると、

$$Q_0 = -\frac{\omega w}{dP/dz} \quad (39)$$

と表すことができる。(負号の理由はシャントインピーダンス Z_{sh} の場合と同様である。)

式 (38)、(39) から、 Z_{sh}/Q_0 を求めると、

$$\frac{Z_{sh}}{Q_0} = \frac{E_0^2}{\omega w} \quad (40)$$

となり、ピルボックス型の R/Q 同様 [式 (26) 参照]、空洞内の損失に依存しない一定の値になる。

ここまではピルボックス型空洞と同様であったが、これ以降は進行波管に特有のパラメータである。まず加速管内を進む電磁波のエネルギーの減衰の様子について考える。加速管内を進む電磁波のエネルギーは、各セルの表面損失により熱エネルギーとして失われてゆく。そこで加速管の単位長さあたりの減衰率 α を以下の式で定義する。

$$\frac{dE}{dz} = -\alpha E \quad (41)$$

$P \propto E^2$ であるから、 $\frac{dP}{dz}$ については

$$\frac{dP}{dz} = -2\alpha P \quad (42)$$

となる。

ここで式 (42) を α は z の関数であるとして P について解くと、

$$P = P_0 \exp \left(-2 \int_0^z \alpha(z) dz \right) \quad (43)$$

となる。ここで P_0 は加速管入り口における電力を示す。

ここで指数部の積分項 $\int_0^z \alpha(z) dz$ を、加速管全体での減衰定数 τ として以下の式で定義する。

$$\tau = \int_0^L \alpha(z) dz \quad (44)$$

また加速管出口 ($z = L$) での電力を P_L とすると、減衰定数 τ を用いて

$$P_L = P_0 e^{-2\alpha L} = P_0 e^{-2\tau} \quad (45)$$

とかける。ここで定義した P_L と P_0 の比 $P_L/P_0 = e^{-2\tau}$ や、後で述べる電磁波が長さ L の加速管を通り抜けるのに必要な時間 [充填時間 (t_f)] は空洞組立後、ネットワークアナライザで測定できるパラメータである (図 25 参照)。

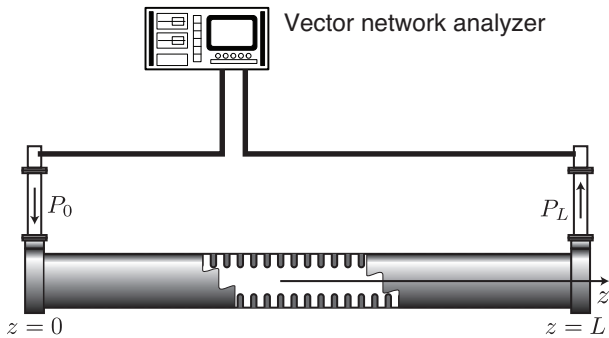


図 25: ディスクロード型加速管内の低電力測定。ネットワークアナライザを用いて入力、出力ポートでの反射、透過係数、充填時間などを測定する。具体的な測定結果については文献 [8] などに詳しい。

まず、単純に加速管内の各セルの寸法が全て同じである場合を考える。このような形の加速管を定インピーダンス型加速管という。 α は z に依らず一定である。従って、

$$\tau = \alpha L \quad (46)$$

となる。よって、式 (41)、(42) より、

$$E(z) = E_0 e^{-\alpha z} = E_0 e^{-\frac{\tau}{L} z} \quad (47)$$

$$P(z) = P_0 e^{-2\alpha z} = P_0 e^{-2\frac{\tau}{L} z} \quad (48)$$

となる。上式から、軸上の加速電場は z が大きくなると指数関数的に小さくなることがわかる。

この形の加速管では、各セルの寸法が全て同じで構造が単純になるが、加速管入り口の加速電場が最も高くなり、加速電界 (= 放電限界) がこの加速電場で決まってしまうことから、高電界用の加速管としては好ましくない。また、単位長さあたりの表面損失が一定でないため加速管の発熱が一律でなく、冷却についても難しくなるという問題がある。

一方、単位長さあたりの消費電力 [式 (42)] を一定とした加速管を定電界型加速管という。この (一定) 消費電力の大きさの導出を以下に示す。

加速管出口 ($z = L$) での電力を P_L とすると、加速管内の位置 z を流れる電力 P は

$$P(z) = P_0 - (P_0 - P_L)z/L \quad (49)$$

と書ける。先述の式 (45) の通り、出口の電力 P_L は減衰定数 τ を用いて

$$P_L = P_0 e^{-2\tau}$$

と書けるから、上式を式 (49) に代入すると、

$$\begin{aligned} P(z) &= P_0 - \frac{(P_0 - P_0 e^{-2\tau})z}{L} \\ &= P_0 \left(1 - \frac{1 - e^{-2\tau}}{L} z \right) \end{aligned} \quad (50)$$

となる。よって、定電界型加速管では単位長さあたりの消費電力が、

$$\frac{dP}{dz} = -P_0 \frac{1 - e^{-2\tau}}{L} \quad (51)$$

となるようにセルの寸法を調整する必要がある。

次に空洞内を進む電磁場のエネルギーの速さについて考える。空洞内を進む電磁場のエネルギーが、群速度 v_g で進むことは導波管の場合と同一で

ある。ここで図 26 に、ディスクロード型加速管内を進む電力 P 、群速度 v_g 、単位長さあたりに空洞内に蓄えられているエネルギー (stored energy) w の関係を示す。これらのパラメータの間には

$$P = w \times v_g \quad (52)$$

なる関係が成り立つことがわかる。ここで式 (52)

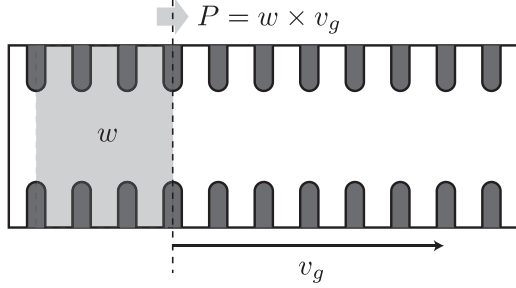


図 26: ディスクロード型加速管内を進む電力 P 、群速度 v_g 、単位長さあたりに空洞内に蓄えられているエネルギー w との関係。加速管内のある断面 (点線部) を単位時間通過する電力 P は $P = w \times v_g$ の関係がある。

と Q_0 の定義である式 (39) を用いると、群速度 v_g は

$$v_g = -\frac{\omega P}{Q_0(dP/dz)} \quad (53)$$

となる。

まず定インピーダンス型加速管について考える。式 (42)、(46) より、単位長さあたりの消費電力 $\frac{dP}{dz}$ は減衰定数 τ を用いて、

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{2\tau P}{L} \quad (54)$$

と書けることから、群速度 v_g は

$$\begin{aligned} v_g &= -\frac{\omega P}{Q_0(2\tau P/L)} \\ &= -\frac{\omega L}{2Q_0\tau} \end{aligned}$$

となる。群速度 v_g は z に依らず加速管内で一定の値をとる。

ここで、電磁波が長さ L の加速管を通り抜けるのに必要な時間を充填時間 (t_f) といい、上式の v_g を用いて、

$$t_f = \frac{L}{v_g} = \frac{2Q_0\tau}{\omega} \quad (55)$$

と表すことができる。パルス電力を投入してから t_f だけ経過した後であれば、加速管内全体が電磁場で満たされている。従って電子の加速はパルス電力投入後 t_f だけ待った後に行う必要がある。

一方、定電界型加速管については P 、 $\frac{dP}{dz}$ は式 (50)、(51) より、

$$\begin{aligned} P &= P_0 \left(1 - \frac{1 - e^{-2\tau}}{L} z\right) \\ \frac{dP}{dz} &= -P_0 \frac{1 - e^{-2\tau}}{L} \end{aligned}$$

と書けるので、式 (53)

$$v_g = -\frac{\omega P}{Q_0(dP/dz)}$$

に代入すると、

$$\begin{aligned} v_g &= -\frac{\omega P_0 \left(1 - \frac{1 - e^{-2\tau}}{L} z\right)}{Q_0(-P_0 \frac{1 - e^{-2\tau}}{L})} \\ &= \frac{\omega}{Q_0} \frac{1 - \frac{1 - e^{-2\tau}}{L} z}{\frac{1 - e^{-2\tau}}{L}} \end{aligned} \quad (56)$$

となる。群速度 v_g は z の関数である。ここで充填時間 (t_f) は、電磁波が微小長さ dz の加速管を速さ $v_g(z)$ で通り抜けるのに必要な時間を z について、0 から L まで積分したものになるから、

$$\begin{aligned} t_f &= \int_0^L \frac{dz}{v_g} \\ &= \frac{Q_0}{\omega} \int_0^L \frac{\frac{1 - e^{-2\tau}}{L}}{1 - \frac{1 - e^{-2\tau}}{L} z} \\ &= \frac{Q_0}{\omega} \left[-\ln \left(1 - \frac{1 - e^{-2\tau}}{L} z\right) \right]_0^L \\ &= \frac{2Q_0\tau}{\omega} \end{aligned} \quad (57)$$

となり、 t_f は定インピーダンス型加速管と同一となる。

5 定在波形空洞

冒頭の 1.3 節で少し触れたが、イオン加速に用いられる定在波型空洞には、RFQ、アルバレ型、結合空洞型などがある。RFQ は高周波だけでなくビーム収束に関係する項目も多いため本講義では省略し、ここではアルバレ型、結合空洞型についての電磁場とその安定化について述べることにする。

5.1 アルバレ型

アルバレ (Alvarez) 型リニアックは、その構造から Drift tube linac (DTL) と呼ばれ、エネルギーの低い陽子 (イオン) を加速する構造として開発された。図 27 にアルバレ型リニアック内の電磁場を示す。アルバレ型はピルボックス型空洞と同様の TM01 モードを用いる。 z 軸上をイオンが進む間に電場が反転し減速してしまうことを避けるため、ドリフトチューブと呼ばれる中空導体を空洞内に吊しておき、電場が反転している (減速位相) 間は電場の無いドリフトチューブ内をイオンが進むようにしたものである。

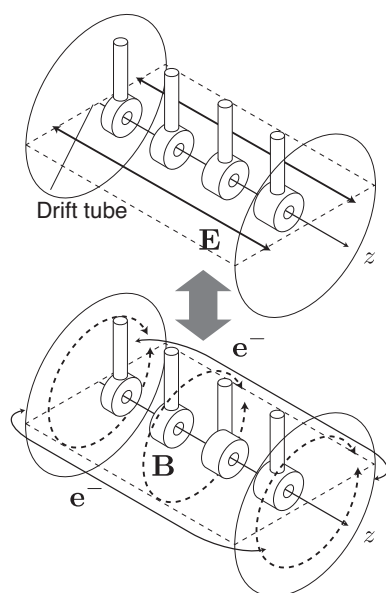


図 27: アルバレ型加速管内の電磁場。

実際のアルバレ型加速管の例として、図 28 に

J-PARC リニアックで用いられている 324 MHz DTL 空洞の内部の写真を示す。各ドリフトチューブの中には水冷式の電磁石⁶が組み込まれている。



図 28: J-PARC DTL 空洞 (運転周波数 324 MHz) の内部写真。上から吊される形で取り付けられているのがドリフトチューブ。ドリフトチューブ内には水冷式の電磁石が内蔵されている。左右から突きだしている棒状のものは電場を安定化させるためのポストカプラーである (安定化の原理については 5.2 節で述べる)。

図 29 にアルバレ型リニアック内の z 方向電界強度分布を 1/4 周期毎のスナップショット毎に示す。イオンは電子と異なりすぐには加速されない。従って、ドリフトチューブおよび加速ギャップの長さはイオンの速度に応じて徐々に長くなっていく。加速ギャップ中央間の距離 L は、その区間でイオンが速度 v で進むとすると、高周波の 1 周期 T の間に進む距離と一致しなければならない。よって、

$$L = vT = \beta\lambda \quad (58)$$

⁶電鍍により四極電磁石のコイルを作ることによって小型化し、電磁石を用いた DTL としては比較的高い周波数を実現した点が特徴である。これにより高周波源としてクライストロンの利用が可能となった。(KEK-PS の DTL は 200 MHz であり高周波源として電子管 (三極管) を用いていた。電子管のパワーゲインはクライストロンと比べると小さく、多段の増幅回路が必要であった [9].)

となる（ここで $\beta = v/c$ ）。アルバレ型空洞は大きなピルボックス空洞にドリフトチューブが取り付けられたものと考えられることは先に述べた。一方ではアルバレ型この長さ L を単位とするセルがつながった結合空洞型の加速管とも考えることができる（詳細は次節で述べる）。よってこの長さ L をアルバレ型空洞のセル長と呼ぶ。

このように加速管の構造は粒子（イオン）の速度を想定して作られているため、各加速ギャップでは所定のエネルギーまで加速させ、加速管の構造に同期して、高周波の加速位相に合わせて粒子が進むようにする必要がある。このため加速管は所定の加速電場で運転する必要がある、加速空洞からの粒子の出射エネルギーを大きく変えることはできない。

アルバレ型加速管の加速効率は、ドリフトチューブが長くなる高エネルギー側で徐々に低下する。この原因を定性的に考えてみる [10]。空洞の内径を D 、ドリフトチューブの半径を d 、加速ギャップの長さを g とする。加速ギャップ g がセル長 $L = \beta\lambda$ に比べて十分小さいときは、セルは同軸管と見なすことができる。よって、この同軸管の自己インダクタンス L_0 は

$$L_0 \sim \frac{\mu_0 \beta \lambda}{2\pi} \ln \frac{D}{d} \quad (59)$$

となる（ここで μ_0 は真空の透磁率）。

一方、加速ギャップがドリフトチューブの半径 d に比べて十分小さいときは、加速ギャップは円形の平行平板コンデンサーと見なすことができる。よって、この静電容量 C_0 は

$$C_0 \sim \frac{\pi d^2}{g} \quad (60)$$

となる（ここで ϵ_0 は真空の誘電率）。この L_0, C_0 を用いてこのセルの共振周波数 ω_0 は、 $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ を用いて、

$$\omega_0 = \frac{1}{L_0 C_0} \sim \frac{2gc^2}{\beta \lambda d^2 \ln \frac{D}{d}} \quad (61)$$

とあらわすことができる。

エネルギーが大きくなると β が大きくなるため、セル長 $\beta\lambda$ は大きくなるが、上式からは $g/\beta\lambda$

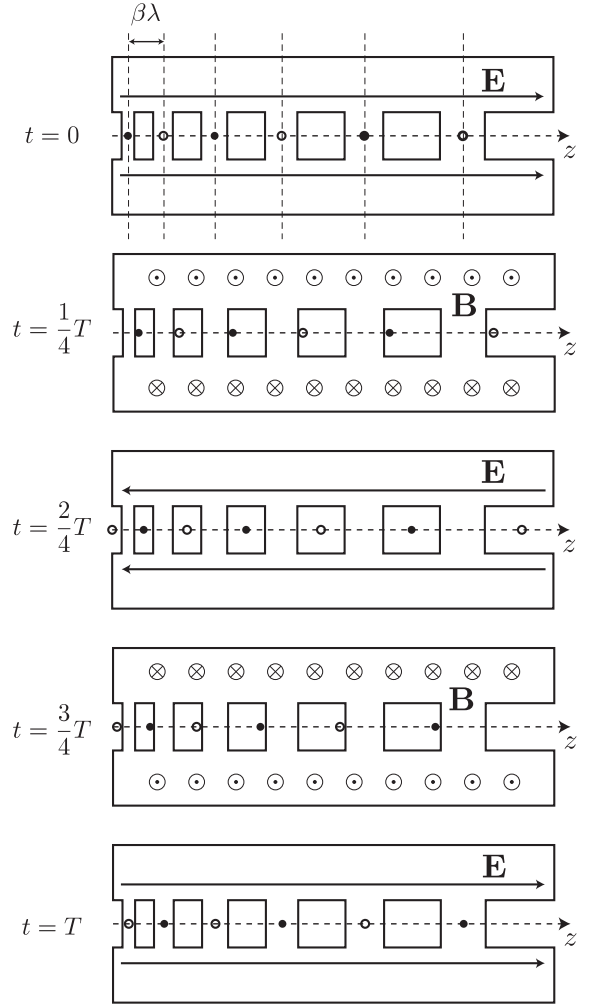


図 29: アルバレ型加速管の z 方向電界強度分布。1/4 周期毎のスナップショットを示す。白丸および黒丸はイオンの動きを示す。各加速ギャップ中央間の距離は、その区間での粒子が速度 $\beta = v/c$ で高周波の 1 周期に進む距離から $\beta\lambda$ となる。

を一定に保てば周波数 ω は一定となる。しかし実際には、 g が d に比べて大きくなると、ギャップ間の電場が広がるため C_0 は上記計算よりも大きな値となる。従って g を大きくする必要が生じ、結果的にトランジットタイムファクターが小さくなり、有効シャントインピーダンスが低下することとなる。

図 30 にアルバレ型加速管について有効シャントインピーダンス [式 (29) 参照] の一例を示す。アルバレ型の有効シャントインピーダンスが小さく

なる高エネルギー側では、結合空洞型の加速管が用いられる。

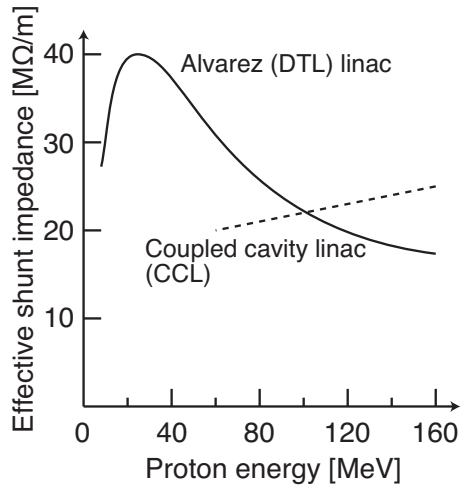


図 30: 有効シャントインピーダンスの一例 (文献 [11] より引用)。

5.2 結合空洞型加速管

4 節で述べたとおり、電子の場合は $v = c$ であり構造が単純なディスクロード型 (進行波) 加速管が用いられることが多い。イオンの場合も $v \simeq c$ であれば電子の場合と同じ構造が適用できるが、イオン ($v \ll c$) の加速に用いると加速効率 (シャントインピーダンス) が低く実用的でない。そこでアルバレ型加速管より高エネルギー側 [主に $\beta (= v/c) > 0.4$ のエネルギー領域] において、シャントインピーダンスを高めた構造が開発されてきた。

通常、イオンの加速管ではシャントインピーダンスを高めるため定在波が用いられる。そこで、結合空洞型加速管の単純な例としてディスクロード型加速管を取り上げ、定在波の電場パターン (固有モード) について述べる。3 節でも述べた通り、ディスクロード型加速管はピルボックス型空洞が高周波的につながった構造と考えることができ、電磁波が通過できる (定在波として励起できる) 周波数はある限られた範囲になる (図 23 参照)。ディスクロード型加速管内に発生する主な電場パ

ターン (固有モード) を図 31 に示す。このときそれぞれの固有モードは、隣り合うセル間の位相進みで区別される。

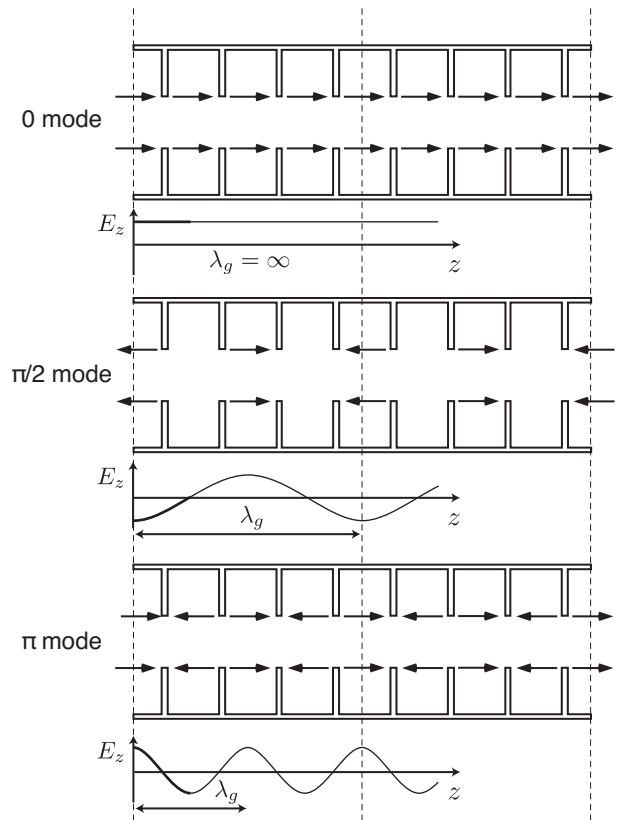


図 31: ディスクロード型加速管 (定在波) におけるモード毎の電場分布。各モードの名称は隣り合うセル間の位相差で表され、上から順に $0, \pi/2, \pi$ モードである。管内波長 λ_g をあわせて図示した。

また、図 31 に示した、 $0, \pi/2, \pi$ モードが、分散曲線上でどの位置にあるかを図 32 に示す。定在波であるので波の進行方向を考える必要が無いため、進行波型の分散曲線 (図 23) で示した左半分は省略した。

図 31 の各固有モードについて、加速管の観点から考えてみる。

- 0 モードの場合は管内波長 $\lambda_g = \infty$ であり、アルバレ型加速管のドリフトチューブのように、イオン (バンチ) を電場から隠すような構造が無い限り、加速位相だけでなく、減速

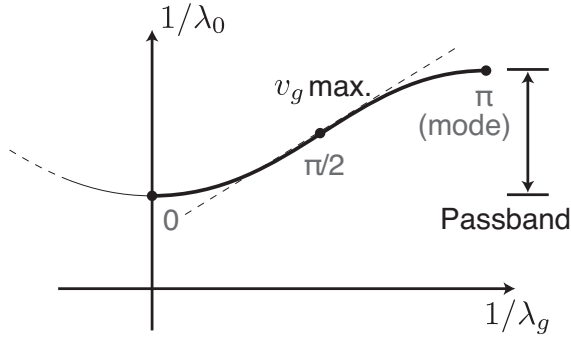


図 32: ディスクロード型加速管の分散曲線における各モードの位置。管内波長 λ_g が長い順に $0, \pi/2, \pi$ モードに対応する。加速管内の群速度 v_g は $0, \pi$ モードでは 0 。 $\pi/2$ モードで最大になる。

位相の電場を受けるためイオンを加速することはできない。

- $\pi/2$ モードの場合は加速電場が生じるセルが 1 つおきになるため、空洞全体を平均すると加速効率が低くなる。しかし、図 23 からわかる通り群速度 v_g が最大となるため、電磁場のエネルギーの流れがあり、加速電場が安定 (ビームローディングやセルの周波数誤差などの外乱に影響を受けにくい) というメリットがある。
- π モードの場合は全てのセルに加速電場が生じるため、加速効率は最も高い。しかし図 23 からわかる通り群速度 $v_g = 0$ となるため、電磁場のエネルギーの流れが悪く、長い加速管 (常伝導空洞で 5 セル以上) は実用的でなくなってしまう。

そこで、加速管の動作として安定な $\pi/2$ モードの加速管について、シャントインピーダンスを高める改良が進められてきた。その経緯を図 33 に示す。

APS 型加速管は $\pi/2$ モードで励起されないセル (結合セル) を短くして、ビーム軸上に占める加速電場の割合を大きくし、シャントインピーダンスを高めたものである。

サイドカップル型加速管は、APS 型の考えを

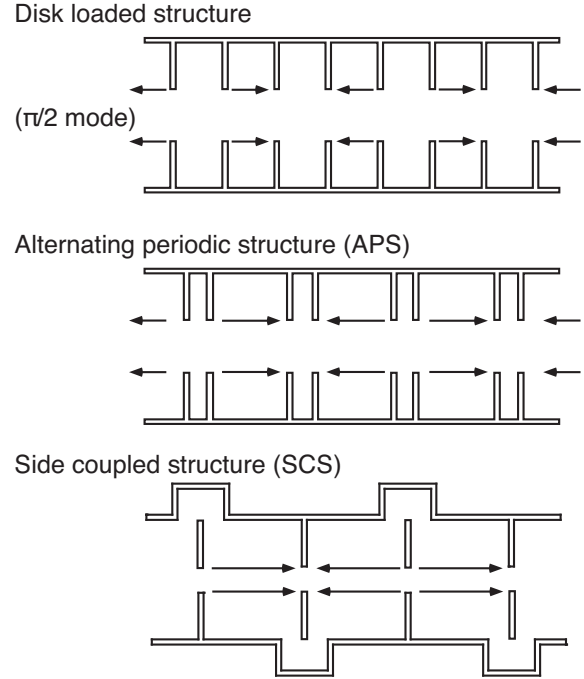


図 33: $\pi/2$ モード加速管の発展。(上) ディスクロード型を $\pi/2$ モードで励振した場合の電場分布。(中) APS 型加速管。 $\pi/2$ モードで励起されないセルを短くしてシャントインピーダンスを高めた。(下) サイドカップル型加速管。 $\pi/2$ モードで励振されないセルをビーム軸上からずらして外側に配置したもの (図 34 に立体図を示す)。同様の構造に Disk-and-washer (DAW) 型加速管や Annular-ring coupled structure (ACS) 型加速管がある。

さらに進めたもので、ビームの加速に寄与しない結合セルをビーム軸から外したものである (図 34 参照)。同様の考え方から考案された加速構造として、Disk-and-washer (DAW) 型加速管や Annular-ring coupled structure (ACS) 型加速管 (図 35) がある。

ここで $\pi/2$ モードの安定性について、もう少し詳しく考えてみる。ビームを安定に加速するため、加速管内の電場はビームローディングや各セルの周波数誤差などに対してなるべく影響を受けないようにすることが望ましい。図 31 や図 33 に示したように、 $\pi/2$ モードでは励起しないセル (結合セル) があるが、これらの結合セル同士も $\pi/2$

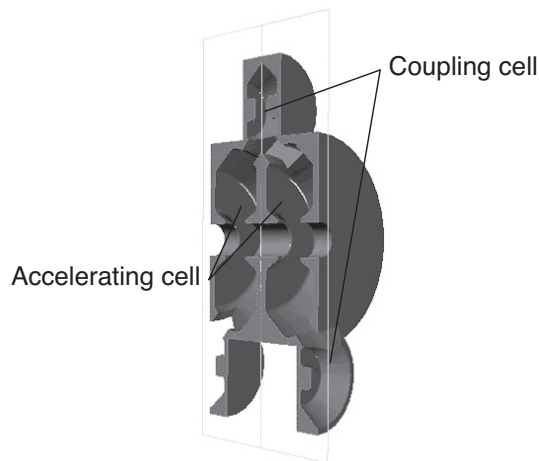


図 34: サイドカップル型加速管。結合セルをビーム軸から外したもの。

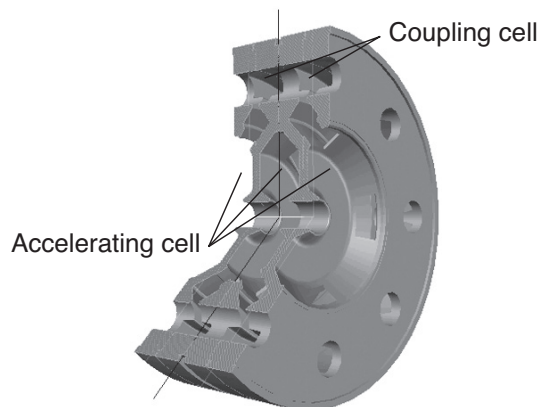


図 35: Annular-ring coupled structure (ACS) 型加速管。結合セルをビーム軸まわりにリング状にし、ビーム軸周りの電場の軸対称性を上させたもの。

モードでの固有モードを持っている。これを結合モードという。図 36 に加速モードと結合モードの電場分布を示す(図 31 や図 33 に比べ、少し詳細に電場分布を示した)。加速モードと結合モードでは各セルの中央における境界条件が異なっている。同じ寸法のセルで構成されたディスクロード型加速管であれば、加速モードと結合モードが同じ共振周波数を持つことになる。

通常は加速モードのみが励起するようにエンド

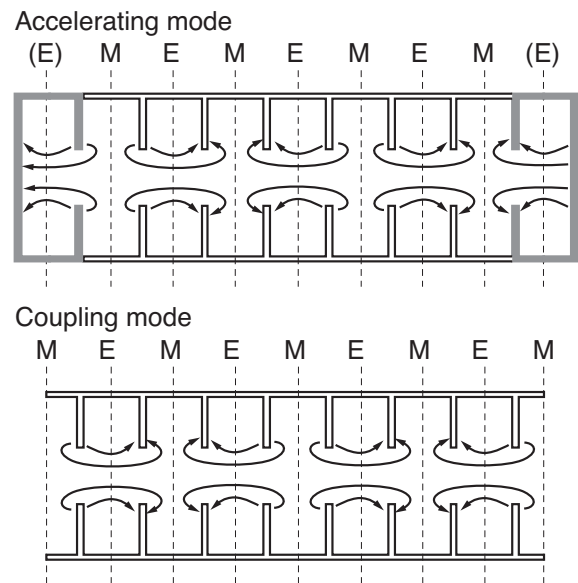


図 36: 加速モードと結合モード。E は境界面に対して電場が垂直 (短絡条件)、M は境界面に対して磁場が垂直 (電場は平行、開放条件) となる境界条件を示す。加速管の端部のセルは (周期的な) 加速モードの電場のパターンを乱さない形に設計される。

セルや外部からの入力カプラーを取り付けて励振されるため、結合モードは励起しない。ここで固有模式的には、結合モードは加速モードに縮退した状態にあると考えることができる。しかし外乱などにより何らかの原因で加速モードの電場が一様で無くなった場合、結合モードが励起される。これは加速モードの定在波を作る二つの進行波を考えた場合、どちらかの振幅が小さくなったときには、結合セル内で完全にキャンセルしなくなることからも類推できる。

結合モードがどのようなモードであるかを見てみると、隣り合う加速セルをつなぐように電気力線が生じていることがわかる (図 36)。つまり結合モードは隣り合う加速セルの電場を同一にするような働きをもつ。

よって、 $\pi/2$ モードの結合空洞型加速管では、加速モードと結合モードの周波数を一致させておく、つまり結合モードを運転周波数に縮退した状態にしておくことにより、電場の安定性を確保す

ることができると考えられる。このような状態を合流状態 (confluence) にあるといい、陪周期構造の分散曲線で二つの分散曲線が $\pi/2$ モードで一致し、群速度 $v_g \neq 0$ となる状態として説明される⁷(図 37)。

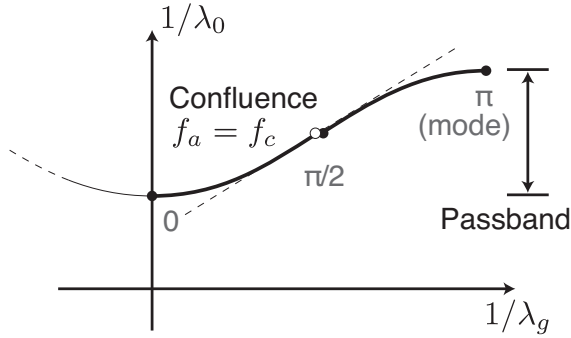


図 37: 合流状態 (confluence)。

ここで説明した電場の安定化は、結合空洞型加速管だけでなくアルバレ型加速管についても用いられている。アルバレ型加速管ではポストと呼ばれる丸棒を、タンクの外壁からドリフトチューブの中央に向かって挿入することで、運転周波数にポストモードと呼ばれる一種の結合モードを縮退させ、電場の安定化を実現している。図 38 にアルバレ型加速管の加速モードとポストモード (結合モード) を示す。先述の $\pi/2$ モードのディスクロード型加速管同様、加速モードと結合モードでは各加速ギャップの中央における境界条件が異なっていることに注目されたい。つまり先の 5.1 節で少し触れたように、アルバレ型もセル長 $L = \beta\lambda$ のセルが多数つながった結合空洞型の加速管と考えることができるということである。

$\pi/2$ モードの結合空洞型加速管はディスクロード型に比べると構造は複雑になるが加速効率が高い。近年の精密加工技術の向上もあり、医療用の電子加速器においても機器の小型化のため、S バンドよりも高い周波数でかつ結合空洞型加速管を

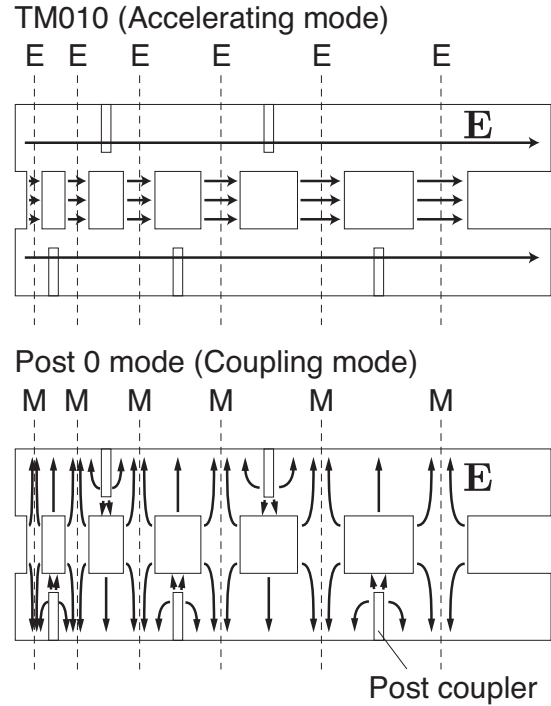


図 38: アルバレ型加速管における加速モードとポストモード (結合モード)[9]。上図は加速管を真上 (もしくは真下) からみた断面図で、上下にある棒状のものが水平方向から挿入されたポストカプラーを示している。

用いられることが多くなっている。また大電流加速の際にはエネルギーの流れが大きい (群速度が大きい) 方が有利であり、単なる加速管に留まらず、結合空洞型の電子銃などが開発されている。

⁷これも周期構造の分散曲線と同じく、等価回路を用いた解析により求められる。文献 [5] または [6] に詳しい。

6 おわりに

以上、リニアックを中心とした高周波加速の基本的な項目について、基本的な電磁気学の内容も含めてなるべく平易な解説を試みた。本講義録では直感的な理解を優先した記述を心がけてはみたが、正確な表現でないところや誤りがあるかもしれない。これはひとえに筆者の無理解によるものであり、読者諸賢のご批判を仰ぐ次第である。過去のOHOのテキストには数多くの高周波加速および加速空洞についての解説があるので、数学的に厳密な導出およびより詳細な内容については、これらを参照頂いて適宜補足願いたい。

最後に、歴史ある本セミナーの講義録を作成させて頂く機会を与えて下さいました古屋貴章氏、内藤富士雄氏に心から感謝申し上げます。

[10] 池上雅紀. 線形加速器 (II). *OHO '01*, 2001.

[11] 亀井亨, 木原元央. パリティ物理学コース 加速器科学. 丸善株式会社, 1993.

参考文献

- [1] 原子力委員会 研究開発専門部会加速器検討会. 加速器の現状と将来. 2004.
- [2] 砂川重信. 理論電磁気学. 紀伊國屋書店, 1965.
- [3] ファインマン, レイトン, サンズ. ファインマン物理学 III. 岩波書店, 1969.
- [4] 長沼伸一郎. 物理数学の直感的方法. 通商産業研究社, 1987.
- [5] 高田耕治. 高周波加速. *OHO '97*, 1997.
- [6] 高田耕治. 高周波加速の基礎. *KEK Report 2003-11*, 2004.
- [7] 山口誠哉. 加速管・立体回路. *OHO '02*, 2002.
- [8] 五十嵐康仁, 山口誠哉, 榎本收志. KEKB 入射器増強用加速ユニットの高周波特性. *KEK Report 98-12*, 1999.
- [9] 加藤隆夫. ライナックとその周辺. *OHO '84*, 1984.