X 線自由電子レーザー理論

本講義では、X 線自由電子レーザー (X-ray Free Electron Laser： XFEL) の発振理論、即ちアンジュレータに入射された電子ビームが、X 線領域においてレーザーを発振する原理について解説するとともに、発振に必要な電子ビームの条件と、期待されるレーザー光源性能を計算するための手法について説明する。

1　はじめに

自由電子レーザー（Free Electron Laser：FEL）は、光をコヒーレントに増幅することでレーザー発振を実現するという点において、従来型レーザーと等価な装置である。一方で、レーザー増幅の原理は従来型レーザーのそれと根本的に異なる。

従来型レーザーにおける発振の原理は、反転分布状態を形成した媒質（レーザー媒質）における、誘導放出による光の増幅に基づく。従って、その原理を説明するためには量子論が必須である。

一方 FEL では、アンジュレータと呼ばれる装置によって周期的磁場が形成された自由空間を運動する高エネルギー電子ビームが、レーザー媒質として機能する。電子ビームには多数の自由電子が含まれ、これらが電磁波としての光と相互作用（エネルギーのやりとり）することでレーザー発振する。このような、自由電子の磁場中での運動と、電磁波との相互作用は全て特殊相対性理論と古典電磁気学で記述でき、従って FEL の発振原理を説明するために量子論を駆使する必要は全くない[1]。本稿でも光の波長とエネルギーの換算式以外には量子論は一切用いない。

高い反射率を有するミラーが存在する長波長領域における FEL の構成は従来型レーザーと同じであり、図 1 に示すとおり、レーザー媒質の両端にミラーを配置し、光共振器として利用することによって光を閉じ込め、媒質との相互作用の距離を実効的に長くすることで増幅率を稼いでいる。一方、直入射条件で高い反射率を有するミラーが存在しない X 線領域ではこの方式は採用できない。

[1]理論的には量子論を適用しなければならない条件は存在するが、実用的には無視して構わない。

そこで XFEL では、光共振器で光を閉じ込める代わりに、長いアンジュレータを利用することによって、媒質である電子ビームとの相互作用の距離を拡張し、レーザー発振を実現する。この方式による FEL は、光共振器を利用する FEL と区別して、シングルパス型 FEL と呼ぶ。100 nm 以下の短波長領域で実現されている FEL は全てシングルパス型である。また後に 6 節で詳しく説明するように、シングルパス型 FEL はさらに SASE 型とシード型に区別される。

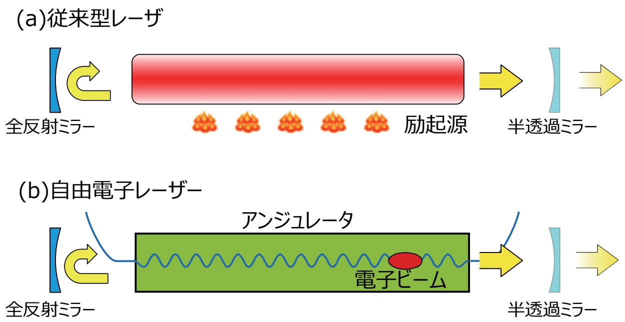

図 1: レーザーの構成要素。(a) 従来型レーザー、(b) 共振器型 FEL。

次節以降で、FEL の発振原理について解説する。まず 2 節では、詳細な FEL 理論への導入として、その発振原理について定性的な解説を試みるとともに、自発放射やコヒーレント放射、またマイクロバンチなど、FEL における重要なキーワードを導入する。次に 3 節において、アンジュレータに入射された電子の周期的磁場における運動を記述するとともに、光との相互作用を 1 次元近似で記述することによって、レーザーゲインを計算するための方程式（FEL 方程式）を導出する。さらに、単純な系においてこれを実際に解くことによって、レーザー発振が実現するための条件について解説する。4 節では、前節で導出した 1 次元における FEL 方程式を、光の回折効果を考慮に入れたものに修正し、これを解析的に解くことができる単純な系に適用することによって、回折の影響について定量的に計算する。そして、5 節において、電子ビームのベータトロン振動を考慮した、普遍性の高い FEL 方程式を近似的に解くことによって得られた、レーザーゲインを評価するための演繹的な計算式を紹介する。最後に 6 節及び 7 節におい

て、X 線領域における FEL の一般的な形態である SASE 型 FEL と、これをさらに高性能化するためのシード型 FEL について一般的な解説を加える。

なお本稿では MKSA 単位系を使用し、また、電子の主たる進行方向（＝アンジュレータ軸方向）を z 軸、これに垂直な水平方向を x 軸、鉛直方向を y 軸で表す。

2 レーザー発振の定性的解釈

次節以降で、FEL のレーザー利得を計算するための FEL 方程式とその解法について解説するが、本節ではそれに先だち、FEL の発振原理について定性的な解説を行う。

2.1 シンクロトロン放射

シンクロトロン放射は、電子などの荷電粒子が偏向磁石の磁場によって曲げられる時に電磁波、即ち光を放出する現象であり、高エネルギー物理学の世界では、円形加速器における最大到達エネルギーを制限するために厄介者として扱われてきた。一方で、光源としてのシンクロトロン放射光は、硬 X 線にまで達する白色スペクトルや鋭い指向性、さらには高い偏光度などの優れた特性を有し、X線管など古くから存在してきたX線源などよりも桁違いに高輝度なX線を供給することができる。また SPring-8 や PF などの放射光施設では、周期的な磁場を発生し電子を蛇行運動させるアンジュレータと呼ばれる装置が多数設置されている。アンジュレータから放出される放射光（アンジュレータ放射光）は、準単色でかつ指向性に優れており、このため、偏光磁石放射光よりも格段に輝度が高い放射光を利用者に供給することができる。また、偏光特性を利用するなど、各種の利用実験に特化した特殊なアンジュレータも多数開発されている。

シンクロトロン放射光やアンジュレータ放射光に関する一般的な理論はそれだけで一つの分野を形成するため、本稿では詳しくは触れない。興味のある読者の方には文献 [1] をお勧めする。

2.2 自発放射とコヒーレント放射

高周波を利用して電子ビームを加速する一般的な加速器では、電子ビームは連続ではなくパルス状に局在化して加速される。これらのパルス状電子ビーム（電子バンチと呼ぶ）には極めて多数の電子が含まれる。例えば SACLA や SPring-8 などで利用される電子バンチの電荷は 0.1 nC から 1 nC であるので、含まれる電子数は 10^9 から 10^{10} にも達する。このような多数の電子で構成される電子バンチからシンクロトロン放射などの光が生成される場合、放出される光の波長 (λ) と、電子バンチ長 (l_b) の大小関係によって、放射の過程を 2 つに分類することができる。以下、Fig. 2 を用いて説明する。

図 2(a) では、バンチ長が波長よりも長い ($l_b > \lambda$)。電子バンチ中に存在する電子は、進行方向に沿って一様かつランダムに分布しているため、個々の電子から放出される光の電磁波もランダムに分布する。後に 6 節で示すとおり、このような場合の光の積算パワーは 1 電子から放出される光のパワーを電子数（$=N$）倍したものと等しい。即ち、光は粒子（光子）として積算される。このような放射過程を自発放射と呼ぶ。

一方、図 2(b) では、バンチ長が波長よりも長い ($l_b < \lambda$)。この場合、光は位相が揃った状態で、波（電磁波）として積算され、その振幅が N 倍となる。このような放射過程をコヒーレント放射と呼ぶ。光のパワーは振幅の平方に比例するので、コヒーレント放射光のパワーは 1 電子から放出される場合の N^2 倍に、従って自発放射光の N 倍となる。前述したとおり、電子バンチには 10^9 から 10^{10} もの電子が含まれるので、何らかの方法で l_b を λ よりも短くすることができれば、極めて明るいコヒーレント放射光を得ることができる。

通常の放射光施設における電子バンチ長はミリメートルのオーダーにあり、これよりも長い波長領域ではコヒーレント放射、短い波長領域では自発放射が主たる放射過程である。一方、X 線のような短波長領域でコヒーレント放射光を得るためには、バンチ長をオングストローム以下まで短縮する必要があるが、これは容易なことではない。

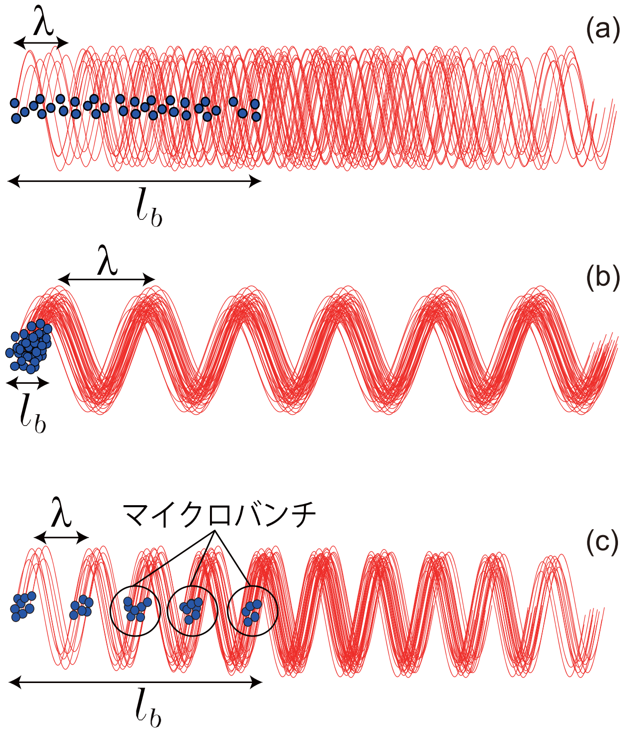

図 2: 電子バンチからの放射過程の分類。(a) 自発放射、(b) コヒーレント放射、(c) 規則正しく配列したマイクロバンチからのコヒーレント放射。

2.3　マイクロバンチによるコヒーレント放射

前節では、コヒーレント放射が起こる条件として、電子バンチ長が光の波長よりも短いことが必要であると説明した。一方でこの条件を満たさない場合においても、例外的にコヒーレント放射が起こる条件が存在する。即ち、進行方向への電子分布が図 2(a) で示したように一様ではなく、同図 (c) のように規則的に集群化している場合がこれにあたる。このように一定の間隔で局在化した電子の塊をマイクロバンチと呼び、これが形成された電子バンチからは、間隔 λ に等しい波長においてコヒーレント放射光が放出される。ただし、これ以外の波長では自発放射が支配的となるため、マイクロバンチを源とするコヒーレント放射光は波長 λ において単色化している。そして FEL とは、「マイクロバンチが形成された電子ビーム [2] から放出されるコヒーレントなアンジュレータ放射」と見なすことができる。

2.4　マイクロバンチの形成

それでは図 2(c) のようなマイクロバンチ、即ち個々の電子が規則的に集群化した状態を電子ビーム中に形成するためにはどのようにすればよいであろうか？結論から述べると、ある波長 λ_1 の光（シード光と呼ぶ [3]）を、電子ビームと同期してアンジュレータに入射すればよいのであるが、これを理解するためには、アンジュレータ磁場中を運動する電子と光の位相関係と、それらが相互作用することで電子ビーム中に誘起される、エネルギー変調並びに密度変調について考察する必要がある。

図 3 に、アンジュレータの周期的磁場で曲げられることによって正弦波軌道（破線）を描く電子ビームと、これと同期してアンジュレータに入射されたシード光の電場（実線）を模式的に示した。ここで、λ_u はアンジュレータの磁場周期長であり、後に 3.1 節で詳しく説明するように、電子は同じ周期で正弦波軌道を描く。ちなみにこの図では電子軌道の振幅は誇張してあり、一般的な軌道振幅は数 μm 程度で、電子ビームの水平サイズよりも小さいことに留意されたい。

軌道上の A 点を電子ビームが通過するときに、電子が光の電場によって加えられる力について考察するため、これらの関係を左上に拡大して示した。各々の円が電子を表し、細い矢印が光の電場ベクトルの x 軸成分 (E_x)、太い矢印が電子の速度ベクトルの x 軸成分 (v_x) を示している。この点では全ての電子が正の x 軸速度成分を有する ($v_x > 0$) 一方、E_x の極性は z 軸座標に依存して周期的に反転する。即ち、領域 (ii) では $E_x < 0$、領域 (i) 及び (iii) では $E_x > 0$ である。電子の電荷を $-e$ で定義すると、電場によって電子が得るエネルギーは $-ev_xE_x$ で計算されるため、領域 (ii) に存在する電子は電場 E_x によって加速され、エネルギーを獲得する一方、領域 (i) 及び (iii) では減速されてエネルギーを失う。言い換えると光と相互作用する。

次に A 点から半周期だけ経過した B 点において同様の考察を行う。先ほどと同様に、電子ビーム

[2] この場合、コヒーレント放射が起こる条件はバンチ長に依存しないため、「電子バンチ」ではなく、あえて「電子ビーム」と記述している。

[3] 英語の Seed ＝種が由来。

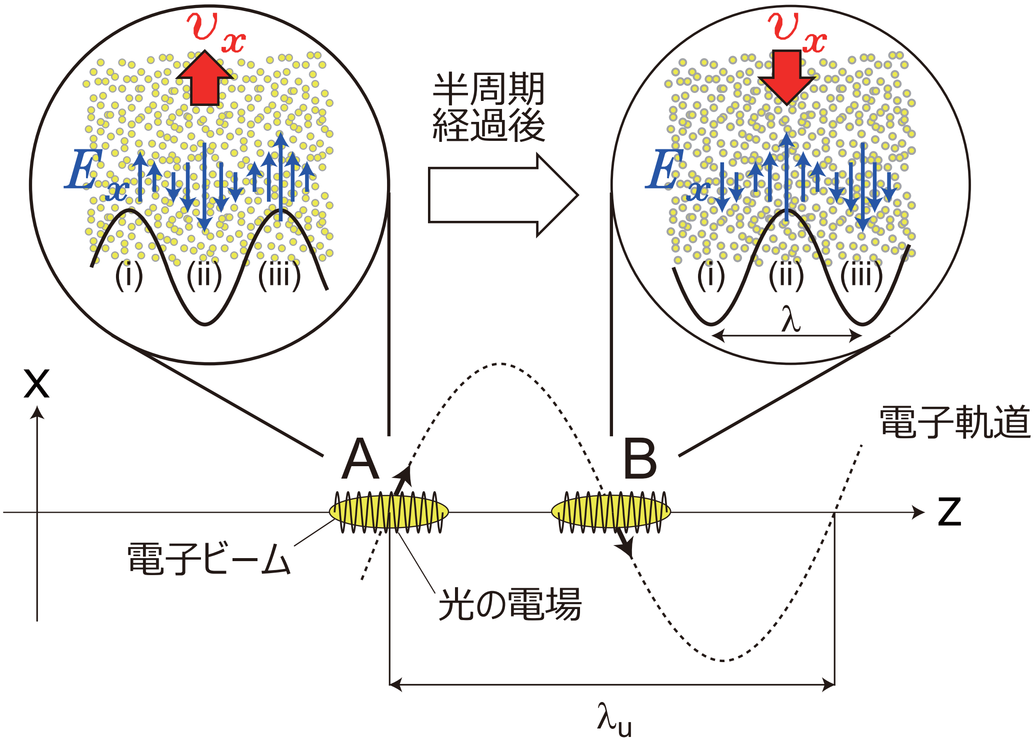

図 3: アンジュレータを進む電子ビームと光の電場との位相関係。

と光の電場の関係を右上に拡大して示した。半周期経過しているために、v_x は反転している。また、E_x も反転している。実はこの条件が、電子ビームと同期して入射するシード光の波長 λ_1 を決定する。即ち、電子がアンジュレータを半周期分移動する間に、半波長に相当する距離だけ光から遅れるのである。ちなみに波長 λ_1 はアンジュレータの基本波長と呼ばれ、3.1 節で詳しく解説する。

さて、v_x 及び E_x がどちらも反転しているため、各領域における電子は先ほどと同じように光と相互作用する。即ち、領域 (ii) ではエネルギーを獲得し、領域 (iii) ではエネルギーを失う。これらの相互作用の結果、アンジュレータを移動する間に、電子ビームには光の波長 λ_1 と同じ周期で、エネルギーが高い領域と低い領域が交互に形成される。これをエネルギー変調と呼ぶ。

次に、このようにして電子ビームに形成されたエネルギー変調が密度変調へと変換される仕組みについて解説する。図 4(a-1) 及び (b-1) に、電子ビームがアンジュレータに入射された直後の電子分布を模式的に示した。どちらの図においても、横軸は z 軸方向を表し、(a-1) では縦軸をエネルギーで表した位相空間における電子分布が、(b-1) では縦軸を x 軸座標で表した実空間における電子分布が、それぞれ示されている。即ち、電子密度が高い領域は濃く、低い領域は薄く示されている。アンジュレータ入口では、エネルギー的にも空間的にも変調はなく、進行方向に沿って一様に分布している。

さて電子ビームがアンジュレータを進むにつれて、図 4(a-2) に示すような、周期 λ_1 でのエネルギー変調が電子ビームに形成されることは前述したとおりである。ただしこの時点では、電子ビームを構成する個々の電子のエネルギーに変化が起こるだけであって、図 4(b-2) に示す実空間では何の変化も起こらない。

ここで、図 4(a-2) に示した、エネルギーの高低がもたらす効果について考察する。FEL で利用される電子のエネルギーは非常に高く、相対性理論が適用される領域にあるため、その速度はエネルギーに依存せずほぼ光速に等しい。しかしながら、アンジュレータの軸方向 (z 軸方向) に沿って、ある一定の距離を移動するのに要する時間はエネルギーに依存し、高エネルギーの電子ほど短い。こ

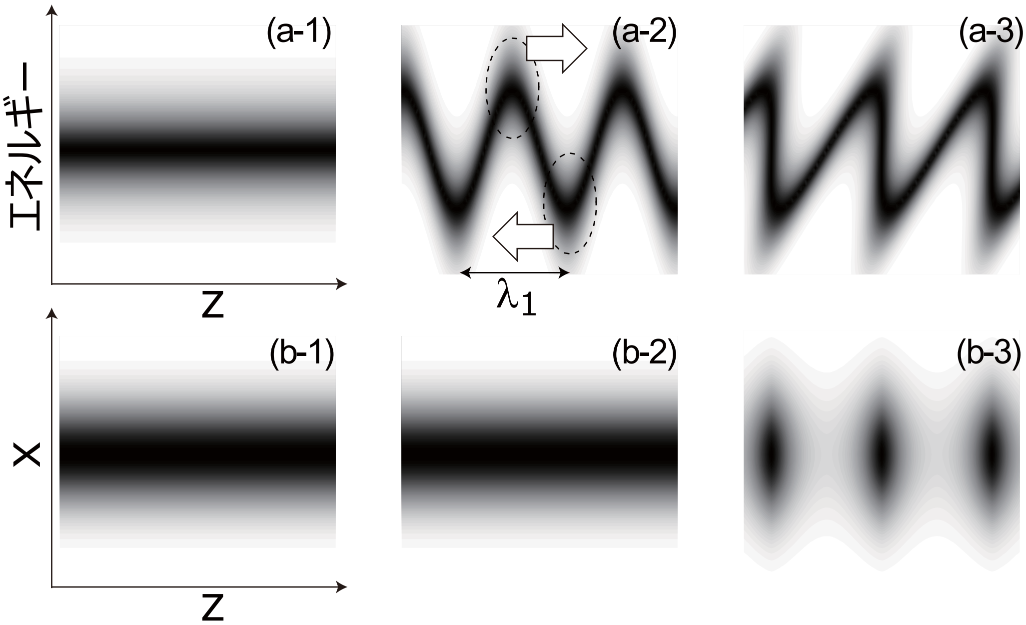

図 4: エネルギー変調が密度変調へ変換される仕組み。

れは電子がアンジュレータを通過する際に描く正弦波軌道の振幅が、エネルギーが高い電子ほど小さく、従って経路長が短いためである。この結果、図 4(a-2) に矢印で示したように、電子ビームを構成する個々の電子のうち、平均値よりも高いエネルギーを持つ電子はビームの前方へ、低いエネルギーを持つ電子は後方へ移動する。そして、ある適切な距離だけ進むと、図 4(a-3) に示したような分布へと変化する。これを実空間で示したものが図 4(b-3) であり、局所的に集群化した電子の塊が周期 λ_1 で規則正しく並んでいること、即ちマイクロバンチが形成されていることがわかる。そして、マイクロバンチが形成された電子ビームからコヒーレント放射光が生成されるというわけである。

実際には、上記で説明した一連のプロセスは同時かつ正帰還的に起こる。即ち、電子ビームと同期して入射したシード光との相互作用によってマイクロバンチが形成され、コヒーレント放射光を放出することによってシード光を増幅し、増幅された光との相互作用によってさらにマイクロバンチの形成が進む、という具合である。これが FEL における増幅作用である。

3 1次元 FEL 理論

前節では FEL における増幅作用を定性的に解説した。即ち、波長 λ_1 のシード光がアンジュレータを移動する電子との相互作用を介して増幅されることにより、レーザーとして発振するわけであるが、その増幅率や、電子ビーム特性の影響、さらにシード光の波長偏差（detuning）などの影響を定量的に評価するためには、前節で解説した増幅の各プロセスを記述するための方程式（FEL 方程式）を導出し、これを解く必要がある。本来は、増幅過程に影響を及ぼす可能性のある全ての要因を厳密に考慮する必要があるが、その場合、解析的に解くことは一般的には不可能であり、数値計算に頼らざるを得ない。これまでに、そのような数値計算を行うためのシミュレーションコードは多数開発されており、FEL に関する理論的な知識が無くとも、レーザー増幅率や光源性能を計算することは可能である。しかしながら、その場合には数値計算に隠れた FEL の物理的な背景を理解することはできない。

そこで本節では、FEL における増幅過程で最も重要な、電子と光の相互作用、マイクロバンチの成長、及びマイクロバンチを形成した電子ビームからの放射、という観点に主眼を置いて考察を進めるため、以下に示す近似を行う。

1) 増幅される光は平面波であり、z 軸に沿って伝播する。

2) 電子ビームは進行方向に垂直な方向 (x 及び y) へ一様に分布している。即ち電子ビームは無限に大きなビームサイズを持つ。

3) 電子ビームに含まれる全ての電子は同じ速度ベクトルを持つ。即ち、全ての電子は互いに平行に運動を行う。

これらの近似と、3.3 節で導入する定常状態を仮定することにより、電子の運動や光の電場ベクトルは、単一の座標 z の関数として表すことができ、方程式を大幅に簡略化できる。この一次元近似に基づく FEL 理論から導出される FEL 方程式は、ある条件のもとで解析的に解くことができ、増幅率やバンド幅などの光源性能が定量的に計算できるため、非常に有用である。

一次元近似に基づく FEL 理論の参考文献として [2]-[6] を挙げる。またこれらの文献を読み解くためには、電磁気学及び特殊相対性理論の知識が必要であるが、このために有名かつ有用なテキストが多数存在するので適宜参照されたい。

3.1 アンジュレータ磁場と電子の運動

まず初めに、アンジュレータが発生する周期磁場中での電子の運動について記述するとともに、アンジュレータの磁場強度を表す重要なパラメータである偏向定数を導入する。

アンジュレータはその磁場分布に応じて様々な種類に分類できるが、本稿では FEL への応用として特に重要な、リニアアンジュレータ及びヘリカルアンジュレータという 2 つを取り上げて解説する。

リニアアンジュレータが発生する周期的な磁場は、以下の式で表すことができる。

$$\boldsymbol{B} = (0, -B_0 \sin k_u z, 0) \tag{3-1}$$

ここで、磁場周期長を λ_u として、$k_u = 2\pi/\lambda_u$ であり、B_0 は垂直磁場成分の振幅を表す。リニアアンジュレータにおいては、電子の運動が水平面内に限られ、この結果放出される光は水平偏光特性を有する [4]。

一方、ヘリカルアンジュレータにおける磁場は、

$$\boldsymbol{B} = (B_0 \cos k_u z, -B_0 \sin k_u z, 0) \tag{3-2}$$

と表される。水平及び垂直磁場の振幅及び周期が同じであること、また、これらの相対位相が $\pi/2$ であることに注意されたい。このため、電子ビームは螺旋状の軌道を描くとともに、3.4 で示す様に円偏光の放射光を発生する。

さて、これらのアンジュレータ磁場中を運動する電子が描く軌道を計算するためには、以下の運動方程式を解く必要がある。

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

$\boldsymbol{p}$ は電子の運動量であり、相対論的電子については $\boldsymbol{p} = \gamma m\boldsymbol{v}$ で計算される。ここで、m は電子の静止質量、$\boldsymbol{v}$ は電子の速度ベクトルであり、また γ は以下の式で定義される、電子のローレンツ因子である。

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}^2}}$$

よく知られているように、ローレンツ因子は電子の全エネルギーと静止エネルギーとの比としても表される。また、$\boldsymbol{\beta}$ は電子の相対速度ベクトルであり、c を真空中での光の速さとして、$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{v}/c$ と表される。

磁場中では電子のエネルギーは変化しない、したがってローレンツ因子は変化しないことを考慮する [5] と運動方程式は、以下のように変形できる。

$$m\gamma\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{3-3}$$

式 (3-3) の x 軸成分を書き出すと、

$$m\gamma\frac{dv_x}{dt} = -e(v_y B_z - v_z B_y)$$

であり、さらにアンジュレータ磁場の z 軸成分が 0 であることを考慮すれば、

$$m\gamma\frac{dv_x}{v_z dt} = m\gamma\frac{dv_x}{dz} = eB_y$$

[4] ただし、軸外では観測角に応じて傾斜した直線偏光が観測される。

[5] 実際には自発放射や FEL 過程で光を増幅することによってエネルギーを失うが、電子軌道を計算するという本節の目的のためにはこの効果は無視できる。

と簡略化される。これを z に関して積分すると、相対速度の x 軸成分が次式のように得られる。

$$\beta_x = \frac{e}{\gamma mc}\int^z B_y(z')dz' \equiv \frac{e}{\gamma mc}I_{1y}(z)$$

また、これを再度 z に関して積分することにより、電子の x 軸での位置座標 x_e が得られる。

$$x_e = \frac{e}{\gamma mc}\int^z dz' \int^{z'} B_y(z'')dz'' \equiv \frac{e}{\gamma mc}I_{2y}(z)$$

ここで定義された I_{1y} 及び I_{2y} はそれぞれ、垂直磁場の一次及び二次積分と呼ばれ、それぞれ電子の x 軸方向への相対速度及び位置座標を（係数を除いて）表す。全く同様に、y 軸方向についても、

$$\begin{aligned}\beta_y &= -\frac{e}{\gamma mc}I_{1x}(z)\\ y_e &= -\frac{e}{\gamma mc}I_{2x}(z)\end{aligned}$$

と計算される。I_{1x} 及び I_{2x} は水平磁場の一次及び二次積分である。

それでは実際に、アンジュレータの磁場分布 (3-1) 及び (3-2) を代入して、電子軌道を計算してみよう。簡単な積分操作により次式が得られる。

$$\beta_x = K\gamma^{-1}\cos k_u z \tag{3-4}$$

$$\beta_y = \begin{cases} 0 & ;リニア \\ -K\gamma^{-1}\sin k_u z & ;ヘリカル \end{cases} \tag{3-5}$$

ここで、K は次式で定義される偏向定数と呼ばれるパラメータである。

$$K = \frac{eB_0\lambda_u}{2\pi mc}$$

これはK値とも呼ばれ、アンジュレータの磁場強度を表す無次元のパラメータである。

さて、速度ベクトル $\boldsymbol{\beta}$ の大きさは磁場中では変化しないので、残る z 成分については

$$\begin{aligned}\beta_z &= \sqrt{\boldsymbol{\beta}^2 - \beta_x^2 - \beta_y^2}\\ &\simeq 1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{\beta_x^2+\beta_y^2}{2} \qquad (3\text{-}6)\end{aligned}$$

と計算できる。尚、式 (3-6) の導出の際にローレンツ因子 γ が 1 よりもずっと大きいという近似を利用していることに注意されたい。

式 (3-4)∼(3-6) がアンジュレータの磁場中で運動する電子の速度ベクトルの各成分を表すが、これらは座標 z を介して時刻 t の関数として表すことができる。言い換えると、電子の運動を記述する独立変数は t である。一方、FEL における増幅過程を記述するためには、座標 z を独立変数に選ぶ方が都合が良い。そこで今後の利便性のため、以下の関係式を用いて独立変数を t から z に変換する。

$$\frac{dt(z)}{dz} = \frac{1}{c\beta_z(z)}$$

式 (3-4)∼(3-6) を上式に代入して整理すると、$t(z)$ を以下に示すとおり 2 つの項に分解できる。

$$t(z) = \bar{t}(z) + \delta t(z)$$

第 1 項の $\bar{t}(z)$ は、周期的関数 $t(z)$ を 1 周期に渡って平均することによって得られ [6]、以下の微分方程式を満たす。

$$\frac{d\bar{t}(z)}{dz} = \frac{1}{c}\left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_u}\right) \tag{3-7}$$

ここで、λ_1 はアンジュレータ放射光の基本波長であり、次式で定義される。

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} \times \begin{cases} 1 + K^2/2 & ;リニア \\ 1 + K^2 & ;ヘリカル \end{cases} \tag{3-8}$$

よく知られているように、単一電子が放出するアンジュレータ放射光のスペクトルは λ_1 を中心波長とし、周期数の逆数に比例するバンド幅を持つ [1]。

第 2 項の $\delta t(z)$ は、電子が座標 z に到達する時刻の、平均時刻 $\bar{t}(z)$ からのずれを表し、次式で定義される。

$$\delta t(z) = \begin{cases} \dfrac{K^2}{8\gamma^2 k_u c}\sin 2k_u z & ;リニア \\ 0 & ;ヘリカル \end{cases} \tag{3-9}$$

リニアアンジュレータでは、$\delta t(z)$ は周期 $\lambda_u/2$ の周期関数であり、ある座標 z に到達する時刻は平均時刻 $\bar{t}(z)$ のまわりで振動する。一方、ヘリカル

[6] 本稿では、周期的関数 f の 1 周期に渡る平均操作を $\overline{f}$ で表す。

アンジュレータでは $\delta t(z)=0$、即ちアンジュレータ軸方向への速度は一定である。

さて式 (3-7) から、

$$\frac{d}{dz}[z-c\bar{t}(z)]=-\frac{\lambda_1}{\lambda_u}$$

が成り立つことがわかる。電子が距離 z を進む間に、光は距離 $c\bar{t}(z)$ だけ進むから、この式は電子が光から遅れていく割合を示している。即ち図 5 に示したように、アンジュレータを 1 周期だけ進む間に、電子は光から λ_1 の距離だけ取り残される。逆に電子の立場からは、光が前方へすり抜けていくように見える [7]。

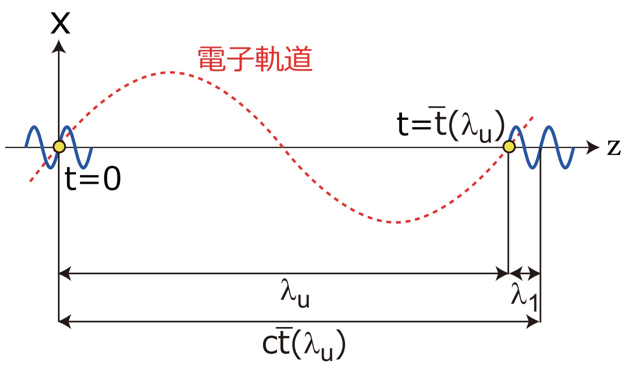

図 5: 時刻 $t=0$ に同時に原点を出発し、z 軸方向へ進行する電子（丸）と光（実線）。電子は 1 周期進んだ時点で、$c\bar{t}(\lambda_u)-\lambda_u=\lambda_1$ だけ光から遅れる。

3.2 電子位相の導入

前節では、単一の電子がアンジュレータの周期的磁場で行う運動について考察し、座標 z への到達時刻 $t(z)$ や、その地点での相対速度を表す表式を導出した。電子ビームに含まれる個々の電子はこれらの表式に従って運動するが、時刻についてはビーム全体の平均値から相対的に記述する方が便利である。即ち、以下で定義される相対時刻 τ_j を導入する。

$$\tau_j=t_j-\langle t(z)\rangle \tag{3-10}$$

[7] これを光のスリッページ (slippage) と呼ぶ。

ここで、$\langle\rangle$ はバンチ全体にわたる平均操作を意味し、また添え字 j は、電子ビームに含まれる j 番目の電子に関するものであることを示す。即ち、τ_j は j 番目の電子に関する時間的な偏差を表す。これは以下の操作によって、進行方向に沿った距離的な偏差 s_j に変換できる。

$$\begin{aligned} s_j &= -c\tau_j=c\langle t(z)\rangle-ct_j \\ &= z+\frac{\lambda_1(\gamma_0)}{\lambda_u}z+c\delta t_j-ct_j \\ &= z+\frac{\lambda_1(\gamma_0)}{\lambda_u}z-c\bar{t}_j \end{aligned}$$

ここで、$t(z)$ に式 (3-7) を代入し、λ_1 のバンチ全体に渡る平均値が $\lambda_1(\gamma_0)$ であることを用いた。ここで、γ_0 は電子ビームの平均エネルギーを表す。さらに、s_j にアンジュレータの基本波長を持つ光の波数 $k_1=2\pi/\lambda_1$ を乗ずることによって、以下の式で定義される位相偏差へ変換することができる。

$$\psi_j\equiv k_1s_j=k_1z+k_uz-\omega_1\bar{t}_j(z) \tag{3-11}$$

新たに導入された変数 ψ は、電子の時刻 t の代わりに使用することができ、以下の微分方程式を満たす。

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dz} &= k_u\left[1-\frac{\lambda_1(\gamma)}{\lambda_1(\gamma_0)}\right] \\ &= 2k_u\frac{\gamma-\gamma_0}{\gamma_0} \end{aligned} \tag{3-12}$$

ここで、$|\gamma-\gamma_0|/\gamma_0\ll 1$ を仮定した。

3.3 光電場と電子分布関数

FEL における増幅過程を調べるためには、光との相互作用に伴って電子ビームにマイクロバンチが形成される過程と、マイクロバンチによるコヒーレント放射の過程について記述する必要がある。即ち、増幅される光の電場を表す関数 $\boldsymbol{E}(z,t)$ と、マイクロバンチを表現するための電子密度分布を表す関数 $n(z,t)$ に関して必要な方程式を導出し、これを解く必要があるが、これらの方程式を解析的に解くためには、前提となる予備知識に基づき、適切な近似を行う必要がある。そこでまず、これらの関数が z 及び t に対して持つ依存性について

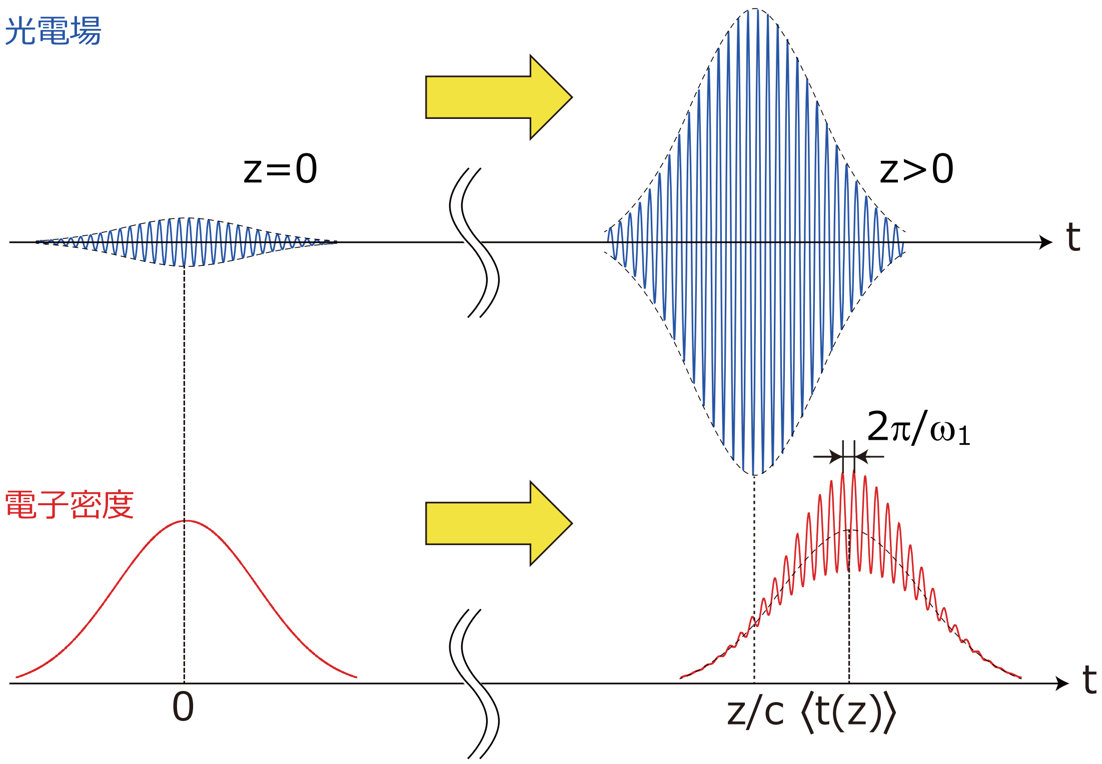

図 6: 光及び電子ビームがアンジュレータを進行するにつれて変化する、光電場（上段）と電子密度（下段）時間分布関数の模式図。

定性的に説明することにより、今後の解析を容易にするための数式表現を導入する。

図 6 に、アンジュレータに入射された電子ビームの密度と、波長 λ_1 を持つ光電場の時間分布関数を、典型的な 2 つの z 座標について模式的に示す。

アンジュレータ入口（$z = 0$）では、光と電子ビームは同期しており、このときの時刻を $t = 0$ とする。この時点では電子ビームにマイクロバンチは形成されておらず、規則的な密度変調は見られない。

この後、電子ビームは光とともにアンジュレータを進行するが、2.4 節で解説した原理に従って光と相互作用する、即ち、エネルギーをやり取りする。相互作用の過程が十分に進んだある座標 $z > 0$ において、電子ビームには $\lambda_1/c = 2\pi/\omega_1$ に等しい時間間隔の密度変調（マイクロバンチ）が誘起されるとともに、光の電場振幅は増大する。さらに言うまでも無いことであるが、光電場、電子密度分布ともその中心時刻はシフトしている。即ち、座標 z に到達する時刻は光では z/c、電子では $\langle t(z)\rangle$ であるため、各分布関数の中心時刻は、これらの時間だけシフトしている。

さて上で説明したように、光の電場及び電子密度を表す時間分布関数 $\boldsymbol{E}(z,t)$、$n(z,t)$ はいずれも、時間分布関数の中心時刻が座標 z とともにシフトし、かつ周期 $2\pi/\omega_1$ で時間的に激しく振動する成分を有する関数である。このような関数は以下の数式で表現することが理にかなっている。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(z,t) &= \tilde{\boldsymbol{E}}(z;t-z/c)\mathrm{e}^{-i\omega_1(t-z/c)} \\ &\quad + \mathrm{c.c.} \qquad (3\text{-}13)\\ n(z,t) &= n_0(\tau) + n_1(z;\tau)\mathrm{e}^{-i\omega_1\tau} + \mathrm{c.c.}\end{aligned}$$

ここで、τ は式 (3-10) で定義した相対時刻である。また、c.c. は複素共役を表す。

関数 $\tilde{\boldsymbol{E}}(z;t-z/c)$ 及び $n_1(z;\tau)$ は、座標 z で観測した光電場の複素振幅、及び電子ビームに誘起された密度変調の複素振幅を表し、増幅が進むにつれて（即ち z 座標の増加とともに）絶対値が緩やかに増大する。即ち、指数因子による振動成分と比較した場合、$|\tilde{\boldsymbol{E}}|$ や $|n_1|$ の変化率は極めて小さい。このように、激しく振動する因子と緩やかに変化する因子を分離することによって、今後の

解析が容易になる。

さらに、電子ビーム及びこれと同期して入射したシード光が進行方向に一様な分布関数を持つときには、ある固定した座標 z において観測される電子ビームや光のパワーは、時間に依存せず一定となる、即ち定常状態にある。このような条件においては、関数 $\tilde{\boldsymbol{E}}$、n_0 及び n_1 から、時刻に関連した引数を省くことができる。即ち、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(z,t) &= \tilde{\boldsymbol{E}}(z)\mathrm{e}^{-i\omega_1(t-z/c)} + \mathrm{c.c.} \\ n(z,\psi) &= n_0 + n_1(z)\mathrm{e}^{i\psi} + \mathrm{c.c.}\end{aligned} \quad (3\text{-}14)$$

と簡略化できる。ここで、式 (3-11) で定義した位相変数 ψ を導入し、電子の密度分布関数に関して引数を t から ψ へ変更した。

さて電子ビームには様々なエネルギーの電子が含まれているが、上で導入した密度分布関数 $n(z,\psi)$ には、マイクロバンチの形成を考える上で重要となる、電子のエネルギー分布の情報が含まれていない。そこで、エネルギー γ を引数として含む電子の分布関数を以下のように定義する。

$$f(z,\psi,\gamma) = f_0(\gamma) + f_1(z,\gamma)\mathrm{e}^{i\psi} + \mathrm{c.c.} \quad (3\text{-}15)$$

ここで、f_0 及び f_1 は以下の式を満たす。

$$\begin{aligned}n_0 &= \int f_0(\gamma)d\gamma \\ n_1(z) &= \int f_1(z,\gamma)d\gamma\end{aligned} \quad (3\text{-}16)$$

積分はいずれも全エネルギー領域で行う。

関数 f_1 や n_1 が持つ意味を明確にするため、位相空間 (ψ,γ) における電子分布を模式的に図 7 に示す。左側中段は、増幅初期における電子分布 $f(\psi,\gamma)$ の等高線プロットであって、エネルギー変調は誘起されているものの、未だに密度変調に変換されていない。即ち、f を γ に対して積分することで得られる密度分布 $n(\psi)$（上段）は一定であり、初期値 n_0 に等しい。しかしながら、あるエネルギー γ' で切り出した電子分布 $f(\psi,\gamma=\gamma')$ には密度変調が確認される。このように、エネルギーを γ' で固定したときの密度変調の複素振幅が $f_1(\gamma')$ であり、その絶対値が振幅、偏角が位相を表す。

右側中段には、増幅が進んだ状態での電子分布 $f(\psi,\gamma)$ の等高線プロットを示す。この場合、エネルギーで積分した状態の密度分布 $n(\psi)$ においても変調が確認できるが、その複素振幅が n_1 であり、その絶対値が振幅、偏角が位相を表す。

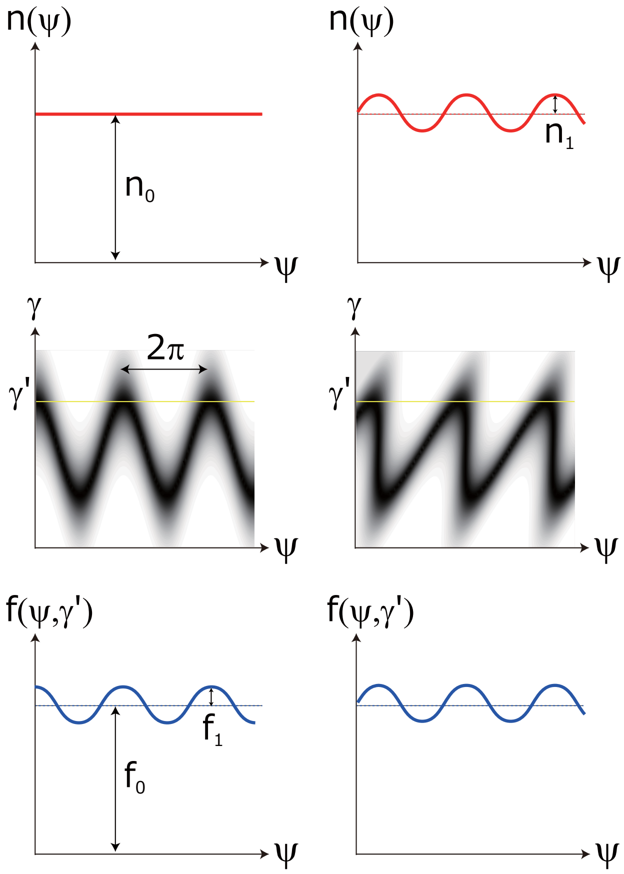

図 7: 位相空間 (ψ,γ) での電子分布の模式図。

3.4 マイクロバンチによる光電場の成長

前節で導入した n_1 は、周期 λ_1 をもつ密度変調の振幅、即ちマイクロバンチ成分の大きさを表すと考えられる。次に、このように形成されたマイクロバンチによって光電場が成長する様子について考察する。

Maxwell 方程式を少し変形することにより得られる、電場に関する波動方程式から出発する。

$$\nabla^2\boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0\frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\rho_e \quad (3\text{-}17)$$

ここで、μ_0 は真空の透磁率、$\boldsymbol{j}$ 及び ρ_e は電子ビームの電流密度及び電荷密度である。

現在想定している1次元近似では光は平面波であるので、x 及び y に関する微分を省くことができ、次式を得る。

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} \quad (3\text{-}18)$$

次に、光の電場を以下の形式で表す[8]。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{e}_x[E_x(z)\mathrm{e}^{ikz-i\omega t} + \mathrm{c.c.}] \\ &\quad + \boldsymbol{e}_y[E_y(z)\mathrm{e}^{ikz-i\omega t} + \mathrm{c.c.}] \end{aligned} \quad (3\text{-}19)$$

これは、式 (3-13) で導入された表式を、任意の波長 λ を持つ光電場へ拡張したものであり、$k = 2\pi/\lambda$、$\omega = kc$ である。ただし、基本波長からの偏差は小さいと仮定する（$|1 - \lambda/\lambda_1| \ll 1$）。また、$\boldsymbol{e}_x$ 及び $\boldsymbol{e}_y$ はそれぞれ x 及び y 方向への単位ベクトルである。

式 (3-19) を (3-18) に代入し、x 成分について整理すると次式を得る。

$$2ik\frac{\partial E_x(z)}{\partial z}\mathrm{e}^{ikz-i\omega t} + \mathrm{c.c.} = \mu_0 \frac{\partial j_x}{\partial t} \quad (3\text{-}20)$$

ただし、$E_x(z)$ が z に対して緩やかに変化することを仮定し、z に対する二階微分の項を省いた。さらに右辺は以下のように計算される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial j_x}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}[-ecn(z,\psi)\langle\beta_x\rangle] \\ &\simeq ec\omega\frac{\partial}{\partial\psi}(n_1(z)\mathrm{e}^{i\psi} + \mathrm{c.c.})\frac{K}{\gamma_0}\cos k_u z \end{aligned} \quad (3\text{-}21)$$

式 (3-21) を (3-20) に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{dE_x(z)}{dz} &= \frac{\mathrm{e}^{-ikz+i\omega t}}{2k}\mu_0 ec\omega n_1(z)\mathrm{e}^{i\psi}\frac{K}{\gamma_0}\cos k_u z \\ &= \frac{\mu_0 ec^2 K}{4\gamma_0}\kappa(z)n_1(z)\mathrm{e}^{-ik_u z(1-\omega/\omega_1)} \end{aligned} \quad (3\text{-}22)$$

ここで、$\kappa(z)$ は

$$\kappa(z) = (1 + \mathrm{e}^{2ik_u z})\mathrm{e}^{i\omega\delta t(z)} \quad (3\text{-}23)$$

で定義される関数である。また、以下の関係を用いた。

$$\psi - kz + \omega t = k_u z - k_u z\left(1 - \frac{\omega}{\omega_1}\right) + \omega\delta t$$

さて式 (3-22) の右辺は、係数を別にすると、z の関数として表される3つの因子の積であるが、このうち、$\kappa(z)$ は z に対して周期 $\lambda/2$ で振動する一方、それ以外の $n_1(z)$ 及び指数因子の変化率は、これよりもずっと遅いと考えられる（$|1-\omega/\omega_1| \ll 1$ であることに注意）。そこで、$\kappa(z)$ についてはアンジュレータの一周期で平均化し、方程式を簡略化する。付録付録 A を参照して計算すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{dE_x(z)}{dz} &= \frac{\mu_0 ec^2 K\overline{\kappa}}{4\gamma_0} \\ &\quad \times n_1(z)\mathrm{e}^{-ik_u z(1-\omega/\omega_1)} \end{aligned} \quad (3\text{-}24)$$

ここで $\overline{\kappa}$ は次式で定義される。

$$\overline{\kappa} = \begin{cases} J_0\left(\frac{K^2/2}{2+K^2}\right) - J_1\left(\frac{K^2/2}{2+K^2}\right) & ;\text{リニア} \\ 1 & ;\text{ヘリカル} \end{cases} \quad (3\text{-}25)$$

次に y 成分について考えよう。リニアアンジュレータでは明らかに $E_y(z) = 0$ である。一方ヘリカルアンジュレータでは、上と同様の手続きにより次式を得る。

$$\frac{dE_y(z)}{dz} = -i\frac{\mu_0 ec^2 K}{4\gamma_0}n_1(z)\mathrm{e}^{-ik_u z(1-\omega/\omega_1)} \quad (3\text{-}26)$$

これらは以下のようにまとめることができる。

$$E_y(z) = \begin{cases} 0 & ;\text{リニア} \\ -iE_x(z) & ;\text{ヘリカル} \end{cases}$$

以上の考察から、リニアアンジュレータからは水平偏光が、ヘリカルアンジュレータでは円偏光が得られることがわかる。

ここまでの結果を統一的に記述するために、合成電場振幅 $E_\perp$ 及び合成偏向定数 $K_\perp$ を以下の式で導入する。

$$E_\perp = \begin{cases} E_x & ;\text{リニア} \\ \sqrt{2}E_x = i\sqrt{2}E_y & ;\text{ヘリカル} \end{cases}$$

$$K_\perp = \begin{cases} K & ;\text{リニア} \\ \sqrt{2}K & ;\text{ヘリカル} \end{cases}$$

[8] ここでは、光の電場の z 成分は無視しているが、空間電荷による影響が無視できない長波長領域における FEL ではこれは必ずしも正しくない。

これらを用いることにより、アンジュレータの種類による偏向定数及び電場振幅の相違を表 1 にまとめた形で表すことができる。

表 1: 合成電場振幅 $E_\perp$ 及び合成偏向定数 $K_\perp$ による、偏向定数、水平電場振幅及び垂直電場振幅の記述。

	ヘリカル アンジュレータ	リニア アンジュレータ
K	$K_\perp/\sqrt{2}$	$K_\perp$
E_x	$E_\perp/\sqrt{2}$	$E_\perp$
E_y	$-iE_\perp/\sqrt{2}$	0

さて、$E_\perp$ 及び $K_\perp$ を利用することにより、式 (3-24) 及び (3-26) は以下のようにまとめることができる。

$$\frac{dE_\perp}{dz} = \frac{\mu_0 ec^2 K_\perp \overline{\kappa}}{4\gamma_0} n_1(z)\mathrm{e}^{-ik_u z(1-\omega/\omega_1)} \quad (3\text{-}27)$$

また、アンジュレータの基本波長は

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2}(1 + K_\perp^2/2) \quad (3\text{-}28)$$

であり、さらに光のパワー密度 P は

$$P = \varepsilon_0 c\overline{|\boldsymbol{E}|^2} = 2\varepsilon_0 c|E_\perp|^2 \quad (3\text{-}29)$$

と、アンジュレータの種類によらず統一的に記述することができる。

ちなみに、$E_\perp$ 及び $K_\perp$ を「合成」と称する理由は、アンジュレータの種類によらず

$$\begin{aligned} |E_\perp| &= \sqrt{|E_x|^2 + |E_y|^2} \\ K_\perp &= \sqrt{K_x^2 + K_y^2} \end{aligned}$$

が成り立つことによる。ここで $K_{x,y}$ は、一般的なアンジュレータにおける周期的水平磁場及び垂直磁場の磁場振幅（これらは一般的には等しくない）に相当する偏向定数である。

3.5 位相空間における電子の運動方程式

関数 $f(z,\psi,\gamma)$ は、座標 z における、位相空間 (ψ,γ) 上での電子の分布関数を表すが、これが座標 z とともに変化する様子を調べることによって、光と電子ビームの相互作用によって誘起されるエネルギー変調及び密度変調を評価することができる。このためには、位相空間における電子の運動方程式を解くことによって、個々の電子の運動を特定する 2 つの座標変数、即ち位相 ψ とエネルギー γ を z の関数として表す必要がある。

これらの 2 つの座標変数のうち、位相については既に式 (3-12) が導出されているので、残りの変数である γ について考える。このためには、アンジュレータ磁場中で運動する電子と、これに同期して入射されたシード光との相互作用、具体的にはエネルギーのやりとりについて考察する必要がある。

相対論的電子のエネルギー変化は、

$$mc^2\frac{d\gamma}{dt} = \boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

と表される。一方、電磁場中の電子の運動方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -e(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{E})$$

であるから、上式に代入することにより、独立変数である座標 z を用いて

$$\frac{d\gamma}{dz} \simeq \frac{d\gamma}{cdt} = -\frac{e}{mc^2}\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E}$$

と書き直すことができる。即ち、2 つのベクトル $\boldsymbol{\beta}$ と $\boldsymbol{E}$ の内積が電子のエネルギー変化を表す。

ここで、前節で導出した結果を適用することによって、リニアアンジュレータの場合とヘリカルアンジュレータの場合にわけて $\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E}$ を計算する。

まず、リニアアンジュレータでは

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E} &= \frac{K_\perp}{\gamma}\cos k_u z[E_\perp(z)\mathrm{e}^{ikz-i\omega t} + \mathrm{c.c.}] \\ &= \frac{K_\perp}{2\gamma}E_\perp(z)\kappa^*(z)\mathrm{e}^{i\psi}\mathrm{e}^{ik_u z(1-\omega/\omega_1)} + \mathrm{c.c.} \end{aligned}$$

と計算される。ここで κ^* は式 (3-23) で定義される関数の複素共役である。

ヘリカルアンジュレータでは

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E} &= \frac{K_\perp}{2\gamma}\cos k_u z[E_\perp(z)\mathrm{e}^{ikz-i\omega t} + \mathrm{c.c.}] \\ &\quad -\frac{K_\perp}{2\gamma}\sin k_u z[E_\perp(z)\mathrm{e}^{ikz-i\omega t} + \mathrm{c.c.}] \\ &= \frac{K_\perp}{2\gamma}E_\perp(z)(z)\mathrm{e}^{i\psi}\mathrm{e}^{ik_u z(1-\omega/\omega_1)} + \mathrm{c.c.} \end{aligned}$$

リニアアンジュレータに関して関数 $\kappa^*(z)$ の周期平均操作（付録付録 A）を実行し、また式 (3-25) を考慮すれば、アンジュレータの種類によらない形で電子のエネルギー方程式が次式のように得られる。

$$\frac{d\gamma}{dz} = -\frac{eK_\perp \overline{\kappa}}{2mc^2\gamma_0} E_\perp \mathrm{e}^{i\psi} \mathrm{e}^{ik_u z(1-\omega/\omega_1)} + \mathrm{c.c.} \quad (3\text{-}30)$$

ここで、$\overline{\kappa}$ の物理的な意味について考察しよう。3.1 節で議論したように、リニアアンジュレータを進行する電子の z 軸方向への速度は一定ではなく、ある周期 $\lambda_u/2$ で振動する。この振動のために、電子と光の相対位相も（僅かではあるが）周期的に振動する。この振動は、電子のエネルギー変化やマイクロバンチによる光の増幅など、電子と光の相互作用に起因する現象に影響を及ぼす。$\overline{\kappa}$ は、この相互作用の効率を表すパラメータである。これは、電子速度の振動が生じないヘリカルアンジュレータでは $\overline{\kappa} = 1$ であること、また光の増幅を表す式 (3-27) 及び電子のエネルギー方程式 (3-30) に $\overline{\kappa}$ が含まれていることからも理解できるであろう。

3.6　マイクロバンチの成長

次に、マイクロバンチの成長について考察しよう。このためには、関数 f_1 あるいは n_1 が、電子ビームがアンジュレータを進行するに伴って変化する様子を記述する方程式を導出する必要がある。このため、電子の分布関数 $f(z, \psi, \gamma)$ に連続の式を適用する。即ち、

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{d\psi}{dz}\frac{\partial f}{\partial \psi} + \frac{d\gamma}{dz}\frac{\partial f}{\partial \gamma} = 0$$

式 (3-15) を代入し、整理すると、

$$\left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial z} + i f_1 \frac{d\psi}{dz}\right)\mathrm{e}^{i\psi} + \mathrm{c.c.}\right] + \frac{d\gamma}{dz}\frac{df_0}{d\gamma} = 0$$

ただしここで、

$$\left|\frac{df_0}{d\gamma}\right| \gg \left|\frac{\partial f_1}{\partial \gamma}\right|$$

を仮定した [9]。

[9] この仮定は、増幅の初期過程では正しいが、増幅が進むにつれてにエネルギー変調が大きくなると正当性が失われる。これはレーザー強度の飽和に相当する現象である。

この式に、位相空間 (ψ, γ) における個々の電子の運動方程式 (3-12) 及び (3-30) を代入することにより次式が得られる。

$$\frac{1}{k_u}\frac{\partial f_1}{\partial z} + 2 i f_1 \frac{\gamma - \gamma_0}{\gamma_0} = \frac{df_0}{d\gamma}\frac{E_\perp(z)}{2E_1}\mathrm{e}^{ik_u z(1-\omega/\omega_1)} \quad (3\text{-}31)$$

ここで E_1 は

$$E_1 = \frac{mc^2 k_u}{e\overline{\kappa}K_\perp} \quad (3\text{-}32)$$

で定義される、電場の次元を持つパラメータである。

3.7　FEL 微積分方程式

前節で導出した方程式 (3-31) は、f_1、即ちエネルギー γ における密度変調の複素振幅の成長を記述する。一方、光電場の複素振幅 $E_\perp$ の成長は方程式 (3-27) によって記述できることは既に述べた。従って、これらの方程式を同時に満たす f_1 及び $E_\perp$ を見つけることが次の課題となる。このため、方程式 (3-27) を密度変調 f_1 を利用して以下の形に書き直す。

$$\frac{1}{k_u}\frac{dE_\perp(z)}{dz} = E_2 \frac{\mathrm{e}^{-ik_u z(1-\omega/\omega_1)}}{n_0\gamma_0}\int f_1 d\gamma \quad (3\text{-}33)$$

ここで、E_2 は

$$E_2 = \frac{\mu_0 e c^2 \overline{\kappa} K_\perp n_0}{4k_u} \quad (3\text{-}34)$$

で定義される、電場の次元を持つパラメータである。

2 つの方程式 (3-31) 及び (3-33) を解くことにより、マイクロバンチ成分 f_1 及び電場の複素振幅 $E_\perp$ が決定されるが、これらはより便利な、$E_\perp$ に関する単一の微積分方程式に変換することができる。

まず、方程式 (3-31) を関数 f_1 について解くと、

$$\begin{aligned} f_1(z,\gamma) &= \frac{k_u}{2\gamma_0}\frac{df_0}{d\gamma}\int_0^z dz' \frac{E_\perp(z')}{E_1} \\ &\times \exp\left[2ik_u(z'-z)\frac{\gamma-\gamma_0}{\gamma_0} - ik'_u z\frac{\omega-\omega_1}{\omega_1}\right] \end{aligned} \quad (3\text{-}35)$$

これを (3-33) に代入することにより、次式が得られる。

$$\frac{1}{k_u}\frac{dE_\perp(z)}{dz} = \frac{E_2}{E_1}\frac{k_u}{2\gamma_0^2 n_0}\int d\gamma \frac{df_0}{d\gamma}\int_0^z dz'$$
$$E_\perp(z')\exp\left[ik_u(z'-z)\left(2\frac{\gamma-\gamma_0}{\gamma_0}-\frac{\omega-\omega_1}{\omega_1}\right)\right]$$

これは、電場の複素振幅を与える FEL 微積分方程式である。この方程式を簡略化するために以下のように規格化を行う。

まず、次式で定義されるパラメータ ρ を導入する。

$$(2\rho\gamma_0)^3 = \frac{E_2}{E_1}$$

式 (3-32) 及び (3-34) より、

$$\rho = \left(\frac{\pi\bar{\kappa}^2 K_\perp^2}{8\gamma_0^3 k_u^2}\frac{j_0}{I_A}\right)^{1/3} \tag{3-36}$$

ここで、$j_0 = ecn_0$ は電子ビームの電流密度、また I_A は Alfven 電流と呼ばれる電流の次元を持つパラメータで、次式で定義される。

$$I_A = \frac{4\pi\varepsilon_0 mc^3}{e}$$

この後で示す様に、ρ は FEL におけるレーザーゲインや光源性能に深く関連する重要な物理量であって、Pierce パラメータあるいは FEL パラメータと呼ばれる。また、実用的な FEL における ρ は一般的に $10^{-4} \sim 10^{-2}$ の範囲にある。

ここで、アンジュレータの種類による FEL 増幅の相違について調べてみよう。式 (3-36) から明らかなように、同じ波長、即ち同じ $K_\perp$ で比較した場合のリニアアンジュレータとヘリカルアンジュレータにおける FEL パラメータの相違は、$\bar{\kappa}$ の違いに帰着する。即ち

$$\frac{\rho_l}{\rho_h} = \left[J_0\left(\frac{K^2/2}{2+K^2}\right) - J_1\left(\frac{K^2/2}{2+K^2}\right)\right]^{2/3}$$

ここで、ρ_h 及び ρ_l はそれぞれヘリカル及びリニアアンジュレータを利用したときの FEL パラメータである。図 8 に、これらの比をリニアアンジュレータの偏向定数の関数として計算したものを示す。

K が 0 に近いときには ρ_l と ρ_h はほぼ等しい（即ち、アンジュレータの種類による増幅の相違はない）が、その比は K の増加に伴って低下し、$K > 6$ の領域において 80%程度で一定となる。従って、K が大きい条件においてはヘリカルアンジュレータを採用する方が有利であるが、磁気回路が複雑になるなどのデメリットもあるため、アンジュレータの磁気回路や到達磁場を含めて総合的に判断する必要がある。

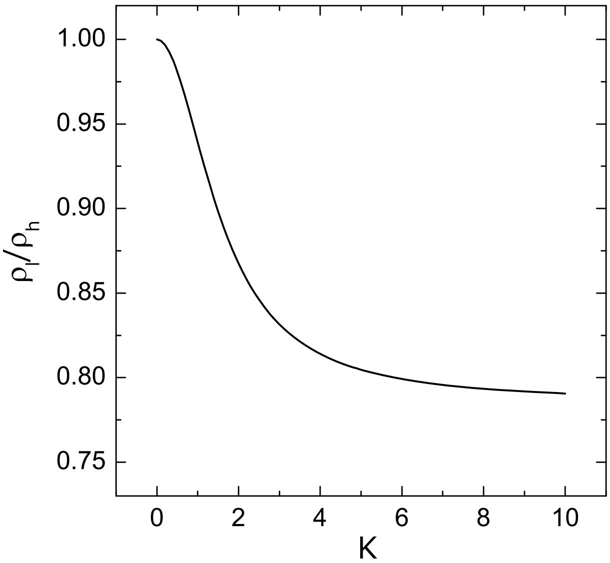

図 8: リニア及びヘリカルアンジュレータにおける FEL パラメータの比率。

次に z 座標、電子のエネルギー偏差、及びシード光の波長偏差を ρ 及び k_u によって以下のように規格化する。

$$\hat{z} = 2\rho k_u z \tag{3-37}$$
$$\hat{\eta} = \frac{\gamma-\gamma_0}{\rho\gamma_0} \tag{3-38}$$
$$\hat{\nu} = \frac{\omega-\omega_1}{2\rho\omega_1} \tag{3-39}$$

これらの操作によって、規格化された FEL 微積分方程式が得られる。

$$\frac{dE_\perp(\hat{z})}{d\hat{z}} = \frac{\rho\gamma_0}{n_0}\int d\hat{\eta}\frac{df_0}{d\hat{\eta}} \times\int_0^{\hat{z}} d\hat{z}' E_\perp(\hat{z}')\exp[i(\hat{z}'-\hat{z})(\hat{\eta}-\hat{\nu})] \tag{3-40}$$

3.8　FEL 微分方程式の導出

一般的に、前節で導出した FEL 微積分方程式 (3-40) はラプラス変換によって解くことができる。実際、初期エネルギー分布関数 f_0 が、より一般性の高いガウシアンで表される場合には、これが最も正当なやり方である。しかしながら、レーザースペクトルのバンド幅や電子エネルギー幅の影響などを調べる際に複雑な数値計算が必要となり、必ずしも FEL における物理的イメージを理解するのに有用ではない。

一方で、f_0 が特殊な形状で表される場合、微積分方程式 (3-40) をより単純な線形微分方程式に変換することができる。この場合には、バント幅やエネルギー幅の影響についての準解析的な表式を得ることができ、非常に有用である。本稿では、f_0 がデルタ関数で表される場合と、矩形関数で表される場合について考察する。

3.8.1　デルタ関数的エネルギー分布

初めに f_0 がデルタ関数で表される場合、即ち、初期状態で全電子が同じエネルギー γ_0 を持つ場合について考える。明らかに

$$f_0(\gamma) = n_0\delta(\gamma-\gamma_0)$$

であるから、引数を $\hat{\eta}$ に変更すると

$$f_0(\hat{\eta}) = n_0\delta(\rho\gamma_0\hat{\eta})$$

となる。式 (3-40) に代入して部分積分を行うと次式を得る。

$$\begin{aligned}\frac{dE_\perp}{d\hat{z}} &= i\int_0^{\hat{z}} d\hat{z}'(\hat{z}-\hat{z}')E_\perp(\hat{z}')\mathrm{e}^{i(\hat{z}-\hat{z}')\hat{\nu}} \\ &= i\mathrm{e}^{i\hat{z}\hat{\nu}}F(\hat{z}) \qquad (3\text{-}41)\end{aligned}$$

ここで導入された $F(\hat{z})$ は次式で定義される。

$$\begin{aligned}F(\hat{z}) &= z\int_0^{\hat{z}} d\hat{z}'E_\perp(\hat{z}')\mathrm{e}^{-i\hat{z}'\hat{\nu}} \\ &\quad -\int_0^{\hat{z}} d\hat{z}'\hat{z}'E_\perp(\hat{z}')\mathrm{e}^{-i\hat{z}'\hat{\nu}}\end{aligned}$$

これを $\hat{z}$ について 2 回微分することにより、次式を得る。

$$\frac{d^2F(\hat{z})}{d\hat{z}^2} = E_\perp(\hat{z})\mathrm{e}^{-i\hat{z}\hat{\nu}} \qquad (3\text{-}42)$$

また、式 (3-41) を $\hat{z}$ について 2 回微分することにより、次式を得る。

$$i\mathrm{e}^{i\hat{z}\hat{\nu}}\frac{d^2F(\hat{z})}{d\hat{z}^2} = \frac{d^3E_\perp}{d\hat{z}^3} - 2i\hat{\nu}\frac{d^2E_\perp}{d\hat{z}^2} - \hat{\nu}^2\frac{dE_\perp}{d\hat{z}} \qquad (3\text{-}43)$$

式 (3-42) 及び (3-43) から、光電場の複素振幅 $E_\perp$ に関する微分方程式が以下の通り得られる。

$$\frac{d^3E_\perp}{d\hat{z}^3} - 2i\hat{\nu}\frac{d^2E_\perp}{d\hat{z}^2} - \hat{\nu}^2\frac{dE_\perp}{d\hat{z}} = iE_\perp \qquad (3\text{-}44)$$

3.8.2　矩形関数的エネルギー分布

次に、電子が平均値 γ_0 を中心に幅 $\Delta\gamma$ で一様に分布している場合について考える。このとき、初期エネルギー分布関数は次式で与えられる。

$$f_0(\gamma) = n_0\frac{\Theta[\gamma-(\gamma_0-\frac{\Delta\gamma}{2})]-\Theta[\gamma-(\gamma_0+\frac{\Delta\gamma}{2})]}{\Delta\gamma}$$

ここで、$\Theta(x)$ は単位ステップ関数である。引数を $\hat{\eta}$ に変換すると

$$f_0(\hat{\eta}) = n_0\frac{\Theta(\rho\gamma_0\hat{\eta}+\frac{\Delta\gamma}{2})-\Theta(\rho\gamma_0\hat{\eta}-\frac{\Delta\gamma}{2})}{\Delta\gamma}$$

さらに、単位ステップ関数の微分はデルタ関数 δ であることを利用すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned}\frac{df_0}{d\hat{\eta}} &= \frac{n_0}{\Delta\hat{\eta}}\left[\delta\left(\rho\gamma_0\hat{\eta}+\frac{\Delta\gamma}{2}\right)\right. \\ &\quad \left.-\delta\left(\rho\gamma_0\hat{\eta}-\frac{\Delta\gamma}{2}\right)\right] \qquad (3\text{-}45)\end{aligned}$$

ここで $\Delta\hat{\eta}$ は、次式で定義される規格化されたエネルギー幅である。

$$\Delta\hat{\eta} = \frac{\Delta\gamma}{\rho\gamma_0}$$

式 (3-45) を FEL 微積分方程式 (3-40) に代入して $\hat{\eta}$ について積分を実行すると次式を得る。

$$\frac{dE_\perp}{d\hat{z}} = i\mathrm{e}^{i\hat{z}\hat{\nu}}G(\hat{z}) \qquad (3\text{-}46)$$

ここで、$G(\hat{z})$ は次式で定義される。

$$\begin{aligned}G(\hat{z}) &= \frac{\mathrm{e}^{i\hat{z}\hat{\eta}/2}}{i\Delta\hat{\eta}}\int_0^{\hat{z}} dz'E_\perp(\hat{z})\mathrm{e}^{-i\hat{z}'(\hat{\nu}+\Delta\hat{\eta}/2)} \\ &\quad -\frac{\mathrm{e}^{-i\hat{z}\hat{\eta}/2}}{i\Delta\hat{\eta}}\int_0^{\hat{z}} dz'E_\perp(\hat{z})\mathrm{e}^{-i\hat{z}'(\hat{\nu}-\Delta\hat{\eta}/2)}\end{aligned}$$

$\hat{z}$ について 2 回微分することにより次式が得られる。

$$\frac{d^2G(\hat{z})}{d\hat{z}^2} = \left(\frac{i\Delta\hat{\eta}}{2}\right)^2 G(\hat{z}) + E_\perp(\hat{z})\mathrm{e}^{-i\hat{z}\hat{\nu}}$$
$$= \left[i\frac{\Delta\hat{\eta}^2}{4}\frac{dE_\perp}{d\hat{z}} + E_\perp(\hat{z})\right]\mathrm{e}^{-i\hat{z}\hat{\nu}} \quad (3\text{-}47)$$

前節と同様に、式 (3-46) を 2 回微分してから上式を代入することにより、光電場の複素振幅 $E_\perp$ に関する微分方程式が以下の通り得られる。

$$\frac{d^3E_\perp}{d\hat{z}^3} - 2i\hat{\nu}\frac{d^2E_\perp}{d\hat{z}^2} - \left(\hat{\nu}^2 - \frac{\Delta\hat{\eta}^2}{4}\right)\frac{dE_\perp}{d\hat{z}} = iE_\perp \quad (3\text{-}48)$$

方程式 (3-48) は $\Delta\hat{\eta} \to 0$ の極限において方程式 (3-44) に帰着するが、この理由は $\Delta\hat{\eta}$ の意味を考慮すれば明らかであろう。

3.9 FEL 微分方程式の解

前節で導出した FEL 微分方程式 (3-48) の解は、未知のパラメータ Λ を用いて一般的に

$$E_\perp(\hat{z}) \propto \mathrm{e}^{\hat{\Lambda}\hat{z}}$$

と仮定することができる。代入して整理すると、$\hat{\Lambda}$ に関する以下の方程式が得られる。

$$\hat{\Lambda}^3 - 2i\hat{\nu}\hat{\Lambda}^2 - \left(\hat{\nu}^2 - \frac{\Delta\hat{\eta}^2}{4}\right)\hat{\Lambda} = i \quad (3\text{-}49)$$

$\hat{\Lambda}$ を、相対振動数 $\hat{\nu}$ の光が z 方向へ進むときの波数と考えると、上記方程式はこれらの分散関係を表すので、FEL 分散関係式などと呼ばれる。そしてこれは 3 次方程式であるから、一般的に 3 つの解が存在する。これらを $\hat{\Lambda}_{1,2,3}$ とおくと、3 次方程式における解と係数の関係から次式が得られる。

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}_1\hat{\Lambda}_2\hat{\Lambda}_3 &= i \\ \hat{\Lambda}_1\hat{\Lambda}_2 + \hat{\Lambda}_2\hat{\Lambda}_3 + \hat{\Lambda}_3\hat{\Lambda}_1 &= -\hat{\nu}^2 + \Delta\hat{\eta}^2/4 \\ \hat{\Lambda}_1 + \hat{\Lambda}_2 + \hat{\Lambda}_3 &= 2i\hat{\nu} \end{aligned} \quad (3\text{-}50)$$

また、これらの解を用いて、$E_\perp$ を以下の式で表すことができる。

$$E_\perp(\hat{z}) = \sum_{j=1}^{3} E_{\perp j}\mathrm{e}^{\hat{\Lambda}_j\hat{z}}$$

ここで、$E_{\perp j}$ は $E_\perp(\hat{z})$ の初期条件によって決定されるべき係数である。

初期条件としてはいろいろな可能性が考えられるが、最も一般的なものとして、以下の 3 つの条件について考えよう。

1) $E_\perp(0) = E_0$

2) $\left.\dfrac{dE_\perp}{d\hat{z}}\right|_{\hat{z}=0} = 0$

3) $\left.\dfrac{d^2E_\perp}{d\hat{z}^2}\right|_{\hat{z}=0} = 0$

条件 1) は、$\hat{z} = 0$ 即ち、アンジュレータ入口における電場の複素振幅を決定する。即ち、複素振幅が $E_\perp = E_0$ で、振動数が $\omega = \omega_1(1 + 2\rho\hat{\nu})$ であるシード光が電子ビームと同期して入射される。

$E_\perp$ の 1 次微分が 0 という条件 2) は、$n_1 = 0$、即ち電子ビームのマイクロバンチ成分が 0 であることを意味している。これは式 (3-27) からも明らかである。

$E_\perp$ の 2 次微分が 0 という条件 3) は、マイクロバンチ成分の微分（成長率）が 0 であることを表しており、これは電子ビームにエネルギー変調が無いと言うことを意味している [10]。

このように、初期条件 2) 及び 3) は通常の（増幅される光の波長スケールにおいて、いかなる変調も誘起されていない）電子ビームによる FEL 増幅を調べる上で理にかなったものである。

さて上記の条件は、以下のように行列を利用して表すことができる。

$$M\begin{pmatrix} E_{\perp 1} \\ E_{\perp 2} \\ E_{\perp 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ここで、行列 M は次式で定義される。

$$M \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \hat{\Lambda}_1 & \hat{\Lambda}_2 & \hat{\Lambda}_3 \\ \hat{\Lambda}_1^2 & \hat{\Lambda}_2^2 & \hat{\Lambda}_3^2 \end{pmatrix}$$

この行列を用いれば、係数 $E_{\perp 1,2,3}$ は以下のように

[10] マイクロバンチは、エネルギー変調によって成長することを思い出そう。

計算される。

$$
\begin{aligned}
E_{\perp 1} &= (M^{-1})_{11}E_0 \\
E_{\perp 2} &= (M^{-1})_{21}E_0 \\
E_{\perp 3} &= (M^{-1})_{31}E_0
\end{aligned}
$$

ここで、M^{-1} は M の逆行列であって、必要な要素は、例えば以下の式で計算される。

$$(M^{-1})_{11} = \frac{\hat{\Lambda}_2\hat{\Lambda}_3}{(\hat{\Lambda}_1 - \hat{\Lambda}_2)(\hat{\Lambda}_1 - \hat{\Lambda}_3)}$$

関係式 (3-50) を利用して整理すると次式が得られる。

$$(M^{-1})_{11} = \frac{1}{1 - 2i(\hat{\Lambda}_1 - i\hat{\nu})\hat{\Lambda}_1^2}$$

他の要素についても同様に計算でき、結果として次式を得る。

$$E_{\perp}(\hat{z}) = E_0 \sum_{j=1}^{3} \frac{\mathrm{e}^{\hat{\Lambda}_j \hat{z}}}{1 - 2i(\hat{\Lambda}_j - i\hat{\nu})\hat{\Lambda}_j^2} \qquad (3\text{-}51)$$

これが条件 1)~3) を満たす FEL 方程式の解である。

3.10 増幅率

式 (3-51) を見ると、光電場の複素振幅が $\hat{z}$ とともに指数関数的に増加することがわかる。そして、その増幅率は方程式 (3-49) を解くことによって求められる。以後、いくつかの特殊な条件の下でこれを実際に解いて増幅率を求めてみよう。

3.10.1 $\hat{\nu} = \Delta\hat{\eta} = 0$ のとき

これは、エネルギーが完全に一様な電子ビームと波長 λ_1 を持つシード光がアンジュレータに入射された場合に相当する。このときに解くべき方程式は大幅に簡略化され、

$$\hat{\Lambda}^3 = i$$

となる。これは簡単に解くことができ、次式を得る。

$$\hat{\Lambda} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}, \frac{-\sqrt{3}+i}{2}, -i$$

式 (3-51) に代入すると、電場の成長を記述する式が得られる。

$$
\begin{aligned}
E_{\perp}(\hat{z}) &= \frac{E_0}{3}\left[\exp(-i\hat{z}) + \exp\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\hat{z}\right)\right. \\
&\qquad \left. + \exp\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\hat{z}\right)\right] \qquad (3\text{-}52)
\end{aligned}
$$

光のパワーは $|E_{\perp}(\hat{z})|^2$ に比例するので、これを $|E_0|^2$ で規格化し、$\hat{z}$ の関数としてプロットしたものが図 9 である。このように、レーザーパワーをアンジュレータ軸に沿った座標 z の関数としてプロットしたグラフを FEL におけるゲイン曲線と呼ぶ。

FEL における光パワーは、増幅率が高い領域 (高ゲイン領域)、即ち $\hat{z}$ が大きくなるにつれて指数的に増大する関数となる。式 (3-52) を見れば明らかなように、この増大に寄与する項は第三項であって、実効的な入力パワーは $|E_0|^2/9$ である。即ち、シード光のパワーのうちの 1/9 のみが増幅に寄与する。これ以外の第一項は定常的な光の伝播、第二項は指数的減衰を表す。

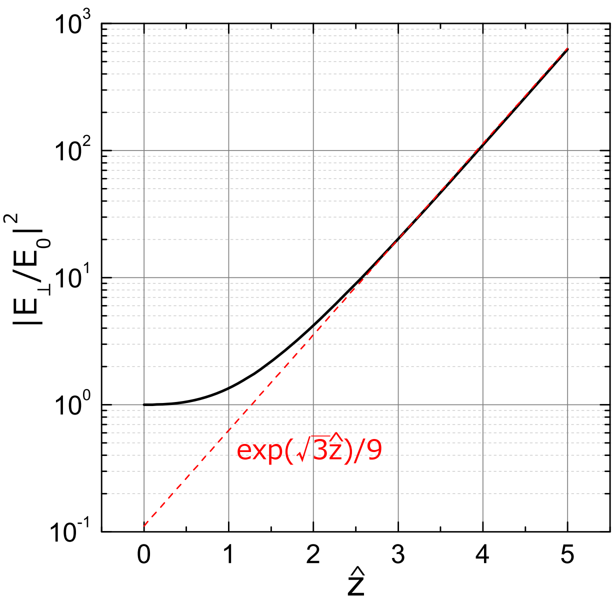

図 9: $\hat{\nu} = \Delta\hat{\eta} = 0$ のときのゲイン曲線。

高ゲイン領域では

$$|E_{\perp}/E_0|^2 = \frac{1}{9}\mathrm{e}^{z/L_g}$$

と書くことができる。ここで導入された L_g はゲイン長と呼ばれ、光のパワーが e 倍になるために必要なアンジュレータ長を表す。式 (3-37) から、ゲイン長は次式で定義されることがわかる。

$$L_g = \frac{\lambda_u}{4\pi\sqrt{3}\rho} \tag{3-53}$$

このように、ゲイン長は FEL パラメータ ρ の逆数に比例する。言い換えると、ρ は FEL の増幅率を決定するパラメータである。

3.10.2　$\hat{\nu} = 0$、$0 < \Delta\hat{\eta} \ll 1$ のとき

これは、小さいが有限のエネルギー幅を持つ電子ビームと波長 λ_1 を持つシード光がアンジュレータに入射された場合に相当する。解くべき方程式は

$$\hat{\Lambda}^3 + \frac{\Delta\hat{\eta}^2}{4}\hat{\Lambda} = i \tag{3-54}$$

$\Delta\hat{\eta} \ll 1$ であるので、解を以下のように仮定する。

$$\hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}_0 + \epsilon$$

ここで $\hat{\Lambda}_0$ は、前節で導出した $\hat{\nu} = \hat{\Delta\eta} = 0$ のときの解であって、$\hat{\Lambda}_0^3 = i$ を満たす。これを式 (3-54) に代入し、ϵ の 1 次と $\Delta\hat{\eta}$ の 2 次まで残すと次式が得られる。

$$\epsilon = -\frac{\Delta\hat{\eta}^2}{12\hat{\Lambda}_0}$$

従って、

$$\hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}_0 - \frac{\Delta\hat{\eta}^2}{24}(\sqrt{3} - i) \tag{3-55}$$

高ゲイン領域においては

$$|E_\perp/E_0|^2 = \frac{1}{9}\exp\left\{\frac{z}{Lg}\left[1 - \frac{(\Delta\gamma/\gamma_0)^2}{12\rho^2}\right]\right\}$$

従って、エネルギー幅 $\Delta\gamma/\gamma_0$ が FEL パラメータ ρ に比べて顕著に大きい場合、増幅は著しく阻害される。これが FEL におけるレーザー発振を実現するために電子ビームのエネルギー幅が満たすべき条件を定める。

3.10.3　$0 < |\hat{\nu}| \ll 1$、$\Delta\hat{\eta} = 0$ のとき

これは、エネルギーが完全に一様な電子ビームと、波長 λ が λ_1 に近いが完全に同一ではないシード光がアンジュレータに入射される場合に相当する。解くべき方程式は

$$\hat{\Lambda}(\hat{\Lambda} - i\hat{\nu})^2 = i \tag{3-56}$$

である。$|\hat{\nu}| \ll 1$ であるが、前節と同様の手法を適用しただけではうまく解を導出することはできない。そこで、解を以下のように $\hat{\nu}$ のべきで展開する。

$$\hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}_0 + a_1\hat{\nu} + a_2\hat{\nu}^2$$

式 (3-56) に代入し、$\hat{\nu}$ の 3 次以上の項を無視して各べきで整理すると、1 次について、

$$2\hat{\Lambda}_0^2(a_1 - i) + \hat{\Lambda}_0^2 a_1 = 0$$

また、2 次については、

$$\begin{aligned}&\hat{\Lambda}_0(a_1 - i)^2 + 2\hat{\Lambda}_0^2 a_2 \\ &+ 2\hat{\Lambda}_0(a_1 - i)a_1 + a_2\hat{\Lambda}_0 = 0\end{aligned}$$

がそれぞれ得られる。これらは簡単に解くことができて、

$$a_1 = \frac{2}{3}i,\ \ a_2 = -\frac{1}{9}\frac{\sqrt{3} - i}{2}$$

が得られる。従って指数的増幅項について、

$$\hat{\Lambda} \sim \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{\hat{\nu}^2}{9}\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4}{3}\nu\right)i \tag{3-57}$$

高ゲイン領域においては

$$|E_\perp/E_0|^2 = \frac{1}{9}\mathrm{e}^{z/L_g}\exp\left[-\frac{(\omega - \omega_1)^2}{2\sigma_\omega^2}\right]$$

が得られる。ここで、σ_ω は次式で定義される。

$$\frac{\sigma_\omega}{\omega_1} = 3\sqrt{\frac{2L_g}{z}}\rho \tag{3-58}$$

このように、振動数が ω_1 からずれるに伴ってレーザーゲインは低下する。またそのゲイン幅は FEL パラメータ ρ に比例するとともに、増幅が進むに従って $z^{-1/2}$ というスケールで狭くなる。

3.10.4 $|\hat{\nu}| \gg 1 \gg \Delta\hat{\eta}$ のとき

ここで、$|\hat{\nu}| \gg 1 \gg \Delta\hat{\eta}$ という少し特殊な条件について考えよう。$\hat{\nu}$ の定義式 (3-39) を考えると、この条件は

$$\left|\frac{\omega - \omega_1}{\omega_1}\right| \gg \rho$$

であることを意味する。即ち FEL パラメータ ρ が相対的波長のずれに比べて小さい、言い換えるとゲインが小さいと言うことである。このような条件におけるゲインは小信号利得と呼ばれる。さて、解くべき方程式は

$$\frac{\hat{\Lambda}}{\hat{\nu}}\left(\frac{\hat{\Lambda}}{\hat{\nu}} - i\right)^2 = \frac{i}{\hat{\nu}^3}$$

となる。さてこの方程式の左辺は 2 つの異なる因子、$\hat{\Lambda}/\hat{\nu}$ 及び $\hat{\Lambda}/\hat{\nu} - i$ の積で表されているが、片方の絶対値が 0 に近いとき、他方の絶対値は 1 に近い。これを利用すると以下のように場合分けをすることで近似的な解が得られる。

$$|\hat{\Lambda}/\hat{\nu}| \ll 1 \qquad (3\text{-}59)$$
$$|\hat{\Lambda}/\hat{\nu} - i| \ll 1 \qquad (3\text{-}60)$$

条件式 (3-59) が成り立つとき、FEL 分散関係式は

$$\frac{i}{\hat{\nu}^3} = \frac{\hat{\Lambda}}{\hat{\nu}}\left(\frac{\hat{\Lambda}}{\hat{\nu}} - i\right)^2 \sim \frac{\hat{\Lambda}}{\hat{\nu}}(-i)^2$$

と簡略化され、1 番目の解

$$\hat{\Lambda}_1 = -\frac{i}{\hat{\nu}^2}$$

が得られる。また、条件式 (3-60) が成り立つとき、FEL 分散関係式は

$$\frac{i}{\hat{\nu}^3} = \frac{\hat{\Lambda}}{\hat{\nu}}\left(\frac{\hat{\Lambda}}{\hat{\nu}} - i\right)^2 \sim i\left(\frac{\hat{\Lambda}}{\hat{\nu}} - i\right)^2$$

と簡略化され、2 番目及び 3 番目の解

$$\hat{\Lambda}_{2,3} = i\hat{\nu} \pm \frac{1}{\sqrt{\hat{\nu}}}$$

が得られる。これらを式 (3-51) に代入することにより、この条件下での光電場の成長を表す次式が得られる。

$$\begin{aligned}
\frac{E_\perp}{E_0} &= \exp\left(-\frac{i\hat{z}}{\hat{\nu}^2}\right)\left(1 - \frac{2}{\hat{\nu}^3}\right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{\hat{\nu}^3} - \frac{i}{2\hat{\nu}^{3/2}}\right)\exp\left(i\hat{\nu}\hat{z} + \frac{\hat{z}}{\sqrt{\hat{\nu}}}\right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{\hat{\nu}^3} + \frac{i}{2\hat{\nu}^{3/2}}\right)\exp\left(i\hat{\nu}\hat{z} - \frac{\hat{z}}{\sqrt{\hat{\nu}}}\right) \\
&\sim 1 - \frac{2}{\hat{\nu}^3} + \mathrm{e}^{i\hat{\nu}\hat{z}} \\
&\quad \times \left(\frac{2}{\hat{\nu}^3}\cosh\frac{\hat{z}}{\sqrt{\hat{\nu}}} - \frac{i}{\hat{\nu}^{3/2}}\sinh\frac{\hat{z}}{\sqrt{\hat{\nu}}}\right)
\end{aligned}$$

ここで、$1/\hat{\nu}$ の 4 次以上の項を無視すると次式が得られる。

$$\begin{aligned}
\left|\frac{E_\perp}{E_0}\right|^2 - 1 &= \frac{4}{\hat{\nu}^3}\left(-1 + \cos\hat{\nu}\hat{z} + \frac{\hat{\nu}\hat{z}}{2}\sin\hat{\nu}\hat{z}\right) \\
&= \frac{\hat{z}^3}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)\bigg|_{x=\hat{\nu}\hat{z}/2}
\end{aligned}$$

ここでアンジュレータの周期数を N とおくと、

$$\frac{\hat{\nu}\hat{z}}{2} = \pi N\frac{\omega - \omega_1}{\omega_1}$$

であるが、これを引数とする関数 $\sin^2 x/x^2$ がアンジュレータ自発放射光のスペクトルを表す関数であることはよく知られている。即ち、小信号利得領域におけるレーザーゲインは、自発放射光スペクトルの微分で与えられる。これは FEL の考案者である J. M. J. Madey によって最初に導き出された定理である。ちなみにこの場合は、$\omega = \omega_1$ においてゲインはない、即ち増幅は起こらない。これは 3.10.3 節で説明した、高ゲイン領域における波長偏差による応答とは大きく異なる。

3.10.5 $\hat{\nu}$ 及び $\Delta\hat{\eta}$ が任意の値のとき

前節までに述べた近似が一切利用できない一般的な条件では、方程式 (3-49) を解く必要がある。これは単純な 3 次方程式であって、カルダノの公式として知られる解法によって厳密に解くことができる。興味があるのは $\hat{z}$ の増加とともに光が増幅する解、即ち正の実部を持つ解である。これを $\hat{\nu}$ 及び $\Delta\hat{\eta}$ の関数として計算し、等高線としてプロットしたものを図 10 に示す。

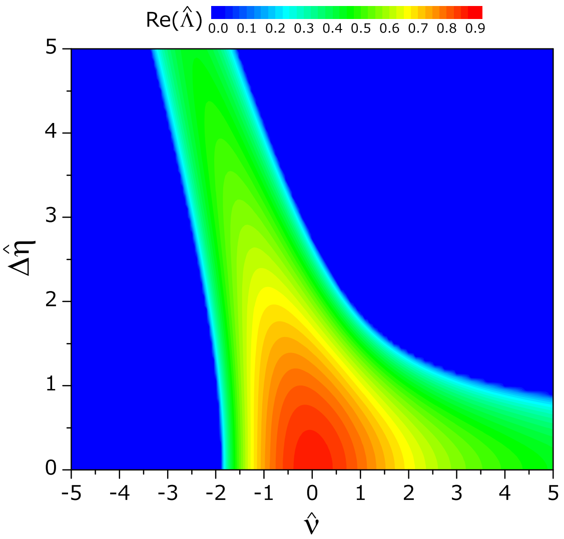

図 10: $\hat{\nu}$ 及び $\Delta\hat{\eta}$ の関数として計算された、$\hat{\Lambda}$（増幅項）の実部。

$\hat{\Lambda}$ の実部は $\hat{\nu} = \Delta\hat{\eta} = 0$ のときに最大値 $\sqrt{3}/2 \sim 0.866$ をとり、$|\hat{\nu}|$ や $\Delta\hat{\eta}$ の増加とともに減少する。また、$\hat{\nu}$ が 0 ではないとき、$\hat{\Lambda}$ は $\hat{\nu} < 0$ において最大値を取ることがわかる。即ち、電子のエネルギー幅が 0 ではないとき、ω_1 より低いエネルギーをもつシード光を入射する方が増幅率は高い。

ここで、3.10.2 節で導出した近似式の妥当性について見てみよう。このため、$\hat{\nu} = 0$ の軸に沿ってデータを抽出した結果を図 11(a) の実線で、また近似式 (3-55) を利用して計算した結果を破線で示す。この式が $\Delta\hat{\eta} < 2$ において良い近似を与えていることが分かる。

同様に 3.10.3 節で導出した近似式の妥当性について見るために、$\Delta\hat{\eta} = 0$ の軸に沿ってデータを抽出した結果を図 11(b) の実線で、また近似式 (3-57) を利用して計算した結果を破線で示す。この式が $|\hat{\nu}| < 1$ において良い近似を与えていることが分かる。

3.11 レーザー飽和効果

3.9 節で導出された電場の表式 (3-51) を見ると、高ゲイン領域では、レーザーパワー $|E_\perp|^2$ がシード光のパワー $|E_0|^2$ に比例することが分かる。即ち、増幅器としての FEL は線形応答を示す。一方で、FEL にはレーザーの出力飽和として知られる

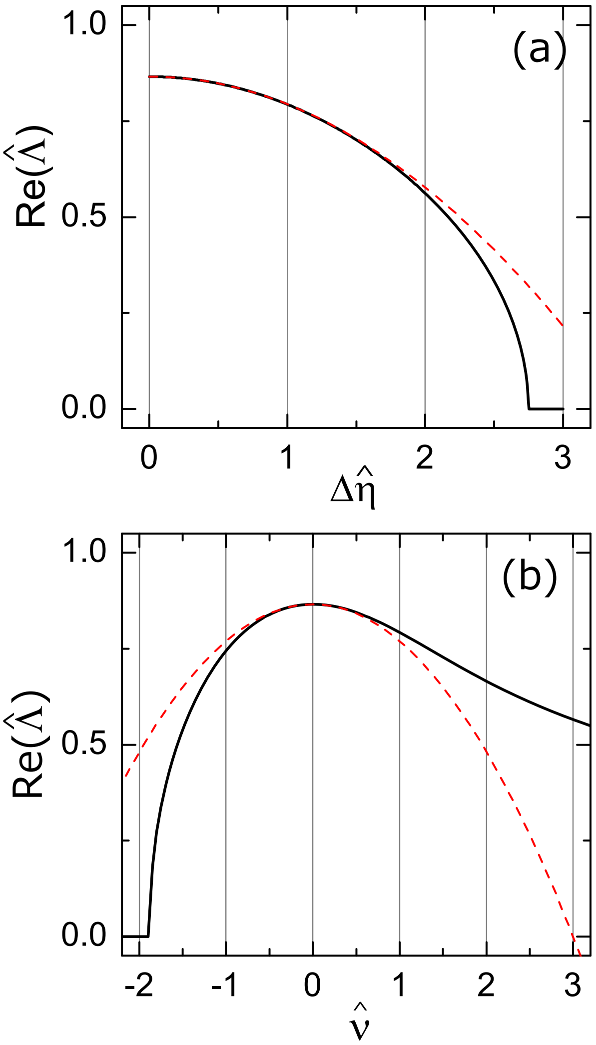

図 11: 図 10 の結果から、(a)$\hat{\nu} = 0$、(b)$\Delta\hat{\eta} = 0$ に沿ってデータを抽出したもの。

現象が存在する。即ち、レーザーパワーがシード光のパワーに比例せず、ある値で頭打ちとなる。言い換えると、図 9 で示された指数関数的増幅は永久に継続するわけではなく、ある $\hat{z}$ において最大値に到達し、レーザーはそれ以上増幅されない。このような現象を FEL における飽和効果と呼ぶ。

飽和が起こる要因として 2 つ挙げることができる。1 つは、光を増幅することによって電子のエネルギーが減少し、この結果アンジュレータの基本波長 λ_1 が増幅の初期段階のものと比較して長波長側へシフトするため、発振波長との偏差が生じることである。他方は、増幅の原動力であるマイクロバンチの源となるエネルギー変調が誘起されると、電子ビームのエネルギー幅が増加するた

め、前節で調べた $\Delta\hat{\eta}$ の影響によって増幅率が低下することである。例えば図 11 からも明らかな通り、$\Delta\hat{\eta}$ が 2.75 を超えると、増幅率はほぼ 0 となり、これ以上増幅は起こらない。

このような飽和の効果を調べるためには、前節で行ったような解析的な考察は不可能であるため、数値計算に頼らざるを得ない。以下で、その基礎となる 3 種類の方程式を導出する。

一番目の方程式は、電子の位相を記述する方程式であり、式 (3-12) を規格化することによって得られる。

$$\frac{d\psi}{d\hat{z}} = \hat{\eta} \tag{3-61}$$

二番目の方程式は、電子のエネルギー変化を記述する方程式であり、式 (3-30) を規格化することによって得られる。

$$\frac{d\hat{\eta}}{d\hat{z}} = -\hat{E_\perp}\mathrm{e}^{i\psi}\mathrm{e}^{i\hat{\nu}\hat{z}} + \mathrm{c.c.} \tag{3-62}$$

三番目の方程式は光電場の成長を記述する方程式であり、式 (3-33) を規格化することによって得られる。

$$\frac{d\hat{E_\perp}}{d\hat{z}} = \mathrm{e}^{-i\hat{\nu}\hat{z}}\frac{n_1}{n_0} \tag{3-63}$$

ここで新たに、規格化複素振幅 $\hat{E_\perp}$ を次式で定義した。

$$\hat{E_\perp} = 2\rho\gamma_0\frac{E_\perp}{E_2} \tag{3-64}$$

さて、電子ビームに形成される密度変調の振幅 n_1 について考察しよう。

まず定常状態においては、密度分布関数は $n(z,\psi)$ は明らかに ψ について周期 2π の周期関数であり、かつ、これを平均する（変調を除去する）と初期段階での電子密度 n_0 と等しいので次式が成り立つ。

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n(z,\psi)d\psi = n_0$$

さて、個々の電子の密度分布関数はデルタ関数で与えられるので、これを積算することにより、$n(z,\psi)$ を表す次式が得られる。

$$n(z,\psi) = \frac{2\pi n_0}{M}\sum_{j=1}^{M}\delta[\psi - \psi_j(z)] \tag{3-65}$$

ここで $\psi_j(z)$ は、電子ビームに含まれる j 番目の電子の、座標 z における位相であり、また M は $(0, 2\pi)$ の位相範囲に含まれる電子 [11] の総数である。また、係数は上の平均操作が成り立つように決められている。

一方、式 (3-14) から n_1 は以下の式で計算される。

$$n_1(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n(z,\psi)\mathrm{e}^{-i\psi}d\psi$$

式 (3-65) を代入すると、次式が得られる。

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\mathrm{e}^{-i\psi_j(z)} \equiv \langle \mathrm{e}^{-i\psi}\rangle$$

この式を用いると、方程式 (3-63) は以下の形式で書くことができる。

$$\frac{d\hat{E_\perp}}{d\hat{z}} = \mathrm{e}^{-i\hat{\nu}\hat{z}}\langle \mathrm{e}^{-i\psi}\rangle \tag{3-66}$$

ここで、$\langle \mathrm{e}^{-i\psi}\rangle$ はバンチ因子などと呼ばれ、マイクロバンチの成長を表す物理量である。ちなみにここで用いた $\langle\rangle$ は位相の変化量で 2π（時間に換算すると $2\pi/\omega_1$）という、電子ビームにおける微小な領域での平均であるので注意されたい。

ここで、得られるレーザーパワーについて考察する。式 (3-29) に (3-64) と (3-34) を代入して整理すると、

$$P = \rho p\hat{P} \tag{3-67}$$

が得られる [12]。ここで、p は電子ビームのパワー密度であり、次式で与えられる。

$$p = \frac{j_0}{e}\gamma_0 mc^2$$

また、$\hat{P} = |\hat{E_\perp}|^2$ は規格化されたレーザーパワーである。

さて、一連の微分方程式 (3-61)、(3-62)、及び (3-66)[13] を解くことによって、電子ビームを構成する各電子の位相とエネルギーの変化、さらに、レーザーの電場振幅と電子ビームに形成されるマ

---

[11] 物理的には、相対時刻 τ が $(0, 2\pi/\omega_1)$ の間に存在する電子を意味することに注意。

[12] 式 (3-67) はレーザーのパワーではなく、パワー密度を表すことに注意。

[13] 方程式 (3-61) 及び (3-62) は電子の個数だけ存在することに注意。

イクロバンチの成長を記述することができる。具体的には、0 から $\hat{L}$ までの範囲を適切な間隔 $\Delta\hat{z}$ で分割し、各 $\hat{z}$ 座標（ステップ）毎に数値的に微分方程式を解けば良い。ここで、$\hat{L} = L/2\rho k_u$ はアンジュレータの全長 $(= L)$ に相当する相対距離である。具体的には以下のプロセスによって数値計算を進める。

1) M 個の電子を用意し、位相とエネルギーについて適切な初期値を与える。初期段階でマイクロバンチ成分がない場合には、位相を $0 \sim 2\pi$ で一様に分布させる。また、エネルギーについては、初期のエネルギー分布関数を再現するように決定する。

2) シード光の波長偏差 $\hat{\nu}$ と、電場振幅の初期値 $\hat{E}_{\perp 0}$ を与える。

3) 微分方程式 (3-61) と (3-62) を $j = 1 \sim M$ の電子について解くことにより、次のステップにおける位相とエネルギーを計算する。

4) 上で得られた各電子の位相からバンチ因子を計算し、微分方程式 (3-66) を解くことにより、電場の振幅を求める。

5) 上記のプロセス 3) 及び 4) を繰り返す。

初期状態においてマイクロバンチが形成されておらず、完全に一様なエネルギー分布をもつ電子ビームに対して、上記の手法によってレーザーパワーの成長をシミュレーションした。尚、シード光の波長偏差を $\hat{\nu} = 0$、また振幅を $\hat{E}_{\perp 0} = 0.01$ と仮定し、電子数 M は 500 とした。ちなみに、実際に電子ビームに含まれる電子数はこれよりも圧倒的に多いが、M を増やしてシミュレーションを繰り返しても、その結果はほとんど変化しない。この事実は、$M = 500$ が、想定している計算条件においては十分に大きな数であることを示している。即ち、シミュレーションに用いた個々の電子が、実際の系における相当数の電子を代表すると考えることができる。この意味で、シミュレーションに用いる各電子をマクロ粒子と呼ぶことがある。

規格化されたレーザーパワーが成長する様子を図 12 に示す。初期段階では指数関数的に増幅されるが、$\hat{z} = 7.6$ で最大値に達した後は一旦減衰する。これは自身のエネルギーを失うことによって光の増幅を担ってきた電子が、逆に光からエネルギーを得て加速されていることを意味している。また、飽和地点においては $\hat{P} \sim 1$ であるので、式 (3-67) より $P \sim \rho p$ と表されることから、飽和状態におけるレーザーパワーが、FEL パラメータ ρ と電子ビームのパワー p との積で表せることがわかる。言い換えると、FEL パラメータは電子ビームからレーザーへのエネルギー変換の効率を示す。

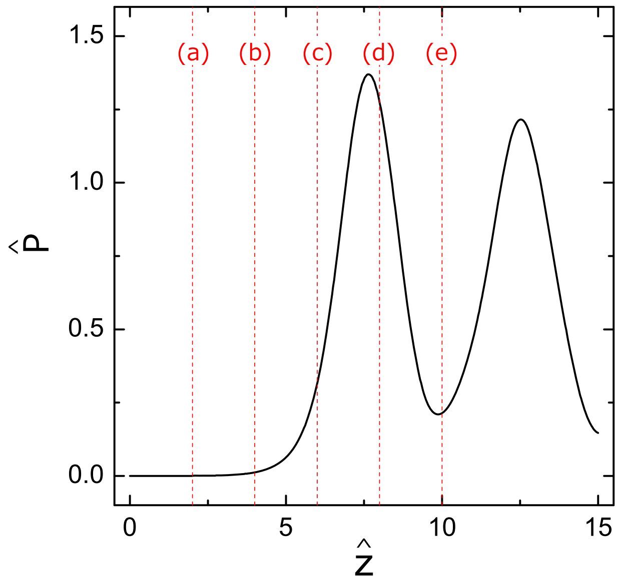

図 12: シミュレーション結果：規格化複素振幅の成長と飽和。

図 13 には、電子ビームのバンチ因子 $\langle \mathrm{e}^{-i\psi} \rangle$ の成長と、エネルギー幅（標準偏差）の増大の様子を示す。互いに似通った傾向を示しているが、マイクロバンチが成長するためには、まずエネルギー変調が誘起され必要があるので、これはある意味で当然である。また、いずれもレーザーの飽和点よりも少し手前の地点 $(\hat{z} = 7.1)$ において最大値に到達した後、減少に転じることがわかる。

マイクロバンチの成長とエネルギー幅の増大について、電子分布の観点から見てみよう。図 12 に破線で示した $\hat{z}$ におけるシミュレーションの結果から抽出した、$(\psi, \hat{\eta})$ 位相空間での電子（マクロ粒子）の分布を図 14 に示す。

増幅の初期段階である (a)$\hat{z} = 2$ や (b)$\hat{z} = 4$ の地点においては、位相に応じて電子のエネルギーが増減している、即ちエネルギー変調が形成されている一方、マイクロバンチの形成は明らかでは

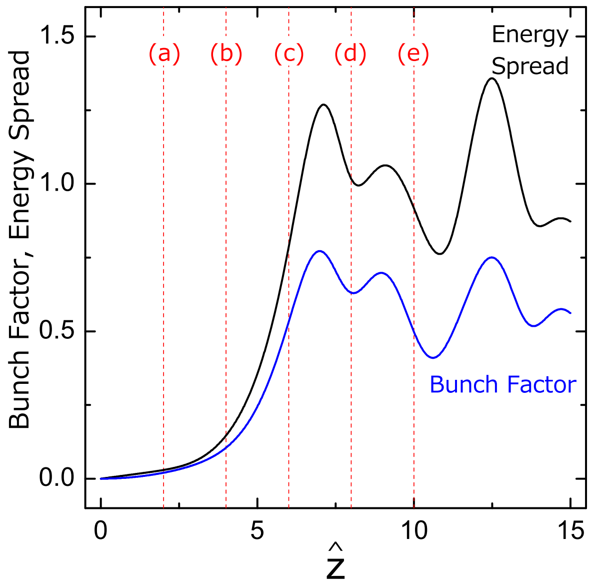

図 13: シミュレーション結果：バンチ因子の成長とエネルギー幅の増大。

ない。一方、増幅が進んだ地点 (c)$\hat{z} = 6$ においては、位相 $\psi = 0.8\pi$ のあたりに電子が集群化し、明確なマイクロバンチの形成を確認することができる。そして、飽和に近い地点 (d)$\hat{z} = 8$ では、ほぼ全ての電子がエネルギーを失う（$\hat{\eta} < 0$）一方、$\hat{z} = 6$ の地点と比べれば、マイクロバンチが損なわれていることがわかる。即ちこれ以上光は増幅されない。この結果、(e)$\hat{z} = 10$ の地点では、相当数の電子が光からエネルギーを奪い取ることによって自身のエネルギーを回復している。

以上で説明したように、FEL における飽和現象を記述するためには数値計算が必須であるが、このために導出された方程式 (3-61)、(3-62)、及び (3-66) は、適切な規格化がなされているために非常にシンプルであり、容易にプログラミングが可能である。実際、先ほど示した数値計算を行うために著者が書いたソースコードは高々100 行程度である。このようなシミュレーションを、自身で作成したプログラムで実行することは、増幅過程における光や電子の振る舞いを理解するのに役立つだけではなく、特殊な条件（例えば、予めマイクロバンチが形成された電子ビームがアンジュレータに入射する場合や、アンジュレータに誤差磁場が含まれる場合など）で計算をする場合にも有用であるので、少しでもプログラムの経験がある読者の方には是非お勧めしたい。

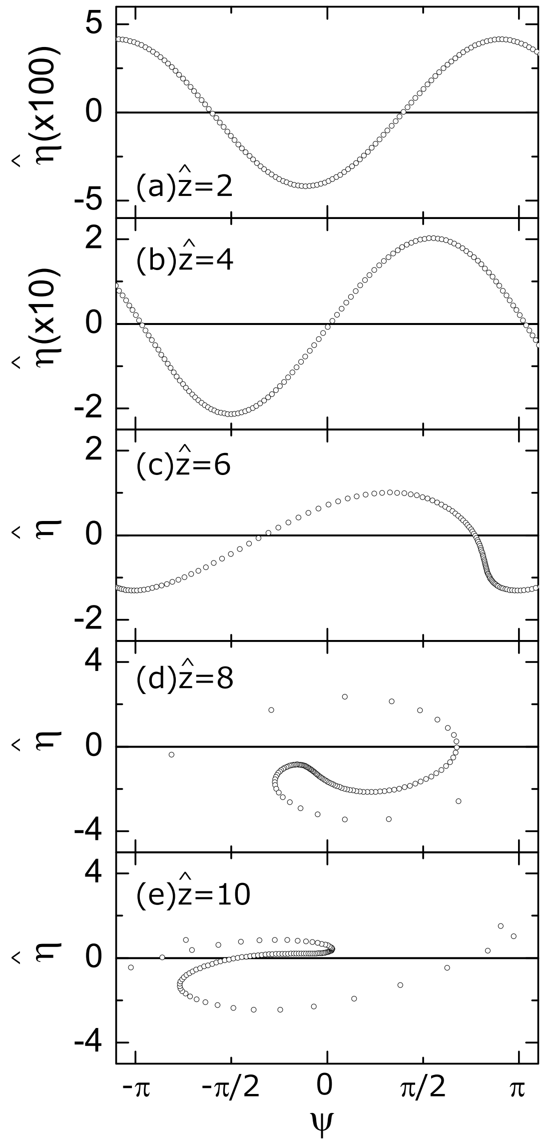

図 14: シミュレーション結果：各増幅領域における $(\psi, \hat{\eta})$ 位相空間での電子分布。

4　FEL における回折効果

前節では、一次元近似に基づく FEL 理論からレーザーゲインを計算するための FEL 方程式を導出し、指数関数的な増幅が起こる領域（線形領域）における 3 次微分方程式と、飽和領域での挙動を見るためのシミュレーションの結果に基づいて考察を進めた。このように、一次元近似は FEL における増幅プロセスを記述するのに有用ではあるが、万能ではない。即ち、増幅に影響を与える全ての要素が考慮されていない。その中でも、電子ビームが有限であることと、光が波であること

に由来する回折効果は重要であって、本節で詳しく解説する。尚、回折効果を考慮に入れたFEL理論の参考文献として[2]、[3]及び[7]を挙げておく。

4.1 本節で用いる仮定と条件

本節では、有限の電子ビームサイズと光の回折効果がレーザー増幅過程にもたらす影響に焦点を当てて考察する。このため既に前節で詳しく調べた、電子ビームのエネルギー幅の影響は無視する。即ち $\Delta\hat{\eta}=0$ とする。また、電子ビームのサイズは有限であるが、そこに含まれる全ての電子は同じ速度ベクトルを持つと仮定する。即ち、電子ビームの角度発散は0であって、ベータトロン振動も存在しないものとする。

4.2 FEL 微積分方程式

光の回折を考慮したFEL増幅過程を記述するため、一次元近似の時と同様に、電場に関する波動方程式(3-17)から出発する。ただし、光の電場を表すための表式として座標 x 及び y に依存しない式(3-19)は不都合である。即ち以下の形式で電場を表す必要がある。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \boldsymbol{e}_x[E_x(z,\boldsymbol{r}_\perp)\mathrm{e}^{ikz-i\omega t}+\mathrm{c.c.}]\\ &\quad +\boldsymbol{e}_y[E_y(z,\boldsymbol{r}_\perp)\mathrm{e}^{ikz-i\omega t}+\mathrm{c.c.}] \quad (4\text{-}1)\end{aligned}$$

ここで、2次元ベクトル $\boldsymbol{r}_\perp=(x,y)$ を導入した。また、電荷密度に関しては式(3-14)の代わりに

$$n(z,\boldsymbol{r}_\perp,\psi)=n_0(\boldsymbol{r}_\perp)+n_1(z,\boldsymbol{r}_\perp)\mathrm{e}^{i\psi}+\mathrm{c.c.} \quad (4\text{-}2)$$

という形式で表す必要がある。

これらの2式を波動方程式(3-17)に代入して、3.4節と同様の手続きを行って整理すると、x 成分について次式を得る。

$$\left[\boldsymbol{\nabla}_\perp^2 E_x+2ik\frac{\partial E_x}{\partial z}\right]\mathrm{e}^{ikz-i\omega t}+\mathrm{c.c.} = \mu_0\frac{\partial j_x}{\partial t}+\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial \rho_e}{\partial x}$$

右辺の項のうち、電流密度 j_x については式(3-21)が利用できる。一方、電荷密度 ρ_e については

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho_e}{\partial x} &= (-e)\frac{\partial}{\partial x}[n_0+(n_1\mathrm{e}^{i\psi}+\mathrm{c.c.})]\\ &= (-e)\left[\frac{1}{2}\frac{\partial n_0}{\partial x}+\frac{\partial n_1}{\partial x}n_1\mathrm{e}^{i\psi}\right]+\mathrm{c.c.}\end{aligned}$$

これらを代入して整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}_\perp^2 E_x+2ik\frac{\partial E_x}{\partial z} &= \frac{i\mu_0\omega ceK}{2\gamma_0}\kappa(z)n_1\\ &\quad -\frac{e}{\varepsilon_0}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial n_0}{\partial x}\mathrm{e}^{-i\psi}+\frac{\partial n_1}{\partial x}n_1\right]\mathrm{e}^{i\omega\delta t(z)+ik_u z}\end{aligned}$$

アンジュレータの一周期について平均すると、$\kappa(z)$ は $\bar{\kappa}$ に置き換わるとともに、右辺の第二項は消滅し、次式が得られる。

$$\boldsymbol{\nabla}_\perp^2 E_x+2ik\frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{i\mu_0\omega ceK\bar{\kappa}}{2\gamma_0}n_1(z,\boldsymbol{r}_\perp)\mathrm{e}^{-ik_u z(1-\omega/\omega_1)}$$

ここで、n_1 が z と $\boldsymbol{r}_\perp$ の関数であることを明示的に示した。

y 成分についても同様の手続きを行い、表1で定義された合成電場振幅と合成偏向定数を利用すると、アンジュレータの種類に関係なく電場の成長を記述する次式が得られる。

$$\left(\frac{\boldsymbol{\nabla}_\perp^2}{2ik}+\frac{\partial}{\partial z}\right)E_\perp(z,\boldsymbol{r}_\perp) = \frac{k_u E_2}{\gamma_0}\frac{n_1(z,\boldsymbol{r}_\perp)}{n_a}\mathrm{e}^{-ik_u z(1-\omega/\omega_1)} \quad (4\text{-}3)$$

ここで、n_a は電子ビームの平均電子密度であり、E_2 は式(3-34)における n_0 を n_a で置換することによって定義される電場の次元を持つパラメータである。

一方、マイクロバンチの成長を記述する式(3-35)は回折の影響を受けないので、$\boldsymbol{r}_\perp$ を引数に含む形で

$$\begin{aligned}f_1(z,\gamma,\boldsymbol{r}_\perp) &= \frac{k_u}{2\gamma_0}\frac{df_0}{d\gamma}\int_0^z dz'\frac{E_\perp(z',\boldsymbol{r}_\perp)}{E_1}\\ &\quad\times\exp\left[2ik_u(z'-z)\frac{\gamma-\gamma_0}{\gamma_0}-ik_u'z\frac{\omega-\omega_1}{\omega_1}\right]\end{aligned}$$

と書くことができる。ここで、E_1 は式(3-32)で定義されるパラメータである。これを式(4-3)に代入すると

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\boldsymbol{\nabla}_\perp^2}{2ik}+\frac{\partial}{\partial z}\right)E_\perp(z,\boldsymbol{r}_\perp) =\\ &\frac{E_2}{E_1}\frac{k_u^2}{2\gamma_0^2 n_a}\int d\gamma\frac{df_0}{d\gamma}\int_0^z dz' E_\perp(z')\\ &\times\exp\left[ik_u(z'-z)\left(2\frac{\gamma-\gamma_0}{\gamma_0}-\frac{\omega-\omega_1}{\omega_1}\right)\right]\end{aligned}$$

式 (3-37) 及び (3-38) を用いて規格化すると

$$\left(\frac{\nabla_\perp^2}{4i\rho kk_u}+\frac{\partial}{\partial\hat{z}}\right)E_\perp(\hat{z},\boldsymbol{r}_\perp)=\frac{\rho\gamma_0}{n_a}\int d\hat{\eta}\frac{df_0}{d\hat{\eta}} \times\int_0^{\hat{z}}d\hat{z}'E_\perp(\hat{z}',\boldsymbol{r}_\perp)\exp[i(\hat{z}'-\hat{z})(\hat{\eta}-\hat{\nu})] \tag{4-4}$$

この式が、回折を考慮した場合の FEL 微積分方程式であり、1 次元近似の場合に導出した (3-40) と比べると、空間微分の項が加わっていることがわかる。

4.3　円柱電子ビームに対する分散関係式

それでは実際に FEL 微積分方程式 (4-4) を解くことによって回折の効果について調べてみよう。このために、電子ビームの空間プロファイルが円柱状である場合について考える。後で示すとおり、この場合には微積分方程式を解析的に解くことができる。

初期密度分布関数 n_0 は

$$n_0(\boldsymbol{r}_\perp)=\begin{cases} n_a; & r_\perp<r_0 \\ 0; & r_\perp>r_0 \end{cases} \tag{4-5}$$

ここで、r_0 は円柱状電子ビームの半径を表す。

仮定により、$f_0=n_0(\boldsymbol{r}_\perp)\delta(\gamma-\gamma_0)$ であるから、これらを式 (4-4) に代入して整理すると次式が得られる。

$$\left(\frac{\nabla_\perp^2}{4i\rho kk_u}+\frac{\partial}{\partial\hat{z}}\right)E_\perp(\hat{z},\boldsymbol{r}_\perp) =\begin{cases} i\mathrm{e}^{i\hat{\nu}\hat{z}}F(\hat{z}); & r_\perp<r_0 \\ 0; & r_\perp>r_0 \end{cases}$$

ここで、$F(\hat{z})$ は式 (3-42) で定義された関数である。この方程式は、$r_\perp>r_0$ の領域で、よく知られた近軸近似のヘルムホルツ方程式に帰着する。一方、$r_\perp<r_0$ の場合には、方程式を $\hat{z}$ について 2 回微分し、式 (3-42) を利用すると次の微分方程式が得られる。

$$\left(\frac{\nabla_\perp^2}{4i\rho kk_u}+\frac{\partial}{\partial\hat{z}}\right)\left(\frac{\partial^2E_\perp}{\partial z^2} -2i\hat{\nu}\frac{\partial E_\perp}{\partial z}-\hat{\nu}^2E_\perp\right)=iE_\perp \tag{4-6}$$

方程式 (4-6) を解くために、一次元における解析の結果を拡張する。即ち以下の形式で表される解について考察する。

$$E_\perp(z,\boldsymbol{r}_\perp)=E_\Lambda(\boldsymbol{r}_\perp)\mathrm{e}^{\hat{\Lambda}\hat{z}}$$

これは、電場の複素振幅の空間分布が関数 $E_\Lambda(\boldsymbol{r}_\perp)$ で与えられるレーザーが、波数 Λ で伝播することを意味する。これを式 (4-6) に代入して整理すると次式が得られる。

$$(\nabla_\perp^2+4i\rho kk_u)E_\Lambda(\boldsymbol{r}_\perp)=-4\rho kk_u\frac{E_\Lambda(\boldsymbol{r}_\perp)}{(\hat{\Lambda}-i\hat{\nu})^2}$$

この式に r_0^2 を掛けることで規格化を行い、$r_\perp>r_0$ の領域と併せて次式が得られる。

$$(r_0^2\nabla_\perp^2+2i\hat{D}\hat{\Lambda})E_\Lambda(\boldsymbol{r}_\perp) =\begin{cases} -2\hat{D}\dfrac{E_\Lambda(\boldsymbol{r}_\perp)}{(\hat{\Lambda}-i\hat{\nu})^2}; & r_\perp<r_0 \\ 0; & r_\perp>r_0 \end{cases} \tag{4-7}$$

ここで、$\hat{D}$ は次式で定義される無次元のパラメータである。

$$\begin{aligned}\hat{D} &= 2\rho kk_ur_0^2 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{r_0}{\frac{\lambda}{4\pi r_0}L_g}\end{aligned}$$

L_g は式 (3-53) で定義されるゲイン長である。

さて、$\lambda/(4\pi)$ が波長 λ における回折限界光のエミッタンス（光の自然エミッタンス）であり、従って $\lambda/(4\pi r_0)$ が光源サイズ（標準偏差）r_0 を持つ回折限界光の角度発散であること、及び（後に見るように）FEL における光源サイズが電子ビームサイズでスケールされること、という 2 点を考慮すると、パラメータ $\hat{D}$ は

$$\hat{D}\sim\frac{\text{電子ビームサイズ}\ (\sim\text{光源サイズ})}{1\ \text{ゲイン長あたりの回折による光の拡がり}}$$

と見なすことができる。即ち、$\hat{D}$ は光の回折がもたらす影響の大小を示すパラメータであり、回折パラメータなどと呼ばれる。

さて、方程式 (4-7) を解くことにより、複素振幅の空間形状を表す関数 $E_\Lambda(\boldsymbol{r}_\perp)$ が決定される。現在検討している系は明らかに軸対称であるから、

考察をさらに進めるために、E_Λ を円柱座標で以下のように展開する。

$$E_\Lambda(\boldsymbol{r}_\perp) = \sum_{n=0}^{\infty} E_{n\Lambda}(\hat{r})\mathrm{e}^{in\theta}$$

ここで、$\hat{r} = r_\perp/r_0$ は規格化された動径座標、θ は方位角座標を表す。式 (4-7) に代入して整理すると、各々の次数 n について次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\hat{r} < 1 \quad ; \quad & \hat{r}^2 \frac{d^2 E_{n\Lambda}}{d\hat{r}^2} + \hat{r}\frac{dE_{n\Lambda}}{d\hat{r}} + \\ & \left[2i\hat{D}\hat{\Lambda}\hat{r}^2 + \frac{2\hat{D}\hat{r}}{(\hat{\Lambda} - i\hat{\nu})^2} - n^2\right] E_{n\Lambda} = 0\end{aligned} \tag{4-8}$$

$$\begin{aligned}\hat{r} > 1 \quad ; \quad & \hat{r}^2 \frac{d^2 E_{n\Lambda}}{d\hat{r}^2} + \hat{r}\frac{dE_{n\Lambda}}{d\hat{r}} \\ & + (2i\hat{D}\hat{\Lambda}\hat{r}^2 - n^2)E_{n\Lambda} = 0\end{aligned} \tag{4-9}$$

これらは、以下で定義されるベッセルの微分方程式

$$x^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + x\frac{df(x)}{dx} + (a^2x^2 - n^2)f(x) = 0$$

あるいは、以下で定義されるベッセルの変形微分方程式

$$x^2 \frac{d^2 g(x)}{dx^2} + x\frac{dg(x)}{dx} - (b^2x^2 + n^2)g(x) = 0$$

と見なすことができる。一般解はそれぞれ

$$\begin{aligned} f(x) &= C_{a1}J_n(ax) + C_{a2}N_n(ax) \\ g(x) &= C_{g1}I_n(bx) + C_{b2}K_n(bx)\end{aligned}$$

で与えられる。ここで、J_n 及び N_n は次数 n の第一種及び第二種ベッセル関数、I_n 及び K_n は次数 n の第一種及び第二種変形ベッセル関数である。

これらの式は定数 a 及び b が複素数でも成り立つので、$b = ia$ とおくことによって同等な式が得られるから、$f(x)$ 及び $g(x)$ のどちらの形式でも利用することができる。一方で、

$$\lim_{x\to 0} N_n(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} I_n(x) = \infty$$

というベッセル関数の性質を利用することによって、より簡潔な組み合わせを選択することができる。即ち、

$$\begin{aligned}\hat{r} < 1 \quad &; \quad E_{n\Lambda}(\hat{r}) = C_{a1}J_n(a\hat{r}) \\ \hat{r} > 1 \quad &; \quad E_{n\Lambda}(\hat{r}) = C_{b2}K_n(b\hat{r})\end{aligned}$$

ただし、a 及び b は次式を満たす。

$$\begin{aligned} a^2 &= 2i\hat{D}\hat{\Lambda} + \frac{2\hat{D}}{(\hat{\Lambda} - i\hat{\nu})^2} \\ b^2 &= -2i\hat{D}\hat{\Lambda}\end{aligned}$$

さて、$\hat{r} = 1$ における $E_{n\Lambda}$ 及び $dE_{n\Lambda}/d\hat{r}$ の連続性から、以下の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} C_{a1}J_n(a) &= C_{b2}K_n(b) \\ aC_{a1}J_n'(a) &= bC_{b2}K_n'(b)\end{aligned}$$

書き換えると、

$$\begin{pmatrix} J_n(a) & -K_n(b) \\ aJ_n'(a) & -bK_n'(b)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{a1} \\ C_{b2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix}$$

従って、C_{a1} 及び C_{b2} が 0 でない値を取るためには、以下の式が満たされる必要がある。

$$bJ_n(a)K_{n+1}(b) = aJ_{n+1}(a)K_n(b) \tag{4-10}$$

ここで、ベッセル関数の関係式

$$\begin{aligned} J_n'(a) &= nJ_n(a)/a - J_{n+1}(a) \\ K_n'(b) &= nK_n(b)/b - K_{n+1}(b)\end{aligned}$$

を用いた。

式 (4-10) は、ある与えられた $\hat{\nu}$ に対して、波数 $\hat{\Lambda}$ が満たすべき方程式を示しており、一次元近似の時と同様に FEL 分散関係式と呼ばれる。そしてこの関係式を満たす a 及び b について、$E_{n\Lambda}$ を以下の形で書くことができる。

$$E_{n\Lambda}(\hat{r}) = \begin{cases} J_n(a\hat{r}); & \hat{r} < 1 \\ \dfrac{J_n(a)}{K_n(b)}K_n(b\hat{r}); & \hat{r} > 1 \end{cases} \tag{4-11}$$

4.4　分散関係式の数値的解法

方程式 (4-10) を $\hat{\Lambda}$ について解析的に解くことは一般的には不可能である。また一見して簡素な形式であるにも関わらず、この方程式を数値的に解くことは見かけほど容易なことではない。これは、$\hat{\Lambda}$ が複素数であること、またその関数としての $J_n[a(\hat{\Lambda})]$ や $K_n[b(\hat{\Lambda})]$ も複素数であるため解析が複雑になること、などが要因である。本稿では、

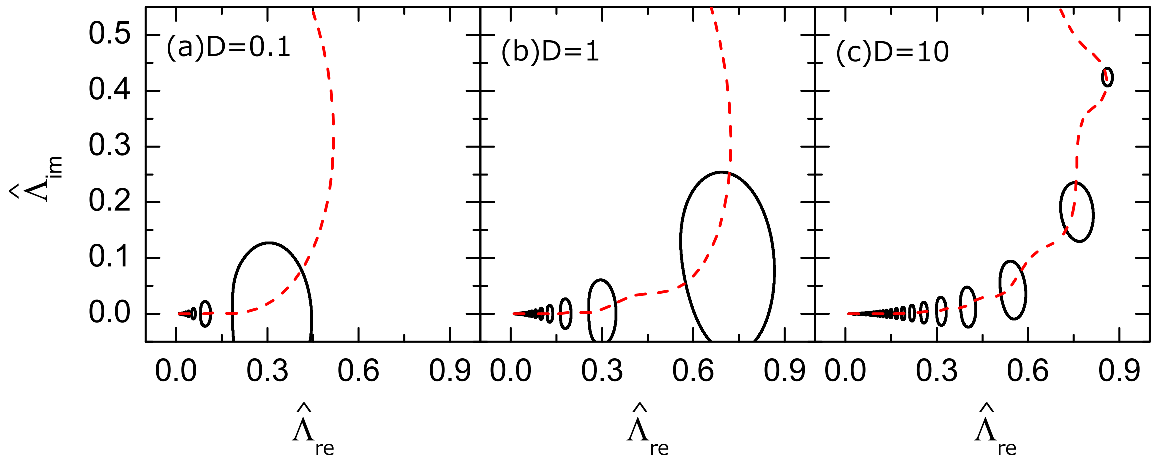

図 15: $H_0 = 0$ 満たす $\hat{\Lambda}$ の探索。$\mathrm{Re}(H_0) = 0$ を満たす $\hat{\Lambda}$ の実部と虚部が複素平面上で描く軌跡（実線)。破線は $\mathrm{Im}(H_0) = 0$ を満たす軌跡。3 種類の回折パラメータについて表示：(a)$\hat{D} = 0.1$、(b)$\hat{D} = 1$、(c)$\hat{D} = 10$。

筆者がいろいろと試行錯誤した結果、最適と思われる手法について紹介する。

まず初めに、以下の関数を定義する。

$$H_n(\hat{\Lambda}) = \frac{aJ_{n+1}(a)}{J_n(a)} - \frac{bK_{n+1}(b)}{K_n(b)}$$

$H_n(\hat{\Lambda}) = 0$ の解を $\hat{\Lambda}_n$ と定義すると、これは明らかに方程式 (4-10) を満たす。一方で関数 H_n は複素関数であるので、H_n の実部と虚部がそれぞれ 0 になるような $\hat{\Lambda}_n$ を見いだす必要がある。

例えば図 15 に、$\hat{\nu} = 0$ という条件の下で、3 種類の回折パラメータ $\hat{D}(= 0.1, 1, 1.0)$ について、H_0（即ち $n = 0$）の虚部と実部が 0 となるとき（$\mathrm{Im}(H_n) = 0$、$\mathrm{Re}(H_n) = 0$）の $\hat{\Lambda}$ の実部と虚部の関係を計算した結果を、複素平面上における軌跡として示している。これらの軌跡を表す曲線が交差する点が方程式 (4-10) の $n = 0$ のときの解 $\hat{\Lambda}_0$ である。

ちなみにこの例で示したように、$\hat{D}$ や $\hat{\nu}$ が実用的な値である場合には、$\mathrm{Im}(H_n) = 0$ を満たす軌跡は開曲線になる傾向がある [14]。そこで、$H_n = 0$ を満たす解 $\hat{\Lambda}_n$ のうち、この曲線に沿って $\mathrm{Im}(\hat{\Lambda})$ が大きいものから順番に、0 で始まる指数をつけることにする。即ち、$\hat{\Lambda}_{n0}$ の虚部が最も大きく、$\hat{\Lambda}_{n1}$ の虚部がその次、という具合である。

解 $\hat{\Lambda}_{nm}$ には、式 (4-11) で規定される、それぞれ異なる空間プロファイルをもつレーザーが対応する。これらをそれぞれ、レーザーにおける空間モードとの対比から、TEM_{nm} モードと呼ぶことにする。

[14] 数学的に証明されているわけではない。

4.5 レーザーの空間プロファイル

次に、増幅されるレーザーの空間プロファイルについて考察する。式 (4-11) を用いて計算した $\hat{D} = 1$ のときの空間プロファイル、即ち $|E_{n\Lambda}|^2$ を各種の空間モード（TEM_{nm}）について計算した結果を図 16 の上段に示す。これを見ると、m の増加に伴い、節点（極小点）の数が増加することが分かる。また、n が 1 よりも大きい場合には、中心部のレーザーパワーは 0 となる。このように、空間モード数 n や m が増加するのに伴って、空間プロファイルはより複雑な形状へ変化する。

図 16 の下段には、TEM_{00}、TEM_{10}、及び TEM_{01} モードの空間分布を、3 種類の回折パラメータ $\hat{D}(= 0.1, 1, 1.0)$ について計算した結果を示す。それぞれの場合において、$\hat{r} < 1$ の領域に電子ビームが一様に分布していることに注意されたい。

TEM_{00} モードでは回折パラメータの大小に依らず、ガウシアンに近いプロファイルが得られることが分かるが、そのサイズは回折パラメータに依存する。例えば、$\hat{D} = 10$ のとき、即ち回折効果が小さいときには、レーザープロファイルは $\hat{r} < 1$、即ち電子ビーム内部に留まっていることが分かる。

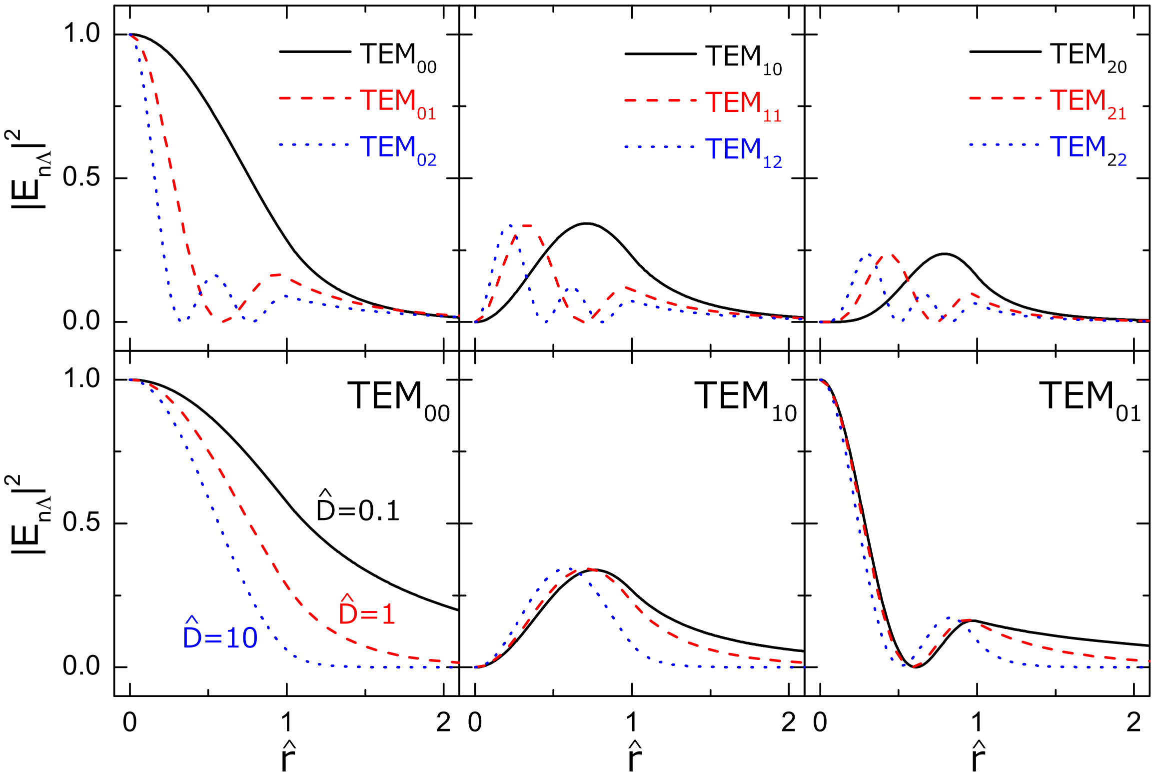

図 16: 回折パラメータ $\hat{D}=1$ のときの各空間モードにおけるプロファイル。

一方、$\hat{D}=0.1$ のとき、即ち回折効果が大きいには、レーザープロファイルが電子ビームから大きくはみ出している。同様の傾向は他の空間モードについても確認できる。

4.6　増幅率

ここで、各空間モード TEM_{nm} の増幅率が回折パラメータ、即ち電子ビームサイズに対してどのように変化するかについて見てみよう。図 17 の上段に、$\hat{D}$ の関数として計算した $\mathrm{Re}(\hat{\Lambda}_{nm})$ を各空間モードについて示す。

いずれの空間モードにおいても、$\hat{D}$ が増加するにつれて $\mathrm{Re}(\hat{\Lambda}_{nm})$ は増加し、一次元近似での上限値 $\sqrt{3}/2$ に漸近する。$\hat{D}$ の増加はビームサイズの拡張を意味するのでこれは当然である。ただし、同じ $\hat{D}$ で比較したときには、高次のモードほど $\mathrm{Re}(\hat{\Lambda}_{nm})$ は小さくなる傾向にある。また、$\hat{D}$ の減少に伴って、全ての空間モードで $\mathrm{Re}(\hat{\Lambda}_{nm})$ は減少するが、その減少率は空間モード数が小さいほど緩やかである。例えば、$\hat{D}=0.1$ では基本モード $(m=n=0)$ とそれ以外の高次モードの $\mathrm{Re}(\hat{\Lambda}_{nm})$ の比は 3 倍以上にも達する。

上記の考察では、電子ビームの電流密度 ecn_a を固定した状態でビームサイズ r_0 のみを変化させている。即ち、ビーム電流 $ecn_a\pi r_0^2$ は回折パラメータ $\hat{D}$ に比例する。一方実用上は、電流値を固定した状態でビームサイズを変化させたときの増幅率の変化が重要である。この場合、電流密度は回折パラメータに反比例し、また FEL パラメータ ρ が電流密度の 1/3 乗に比例することを考慮すると、$\mathrm{Re}(\hat{\Lambda}_{nm})$ を $\hat{D}^{1/3}$ で規格化した増幅率を調べる必要がある。

図 17 の下段に、$\hat{D}$ の関数として計算した規格化増幅率 $\mathrm{Re}(\hat{\Lambda}_{nm})/\hat{D}^{1/3}$ を各空間モードについて示す。規格化増幅率を最大化する回折パラメータが存在し、これは空間モードに依存することがわかる。例えば基本モードでは $\hat{D}\sim 0.1$ において最大の増幅率が得られる。従って、これを満たすように電子ビームを収束させる必要がある。一方で 5 節で詳しく述べるように、エミッタンスが有限である実用的な場合には、電子ビームの収束は角度発散の増大をもたらし、これが増幅率を劣化させ

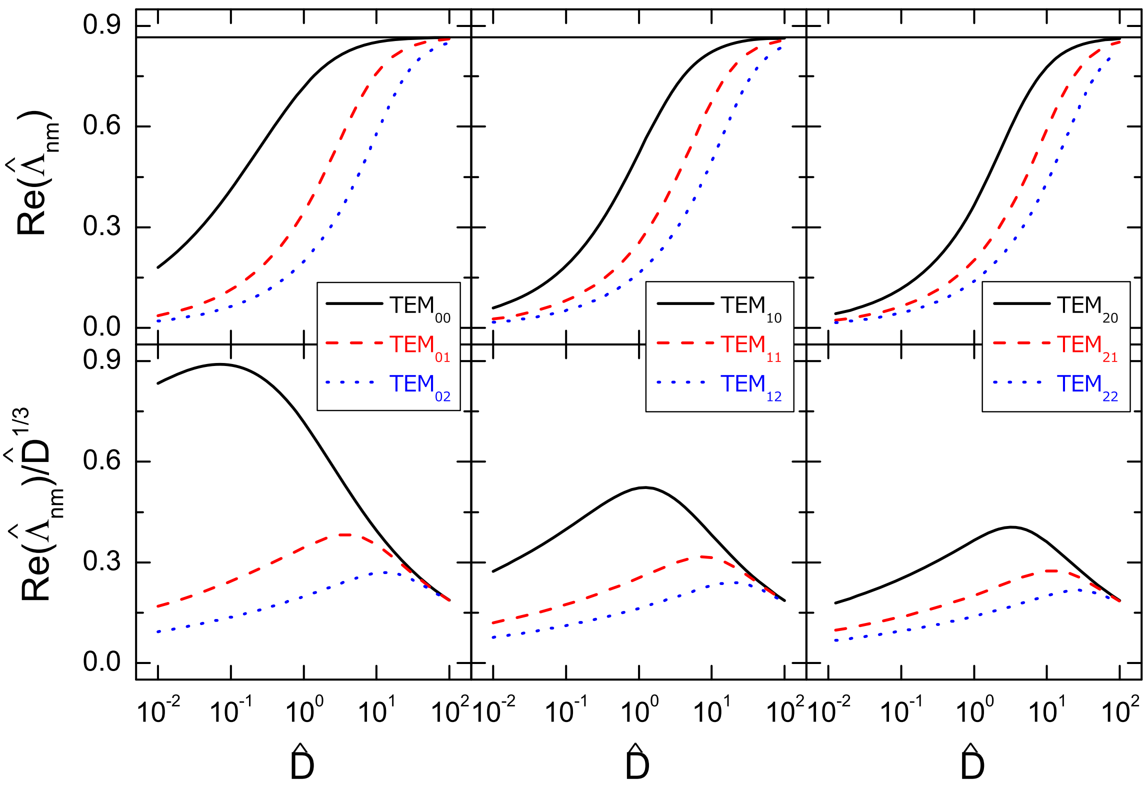

図 17: 増幅率（上段）及び規格化増幅率（下段）の $\mathrm{Re}(\hat{\Lambda}_{nm})$ の回折パラメータ $\hat{D}$ に対する依存性。参考のために一次元近似での上限値（$\mathrm{Re}(\hat{\Lambda}) = \sqrt{3}/2$）を実線で示す。

ることが分かっている。従って、これを考慮に入れてベータトロン関数などを設定する必要がある。

4.7　光ガイディング

これまで解説してきたように、FEL ではある空間プロファイル（モード）を持つ光のみが選択的に増幅される。例えば円柱状の電子ビームの場合は、図 16 に示された空間モード TEM_{nm} が増幅される。従って、実際のレーザープロファイルはこれらの空間モードが足しあわされたものになる。

一方前節で説明したように、基本空間モードに対する高次空間モードの相対的な増幅率 $\mathrm{Re}(\hat{\Lambda}_{nm})/\mathrm{Re}(\hat{\Lambda}_{00})$ は、モード次数が大きいほど小さい。これは回折パラメータ $\hat{D}$ が小さい条件において、より顕著になるが、そうではない場合でも当てはまる一般的な傾向であって、例えば図 17 に示したように、$\hat{D} = 10$ において $n, m \leq 2$ の高次モードはほぼ同様の増幅率を持つが、これよりも高次（$m, n \geq 3$）では増幅率が顕著に低下することが分かっている。従って高ゲイン領域においては、最大の増幅率を持つ基本空間モードの光が顕著に増幅されるため、これ以外の、相対的に増幅率が低い高次空間モードのレーザーパワーは相対的に低下する。言い換えると、高ゲイン領域におけるレーザープロファイルは、入射したシード光のプロファイルには依存せず、基本空間モードのそれに近づく。一般的に基本空間モードはシンプルな形状をしたガウシアンに類似したものであるため、高ゲイン領域においてはガウスビームに近いレーザーが得られる。このような効果を、高ゲイン FEL における光ガイディングと呼ぶ。

光ガイディングの例を図 18 に示す。これは、$0 \leq n, m \leq 2$ で指定される 9 つの空間モード TEM_{nm} を同等に含むシード光がアンジュレータに入射された場合に、増幅が進むにつれてどのように空間プロファイルが変化するかを計算したものである。入射直後（$\hat{z} = 0$）では多数の空間モードで構成されるためにいびつな形状をしているプロファイルが、$\hat{z}$ の増加に伴い、基本モード、即ち擬似的なガウシアンプロファイルへと変化していくことが分かる。このような光ガイディングは 6 節で詳しく

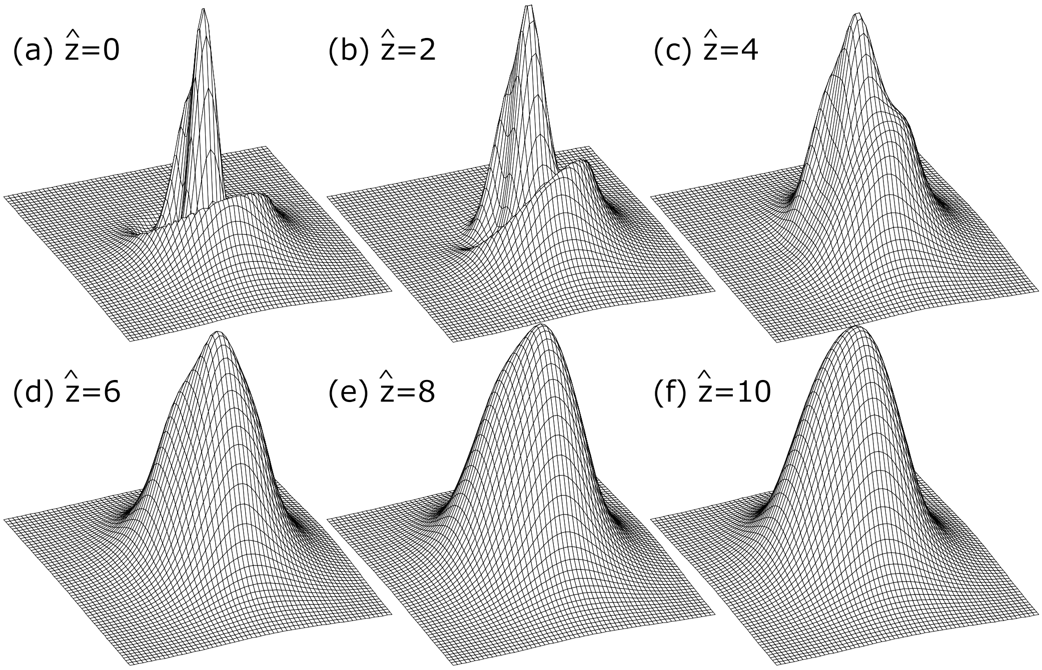

図 18: 光ガイディングによる空間コヒーレンスの改善。

解説する SASE 型 FEL では特に重要であって、空間コヒーレンスの改善という役割を担っている。

5　普遍的スケーリング関数

3 節では一次元近似による FEL 方程式を導出し、その増幅過程や、波長偏差及び電子ビームのエネルギー幅による影響について調べた。また 4 節では、回折の効果を考慮した方程式 (4-4) を導出するとともに、これをエネルギー幅が 0 で円柱状のプロファイルを持つ電子ビームに適用することによって、増幅される空間モードの空間プロファイルや増幅率を計算するとともに、これらと電子ビームサイズとの関係について調べた。また光ガイディング効果と、これがもたらす空間コヒーレンスの改善について解説した。このように、方程式 (4-4) は回折効果を考慮した FEL 増幅過程を調べるのに非常に有用ではあるが、本来考慮すべき要因が一つ省略されていることに注意する必要がある。即ち、電子ビームの有限エミッタンスの取り扱いである。

前節までは、電子ビームに含まれる全ての電子は同じ速度ベクトルを持つと仮定した。これは電子ビームの角度発散が 0、即ちエミッタンスが 0 であることを意味する。実際には電子ビームのエミッタンスは有限であって、個々の電子は異なる速度ベクトルを持ち、かつ異なる振幅でベータトロン振動を行う。この影響を考慮に入れた方程式は一般的に 3 次元 FEL 方程式と呼ばれており、アンジュレータの磁場エラーや軌道エラーなどが存在しない、理想的な系における FEL 増幅を記述するための全ての要素が含まれている。従って、新たに建設される FEL 施設において、加速空洞やアンジュレータなどのハードウェアの仕様の策定や、ビームパラメータの最適化などを行う際には、3 次元 FEL 方程式を解くことによって増幅率の評価を行う必要がある。しかしながら容易に予測できるように、3 次元 FEL 方程式を厳密に解くためには非常に複雑な数学的操作や数値計算を必要とするため、専門家以外には敷居が高い。

この問題を解決するために、FEL 理論の専門家によって、比較的容易にかつ精度良く FEL の増

幅率を計算するための手法が提案されてきた。これらの中でも決定版とも言えるものは M. Xie によって 2000 年に提案された [8] 普遍的スケーリング関数であって、複雑な数式を使うことなく容易に FEL の増幅率を計算することができるため、現在では世界中の研究者や技術者に利用されている。本節ではこのスケーリング関数について紹介するとともに、いくつかの計算例を示す。

5.1 ベータトロン振動の影響

スケーリング関数の解説に移る前に、電子ビームの有限エミッタンスやベータトロン振動によって、方程式 (4-4) がいかに修正されるかについて簡単に解説し、その影響について定性的に議論する。

一般的に、電子ビームを構成する個々の電子の水平軌道は次式で与えられる [9]。

$$
\begin{aligned}
x_j &= \sqrt{2J_{xj}b_x(z)}\cos\phi_x(z) \\
x'_j &= -\sqrt{\frac{2J_{xj}}{b_x(z)}}[\sin\phi_x(z)+\alpha_x(u)\cos\phi_x(z)]
\end{aligned}
$$

ここで x_j は、電子ビームに含まれる j 番目の電子の x 座標を意味し、プライム（$'$）は z に関する微分を意味する。$2J_{xj}$ は j 番目の電子のベータトロン振幅を決定する運動の定数 [15] であり、b_x はベータトロン関数、ϕ_x はベータトロン位相、また $\alpha_x = -b'_x/2$ である。また、垂直方向の軌道についても類似した式で表される。ちなみに、ベータトロン関数は通常ギリシャ文字の β で示されるが、本稿では電子の相対速度 $\boldsymbol{\beta}$ との混同をさけるため、アルファベットの b を用いている。

さてこのようなベータトロン振動をしている j 番目の電子がアンジュレータに入射した場合の相対速度 $\boldsymbol{\beta}_j$ の z 成分を計算するためには、式 (3-6) の β_x、β_y をそれぞれ $(\beta_{xj}+x'_j)$ 及び $(\beta_{yj}+y'_j)$ で置き換える必要がある。これらの平方を計算すると次式が得られる。

$$
(\beta_{xj}+x'_j)^2 = \beta_{xj}^2 + 2\beta_{xj}x'_j + x'^2_j
$$

ここで、β_{xj} はアンジュレータの磁場に由来する運動、また、x'_j はベータトロン振動に由来する運動である。一般的に後者の周期は前者の周期 λ_u よりもずっと長いので、λ_u で平均すると、右辺の 2 項目は消滅する。また、

$$
x'^2_j = \frac{2J_{xj}}{b_x(z)}[\sin\phi_x(z)+\alpha_x(u)\cos\phi_x(z)]^2
$$

であるが、一般的な XFEL においては収束と発散が周期的に繰り返される FODO 収束系が採用されることが一般的であり、また $\alpha_{x,y}\sim\pm1$ となるように設計されることが多い。この場合、上式は簡略化され、

$$
x'^2_j = \frac{2J_{xj}}{b_x(z)}[1\pm\sin 2\phi_x(z)]
$$

FODO 収束系の周期について平均すると次式が得られる。

$$
x'^2_j \sim \frac{2J_{xj}}{\bar{b}_x}
$$

結局、j 番目の電子が座標 z に到達する平均時刻について次式が得られる。

$$
\frac{d\bar{t}_j(z)}{dz} = \frac{1}{c}\left(1+\frac{\lambda_1}{\lambda_u}\right) + \frac{2J_{xj}}{2\bar{b}_x} + \frac{2J_{yj}}{2\bar{b}_y}
$$

従って、j 番目の電子に関する位相方程式は

$$
\frac{d\psi_j}{dz} = 2k_u\frac{\gamma_j-\gamma_0}{\gamma_0} - k_1\frac{2J_{xj}+2J_{yj}}{2\bar{b}} \qquad (5\text{-}1)
$$

となる。ここで、XFEL では水平及び垂直の平均ベータトロン関数が等しくなるように設計されることを考慮し、$\bar{b}_x=\bar{b}_y=\bar{b}$ とおいた。さてこのようにベータトロン振動をする電子（$2J>0$）は、アンジュレータの中心を z 軸に平行に移動する電子（$2J=0$）に比べて位相が遅れていく。これは、電子のエネルギー幅と同様の影響をもたらす。この影響を抑制するためには、エミッタンスを改善することによって個々の電子の $2J$ を小さくするか、平均ベータトロン関数を大きくする必要があるが、後者の場合にはビームサイズが大きくなり、電流密度が低下することの影響と相殺される可能性がある。

5.2 3 次元 FEL 方程式の導出と解法

前節で解説したベータトロン振動の影響を考慮に入れた 3 次元 FEL 方程式を導出するためには、以下の手順に従って方程式 (4-4) を修正する。

[15] クーラン・シュナイダー不変量と呼ばれる

1) 電子の分布関数（f_0 や f_1 など）の引数に、電子の位置座標 x、y 及び相対速度 β_x、β_y を加える。

2) 位相方程式 (5-1) を考慮して、マイクロバンチの成長を記述する式 (3-31) を修正する。

3) 式 (4-4) の右辺の $\hat{z}'$ に関する積分について、被積分関数の引数に含まれる $\boldsymbol{r}_\perp$ を電子のベータトロン振動の軌道に沿ったものに修正する。

尚これらの操作の数式化の詳細や、導出された 3 次元 FEL 方程式の表式については本稿の目的を逸脱するので省略する。興味のある読者は文献 [4] を参照されたい。

文献 [8] では、上記の手続きによって導出された 3 次元 FEL 方程式について、電子ビームのエネルギー分布及び空間分布を表す関数としてガウシアンを仮定し、行列を用いた数値計算によって厳密な解を求める手法が示されている。さらに、ガウシアンプロファイルを持つ基本モードに関する FEL 分散関係式を導くとともに、変分法を駆使することによってこれを近似的に解き、数値計算による厳密解との比較を行った。この結果、両者が極めて良く一致することを示した。さらに、この近似的手法を様々な条件で繰り返して増幅率を求め、これらの結果を元に、光の回折、ベータトロン振動、及び電子ビームのエネルギー幅を全て考慮に入れたゲイン長（本稿では実効ゲイン長と称することにする）を簡易的に求めるためのフィッティング関数を考案した。これは、レーザー増幅が可能な実用的な範囲に存在するパラメータで適用が可能な、言わば普遍的スケーリング関数であり、非常に有用である。次節でその詳細について紹介する。

5.3 普遍的スケーリング関数

フィッティング関数は実効ゲイン長 $L_{g,eff}$ を計算するための関数として次式で定義される。

$$L_{g,eff} = (1+\Gamma)L_g \tag{5-2}$$

ここで、L_g は一様なエネルギーを持つ（$\Delta\hat{\eta}=0$）電子ビームと、波長偏差がない（$\hat{\nu}=0$）シード光について、一次元 FEL 理論によって導出されたゲイン長である。言い換えると、理想的な条件で得られる最短のゲイン長である。また、Γ は以下の 4 つのパラメータの関数である。

$$\eta_d = \frac{L_g}{L_r} \tag{5-3}$$

$$\eta_\varepsilon = \frac{L_g}{\bar{b}}\frac{4\pi\varepsilon}{\lambda_1} \tag{5-4}$$

$$\eta_\gamma = 4\pi\frac{L_g}{\lambda_u}\frac{\sigma_\gamma}{\gamma_0} \tag{5-5}$$

ただし、電子ビームサイズ σ_r を用いて、

$$L_r = \frac{4\pi\sigma_r^2}{\lambda_1}$$

である。また、ε 及び σ_γ は、それぞれ、標準偏差で表された電子ビームのエミッタンス及びエネルギー幅である。

これらのパラメータを用いて、Γ は次式で計算される。

$$\begin{aligned}\Gamma = {} & a_1\eta_d^{a_2} + a_3\eta_\varepsilon^{a_4} + a_5\eta_\gamma^{a_6} \\ & + a_7\eta_\varepsilon^{a_8}\eta_\gamma^{a_9} + a_{10}\eta_d^{a_{11}}\eta_\gamma^{a_{12}} + a_{13}\eta_d^{a_{14}}\eta_\varepsilon^{a_{15}} \\ & + a_{16}\eta_d^{a_{17}}\eta_\varepsilon^{a_{18}}\eta_\gamma^{a_{19}}\end{aligned} \tag{5-6}$$

パラメータ $a_1 \sim a_{19}$ については表 2 に示す。

表 2: 普遍的スケーリングを計算するための 19 個のフィッティングパラメータ。

a_1	0.45	a_2	0.57	a_3	0.55	a_4	1.6
a_5	3	a_6	2	a_7	0.35	a_8	2.9
a_9	2.4	a_{10}	51	a_{11}	0.95	a_{12}	3
a_{13}	5.4	a_{14}	0.7	a_{15}	1.9	a_{16}	1140
a_{17}	2.2	a_{18}	2.9	a_{19}	3.2		

式 (5-2) を見れば明らかなように、Γ は理想的条件で期待される値からの相対的なゲイン低下率を表す。そして、フィッティングパラメータが全て正の実数であるため、大幅なゲインの低下を避けるためには、3 つのパラメータ η_d、η_ε、及び η_γ が全て小さい値に留まっていなければならない。この条件は、FEL 発振を実現するために要求される電子ビーム特性を定めるものであり、次節で詳しく考察することにする。

5.3.1　η_d に関する条件

$\eta_d < 1$ という条件は以下のように変形できる。

$$\sigma_r > L_g \frac{\lambda_1}{4\pi\sigma_r} \equiv L_g \sigma_{r'}$$

ここで $\sigma_{r'}$ は、波長 λ_1 で光源サイズが σ_r である回折限界光の角度発散であるから、右辺は回折によるビームサイズの拡がりを示す。従ってこの条件は、光がゲイン長に相当する距離を伝播したときに、電子ビームから大きくはみ出さないということを意味する。即ち、光と電子の相互作用が失われないための条件であると言える。

5.3.2　η_ε に関する条件

$\eta_\varepsilon < 1$ という条件は、以下のように変形できる。

$$\varepsilon < \frac{\lambda_1}{4\pi} \frac{\bar{b}}{L_g} \equiv \varepsilon_l \frac{\bar{b}}{L_g}$$

この式は、発振波長における光の自然エミッタンス ε_l を尺度にした、電子ビームのエミッタンス ε が満たすべき条件を与える。通常は $\bar{b}/L_g = 5 \sim 10$ に設定されることを考慮すると、ε は $(5 \sim 10)\varepsilon_l$ よりも小さい値でなければならない。

5.3.3　η_γ に関する条件

$\eta_\gamma < 1$ という条件は、式 (3-53) を用いて以下のように変形することができる。

$$\frac{\sigma_\gamma}{\gamma_0} < \sqrt{3}\rho$$

即ち、相対エネルギー幅は FEL パラメータ ρ よりも小さい必要がある。これは 3.10.2 節で行った議論と整合している。

5.4　各パラメータに対する依存性

ここで、スケーリング関数が各パラメータに対してどのように変化するかを見てみよう。3 つのパラメータ η_d、η_ε、及び η_γ のうちの二つをある値 η_{fix} で固定し、残りのパラメータを 0.01 から 10 まで変化させて Γ の依存性を計算した結果を図 19 に示す。

いずれの場合でも、η_γ に対する依存性が最も強く、エネルギー幅に関する条件が最も厳しいことがわかる。これと比較すると、η_d に対する依存性は弱く、仮に η_d が 10 に達する条件でもゲインの低下は 1 桁に満たない。

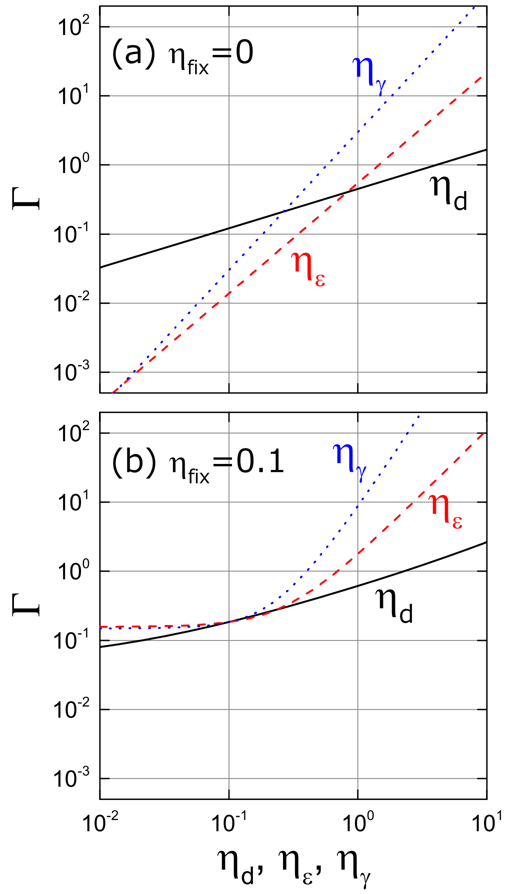

図 19: スケーリング関数の各パラメータに対する依存性。(a)$\eta_{fix} = 0$、(b)$\eta_{fix} = 0.1$。

5.5　FEL 加速器におけるパラメータデザインへの応用

FEL を構成する加速器の機器を設計するためには、実効ゲイン長 $L_{g,eff}$ が非現実的な長さにならないように、相当数のパラメータの最適化を行う必要がある。例えば、ある発振波長 λ_1 を仮定したときの $L_{g,eff}$ は、γ_0、I（ビーム電流）、$\bar{b}$、ε、σ_γ、λ_u という 6 つのパラメータで決まる。

これらのパラメータのうち、λ_u と γ_0 は互いに関係しているが、施設のダウンサイジング（即ち省

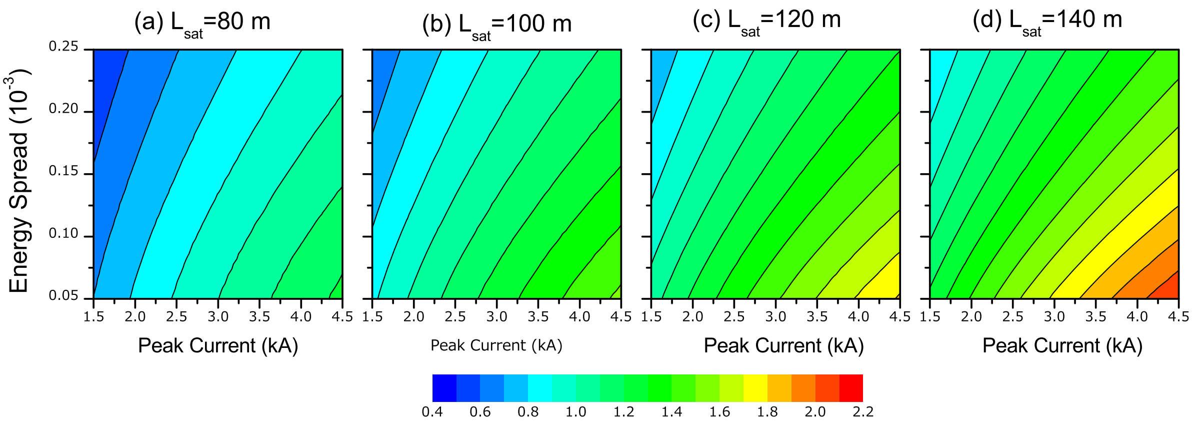

図 20: 波長 0.1nm でのレーザー発振に要求される電子ビームパラメータの性能。ある実効飽和長を達成するために必要な、σ_γ、ε 及び I の関係を示す。平均ベータトロン関数は最適化してある。

コスト化）を図るためには γ_0 を低減する必要があり、このためになるべく短い λ_u を採用する必要がある。ただしこの場合は、偏向定数 K が小さくなる傾向があり（OHO'13 の「アンジュレータ」講義資料参照)、この結果 FEL パラメータ ρ が小さくなり、到達可能なレーザーパワーが低下する。一方で、これらの関係式は K 値を含めて比較的容易な数式で書くことができ、現実的なパラメータを決定することは困難ではない。例えば SACLA では、比較的早い設計段階において、0.1 nm においてレーザー発振を実現するために、$\gamma_0 = 1.566 \times 10^4$（8 GeV）及び $\lambda_u = 18$ mm（K=1.8）という値が決定した。

一方、残りの 4 つのパラメータについては、最適化と言うよりもむしろ電子ビームの性能として要求される仕様値が求められる。本来であれば、それぞれのパラメータの組み合わせについて FEL 方程式を解くことによって実効ゲイン長を計算する必要があるが、これには高度な数値計算テクニックを要する。一方、5.3 節で紹介したスケーリング関数を利用すると、複雑な数値計算をすることなく実効ゲイン長の計算が可能になるため、その利用価値は高い。

例として、SACLA の設計初期段階で必要なビームパラメータの計算例を図 20 に示す。後に 6.4 で説明する実効飽和長について、4 つの値を達成するために必要な 3 つのビームパラメータ σ_γ、ε 及び I を計算してある。尚、それぞれの組み合わせ毎に $\bar{b}$ は最適化してある。

6　SASE 型 FEL

3 節から 5 節までは、増幅器という観点で見た FEL について考察を行ってきた。即ち、電子ビームと同期してアンジュレータに入射されたシード光の増幅率を計算するための手法について解説するとともに、導出された FEL 方程式を簡易的な系について解くことにより、実際に増幅率を求めた。その一方で、増幅されるべきシード光を調達する手法については言及してこなかった。

実のところ、シード光の発生手法は FEL を検討する上でも非常に重要な課題であり、これによって FEL 加速器の機器構成だけではなく、適用できる波長範囲が大きく異なる。まず、真空紫外よりも長い波長領域でよく利用される、共振器型 FEL について考察してみよう。

共振器型 FEL では、図 1(b) に示したように、アンジュレータを 2 つのミラーによって挟み込むことで光共振器を構成する。光共振器にレーザーパワーが蓄えられていない状態でアンジュレータに入射した電子バンチからは自発放射光が放出される。放出された光はミラーによって 2 回反射された後、次の電子バンチと同期して再度アンジュレータに入射される。これを繰り返すことによって共振器に蓄えられる光のパワーは増大し、電子バンチにエネルギー変調を誘起する。この過程が進行し、マイクロバンチが形成される程のパワーが共振器に蓄えられた時点でレーザー増幅が始まり、3.11 で説明したメカニズムによって飽和に至る。

このように共振器型 FEL では、共振器に閉じ込

められた光が何度も電子バンチと相互作用することによって増幅を繰り返し、レーザー発振に至る。そして、シード光の源となるのは共振器に光のパワーが蓄えられる前にアンジュレータに入射した、先頭の電子バンチから放出される自発放射光であるが、この自発光はそのまま増幅されるわけではなく、共振器の縦（時間）及び横（空間）モードに適合するものだけが選択的に増幅される。従って、この場合のシード光は「光共振器によってモード選択された自発放射光」であるといえる。

さて容易に理解されるように、上記で述べた光共振器型 FEL を短波長にまで拡張するには大きな制約が生ずる。即ち、反射率が高い実用的なミラーが存在しない短波長領域[16]では光共振器を構成することができず、光を繰り返し増幅することが不可能である。言い換えると、増幅率を稼いでレーザー飽和まで到達することが困難である。そこで短波長領域における FEL の方式として提案されたのが SASE 型 FEL である。この方式においては、電子と光の相互作用の距離を稼ぐためにゲイン長よりもずっと長いアンジュレータを設置して増幅率を稼ぐことにより、シード光と電子バンチがアンジュレータを一度限り通過するだけで飽和に到達することができる。この場合、光共振器は必要ではないため、原理的な波長の制限は存在しない。ちなみに、光共振器の代わりに長いアンジュレータを利用するこのような方式の FEL として、後に 7 節で解説するシード型 FEL がある。また、これらを総称してシングルパス型 FEL と呼ぶことがある。

さて、SASE とは “Self Amplified Spontaneous Emission” の略であり、日本語では「自己増幅型自発放射光」と訳すことができる。SASE 型 FEL では、アンジュレータの入口に近い、増幅の初期段階において放出された自発放射光がシード光として機能する。自発放射光をシード光として利用するという意味において、光共振器型 FEL と SASE 型 FEL には共通点があるが、そこには決定的な相違がある。即ち、前者では光共振器によってモード選択されたシード光のみが増幅される一方、後者ではそのような、光共振器によるモード選択機能は期待できない。このため、SASE 型 FEL で発生可能なレーザーは時間的にマルチモードであり、スペクトルや時間プロファイルに多数のスパイク（＝モード）を含む。一方、空間的には 4.7 節で解説した光ガイディングの効果によって、（理想的には）シングルモードのレーザーが得られる。

[16] 本稿執筆時では、実用的なミラーが存在する最短波長は 100 nm 程度である。

6.1　定常状態との相違

3 節から 5 節では、シード光や電子ビームが「定常状態」にあるという仮定の下で、FEL 方程式を導出するとともに、これを解くことによって増幅率を求めた。ここで「定常状態」の意味をおさらいすると、ある座標 z で固定して観測された電子密度や光のパワーが時間に依存しないということである。即ち、電子ビームは進行方向に完全に一様な分布をしており、かつ増幅されるシード光は無限に長い単色波である。SASE 型 FEL における増幅過程を考える上で、これは適切な仮定ではない。このことについて、**ショットノイズ**、**スペクトル**及び**スリッページ**という 3 つの観点から説明する。

6.1.1　ショットノイズ

前述したとおり、SASE 型 FEL では自発放射光がシード光として機能する。このような自発放射光は、個々の電子から放出された光がランダムに積算される結果発生することは 2.2 節で解説したとおりである。

さて、SASE 型 FEL におけるシード光を考える上では、この「ランダムに」というのが非常に重要なキーワードであって、これは電子バンチを構成する個々の電子がランダムに分布していることを反映している。逆に、電子バンチが「完全に一様に」分布しているとすれば、個々の電子から放出される光の電場は完全に打ち消し合うため、光は放出されない。実際には電子の分布には図 21(a) に模式的に示したように一定の揺らぎがあり、密に分布している領域と、疎に分布している領域とが混在している。このような密度の揺らぎをショットノイズと呼び、SASE 型 FEL におけるシード光の源（あるいはシード光そのもの）と見なすことができる。容易に理解できるように、このシード光は空間的にも時間的にもインコヒーレントであ

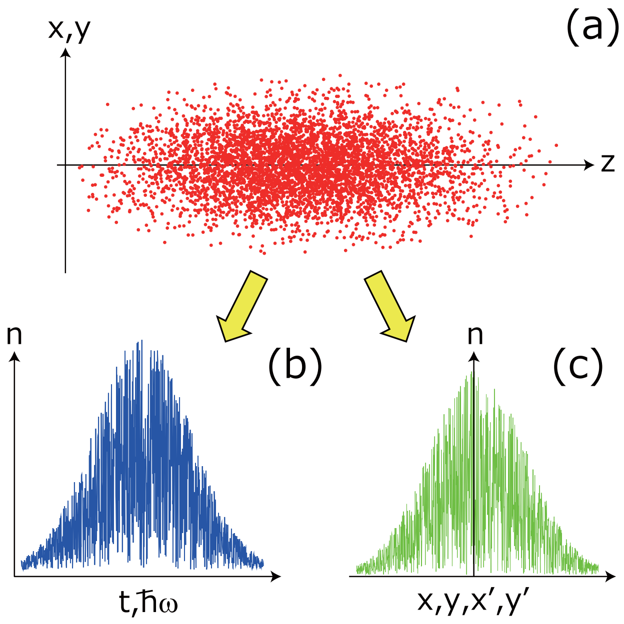

図 21: SASE 型 FEL におけるシード光としてのショットノイズ。(a) 電子バンチを構成する電子分布の模式図。ランダムに分布した電子から放出される光の (b) スペクトル及び時間プロファイル、(c) 空間及び角度プロファイル。

る。即ち図 21(b) 及び (c) に示したように多数のモード（＝スパイク）が存在する。

6.1.2　スペクトル

3 節などで計算された増幅率は、完全単色光がシード光として入射した場合のものである。即ち、シード光のパルス長と電子バンチ長が無限に長いことが想定されている。実際にはこれらの長さは有限であり、従ってシード光のスペクトルは有限のバンド幅を持つ。

6.1.3　スリッページ

スリッページとは、電子の速度が光速度よりも若干遅いために、光から取り残されていく効果を指す。特に 3.1 節で説明したように、アンジュレータ磁場を運動する電子の場合、1 周期を進む間（以後、1 ステップと称する）にアンジュレータの基本波長（$\sim$ 発振波長）と同じ距離だけ遅れていく。このことは、電子バンチを構成する各電子は、自身が放出した光と相互作用することはないということを意味する。言い換えると、個々の電子が相互作用する光はその電子よりも後方にいる電子が放出した光である。

この影響について詳しく見るために、電子バンチを進行方向に沿って発振波長に等しい長さをもつ領域（スライスと呼ぶ）に分割し、電子バンチが 1 ステップ進む間に、それぞれのスライスにおけるマイクロバンチと光の電場の関係が変化する様子を図 22 に模式的に示す。それぞれのスライスにおいてバンチ因子 $\langle e^{-i\psi}\rangle$ を計算することができ、これが式 (3-66) に従って光を増幅する。

左側が定常状態における状況を示すが、各スライスにおけるマイクロバンチは同一であり、また光の電場振幅（位相）も同一である。この状態から 1 ステップ進み、光の電場が 1 スライス分前方にシフトしても、各々のスライスは実効的に自分自身が放出した光と相互作用し、マイクロバンチを増強するとともに、光を増幅する。従って、エネルギー変調 $\rightarrow$ 密度変調 $\rightarrow$ コヒーレント放射による光増幅 $\rightarrow$ エネルギー変調、という正帰還的サイクルが効率的に起こる。

一方、右側に示した非定常状態の場合、マイクロバンチや光の位相はスライス毎に変化する。この状態から 1 ステップ進み、光の電場が 1 スライス分前方にシフトすると、マイクロバンチと光の位相関係は前ステップのものとは異なるため、さきほど述べた光の増幅に必要な正帰還的サイクルがうまく動作しない。

実際には非定常状態においてもマイクロバンチや光の位相がスライス毎に変化すると言うことはなく、ある長さ（コヒーレンス長）に渡って同等な位相関係が保たれるため、光は増幅される。そして増幅が進むにつれてコヒーレンス長は伸張する。

6.2　SASE 型 FEL における増幅領域とゲイン曲線

まず SASE 型 FEL における増幅過程について定性的に解説する。SASE という別の名称で呼ばれてはいるものの、シード光として自発光が利用されること以外は、これまでの説明してきたレーザー発振の原理と大きく異なるところはない。即

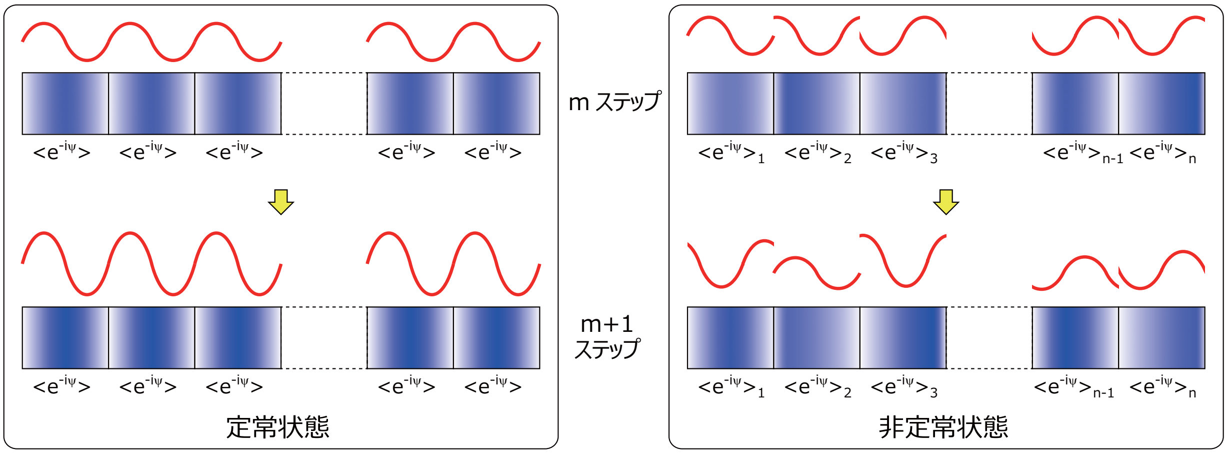

図 22: 定常状態及び非定常状態におけるスリッページの影響。実線は光電場、枠で囲われた部分の濃淡が電子密度を表す。

ち、以下で説明する 3 つの異なる増幅領域に分離して考察することが有用である。

自発光生成領域

ショットノイズによって自発光が生成される領域であり、レーザー増幅は起こらないが、光のパワーはほぼ線形的に増加する。

指数関数的増幅領域

生成された自発光が FEL 増幅作用によって指数関数的に増幅される。

飽和領域

増幅に伴って電子バンチの平均エネルギーが減少するとともにエネルギー幅が増大するため増幅率が低下し、レーザーパワーが頭打ちになる。

図 23 に、各増幅領域におけるレーザーパワーの変化、即ちゲイン曲線の計算例を示す。ちなみに、上記の各増幅領域の境界を明確に定めることは困難であるが、これはゲイン曲線の形状を見ても明らかであろう。

6.3 シード光としての自発光の実効入力パワー

次に SASE 型 FEL におけるシード光としての自発放射光について考える。一般的に言って、自発光のパワー全てが増幅に寄与するわけではない。

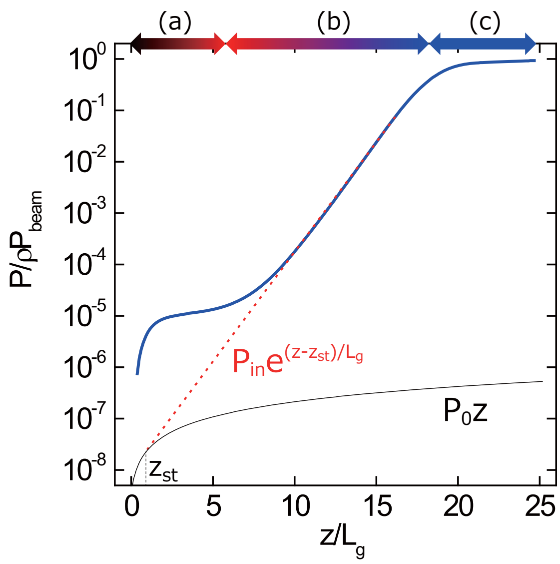

図 23: SASE 型 FEL における典型的なゲイン曲線（太実線）と増幅領域。(a) 自発光生成領域、(b) 指数関数的増幅領域、(c) 飽和領域。

これは、アンジュレータを通過する電子から放出される放射光が、式 (3-28) で定義される波長だけではなく、他の波長も含むためである。例えばアンジュレータ軸から測定した角度が θ である方向へは

$$\lambda_1(\theta) = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2}(1 + K_\perp^2/2 + \gamma^2\theta^2)$$

という波長を持つ光が放出される。即ち、放出角度の増加に伴い、赤方変位する。このような、軸外に放出される発振波長よりも長い波長の光は, シード光としては機能しない。従って、自発光生成領

域における光のパワーの大半は増幅に寄与しないと考えられる。それでは、実際に増幅に寄与する自発光のパワーはいかほどであろうか？

この問いに対する答えを定性的に考察するために、図23の点線で示したように、指数関数的増幅領域におけるゲイン曲線を自発光生成領域へ外挿してみる。するとこの例では、$z = 0$ 付近で、実線のゲイン曲線から読み取ったパワーと比較して2桁程度低いことが分かる。即ち、シード光として増幅に寄与する実効的な入力パワーは、自発光の全パワーと比較して高々数%である。

さらに詳しく検討するために、以下のような考察を行う。点線で示した指数関数的増幅が、ある座標 z_{st} から始まるものとする。そしてここに至るまでは、実効的な入力パワーは線形的に増加するとする。これらを数式で表すと、レーザーパワー $P(z)$ は次式で書くことができる。

$$P(z) = \begin{cases} p_0 z & ; z < z_{st} \\ \dfrac{P_{in}}{9} \mathrm{e}^{(z-z_{st})/L_g} & ; z > z_{st} \end{cases} \tag{6-1}$$

ここで、p_0 は実効的な入力パワーの増加率、P_{in} は $z = z_{st}$ における実効的入力パワーである。また、係数 1/9 が必要な理由については既に 3.10.1 節で議論したとおりである。この仮定の下に、$z = z_{st}$ における $P(z)$ 及び $dP(z)/dz$ の連続条件を考慮すれば、$z_{st} = L_g$ が容易に得られる。

それでは具体的に $z = z_{st}$ における自発放射光のパワーを計算してみよう。このため、アンジュレータ放射光に関してよく知られた次の式（文献 [1] 参照）を利用する。

$$\frac{d^2F}{d\Omega^2} = \alpha N^2 \gamma_0^2 \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{2K_\perp^2 \bar{\kappa}^2}{(1+K_\perp^2)} \frac{I}{e} S_N(\omega, \theta)$$

ここで定義された $S_N(\omega, \theta)$ はアンジュレータ自発光のスペクトルや角度分布を支配する関数であり、次式で定義される。

$$S_N(\omega, \theta) = \mathrm{sinc}^2 \left[\pi N \frac{\omega - \omega_1(\theta)}{\omega_1(\theta)} \right]$$

ここで $\mathrm{sinc}(x) = \sin(x)/x$ であり、また、F は放射光のフラックス、N はアンジュレータの周期数、I は電子ビームの電流値、$\omega_1(\theta) = 2\pi c/\lambda_1(\theta)$、$\alpha = e^2/(4\pi\varepsilon_0 \hbar c)$ は微細構造定数である。また、立体角 Ω に関する微分は、これがフラックスの角密度を求める式であることを意味する。

電子ビームが軸対称であって、その空間分布がビームサイズ σ_r のガウシアンで表されると仮定すると、電流値として $I = 2\pi\sigma_r^2 j_0$ を代入し、さらに光子のエネルギー $\hbar\omega$ を掛けて単位振動数あたりの光のパワーへ換算することにより、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{d^3P}{d\omega d\Omega^2} &= \gamma_0 mc^2 N^2 \left(\frac{\pi \bar{\kappa}^2 K_\perp^2}{8\gamma_0^3 k_u^2} \frac{j_0}{I_A} \right) (8k_1^2 \sigma_r^2) \\ &\quad \times S_N(\omega, \theta) \end{aligned}$$

$z = z_{st} = L_g$ では $N = (4\pi\sqrt{3}\rho)^{-1}$ であり、FEL パラメータ ρ の定義式 (3-36) を思い出せば、次式が得られる。

$$\frac{d^3P}{d\omega d\Omega^2} = \frac{\rho\gamma_0 mc^2}{24} \left(\frac{4\pi\sigma_r}{\lambda_1} \right)^2 S_N(\omega, \theta)$$

この式を全立体角及び全光子エネルギーについて積分すれば自発光の全パワーが得られる。しかしながら前述したように、生成された自発光は全て増幅に寄与するわけではない。これは、1) 位相空間において自発光と電子ビームの分布関数が異なること、2)FEL 増幅器のゲインが (3-58) で与えられる有限なバンド幅を持つこと、という 2 つの要因による。増幅されるシード光の実効的なパワーを求めるためには、これらの効果を考慮に入れた上で積分を実行する必要がある。ここでは、1 次元近似を仮定して実際に求めてみよう。

まず位相空間における電子ビームと自発光の分布の相違について考える。電子ビームによって増幅された光が回折限界に達すると仮定すれば、その発散角度は

$$\sigma_{r'} = \frac{\lambda_1}{4\pi\sigma_r}$$

である。1 次元近似においては、電子ビームサイズ σ_r は非常に大きく、この結果、レーザーの発散角度 $\sigma_{r'}$ は小さい。具体的に言うと、関数 S_N で決まる、アンジュレータ自発光の発散角度よりもずっと小さいと考えられる。また、(3-58) で与えられるゲインバンド幅 σ_ω/ω_1 はおおよそ ρ 程度の値を持ち、これは S_N で決まるアンジュレータ自発光のバンド幅よりもずっと小さい。以上をまと

めると、シード光の実効的なパワーは次式で与えられる。

$$P_{in} = \left.\frac{d^3P}{d\omega d\Omega^2}\right|_{\omega=\omega_1,\theta=0}(2\pi)^{3/2}\sigma_{r'}^2\sigma_\omega \quad (6\text{-}2)$$

$$= \frac{\pi}{12}\sqrt{2\pi}\sigma_\omega\rho\gamma_0 mc^2 \quad (6\text{-}3)$$

文献 [10] ではより定量的な議論がなされており、以下の式が導出されている。

$$P_{in} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma_\omega\rho\gamma_0 mc^2 \quad (6\text{-}4)$$

これは、定性的な議論に基づいて先ほど求めたシード光の実効的なパワーと、係数の部分を除いて一致している。また、係数の相違は高々40%であり、上で行った定性的な議論が比較的正しい結果を導出していることが分かる。

6.4 飽和長

次に、レーザーパワーが飽和するのに必要なアンジュレータ長を求めよう。これは一般に SASE 型 FEL における飽和長と呼ばれる。

先ほど導出したシード光の実効的なパワー P_{in} を用いると、レーザーパワーは座標 z の関数として次式のように書くことができる。

$$P(z) = \frac{1}{9}P_{in}e^{z/L_g-1}$$

飽和地点におけるレーザーパワーが、FEL パラメータ ρ と電子ビームのパワーとの積で与えられる（3.11 節を参照）ことを考慮すれば、飽和長 L_{sat} は次式を満たす。

$$P(L_{sat}) \sim \rho\gamma_0 mc^2\frac{I}{e}$$

P_{in} に式 (6-4) を代入して整理すると、次式が得られる。

$$\ln\left(\frac{3}{2\sqrt{\pi}}\frac{N_{\lambda_1}}{\rho}\right) = g\left(\frac{L_{sat}}{L_g}\right) \quad (6\text{-}5)$$

ここで $g(x)$ は次式で定義される関数である。

$$g(x) = x - \frac{1}{2}\ln(x) - 1$$

また N_{λ_1} は、

$$N_{\lambda_1} = \frac{\lambda_1}{c}\frac{I}{e}$$

で定義される、発振波長 λ_1 の長さの領域で電子ビームに含まれる電子数である。

式 (6-5) の左辺は N_{λ_1}/ρ という大きな数の自然対数で与えられているが、短波長領域における実用的な FEL システムのパラメータを代入すると、ほぼ 16 ∼ 19 の範囲にあることがわかる。

さて、飽和長を計算するために、L_{sat}/L_g の関数としてプロットした関数 $g(L_{sat}/L_g)$ を図 24 に示す。この図から、$16 \leq g(L_{sat}/L_g) \leq 19$ を満たすのは、L_{sat}/L_g が、$18.5 \leq L_{sat}/L_g \leq 21.5$ の範囲にある時であることがわかる。

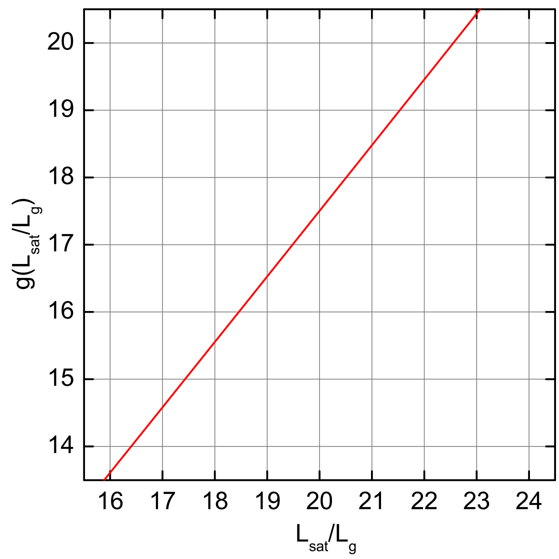

図 24: 飽和長を計算するための関数 g。

従って、式 (3-53) を代入すると以下の関係が得られる。

$$L_{sat} \sim \frac{\lambda_u}{4\pi\sqrt{3}\rho} \times (20 \pm 1.5) \sim \frac{\lambda_u}{\rho}$$

即ち、飽和長はアンジュレータの周期長の ρ^{-1} 倍にほぼ等しい。またこの考え方を拡張することによって、実効ゲイン長に相当する飽和長（実効飽和長）$L_{sat,eff}$ を次式で定義することができる。

$$L_{sat,eff} \sim \frac{\lambda_u}{\rho}(1+\Gamma)$$

ここで Γ は式 (5-6) で定義される、各種要因によるゲイン長増大効果を現すパラメータである。

6.5　スペクトルと時間構造

次に、SASE 型 FEL におけるスペクトルについて考察する。既に述べたとおり、SASE 型 FEL におけるシード光はショットノイズを起源とする自発光であり、多数の時間モードが存在する。言い換えると、図 21(b) に示したように、広いバンド幅を持つ包絡線の内部に多数のスパイクが含まれるスペクトルを有する。まず、この自発光のスペクトルについて定性的に考察する。

ショットノイズによる自発光の電場 E_{sr} を定性的に数式で書くと、

$$E_{sr}(t) = F(t)E_{sn}(t)$$

と表すことができる。ここで、$F(t)$ は電子バンチの時間プロファイル、また E_{sn} はランダムに分布した電子によって形成される電場を表す。

まず、電子バンチが 6.3 節で導入した距離 z_{st} だけアンジュレーターを進んだ段階で形成される電場について考えよう。この時点では各電子から波長 λ_1 の自発放射光が放出されているが、一般的にその時間幅は電子バンチ長に比べて圧倒的に短い。従って、これらの自発放射光の電場はデルタ関数で近似することができる。言い換えると、E_{sn} は電子バンチに含まれる電子の個数だけデルタ関数を積算することによって、近似的に表すことができる [17]。ただし各々のデルタ関数の位置は自発光の放出元である電子の位置で決まるため、ランダムに分布する。言い換えれば E_{sn} はホワイトノイズを表す関数である。

さて、ショットノイズのスペクトル特性を計算するためには $E_{sr}(t)$ をフーリエ変換すれば良い。即ち、

$$\tilde{E}_{sr}(\omega) = \int E_{sr}(t)\mathrm{e}^{i\omega t}dt$$

ここで E_{sr} が 2 つの関数の積であることに注目する。フーリエ変換の定理に、「2 つの関数 f と g のコンボリューションは、各々の関数のフーリエ変換の積 FG の逆フーリエ変換と等しい」というものがある。これを利用すると、上の式は以下のように書き直すことができる。

$$\tilde{E}_{sr}(\omega) = \tilde{F}(\omega) \otimes \tilde{E}_{sn}(\omega)$$

[17] 実際には、波長 λ_1 で決まる正弦関数とデルタ関数の積となる。自発光のスペクトルが λ_1 においてピークを持つことに対応する

ここで、$\tilde{F}(\omega)$ 及び $\tilde{E}_{sn}(\omega)$ はそれぞれ $F(t)$ 及び $E_{sn}(t)$ のフーリエ変換であり、また $\otimes$ はコンボリューションを意味する。

さて、ホワイトノイズのフーリエ変換である $\tilde{E}_{sn}$ もやはりホワイトノイズであることは明らかであろう。即ち、多数のデルタ関数をその中心をランダムに変えて積算することで表すことができる。また、このようなデルタ関数（的信号）の各々を今後は「スパイク」と呼ぶことにする。

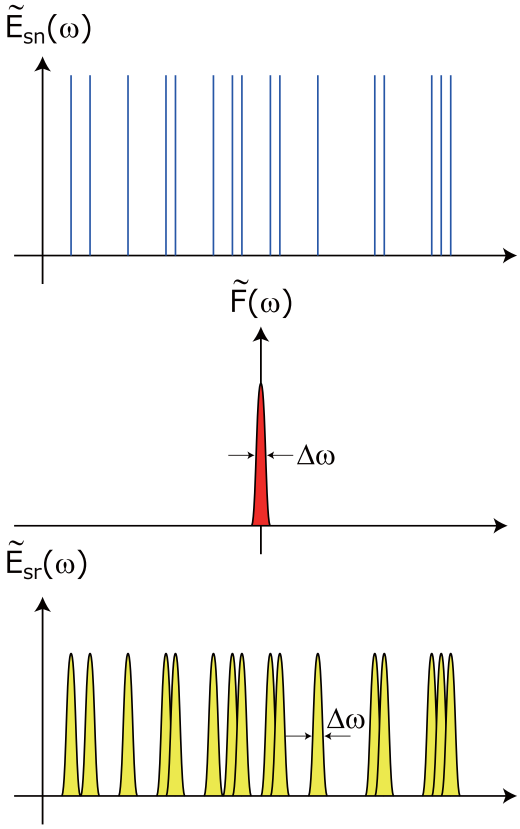

図 25: 関数 $\tilde{E}_{sn}$、$\tilde{F}$ 及び $\tilde{E}_{sr}$ の模式図。

どのような関数も、デルタ関数とコンボリューションすることによってデルタ関数の中心位置に平行移動するから、結局 $\tilde{E}_{sr}(\omega)$ は、電子バンチの時間プロファイルのフーリエ変換を、その中心をランダムに変えて積算したものと見なすことができる。

参考のため、関数 $\tilde{E}_{sn}$、$\tilde{F}$ 及び $\tilde{E}_{sr}$ を図 25 に模式的に示した。このように、$\tilde{E}_{sr}$ はスパイク幅 $\Delta\omega$ を持つ多数のスパイクから構成される。ちなみに $\Delta\omega$ は電子バンチ長 Δt の逆数に比例する。特に、

$F(t)$ が標準偏差 σ_t のガウシアンで与えられる場合、スパイクの形状はガウシアンであり、その標準偏差は σ_t^{-1} で与えられる。これは $\tilde{F}(\omega)$ が $F(t)$ のフーリエ変換であることから明らかであろう。

さて、このようなスペクトル特性を持つシード光の増幅によって得られるレーザースペクトルを計算するためには、フーリエ変換によって異なる振動数に分解した光のそれぞれが独立に増幅されると仮定すれば良い。即ち、シード光の複素振幅 $\tilde{E}_{sr}(\omega)$ に、振動数 ω に対応する増幅率を掛ければ良い。この仮定を正当化するためには、単色波の電場を表す式 (3-13) の代わりに、非単色な光の電場をフーリエ逆変換の形で表し、ω における複素振幅について FEL 方程式を導出すれば良い。このようにすれば、異なる ω の複素振幅は互いに独立に増幅されることを示すことができる。

さて上記の議論から、座標 z における複素振幅は、

$$\tilde{E}(z,\omega) = \tilde{E}_{sr}(\omega)\tilde{A}(z,\omega) \tag{6-6}$$

と表すことができる。ここで、$A(z,\omega)$ は、座標 z における振動数 ω の光の増幅率であり、

$$\tilde{A}(z,\omega) = \exp\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\frac{\hat{\nu}^2}{9}\right)\hat{z} + \frac{i}{2}\left(1+\frac{4\hat{\nu}}{3}\right)\hat{z}\right]$$

で与えられる。従って、次式が得られる。

$$\frac{dF}{d\omega} = \left.\frac{dF}{d\omega}\right|_{sr} \mathrm{e}^{z/L_g} \exp\left[-\frac{(\omega-\omega_1)^2}{2\sigma_\omega^2(z)}\right] \tag{6-7}$$

ここで、$dF/d\omega \propto |\tilde{E}_{sr}|^2$ はレーザーのフラックス、$dF/d\omega|_{sr} \propto |\tilde{E}_{sr}|^2$ はショットノイズによる自発光のフラックス、σ_ω は式 (3-58) で定義されるバンド幅であって、z の関数であることを明示的に書いた。

式 (6-7) から、SASE 型 FEL におけるレーザーのスペクトルが、バンド幅 $\sigma_\omega(z)$ の包絡線内部に、バンチ長の逆数でスケールするスパイク幅 $\Delta\omega$ をもつ多数のスパイクで構成されることがわかる。また、式 (3-58) から、

$$\frac{\sigma_\omega(z)}{\omega_1} = 3\sqrt{\frac{\rho\lambda_u}{2\pi\sqrt{3}z}} \sim \sqrt{\rho\frac{\lambda_u}{z}}$$

と変形されることを考慮すると、SASE 型 FEL におけるスペクトル包絡線のバンド幅は増幅が進むにつれて $z^{-1/2}$ に従って狭くなるとともに、飽和点 $z=\lambda_u/\rho$ では FEL パラメータ ρ にほぼ等しくなる。

次に、レーザーの時間プロファイルについて考察する。このためには、式 (6-6) を逆フーリエ変換、時間領域における光の電場 $E(z,t)$ を求めれば良い。先ほどと同様にコンボリューションの定理を用いると、次式が得られる。

$$E(z,t) = E_{sr}(t) \otimes A(z,t)$$

ここで $A(z,t)$ は $\tilde{A}(z,\omega)$ のフーリエ逆変換である。即ち $E(z,t)$ は、時間の関数として表された自発光の電場 $E_{sr}(t)$ を $A(z,t)$ でコンボリューションすることによって得られる。指数の虚部を除くと、$\tilde{A}(z,\omega)$ は標準偏差 σ_ω のガウシアンで与えられるから、そのフーリエ変換 $A(z,t)$ は標準偏差 σ_ω^{-1} のガウシアンである。

さて自発光による電場は、$F(t)$ を包絡線に持つホワイトノイズで表され、各々のスパイクはデルタ関数的であることは既に述べた。従って、これを $A(z,t)$ でコンボリューションすることは、指数虚部による時間的なオフセットを除くと [18]、各スパイク幅を σ_ω^{-1} にまで広げることに相当する。これは、増幅に伴って光のコヒーレンス長が伸張することを意味する。特に飽和点におけるスパイク幅は

$$\frac{1}{\sigma_\omega} = \frac{\lambda_1}{2\pi\rho c}$$

である。即ち係数 $(2\pi)^{-1}$ を除くと、アンジュレータ 1 周期でのスリッページに相当する時間 λ_1/c と、飽和長に相当するアンジュレータの周期数 ρ^{-1} との積で表される。

一般に、スペクトルに含まれるスパイクの数を時間モード数と呼び、時間モード数が 1 である光は時間的に完全にコヒーレントである。この意味において、SASE 型 FEL では完全な時間コヒーレンスは実現できない。

6.6　空間プロファイル

次に、SASE 型 FEL における空間プロファイルについて考えよう。SASE 型 FEL におけるシード

[18] $\tilde{f}(\omega)\mathrm{e}^{i\Delta\omega}$ のフーリエ逆変換は $f(t+\Delta t)$ である。

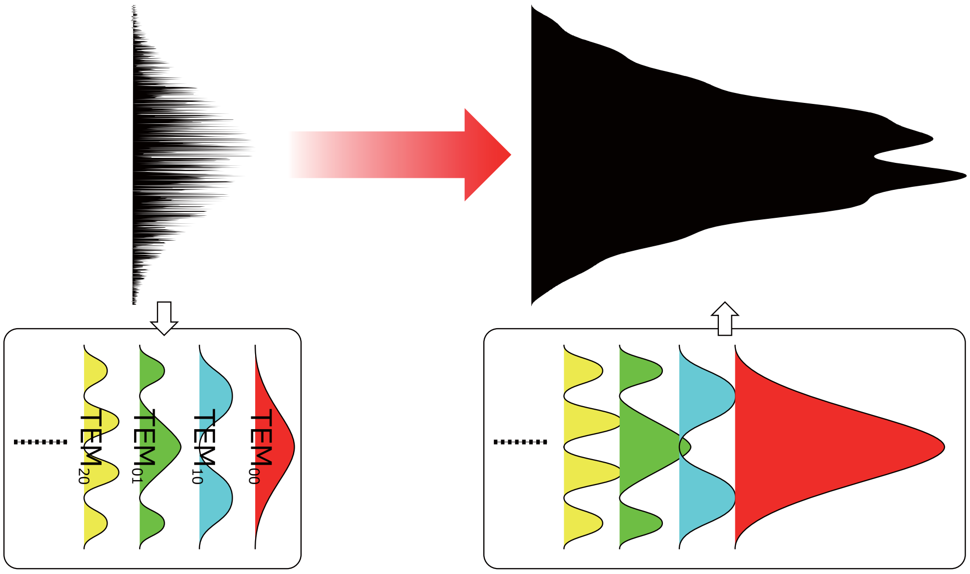

図 26: SASE 型 FEL における空間プロファイルの成長。

光である自発光の空間プロファイルは、時間プロファイルのように多数のスパイクが含まれる。しかしながら、レーザーの空間プロファイルは、前節で解説したスペクトルのときのように、ある包絡線の内部に多数のスパイクを含むわけではない。その理由を以下で述べる。

回折の影響を考慮した FEL 理論（4 節）で議論したように、FEL では電子ビームの空間プロファイルやその他の条件で決まる、ある固有の空間プロファイルをもつ光（空間モード）のみが増幅される。自発光の空間プロファイルは、考えている系における固有の空間モードに分解することができ、これらのモードが互いに独立して増幅されることになる。増幅率は空間モード毎に異なり、モードの次数が低い（よりシンプルな形状の）空間モードほど増幅率は高く、これが増幅光の空間プロファイルを決定する。従って、電子ビームがアンジュレータを進んでいくにつれて、高次モードのレーザーパワーは基本モードと比較して相対的に減少し、空間プロファイルは基本モードに近い、よりシンプルで滑らかな形状へと変化する。これは 4.7 節で解説した光ガイディングの効果そのものである。

図 26 に、SASE 型 FEL における光ガイディングの効果を模式的に示す。この例では高次のモードが多少残っており、このためプロファイルは完全な基本モードに比べてやや変形している。しかしながらこれらの高次モードは、飽和点付近において（基本波と比べて相対的に）ほぼ完全に消滅し、基本モードのみが残る。言い換えると空間的にシングルモードのレーザーが得られる。このように、多数の空間モードを含む自発光をシード光として利用しているにもかかわらず、SASE 型 FEL ではほぼ完全な空間コヒーレンスが得られる。これは時間コヒーレンスとの大きな違いである。

6.7　SASE 型 FEL の光源性能

次に、ここまで解説してきた SASE 型 FEL において利用可能なレーザー光源性能について、SACLA を例に挙げて解説する。SASE 型 FEL における光源性能を計算するためには、電子バンチのショットノイズを考慮に入れた、非定常状態における FEL 増幅過程を記述する方程式を解く必要があるが、これを解析的に実行することは困難である。このため一般的には、3.11 節で紹介した数値計算手法を、光の回折や電子ビームのベータトロン振動を考慮して 3 次元へ拡張した上でシミュレーションを行い、光源性能を求める。またこれまでに、この種の目的のためのシミュレーションコードが多数開発されている。

本稿では SPring-8 で開発された SIMPLEX と呼ばれる FEL シミュレーションコード [12] を利用する。計算に必要な各種パラメータとしては、SACLA におけるレーザー発振を報告した最初の

表 3: 光源性能計算に用いたパラメータ。

電子ビームパラメータ	
エネルギー	8 GeV
有効バンチ電荷	75 pC
バンチ長 (FWHM)	20 fsec
ピーク電流	3.5 kA
規格化エミッタンス	0.7 mm·mrad
エネルギー幅	10^{-4}
アンジュレータパラメータ	
周期長	18 mm
K 値	2.18
セグメント長	5 m
セグメント間隔	6.15 m
セグメント総数	18
光源パラメータ	
FEL パラメータ	4.14×10^{-4}
ゲイン長 (1D)	2.00 m
発振波長	0.124 nm
発振光エネルギー	10 keV

文献 [11] に記載されている値を用いる（表 3 参照）とともに、6 次元位相空間における電子バンチの分布関数がガウシアンで表されると仮定する。

ちなみに、この文献で報告されている電子ビームパラメータや光源性能は、2011 年の秋頃、即ち、初めてレーザー発振を確認してからわずか半年後に測定されたものであって、本稿の執筆時点（2013 年 6 月）では大幅に改善されていることに注意されたい。SACLA では加速器機器の安定性やビーム調整の精度は日進月歩で改善がなされている。

6.7.1　ゲイン曲線

図 27 にゲイン曲線の計算結果を示す。これまでのゲイン曲線の例とは異なり、縦軸はレーザーパワーではなく、パワーを時間方向へ積分した、単一のレーザーパルスに含まれるエネルギー（パルスエネルギー）で表されていることに注意されたい。6.2 節で解説したように、自発光生成領域、指数関数的増幅領域、及び飽和領域という 3 つの増幅領域を見いだすことができる。

ちなみに定期的に見られる、増幅が停止する領域は、アンジュレータセグメント間に存在する 1.15m

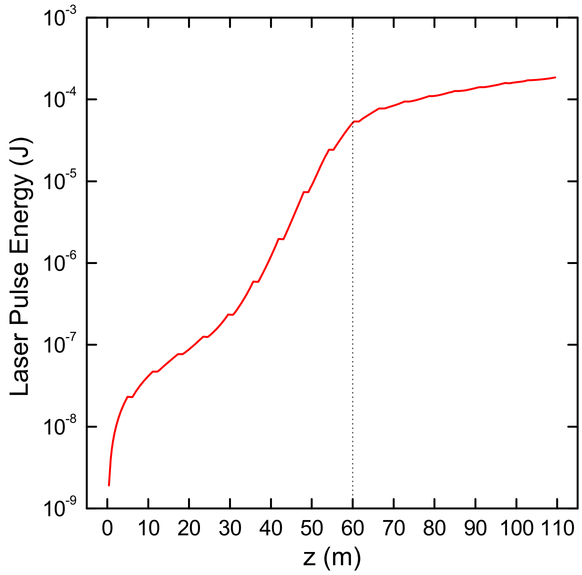

図 27: SASE 型 FEL におけるゲイン曲線。

のドリフト部に相当する。ここには収束用の四極磁石や各種のモニターが設置されている。

6.7.2　スペクトルと時間構造

図 28(a) 及び (b) に、飽和地点 $z = 60$ m における光パルスの時間構造と、スペクトルの計算結果を示す。既に説明したとおり、包絡線の内部に多数のスパイクが含まれる構造が見られる。また、スパイクの構造をより詳細に見るために、中心付近の拡大図を右上に示す。

6.5 節における議論から、標準偏差で表したスパイク幅の典型的な値は、時間領域では $\lambda_1/(2\pi\rho c) =$ 0.16 fsec、スペクトル領域で $\hbar\sigma_t^{-1} = 0.077$ eV である。拡大図に示した 1 fsec 及び 1 eV のスケールとを比較すると、これらの妥当性が確認できる。

ちなみに図 28(a) に示した点線は、ガウシアンで表される電子バンチの電流分布を示しているが、レーザーのパルス幅は明らかにこれよりも短くなっていることが分かる。この理由を以下で説明する。

電流値が一様では無く、ガウシアンで表される電子バンチの場合、全領域で同等にレーザー増幅が起こるわけではない。即ち、電流値が最大となる電子バンチ中心（$\tau = 0$）付近におけるゲイン長が最も短いため、この領域におけるレーザーパワーがいち早く $z \sim 60$ m において飽和に到達する。一方、バンチ中心から離れたヘッド部とテイ

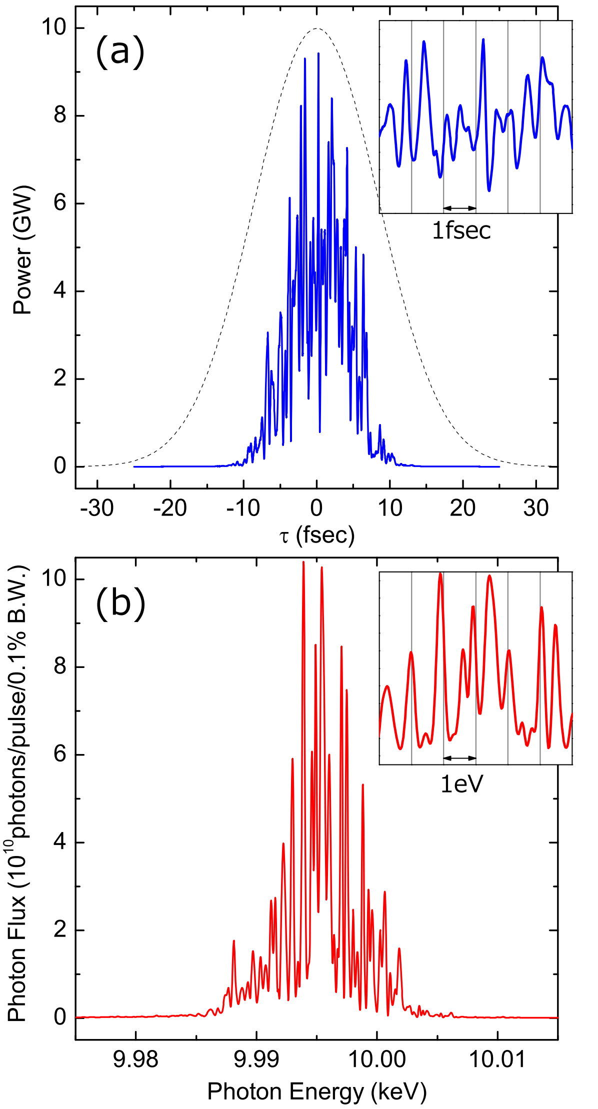

図 28: SASE 型 FEL における (a) 光パルスの時間構造、(b) スペクトル。

ル部では電流値が低く、従ってゲイン長が長いため、$z \sim 60$ においては未だ飽和には達していない。このためバンチ中心に比べてレーザーパワーが圧倒的に低い。これがパルス幅が電子バンチ長よりも短い理由である。ただしこれは $z = 60$ m における状況であって、これ以降は低電流の領域でもレーザーパワーが増大し、パルス長は徐々に長くなる（6.7.4 節参照）。

6.7.3 空間分布

SASE 型 FEL における空間分布を計算すると、光ガイディングの有効性を再認識することができ

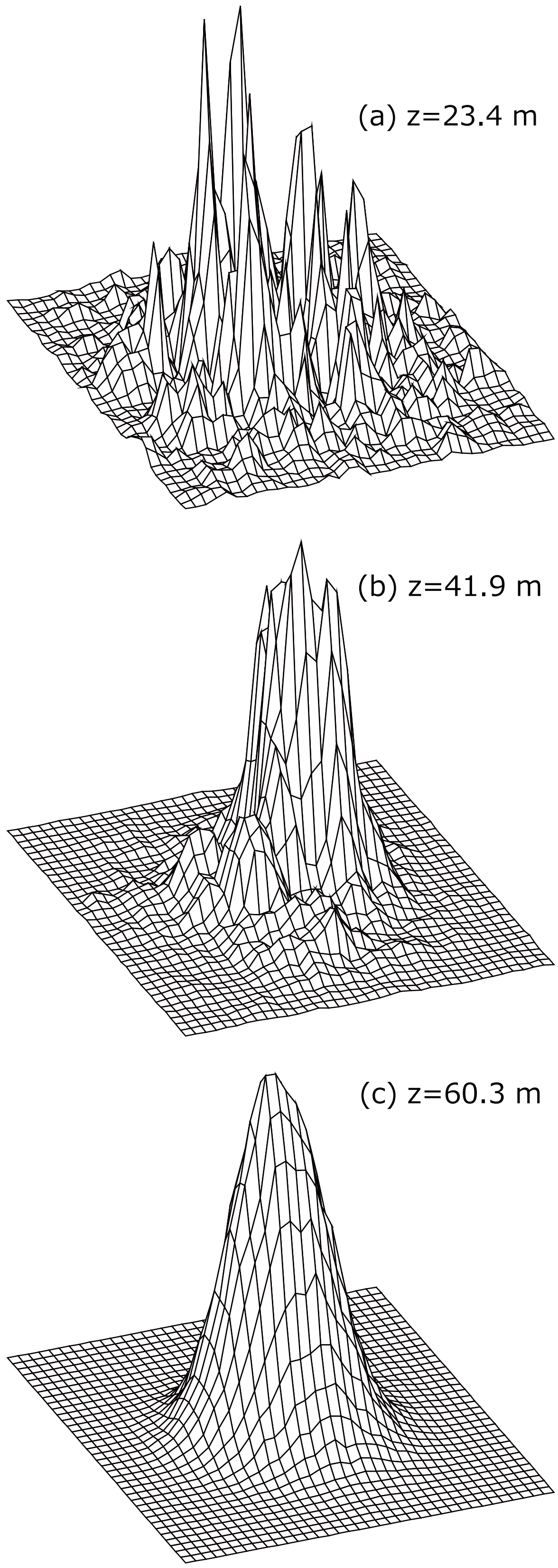

図 29: 増幅に伴う空間プロファイルの成長。(a) $z = 23.4$ m、(b) $z = 41.9$ m、(c) $z = 60.3$ m

る。図 29 に、異なる 3 つの z 座標における空間プロファイルの計算値を示す。

(a) 点（$z = 23.4$ m）は、FEL 増幅が始まってまもなくの地点であり、レーザーと自発光のパワーが同等程度である。このため、自発光に由来するスパイクが多数存在する。(b) 点（$z = 41.9$ m）では、FEL 増幅が顕著に進み、自発光に由来するスパイクは相対的にほぼ消滅しているものの、高次の空間モードに由来する空間形状が確認されるが、(c) 点（$z = 60.3$ m）まで進んだ段階でレーザーパワーはほぼ飽和に達し、基本空間モードで支配されるガウシアン状の空間プロファイルが確認できる。

6.7.4　時間及び空間コヒーレンス

SASE 型 FEL では、増幅が進むにつれて時間コヒーレンス及び空間コヒーレンスが改善する。言い方を変えるとモード数が減少する。例えば、時間モードの変化について考察すると、増幅が進んでバンド幅が狭まる一方、スパイクの幅は変化しないから、スペクトルに含まれるスパイクの数が減少する、ということに対応する。また空間モードについてはオプティカルガイディングの効果によってモード数はやはり減少する。

図 30 に、コヒーレンスの改善効果を具体的に示す。増幅が進むにつれて時間・空間のいずれのモードも減少し、飽和点 ($z \sim 60$ m) の付近において最小値に達することが分かる。最小値に達した後はどちらのモード数も徐々に増加するが、この計算例では特に時間モード数の増加の度合いが大きい。これは 6.7.2 節でも述べたように、z の増加とともに、電流値が低いヘッド及びテール部においてもレーザーパワーが増加し、このためパルス長が伸びるためである。パルス長が伸びる一方、スパイク幅は変化しないので、時間モード数は増加する。

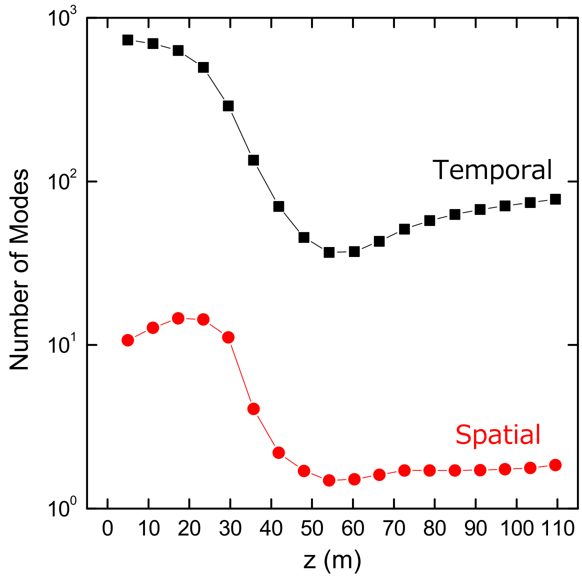

図 30: 増幅に伴う時間及び空間コヒーレンスの改善。

7　シード型 FEL

前節で解説した SASE 型 FEL は、アンジュレータの入口付近の数ゲイン長で発生した自発放射光をシード光として利用するため、特別な仕掛けなしで X 線領域においてレーザー発振を実現することが可能であり、かつ空間的に完全なコヒーレンスを達成することができる。一方で、時間コヒーレンスが十分ではない、即ちシングルモードにはならないという欠点を有する。

シード型 FEL とは、SASE 型 FEL におけるこの欠点を克服し、レーザー光源性能を追求するために考案された手法である。即ち、多数のモード（特に時間モード）を有する自発放射光の代わりに、時間的にコヒーレントな光（通常はレーザー）を別途用意して、これをシード光として利用する。このような方式のシングルパス型 FEL を、SASE 型 FEL と区別してシード型 FEL と呼ぶ。コヒーレントな光をシード光として利用するので、本来であれば「コヒーレントシード型 FEL」とでも呼ぶべきであるが、伝統的にこのような言い回しが使われているのでご容赦願いたい。

ここで、シード型 FEL の利用には矛盾が含まれていることに気づく読者がおられるかもしれない。即ち、コヒーレントなシード光として利用できるレーザーが既に存在するとすれば、FEL の出番はないのではないか、ということである。これは至極真っ当な疑問であり、実際、高出力のレーザーが利用できる波長領域においてシード型 FEL を、ましてや SASE 型 FEL を利用するメリットはほとんど無い。一方で、レーザー出力が限定される

真空紫外及び軟 X 線領域や、実用レーザーが存在しない硬 X 線領域においては、シード型 FEL は極めて有力なツールになり得る。ただし、これらの短波長領域においてシード型 FEL を実現することは容易なことではなく、このため長年にわたってこれを実現するために様々な努力が払われてきた。その結果、近年になって実用的光源としての短波長シード型 FEL が稼働しつつある。

本節では、シード型 FEL の短波長化に特に有力と思われる 3 つの方式について紹介するとともに、SASE 型 FEL との光源性能の比較を通じて、その利点について解説する。図 31 にこれらの各方式の原理図を模式的に示す。

7.1 HHG

図 31(a) に、高次高調波発生 (High Harmonic Generation: HHG) と呼ばれる現象を利用する手法の原理図を示す。高次高調波は、高出力かつ短パルスの長波長（可視あるいは赤外）レーザーを希ガスに集光して照射することによって発生し、元のレーザーの波長 λ_L を基本波長とした高次光に相当する波長、即ち、n を奇数として λ_L/n で表される波長において単色化された時間的・空間的にコヒーレントな光である。高次高調波は真空紫外から軟 X 線までの波長領域をカバーする光源として幅広く利用されているが、これをシード光として利用したシード型 FEL ではレーザーパワーを何桁も増強することが可能で、さらに広い分野への応用が期待されている。希ガスに照射される長波長レーザーとしては、波長 800 nm で出力 100 mJ 程度のチタンサファイアレーザーで、パルス圧縮と呼ばれる手法によって 100 fsec 程度に圧縮されたものが利用されている。

7.2 HGHG

図 31(b) に HGHG(High Gain Harmonic Generation) と呼ばれる手法の原理図を示す。この手法では、基本波長が異なる 2 台のアンジュレータの間に、分散部（通常はシケイン）が挿入される。そして、基本波長を λ_L に設定した上流側のアンジュレータに、同じ波長のレーザーを同期して入射することによって、電子バンチに周期 λ_L のエネルギー変調を誘起する。電子バンチが分散部を通過することにより、通常の FEL と同様の過程を経てエネルギー変調はマイクロバンチへ変換されるが、この際、マイクロバンチに含まれる周期 λ_L/n に相当する高次成分を増強するように分散部のパラメータを最適化する。そして、下流側アンジュレータの基本波長を λ_L/n に設定することにより、波長 λ_L/n のコヒーレント放射が放出される。

7.3 セルフシード

前述した 2 つのシード型 FEL の手法（HHG 及び HGHG）では、外部から導入されるシード用レーザーと電子バンチは時空間的に同期してアンジュレータに入射される必要があり、その同期精度がこれらの方式を実現し、かつ実用的光源として利用するための重要な課題である。また、いずれの方式においても、波長 λ_L の外部レーザーの高次成分（波長 λ_L/n）を利用するので、次数 n をどれだけ大きくすることができるかが短波長化への課題である。本稿の執筆時点では、数 nm までの軟 X 線領域は有望であるが、それより短波長でのシード化は困難であると考えられている。

一方、外部からの同期レーザーを利用しない手法も存在する。これが図 31(c) に原理を示した、セルフシード と呼ばれる手法である。この手法では通常の SASE 光 FEL におけるプロセスによって（必ずしも時間コヒーレンスが高くない）レーザーを生成し、アンジュレータ途中でシケインによってレーザーを電子バンチから分離した上で、分光器によって単色化することで時間コヒーレンスを改善し、シード光として利用する。また、シケイン手前までに生成されたショットノイズを起源とするマイクロバンチ成分は、シード化による時間コヒーレンスの改善に悪影響を及ぼすが、シケインにおける R_{56} パラメータが十分に大きいために容易に除去される。

この手法ではシード光は同期すべき対象の電子バンチ自体から放出されるため、同期精度の問題は存在しない。また、分光器が対応できる限り短波長化への制約も存在しない。ただし、単色化する前の SASE 型 FEL のスペクトル強度や形状はショット毎に変動するため、これに伴ってシード

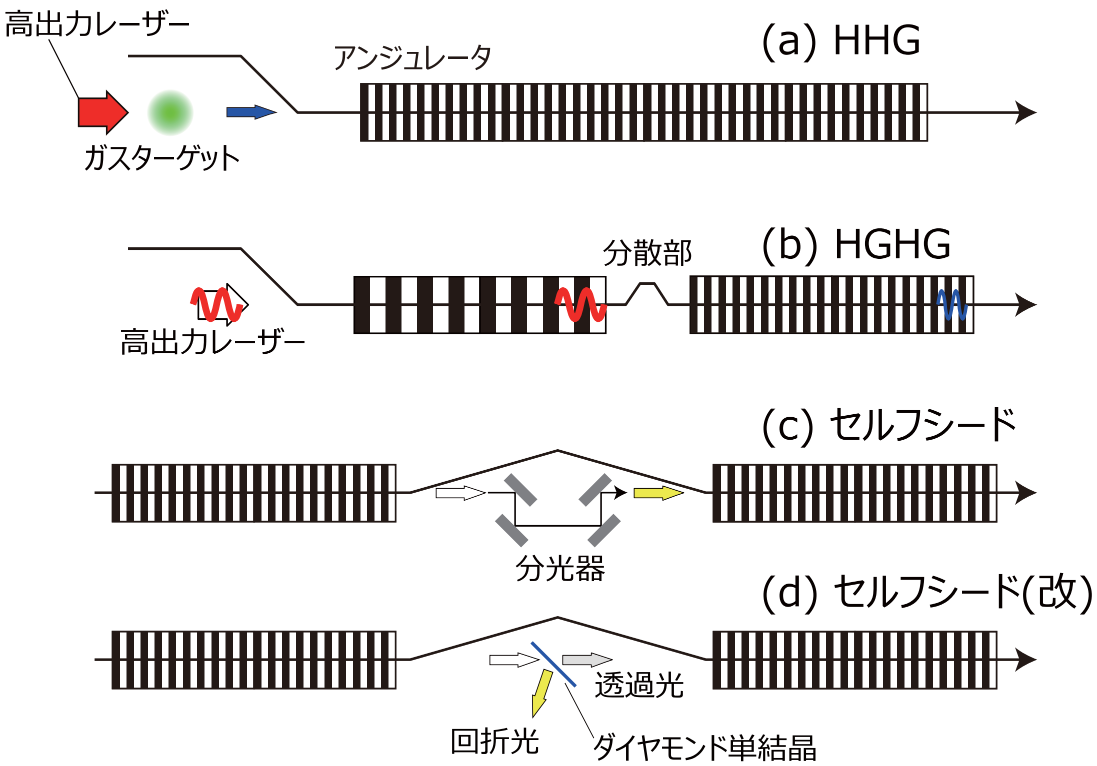

図 31: 短波長領域においてシード型 FEL 化を実現するための手法。(a)HHG によるダイレクトシード、(b)HGHG による短波長化、(c) セルフシード、(d) セルフシード改良型。

光としての実効的な入力パワーも変動し、これが最終的なレーザーパワーの安定性を損なう要因となり得る。

ところで図 31(c) に示したセットアップでは、電子バンチがシケインを通過する間に、光を結晶などで複数回反射させて単色化した後でアンジュレータ軸に戻し、電子バンチと再び同期して後半部のアンジュレータに入射する必要がある。このようにシケインや分光器を通過することによって、電子や光には直進した場合と比べて遅延が生ずる。これらはおおよそ $\Delta t_e = L_{ch}\theta_{ch}^2/c$ と、$\Delta t_p = L_m\theta_m/c$ のオーダーである。ここで、L_{ch} と θ_{ch} はシケインの長さと偏向角であり、また L_m と θ_m は分光器の代表的な長さと反射角である。従って、これらの遅延時間が同等であるためには、

$$L_{ch} = L_m(\theta_m/\theta_{ch})^2$$

を満たす必要がある。GeV クラスの電子ビームを利用する場合の典型的な偏向角として、$\theta_{ch} \sim 10$ mrad、結晶分光器を利用する場合の典型的な値として $\theta_m \sim 10^\circ$ 及び $L_m \sim 0.1$ m を仮定する [19] と、$L_{ch} \sim 30$ m という値が得られる。このことは、セルフシードを結晶分光器が有用な X 線領域において実現するためには 30 m もの余分なスペースが必要であることを意味する。これは効率的な手法とは言えない。

この問題を解決し、X 線領域において効率的にセルフシードを可能にする手法（本稿では特に改良型セルフシード法と呼ぶことにする）が DESY のグループから提案され [13]、LCLS において実証された [14]。これは今後、X 線領域におけるシード型 FEL の主流となる可能性を秘めるものであるため、本稿でもその原理を簡単に解説する。

改良型セルフシード法では、図 31(c) に示した反射型の分光器の代わりに、(d) のように単結晶ダイヤモンド薄膜を 1 枚設置するだけである。この場合、結晶におけるブラッグ回折で単色化された光がブラッグ角を満たす方向へ反射される一方、

[19] これは結晶分光器の製作に何の工夫も施さない場合の値であり、実際にはこれらを短縮することは不可能では無いと思われる。

それ以外の波長をもつ光は結晶で吸収されるもの以外は透過する。通常の分光器では前者（回折光）を利用するが、この手法では後者（透過光）と電子バンチを再度同期してアンジュレータに入射することでシード光として利用する。

一見したところ、この手法はうまく動作するようには思えない。即ち、透過光の立場から見た場合の分光器は、結晶の材質と格子面で決まるエネルギー及びバンド幅で規定されるバンドストップフィルター[20]であって、シード光に必要な単色化の機能を有していないように見える。

もちろん、実際にはこの手法は機能する。このことを理解するためには、透過光の時間的応答について考察する必要がある。そこで、完全白色光、即ちデルタ関数的時間構造を持つ（インパルス）光を単結晶に入射したときの透過光の時間応答を、結晶の透過率の複素振幅をフーリエ変換することにより求めた。計算結果を図 32 の実線で示す。横軸は次式で定義される規格化時間 τ_B で示されている。

$$\tau_B = \frac{\pi|\chi_g|}{2d\sin^3\theta_B}ct$$

ここで、χ_g は結晶の電気感受率、θ_B はブラッグ角、d は格子面間隔である。

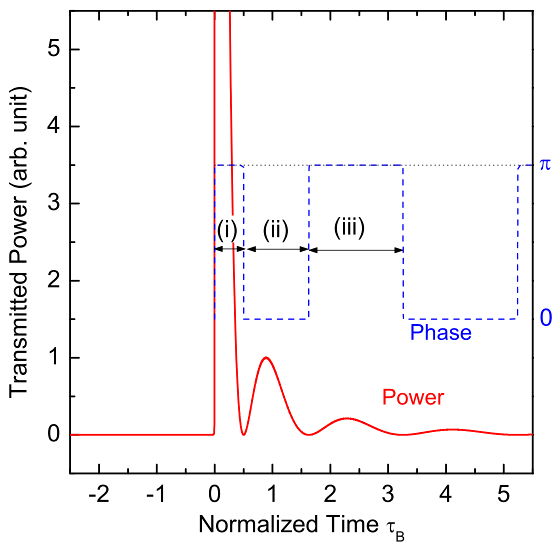

図 32: インパルス光が単結晶に入力したとき透過光の時間応答。実線が光のパワーで破線が位相を表す。

[20]バンドパスフィルターの逆の動作をするフィルター。ある特定のエネルギーのみを減衰させる。

因果律によって、$\tau_B < 0$ では光は存在しないこと、また、時刻 $\tau_B = 0$ にもともと存在していたインパルス光に加えて、時間的に遅れた成分が誘起されること、がわかる。仮にこの遅延成分が単色的であれば、これに同期するように電子バンチを調整する（遅らせる）ことによってシード光として利用できる。

遅延成分がどのような単色性を示すかを確認するために、ブラッグ波長 $\lambda_B = 2d\sin\theta_B$ に相当する波長において計算した光の位相の時間応答を同図に破線で示す。時刻 $\tau_B = 0$ では位相は 0 であるが、その直後に反転し、時間領域 (i) の間はその値を保つ。そして、領域 (ii)、(iii) と進むごとに位相は反転する。重要なことは、それぞれの領域においては位相が一定である、即ち、単色光（単一モード）と見なせるということである。

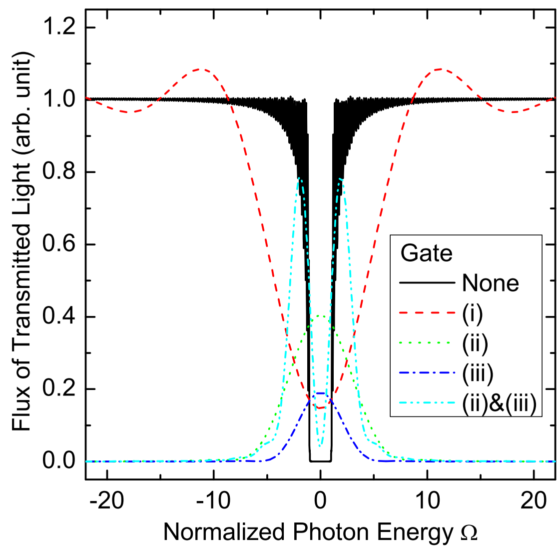

図 33: 設定された時間窓に対する透過光スペクトルの依存性。

具体的に、各時間領域に相当する時間で切り出した（時間窓を設定した）場合のスペクトルを図 33 に示す。横軸は、次式で定義される規格化光エネルギーで示されている。

$$\Omega = \frac{2\sin^2\theta_B}{|\chi_g|}\frac{\omega - \omega_B}{\omega_B}$$

ここで、$\omega_B = 2\pi c/\lambda_B$ である。

時間窓が設定されない場合、ブラッグ条件を満たすエネルギー近傍 ($\omega \sim \omega_B$) ではフラックスは

0である。これは全反射によって光が透過してこないことを示している。一方、領域 (i) に時間窓を設定した場合、$\omega \sim \omega_B$ におけるフラックスは若干回復するとともに、スペクトルの形状が変化する。さらに領域 (ii) 及び (iii) に時間窓を設定すると $\omega \sim \omega_B$ を中心エネルギーとした単色光が得られることがわかる。即ち、電子バンチ長がこれらの領域よりも短い場合、適当な遅延を与えてこれらの領域内に導くことにより、透過光をシード光として機能させることができる。尚、領域 (ii) 及び (iii) に跨がって時間窓を設定した場合には、ピークが分離することに注意されたい。これは、これら 2 つの領域では位相が互いに反転していることから容易に理解できる。

以上の議論をまとめると、改良型セルフシード法によるシード型 FEL の原理は以下の通りである。シケインによって分離した SASE 型 FEL によって生成したレーザーを単結晶に入射し、透過光の成分のうち、時間的な遅延がある単色成分に電子バンチを同期させる。このためには、電子バンチが後半部のアンジュレータに入射するタイミングを図 32 の領域 (ii) あるいは (iii) と一致するように、電子バンチの時間遅延、即ちシケインの磁場強度を制御する [21]。

7.4　光源性能の比較

最後に、シード型 FEL の有用性について議論するために、SASE 型 FEL の光源性能と比較する。図 34 に SACLA において改良型セルフシード法によってシード化を実施した場合に期待されるスペクトルの計算値を示す。使用する単結晶はダイヤモンドで (400) 格子面を使用することを想定している。また参考のため、同じ電子パラメータで計算した通常の SASE 型 FEL におけるスペクトルを示す。シード化によって時間コヒーレンスが改善し、バンド幅が狭くなるとともに、分光エネルギー（この場合は 12.4keV）におけるフラックスが顕著に増加していることがわかる。さらに、SASE 型 FEL におけるスペクトル形状がパルス毎に変動する、原理的に不安定なものであるのに対し、シード型 FEL ではほぼ単一のピークを持つ安定したスペクトルが得られるということを強調しておかねばならない。ただし前述したとおり、シード光として機能する光のパワーはパルス毎に変動するため、これが改良型セルフシード法で得られるフラックスの安定性を決定する。

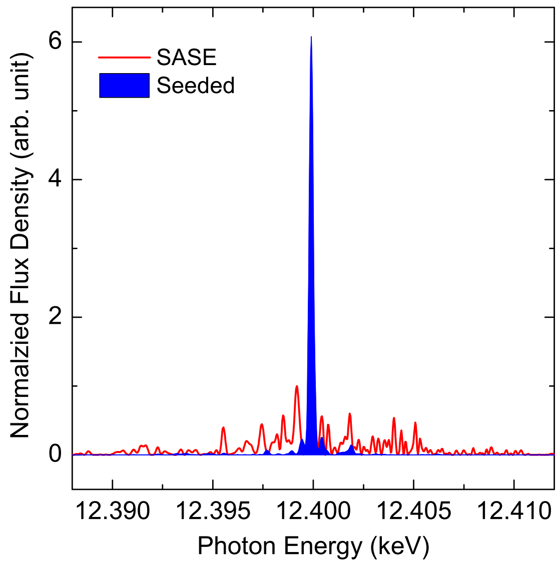

図 34: SASE 型 FEL とシード型 FEL のスペクトル形状の比較。

8　おわりに

本稿では XFEL の発振理論や光源特性を解説するため、可能な限り基礎的な原理や定理を出発点として各種の数式を導出することに努めた。一方で、原稿執筆に掛けられる時間の都合上、定性的な説明に止めたため厳密さに欠ける部分もあることをご容赦願いたい。

付録 A　周期平均操作

マイクロバンチによる光電場の成長を記述する方程式を導出する過程で、次式で定義される因子が表れる。

$$\kappa(z) = (1 + \mathrm{e}^{2ik_u z})\mathrm{e}^{i\omega\delta t(z)}$$

[21] 理論的には領域 (i) でも可能ではあるが、通常は光パルス自体が有限の時間幅を有しており、領域 (i) はその影響によって時間コヒーレンスが劣化しており、シード化には適さない。

これをアンジュレータの一周期で平均する。即ち

$$\overline{\kappa}(z) = \frac{1}{\lambda_u}\int_{z-\lambda_u}^{z+\lambda_u}(1+\mathrm{e}^{2ik_u z'})\mathrm{e}^{i\omega\delta t(z')}dz'$$

を求める。

ヘリカルアンジュレータでは $\delta t(z) = 0$ であるから、明らかに $\overline{\kappa}(z) = 1$ である。

一方、リニアアンジュレータでは $\omega \sim \omega_1$ を仮定することにより、

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{i\omega\delta t(z)} &\sim \exp\left(i\frac{K^2/2}{2+K^2}\sin 2k_u z\right)\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{K^2/2}{2+K^2}\right)\mathrm{e}^{2ink_u z}\end{aligned}$$

が得られる。ここで、J_n は次数 n の第一種ベッセル関数である。また、ベッセル関数に関する以下の定理を用いた。

$$\mathrm{e}^{ix\sin y} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\mathrm{e}^{iny}$$

従って、

$$\begin{aligned}\overline{\kappa}(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{K^2/2}{2+K^2}\right)\\ &\quad\times\frac{1}{\lambda_u}\int_{z-\lambda_u}^{z+\lambda_u}(1+\mathrm{e}^{2ik_u z'})\mathrm{e}^{2ink_u z'}dz'\\ &= J_0\left(\frac{K^2/2}{2+K^2}\right) - J_1\left(\frac{K^2/2}{2+K^2}\right)\end{aligned}$$

となり、これは z に依存しない。

参考文献

[1] K. J. Kim, in Physics of Particle Accelerators, AIP Conf. Proc. 184 (Am. Inst. Phys., New York, 1989), p. 565.

[2] E. L. Saldin et al., *The Physics of Free Electron Lasers* (SPringer-Verlag, Berlin, 1999)

[3] E. L. Saldin et al., Phys. Rep. 260 (1995) 187

[4] Z. Huang and K. J. Kim, Phys. Rev. ST-AB 10 (2007) 034801.

[5] R. Bonifacio et al., Opt. Commun. 50 (1984) 373.

[6] L. H. Yu et al., Phys. Rev. A 45 (1992) 1163.

[7] G. T. Moore, Opt. Commun. 52 (1984) 46.

[8] M. Xie, Nucl. Instrum. Meth. A 445 (2000) 59.

[9] 例えば、H. Wiedemann, *Particle Accelerator Physics I* (SPringer-Verlag, Berlin, 1999) などを参照。

[10] K. J. Kim, Nucl. Instrum. Meth. A 250 (1986) 396.

[11] T. Ishikawa et al., Nature Photon., 6 (2012) 540.

[12] T. Tanaka, Proc. 26th Int. Free Electron Laser Conf. (FEL2004), 435
また、以下の URL からダウンロード可能。
http://radiant.harima.riken.go.jp/simplex/index.html.

[13] G. Geloni, V. Kocharyan and E. Saldin, DESY 10-053 (arXiv:1004.4067v1).

[14] J. Amann et al., Nature Photon., 6 (2012) 693.