

線形加速器のビーム光学系とバンチ圧縮

1. はじめに

X線自由電子レーザー（X-ray Free-Electron Laser, XFEL）の線形加速器は、蓄積リング入射器として用いられる線形加速器と異なり、十分なレーザー増幅ゲインを得るため、6次元位相空間において高密度電子ビームの生成が要求される。このため電子の加速と同時に、ビーム進行方向の電子バンチ圧縮が重要な設計のポイントとなる。またアンジュレータ内で光を増幅する際、電子ビームと光を最適な条件で空間的にオーバーラップさせなければならない。即ち横方向（水平、垂直）の電子ビームエンベロップを、アンジュレータ部の収束系にきちんとマッチさせる必要がある。

本講義では、横方向のビーム光学系（収束系）と、縦方向（電子ビーム進行方向）のバンチ圧縮を取り上げ、加速器パラメータの基本設計に必要なモデル化と定式化について解説する。ビーム光学系は線形モデルで取り扱い、バンチ圧縮については2次の非線形性まで考慮する。第5章ではSACLAを例に、XFEL線形加速器の立ち上げやビーム調整などについて簡単に紹介する。

実際の加速器や電子ビームでは、空間電荷効果やwake field、Coherent Synchrotron Radiation (CSR)などの非線形効果が無視できないため、最終的に計算機シミュレーションコードを用いた粒子トラッキングを行って、設計した加速器パラメータを最適化することは必須である。しかしXFEL線形加速器の基本設計は、粒子トラッキングを行う際ベースパラメータとして不可欠であり、本講義の内容は線形加速器を理解する上でも重要である。

本講義ではFig. 1に示すように、電子ビーム進行方向（ビーム軸方向）をz、水平方向をx、垂直方向をyとする座標系を用いる。またzに対する微分をプライムで表し、zに対する電子軌道の水平角度を $\frac{dx}{dz} = x'$ 、垂直角度を $\frac{dy}{dz} = y'$ とする。

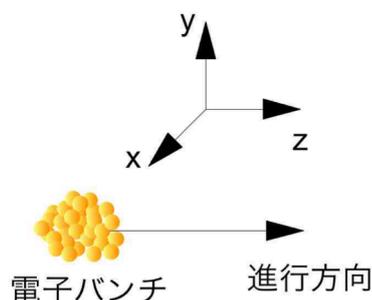


Fig. 1 座標系の定義

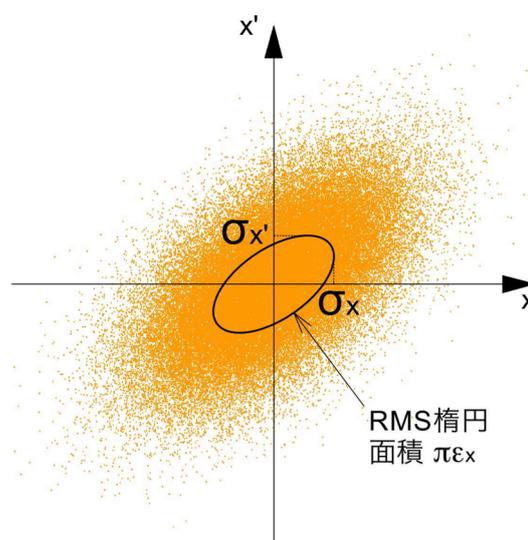


Fig. 2 $x-x'$ 位相平面に射影した電子分布とRMS楕円

2. 6次元位相空間

RF場を利用して電子ビーム加速する加速器の場合、電子ビームは連続ではなく、バンチ（塊）としてパルス的に加速される。加速された電子バンチはz方向に動いているので、電子バンチの分布は、空間サイズの3次元のみならず、横方向の角度拡がり（ x' と y' の2次元）と速度（電子運動エネルギー）の拡がりを加えた計6次元の空間で定義しなければならない。

まず横方向であるが、6次元電子バンチ分布を $x-x'$ （水平）と $y-y'$ （垂直）の各位相平面に射影した電子分布面積を、各々エミッタンス（ $\epsilon_{x,y}$ ）

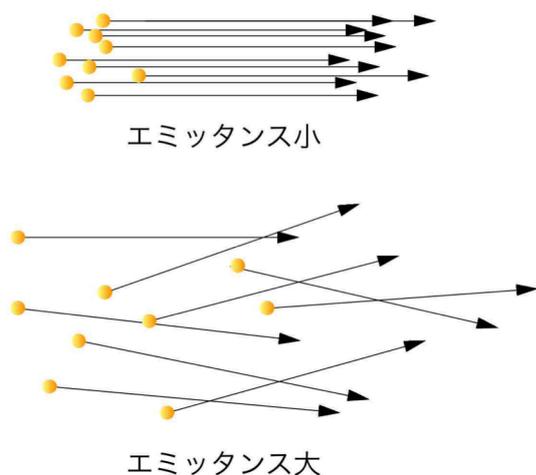


Fig. 3 電子ビーム品質を表すエミッタンス

という量で表す。エミッタンスは、通常 Fig. 2 のような電子分布の RMS 楕円面積を、 π で除したものと定義する。エミッタンスが小さい電子ビームは、Fig. 3 に示すように空間的に密で平行に進むビームである。反対にエミッタンスが大きいと、空間的に疎で角度分布が大きいビームであると言える。XFEL でレーザー増幅を起こすには、XFEL 光の波長程度のエミッタンスをもつ電子ビームが必要である。

電子ビームを加減速してビームエネルギーを変化させない限り、線形光学系におけるエミッタンスは保存量である。光学系で電子ビームの空間サイズを小さくすれば角度拡がりが増え、平行に近いビームを作るには空間サイズを大きくしなければならない。これはちょうどレーザー光のガウスビームを、レンズを用いて輸送する場合と同じである。レーザー光の場合、波長で決まる回折限界サイズに M^2 を掛けた $\frac{M^2\lambda}{4\pi}$ が保存量となり伝搬するが、電子ビームの場合保存量はエミッタンスとなる。

z 方向の電子バンチの長さは電子バンチ長で表され、しばしばバンチ長を光速で割った時間の単位が用いられる。また、 z 方向の空間分布はそのままビーム電流に対応する。エネルギーの拡がりについては、電子バンチの平均エネルギー (E_b) に対する個々の電子のエネルギー (E_i) の相対値

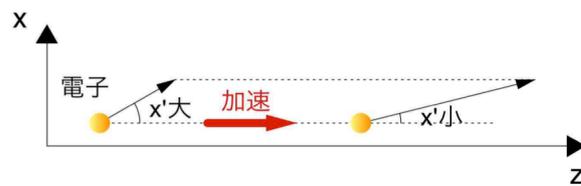


Fig. 4 加速によるエミッタンスの断熱変化

分布から標準偏差を求め、式(2-1)のようにエネルギーブレッド σ_E として表す。

$$\sigma_E^2 = \frac{1}{N_e} \sum_i \left(\frac{E_i - E_b}{E_b} \right)^2 \quad (2-1)$$

N_e はバンチ内電子の個数である。

これら 6 次元位相空間において、ビーム電流が高く、エネルギーブレッドとエミッタンスが小さいビームは、高輝度電子ビームと呼ばれる。例えば SACLA の電子ビームの場合、ビーム電流が 3 kA、エミッタンスは 60 pm-rad 程度である。

さて、蓄積リングや電子ビーム輸送ラインなど電子エネルギーが一定の場合は、横方向の電子ビーム品質を表す指標としてエミッタンスは合理的である。しかし、加速に伴い電子エネルギーが変化する線形加速器では、エミッタンスもビームエネルギーとともに変化してしまう。Fig. 4 からわかるように、電子ビームを z 方向に加速すると、横方向の運動量を保存したまま z 方向の運動量が大きくなるため、 x' や y' が電子ビームエネルギーに反比例して小さくなり、エミッタンスもビームエネルギーに反比例して減少する。このエミッタンスの断熱変化は、電子ビーム固有の品質や加速器性能によらずビームエネルギー変化に対し一意に決まり、品質の悪いビームでもビームエネルギーを上げればエミッタンスは小さくなる。即ち線形加速器における電子ビームの品質は、エミッタンスとビームエネルギーの 2 つを指標として議論しなければならない。そこでエミッタンスの代わりに電子ビーム品質を表す指標として、ビームエネルギーで規格化した規格化エミッタンスを、線形加速器では一般に用いる。規格化エミッタンスは、電子の運動エネルギー (E_b) を電子静止エネルギーで割ったローレンツ因子 (γ) を用いて定義される。ローレンツ因子は、

$$\bar{\gamma} = \frac{E_b}{m_e c^2} + 1 \quad (2-2)$$

で与えられ、 m_e は電子の静止質量、 c は真空中の光速である（3章で導入する Twiss パラメータと区別するため、本講義ではローレンツ因子にバーをつける）。電子ビームエネルギーを、加速器でよく用いられる MeV という単位で表すなら、

$$\bar{\gamma} = \frac{E_b (\text{MeV})}{0.511 (\text{MeV})} + 1$$

となる。また電子速度 (v_e) の光速に対する比を $\bar{\beta} = \frac{v_e}{c}$ とすると、特殊相対性理論より $\bar{\beta}$ と $\bar{\gamma}$ には、

$$\bar{\beta} = \sqrt{1 - \frac{1}{\bar{\gamma}^2}} \quad (2-3)$$

の関係があり、電子の運動エネルギーが大きくなると電子の質量は $\bar{\gamma}$ 倍になり、速度は光速に近づく。ローレンツ因子を用いて規格化エミッタンス ($\varepsilon_{nx,ny}$) は、

$$\varepsilon_{nx,ny} = \bar{\beta} \bar{\gamma} \varepsilon_{x,y} \quad (2-4)$$

で与えられ、ビームエネルギー変化に依存しない保存量となる。 $\bar{\beta} \approx 1$ で近似できるエネルギー領域は相対論的エネルギー領域と呼ばれ、本テキストでは非相対論的な場合を除き $\bar{\beta}$ の項を省略する。

3. 線形加速器の電子ビーム光学系

6次元位相空間をそのまま可視化することはできないが、ビーム光学系にねじれ磁場成分がない (x 方向と y 方向のカップリングがない) 場合、 x 方向と y 方向の各位相平面は独立に取り扱うことができる。SACLA の場合、ソレノイドがある入射部を除いてこの条件が成り立つ。2章で述べたように、 x - x' や y - y' の各位相平面への6次元電子バンチ分布の射影を取ると、 x - x' 位相平面の電子分布は Fig. 2 のような RMS 楕円で表され、楕円の面積は x 方向エミッタンスに π を掛けたものに等しくなる。ビームエネルギー一定の電子ビームは、 x - x' 位相平面の楕円面積（即ちエミッタンス）を保持しながら、光学系で決まるビームエンベロップ関数に従い楕円形状を変化させながら光学系の中を進む。本章ではまずエネルギー一定の電子ビームについて、楕円形状を示す Twiss パラメータを導入する。

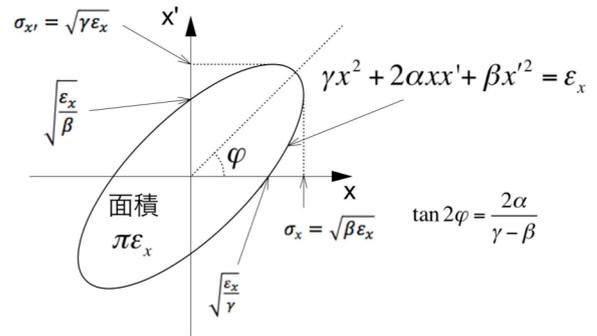


Fig. 5 位相空間の電子分布 RMS 楕円と Twiss パラメータの関係

3.1. Twiss パラメータの導入

Fig. 2 の x - x' 位相平面上の電子分布の RMS 楕円（面積 $\pi \varepsilon_x$ ）の式を、右辺がエミッタンス ε_x となるように係数を決め、

$$\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2 = \varepsilon_x \quad (3-1)$$

と置く。この楕円の面積は

$$\frac{\pi}{\sqrt{\frac{\gamma\beta}{\varepsilon_x^2} - \frac{\alpha^2}{\varepsilon_x^2}}} = \frac{\pi \varepsilon_x}{\sqrt{\gamma\beta - \alpha^2}}$$

で与えられ、これが $\pi \varepsilon_x$ に等しいことから、式(3-1)の係数 α 、 β 、 γ の間には、

$$\gamma = \frac{1 + \alpha^2}{\beta} \quad (3-2)$$

の関係が成立する（面積が与えられた任意楕円は、2つのパラメータで決定することから来る要請）。RMS 楕円の形状を表す式(3-1)の3つのパラメータ α 、 β 、 γ を Twiss パラメータと呼ぶ[1]。

式(3-1)から Twiss パラメータと位相空間楕円には、Fig. 5 のような関係がある。電子分布の空間 RMS サイズ (σ_x) と横方向角度分布の RMS 拡がり ($\sigma_{x'}$) は、 $\sigma_x = \sqrt{\beta \varepsilon_x}$ および $\sigma_{x'} = \sqrt{\gamma \varepsilon_x}$ で与えられる。また式(3-2)より、RMS 楕円の傾きを表す Twiss パラメータ α を用いると、 σ_x と $\sigma_{x'}$ からエミッタンスは式(3-3)で求められることがわかる。

$$\varepsilon_x = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \sigma_x \sigma_{x'} \quad (3-3)$$

横方向の電子ビームサイズ σ_x は、光学系で決まるビームエンベロップ関数によって変化するが、エンベロップがビーム軸と平行になるビームウェストの位置では、RMS 楕円が Fig. 6 のように直立し $\alpha = 0$ となるため、ビームサイズ σ_x と角度拡が

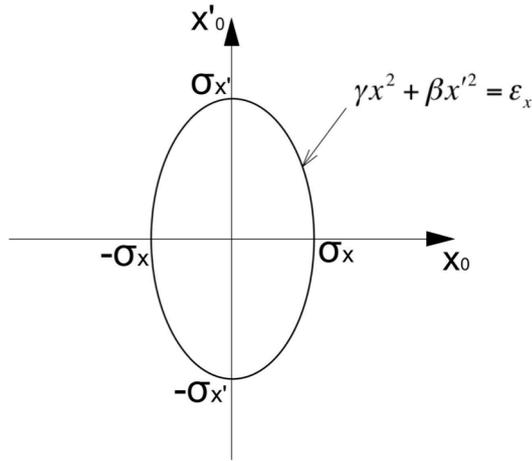


Fig. 6 直立した RMS 楕円 ($\alpha = 0$) の場合

り $\sigma_{x'}$ の積がエミッタンスに等しくなる ($\epsilon_x = \sigma_x \sigma_{x'}$)。

さて、式(3-1)の RMS 楕円がレンズやドリフト空間で構成される線形光学系によって、どのように変化していくかを考えてみる。まず式(3-4)の初期分布 (添え字 0) をもつ電子ビームが、長さ z_1 のドリフト空間を進んだ場合を考える。

$$\gamma_0 x_0^2 + 2\alpha_0 x_0 x'_0 + \beta_0 x_0'^2 = \epsilon_x \quad (3-4)$$

長さ z_1 のドリフト空間の x_0 、 x'_0 に対する線形変換は、行列を用いて

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \quad (3-5)$$

と書ける。添え字 1 は、ドリフト空間通過後の電子座標である。この線形変換を式(3-4)に対して行くと、楕円は式(3-6)に変換される。

$$\gamma_0 x_1^2 - 2\gamma_0 z_1 x_1 x'_1 + (\gamma_0 z_1^2 + \beta_0) x_1'^2 = \epsilon_x \quad (3-6)$$

これが距離 z_1 を進んだ後の電子分布を表す楕円である。この楕円の係数を、

$$\gamma_1 = \gamma_0$$

$$\alpha_1 = -\gamma_0 z_1$$

$$\beta_1 = \gamma_0 z_1^2 + \beta_0$$

と置きかえた

$$\gamma_1 x_1^2 + 2\alpha_1 x_1 x'_1 + \beta_1 x_1'^2 = \epsilon_x$$

が新たな電子分布楕円と Twiss パラメータになる。 z_1 は任意に選べることから、 β_1 を z_1 で微分す

ると、 β_1 の z に対する傾き $\beta'_1 = \left. \frac{d\beta_1}{dz} \right|_{z=z_1} = 2\gamma_0 z_1$ が得られ、 β_1 と α_1 には次の関係があることがわかる。

$$\alpha_1 = -\frac{\beta'_1}{2} \quad (3-7)$$

即ち Twiss パラメータの α は、 β の傾きを表す。また、式(3-5)の変換行列の行列式は 1 (symplectic 行列) であることから、ドリフト空間において楕円の面積、即ちエミッタンスは変化しない。

次に線形光学系のもう一つの要素であるレンズについても、同じように考えてみる。焦点距離 f の薄肉レンズの変換行列は、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \quad (3-8)$$

で与えられる。添え字 0 と 1 は、レンズ通過前後の位相平面上の電子座標を示す。レンズ通過前の初期楕円を式(3-4)とし、式(3-8)の線形変換を施すと、レンズ通過後の電子分布楕円 $(\gamma_0 + 2\alpha_0 f^{-1} + \beta_0 f^{-2})x_1^2 + 2(\alpha_0 + \beta_0 f^{-1})x_0 x'_0 + \beta_0 x_0'^2 = \epsilon_x$ が得られる。即ちレンズを通過することにより Twiss パラメータは、

$$\gamma_1 = \gamma_0 + 2\alpha_0 f^{-1} + \beta_0 f^{-2}$$

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \beta_0 f^{-1}$$

$$\beta_1 = \beta_0$$

と変化する。また、式(3-8)の行列式も 1 であるため、レンズによってエミッタンスは変化しない。

電子ビームを線形光学系で輸送する時の電子ビームサイズは、Fig. 5 からわかるように $\sigma_x(z) = \sqrt{\beta(z)\epsilon_x}$ に従って変化する。ビームエネルギーが一定であればエミッタンスは変化しないため、光学系内の電子ビームエンベロップは $\beta(z)$ によって記述される。 $\beta(z)$ はベータ関数と呼ばれ、式(3-7)からわかるように、 $\alpha(z)$ がその傾きを表す。

ここまで x 方向について議論してきたが、全く同じ取り扱いが y 方向についてもでき、ビームエンベロップを表すベータ関数は、 x 方向と y 方向において独立に定義される。

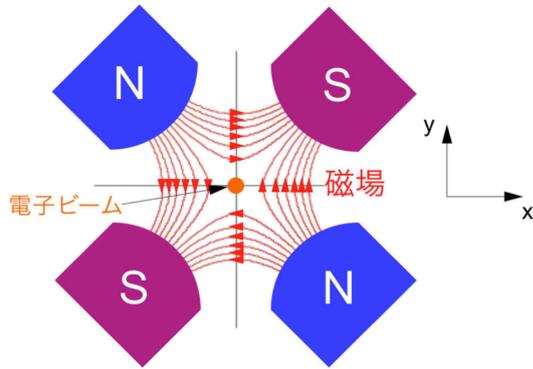


Fig. 7 四極磁石の磁極と磁場
(紙面手前から向こうに進む電子に対し水平方向収束、垂直方向発散)



Fig. 8 SACLA の四極電磁石

ビーム光学系に周期性がある蓄積リングでは、単電子運動を表すヒルの方程式の解から、Twissパラメータは厳密に定義される[2]。ここでは、位相平面上の電子分布楕円が、線形光学系によってどう変化するかをより直感的に説明した。

3.2. 四極電磁石

電子ビームの収束は、ローレンツ力の式 ($-e$ は電子の電荷量 (C) で $e > 0$)

$$\vec{F} = -e\vec{E} - e\vec{v} \times \vec{B} \quad (3-9)$$

からわかるように、電場 \vec{E} (V/m) か磁場 \vec{B} (T) を用いて行う。相対論的エネルギーを持つ電子の場合、速度がほぼ光速であるため、磁場を用いた方が有利であることが式(3-9)からわかる。例え

ば、強い磁石を使えば簡単に得られる 1 T の磁場と同じ収束力を得るためには、300 MV/m (1 m に 3 億 V の電圧) の電場が必要であり、電場を使うと明らかに効率が悪い。

レーザー光のガウス光学系では、凸レンズのように水平垂直両方向とも光を収束させるようなコンポーネントが存在するが、電子ビーム光学系では凸レンズは一般的でない。ソレノイドを使えば両方向の同時収束は可能であるが、ソレノイドの収束力は端部磁場で電子を周方向に回転させ、この周方向速度と磁場の積で得られるため、ビームエネルギーが高くなると非常に大きな磁場を必要とする。このため、相対論的エネルギーの電子ビーム収束系には専ら四極磁石が用いられ、収束力の強さや極性を容易に調整できることから、磁場を電磁石で発生させる四極電磁石が一般的に使用させる。四極電磁石は、Fig. 7 のように電子ビーム軸に対して対称な 4 つの磁極を配置することで、電子ビームに対し勾配をもつ磁場を発生させ、電子ビームに収束発散力を与える。Fig. 8 は、SACLA アンジュレータ部で使用している四極電磁石である。

四極電磁石の磁場 ($B_{x,y}$) は中心で 0 であり、中心からの水平および垂直方向の距離に比例して磁場が強くなる。位置 (x, y) における磁場は、磁場勾配を用いて

$$B_y = \frac{dB_y}{dx} x$$

$$B_x = \frac{dB_x}{dy} y$$

で与えられる。コイル電流のない電磁石中心では対称性より $B_z = 0$ であり、マクスウェル方程式の $\nabla \times \vec{B} = 0$ より、磁場勾配には $\frac{dB_x}{dy} = \frac{dB_y}{dx}$ の関係が成り立つ。即ち Fig. 7 からわかるように、四極電磁石では x 方向に収束力が働く場合、 y 方向には同じ大きさの発散力が働く。このため電子ビーム光学系は、収束と発散を交互に配置し、全体として収束力を得る強収束の原理を用いて構成される。強収束の原理とは、Fig. 9 のような同じ収束力と発散力を持つレンズを距離を離して置いた場合、全体として収束力が得られるという原理である。Fig. 9 のレンズの焦点距離を $\pm f$ とすると、2 枚のレンズの合成焦点距離 f_{total} は、レンズの公式より

$$\frac{1}{f_{total}} = \frac{1}{f} + \frac{1}{-f} - \frac{d}{f(-f)}$$

となる。このとき

$$f_{total} = \frac{f^2}{d} > 0$$

であるため、全体では収束となっていることがわかる。

3.1 節では、薄肉レンズの線形変換を式(3-8)で表したが、ここでは電子ビーム光学系のレンズである四極電磁石について、厚さをもった四極電磁石の線形変換を求める。収束発散の方向は四磁極の極性で変わるが、ここではまず磁場の方向が Fig. 7 と同じ水平方向収束、垂直方向発散の場合を考える。

四極電磁石における x 方向の電子の運動方程式は、

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{d(\bar{\gamma}m_e c v')}{dt} = -ecB_y \quad (3-10)$$

となる。但し p_x は x 方向の運動量で、相対論的電子エネルギーを仮定し $\bar{\beta} = 1$ とした。 $\frac{dz}{dt} = c$ 、

$$B_y = \frac{dB_y}{dx} x \text{ より、}$$

$$x'' + \frac{e}{\bar{\gamma}m_e c} \frac{dB_y}{dx} x = 0$$

が得られ、 $K = \frac{e}{\bar{\gamma}m_e c} \frac{dB_y}{dx}$ と置くと式(3-10)は、

$$x'' + Kx = 0 \quad (3-11)$$

となる。一方 y 方向の運動方程式は、

$$\frac{dp_y}{dt} = \frac{d(\bar{\gamma}m_e c v')}{dt} = ecB_x$$

であるため、同様に

$$y'' - Ky = 0 \quad (3-12)$$

が得られる。Fig. 7 の磁場の極性では $K > 0$ であり、式(3-11)と(3-12)より x 方向に収束力、 y 方向には発散力が働くことがわかる。

$K > 0$ の時、式(3-11)の解は積分定数 A、B を用いて

$$x = A \sin(\sqrt{K}z) + B \cos(\sqrt{K}z) \quad (3-13)$$

の形で与えられる。式(3-13)を z で微分すると、

$$x' = A \sqrt{K} \cos(\sqrt{K}z) - B \sqrt{K} \sin(\sqrt{K}z) \quad (3-14)$$

である。四極電磁石入口 ($z = 0$) における電子座標 (x_0, x'_0) を初期条件として与えると、積分定数は

$$A = \frac{x'_0}{\sqrt{K}}$$

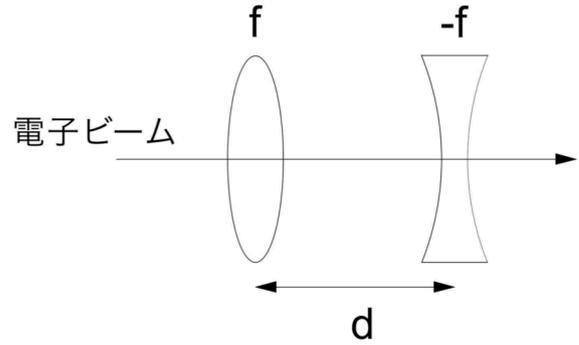


Fig. 9 強収束の原理

$$B = x_0$$

で与えられることがわかる。四極電磁石の有効磁場長を L とすると、式(3-13)と(3-14)より四極電磁石出口 ($z = L$) の電子座標 (x_1, x'_1) は、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{K}L) & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}L) \\ -\sqrt{K} \sin(\sqrt{K}L) & \cos(\sqrt{K}L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \quad (3-15)$$

によって与えられ、これが収束方向の四極電磁石の線形変換となる。

同様に $K > 0$ の場合の y 方向の式(3-12)を解くと、解は双曲線関数で表され、初期条件より線形変換は、

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{K}L) & \frac{1}{\sqrt{|K|}} \sinh(\sqrt{|K|}L) \\ \sqrt{|K|} \sinh(\sqrt{|K|}L) & \cosh(\sqrt{|K|}L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix} \quad (3-16)$$

となる。

磁場の極性を反転させれば、 $K < 0$ となって x 方向と y 方向の式が入れ替わり、 x 方向に発散力、 y 方向に収束力が働く。式(3-15)と(3-16)で示した線形変換は、いずれも行列式が1となっているため、四極電磁石でエミッタンスは保存されることがわかる。

四極電磁石を薄肉近似で取り扱う場合は、例えば式(3-15)において $L \rightarrow 0$ とすれば線形変換が $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -KL & 1 \end{pmatrix}$ で与えられ、 $K > 0$ の場合は焦点距離 $\frac{1}{KL}$ のレンズと等価であることがわかる。

3.3. 電子ビームエンベロップの転送

式(3-5)、(3-15)、(3-16)で与えられる線形変換は、各々ドリフト空間、収束方向四極電磁石、発散方向四極電磁石の線形転送行列と呼ばれる。電子ビーム光学系コンポーネントの配置に沿って、これらの転送行列を電子軌道の初期条件に掛け合わせることで、光学系内の単電子の軌道を計算することができる。また電子分布の形状を表すビームエンベロップ関数（ベータ関数）についても、転送行列を用いて求めることができる。

まず初期電子分布を表す x - x' 位相平面上の楕円を

$$\gamma_0 x_0^2 + 2\alpha_0 x_0 x_0' + \beta_0 x_0'^2 = \varepsilon_x \quad (3-17)$$

とし、行列式が1の任意の転送行列

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix} \quad (3-18)$$

$$m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} = 1$$

によって、Twissパラメータがどのように変換されるかを求める。式(3-18)を使って式(3-17)を (x_1, x_1') で書き下すと、

$$\begin{aligned} & (\gamma_0 m_{22}^2 - 2\alpha_0 m_{22} m_{21} + \beta_0 m_{21}^2) x_1^2 + 2(-\gamma_0 m_{22} m_{12} + \alpha_0 m_{12} m_{21} + \alpha_0 m_{11} m_{22} - \beta_0 m_{11} m_{21}) x_1 x_1' \\ & + (\gamma_0 m_{12}^2 - 2\alpha_0 m_{11} m_{12} + \beta_0 m_{11}^2) x_1'^2 = (m_{11} m_{22} - m_{12} m_{21})^2 \varepsilon_x \end{aligned} \quad (3-19)$$

が得られる。これが転送後の x - x' 位相平面上の電子分布楕円を表す式である。式(3-19)の右辺は、転送行列の行列式が1であるため、エミッタンスに等しい。よって左辺3項の係数が転送後のTwissパラメータ α_1 、 β_1 、 γ_1 となり、元の楕円の α_0 、 β_0 、 γ_0 と転送行列要素を用いて、式(3-20)のように転送される。

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \gamma_0 m_{22}^2 - 2\alpha_0 m_{22} m_{21} + \beta_0 m_{21}^2 \\ \alpha_1 &= -\gamma_0 m_{22} m_{12} + \alpha_0 m_{12} m_{21} + \alpha_0 m_{11} m_{22} - \beta_0 m_{11} m_{21} \\ \beta_1 &= \gamma_0 m_{12}^2 - 2\alpha_0 m_{11} m_{12} + \beta_0 m_{11}^2 \end{aligned} \quad (3-20)$$

このように、線形ビーム光学系を構成するドリフト空間や四極電磁石の転送行列を用いれば、光学系でどのようにTwissパラメータが変化するかを計算でき、ビームエンベロップを表すベータ関数を伝搬させることができる。

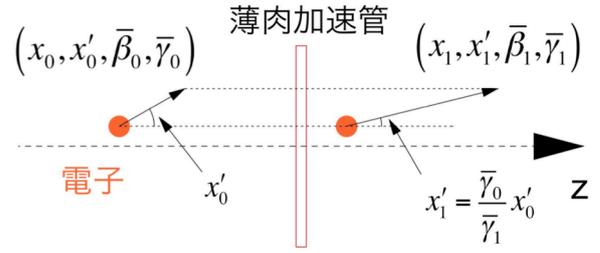


Fig. 10 加速による角度発散の減少

3.4. 加速されるビームの Twiss パラメータ

3.3節までの結果を用いれば、蓄積リングや電子ビーム輸送ラインなど、エネルギーが一定の電子ビームのエンベロップについては全て取り扱うことができる。しかし線形加速器の場合、電子ビーム加速によってエネルギーが変化するため、加速管の取り扱いを別途考慮する必要がある。第2章で説明したとおり、ビームエネルギーが変化する場合エミッタンスは保存しない。例えばFig. 10のような薄肉加速管を考えると、加速によって電子ビームの角度拡がり小さくなり、転送行列は式(3-21)で与えられる。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\bar{\gamma}_0}{\bar{\gamma}_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix} \quad (3-21)$$

但し $\bar{\gamma}_{0,1}$ は加速前後のビームエネルギーで、 $\bar{\beta} = 1$ を仮定している。式(3-17)の楕円を式(3-21)でそのまま転送してみると、式(3-20)の関係を使えば

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \gamma_0 \left(\frac{\bar{\gamma}_0}{\bar{\gamma}_1} \right)^2 \\ \alpha_1 &= \alpha_0 \frac{\bar{\gamma}_0}{\bar{\gamma}_1} \\ \beta_1 &= \beta_0 \end{aligned}$$

となる。ベータ関数は変化していないがエミッタンスが加速によって減少するため、 $\sigma_x = \sqrt{\beta \varepsilon}$ で表されるビームサイズが薄肉加速管前後で不連続に変化し、また式(3-2)の関係も満たしていない。これは式(3-21)の転送行列の行列式が1でないことからわかるように、電子エネルギーの変化に対し、エミッタンスが保存されないことに起因している。よって式(3-21)は、 x や x' といった実空間における電子軌道の転送については正しく表記しているが、電子分布楕円やビームエンベロップの伝搬には使えないことがわかる。

そこでビーム加速時のエンベロップ転送を正しく行うため、ビームエネルギー変化に対して保存量である規格化エミッタンスを用い、位相平面の電子分布楕円を再定義する[3,4]。式(3-17)の楕円は、式(2-4)の規格化エミッタンスを用いると、式(3-22)のように書き直せる。

$$\gamma_0 x_0^2 + 2\alpha_0 x_0 x'_0 + \beta_0 x_0'^2 = \frac{1}{\bar{\gamma}_0} \varepsilon_{nx} \quad (3-22)$$

右辺が ε_{nx} となるよう $\bar{\gamma}_0$ を両辺に掛けると式(3-23)が得られる。

$$\gamma_0 (\sqrt{\bar{\gamma}_0} x_0)^2 + 2\alpha_0 (\sqrt{\bar{\gamma}_0} x_0) (\sqrt{\bar{\gamma}_0} x'_0) + \beta_0 (\sqrt{\bar{\gamma}_0} x'_0)^2 = \varepsilon_{nx} \quad (3-23)$$

ここで、

$$\begin{cases} X_0 = \sqrt{\bar{\gamma}_0} x_0 \\ X'_0 = \sqrt{\bar{\gamma}_0} x'_0 \end{cases} \quad (3-24)$$

と置き、楕円の式を X と X' を使って

$$\gamma_0 X_0^2 + 2\alpha_0 X_0 X'_0 + \beta_0 X_0'^2 = \varepsilon_{nx} \quad (3-25)$$

と再定義する。式(3-25)は、ビームエネルギーで規格化した位相平面 X - X' 上の電子ビーム分布の楕円である。注目すべきは、式(3-25)の楕円形状を表す Twiss パラメータが、実位相平面 x - x' 上の楕円の式(3-17)と等しいことである。即ち、 X - X' 位相平面上の楕円と x - x' 平面上の楕円は、面積が $\bar{\gamma}_0$ 倍異なるもののお互い相似であり、楕円形状を表す Twiss パラメータが同じになる。よって規格化エミッタンスが保存される X - X' 位相空間の転送行列を用いることにより、電子分布楕円や Twiss パラメータを転送することができる。

規格化位相平面 X - X' 上での転送行列は、式(3-24)を使って式(3-21)を書き直すことにより

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\bar{\gamma}_1}{\bar{\gamma}_0}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{\bar{\gamma}_0}{\bar{\gamma}_1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X'_0 \end{pmatrix} \quad (3-26)$$

で与えられる。式(3-26)の行列式は 1 になっており、規格化エミッタンスが保存されていることがわかる。この転送行列と式(3-20)の関係を用いると、Fig. 10 の薄肉加速管で加速後の Twiss パラメータは、次のように求められる。

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\bar{\gamma}_0}{\bar{\gamma}_1} \gamma_0 \\ \alpha_1 &= \alpha_0 \\ \beta_1 &= \frac{\bar{\gamma}_0}{\bar{\gamma}_1} \beta_0 \end{aligned} \quad (3-27)$$

式(3-27)は式(3-2)の関係を満たし、ビームサイズも加速管前後で同じである。

$$\sigma_x = \sqrt{\beta_0 \varepsilon} = \sqrt{\beta_1 \frac{\bar{\gamma}_0}{\bar{\gamma}_1} \varepsilon}$$

式(3-26)は、エネルギーで規格化した位相空間における電子軌道を転送する行列であり、式(3-26)の行列を用いて実空間の電子軌道 (x, x') を計算することはできない点に注意する必要がある。

3.5. 厚肉加速管によるビーム加速のモデル化

3.4 節では、加速時のビームエンベロップを転送させるため、電子エネルギーで規格化した位相空間を導入し、薄肉加速管の例を示した。本節では、実際に厚さのある厚肉加速管でビームを加速する場合について定式化する。まず、加速管内の実位相平面 x - x' における電子の運動を考える。電子は相対論的エネルギーを持っていると仮定し ($\beta = 1$)、加速管は電子を加速電場 E_z (V/m) で z 方向 (ビーム軸方向) にのみ加速するものとする。このとき加速管内の電子の運動方程式は、 x 方向と z 方向で各々

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{dt} &= \frac{d(\bar{\gamma} m_e c^2 x')}{dz} = 0 \\ \frac{dp_z}{dt} &= \frac{d(\bar{\gamma} m_e c^2)}{dz} = eE_z \end{aligned} \quad (3-28)$$

となる。但し p_x と p_z は、 x 方向と z 方向の電子の運動量である。垂直方向については水平方向と同じ取り扱いで解けるため、ここでは省略する。

$$\text{式(3-28)の } x \text{ 方向の式を } z \text{ で積分すると、} \\ \bar{\gamma} x' + A = 0 \quad (3-29)$$

が得られる。A は積分定数である。加速管入口のパラメータを添え字 0 で示し、初期条件 $x_0, x'_0, \bar{\gamma}_0$ を使うと、 $A = -\bar{\gamma}_0 x'_0$ となる。これを式(3-29)に入れて、もう一度 z で積分する。

$$x = \bar{\gamma}_0 x'_0 \int_{z_0}^z \frac{1}{\bar{\gamma}} dz + B \quad (3-30)$$

再び初期条件より、 $B = x_0$ 。また式(3-28)の z 方向の式を使うと、式(3-31)が得られる。

$$\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_0 + \frac{eE_z(z-z_0)}{m_e c^2} = \bar{\gamma}_0 + \bar{\gamma}'(z-z_0) \quad (3-31)$$

$$\bar{\gamma}' = \frac{eE_z}{m_e c^2}$$

$\bar{\gamma}'$ はローレンツ因子で表した加速勾配で、加速管全体にわたって一定である。式(3-31)の $\bar{\gamma}' = \frac{d\bar{\gamma}}{dz}$ を式(3-30)に用いると、

$$x = x_0 + x'_0 \frac{\bar{\gamma}_0}{\bar{\gamma}'} \int_{\bar{\gamma}_0}^{\bar{\gamma}} \frac{1}{\bar{\gamma}} d\bar{\gamma} = x_0 + x'_0 \frac{\bar{\gamma}_0}{\bar{\gamma}'} \ln \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}_0} \quad (3-32)$$

となる。式(3-32)を z で微分し、角度拡がり x' を求めると、式(3-33)が得られる。

$$x' = x'_0 \frac{\bar{\gamma}_0}{\bar{\gamma}} \quad (3-33)$$

加速管出口のパラメータを添え字 1 で表し、式(3-32)と(3-33)をまとめると、 x - x' 位相平面の加速管の転送行列は式(3-34)で与えられることがわかる。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\bar{\gamma}_0}{\bar{\gamma}'} \ln \frac{\bar{\gamma}_1}{\bar{\gamma}_0} \\ 0 & \frac{\bar{\gamma}_0}{\bar{\gamma}_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \quad (3-34)$$

式(3-34)は、厚肉加速管内の x - x' 実位相平面の電子軌道に対する転送行列であるが、式(3-34)の行列式は 1 にはならず、 x - x' 平面でエミッタンスが保存されないため、式(3-34)をそのままビームエンベロップの転送には使えない。そこで薄肉加速管の例で行ったように、 X - X' の規格化位相平面における転送行列を求める。式(3-24)の変数変換を使って式(3-34)を X と X' で書き直すと、 X - X' 規格化位相平面における転送行列

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\bar{\gamma}_1}{\bar{\gamma}_0}} & \frac{\sqrt{\bar{\gamma}_0 \bar{\gamma}_1}}{\bar{\gamma}'} \ln \frac{\bar{\gamma}_1}{\bar{\gamma}_0} \\ 0 & \sqrt{\frac{\bar{\gamma}_0}{\bar{\gamma}_1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X'_0 \end{pmatrix} \quad (3-35)$$

が得られる[3]。式(3-35)は行列式が 1 であり、規格化エミッタンスが X - X' 位相平面上で保存されていることを示している。式(3-35)と(3-20)の関係を用いて、厚肉加速管前後の Twiss パラメータの転送を求めると、式(3-36)となる。

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\bar{\gamma}_0}{\bar{\gamma}_1} \gamma_0 \\ \alpha_1 &= -\frac{\bar{\gamma}_0}{\bar{\gamma}'} \ln \left(\frac{\bar{\gamma}_1}{\bar{\gamma}_0} \right) \gamma_0 + \alpha_0 \end{aligned} \quad (3-36)$$

$$\beta_1 = \frac{\bar{\gamma}_0 \bar{\gamma}_1}{\bar{\gamma}'^2} \left(\ln \frac{\bar{\gamma}_1}{\bar{\gamma}_0} \right)^2 \gamma_0 - 2 \frac{\bar{\gamma}_1}{\bar{\gamma}'} \ln \left(\frac{\bar{\gamma}_1}{\bar{\gamma}_0} \right) \alpha_0 + \frac{\bar{\gamma}_1}{\bar{\gamma}_0} \beta_0$$

式(3-36)は、厚肉加速管内のビーム加速に対する x 方向のビームエンベロップの伝搬を表し、加速管は軸対称であることから、垂直方向についても同様に式(3-36)が成り立つ。

3.6. 加速管端部の収束発散効果

3.5 節では、加速によるビームエネルギー変化に対する転送行列を求めたが、実際の加速管には出入口に収束発散効果が存在する[5]。本節では、進行波加速管端部効果の定式化を行う。詳しく述べていないが、加速管端部の収束発散効果は、電子が受ける加速電場の変化率に比例する。加速電場は加速管の外では 0 であるため、加速電場が大きく変化する加速管の端部において顕著に現れる。厳密には加速管内においても加速電場は変化するため、収束発散効果 (ponderomotive 力) が存在するが[6]、 z 方向で平均すると 1 次の項は 0 になるため、相対論的エネルギー領域では通常無視できる。

加速管端部の収束力は、加速管の回転対称性より半径方向の距離 r に比例し、半径方向の運動量変化 ($\frac{dp_r}{dz}$) を用いると、式(3-37)で与えられる。

$$\frac{dp_r}{dz} \approx -\frac{e}{2c} r \frac{\partial E_z}{\partial z} \cos(\omega t - k_z z) \quad (3-37)$$

ω と k_z は進行波加速管 RF の角周波数と z 方向の波数、 E_z は加速管 RF 電場の振幅で、 $\omega t - k_z z$ が RF 電場に対する電子の位相である。加速管の軸対称性と $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ より、式(3-37)は加速管端部に半径方向の電場が存在することを示唆しており、これが収束や発散効果を生み出している。加速管入口では、加速管 RF 電場の振幅が 0 から次第に増加するため $\frac{\partial E_z}{\partial z} > 0$ となり、電子が加速位相にある場合は $\cos(\omega t - k_z z) > 0$ となって電子ビームは収束される。逆に加速管出口では、加速電場振幅が次第に減少するため $\frac{\partial E_z}{\partial z} < 0$ となって、電子ビームは発散力を受ける。

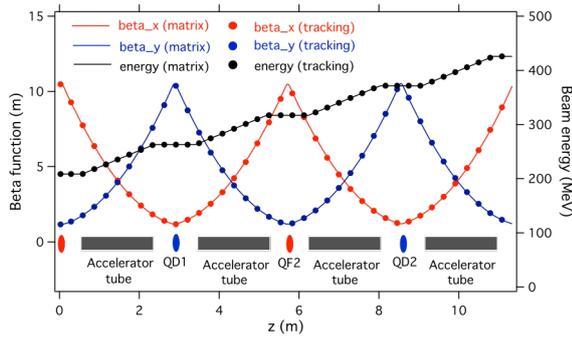


Fig. 11 線形転送行列モデルとトラッキングの比較

$\theta = \omega t - k_z z$ と置いて、薄肉近似で加速管端部の転送行列を式(3-37)より求めると、加速管入口は、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{eE_z}{2\gamma_0 m_e c^2} \cos\theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \quad (3-38)$$

加速管出口では、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{eE_z}{2\gamma_0 m_e c^2} \cos\theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \quad (3-39)$$

となるのがわかる。これらは収束発散のみで、電子エネルギーの変化を伴わないため行列式が1となり、エミッタンスは保存される。式(3-38)、(3-39)からわかるように、加速RF位相($-\pi < \theta < \pi$)では、加速管入口で収束レンズ、加速管出口で発散レンズと等価な線形変換となる。また加速管は軸対称であるので、式(3-38)と(3-39)はそのままy方向にも適用され、加速位相の場合加速管入口ではx、y両方向とも電子ビームは収束される。

3.7. トラッキングとの比較

3章でこれまで導出した線形転送行列を用いて、加速管を含む電子ビーム光学系のビームエンベロップを計算し、粒子トラッキングの結果と比較する。蓄積リングの場合、周期性のあるビーム光学系内を電子は周回するため、ビームエンベロップは初期条件によらない安定解(周期解)として求められる。しかし線形加速器の場合、電子ビームは光学系を1回通過するのみであるため、ビームエンベロップの計算は初期値問題となる。実際には、線形加速器のある地点におけるTwissパラメータを求め(または仮定し)、転送行列を使っ

て上下流のビームエンベロップを計算すればよい。ドリフト空間や四極電磁石、加速管など光学系を構成するコンポーネントを分割して細かくエンベロップを計算したい場合は、各転送行列を分割して計算する。

粒子トラッキングにはPARMELAというコードを用い、加速管を含んだFODOラティスについて、線形転送行列モデルで得られるベータ関数と粒子トラッキングの電子分布から計算したベータ関数を比較した。FODOラティスは、収束と発散の四極電磁石を交互に並べた光学系で、Fig. 11の例では四極電磁石の間に加速管を挟んでいる。加速管がない場合のFODOラティスの解は、解析的に求めることができるが[2]、加速管が入ると解析解を求めることは困難である。

Fig. 11の例では、水平と垂直のベータ関数が対称になるように、転送行列モデルを使って初期Twissパラメータと四極電磁石の磁場パラメータをsimplex法で求めた。転送行列で計算した結果がFig. 11の実線で、赤線が水平方向、青線が垂直方向のベータ関数を示す。黒の実線は電子ビームエネルギーの変化である。転送行列モデルで用いた初期電子分布と四極電磁石のパラメータをそのままPARMELAに与え、粒子トラッキングの結果得られたビームサイズからベータ関数を求めた結果が、Fig. 11の丸点である。両者は非常に一致を示しており、線形転送行列モデルが有効であることがわかる。

4. 電子バンチ圧縮

XFEL発振に必要な高密度電子ビームの生成には、ビーム進行方向(z方向)の電子バンチ圧縮が不可欠である。XFEL線形加速器では、電子ビームの加速とともに、速度変調やBunch Compressor(BC)と呼ばれるシケインを用いたバンチ圧縮を行う。いずれの圧縮も、バンチ内電子のz方向位置に相関したエネルギー変調を、RF電場を用いて電子バンチに付けることによりバンチ圧縮を行う。バンチ圧縮システムの設計で重要な点は、非線形性の補正である。Fig. 12上図に示すように、エネルギー変調を含めバンチ圧縮シ

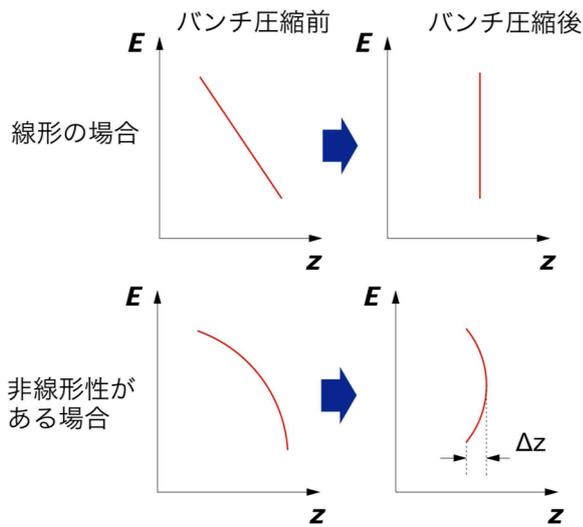


Fig. 12 バンチ圧縮における非線形性

システムが全て線形であれば、電子分布はE-z位相平面で直立し、初期エネルギー Spredd で制限される限界までz方向に電子バンチを圧縮できる。しかし、RF 電場やバンチ圧縮過程に非線形性があると、Fig. 12 下図のように、圧縮できるバンチ長の下限(Δz)が非線形性によって決まってしまう、それ以上バンチを圧縮することができない。速度変調バンチ圧縮と BC を用いたバンチ圧縮、いずれの場合も非線形の補正を行わないと、キロアンペアオーダーのピーク電流を得ることは難しい。XFEL のバンチ圧縮における非線形補正は、2 次までの補正が一般的である。本章では、2 次までの非線形補正を含めた電子バンチ圧縮の定式化を行う。

4.1. 速度変調によるバンチ圧縮

Velocity bunching と呼ばれ、電子速度の差を用いたバンチ圧縮方式で、電子ビームエネルギーが相対論的領域に達する前の低エネルギー部で行われる。XFEL 加速器入射部の構成によって差があるが、SACLA のようにカソードからのビーム電流が 1 A 程度と小さい熱電子銃を採用している入射部では重要である。RF フォトカソード電子銃の場合は、カソードから放出された電子は直ちに RF 加速電場で加速されるため、大きな圧縮率は期待できない。しかし一方で、RF フォトカ

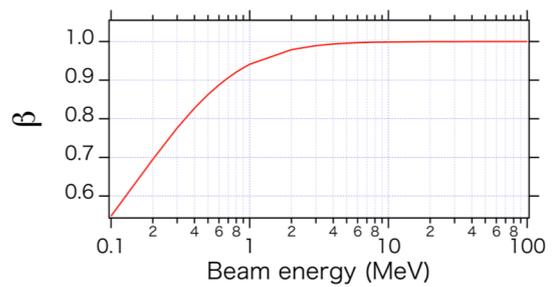


Fig. 13 電子エネルギーと速度の関係

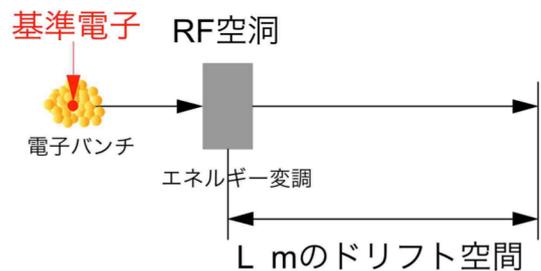


Fig. 14 速度変調バンチ圧縮の配置

ソード電子銃のビーム電流は数 10 A と、熱電子銃に比べ大きな値が得られている。

電子エネルギーと速度の間には式(2-3)の関係があり、例えば SACLA 電子銃から放出される 500 keV の電子は $\bar{\beta} \sim 0.86$ となり、速度が光速の約 86% である。よって電子バンチ内前方の電子のエネルギーを低く、後方の電子のエネルギーを高くすることにより、ドリフト空間進行時に後方の電子が前方の電子に追いつき、電子バンチ長を圧縮することができる。

Fig. 13 に電子エネルギーと速度 ($\bar{\beta}$) の関係を示す。Fig. 13 からわかるように、電子エネルギーと速度の関係は線形ではなく、強い非線形性をもつ。また RF 加速電場は sin 波なので、電子バンチのエネルギー変調も線形ではない。速度変調バンチ圧縮では、電子エネルギーの速度に対する非線形性と RF 電場の非線形性の 2 次の項が、互いにキャンセルする条件でバンチ圧縮を行う。ここでは Fig. 14 のような配置で、電子銃から出た電子バンチに RF 電場でエネルギー変調を与え、長さ L (m) のドリフト空間を進んだ後のバンチ圧縮について定式化する。

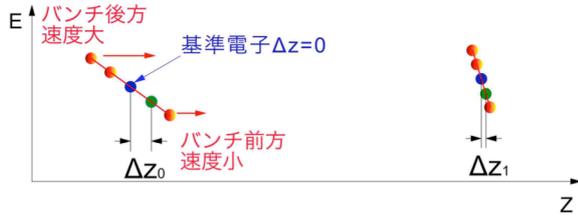


Fig. 15 速度変調バンチ圧縮

まず Fig. 15 のように、電子バンチ中心の電子を基準電子 ($\Delta z_0 = 0$) とし、基準電子に回りの電子がどのように集まってくるかを考える。電子バンチの初期エネルギーを $\bar{\gamma}_{init}$ 、RF 電場の振幅と波数を E_z (V) と k_z (1/m) と置く。RF 空洞を出てドリフト空間入口における基準電子のエネルギー ($\bar{\gamma}_0$) は、RF 電場の位相を $k_z z_0$ とすると、

$$\bar{\gamma}_0 = \bar{\gamma}_{init} + \frac{eE_z}{m_e c^2} \cos(k_z z_0) \quad (4-1)$$

となり、基準電子の速度 ($\bar{\beta}_0$) は

$$\bar{\beta}_0 = \sqrt{1 - \frac{1}{\bar{\gamma}_0^2}} \quad (4-2)$$

で与えられる。

一方、バンチ内で基準電子に対して初期相対距離 Δz_0 (Δz_0 の符号は $\Delta z_0 > 0$ でバンチ前方) の位置にある電子のエネルギー ($\bar{\gamma}$) と速度 ($\bar{\beta}$) は、

$$\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_{init} + \frac{eE_z}{m_e c^2} \cos(k_z z_0 + k_z \Delta z_0) \quad (4-3)$$

$$\bar{\beta} = \sqrt{1 - \frac{1}{\bar{\gamma}^2}} \quad (4-4)$$

であるため、長さ L (m) のドリフト空間を進むと基準電子との距離 (Δz_1) は、

$$\Delta z_1 = \Delta z_0 - L \left(1 - \frac{\bar{\beta}}{\bar{\beta}_0}\right) \quad (4-5)$$

に変化し、バンチ前方 ($\Delta z_0 > 0$) の電子の速度が基準電子より遅ければ、 $\Delta z_1 < \Delta z_0$ となって電子バンチは圧縮される。

2 次の項の補正条件を導出するため、まず式 (4-1) を $z = z_0$ において 2 次の項まで展開し、エネルギー変調の式 (4-3) を近似する。

$$\bar{\gamma} \approx \bar{\gamma}_0 + \bar{\gamma}' \Delta z_0 + \frac{1}{2} \bar{\gamma}'' \Delta z_0^2 \quad (4-6)$$

$$\bar{\gamma}' = \left. \frac{d\bar{\gamma}}{dz} \right|_{z=z_0} = -k_z \frac{eE_z}{m_e c^2} \sin(k_z z_0)$$

$$\bar{\gamma}'' = \left. \frac{d^2 \bar{\gamma}}{dz^2} \right|_{z=z_0} = -k_z^2 \frac{eE_z}{m_e c^2} \cos(k_z z_0)$$

よって基準電子とのエネルギー差 $\Delta \bar{\gamma}$ は、

$$\Delta \bar{\gamma} = \bar{\gamma} - \bar{\gamma}_0 \approx \bar{\gamma}' \Delta z_0 + \frac{1}{2} \bar{\gamma}'' \Delta z_0^2 \quad (4-7)$$

で近似することができる。

次に、式 (4-4) を $\bar{\beta} = \bar{\beta}_0$ のまわりで $\bar{\gamma}$ について同じく 2 次まで展開すると、

$$\bar{\beta} \approx \bar{\beta}_0 + \left. \frac{d\bar{\beta}}{d\bar{\gamma}} \right|_{\bar{\gamma}=\bar{\gamma}_0} \Delta \bar{\gamma} + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 \bar{\beta}}{d\bar{\gamma}^2} \right|_{\bar{\gamma}=\bar{\gamma}_0} \Delta \bar{\gamma}^2 \quad (4-8)$$

$$\left. \frac{d\bar{\beta}}{d\bar{\gamma}} \right|_{\bar{\beta}=\bar{\beta}_0} = \frac{1}{\bar{\gamma}_0^3} \left(1 - \frac{1}{\bar{\gamma}_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\bar{\beta}_0 \bar{\gamma}_0^3}$$

$$\left. \frac{d^2 \bar{\beta}}{d\bar{\gamma}^2} \right|_{\bar{\beta}=\bar{\beta}_0} = -\frac{3}{\bar{\gamma}_0^4} \left(1 - \frac{1}{\bar{\gamma}_0^2}\right)^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{\bar{\gamma}_0^6} \left(1 - \frac{1}{\bar{\gamma}_0^2}\right)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{\bar{\beta}_0 \bar{\gamma}_0^4} - \frac{1}{\bar{\beta}_0^3 \bar{\gamma}_0^6}$$

式 (4-7) を式 (4-8) に代入する。

$$\bar{\beta} \approx \bar{\beta}_0 + \frac{1}{\bar{\beta}_0 \bar{\gamma}_0^3} \left(\bar{\gamma}' \Delta z_0 + \frac{1}{2} \bar{\gamma}'' \Delta z_0^2 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{\bar{\beta}_0 \bar{\gamma}_0^4} + \frac{1}{\bar{\beta}_0^3 \bar{\gamma}_0^6} \right) \left(\bar{\gamma}' \Delta z_0 + \frac{1}{2} \bar{\gamma}'' \Delta z_0^2 \right)^2$$

そして Δz_0 の 2 次まで残すと、

$$\bar{\beta} \approx \bar{\beta}_0 + \frac{1}{\bar{\beta}_0 \bar{\gamma}_0^3} \bar{\gamma}' \Delta z_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\bar{\beta}_0 \bar{\gamma}_0^3} \bar{\gamma}'' - \frac{3}{\bar{\beta}_0 \bar{\gamma}_0^4} \bar{\gamma}'^2 - \frac{1}{\bar{\beta}_0^3 \bar{\gamma}_0^6} \bar{\gamma}'^2 \right) \Delta z_0^2 \quad (4-9)$$

となる。式 (4-9) を用いて式 (4-5) を書き直すと、

$$\Delta z_1 \approx \left(1 + \frac{L}{\bar{\beta}_0 \bar{\gamma}_0^3} \bar{\gamma}'\right) \Delta z_0 + \frac{L}{2 \bar{\beta}_0^3 \bar{\gamma}_0^6} \left(\bar{\gamma}'' - \frac{3}{\bar{\gamma}_0} \bar{\gamma}'^2 - \frac{1}{\bar{\beta}_0^3 \bar{\gamma}_0^3} \bar{\gamma}'^2 \right) \Delta z_0^2 \quad (4-10)$$

が得られる。

式 (4-10) 右辺第 1 項は線形のバンチ圧縮を表し、バンチ前方のエネルギーが低い場合は $\bar{\gamma}' < 0$ となりバンチは圧縮される。このとき速度変調バンチ圧縮の線形圧縮率 C_{VB} は、

$$C_{VB} = \frac{\Delta z_0}{\Delta z_1} = \left(1 + \frac{L}{\bar{\beta}_0 \bar{\gamma}_0^3} \bar{\gamma}'\right)^{-1} \quad (4-11)$$

で表される。

式 (4-11) を見ればわかるように、電子バンチのエネルギーチャープ (1 次のエネルギー変調 $\bar{\gamma}'$) を変えることにより、線形の範囲ではバンチ長を 0 にし、圧縮率を無限大にすることができる。しかし現実には、式 (4-10) の右辺に第 2 項があることからわかるように、高次項によってバンチ圧縮は制限されるため、高圧縮率を達成するには高次項の補正が必要である。2 次の項を示す式 (4-10) 右辺第 2 項を補正するための条件は、

$$\bar{\gamma}'' - \left(\frac{3}{\bar{\gamma}_0} + \frac{1}{\bar{\beta}_0^3 \bar{\gamma}_0^3} \right) \bar{\gamma}'^2 = 0 \quad (4-12)$$

である。式 (4-12) を満たすには、 $\bar{\gamma}'' > 0$ でなければならない。一方バンチ圧縮を行うためには $\bar{\gamma}' < 0$ が必要なため、RF 電場に対する電子バンチ位相 $k_z z_0$ は、Fig. 16 に示すように $\pi < k_z z_0 < \frac{3}{2}\pi$ の範囲になければならないことがわかる (注: RF 電場の横軸を時間にした場合、位相は $-\frac{3}{2}\pi \sim -\pi$)

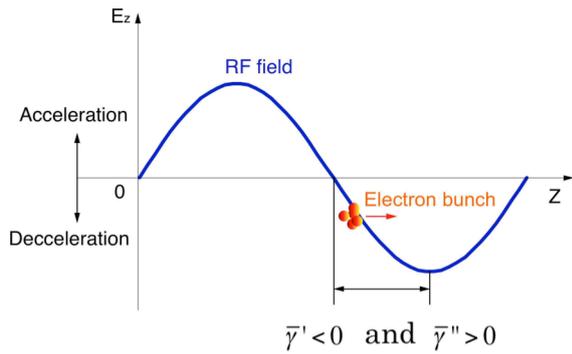


Fig. 16 速度変調バンチ圧縮における RF 電場の位相

の範囲となる)。従って、速度変調バンチ圧縮において 2 次補正を行うには、必然的に電子ビームを減速しなければならない。

速度変調バンチ圧縮は、ドリフト空間のみならず RF 加速管内でも、RF 加速と同時に進行することができるがここでは割愛する [7]。

4.2. BC を用いたバンチ圧縮

電子ビームエネルギーが相対論領域に達すると、電子速度がほぼ光速になるため速度変調バンチ圧縮は使えない。そこで Fig. 17 に示すような、偏向電磁石 4 台で構成されるシケインを用いて電子バンチを圧縮する。垂直方向磁場を用いて電子を水平方向に偏向させると、電子軌道の曲率半径は電子エネルギーに比例する。従って Fig. 17 の偏向電磁石の偏向角はエネルギーに反比例し、エネルギーの高い電子は内側の短いビーム軌道を通り、エネルギーが低い電子は外側の長い軌道を通る。速度変調バンチ圧縮の場合と同じく、電子バンチ内に RF 電場でエネルギー変調を付け、バンチ前方の電子エネルギーを低くすれば、シケインを用いてバンチを圧縮することができる。XFEL 加速器では、空間電荷や CSR などの非線形効果を緩和するため、複数段の BC を用いてビームエネルギーを上げながら徐々にバンチを圧縮することが多い。

バンチ圧縮はシケインを用いずとも、ドッグレッグ (シケイン前半の偏向電磁石 2 台を用いてビーム軌道を平行移動させる配置) や FODO ラティスを用いても可能である。しかしシケインに

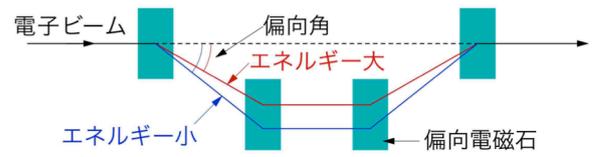


Fig. 17 Bunch Compressor シケイン

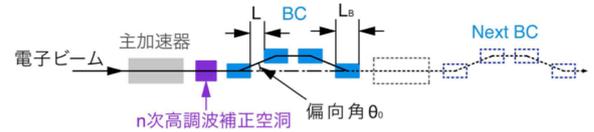


Fig. 18 1 段の BC モデル

は、下流のビーム軌道のエネルギー依存性 (エネルギー分散関数) が高次項まで全て 0 であり、アライメントが容易であるという利点がある。

速度変調バンチ圧縮と同様、RF 電場や BC シケインには非線形性があるため、非線形補正は BC を用いたバンチ圧縮においても重要である。ここでは Fig. 18 のような 1 段の BC について、4.1 節と同じように基準電子に対するバンチ圧縮と 2 次項の補正について定式化する。

シケイン電子ビーム軌道長の電子エネルギーに対する依存性を計算するため、まず基準電子のシケイン軌道長と、シケインで偏向されない場合の直線軌道との差 (s_0) を計算する。Fig. 18 の配置で基準電子の偏向角を θ_0 、偏向電磁石間の距離を L 、偏向電磁石の長さを L_B と置くと、偏向電磁石間における斜行軌道と直線軌道の長さの差は、

$$\frac{L}{\cos\theta_0} - L \approx \frac{1}{2}\theta_0^2 L$$

である。次に偏向電磁石内での軌道長の差は、

$$\rho_0\theta_0 - L_B = \frac{\theta_0}{\sin\theta_0}L_B - L_B \approx L_B \left(\frac{\theta_0}{\theta_0 - \frac{\theta_0^3}{6}} - 1 \right) \approx \frac{\theta_0^2}{6} L_B$$

となる。但し ρ_0 は、偏向電磁石内における基準電子軌道の曲率半径である。シケインには斜行部分が 2 カ所、偏向電磁石は 4 台あるので、これらを合わせたシケイン軌道と直線軌道との軌道長差は、

$$s_0 \approx \theta_0^2 \left(L + \frac{2}{3}L_B \right) \quad (4-13)$$

で与えられることがわかる。

次に基準電子のエネルギーを $\bar{\gamma}_0$ とし、エネルギーが $\Delta\bar{\gamma}$ 異なる電子に対してシケイン軌道と直線

軌道との軌道長差 (s) を求める。式(4-13)の偏向角が $\theta = \theta_0 \frac{\bar{\gamma}_0}{\bar{\gamma}_0 + \Delta\bar{\gamma}}$ となるので、軌道長差は

$$s \approx \theta^2 \left(L + \frac{2}{3} L_B \right) = \theta_0^2 \left(L + \frac{2}{3} L_B \right) \left(1 + \frac{\Delta\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}_0} \right)^{-2}$$

である。これを $\frac{\Delta\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}_0}$ について 2 次の項まで展開すると、

$$s \approx \theta_0^2 \left(L + \frac{2}{3} L_B \right) \left[1 - 2 \frac{\Delta\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}_0} + 3 \left(\frac{\Delta\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}_0} \right)^2 \right]$$

が得られる。よってシケインにおける電子軌道長は、基準電子とのエネルギー差 $\Delta\bar{\gamma}$ に対し、式(4-14)の依存性をもつことがわかる。

$$s - s_0 \approx R_{56} \frac{\Delta\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}_0} + T_{566} \left(\frac{\Delta\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}_0} \right)^2 \quad (4-14)$$

$$R_{56} = -2\theta_0^2 \left(L + \frac{2}{3} L_B \right)$$

$$T_{566} = 3\theta_0^2 \left(L + \frac{2}{3} L_B \right)$$

相対エネルギー偏差 $\left(\frac{\Delta\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}_0} \right)$ の 1 次の係数は R_{56} と呼ばれ、BC の重要なパラメータである。 R_{56} は、電子の 6 次元座標 $(x, x', y, y', z, \frac{\Delta\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}_0})$ に対するシケインの転送行列 (6 行 6 列の R 行列) の 5 行 6 列目要素であることを意味し、1 次の相対エネルギー偏差が、シケインによって z 方向位置変化に変換される係数を表す。Fig. 17 や 18 のような一般的なシケインの場合、式(4-14)からわかるように $R_{56} < 0$ 、 $T_{566} > 0$ となる。

式(4-14)を使って 4.1 節と同様に、シケイン上流における基準電子からバンチ内電子までの初期相対距離 Δz_0 (Δz_0 の符号は $\Delta z_0 > 0$ でバンチ前方) が、シケイン通過後どのようになるかを求めてみよう。Fig. 18 のモデルでは、電子バンチはシケイン上流の主加速器 RF 電場で加速およびエネルギー変調を受けた後、 n 倍の RF 周波数をもつ高調波補正空洞の RF 電場においても減速されながらエネルギー変調を受ける。後で明らかになるように、高調波補正空洞は 2 次補正には不可欠な要素である。Fig. 19 は、主加速器の基本波 RF 電場と 3 次高調波補正空洞の RF 電場を用いて、電子バンチを加速する部分の RF 電場を線形化した例である。Fig. 19 からわかるように、基本周波数と整数倍周波数の 2 種類の RF 電場を組み合わせることで、RF 電場や BC の 2 次の非線形項の補正が可能になる。

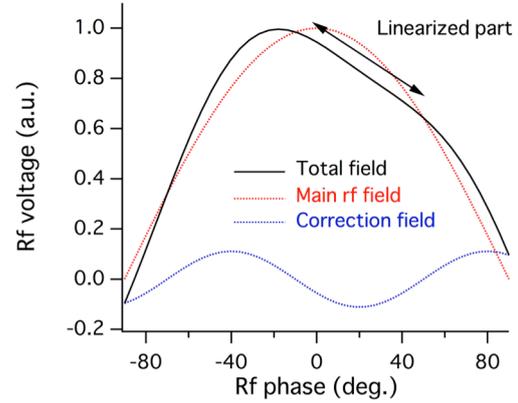


Fig. 19 3 次高調波補正空洞を用いた非線形補正、赤線が主加速器 RF 電場、青線が 3 次高調波 RF 電場、黒線はそれらの和。

Fig. 18 において基準電子の初期エネルギーを $\bar{\gamma}_{init}$ とすると、主加速器 RF 電場 (振幅 E_z 、位相 $k_z z_0$) と補正空洞 RF 電場 (振幅 E_{nz} 、位相 $nk_z z_0 + \phi$) で加減速を受けた後、シケイン入口の基準電子のエネルギー $\bar{\gamma}_0$ は、

$$\bar{\gamma}_0 = \bar{\gamma}_{init} + \frac{eE_z}{m_e c^2} \cos(k_z z_0) + \frac{eE_{nz}}{m_e c^2} \cos(nk_z z_0 + \phi)$$

で与えられる。また、基準電子から距離 Δz_0 離れた電子のシケイン入口におけるエネルギー $\bar{\gamma}$ は、

$$\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_{init} + \frac{eE_z}{m_e c^2} \cos(k_z z_0 + k_z \Delta z_0) + \frac{eE_{nz}}{m_e c^2} \cos(nk_z z_0 + nk_z \Delta z_0 + \phi) \quad (4-15)$$

となる。式(4-15)を z_0 のまわりで展開し 2 次の項まで残すと、式(4-16)が得られる。

$$\bar{\gamma} \approx \bar{\gamma}_0 + \bar{\gamma}' \Delta z_0 + \frac{1}{2} \bar{\gamma}'' \Delta z_0^2 \quad (4-16)$$

$$\bar{\gamma}' = \left. \frac{d\bar{\gamma}}{dz} \right|_{z=z_0} = -\frac{e}{m_e c^2} [E_z k_z \sin(k_z z_0) + n E_{nz} k_z \sin(nk_z z_0 + \phi)]$$

$$\bar{\gamma}'' = \left. \frac{d^2 \bar{\gamma}}{dz^2} \right|_{z=z_0} = -\frac{e}{m_e c^2} [E_z k_z^2 \cos(k_z z_0) + n^2 E_{nz} k_z^2 \cos(nk_z z_0 + \phi)]$$

よって式(4-16)より

$$\Delta\bar{\gamma} \approx \bar{\gamma}' \Delta z_0 + \frac{1}{2} \bar{\gamma}'' \Delta z_0^2$$

となり、これを式(4-14)に代入するとシケイン出口における基準電子からの距離 Δz_1 は、

$$\Delta z_1 \approx \Delta z_0 - R_{56} \left(\frac{\bar{\gamma}'}{\bar{\gamma}_0} \Delta z_0 + \frac{\bar{\gamma}''}{2\bar{\gamma}_0} \Delta z_0^2 \right) - T_{566} \left(\frac{\bar{\gamma}'}{\bar{\gamma}_0} \Delta z_0 + \frac{\bar{\gamma}''}{2\bar{\gamma}_0} \Delta z_0^2 \right)^2 \quad (4-17)$$

となる。 Δz_0 について2次の項まで残すと、式(4-17)は、

$$\Delta z_1 \approx \left(1 - R_{56} \frac{\bar{\gamma}'}{\bar{\gamma}_0}\right) \Delta z_0 - \left[R_{56} \frac{\bar{\gamma}''}{2\bar{\gamma}_0} + T_{566} \left(\frac{\bar{\gamma}'}{\bar{\gamma}_0}\right)^2 \right] \Delta z_0^2 \quad (4-18)$$

となり、BCの線形バンチ圧縮率 C_{BC}

$$C_{BC} = \left(1 - R_{56} \frac{\bar{\gamma}'}{\bar{\gamma}_0}\right)^{-1} \quad (4-19)$$

が求められる。また2次補正の条件は、

$$R_{56} \frac{\bar{\gamma}''}{2\bar{\gamma}_0} + T_{566} \left(\frac{\bar{\gamma}'}{\bar{\gamma}_0}\right)^2 = 0 \quad (4-20)$$

であることがわかる。

式(4-20)の符号を見てみると、式(4-14)より $R_{56} < 0$ 、 $T_{566} > 0$ なので、2次補正には $\bar{\gamma}'' > 0$ が必要になる。この条件は、式(4-16)の $\bar{\gamma}''$ の式より、

$$E_z \cos(k_z z_0) + n^2 E_{nz} \cos(nk_z z_0 + \phi) < 0 \quad (4-21)$$

であることを意味する。式(4-21)の第1項は主加速器RF電場であるため、電子を加速するには正でなければならない。故に必然的に式(4-21)の第2項の高調波補正空洞のRF電場は負となり、電子の減速が必要になる。このとき、補正空洞に主加速器と同じRF周波数を使った場合は $n = 1$ となるため、式(4-21)を満たすためには主加速器で加速した分以上に減速することが必要となり、電子を加速することができない。よって2次の非線形補正には、高調波補正空洞が必須となる。高調波の次数 n が大きいほど電子を減速する補正空洞電場 E_{nz} を小さくすることができるため、加速器全体の加速効率を上げることができる。また補正空洞の位相は式(4-21)の ϕ で決まるが、振幅 E_{nz} が小さくなるよう位相を $nk_z z_0 + \phi = \pi$ として、式(4-20)の条件を満たす場合が多い。

本節では1段のBCについて定式化を行ったが、多段のBCを用いる場合は、各BC間における基準電子に対する距離とエネルギー変調を式(4-16)のように表し、式(4-17)を漸化式として順に展開していけばよい。多段BCの場合の2次補正

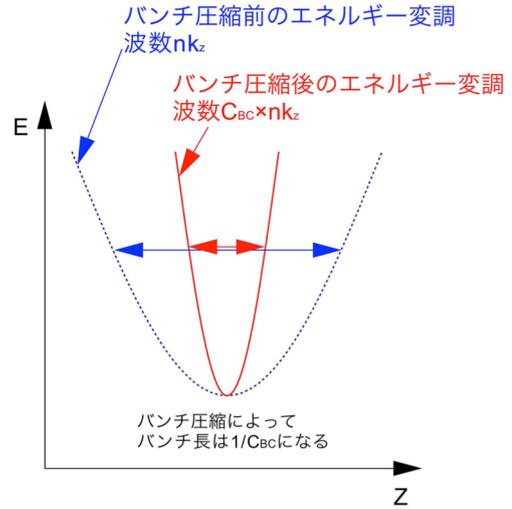


Fig. 20 バンチ圧縮による高調波補正空洞RF周波数の実効的な増大、青点線は圧縮前のエネルギー変調、赤実線は圧縮後のエネルギー変調。

も、式(4-20)に対応する多段BCの2次補正条件を満たすよう、1カ所の高調波補正空洞で行うことができる。このとき高調波補正空洞は、1段目のBC上流に設置すると電子の減速が小さくなるため最も効率がよい[8]。これはFig. 20で示すように、バンチ圧縮によって補正空洞で与えるエネルギー変調の周波数が実効的に C_{BC} 倍になるからである。即ち1段目BC下流の2次補正において、式(4-21)の n が $n \times C_{BC}$ となって働くため、補正空洞の電場を小さくできる。

バンチ圧縮システムの基本設計では、速度変調バンチ圧縮や多段BCを組み合わせたバンチ圧縮システム全体で、目的とするバンチ長までのバンチ圧縮と2次の非線形補正が達成できるよう、機器配置とパラメータを決定する必要がある。

5. XFELの運転

本章ではSACLAを例に、XFEL加速器の立ち上げとパラメータ調整について簡単に紹介する[9]。

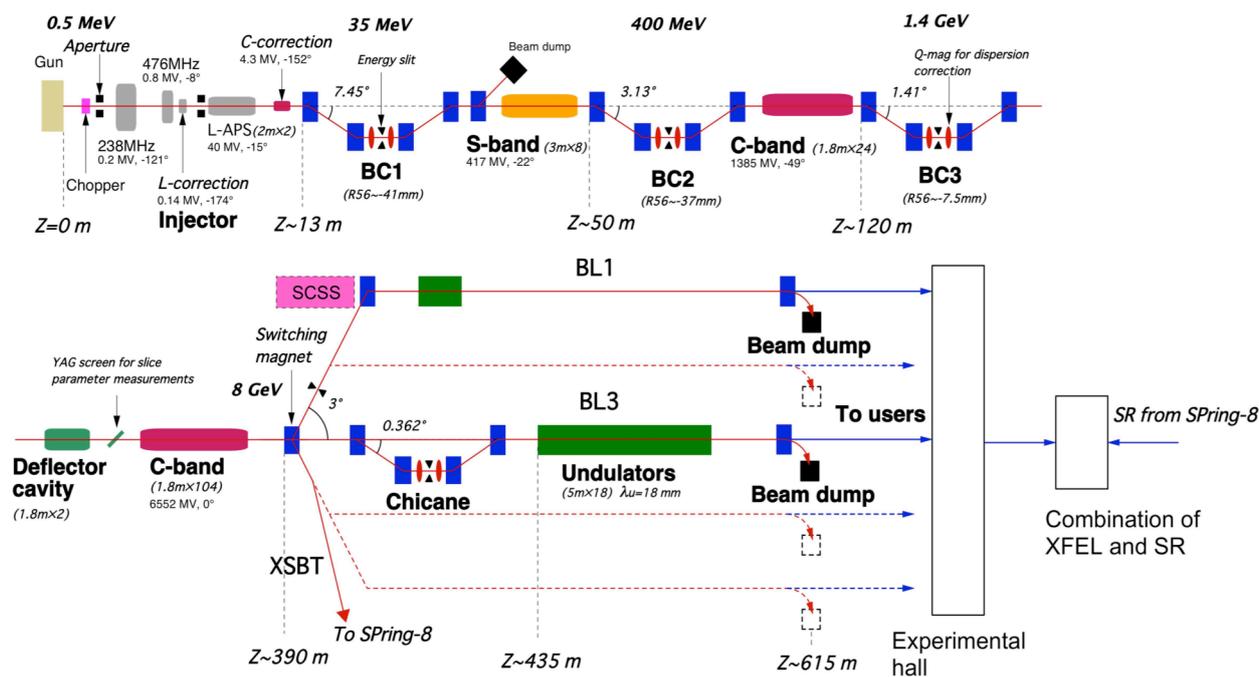


Fig. 21 XFEL 施設 SACLA の概要

5.1. XFEL 施設 SACLA

Fig. 21 に SACLA の概略図を示す。SACLA は実験ホールまで含めた全長が約 700 m、そのうち加速器部分が約 400 m、アンジュレータホールが約 200 m である。施設全体をなるべくコンパクトにするため、周期長 18 mm の短周期真空封止アンジュレータを使用し、8 GeV 電子ビームを用いて波長 0.1 nm 以下の X 線の発生を可能にしている [10]。また主加速器の RF 周波数として C-band (5.712 GHz) を採用することにより、加速電場を従来の S-band (2.856 GHz) の 2 倍に上げ、加速器の長さを短縮している。アンジュレータホールには 5 本のアンジュレータビームラインが設置可能で、SACLA から SPring-8 蓄積リングへの低エミッタンスビームの入射や、SPring-8 放射光と SACLA の XFEL の同時利用なども視野に入れた施設デザインとなっている。

単結晶 CeB₆ カソードを用いた 500 kV 熱電子銃から出た電子ビームは、chopper で長さ 1 ns 分が切り出され、入射部 (injector) で速度変調バンチングによってバンチ圧縮される。電子銃からの初期電子ビーム電流は 1 A である。速度変調バ

ンチングのためのエネルギー変調は、238 MHz RF 空洞で電子を減速することによって与えられ、 $\bar{\gamma}$ と $\bar{\beta}$ の 2 次の非線形性を打ち消している。その後 476 MHz RF 空洞で約 1 MeV まで加速し、空間電荷効果によるエミッタンス悪化を避けつつバンチ圧縮を行う。圧縮した電子バンチは、L-band 加速器でエネルギー変調を受けながら約 40 MeV まで加速される。L-band 出口におけるビーム電流は約 25 A である。

電子バンチは、入射部下流の BC1 で更にビーム電流 70 A 程度にまで圧縮された後、S-band 加速器でエネルギー変調を受けるとともに約 400 MeV まで加速される。その後更に 2 箇所の BC を用いて、最終的にビーム電流 3 kA 以上、バンチ長 20-30 fs(FWHM)までバンチを圧縮する。3 段の BC の非線形性は、入射部の L-band 補正空洞および BC1 上流に設置された C-band 補正空洞で補正する。最終段の BC3 下流には Deflector 空洞が設置され、電子バンチ長の測定および確認が行えるようになっている。

BC3 下流の主加速器部には 104 本の C-band 加速管が設置され、電子バンチを最大 8.5 GeV まで

加速した後、全長約 100 m のアンジュレータへ入射し、X 線レーザーを発振させる。

5.2. SACLA 立ち上げ時のビーム調整

SACLA は X 線レーザー光の利用施設であるため、最も重要なパラメータはレーザー光強度である。いったんレーザー光が得られれば、その強度を最大化するように加速器パラメータを調整すればよい。しかし、放射光と異なり FEL 発振は、ただアンジュレータに電子ビームを通しただけでは得られない。エミッタンスやピーク電流、ビーム軌道、ビームエンベロップなどがある程度最適化されていないと、レーザー増幅を起こすことができないのである。故に加速器の基本設計、および CSR や wake field を含んだ 3 次元トラッキングの結果から、加速器の設計をできるかぎり最適化しておく必要がある。また各機器にはアライメントやパラメータのエラーが必ずあるため、エラーの許容値を明確にし、いかに実機のパラメータを設計パラメータに近づけるかは重要な点である。

蓄積リングと異なり線形加速器は、電子銃が電子ビームの初期条件となり、最終的にビームダンプで電子ビームは廃棄される。よって加速器の調整は必然的に上流から行わなければならない。入射部 L-band 加速管上流では、電子ビームエネルギーが 1 MeV 以下であるため、空間電荷効果が顕著に表れ、横方向のビームサイズが増大する。空間電荷効果によるビームの発散を、離散的に配置した磁気レンズ（短いソレノイド）で抑え、エミッタンスを悪化させないようにバンチを圧縮する。磁気レンズのパラメータは、蛍光スクリーンで測定したビームサイズと設計パラメータのサイズを比較し、確認と調整を行う。

入射部では電子ビームエネルギーを直接測定することができないため、RF 空洞の位相は電子ビーム誘起位相法を用いて決定する。これは RF 空洞の RF 源を OFF にした後、電子バンチを空洞に通し、電子バンチ電荷が空洞内に誘起する RF 場の位相を基準タイミング信号に対して測定することにより、RF 空洞の電子バンチ位相を決

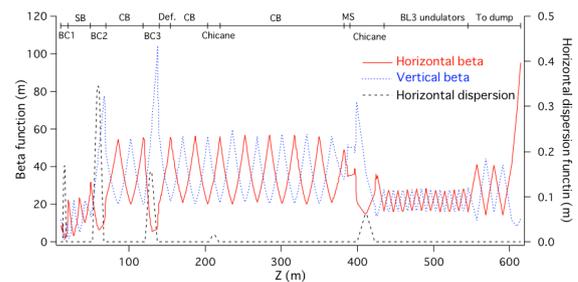


Fig. 22 SACLA の電子ビームエンベロップ（設計値）

定する手法である。入射部以外の加速管については、ビーム誘起位相法とともに各 BC やシケイン部でビームエネルギーを測定できるため、入射部の RF 空洞に比べ位相の設定は容易である。

RF 空洞および加速管のパラメータ設定終了後、各 BC 出口におけるバンチ長を確認する。バンチ長は、各 BC の中央に設置されたスクリーンを用いて、RF ゼロクロス法[11]やエネルギーチャープの測定結果から間接的に求める。また SACLA の BC2 と BC3 には、シケインをバイパスして電子ビームをストレートに通すことができる真空ダクトが設けられており、BC3 下流の Deflector を用いて各 BC のバンチ長を確認することもできる。これらバンチ長測定は、分解能が 10 fs 程度であるため、バンチ圧縮率や非線形補正の最終的な微調整は、レーザー出力が最大になるように行う必要がある。

5.3. 電子ビームエンベロップの調整

線形転送行列を用いた電子ビームエンベロップのモデルは、実際に SACLA のビーム光学系の設計や調整に利用している。Fig. 22 は、SACLA のビームエンベロップを表すベータ関数と水平エネルギー分散関数（いずれも設計値）である。加速管部とアンジュレータ部のビーム光学系は FODO で構成され、CSR によるエミッタンスの悪化を防ぐため、3 カ所の BC とアンジュレータ上流のシケインでは水平ベータ関数をできるだけ小さくしている。

蓄積リングのように周期的な安定解をもたない線形加速器では、ビームエンベロップは電子バンチの初期分布を測定し、それを転送することで

求めなければならない。3章で導出した線形ビーム光学系の転送行列は、いずれもエミッタンスを保存し行列式が1であるため、逆行列は容易に求めることができる。よって初期電子分布は必ずしも加速器の最上流で測定する必要はなく、下流で測定した電子分布を使って、上流のビームエンベロップを計算してもよい。

実際の初期電子分布は、Qスキャン法で測定することができる。Qスキャン法は、特定の四極電磁石の強さを変化させながら下流にあるスクリーン上のビームサイズを測定し、四極電磁石におけるTwissパラメータとエミッタンスを求める方法である。四極電磁石の強さを変化させると、四極電磁石強さとスクリーン上のビームサイズの2乗の関係は、Fig. 23のように2次関数となる。初期電子分布のTwissパラメータとエミッタンスがわかれば、四極電磁石の強さに対しスクリーン上のビームサイズは一意に決まるが、この場合初期分布がわからないので、測定したビームサイズから逆に初期分布を求める。未知のパラメータは、2つのTwissパラメータ(式(3-2)から3つ目は求められる)とエミッタンスの計3つであるので、測定点が3点あれば2次関数が一意に決まり、スキャンする四極電磁石におけるTwissパラメータとエミッタンスを求めることができる。実際にはビームサイズの測定エラー等を小さくするため、3点以上の測定点から2次関数をfitして求める。

線形転送行列モデルはFig. 11で示したように、粒子トラッキングとはよい一致が得られているものの、実機のビームエンベロップの調整では、蓄積リングほどの精度は得られていないのが現状である。例えば、粒子トラッキングでは考慮されていない進行波加速管端部の四極電磁場などの影響などが原因である。進行波加速管端部の四極成分は、加速管にRF場を供給するカプラーセルと呼ばれる加速管端部の構造に依存し、SACLA加速管のように加速電場が大きい場合に顕著に表れ、かつRF位相に依存する。Fig. 24は、進行波加速管の転送行列を確認するために行った電子ビーム軌道変位の測定例である。Fig. 24では、BC3下流(z=154 m)にあるステアリング電磁石

で水平方向の角度変位を電子ビームに与え、下流の軌道変位をRF cavity BPMで測定した(Fig. 24赤丸線)。Fig. 24上図の青実線は、線形転送行列で軌道変位を計算した結果であるが、明らかに測定結果とずれている。加速管端部に四極成分があると仮定し、転送行列モデルを補正して再計算した結果がFig. 24下図の青線で、実際のビーム軌道変位をほぼ正しく表していることがわかる。

このように、ビームエンベロップを正しく評価するためには、転送行列の他にもRF位相や振幅、電子ビームサイズを測定するスクリーンなどの精度を向上させる必要がある。SACLAのスクリーンモニターは、BC1より下流ではOTR(Optical Transition Radiation)を利用した薄膜SUSのスクリーンを用いているが、BC3で圧縮後の電子バ

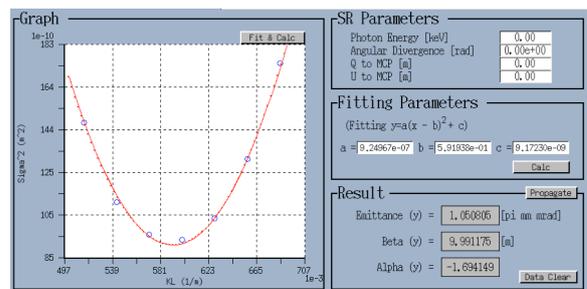


Fig. 23 Qスキャン法の測定例

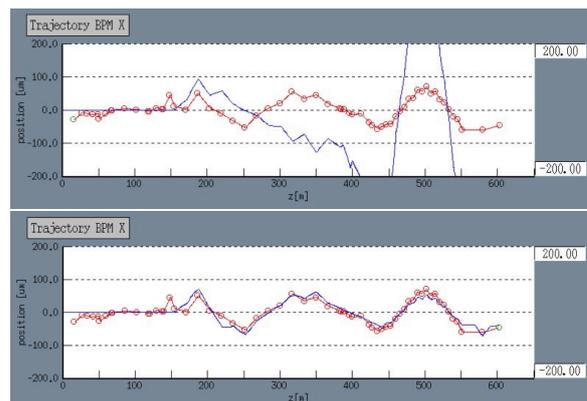


Fig. 24 BC3下流(z=154 m)で電子ビームに角度変位を与えた場合の軌道変化の測定値(赤丸線)と線形転送行列モデルの計算値(青線)。上図は加速管端部四極成分を補正しない場合、下図は四極成分を補正したモデルを使用した場合。

ンチからは強烈なコヒーレント OTR が発生し、ほとんどのスクリーンで正しくビームサイズを評価することができない。現状のビームエンベロップ調整の精度は、設計値に対しベータ関数換算で数 10 % から 100 % 程度であろうと思われる。

また Q スキャンで得られるパラメータは、電子バンチ全体を投影したパラメータであるが、XFEL では電子バンチ内で密度の高い部分のみがレーザー発振するため、電子バンチを z 方向に輪切りにしたスライスパラメータが重要になる。XFEL 線形加速器では、電子バンチにエネルギー変調を与えバンチ圧縮を行うため、磁気レンズや四極電磁石の収束力のエネルギー収差（レンズの色収差と等価）が無視できない。エネルギー収差があると、横方向のビームサイズがバンチ内で変化するため、投影パラメータとスライスパラメータが一致しなくなる。また CSR などにより、バンチ内スライスの重心がずれる（バンチがねじれる）こともある。これらの場合、電子バンチ内でレーザー発振しているスライスのパラメータを

最適化しなければならない。しかしながらスライスパラメータの直接測定は難しく、レーザー出力が最大になるようにビームエンベロップやビーム軌道を微調整しているのが現状である。

5.4. まとめ

SACLA は 2011 年 2 月のビームコミッショニング以降、約 4 ヶ月でレーザー発振を達成し、2012 年 3 月よりユーザー供用を開始するなど、順調に施設は稼働している。また各機器の安定化や調整の効率化によって、レーザー出力の増強やポインティングスタビリティなどの改善が進み、レーザー供給率もユーザータイム枠に対し 90 % 以上を達成している。しかし一方で 5.3 節で述べたように、ビームエンベロップなど線形加速器の電子ビームのパラメータを完全に制御しきれている状態にあるとはまだ言えない。モニターの開発を含め 2013 年現在、電子ビームの精密制御は XFEL 線形加速器の課題として未だ残っている。

参考文献

- [1] E. Courant and H. Snyder, “Theory of the Alternating-Gradient Synchrotron”, *Annals of Physics* 3, 1 (1958).
- [2] 例えば、鎌田進, “加速器の原理と設計”, 高エネルギー加速器セミナーOHOテキスト, 1985.
- [3] T. Hara, K. Togawa and H. Tanaka, “Transverse envelope analysis for accelerating relativistic electron beams in a linear accelerator as a photon source”, *Nucl. Instrum. Methods A* 624, 65 (2010).
- [4] D.R. Douglas, J. Kewisch and R.C. York, “Betatron function parameterization of beam optics including acceleration”, in *Proc. of Linac Conference 1988*, 328 (1988).
- [5] R. Helm and R. Miller, “Particle dynamics”, in *Linear Accelerators* ch. 1.2, P.M. Lapostolle and A.L. Steptier (Eds.), North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1970.
- [6] J.B. Rosenzweig and L. Serafini, “Transverse particle motion in radio-frequency linear accelerator”, *Phys. Rev. E* 49, 1599 (1994).
- [7] L. Serafini and M. Ferrario, “Velocity Bunching in Photo-Injectors”, *AIP Conf. Proc.* 581, 87 (2001).
- [8] K. Togawa, T. Hara and H. Tanaka, “Electron-bunch compression using a dynamical nonlinearity correction for a compact x-ray free-electron laser”, *Phys. Rev. ST Accel. Beams* 12, 080706 (2009).
- [9] 田中均他, “X 線自由電子レーザー, SACLA のコミッショニングと実現された光源性能”, *日本加速器学会誌 加速器* 9, 60 (2012).
- [10] T. Ishikawa et al., “A compact X-ray free-electron laser emitting in the sub-ångström region”, *Nature Photonics* 6, 540 (2012).
- [11] D.X. Wang, G.A. Krafft and C.K. Sinclair, “Measurement of femtosecond electron bunches using a rf zero-phasing method”, *Phys. Rev. E* 57, 2283 (1998).