

加速器のための マイクロ波入門

阿部 哲郎

高エネルギー加速器研究機構
加速器研究施設

第3版

2022年3月20日

目次		10.3 GdfidL	27
第I部	1	11 ワークフロー	27
1 はじめに	1	11.1 ソリッドの作成	28
2 振動問題と複素数表示	1	11.2 ソルバーの選択・実行	28
3 平面波と群速度	2	11.3 ポストプロセス	29
4 マクスウェル方程式	3	12 実際の計算例	29
4.1 真空中のマイクロ波	3	12.1 周波数領域計算の例	29
4.2 導体中のマイクロ波	4	12.2 時間領域計算の例	30
4.3 損失のある絶縁体中のマイクロ波	6	12.3 固有モード計算の例	31
5 伝送線路	7	13 最後に	31
5.1 同軸線	7	14 お願い	33
5.2 導波管	10		
6 空洞共振器	16		
6.1 固有モード	17		
6.2 伝送線路との結合	20		
6.3 空洞電圧	23		
6.4 シャントインピーダンス	24		
第II部	25		
7 はじめに	25		
8 計算方法の種類	25		
8.1 有限要素法	26		
8.2 境界要素法	26		
8.3 有限差分法	26		
8.4 有限積分法	26		
9 計算領域の種類	26		
9.1 周波数領域	26		
9.2 時間領域	26		
9.3 固有モード解析	27		
10 ソフトウェアの例	27		
10.1 HFSS	27		
10.2 CST STUDIO SUITE	27		

第I部

マイクロ波理論

1 はじめに

マイクロ波は、電子レンジや携帯電話等で使われており、現代人の生活にとって必要不可欠な存在である。物理的には、マイクロ波は電磁波の一種で、周波数（または、波長）が、およそ 300 MHz（波長 1 m）くらいから 300 GHz（波長 1 mm）くらいの間の電磁波のことを言う（厳密な定義はないようである）。マイクロ波を使った荷電粒子の加速は、加速器として最も一般的な方法である。その加速装置（高周波加速空洞）の大きさは、大雑把に言ってその波長くらいのサイズとなる。つまり、300 MHz を使えば 1 m 程度、300 GHz を使えば 1 mm 程度のサイズである。これくらいのサイズであれば、製造上、大きな困難はない。逆に言えば、加速装置 1 台で数十 m もの大きさがあれば巨大過ぎて製作困難である。また、0.1 mm より小さい加速空洞の製作は野心的過ぎる。図 1 に、実際に製造された 509 MHz と 200 GHz の加速構造の例を示す。加速構造の周波数は、加速器の目的、その時代の技術、既存の加速器で使われている周波数等により決まる。マイクロ波はまた、加速器のビーム診断やビーム位置計測にも使われる。いずれも、基礎となるマイクロ波理論には共通点が多い。

本書では、下記を使用・仮定する：

- 国際単位系
- 虚数単位を i で表記*1
- 複素量は太字で表示
- ベクトル量は上部に矢印を付けて表示
- 任意の複素ベクトルを \vec{F} で表わす
- フーリエ変換には下線を付けて表示
- 時間を t で表示
- 媒質は等方的とし、誘電率や透磁率はテンソルにはならず、スカラー量として扱う

本書の内容は、マイクロ波の基礎、及び、加速器でよく使う知識に限っている。また、著者の専門や興

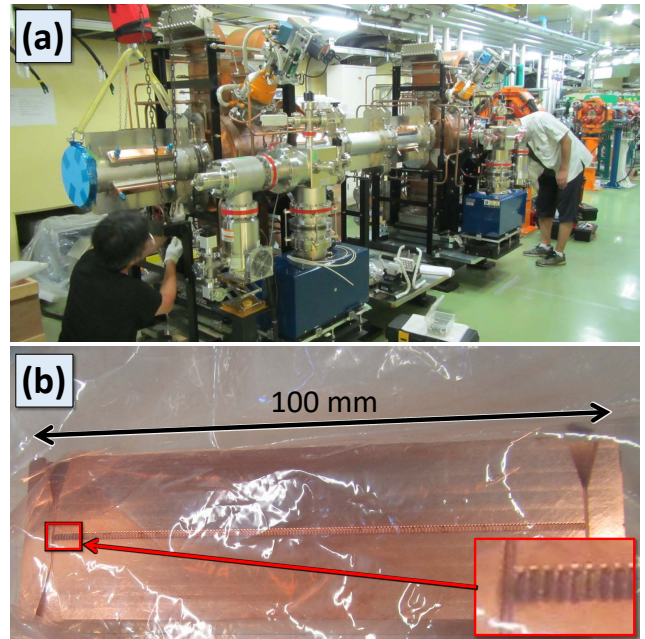


図 1 実際の加速構造の例。(a) SuperKEKB 陽電子ダンピングリング加速器用の 509 MHz 常伝導高周波加速空洞。(b) SLAC でビーム試験を行った 200 GHz 常伝導加速構造（参考文献 [1]）。

味の都合で偏った内容になっていると思われる。マイクロ波理論を網羅しているものではないので、その点をご了承いただきたい。

2 振動問題と複素数表示

マイクロ波は（その名の通り）波（振動）である。そこで、簡単のため、まず 1 次元の振動問題を考える：

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (1)$$

これは、質量 m の質点が、1 次元座標 x 上でバネ定数 k による単振動をする運動方程式である。これに、速度 dx/dt に比例する減衰力（比例定数を α とする）、及び、角振動数 ω で振動する外力があるとすると、運動方程式は、

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \alpha \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t \quad (2)$$

となる。この方程式は、2 階の定数係数非同次線形常微分方程式であり、ここでは、以下のようにして解いてみる。まず、上記外力の位相を $\omega t \rightarrow \omega t + \pi/2$ として 90° ずらした $-F_0 \sin(\omega t)$ に対する 1 次元座標

*1 工学系では虚数単位を j と表記するが、形式的に $i = -j$ の関係にある。

y 上の運動方程式：

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky - \alpha \frac{dy}{dt} - F_0 \sin \omega t \quad (3)$$

を別途考え、複素数 $z = x + iy$ に対する運動方程式：

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -kz - \alpha \frac{dz}{dt} + F_0 e^{-i\omega t} \quad (4)$$

を解くことを考える。ここで、 z と i 以外は実数であり、オイラーの公式：

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (5)$$

を使った。式 (4) の解として、

$$z(t) = \mathbf{A} e^{-i\omega t} \quad (6)$$

を考える (\mathbf{A} は複素定数)。これは、式 (4) をフーリエ変換し、ある特定の周波数成分のみを考えることに相当する。式 (6) を式 (4) に代入すると、

$$-m\omega^2 z = -kz + i\alpha\omega z + F_0 e^{-i\omega t} \quad (7)$$

となり、微分が消えてすっきりした。これを \mathbf{A} について解くと、

$$\mathbf{A} = \frac{(k - m\omega^2) + i\alpha\omega}{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2\alpha^2} F_0 \quad (8)$$

を得る。そして、式 (8) を式 (6) に代入すると、複素解 $z(t)$ は、

$$z(t) = \frac{F_0}{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2\alpha^2} \left[(k - m\omega^2) \cos \omega t + \omega\alpha \sin \omega t + i \left\{ \omega\alpha \cos \omega t - (k - m\omega^2) \sin \omega t \right\} \right] \quad (9)$$

となる。物理解は、式 (9) の実数部をとって、

$$x(t) = \Re\{z(t)\} \quad (10)$$

$$= \frac{F_0}{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2\alpha^2} \left[(k - m\omega^2) \cos \omega t + \omega\alpha \sin \omega t \right] \quad (11)$$

である。このように、振動問題は複素数表示にすると、比較的簡単な代数計算で解けることが多い*2。ま

*2 但し、通常の電磁気理論のような線形理論にしか適用出来ない。

た、複素数の足し算は複素ベクトルの和、かけ算は振幅の積と偏角の和で表せるので、物理的描像も描きやすい。このような理由から、電場や磁場も複素数で表すことがしばしばある。本書でも、電場と磁場は複素数で表す。

尚、式 (9) の虚数解 $y(t)$ は、

$$y(t) = \Im\{z(t)\} \quad (12)$$

$$= \frac{F_0}{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2\alpha^2} \left[\left\{ \omega\alpha \cos \omega t - (k - m\omega^2) \sin \omega t \right\} \right] \quad (13)$$

であり、式 (11) の実数解と比べて位相が 90° ずれているだけである。従って、虚数解を物理解としても問題ない。定義の問題である。本書では、特記なき場合は、実数部を物理解とする。

3 平面波と群速度

平面波とは、空間座標 \vec{x} における波の振幅を A として、

$$\phi(\vec{x}) = A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (14)$$

の形で表わされる波のことである。ここで、 ω は波の角周波数である。式 (14) の位相 (指数部) が一定の時：

$$\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t = \text{const.} \quad (15)$$

これは 3 次元空間内の平面を表わす。同位相面が平面になるので、式 (14) で表わされる波を平面波と言う*3。この同位相面は、速さ $\omega/|\vec{k}|$ でベクトル \vec{k} の方向に進む。また、 $|\vec{k}|$ は、距離 2π の間にある波の個数となっており、 \vec{k} を波数ベクトルと言う。実空間と波数空間の間の関係である 3 次元フーリエ変換の式：

$$\mathbf{F}(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3\vec{k} \mathbf{F}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (16)$$

($\mathbf{F}(\vec{x})$: 任意の (性質のよい) 複素関数)

からもわかるように、任意の波は平面波の重ね合わせで表現出来る。

*3 平面波の他、同位相面が球面になる波があり、それを球面波という。

次に、式 (16) において、積分する波数の領域が $\vec{k} = \vec{k}_0$ の周りのごく小さい領域 Δk のみである場合を考える。平面波では、角周波数 ω は波数に比例 ($\omega \propto |\vec{k}|$) するが、ここでは、 $\omega(\vec{k})$ として任意の依存性とする。これは、分散性媒質や導波管内を伝わるマイクロ波を想定しており、その場合、 ω と $|\vec{k}|$ は線形関係にはならない。 $\omega = \omega(\vec{k})$ で表わされる関係を分散関係と言う（線形の場合は分散無し）。 \vec{k} を \vec{k}_0 の周りでテーラー展開して1次の項まで取ると、

$$\omega(\vec{k}) \approx \omega(\vec{k}_0) + \left. \frac{\partial \omega(\vec{k})}{\partial \vec{k}} \right|_{\vec{k}=\vec{k}_0} \cdot \Delta \vec{k} \quad (17)$$

$$\vec{k} = \vec{k}_0 + \Delta \vec{k} \quad (18)$$

である。これを、時間依存項 $e^{-i\omega(\vec{k})t}$ も含めて式 (16) に代入すると、

$$\mathbf{F}(\vec{x}) = e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{x} - \omega(\vec{k}_0)t)} \times \int_{\Delta k} d^3 \vec{k} \mathbf{F}(\vec{k}) e^{i\Delta \vec{k} \cdot \left(\vec{x} - \left. \frac{\partial \omega(\vec{k})}{\partial \vec{k}} \right|_{\vec{k}=\vec{k}_0} t \right)} \quad (19)$$

を得る。 $|\Delta \vec{k}| \ll |\vec{k}|$ と仮定したので、式 (19) の積分の中の波は、積分の外の波より（空間的に）ずっとゆっくり変化する。実際、式 (19) は、図2にあるような波束を表わしており、積分部分が波束の包絡線になる。従って、波束の進む速さ v_g はその包絡線の進む速さであり、式 (19) より、

$$\vec{v}_g = \frac{\partial \omega(\vec{k})}{\partial \vec{k}} \quad (20)$$

である。これを群速度と言う。また、式 (19) の積分の外にある波の進む速さ $v_p = \omega(\vec{k}_0)/|\vec{k}_0|$ を位相速度と言う。波束を構成する波は位相速度 v_p で進むが、波束自体は群速度 v_g で進む。分散性媒質や導波管内を伝わるマイクロ波の波束では、位相速度は光速を超えるが、群速度は光速以下である。つまり、位相速度は見かけの速さで*4、実際にエネルギーが伝わる速さは群速度となっており、因果律は破れない。これは、現実の波が完全な単色の平面波ではなく、必ず周波数に幅があり、波束となっている事実と矛盾しない。尚、 $\Delta \vec{k}$ が大きい場合は、式 (17) の近似は悪くなり、高次の項まで考慮しなければならない。この場合、群速度の概念は不正確になる。

*4 例えば、サッカー観戦における「ウェーブ」のようなもの。

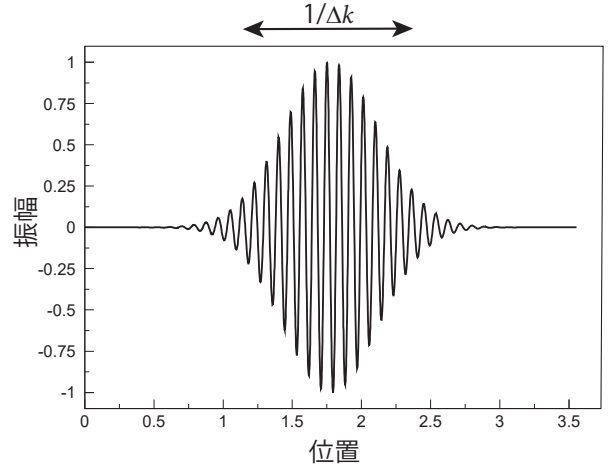


図2 波束の例。

いずれにせよ、どのような場合でも、群速度は式 (20) で定義される。つまり、群速度とは、波束の形で媒質中を伝搬する時の、波束自体の移動速度のことである。波動には、群速度とは別に、エネルギー伝搬速度がある。概念としては、群速度とエネルギー伝搬速度は別物であるが、通常、単色波（単一の周波数の波動）も含めて、「群速度=エネルギー伝搬速度」の関係が成り立つ（例えば、[2] 参照）。

4 マクスウェル方程式

マイクロ波は電磁波であり、電磁波はマクスウェル方程式で厳密に記述出来る。本節では、マクスウェル方程式を基に、マイクロ波理論の基本事項を解説する。

4.1 真空中のマイクロ波

真空中のマクスウェル方程式は、

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}, t) + \frac{\partial \vec{B}(\vec{x}, t)}{\partial t} = 0 \quad (21)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{x}, t) - \frac{\partial \vec{D}(\vec{x}, t)}{\partial t} = 0 \quad (22)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{x}, t) = 0 \quad (23)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}, t) = 0 \quad (24)$$

である。ここで、 \vec{E} と \vec{H} はそれぞれ電場と磁場、 \vec{D} と \vec{B} はそれぞれ電束密度と磁束密度である。 $\vec{\nabla}$ はナブラ記号で、具体的には、

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (25)$$

であり、これも数学的なベクトルである。ここで、真空の誘電率と透磁率をそれぞれ、

$$\epsilon_0 = 8.85418782 \times 10^{-12} \text{F/m} \quad (26)$$

$$\mu_0 = 1.256637 \times 10^{-6} \text{H/m} \quad (27)$$

と表わすと、

$$\vec{D}(\vec{x}, t) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{x}, t) \quad (28)$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \mu_0 \vec{H}(\vec{x}, t) \quad (29)$$

と書けることから、上記マクスウェル方程式 (21)~(24) は、 \vec{E} と \vec{H} の連立微分方程式：

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}, t) + \mu_0 \frac{\partial \vec{H}(\vec{x}, t)}{\partial t} = 0 \quad (30)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{x}, t) - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{x}, t)}{\partial t} = 0 \quad (31)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}, t) = 0 \quad (32)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H}(\vec{x}, t) = 0 \quad (33)$$

となる。式 (30) の回転 ($\vec{\nabla} \times$) を取り、それに式 (31) を代入して、ベクトル解析の公式：

$$\begin{aligned} & \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \\ &= \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F} \end{aligned} \quad (34)$$

と式 (32)、(33) を適用すると、

$$\left(\nabla^2 - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E}(\vec{x}, t) = 0 \quad (35)$$

を得る。同様の方法で、

$$\left(\nabla^2 - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{H}(\vec{x}, t) = 0 \quad (36)$$

も得る。これらは、速さ $c_0 = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ で進む波を表す波動方程式であり、 c_0 は真空中の光速 ($\approx 299,792,458 \text{ m/s}$) である。

ここで、電場を平面波 (式 (14)) で表わすと、

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{A}_E(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (37)$$

である。式 (37) を式 (32) に代入すると、

$$\vec{A}_E \cdot \vec{k} = 0 \quad (38)$$

を得る。従って、電場 \vec{E} の向き \vec{A}_E は、波動の進行方向 \vec{k} に対して直角である。これは、磁場 \vec{H} につい

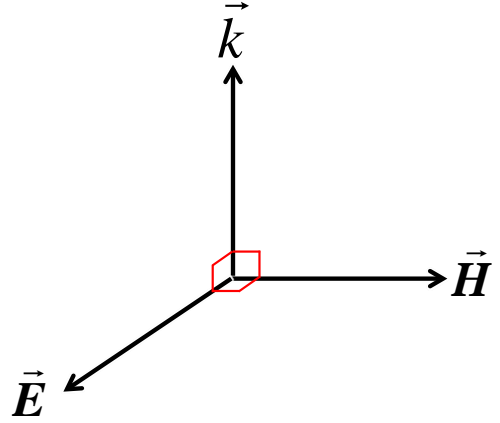


図3 電場 \vec{E} 、磁場 \vec{H} 、平面波の進行方向 \vec{k} の関係。

ても同様である。次に、式 (37) を式 (30) に代入し、磁場が、

$$\vec{H}(\vec{x}, t) = \vec{A}_H(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (39)$$

と書けることに注意すると、

$$\vec{H}_H \parallel \vec{k} \times \vec{E} \quad (40)$$

であることがわかる。つまり、真空中の任意の電磁場は、図3にある関係で \vec{k} の方向に速さ $c_0 = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ で進む横波の重ね合わせとなる。

尚、無損失で非分散性の媒質で満たされた領域の場合は、単に $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$ 、 $\mu_0 \rightarrow \mu$ と置き換えるだけである。ここで、 ϵ と μ は、それぞれ、その媒質の誘電率と透磁率である。

4.2 도체中のマイクロ波

マイクロ波が真空領域から도체に入るとどうなるかを調べる。도체とは、具体的には銅やステンレスのような金属である。도체内ではオームの法則に従って伝導電流が流れる。伝導電流の大きさは電場に比例する。その比例定数は電気伝導率 σ であり、オームの法則は、

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (41)$$

となる。ここで、 \vec{J} は電流密度ベクトルである*5。도체中のマクスウェル方程式は、この伝導電流が変位

*5 電流密度ベクトルを面積分すると、その積分領域を通る電流値になる。

電流 $\partial \vec{D} / \partial t$ に加わり、以下ようになる：

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}, t) + \mu \frac{\partial \vec{H}(\vec{x}, t)}{\partial t} = 0 \quad (42)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{x}, t) - \epsilon \frac{\partial \vec{E}(\vec{x}, t)}{\partial t} - \sigma \vec{E}(\vec{x}, t) = 0 \quad (43)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}, t) = 0 \quad (44)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H}(\vec{x}, t) = 0 \quad (45)$$

ここで、 ϵ と μ は、それぞれ、導体中の誘電率と透磁率である。以前と同様に、式 (42) の回転 ($\vec{\nabla} \times$) を取り、それに式 (43) を代入して、ベクトル解析の公式と式 (44) を適用すると、

$$\left(\vec{\nabla}^2 - \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E}(\vec{x}, t) = 0 \quad (46)$$

$$(47)$$

を得る。これは電信方程式であり、時間の 1 階微分の項 (左辺第二項) は波に減衰を与える。簡単のため、平面波が z 軸の正の方向へ進み、 $z = 0$ で導体に入るとしよう (図 4 参照)。電場は x 方向成分のみとして、

$$E_x(t) = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \quad (48)$$

とおく。ここで、 k は複素数である。これを式 (46) に代入すると、

$$k^2 = \epsilon \mu \omega^2 + i \mu \sigma \omega \quad (49)$$

を得る。通常の導体とマイクロ波では $\sigma / (\epsilon \omega) \gg 1$ が成り立つので、

$$k \approx \pm (1 + i) \sqrt{\frac{\mu \sigma \omega}{2}} \quad (50)$$

である。これを、式 (48) に代入して、

$$|E_x(t)| \approx |E_0| e^{-\sqrt{\frac{\mu \sigma \omega}{2}} z} \quad (51)$$

となる。よって、マイクロ波が導体に入ると、その振幅は指数関数的に減衰し、深さが

$$\delta_{\text{skin}} = \sqrt{\frac{2}{\mu \sigma \omega}} \quad (52)$$

のところで振幅が $1/e \approx 0.37$ 倍に減衰する。このような現象を表皮効果と言い、この δ_{skin} を表皮効果の深さ (Skin depth) と言う。図 5 に、マイクロ波領

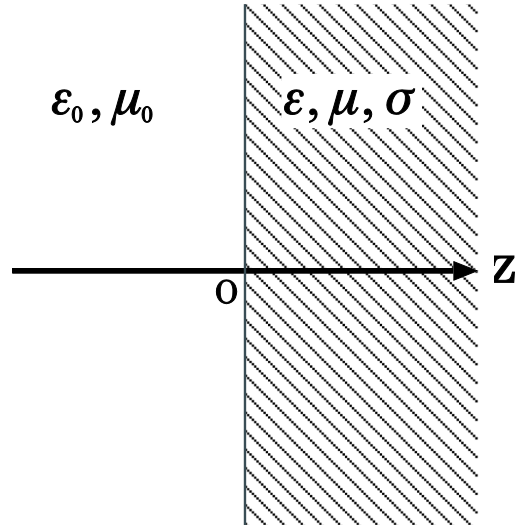


図 4 半無限導体。

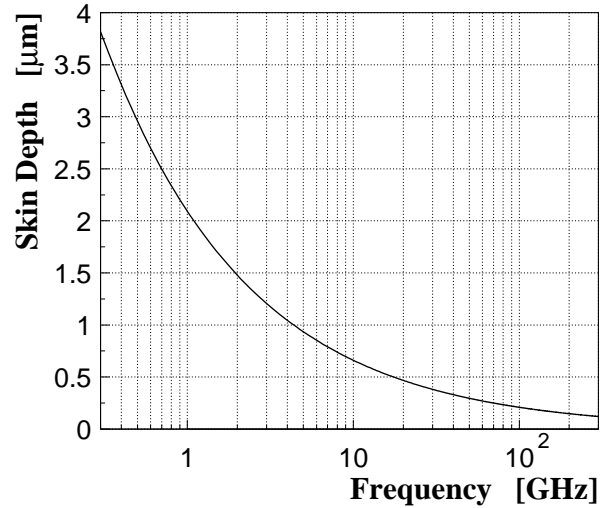


図 5 銅の表皮効果の深さ。

域における銅の表皮効果の深さを示す。従って、無酸素銅で作られる常伝導高周波加速空洞の電気的な性能は、空洞内表面の薄皮一枚 (数ミクロン以下) で決まっているのである。

以下では、導体は完全導体 ($\sigma = \infty$) として電磁場を求める。殆どの場合、導体に有限の電気伝導率があるとして求めた電磁場と、完全導体を仮定して求めた電磁場とで有意な差は無い。導体表面におけるマイクロ波の壁面損失電力を求める場合は、完全導体を仮定して求めた電磁場の導体表面における磁場から求める摂動論的方法を使うのが一般的である。

4.3 損失のある絶縁体中のマイクロ波

次に、損失のある等方的かつ一様な絶縁体で空間が満たされている場合を考える。これは、加速器では、マイクロ波吸収体のモデルとして重要である。絶縁体における損失は、誘電率や透磁率に複素成分を導入することで表現出来る。複素比誘電率、及び、複素比透磁率を、それぞれ、

$$\epsilon_r(\omega) = \epsilon'_r(\omega) + i\epsilon''_r(\omega) \quad (53)$$

$$\mu_r(\omega) = \mu'_r(\omega) + i\mu''_r(\omega) \quad (54)$$

と定義する。複素誘電率、及び、複素透磁率は、それぞれ、

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \quad (55)$$

$$\mu(\omega) = \mu_0 \mu_r(\omega) \quad (56)$$

である。 ϵ'_r と μ'_r は 1 以上（真空では 1）、 ϵ''_r と μ''_r はゼロ（無損失）または正值（損失あり）である。一般的には、誘電率と透磁率は周波数の関数であるので（分散性媒質）、式 (28) や (29) のような関係は真空中、または、非分散性媒質でしか成り立たない。なぜなら、式 (28) と (29) は時間領域における式だが、周波数に依存する誘電率や透磁率は周波数領域における概念だからである。そこで、真電荷も真電流も無い場合のマクスウェル方程式：

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}, t) + \frac{\partial \vec{B}(\vec{x}, t)}{\partial t} = 0 \quad (57)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{x}, t) - \frac{\partial \vec{D}(\vec{x}, t)}{\partial t} = 0 \quad (58)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{x}, t) = 0 \quad (59)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}, t) = 0 \quad (60)$$

における電磁場にフーリエ逆変換：

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \vec{E}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} \quad (61)$$

$$\vec{D}(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \vec{D}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} \quad (62)$$

$$\vec{H}(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \vec{H}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} \quad (63)$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \vec{B}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} \quad (64)$$

を代入すると、

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}, \omega) - i\omega \vec{B}(\vec{x}, \omega) = 0 \quad (65)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{x}, \omega) + i\omega \vec{D}(\vec{x}, \omega) = 0 \quad (66)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{x}, \omega) = 0 \quad (67)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}, \omega) = 0 \quad (68)$$

を得る。時間依存性はフーリエ変換の $e^{-i\omega t}$ が担い、マクスウェル方程式から時間微分が消えて少し簡単になった。ここで、ベクトル解析の公式：

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0 \quad (69)$$

より、上記の式 (67)、(68) は、式 (65)、(66) に含まれることがわかるので、式 (67)、(68) は不要となる。次に、式 (55) と (56) を使い、

$$\vec{D}(\vec{x}, \omega) = \epsilon(\omega) \vec{E}(\vec{x}, \omega) \quad (70)$$

$$\vec{B}(\vec{x}, \omega) = \mu(\omega) \vec{H}(\vec{x}, \omega) \quad (71)$$

と表わす。この式からもわかるように、複素誘電率・複素透磁率は、印加場 (\vec{E} 、 \vec{H}) と誘導場 (\vec{D} 、 \vec{B}) の比であり、電磁場（電場、磁場）と媒質の相互作用を表わす（媒質の電磁場に対する応答を含む）。式 (70) と (71) をマクスウェル方程式 (65)、(66) に代入すると、

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}, \omega) - i\omega \mu(\omega) \vec{H}(\vec{x}, \omega) = 0 \quad (72)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{x}, \omega) + i\omega \epsilon(\omega) \vec{E}(\vec{x}, \omega) = 0 \quad (73)$$

となる。再び、式 (72)、(73) の回転 ($\vec{\nabla} \times$) を取ると、電場と磁場それぞれが満たすべき以下のような方程式：

$$\left(\vec{\nabla}^2 + \mathbf{k}(\omega)^2 \right) \vec{E}(\vec{x}, \omega) = 0 \quad (74)$$

$$\left(\vec{\nabla}^2 + \mathbf{k}(\omega)^2 \right) \vec{H}(\vec{x}, \omega) = 0 \quad (75)$$

が得られる。ここで、 \mathbf{k} は、

$$\mathbf{k}(\omega) = \pm \omega \sqrt{\epsilon(\omega) \mu(\omega)} \quad (76)$$

$$= \pm \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\epsilon_r(\omega) \mu_r(\omega)} \quad (77)$$

$$= \pm \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\epsilon'_r \mu'_r - \epsilon''_r \mu''_r + i(\epsilon'_r \mu''_r + \epsilon''_r \mu'_r)} \quad (78)$$

であり、媒質の誘電率と透磁率から決まる複素量である。式 (74)、(75) は、膜や音波等の振動問題でもよく出てくるヘルムホルツ方程式である。結局、周波

数領域でマクスウェル方程式を解くことは、式 (74)、(75) の固有方程式を与えられた境界条件で解くことに帰着する。ここで、固有値は固有モード周波数に対応する。

誘電率や透磁率の虚部の効果を見てみよう。簡単のため、電場は x 成分のみ持ち ($\vec{E}(\vec{x}, \omega) = (E_x(\vec{x}, \omega), 0, 0)$)、 z 軸の正の方向に進んでいる平面波を考えると、式 (74) は、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k(\omega)^2 \right) E_x(\vec{x}, \omega) = 0 \quad (79)$$

となる。角周波数 ω の時間依存性も含めて、この解は、

$$\begin{aligned} E_x(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} &\propto e^{i(\mathbf{k}(\omega)z - \omega t)} \quad (80) \\ &= e^{i\Re\{\mathbf{k}(\omega)\}z - \Im\{\mathbf{k}(\omega)\}z} \quad (81) \end{aligned}$$

である。複素誘電率・透磁率の実部と虚部はゼロまたは正值で定義したので、この平面波が z 軸の正の方向に進むことより、式 (76) 右辺で正の符号が選ばれる。この時、 $\Im\{\mathbf{k}\} > 0$ であり、 $e^{-\Im\{\mathbf{k}(\omega)\}z}$ は媒質との相互作用によるマイクロ波の減衰を表わす。つまり、 $1/\Im\{\mathbf{k}\}$ は減衰長である（それだけ進むと振幅が $1/e \approx 0.37$ 倍に減少）。また、この平面波の進む速度 c は、

$$c = \frac{\omega}{\Re\{\mathbf{k}(\omega)\}} \quad (82)$$

$$= \frac{c_0}{\Re\left(\sqrt{\epsilon_r(\omega)\mu_r(\omega)}\right)} \quad (83)$$

である。これは、複素誘電率・透磁率の虚部も、絶縁体内における電磁波の伝搬速度に関係することを示している。もっと簡単な場合として、非磁性 ($\mu_r' = 1, \mu_r'' = 0$) の誘電体 ($\epsilon_r' > 1, \epsilon_r'' > 0$) を考える。これは、マイクロ波吸収体としてよく使われる水や炭化ケイ素セラミックス等のモデルである。この時、

$$\mathbf{k}(\omega) = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\epsilon_r'(\omega) + i\epsilon_r''(\omega)} \quad (84)$$

$$= \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\frac{\epsilon_r'(\omega)}{\cos \delta_\epsilon}} e^{i\frac{\delta_\epsilon(\omega)}{2}} \quad (85)$$

となる。ここで、 $\delta_\epsilon (\in [0, \pi/2))$ は、図 6、または、

$$\tan \delta_\epsilon = \frac{\epsilon_r''}{\epsilon_r'} \quad (86)$$

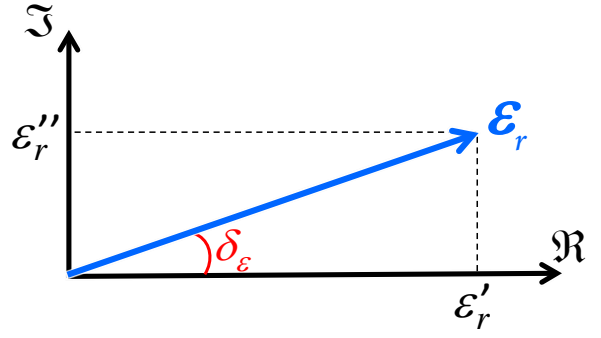


図 6 複素比誘電率 ϵ_r と誘電正接 δ_ϵ 。

で定義される量で、誘電正接と言う（実際は、「ロス・タンジェント」または「タンデルタ」と言うことが多い）。 $\delta_\epsilon = 0$ は無損失で、誘電損失が大きい程 δ_ϵ は大きくなる。 δ_ϵ を使って減衰長を表わすと、

$$\frac{1}{\Im\{\mathbf{k}(\omega)\}} = \frac{\lambda_0}{2\pi\sqrt{\epsilon_r'(\omega)}} \sqrt{\frac{2\cos\delta_\epsilon(\omega)}{1 - \cos\delta_\epsilon(\omega)}} \quad (87)$$

である。ここで、 $\lambda_0 = 2\pi c_0/\omega$ はこの周波数における真空中の波長である。上式から、誘電正接が大きい程、減衰長は短くなり、単位長さあたりの誘電損失が大きくなることがわかる。また、周波数が高くなる（波長が短くなる）場合も、単位長さあたりの誘電損失は大きくなる。誘電体中の光速は、式 (82)、(85) より、

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r'(\omega)}} \sqrt{\frac{2\cos\delta_\epsilon(\omega)}{1 + \cos\delta_\epsilon(\omega)}} \quad (88)$$

となり、複素比誘電率の実部 (ϵ_r') が同じでも、誘電正接が大きい程、誘電体中の光速は遅くなる。

5 伝送線路

加速器に限らず、マイクロ波を使ったどのようなシステムでも、ある場所で発生させたマイクロ波を別の場所に送る必要がある。マイクロ波の場合は、金属で境界条件を与えた線路で伝送することが可能である。本節では、内部が真空の場合の伝送線路を伝わるマイクロ波について考える。

5.1 同軸線

比較的小さい電力のマイクロ波伝送によく用いるのが、同軸線である。同軸線は外導体と内導体から

成り、その間を図7に示す TEM モード (Transverse ElectroMagnetic mode) の形でマイクロ波を伝送する。

外導体と内導体が完全導体 (抵抗ゼロ) の場合、同軸線の TEM モードは完全に横波となる。この場合、横方向電磁場は保存力となることを示そう。まず、 $\vec{\nabla}$ と電磁場を進行方向 (z 軸) と横方向に分解し、角周波数 ω の単色波 (または、フーリエ変換) を考えると、

$$\vec{\nabla} = \vec{\nabla}_t + \vec{\nabla}_z \quad (89)$$

$$\vec{\nabla}_z = \left(0, 0, \frac{\partial}{\partial z}\right) \quad (90)$$

$$\vec{\underline{E}} = \vec{\underline{E}}_t + \vec{\underline{E}}_z \quad (91)$$

$$\vec{\underline{E}}_z = (0, 0, \underline{E}_z) \quad (92)$$

$$\vec{\underline{H}} = \vec{\underline{H}}_t + \vec{\underline{H}}_z \quad (93)$$

$$\vec{\underline{H}}_z = (0, 0, \underline{H}_z) \quad (94)$$

となる。これらを、式 (72)、(73) に代入してまとめると、

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{\underline{E}}_t(\vec{x}, \omega) - i\omega\mu_0\vec{\underline{H}}_z(\vec{x}, \omega) = 0 \quad (95)$$

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{\underline{E}}_z(\vec{x}, \omega) + \vec{\nabla}_z \times \vec{\underline{E}}_t(\vec{x}, \omega) - i\omega\mu_0\vec{\underline{H}}_t(\vec{x}, \omega) = 0 \quad (96)$$

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{\underline{H}}_t(\vec{x}, \omega) + i\omega\epsilon_0\vec{\underline{E}}_z(\vec{x}, \omega) = 0 \quad (97)$$

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{\underline{H}}_z(\vec{x}, \omega) + \vec{\nabla}_z \times \vec{\underline{H}}_t(\vec{x}, \omega) + i\omega\epsilon_0\vec{\underline{E}}_t(\vec{x}, \omega) = 0 \quad (98)$$

を得る。完全に横波の時、

$$\vec{\underline{E}}_z(\vec{x}, \omega) = \vec{\underline{H}}_z(\vec{x}, \omega) = 0 \quad (99)$$

なので、上式 (95)~(98) は、

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{\underline{E}}_t(\vec{x}, \omega) = 0 \quad (100)$$

$$\vec{\nabla}_z \times \vec{\underline{E}}_t(\vec{x}, \omega) - i\omega\mu_0\vec{\underline{H}}_t(\vec{x}, \omega) = 0 \quad (101)$$

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{\underline{H}}_t(\vec{x}, \omega) = 0 \quad (102)$$

$$\vec{\nabla}_z \times \vec{\underline{H}}_t(\vec{x}, \omega) + i\omega\epsilon_0\vec{\underline{E}}_t(\vec{x}, \omega) = 0 \quad (103)$$

となる。よって、式 (100)、(102) より、電場 ($\vec{\underline{E}}_t$) と磁場 ($\vec{\underline{H}}_t$) が (横方向に限って) 保存力であることがわかった。ここで、同軸線の対称性より、図8にある円筒座標系 (r, θ, z) を用い、

$$\vec{\underline{E}}_t = \vec{\underline{E}}_r + \vec{\underline{E}}_\theta \quad (104)$$

$$\vec{\underline{H}}_t = \vec{\underline{H}}_r + \vec{\underline{H}}_\theta \quad (105)$$

と分解する。 $\vec{\underline{E}}_t$ は保存力なので、外導体と内導体の間に電位差がある場合の静電場と同じであるとして、

$$\vec{\underline{E}}_\theta = 0 \quad (106)$$

$$\vec{\underline{E}}_r \propto \frac{1}{r} \quad (107)$$

とおける。また、磁場 $\vec{\underline{H}}_t$ は、内導体に定常電流が流れている場合と同じであるとして、

$$\vec{\underline{H}}_\theta \propto \frac{1}{r} \quad (108)$$

$$\vec{\underline{H}}_r = 0 \quad (109)$$

とおける。よって、式 (101) と (103) をお互いに代入すると、式 (104)~(109) より、

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_r}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 \underline{E}_r = 0 \quad (110)$$

$$\frac{\partial^2 \underline{H}_\theta}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 \underline{H}_\theta = 0 \quad (111)$$

を得る。式 (110)、(111) の一般解は $e^{i\frac{\omega}{c_0}z}$ と $e^{-i\frac{\omega}{c_0}z}$ の重ね合わせであるが、時間依存を $e^{-i\omega t}$ と定義し、TEM 波が z 軸の正の方向に進んでいるとすると $e^{-i\frac{\omega}{c_0}z}$ は消える。結局、TEM 波の解は、

$$\underline{E}_r(r, z, t) = aE_0 \frac{1}{r} e^{i\omega(\frac{z}{c_0} - t)} \quad (112)$$

$$\underline{H}_\theta(r, z, t) = a\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 \frac{1}{r} e^{i\omega(\frac{z}{c_0} - t)} \quad (113)$$

となる。ここで、 E_0 は、 $z = t = 0$ 、 $r = a$ における電場であり、磁場の係数は、式 (101)、または、式 (103) から決まる。電場と磁場の位相は同じであり、ともに光速で進むことがわかる。

伝送路線の特性インピーダンス Z_0 は、

$$Z_0 = \frac{V}{I} \quad (114)$$

で定義される。ここで、 V と I は、それぞれ、電圧と電流である。伝送路線の一般的性質として、特性インピーダンスの等しい異なる伝送路線で繋いだり、特性インピーダンスに等しいインピーダンスで伝送線路を終端すれば、信号の反射は起こらない。それでは、同軸線の特性インピーダンスを求めてみよう。内導体の外半径を a 、外導体の内半径を b とすると、

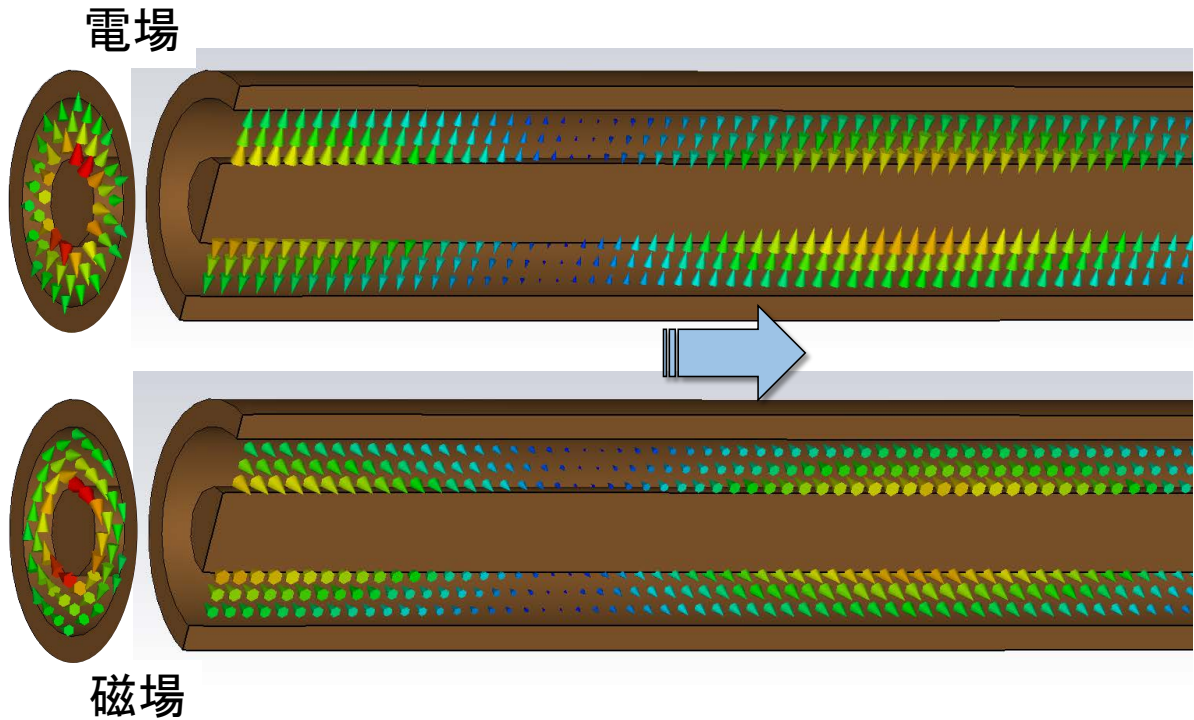


図7 WX77D 同軸線内を伝搬する 500 MHz の TEM モード。

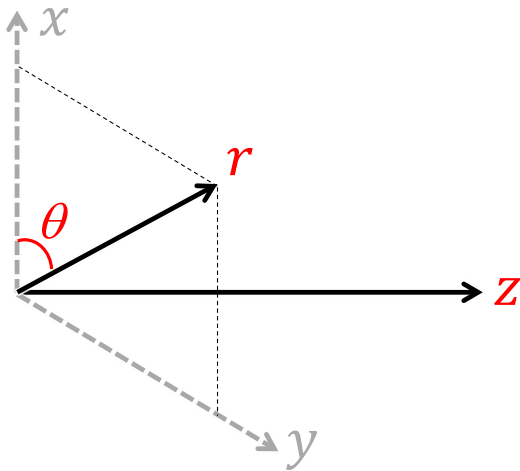


図8 円筒座標系 (r, θ, z) 。

V は電場 E_r を積分して、

$$V = \int_a^b dr E_r \quad (115)$$

$$= a E_0 e^{i\omega(\frac{z}{c_0} - t)} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (116)$$

となる。ここで、式 (112) を使った。次に、ストークスの定理より、 $r = r_0$ における円周上の H_θ に対する一周の線積分が、その円内部の領域を通るに電流

に等しいことより、

$$I = 2\pi r_0 H_\theta \quad (117)$$

$$= 2\pi a \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 e^{i\omega(\frac{z}{c_0} - t)} \quad (118)$$

と電流が求まる。よって、式 (116) と (118) より、同軸線の特徴インピーダンスは、

$$Z_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (119)$$

となる。損失のない場合、特性インピーダンスは実数である。また、同軸線の特徴インピーダンスは、大きさ(スケール)には依存せず、径の比 (b/a) で決まる。例えば、WX77D 同軸線の場合は、 $a = 16.7 \text{ mm}$ 、 $b = 38.5 \text{ mm}$ なので、式 (119)、(26)、(27) より、

$$Z_0 \approx 50 \Omega \quad (120)$$

である。同軸線の場合、歴史的な事情から、 50Ω と 75Ω の二通りの特性インピーダンスが世の中で使われている。 50Ω のシステムに 75Ω の同軸線を繋ぐと反射が起き、内部で定在波が発生してトラブルの元となることがあるので、注意してもらいたい。

尚、TEM 波は原理的にいかなる周波数でも光速で伝搬する。

5.2 導波管

金属のダクトの中にマイクロ波を通す伝送方式がある。そのダクトを導波管という。同軸線に比べて、導波管では単位長さあたりの電力損失が小さく、大電力マイクロ波の伝送によく用いられる。

マイクロ波の伝搬方向に z 軸の正の方向をとり、 z 軸方向と z 軸に直角な方向を分けて考えると便利である。ここで、電磁場の z 依存性を $e^{\gamma z}$ と仮定して、

$$\vec{E}(\vec{x}, \omega) = \vec{E}^{(t)}(x, y, \omega)e^{\gamma z} \quad (121)$$

$$\vec{H}(\vec{x}, \omega) = \vec{H}^{(t)}(x, y, \omega)e^{\gamma z} \quad (122)$$

とおく。 γ は複素数とし、それが純虚数の場合、 z 方向に伝搬する波動となる。上式 (121)、(122) を式 (74)、(75) に代入すると、電磁場の z 方向成分の方程式：

$$\left[\vec{\nabla}_t^2 + \gamma^2 + \left(\frac{\omega}{c_0} \right)^2 \right] \underline{E}_z^{(t)} = 0 \quad (123)$$

$$\left[\vec{\nabla}_t^2 + \gamma^2 + \left(\frac{\omega}{c_0} \right)^2 \right] \underline{H}_z^{(t)} = 0 \quad (124)$$

が得られる。また、式 (121)、(122) を式 (72)、(73) に代入すると、

$$-i\omega\epsilon_0 \underline{E}_x^{(t)} = \frac{\partial \underline{H}_z^{(t)}}{\partial y} - \gamma \underline{H}_y^{(t)} \quad (125)$$

$$-i\omega\epsilon_0 \underline{E}_y^{(t)} = \gamma \underline{H}_x^{(t)} - \frac{\partial \underline{H}_z^{(t)}}{\partial x} \quad (126)$$

$$i\omega\mu_0 \underline{H}_x^{(t)} = \frac{\partial \underline{E}_z^{(t)}}{\partial y} - \gamma \underline{E}_y^{(t)} \quad (127)$$

$$i\omega\mu_0 \underline{H}_y^{(t)} = \gamma \underline{E}_x^{(t)} - \frac{\partial \underline{E}_z^{(t)}}{\partial x} \quad (128)$$

が得られ、上の4式をまとめると、直角方向成分を求

める式：

$$[\omega^2\epsilon_0\mu_0 + \gamma^2] \underline{E}_x^{(t)} = i\omega\mu_0 \frac{\partial \underline{H}_z^{(t)}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \underline{E}_z^{(t)}}{\partial x} \quad (129)$$

$$[\omega^2\epsilon_0\mu_0 + \gamma^2] \underline{E}_y^{(t)} = -i\omega\mu_0 \frac{\partial \underline{H}_z^{(t)}}{\partial x} + \gamma \frac{\partial \underline{E}_z^{(t)}}{\partial y} \quad (130)$$

$$[\omega^2\epsilon_0\mu_0 + \gamma^2] \underline{H}_x^{(t)} = -i\omega\epsilon_0 \frac{\partial \underline{E}_z^{(t)}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \underline{H}_z^{(t)}}{\partial x} \quad (131)$$

$$[\omega^2\epsilon_0\mu_0 + \gamma^2] \underline{H}_y^{(t)} = i\omega\epsilon_0 \frac{\partial \underline{E}_z^{(t)}}{\partial x} + \gamma \frac{\partial \underline{H}_z^{(t)}}{\partial y} \quad (132)$$

を得る。従って、導波管モードを求めるには、与えられた境界条件のもとで式 (123)、(124) を解いて z 方向成分を計算し、その結果を式 (129)~(132) に代入して、直角方向成分を計算すればよい。

便宜上、導波管モードは2種類に分けて考える：

TM(Transverse Magnetic) モード

全ての位置で $H_z = 0$ 。この時の境界条件は、全ての導波管内表面上で $E_z = 0$ 。

TE(Transverse Electric) モード

全ての位置で $E_z = 0$ 。この時の境界条件は、全ての導波管内表面上で $\partial H_z / \partial n = 0$ 。ここで、 n による偏微分は、導波管内表面に垂直な方向への微分である。

5.2.1 矩形導波管

矩形導波管は、断面が長方形で、大電力マイクロ波の伝送に最も多く用いられている。矩形導波管内を伝搬するモードを求めるため、図9にあるデカルト座標系を考え、導波管断面の領域を $0 < x < a$ 且つ $0 < y < b$ とする。また、マイクロ波が伝搬する方向に z 軸をとる。

通常、矩形導波管でマイクロ波を伝送する場合は TE モード ($E_z = 0$) を使う。そこで、TE モードを求めてみよう。式 (124) より、

$$\left[\vec{\nabla}_t^2 + \gamma^2 + \left(\frac{\omega}{c_0} \right)^2 \right] \underline{H}_z^{(t)} = 0 \quad (133)$$

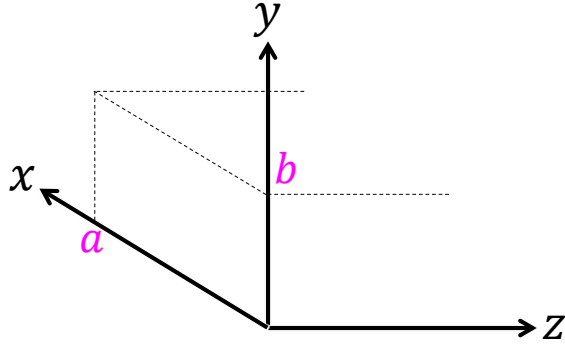


図9 デカルト座標系 (x, y, z) と矩形導波管の断面寸法 (a, b) 。

であるので、境界条件：

$$\left. \frac{\partial \underline{H}_z^{(t)}}{\partial x} \right|_{x=0,a} = 0 \quad (134)$$

$$\left. \frac{\partial \underline{H}_z^{(t)}}{\partial y} \right|_{y=0,b} = 0 \quad (135)$$

を課すと、 $\underline{H}_z^{(t)}$ の解は、

$$\underline{H}_z^{(t)}(x, y) = \underline{H}_0^{(t)} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (136)$$

となる。ここで、 $\underline{H}_0^{(t)}$ は、 $x = y = 0$ における値である。また、 m と n はゼロ以上の整数だが、 m と n の両方が同時にゼロとなる場合は除く。式 (136) を式 (133) に代入すると、

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2} \quad (137)$$

を得る。 γ が純虚数の場合に波が伝搬するので、伝搬モードの周波数には最低値：

$$\omega_c = \frac{\pi}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad (138)$$

が存在する。これを遮断周波数と言う。遮断周波数より低い波を入れたとしても、指数関数的に減衰する。式 (136) を式 (129)~(132) に代入して直角方向成分が得られる。よって、矩形導波管の TE モード

は、モードのインデックス (m, n) に対して、

$$\underline{E}_x^{(t)} = -\underline{H}_0^{(t)} \frac{i\omega}{\omega_c^2 \epsilon_0} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (139)$$

$$\underline{E}_y^{(t)} = \underline{H}_0^{(t)} \frac{i\omega}{\omega_c^2 \epsilon_0} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (140)$$

$$\underline{E}_z^{(t)} = 0 \quad (141)$$

$$\underline{H}_x^{(t)} = \underline{H}_0^{(t)} \frac{-ik}{\omega_c^2 \epsilon_0 \mu_0} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (142)$$

$$\underline{H}_y^{(t)} = \underline{H}_0^{(t)} \frac{-ik}{\omega_c^2 \epsilon_0 \mu_0} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (143)$$

$$\underline{H}_z^{(t)}(x, y) = \underline{H}_0^{(t)} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (144)$$

となる。ここで、

$$k = \frac{\gamma}{i} \quad (145)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (146)$$

$$= \frac{\omega}{c_0} \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}} \quad (147)$$

とおいた。すぐ後で述べるが、この式 (147) は矩形導波管内モードの分散関係を表わしている。

z 依存性と時間依存性は、

$$e^{\gamma z - i\omega t} = e^{ik(z - \frac{\omega}{k}t)} \quad (148)$$

となり、 $k = \gamma/i$ が波数になっていることがわかる。この波が z 方向に進む速さ v_p は、

$$v_p = \frac{\omega}{k} \quad (149)$$

$$= \frac{c_0}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}} \quad (150)$$

$$> c_0 \quad (151)$$

である。ここで、導波管内波長 (λ_{wg}) は、 $\lambda_{wg} = 2\pi/k$ となる。すぐにわかるように、 v_p は光速を超える。そして、 λ_{wg} は自由空間の波長よりも長く、波の周波数が遮断周波数に近づくとつれ発散する。実は、 v_p は「位相速度」と呼ばれている速さで、エネルギーを伝える速さではなく、見かけ上、電磁場のパ

ターンがその速さで移動しているように見えるだけである。事実、エネルギーの伝搬速度 v_{em} は、電磁場のエネルギー密度 U_{em} 、及び、エネルギー密度の流れを表わすポインティングベクトル \vec{P} を使って、

$$\Re \left\{ \vec{P} \right\} = (0, 0, U_{em} v_{em}) \quad (152)$$

となるので*6、電磁場の解から U_{em} 、 \vec{P} を計算すると（途中計算は省略するが）、

$$v_{em} = c_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2} \quad (153)$$

$$< c_0 \quad (154)$$

となることがわかる。これは、導波管内に波束を入れた時の群速度 v_g と同じになる。実際、分散関係の式 (147) と式 (20) より、

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}} \quad (155)$$

$$= c_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2} \quad (156)$$

$$< c_0 \quad (157)$$

となり、光速以上にはならない。いずれにせよ、因果律は破れない。

矩形導波管内を伝搬するマイクロ波の位相速度と群速度、及び、遮断周波数について、マイクロ波の伝送に最もよく使う TE₁₀ モード（図 10）を例に詳しく考えてみる。式 (139)~(148) に $m = 1$ 、 $n = 0$ を代入すると、TE₁₀ モードの電磁場として、

$$\mathbf{E}_x = 0 \quad (158)$$

$$\mathbf{E}_y = \underline{\mathbf{H}}_0^{(t)} i \frac{\omega a \mu_0}{\pi} \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) e^{ikz - i\omega t} \quad (159)$$

$$\mathbf{E}_z = 0 \quad (160)$$

$$\mathbf{H}_x = -\underline{\mathbf{H}}_0^{(t)} i \frac{ka}{\pi} \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) e^{ikz - i\omega t} \quad (161)$$

$$\mathbf{H}_y = 0 \quad (162)$$

$$\mathbf{H}_z = \underline{\mathbf{H}}_0^{(t)} \cos \left(\frac{\pi x}{a} \right) e^{ikz - i\omega t} \quad (163)$$

を得る。磁場は x - z 平面内にもみ成分を持ち、 \mathbf{H}_x と \mathbf{H}_z の位相は 90 度ずれているので、図 10(b) にあるように、渦を巻く。電場は y 方向にもみ成分を持ち、 $x = a/2$ （中間点）で最大となる（図 10(a) 参照）。ここで、 \mathbf{E}_y の分布を平面波の観点から考えてみる。 x - y 平面内だけを見れば、 \mathbf{E}_y は、 $x = 0$ と $x = a$ の

間を行き来する最低次の波であるが、それでは z 方向に進まない。 z 方向に進むには、図 11 にあるように、 x 軸に対して θ の角度をもって反射しながら進むことになる。ところが、どのような角度でもよいわけではなく、（重ね合わせの結果）式 (159) で表わされる波になることが必要である。そのための条件は、図 11 より、

$$\frac{\lambda_0}{2} = a \sin \theta \quad (164)$$

であることがわかる。この時、

$$v_p = c_0 / \cos \theta > c_0 \quad (165)$$

$$v_g = c_0 \cos \theta < c_0 \quad (166)$$

$$= c_0 \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \quad (167)$$

$$= c_0 \sqrt{1 - \left(\frac{c_0}{2af} \right)^2} \quad (168)$$

となることも、図 11 よりわかる。遮断周波数 f_c 、及び、遮断波長 λ_c は、 v_g が実数になる条件より、

$$f_c = \frac{c_0}{2a} \quad (169)$$

$$\lambda_c = 2a \quad (170)$$

である。マイクロ波の周波数が遮断周波数の時、平面波の半波長が導波管の幅 a と等しくなり、 $\theta = 0$ となって、 z 方向には進まなくなる。

図 10(c) には、導波管内表面上を流れる表面電流を示した。表面電流は、表面磁場によって起こり、向きは磁場ベクトルに垂直である。つまり、表面電流は、E 面では進行方向、H 面では直角方向に流れる。従って、導波管の接続部において、E 面では表面電流が（導波管の）接続面を渡るので、E 面（の特に中央）の連結ボルトに緩みの無いよう注意が必要である。

高次モードについて触れておこう。最低次の TE₁₀ モードのひとつ上に、図 12 に示す TE₂₀ モードがある。WR-1500 導波管の場合、 $a = 381.0$ mm なので、式 (138) より、遮断周波数は、

$$f_c(\text{TE}_{10}) = \frac{c_0}{2a} \approx 393.4 \text{ MHz} \quad (171)$$

$$f_c(\text{TE}_{20}) = \frac{c_0}{a} \approx 786.9 \text{ MHz} \quad (172)$$

である。従って、786.9 MHz 以上の周波数のマイクロ波を WR-1500 導波管に通した場合、TE₁₀ と

*6 電荷密度と電流密度ベクトルの関係と同様である。

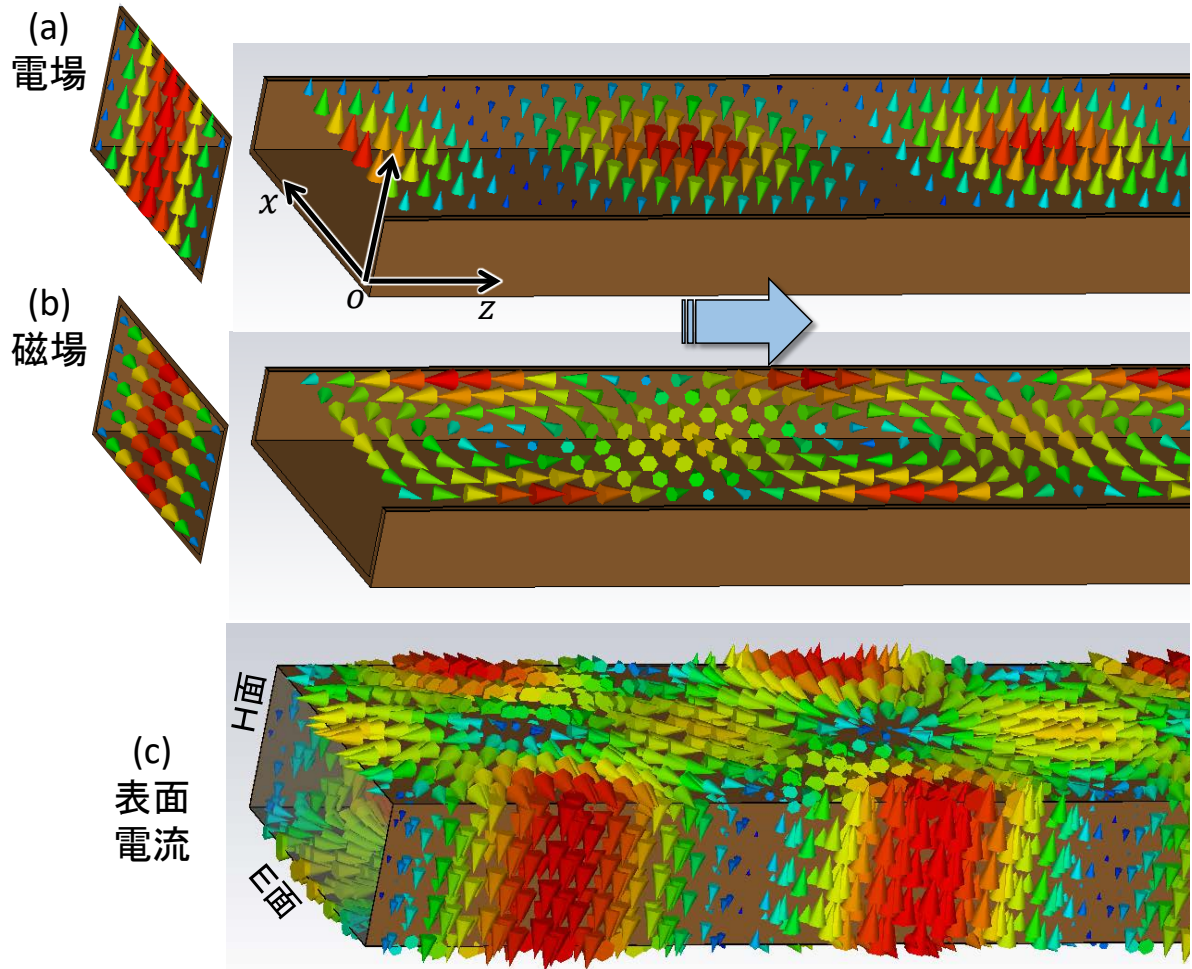


図 10 WR-1500 矩形導波管内を伝搬する 500 MHz の TE_{10} モード。(a)、(b)、(c) は同じ位相で表示している。(c) の電流は、導波管内表面上を流れる。

TE_{20} の 2 つのモードが混在してしまう可能性がある。異なる導波管内波長のモードが混在すると不都合なので、通常、より高い周波数のマイクロ波を伝送する場合は、より小さい導波管を使い、 a を小さくして遮断周波数を上げ、シングルモードになるようにする。同軸線についても、同様である。図 13 に、509 MHz と 11.4 GHz の RF システムで使用している矩形導波管の例を示す。

5.2.2 円形導波管

ここでは、荷電粒子の加速に関与しうる TM モード (全ての位置で $H_z = 0$ 、且つ、全ての導波管内表面上で $E_z = 0$) を求めてみる。円形導波管の内半径を R とする。同軸線と同様に、図 14 にある円筒座

標系を用いると、式 (123) は、

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \gamma^2 + \left(\frac{\omega}{c_0} \right)^2 \right] \underline{E}_z^{(t)} = 0 \quad (173)$$

となる。境界条件は、

$$\underline{E}_z^{(t)}(r = R) = 0 \quad (174)$$

である。ここで、変数分離形を仮定して、

$$\underline{E}_z^{(t)} = \mathbf{R}(r)\Theta(\theta) \quad (175)$$

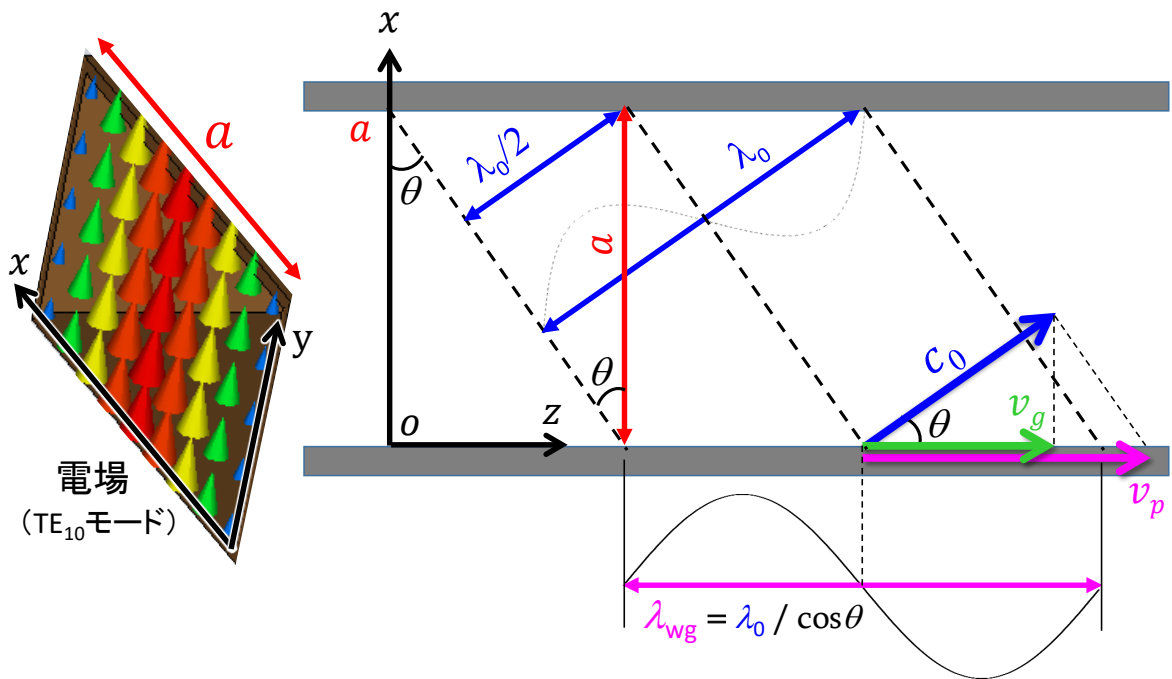


図 11 矩形導波管内 TE₁₀ モードにおける位相速度 v_p と群速度 v_g 。

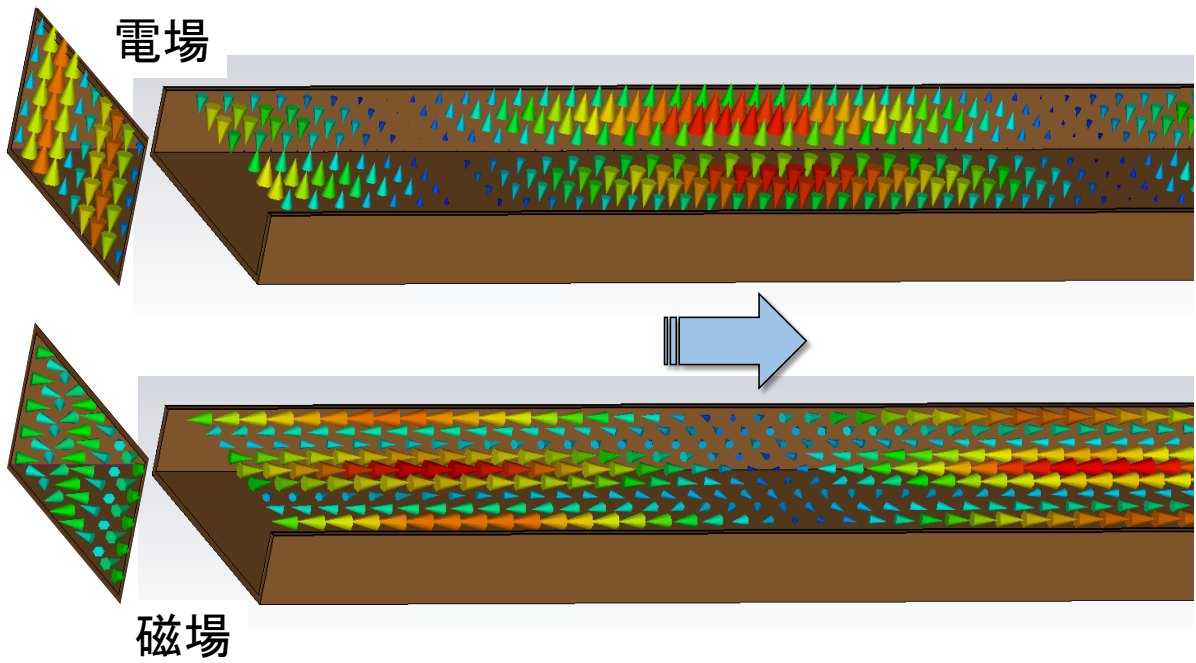


図 12 WR-1500 矩形導波管内を伝搬する 500 MHz の TE₂₀ モード。

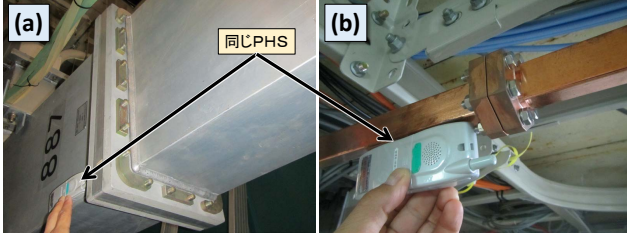


図13 (a) UHF帯 (509 MHz等) で用いる WR-1500 矩形導波管 (断面内寸法: 381.0×190.5 mm)。 (b) Xバンド (11.4 GHz等) で用いる WR-90 矩形導波管 (断面内寸法: 22.86×10.1 mm)。 (a) と (b) で、同じ PHS をスケールとして一緒に撮影。

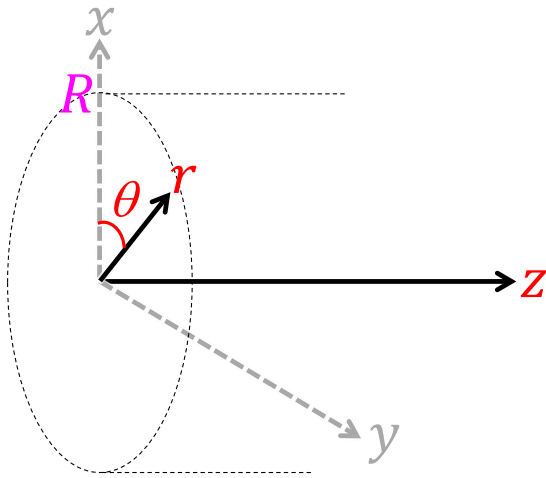


図14 円筒座標系 (r, θ, z) 。

とおき、これを式 (173) に代入して、両辺を $\mathbf{R}(r)\Theta(\theta)$ で割り、

$$\frac{1}{\mathbf{R}(r)} \left[r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r \frac{\partial}{\partial r} + r^2 \left\{ \gamma^2 + \left(\frac{\omega}{c_0} \right)^2 \right\} \right] \mathbf{R}(r) + \frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \Theta(\theta) = 0 \quad (176)$$

を得る。上式の左辺で r と θ が分離したので、任意の (r, θ) に対して上式が成り立つためには、 \mathbf{C}_r と

\mathbf{C}_θ を定数として、

$$\frac{1}{\mathbf{R}(r)} \left[r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r \frac{\partial}{\partial r} + r^2 \left\{ \gamma^2 + \left(\frac{\omega}{c_0} \right)^2 \right\} \right] \mathbf{R}(r) = \mathbf{C}_r \quad (177)$$

$$\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \Theta(\theta) = \mathbf{C}_\theta \quad (178)$$

$$\mathbf{C}_r + \mathbf{C}_\theta = 0 \quad (179)$$

でなければならない。式 (178) の一般解は $e^{i\sqrt{-\mathbf{C}_\theta}\theta}$ と $e^{-i\sqrt{-\mathbf{C}_\theta}\theta}$ の線形結合だが、周期境界条件 $\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta)$ より、 $\mathbf{C}_\theta = -m^2$ (m はゼロ以上の整数) でなければならない。また、 $\Theta(\pi/2)$ が実数となるように解の位相を定義すると、定数係数は省略して、

$$\Theta(\theta) = \cos m\theta \quad (180)$$

と定まる。従って、式 (177) は、

$$\left[r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r \frac{\partial}{\partial r} + r^2 \left\{ \gamma^2 + \left(\frac{\omega}{c_0} \right)^2 \right\} - m^2 \right] \mathbf{R}(r) = 0 \quad (181)$$

となる。これはベッセルの微分方程式なので、 $\mathbf{R}(r)$ は m 次のベッセル関数 J_m を使い、定数係数は省略して、

$$\mathbf{R}(r) = J_m(\alpha r) \quad (182)$$

$$\alpha^2 = \gamma^2 + \left(\frac{\omega}{c_0} \right)^2 \quad (183)$$

と書ける。 J_m の (小さい方から) n 番目の零点を j_{mn} と書くと (n は 1 以上の整数)、境界条件の式 (174) を満たすために、 α のとりうる値が

$$\alpha = \frac{j_{mn}}{R} \quad (184)$$

と制限される。よって、上式と式 (183) より、

$$\gamma^2 = \left(\frac{j_{mn}}{R} \right)^2 - \left(\frac{\omega}{c_0} \right)^2 \quad (185)$$

となる。 γ が純虚数の時に波が z 方向に伝搬するので、

$$\frac{\omega}{c_0} > \frac{j_{mn}}{R} \quad (186)$$

である。つまり、円形導波管における TM モードの遮断周波数は、

$$f_c = \frac{c_0}{2\pi} \frac{j_{mn}}{R} \quad (187)$$

となる。これ以上の周波数のマイクロ波のみが伝搬する。ここでも、矩形導波管と同様に、遮断周波数は導波管のサイズに反比例する。以上より、 z 方向成分の解は、

$$\underline{E}_z^{(t)} = \underline{E}_0^{(t)} J_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta \quad (188)$$

となる。これを式 (129)~(132) に代入すれば、直角方向成分が得られるのだが、 $\underline{H}_z^{(t)} = 0$ の時に式 (129)~(132) を円筒座標系に変換した式 (途中計算省略) :

$$\underline{E}_r^{(t)} = \frac{\gamma}{\alpha^2} \frac{\partial \underline{E}_z^{(t)}}{\partial r} \quad (189)$$

$$\underline{E}_\theta^{(t)} = \frac{\gamma}{\alpha^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \underline{E}_z^{(t)}}{\partial \theta} \quad (190)$$

$$\underline{H}_r^{(t)} = -\frac{i\omega\epsilon_0}{\alpha^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \underline{E}_z^{(t)}}{\partial \theta} \quad (191)$$

$$\underline{H}_\theta^{(t)} = \frac{i\omega\epsilon_0}{\alpha^2} \frac{\partial \underline{E}_z^{(t)}}{\partial r} \quad (192)$$

を使うと、TM モードの電磁場は、

$$\underline{E}_r^{(t)} = \underline{E}_0^{(t)} i \left(\frac{R}{j_{mn}} \right) k J'_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta \quad (193)$$

$$\underline{E}_\theta^{(t)} = -\underline{E}_0^{(t)} i \left(\frac{R}{j_{mn}} \right)^2 k \frac{m}{r} J_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \sin m\theta \quad (194)$$

$$\underline{E}_z^{(t)} = \underline{E}_0^{(t)} J_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta \quad (195)$$

$$\underline{H}_r^{(t)} = \underline{E}_0^{(t)} i\omega\epsilon_0 \left(\frac{R}{j_{mn}} \right)^2 \frac{m}{r} J_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \sin m\theta \quad (196)$$

$$\underline{H}_\theta^{(t)} = \underline{E}_0^{(t)} i\omega\epsilon_0 \left(\frac{R}{j_{mn}} \right) J'_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta \quad (197)$$

$$\underline{H}_z^{(t)} = 0 \quad (198)$$

と求まる。 z と時間の依存性は、すべての成分に共通で、 $e^{ikz-i\omega t}$ であり、

$$k = \frac{\gamma}{i} \quad (199)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\omega}{c_0} \right)^2 - \left(\frac{j_{mn}}{R} \right)^2} \quad (200)$$

である。

具体例として、 TM_{01} モードを考える。式 (193)~(198) に $m = 0$ 、 $n = 1$ を代入すると、

$$\underline{E}_r = \underline{E}_0^{(t)} i \left(\frac{R}{j_{01}} \right) k J'_0 \left(\frac{j_{01}}{R} r \right) e^{ikz-i\omega t} \quad (201)$$

$$\underline{E}_\theta = 0 \quad (202)$$

$$\underline{E}_z = \underline{E}_0^{(t)} J_0 \left(\frac{j_{01}}{R} r \right) e^{ikz-i\omega t} \quad (203)$$

$$\underline{H}_r = 0 \quad (204)$$

$$\underline{H}_\theta = \underline{E}_0^{(t)} i\omega\epsilon_0 \left(\frac{R}{j_{01}} \right) J'_0 \left(\frac{j_{01}}{R} r \right) e^{ikz-i\omega t} \quad (205)$$

$$\underline{H}_z = 0 \quad (206)$$

となる。0 次のベッセル関数の 1 番目の零点は既に知られており、 $j_{01} \approx 2.4048$ である。全ての成分で θ 依存性が消え、軸対称となった。 \underline{E}_z と \underline{E}_r で位相が 90° ずれているので、同じ位置で時間が経つ、または、ある時刻で z 座標に沿って移動すると、電場ベクトルは $r-z$ 平面内で回転する。磁場ベクトルは θ 成分のみを持つ。図 15 に TM_{01} モードの電磁場の例を示す。高エネルギーの電子 (速さはほぼ光速) をこの電場の波に乗せ、常に電子の周りに加速電場があるようにして連続加速が出来そうだが、電場の波の進む速さは位相速度で光速より速いので、単純な円形導波管では高エネルギー電子の連続加速は出来ない。線形加速器でよく使われているディスクロード型にするか、または、内部に誘電体の筒をはめ込んで、位相速度を光速 (ビームの速さ) に等しくすれば、円形導波管でも高エネルギー電子の連続加速が可能となる*7。

6 空洞共振器

空洞共振器とは、金属製の容器で、内部は空洞である。その空洞内に、その共振周波数に等しいマイクロ波を投入すると、空洞内に多くのマイクロ波エネルギーを貯めることが出来る。加速器における加速空洞では、沢山ため込んだマイクロ波による高い電界で荷電粒子を加速する。本節では、多くの加速空洞の基本形となっているピルボックス型空洞を例にとり、解説する。

*7 単純な構造で高勾配加速を実現出来る加速構造として「Dielectric-loaded accelerating structure」が研究されている [3]。

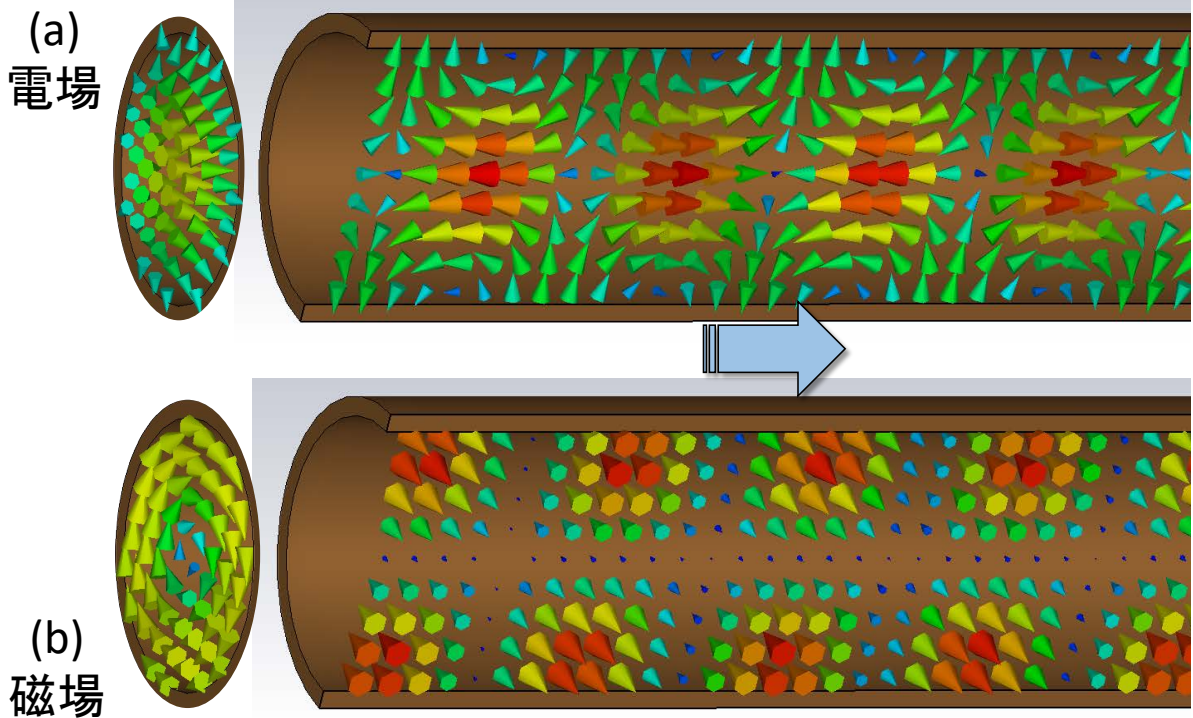


図15 内径 150 mm の円形導波管内を伝搬する 500 MHz の TM_{01} モード。(a) と (b) は同じ位相で表示している。

6.1 固有モード

ピルボックス型空洞とは、図 16 にあるような、円形導波管の一部を切り取った形状である。空洞内部は真空とし、その内半径を R 、長さを d とする。円形導波管モードとの違いは、 $z = 0$ 、及び、 $z = d$ において金属表面があるため、 $\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_\theta = 0$ という境界条件が課されることだけである。実際、 $+z$ 方向に進む円形導波管モードと $-z$ 方向に進む円形導波管モードの重ね合わせでピルボックス型空洞内の固有モードを求めることができる。

まずは、 TM モードを求める。 $+z$ 方向に進む円形導波管モードは、式 (193)~(198) より、

$$\mathbf{E}_r^{(+)} = \underline{\mathbf{E}}_0^{(+)} i \left(\frac{R}{j_{mn}} \right) k J'_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta e^{ikz - i\omega t} \quad (207)$$

$$\mathbf{E}_\theta^{(+)} = -\underline{\mathbf{E}}_0^{(+)} i \left(\frac{R}{j_{mn}} \right)^2 k \frac{m}{r} J_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \sin m\theta e^{ikz - i\omega t} \quad (208)$$

$$\mathbf{E}_z^{(+)} = \underline{\mathbf{E}}_0^{(+)} J_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta e^{ikz - i\omega t} \quad (209)$$

$$\mathbf{H}_r^{(+)} = \underline{\mathbf{E}}_0^{(+)} i\omega\epsilon_0 \left(\frac{R}{j_{mn}} \right)^2 \frac{m}{r} J_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \sin m\theta e^{ikz - i\omega t} \quad (210)$$

$$\mathbf{H}_\theta^{(+)} = \underline{\mathbf{E}}_0^{(+)} i\omega\epsilon_0 \left(\frac{R}{j_{mn}} \right) J'_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta e^{ikz - i\omega t} \quad (211)$$

$$\mathbf{H}_z^{(+)} = 0 \quad (212)$$

である。 $-z$ 方向に進む円形導波管モードは、 $+z$ 方向に進む上記モードにおいて $k \rightarrow -k$ と置き換える

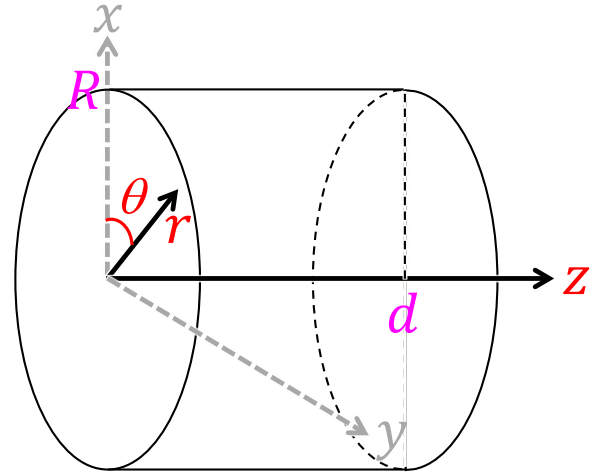


図 16 ピルボックスと円筒座標系。

だけで、

$$\mathbf{E}_r^{(-)} = -\underline{\mathbf{E}}_0^{(-)} i \left(\frac{R}{j_{mn}} \right) k J'_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta e^{-ikz - i\omega t} \quad (213)$$

$$\mathbf{E}_\theta^{(-)} = \underline{\mathbf{E}}_0^{(-)} i \left(\frac{R}{j_{mn}} \right)^2 k \frac{m}{r} J_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \sin m\theta e^{-ikz - i\omega t} \quad (214)$$

$$\mathbf{E}_z^{(-)} = \underline{\mathbf{E}}_0^{(-)} J_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta e^{-ikz - i\omega t} \quad (215)$$

$$\mathbf{H}_r^{(-)} = \underline{\mathbf{E}}_0^{(-)} i\omega\epsilon_0 \left(\frac{R}{j_{mn}} \right)^2 \frac{m}{r} J_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \sin m\theta e^{-ikz - i\omega t} \quad (216)$$

$$\mathbf{H}_\theta^{(-)} = \underline{\mathbf{E}}_0^{(-)} i\omega\epsilon_0 \left(\frac{R}{j_{mn}} \right) J'_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta e^{-ikz - i\omega t} \quad (217)$$

$$\mathbf{H}_z^{(-)} = 0 \quad (218)$$

となる。新たな境界条件は、

$$\mathbf{A}^{(+)} \mathbf{E}_r^{(+)}(z=0) + \mathbf{A}^{(-)} \mathbf{E}_r^{(-)}(z=0) = 0 \quad (219)$$

$$\mathbf{A}^{(+)} \mathbf{E}_r^{(+)}(z=d) + \mathbf{A}^{(-)} \mathbf{E}_r^{(-)}(z=d) = 0 \quad (220)$$

$$\mathbf{A}^{(+)} \mathbf{E}_\theta^{(+)}(z=0) + \mathbf{A}^{(-)} \mathbf{E}_\theta^{(-)}(z=0) = 0 \quad (221)$$

$$\mathbf{A}^{(+)} \mathbf{E}_\theta^{(+)}(z=d) + \mathbf{A}^{(-)} \mathbf{E}_\theta^{(-)}(z=d) = 0 \quad (222)$$

である。式 (219) と (221) より、

$$\mathbf{A}^{(+)} - \mathbf{A}^{(-)} = 0 \quad (223)$$

である。つまり、 $+z$ 方向に進む円形導波管モードと $-z$ 方向に進むモードの位相差は 180° である。これは、 $z=0$ における固定端反射に相当する。この結果と、式 (220)、(222) より、

$$e^{ikd} - e^{-ikd} = 2i \sin kd = 0 \quad (224)$$

が課される。これを満たすために、 p をゼロ以上の整数として、

$$k = \frac{p\pi}{d} \quad (225)$$

でなければならない。この式と式 (200) より、次式が得られ、モード周波数は整数の組 (m, n, p) によって決まる値に離散化される：

$$\omega = c_0 \sqrt{\left(\frac{j_{mn}}{R}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2} \quad (226)$$

$$= \omega_{mnp} \quad (227)$$

これは、 $z=d$ においても固定端反射するために周波数や導波管内波長が長さ d に応じて決まるということである。最後に、

$$\mathbf{A}^{(+)} = \mathbf{A}^{(-)} = \frac{1}{2} \quad (228)$$

と全体の係数を選ぶと、ピルボックス型空洞内の TM モードは、

$$\mathbf{E}_r = -\underline{\mathbf{E}}_0 \frac{R}{j_{mn}} k J'_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r\right) \cos m\theta \sin \frac{n\pi z}{d} e^{-i\omega t} \quad (229)$$

$$\mathbf{E}_\theta = \underline{\mathbf{E}}_0 \left(\frac{R}{j_{mn}}\right)^2 k \frac{m}{r} J_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r\right) \sin m\theta \sin \frac{n\pi z}{d} e^{-i\omega t} \quad (230)$$

$$\mathbf{E}_z = \underline{\mathbf{E}}_0 J_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r\right) \cos m\theta \cos \frac{n\pi z}{d} e^{-i\omega t} \quad (231)$$

$$\mathbf{H}_r = \underline{\mathbf{E}}_0^{(t)} i\omega\epsilon_0 \left(\frac{R}{j_{mn}}\right)^2 \frac{m}{r} J_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r\right) \sin m\theta \cos \frac{n\pi z}{d} e^{-i\omega t} \quad (232)$$

$$\mathbf{H}_\theta = \underline{\mathbf{E}}_0^{(t)} i\omega\epsilon_0 \frac{R}{j_{mn}} J'_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r\right) \cos m\theta \cos \frac{n\pi z}{d} e^{-i\omega t} \quad (233)$$

$$\mathbf{H}_z = 0 \quad (234)$$

となり、 $+z$ 方向に進む円形導波管モードと $-z$ 方向に進むモードの重ね合わせでピルボックス型空洞内の固有モードを求めることが出来た。

TM モードと同様の方法で、TE モード (全ての位置で $\mathbf{E}_z = 0$ 、且つ、全ての導波管内表面上で $\partial \mathbf{H}_z / \partial n = 0$) について解くと (途中計算省略)、

$$\mathbf{E}_r = -\underline{\mathbf{E}}_0^{(t)} \frac{i\omega\mu_0}{k^2} \frac{m}{r} J_m \left(\frac{j'_{mn}}{R} r\right) \sin m\theta \sin \frac{n\pi z}{d} e^{-i\omega t} \quad (235)$$

$$\mathbf{E}_\theta = -\underline{\mathbf{E}}_0^{(t)} \frac{i\omega\mu_0}{k^2} \frac{j'_{mn}}{R} J'_m \left(\frac{j'_{mn}}{R} r\right) \cos m\theta \sin \frac{n\pi z}{d} e^{-i\omega t} \quad (236)$$

$$\mathbf{E}_z = 0 \quad (237)$$

$$\mathbf{H}_r = \underline{\mathbf{E}}_0^{(t)} \frac{1}{k^2} \frac{p\pi}{d} \frac{j'_{mn}}{R} J'_m \left(\frac{j'_{mn}}{R} r\right) \cos m\theta \cos \frac{p\pi z}{d} e^{-i\omega t} \quad (238)$$

$$\mathbf{H}_\theta = -\underline{\mathbf{E}}_0^{(t)} \frac{1}{k^2} \frac{p\pi}{d} \frac{m}{r} J_m \left(\frac{j'_{mn}}{R} r\right) \sin m\theta \cos \frac{p\pi z}{d} e^{-i\omega t} \quad (239)$$

$$\mathbf{H}_z = \underline{\mathbf{E}}_0^{(t)} J_m \left(\frac{j'_{mn}}{R} r\right) \cos m\theta \sin \frac{p\pi z}{d} e^{-i\omega t} \quad (240)$$

となる。

TE_{mnp}、TM_{mnp} モードのインデックス (m, n, p) と固有モード電磁場の形との関係を見てみよう。 $2m$ は電磁場の z 軸まわり方向の節の個数であり、 $m=0$ を単極 (monopole)、 $m=1$ を双極 (dipole) と言う。 n は動径 (r) 方向の節の個数になっている (TE モードの $\mathbf{E}_\theta, \mathbf{H}_r$ 、TM モードの $\mathbf{E}_\theta, \mathbf{E}_z, \mathbf{H}_r$ に関してのみ)。 p は z 軸方向の腹の個数である。固有モードの例を図 17 に示す。ピルボックス型空洞内の任意の電磁場は、ここで求めた TM、TE モード解 (式 (229) ~ (234)、及び、(235) ~ (240)) の重ね合わせで表現出来る*8。

通常粒子加速に使われるのは (TM モードの中で) 最も低い固有周波数を持つ TM₀₁₀ モードである。具体的な解は、式 (229) ~ (234) より、

$$\mathbf{E}_r = 0 \quad (241)$$

$$\mathbf{E}_\theta = 0 \quad (242)$$

$$\mathbf{E}_z = \underline{\mathbf{E}}_0^{(t)} J_0 \left(\frac{j_{01}}{R} r\right) e^{-i\omega t} \quad (243)$$

$$\mathbf{H}_r = 0 \quad (244)$$

$$\mathbf{H}_\theta = \underline{\mathbf{E}}_0^{(t)} \omega\epsilon_0 \frac{R}{j_{01}} J'_0 \left(\frac{j_{01}}{R} r\right) e^{-i(\omega t - \frac{\pi}{2})} \quad (245)$$

$$\mathbf{H}_z = 0 \quad (246)$$

$$\omega = \frac{c_0 j_{01}}{R} \quad (247)$$

であり、 \mathbf{E}_z と \mathbf{H}_θ の 2 成分のみを持つ。電磁場は、軸対称 (θ 依存性なし) で、 z 方向に一定 (z 依存性なし) である。 $|\mathbf{E}_z|$ と $|\mathbf{H}_\theta|$ の動径方向の分布を図

*8 複雑な形状の空洞では、TM、TE モード以外のハイブリッドモードが存在する場合もある。

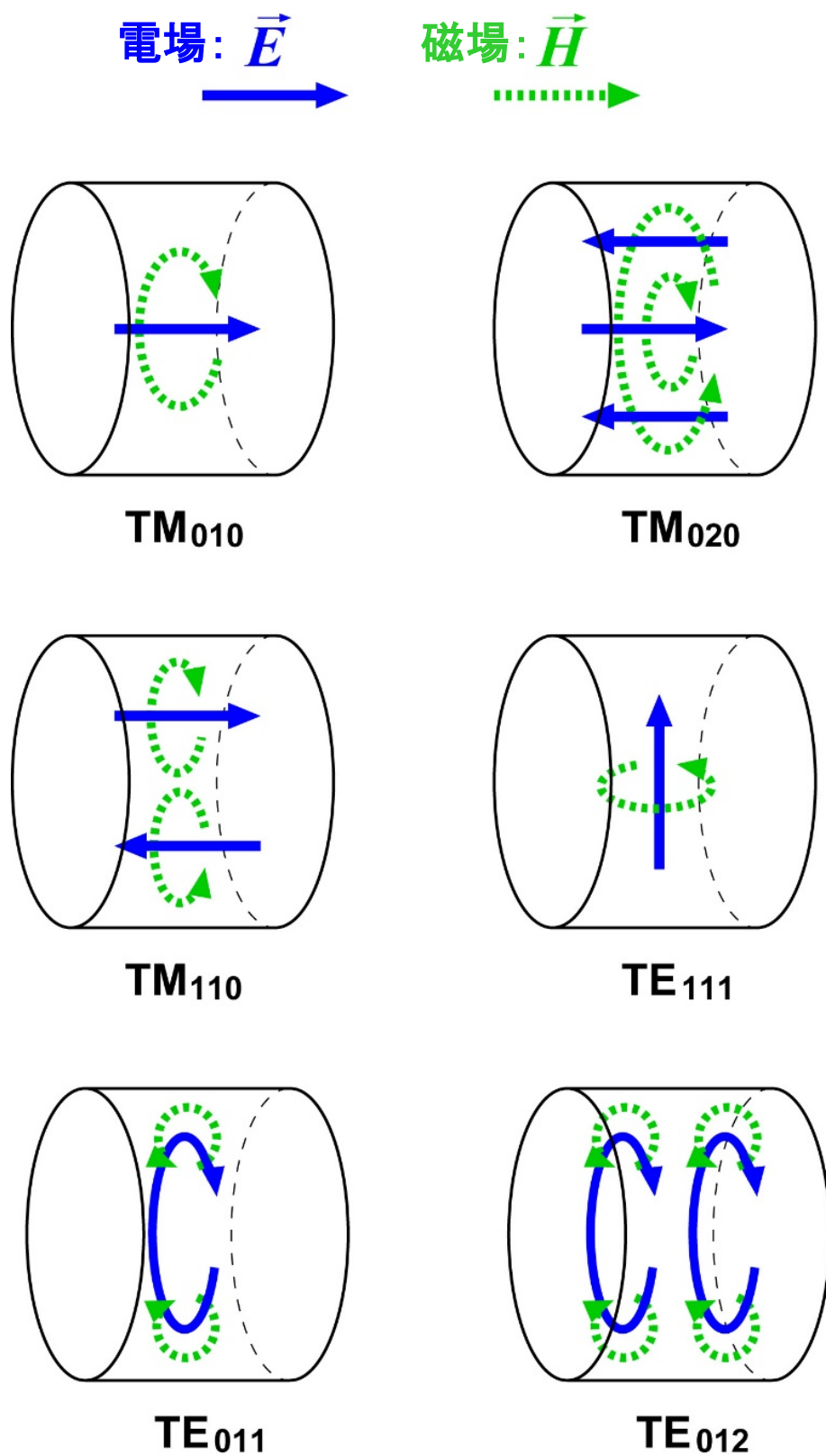


図 17 ピルボックス型空洞内の固有モードの例。

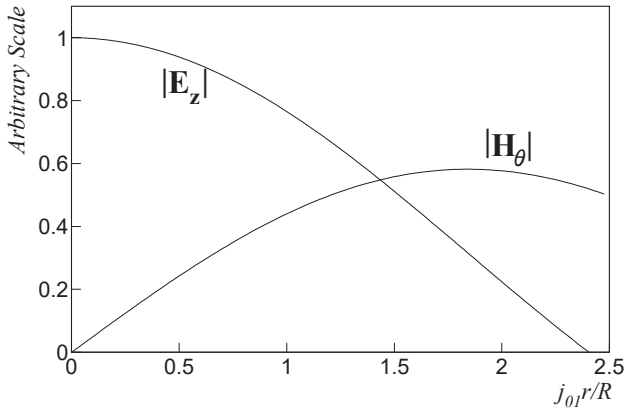


図 18 ピルボックス型空洞内の固有モード TM_{010} の電場 E_z 、及び、磁場 H_θ の強さの動径方向分布。これらの場は z や θ には依存しない。 $j_{01} \approx 2.4048$ は 0 次のベッセル関数の 1 番目のゼロ点。縦軸のスケールは任意である。

18 に示す。電場は中心軸 (z 軸) 上で最も強く、円筒壁面 ($r = R$) でゼロとなる。一方、磁場は中心軸上でゼロである。電場と磁場で位相が 90° ずれているので、電場が最高の瞬間、磁場はゼロである。また、磁場が最高の瞬間、電場はゼロとなり、電場と磁場がお互いに励振しあっている。固有モード周波数は、空洞半径 R に反比例し、長さ (d) には依存しない^{*9}。尚、(Super)KEKB 主リングの RF 周波数である 509MHz に対応するピルボックス型加速空洞の半径は $R = 22.56$ cm である。

ここで、 Q 値 (Quality factor) のひとつである内部 Q 値 (無負荷 Q 値とも言う) を定義する。通常、 Q_0 と記述する。これは、加速空洞等の性能を表わす重要な無次元量である。 Q_0 値は、空洞内の電磁場のエネルギー (U) と壁面損失電力 (P_{wall}) の比に共振角周波数^{*10}を掛けた量である：

$$Q_0 = \omega \frac{U}{P_{\text{wall}}} \quad (248)$$

Q_0 値が大きいということは、蓄えられる電磁場のエネルギーが壁面損失電力に比べて大きいことを意味する。 Q_0 値は周波数に依存し、固有モードごとに異なる値を持つ。銅製の常伝導加速空洞では、通常、

^{*9} z 軸上にビームパイプを付けて穴をあけた場合、 TM_{010} モードの固有周波数は長さ d に (僅かに) 依存する。

^{*10} 正確には、壁面損失が無いと仮定した時の共振角周波数

Q_0 値は数万～数十万程度である。図 19 に、半径 $R = 22.56$ cm、長さ $d = 26.00$ cm の場合の銅製ピルボックス型空洞の Q_0 理論値を示す。一般的な傾向として、粒子加速によく用いる TM_{010} モードは孤立しており、それより高い周波数のモード (高次モード) は、周波数の高い方に行けば行く程、密集している。このことは、 TM_{010} モードを加速モードとして採用することの理由のひとつである。

6.2 伝送線路との結合

前節までは単独の空洞を考えたが、空洞内に固有モードを励振するためには、伝送線路を空洞に繋ぎ、外部から RF パワーを投入しなければならない。そのための方法として、図 20 にあるように空洞に直接導波管を付けたり、図 21 あるようなカップラーを空洞に取り付け、RF パワーを投入する (または、RF パワーを取り出す)。通常、導波管やカップラーを付けたことによる空洞内電磁場 (特に加速モード) への影響は小さくなるようにする。

ここで、新たな Q 値を定義する。ある固有モードをある程度励振した状態で、入力波を止めたとする。その瞬間、空洞壁面損失電力 P_{wall} と空洞から導波管に出て行くマイクロ波の電力 P_{ext} (図 20 参照) の和は、空洞内電磁場エネルギー U の時間変化に等しいので、

$$\frac{dU}{dt} = -(P_{\text{wall}} + P_{\text{ext}}) \quad (249)$$

という関係が成り立つ。ここで、外部 Q 値 (Q_{ext}) を

$$Q_{\text{ext}} = \omega \frac{U}{P_{\text{ext}}} \quad (250)$$

と定義する。式 (248)、(250) を式 (249) に代入して、

$$\frac{dU}{dt} = -\omega U \left(\frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{\text{ext}}} \right) \quad (251)$$

$$= -\frac{\omega}{Q_L} U \quad (252)$$

を得る。ここで、 Q_L を外部 Q 値、または、負荷 Q 値と言い、

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{\text{ext}}} \quad (253)$$

で定義する。さらに、結合度 β を

$$\beta = \frac{Q_0}{Q_{\text{ext}}} \quad (254)$$

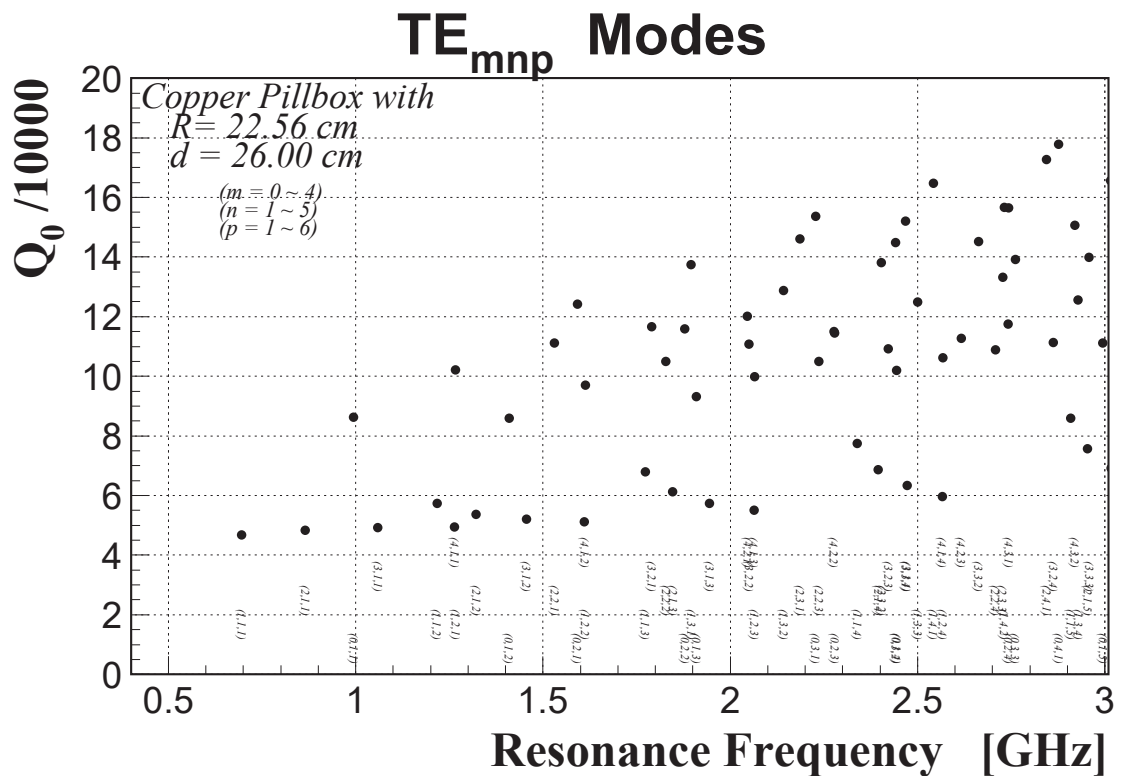
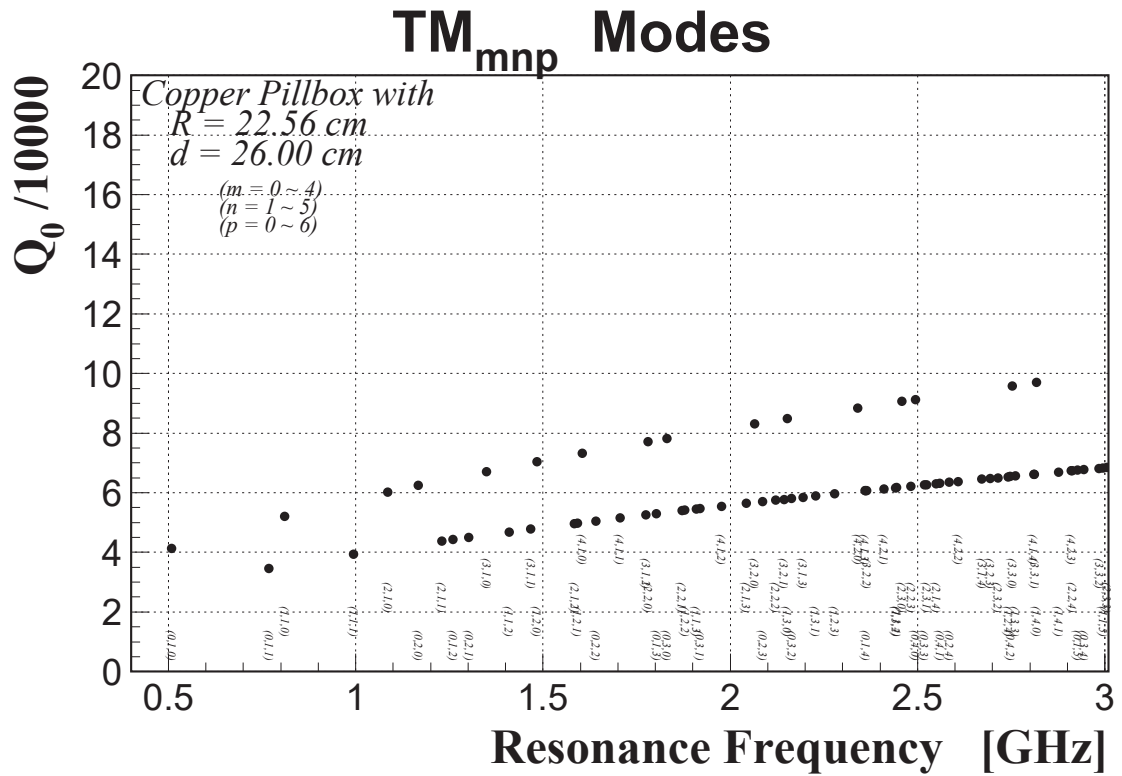


図 19 銅製ピルボックス型空洞（半径 22.56 cm、長さ 26.00 cm）の Q_0 理論値（縦軸）と固有モード周波数（横軸）。銅の電気抵抗率としては IACS100% ($1.72 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$) を用いた。また、その透磁率は真空中と同じとした ($\mu = \mu_0 = 1.25664 \times 10^{-6} \text{ H/m}$)。

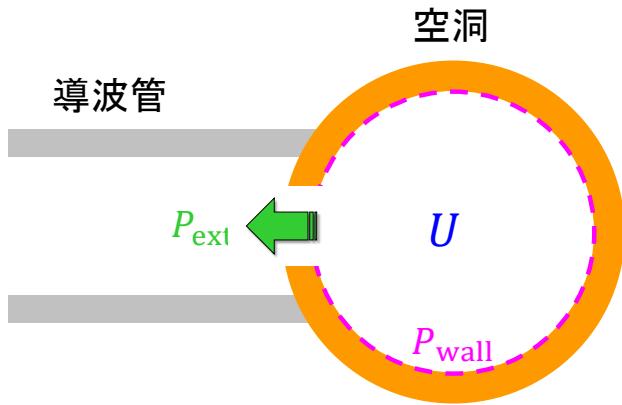


図 20 空洞内電磁場を励振するために空洞側面に導波管を付けた状態の模式図。

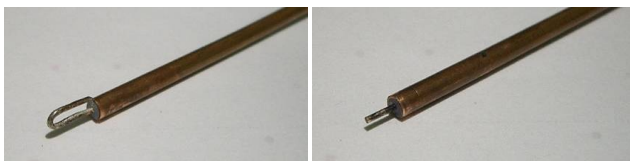


図 21 ループ (左) とアンテナ (右) の写真。ループ、及び、アンテナはそれぞれ空洞内電磁場の磁場、及び、電場に結合する。これらは低パワーでの Q 値測定に使用したセミリジッド同軸ケーブルの先端部である。

と定義し、内部 Q 値と外部 Q 値の関係は、

$$Q_0 = Q_L(1 + \beta) \quad (255)$$

となる。 $\beta = P_{\text{ext}}/P_{\text{wall}} = 1$ の場合は、 $P_{\text{wall}} = P_{\text{ext}}$ なので、この条件で空洞にマイクロ波を投入した場合には、入力電力と空洞壁面損失電力が釣り合い、反射が無くなる。これを整合のとれた状態と言う。 β が 1 でない場合は、その釣り合いが崩れ、反射電力が生じる。 $\beta < 1$ の場合を疎結合、 $\beta > 1$ の場合を強結合と言う。結合度 β の調整は、ループの角度やアンテナの突き出し量を変えることにより行う。各種 Q 値や結合度は、共振周波数とともに、空洞の最も基本的なパラメータである。実際の空洞でそれらの量を測定する方法は様々あり、参考文献 [4] 等で学べる。

式 (252) より、入力マイクロ波を止めた瞬間以降の電磁場エネルギー U の時間変化は、

$$U = U_0 e^{-\frac{\omega}{Q_L} t} \quad (256)$$

となることがわかる。電磁場の振幅は、エネルギー

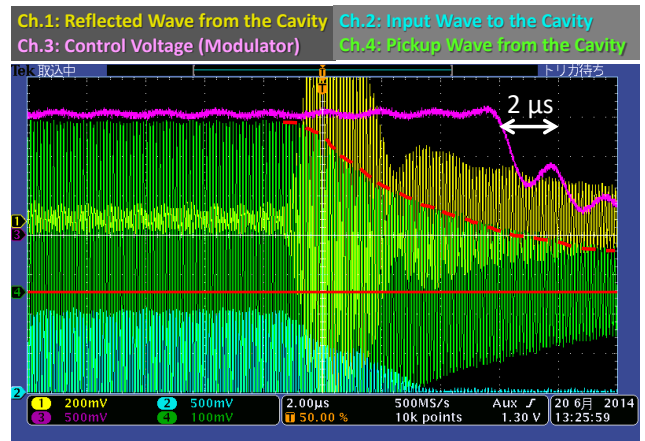


図 22 509 MHz の常伝導加速空洞の大電力運転時に RF スイッチを手動で切った瞬間の各種信号。赤色破線は、加速モード電磁場のピックアップ検波信号 (Ch. 4) の包絡線。

の平方根に比例するので、

$$|E|, |H| \propto e^{-\frac{\omega}{2Q_L} t} \quad (257)$$

$$= e^{-\frac{t}{T_f}} \quad (258)$$

に従って指数関数的に減衰する。ここで、

$$T_f = \frac{2Q_L}{\omega} \quad (259)$$

を Filling Time と言い、入力マイクロ波を止めた瞬間から T_f だけ時間が経つと空洞内電磁場の振幅は $1/e \approx 0.37$ 倍にまで減衰する。これは、マイクロ波を投入して空洞内固有モードを最高振幅まで励振するのに要する時間の目安でもある (入射波の電力が一定の場合)。図 22 は、509 MHz の常伝導加速空洞に大電力マイクロ波を投入して運転していた時に RF スイッチを手動で切った瞬間の信号である。ここでは、509 MHz の信号をオシロスコープで直接観測した。この空洞の加速モード (TM_{010}) の Q_0 値は約 3 万で、結合度は $\beta \approx 1.3$ であったので、Filling time は、式 (259) より、

$$T_f \approx \frac{2 \times \frac{30000}{1+1.3}}{2\pi \times 509000000} \quad (260)$$

$$\approx 8.1 \mu\text{s} \quad (261)$$

である。図 22 を見てみると、加速モードのピックアップ検波信号 (Ch. 4) の減衰時間は約 8 μs であり、式 (261) の Filling time に等しい。

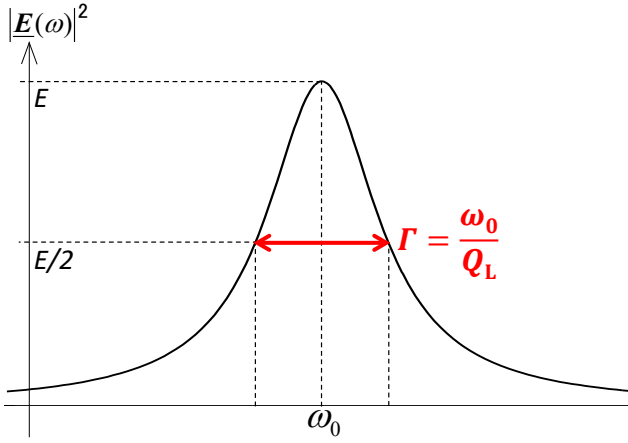


図 23 共振型スペクトル。

これまでの空洞の共振周波数上で考えてきたが、ここでは、周波数が共振周波数から少しずれた場合に電磁場の強度がどのようになるかを見てみる。共振周波数が ω_0 の固有モードを考えると、時間領域では、式 (257) より、

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q_L} t} e^{-i\omega_0 t} \quad (262)$$

となり、このフーリエ変換は、

$$\underline{\mathbf{E}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathbf{E}(t) e^{i\omega t} \quad (263)$$

$$= \frac{\mathbf{E}_0}{2\pi} \int_0^{\infty} dt e^{-\left(\frac{\omega_0}{2Q_L} + i(\omega_0 - \omega)\right)t} \quad (264)$$

$$= \frac{\mathbf{E}_0}{2\pi} \frac{\frac{\omega_0}{2Q_L} - i(\omega_0 - \omega)}{\left(\frac{\omega_0}{2Q_L}\right)^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \quad (265)$$

となる。つまり、負荷 Q 値 Q_L を持つ空洞内の電場強度は、共振型スペクトル：

$$|\underline{\mathbf{E}}(\omega)|^2 \propto \frac{1}{\left(\frac{\omega_0}{2Q_L}\right)^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \quad (266)$$

を持つように見える（観測される）のである。この時、図 23 にあるように、

$$\Gamma = \frac{\omega_0}{Q_L} \quad (267)$$

が半値幅となり、 Q_L が大きければ大きい程、共振型スペクトルはよりシャープになる。

6.3 空洞電圧

図 24 にあるように、 z 軸上に細いビームパイプを付けたとしよう。そのパイプの太さは空洞の径と比

べて非常に小さいとし、空洞内電磁場としては前に求めたピルボックス型空洞と同じ解が使えるとする。空洞が $z = 0 \sim d$ の間にあるようにビームパイプの中心軸上に z 軸を置く。そこに、 $z < 0$ から $+z$ の方向に向かって z 軸上を高エネルギーの電子（電荷： $e(> 0)$ ）が光速 c_0 で走り抜ける時、その電子が角周波数 ω の固有モードの電場から受ける取るエネルギー W は、

$$W = \int_0^d dz e \Re \{ \mathbf{E}_z(0, 0, z, t_0 + z/c_0) \} \quad (268)$$

$$= e \Re \left\{ \int_0^d dz \tilde{\mathbf{E}}_z(0, 0, z) e^{-i\omega(t_0 + z/c_0)} \right\} \quad (269)$$

$$= e \Re \{ \mathbf{V}_c \} \quad (270)$$

$$= e |\mathbf{V}_c| \cos \phi \quad (271)$$

と書ける。ここで、

$$\mathbf{V}_c = e^{-i\omega t_0} \int_0^d dz \tilde{\mathbf{E}}_z(0, 0, z) e^{-i\omega \frac{z}{c_0}} \quad (272)$$

は空洞電圧と言う複素量である（図 25 参照）。因子 $e^{-i\omega \frac{z}{c_0}}$ は、電子が空洞内を通過する途中の電場の変化を表わす。また、 $\tilde{\mathbf{E}}_z$ は \mathbf{E}_z から時間依存性を除いたもので、時刻 $t = t_0$ に電子が $z = 0$ を通過したとした。 $\phi = 0$ となるタイミングで電子が空洞に入れば、 W は最大となる。空洞電圧の絶対値 $|\mathbf{V}_c|$ は $\phi = 0$ に対応し、（タイミング的に）最大加速の電圧である。また、加速空洞が複数台ある場合には、空洞電圧のベクトル和をとる。尚、加速や減速に関する固有モードが複数ある場合は、それぞれのモードからの寄与の和となる。

実際のビームパイプ径は加速空洞の径に比べて非常に小さいということは、まずない。ビームパイプ径が大きいと、空洞内電磁場がビームパイプに染み出し、電子がビームパイプの中のどこを通ったかで空洞電圧が変わりそうである。しかし、ビームパイプと空洞が軸対称ならば、空洞電圧は通る位置に依存しないことを証明しよう。円筒座標系を使い、 $\tilde{\mathbf{E}}_z(r, z)$ は z に関するフーリエ変換で表わす：

$$\tilde{\mathbf{E}}_z(r, z) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \underline{\tilde{\mathbf{E}}}_z(r, k) e^{ikz} \quad (273)$$

この式を式 (272) に代入すると、空洞電圧は、

$$\mathbf{V}_c(r) = e^{-i\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dk \underline{\tilde{\mathbf{E}}}_z(r, k) e^{i\left(k - \frac{\omega}{c_0}\right)z} \quad (274)$$

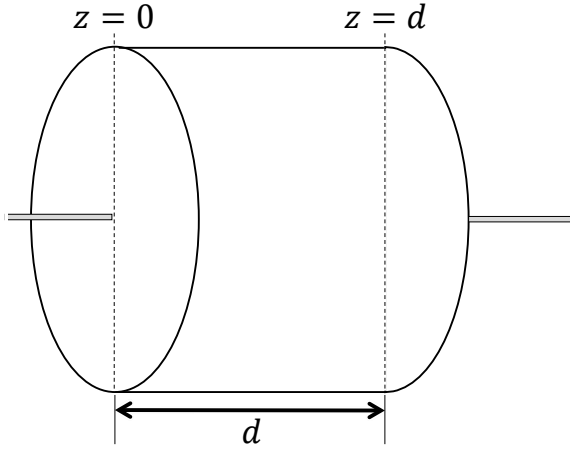


図 24 ピルボックス型空洞に細いビームパイプを取り付けた状態。

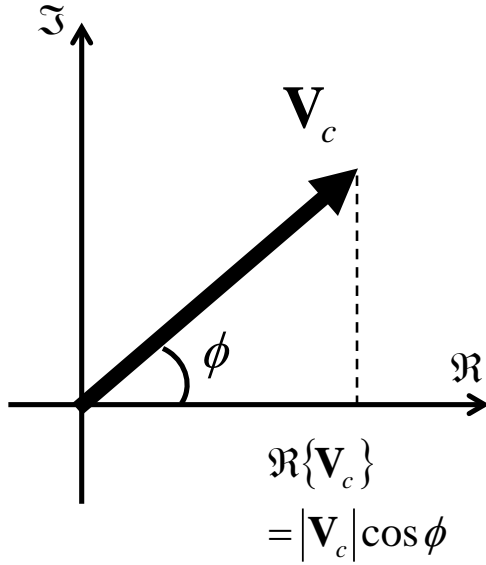


図 25 空洞電圧。

となる。ここで、 z に関する積分範囲が無限になったことに注意する。 z に関する積分を先に行うと、その積分はディラックのデルタ関数 δ となり、

$$\mathbf{V}_c(r) = e^{-i\omega t_0} 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{\mathbf{E}}_z(r, k) \delta\left(k - \frac{\omega}{c_0}\right) \quad (275)$$

である。一方、電場：

$$\mathbf{E}_z(r, z, t) = \tilde{\mathbf{E}}_z(r, z) e^{-i\omega t} \quad (276)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{\mathbf{E}}_z(r, k) e^{i(kz - \omega t)} \quad (277)$$

が真空中のマクスウェル方程式 (35) を満たすことより、

$$\left(\nabla_t^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{c_0^2}\right) \tilde{\mathbf{E}}_z(r, k) = 0 \quad (278)$$

が得られる。式 (275)、(278) より、

$$\nabla_t^2 \mathbf{V}_c(r) = e^{-i\omega t_0} 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dk \nabla_t^2 \tilde{\mathbf{E}}_z(r, k) \delta\left(k - \frac{\omega}{c_0}\right) \quad (279)$$

$$= e^{-i\omega t_0} 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dk \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_0^2}\right) \tilde{\mathbf{E}}_z(r, k) \delta\left(k - \frac{\omega}{c_0}\right) \quad (280)$$

$$= 0 \quad (281)$$

つまり、空洞電圧は調和関数である。調和関数の性質より、軸対称性があれば、任意の位置 r に対して、

$$\mathbf{V}_c(r) = \mathbf{V}_c(0) \quad (282)$$

が成り立ち、空洞電圧が通過位置に依存しないことがわかる。これは数学的な帰結であり、軸対称であれば、どのような形状でも成り立つ（ビームパイプの太さや空洞の長さ d がどのような値でも）。直観的に受け入れ難いことだが、第 II 部で具体的なシミュレーションの結果を見て、理解してみよう。

6.4 シャントインピーダンス

空洞電圧の 2 乗を壁面損失電力で割った比をシャントインピーダンス (R_{sh}) という：

$$R_{sh} = \frac{|\mathbf{V}_c|^2}{P_{wall}} \quad (283)$$

シャントインピーダンスも、各種 Q 値と同じく、空洞の各 TM モードごとに決められる。場合によっては、 $R_{sh} = |\mathbf{V}_c|^2/2/P_{wall}$ と定義することもあるが、加速器では波高値（ピーク値）に重点をおくことが多いので、本書でも式 (283) の定義を採用する。整合がとれている場合 ($\beta \approx 1$)、空洞へ投入するマイクロ波の入力電力を P_{inp} とすると、上式より、

$$|\mathbf{V}_c| = \sqrt{R_{sh} P_{wall}} \quad (284)$$

$$\approx \sqrt{R_{sh} P_{inp}} \quad (285)$$

である。つまり、シャントインピーダンスが高い程、小さい入力電力で高い空洞電圧が得られ、この電圧が加速電圧であれば、シャントインピーダンスは「加速効率」を表わすことになる。ピルボックス型空洞の TM_{010} モードの場合、 z 軸上のシャントインピーダンスは、式 (243)、(272) を上式に代入し、また、壁面損失電力が空洞内面の金属の電気伝導率 σ と透磁率 μ を用いて以下の空洞内面上の面積分：

$$P_{wall} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \int_{\text{空洞内面}} dS |\vec{\mathbf{H}}|^2 \quad (286)$$

より求まることを使うと、

$$R_{\text{sh}} = 2\sqrt{\frac{2\sigma}{\omega\mu}} \frac{J_0(0)^2 \left| \int_0^d dz e^{-i\omega \frac{z}{c_0}} \right|^2}{\int_{\text{空洞内面}} dS \left\{ c_0 \epsilon_0 J_0 \left(\frac{j_{01}}{R} r \right) \right\}^2} \quad (287)$$

$$= 2\sqrt{\frac{2\sigma}{\omega\mu}} \frac{4 \frac{c_0^2}{\omega^2} \sin^2 \frac{\omega}{2c_0} d}{\left(\int_{\text{端面}} + \int_{\text{側面}} dS \right) \left| c_0 \epsilon_0 J_1 \left(\frac{j_{01}}{R} r \right) \right|^2} \quad (288)$$

$$= \frac{8\sqrt{\frac{2\sigma}{\omega\mu}} \frac{1}{\omega^2 \epsilon_0^2} \sin^2 \frac{\omega}{2c_0} d}{4\pi \int_0^R dr r J_1 \left(\frac{j_{01}}{R} r \right)^2 + 2\pi R d J_1(j_{01})^2} \quad (289)$$

となる。ここで、 $J_0(0) = 1$ 、 $J_0'(x) = -J_1(x)$ を使った。上の式 (289) の分子が最大となるのは、 $\frac{\omega}{2c_0} d = \pi/2$ の時、つまり、空洞長 d が TM_{010} モードの自由空間における波長の半分に等しい時 ($d = \frac{c_0 \pi}{\omega}$) である。これは、半周期で最大の加速を受けることに相当するが、シャントインピーダンスがこの時に最大となる訳ではない。なぜなら、式 (289) の分母第 2 項 (空洞側面における壁面損失電力) が空洞長 d に比例するからである。実際は、空洞長 d が自由空間における波長の約 4 割強のところではシャントインピーダンスが最大となる。ピルボックス型空洞の空洞長はこのようにして決まっている*11。

次に、(それぞれの TM モードに関して) シャントインピーダンスと Q_0 値の比 $\frac{R_{\text{sh}}}{Q_0}$ (「アール・オーバー・キュー」と言う) を考える。 Q_0 の定義式 (248) と空洞電圧の定義式 (272) より、

$$\frac{R_{\text{sh}}}{Q_0} = \frac{|V_c|^2}{\omega U} \quad (290)$$

$$= \frac{\left| \int dz \tilde{E}_z(0, 0, z) e^{-i\omega \frac{z}{c_0}} \right|^2}{\frac{\omega \epsilon_0}{2} \int_{\text{空洞内}} dV \left| \tilde{E}_z(x, y, z) \right|^2} \quad (291)$$

と書ける。壁面損失電力 P_{wall} が分母分子でキャンセルして消えたことからわかるように、 $\frac{R_{\text{sh}}}{Q_0}$ は空洞内表面の抵抗値や物温に依存しない。また、空洞の代表的なサイズを L とすると、 $|\tilde{E}|^2$ は電磁場のエネルギー密度に比例するので、 $|\tilde{E}| \propto L^{-3/2}$ である。また、 $\omega \propto L^{-1}$ 、 $\int dV \propto L^3$ 、 $\int dz \propto L$ なので、式 (291) は L に依存しない。つまり、空洞の大きさが L 倍になっても、空洞の形が相似形ならば、対応する固有モードの $\frac{R_{\text{sh}}}{Q_0}$ は同じである。従って、 $\frac{R_{\text{sh}}}{Q_0}$ は空洞の幾何学的形状のみで決まる空洞固有の量であり、

空洞の形状に関する電氣的性質を特徴づける指標としてしばしば使われる。ちなみに、ピルボックス型単セル空洞の典型的な $\frac{R_{\text{sh}}}{Q_0}$ の値は、100~200 Ω 程度である。

$\frac{R_{\text{sh}}}{Q_0}$ に関してもうひとつ重要なことがある。式 (291) をよく見てみると、「中心軸 (ビーム軸) 上の電場の全電場に対する割合」という形になっている。これは、(空洞を加速空洞として使う場合) $\frac{R_{\text{sh}}}{Q_0}$ は、その固有モードとビームとの間でやり取りするエネルギー量を表わしていることを意味する。例えば、加速モードの $\frac{R_{\text{sh}}}{Q_0}$ を高くすると、加速自体には有利だが、ビームからの反作用が大きくなる。

第 II 部

マイクロ波シミュレーション

7 はじめに

近年のコンピュータ関連技術の進歩により、マイクロ波を含む様々な電磁場関連現象を精密に数値計算 (シミュレーション) 出来るようになってきた。これは、マクスウェル方程式に従った計算であり、いわゆる第 1 原理計算である。実際、第 I 部にある内容は全てシミュレーションで数値計算可能である。従って、正しいシミュレーションを行えば、昔の人が加速空洞の研究開発等で行っていた低電力モデル (コールドモデルとも言う) の作成や測定は、基本的に不要である。但し、それはシミュレーションが正しければのことである。本節では、マイクロ波シミュレーションの基礎について解説する。

8 計算方法の種類

マクスウェル方程式を数値的に解く方法は複数ある。いずれの方法でも、空間や時間を離散化する。実際にシミュレーションを行う上で解法の詳細はそれ程重要ではないので、ここでは、代表的な解法の概要のみ解説する。

*11 一方、空洞の内径は、周波数によって決まる。

8.1 有限要素法

有限要素法 (Finite Element Method) では、計算領域を小さな領域 (要素) に分割する。その際、要素の形状を自由に選べるのが、この方法の大きな特徴である。これにより、複雑な境界条件を正確に表現出来る。但し、要素の作成に時間がかかるのが問題である。尚、境界条件に適合させて要素を作成するためか、(加速器でよくある) 荷電粒子との相互作用を有限要素法で計算することは簡単ではないようである。よって、この解法を使ったシミュレーションソフトでは、ビーム励振を扱えないものが多い (全く無いことはない)。

8.2 境界要素法

境界要素法 (Boundary Element Method) は、マクスウェル方程式の積分形 (境界積分方程式) に基づき、その境界内部の電磁場を求める方法である。計算格子は境界表面にのみ設定すればよいことが、この方法の特徴である。また、この方法を使うと、無限領域を厳密に扱うことが可能である。このように理論的には優れている方法だが、実際の数値計算には時間が (他の方法と比べて) かかることが多く、加速器業界で使われているシミュレーションソフトでこの方法を実装したものは少ない。

8.3 有限差分法

有限差分法 (Finite Difference Method) は、マクスウェル方程式の微分形を差分で表現する方法である。コンピュータは差分 (引き算) が不得意なので、差分を多数回行くと誤差が蓄積されることがある。しかし、現在では、そのような誤差を抑える方法があり、また、コンピュータが単精度 (約 7 桁) から倍精度 (約 16 桁) へ移行したこともあり、有限差分法は広く使われている。特に、ビーム励振の電磁場をシミュレーションする場合は、時間領域有限差分法 (Finite-Difference Time-Domain method: FDTD) が有用である。

8.4 有限積分法

有限積分法 (Finite Integration Technique: FIT) は、マクスウェル方程式の積分形を離散化し、グリッド化された空間上の支配方程式を構成、それを数値的に解く方法である。直交グリッド上では、FIT と FDTD は等価である。FIT は、静的な場から高周波まで、そして、周波数領域と時間領域の両方に適用出

来る応用性の広い方法である。

9 計算領域の種類

通常よく見かけるマクスウェル方程式:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}, t) + \frac{\partial \vec{B}(\vec{x}, t)}{\partial t} = 0 \quad (292)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{x}, t) - \frac{\partial \vec{D}(\vec{x}, t)}{\partial t} = 0 \quad (293)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{x}, t) = 0 \quad (294)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}, t) = 0 \quad (295)$$

は、電磁場の時間発展を記述するものであり、「時間領域」における表現である。一方、第 I 部でマクスウェル方程式から導いたヘルムホルツ方程式:

$$\left(\vec{\nabla}^2 + \mathbf{k}(\omega)^2\right) \vec{E}(\vec{x}, \omega) = 0 \quad (296)$$

$$\left(\vec{\nabla}^2 + \mathbf{k}(\omega)^2\right) \vec{H}(\vec{x}, \omega) = 0 \quad (297)$$

は、フーリエ変換して、ある特定の周波数に関して記述した「周波数領域」における表現である。どちらも数学的には等価であるが、その描像は正反対である。ここでは、計算領域について簡単に解説する。

9.1 周波数領域

加速器は周波数領域の装置とも言えるので、周波数領域の計算は必須である。特に、高い Q 値を持った空洞では、第 I 部の式 (266) で示したように、空洞内電磁場の強度は鋭い共振型スペクトルとなるので、一点の周波数における計算が重要となる。つまり、周波数領域の計算は、狭帯域問題に適している。

周波数領域では、フーリエ変換により $t = -\infty$ から $t = +\infty$ まで積分したため、「時間」は無い。従って、初期条件というものもなく、電磁場を決めるために、励振源が必要である。励振源として最もよくあるのは、ポートモード (同軸線や導波管のモード) である。

9.2 時間領域

時間領域では、電磁場の時間発展を追うので、初期条件が必要である (さらに、励振源が加わる場合もある)。別途求めた電磁場を $t = 0$ における初期電磁場とし、その後の時間発展を計算することもある。励振源としてよくあるは、ポートモードとビームである。

フーリエ変換の関係にある2つの量の間には、必ず不確定性が存在する。周波数領域は時間領域をフーリエ変換したもののなので、周波数と時間の間に不確定性がある。例えば、時間領域で $t = 0$ から $t = t_{\max}$ まで計算をしたとすると、その結果をフーリエ変換して得られるスペクトルの解像度 Δf は、

$$\Delta f \approx \frac{1}{t_{\max}} \quad (298)$$

となる。例えば、 $Q_0 = 30000$ の加速空洞があったとしよう。整合がとれている ($\beta = 1$) とすると、負荷 Q 値は、 $Q_L = Q_0/2 = 15000$ である。式 (267) より、共振型スペクトルの半値幅は、 $\Gamma \approx 200$ kHz となる。つまり、 $t_{\max} \approx 1/(200 \text{ kHz}) \approx 5$ ミリ秒よりも長く計算しなければならない。周波数の解像度を N 倍良くするためには、時間領域の計算を N 倍長くする必要がある。つまり、時間領域の計算は、狭帯域問題には向いておらず、広帯域問題に適している。

9.3 固有モード解析

マクスウェル方程式から導いたヘルムホルツ方程式 (74)、(75) を固有方程式として、(大規模) 固有値問題を数値的に解く方法である。理論的には周波数領域であるが、励振源は無く、存在可能な電磁場を求めるといふ (ある意味) 特殊な問題なので、本書では周波数領域と区別する。固有モード解析で必要なのは、ヘルムホルツ方程式と完全な境界条件 (例えば、金属で囲まれた空洞) のみである。外界とマイクロ波の出入りがあるポートがあってはならない。従って、あるポートの外部 Q 値を固有モード解析で求める場合には注意が必要である^{*12}。

10 ソフトウェアの例

加速器業界で使われている電磁場シミュレーション用ソフトは多数あり、全てを列挙するのは難しいので、ここでは、代表的な3つについて簡単に解説する。

10.1 HFSS

HFSS [6] は、有限要素法 (FEM) に基づいた計算を行うシミュレーションソフトである。高い精度の計算に向いており、加速器業界では昔から今まで、多

くのユーザーがいる。但し、ビーム励振問題は扱えない。

10.2 CST STUDIO SUITE

CST STUDIO SUITE [7] は、有限積分法 (FIT) に基づいた計算を行うシミュレーションソフトである。名前に「Suite」とあることからわかるように、ビーム励振問題も含めて、電磁場関係の計算の殆どを扱っている。最近では、マイクロ波による発熱や、その発熱から生じる応力等も連携して計算出来るようになった。著者の個人的な感想では、使いやすさを優先しているようであり、精度の高い計算を行う場合は、注意が必要となることがある。勿論、高精度の計算は出来るが、多少、シミュレーション・パラメータの調整が必要なこともある。曲面四面体メッシュを使えば、複雑な形状もよく近似出来る。

10.3 GdfidL

GdfidL (ジー・ディー・フィドゥルと読む; 「Gitter drüber, fertig ist die Laube」の略語) [8] は、時間領域有限差分法 (FDTD) に基づいた計算を行うシミュレーションソフトである。メッシュは6面体のみであり、複雑な形状を扱う場合はメッシュサイズを小さくする必要がある。GdfidL は PC クラスタを使った並列計算を想定して開発されており、大規模な PC クラスタを持っていれば、大規模問題をシミュレーションすることが可能である。GdfidL が最も威力を発揮するのは、ウェーク場計算等のビーム励振問題である。「リスタート機能」があり、ある段階で一旦計算を中断し、後日、中断した時点から計算を再開出来る。この機能は、非常に長い距離 (例えば、円形加速器1周分以上) までウェーク・ポテンシャルを計算したい場合に有効である (PC クラスタを使っても数週間かかる計算)。また、GdfidL では、Moving Mesh 法 [9] によるウェーク・ポテンシャル計算が可能である。これは、観測点近傍のみメッシュ生成し、そのメッシュ領域をビームの進行に合わせて進めていく方法で、ビーム・バンチ内の近距離ウェーク・ポテンシャル (例えば、バンチ長の100分の1) の計算が少ないメモリで行える。

11 ワークフロー

昨今のシミュレーションソフト (特に商用) は非常によくできており、計算する対象 (3次元ソリッドモ

^{*12} 正しくは Slater の同調曲線法を使う。詳しくは、参考文献 [5] の第 V 章参照。

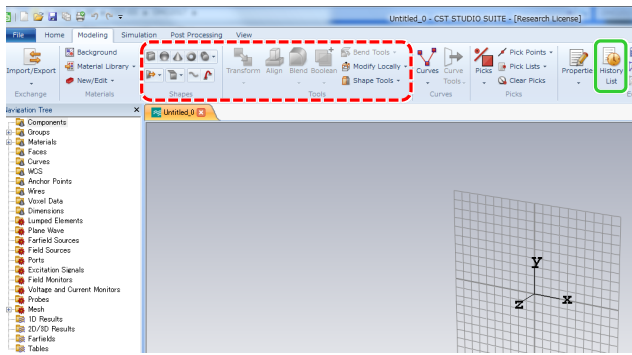


図 26 CST STUDIO SUITE の Modeling 機能。

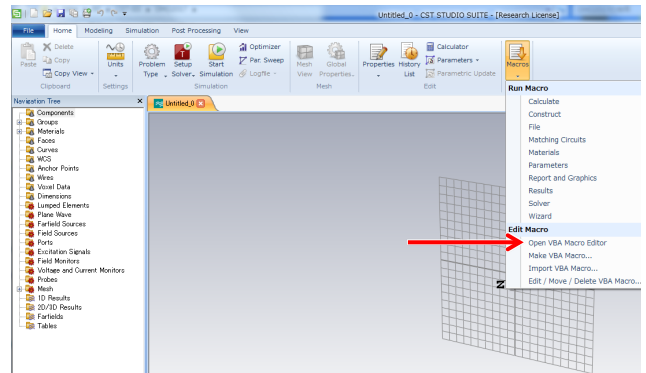


図 27 CST STUDIO SUITE のマクロ機能。

デル) を作成してしまえば、7~8割方出来たと言ってよいであろう。この節では、CST STUDIO SUITE を例に解説する。

11.1 ソリッドの作成

一般的、且つ、簡易な方法は、図 26 の赤色破線枠にある機能を使う方法である。直方体や筒など、基本的な形状のソリッドと、その加工等が行える。2次元図形から3次元ソリッドを作ることも可能である。行った全ての操作は、図 26 の緑色枠にある「History List」に残る。この方法は簡単・手軽ではあるが、複雑且つ大規模なソリッドを作る時には問題がある。条件によって場合分けしたり、複雑な計算結果を反映させたりしたい場合は、その都度作り直しである。

そこで、マクロ言語を使う方法を紹介しよう。CST STUDIO SUITE では VBA (Visual Basic for Applications) がサポートされている。図 27 の赤色矢印にあるマクロエディターを開き、ビジュアルベーシックの文法でソリッド等を記述するのである。例えば、直方体ソリッドを作るのは、

With Brick

```
.Reset
.Name "solid1"
.Component "component1"
.Material "Vacuum"
.Xrange "0", "100"
.Yrange "0", "100"
.Zrange "0", "100"
.Create
```

End With

等と入力すればよい。History List には VBA の言

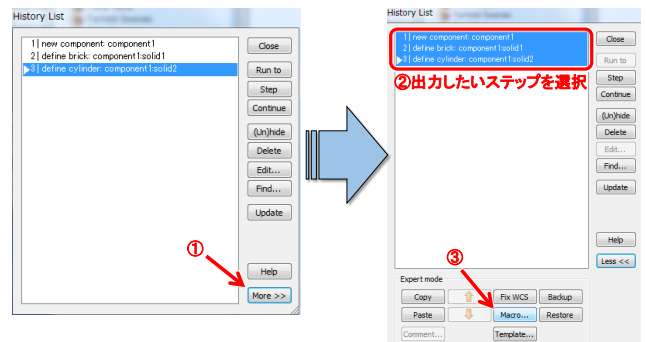


図 28 CST STUDIO SUITE の History List から、それまでに行った手続きを一括出力する方法。

語で履歴が残っているので、その内容が参考になる。この VBA では、ビジュアルベーシックで使える殆どの数学関数ができる。

CST STUDIO SUITE の VBA ではオブジェクト指向プログラミングがサポートされている。例として、CST STUDIO SUITE のソリッドを GdfidL がインポート可能な形式に変換するためのマクロ [10] が参考になる。そこで使っているマクロでは、クラスを使用している。

著者のお勧めは、まず、一般的な方法でソリッドを作り出し、ある段階でマクロ言語使用に移行する方法である。History List にため込まれた手続きは、図 28 にある方法を使えば、一括してひとつのマクロとして出力出来る。

11.2 ソルバーの選択・実行

CST STUDIO SUITE では、図 29 にある画面でソルバーを選択する。ソリッドの作成は、ソルバー選択の前でも後でも構わない。一旦ソルバーを選択すれば、後は、幾つかのオプションを選んで、ソルバーを実行するだけである。どのソルバーを使えばよい

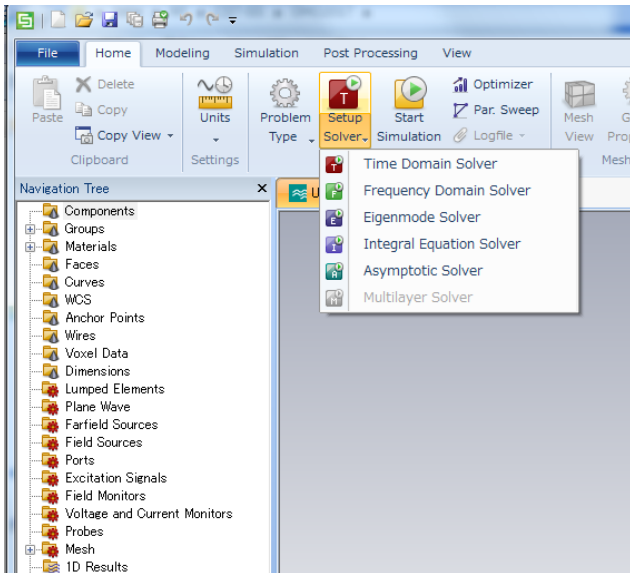


図 29 CST STUDIO SUITE のソルバー選択。

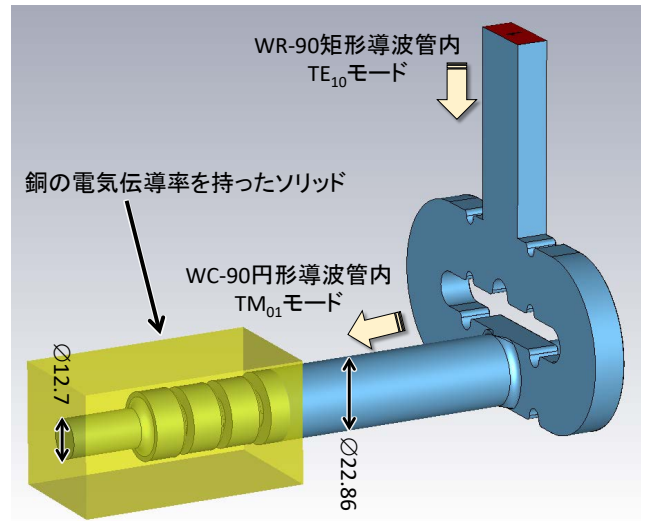


図 31 シミュレーション用ソリッドモデルの例。

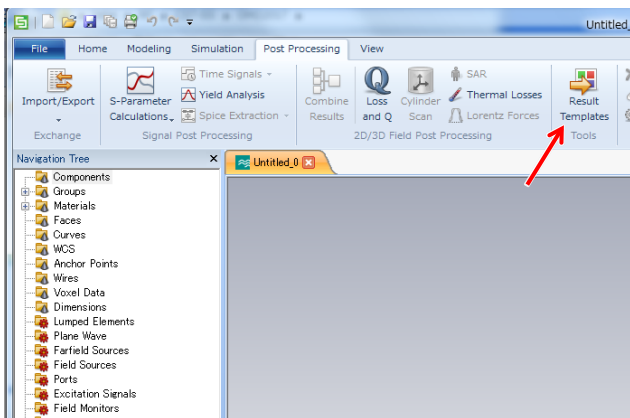


図 30 CST STUDIO SUITE のポストプロセッサ。

かについては、物理的理解が必要な場合が少なからずある。具体例を次節に載せたので、参考にして欲しい。

11.3 ポストプロセス

あまり時間のかからない計算は、(ソルバー計算後の) ポストプロセスとして扱われる。固有モード計算後の Q_0 値計算等である。CST STUDIO SUITE では非常に多くのポストプロセス用マクロが用意されている (図 30)。オンラインマニュアルや実際に使ってみて確かめていただきたい。

12 実際の計算例

この節では、CST STUDIO SUITE を使ったシミュレーション例を幾つか紹介しよう。

12.1 周波数領域計算の例

図 31 にあるモデルに対して Frequency Domain Solver を走らせ、矩形導波管上端の赤色領域で TE_{10} モード (第 I 部の図 10) を励振し、モード変換器を使って、円形導波管内 TM_{01} モード (第 I 部の図 15) に変換して、3 個のセルからなる試験空洞に RF パワーを投入する。入射波の周波数は 11.4 GHz くらいなので、内径 22.86 mm の円形導波管内は伝搬出来るが、試験空洞の終端にある内径 12.7 mm の円形導波管内は (遮断周波数より低いので) 伝搬しない。入射波の周波数が試験空洞の共振周波数と合っている場合、試験空洞内にマイクロ波のエネルギーが貯められる。このソリッドでは、11.424 GHz に π モード (隣合う空洞でモードの位相が π ずれている) がある。図 32 に、11.424 GHz のマイクロ波をポートで励振した場合の計算結果を示す。どこに共振周波数があるかわからないことが多いので、通常は、ある周波数領域内をスキャンする。つまり、ある周波数ステップで何回も計算するのである。

上の計算を時間領域で行うことも可能である。単一の周波数ではなく、ある周波数分布をもった波束を入射して、結果をフーリエ変換する。図 31 にある試験空洞の π モードの Q_0 値は 9000 である。整合はとれているので、負荷 Q 値はその半分である。従って、 π モードのスペクトル強度の半値幅は、第 I 部の

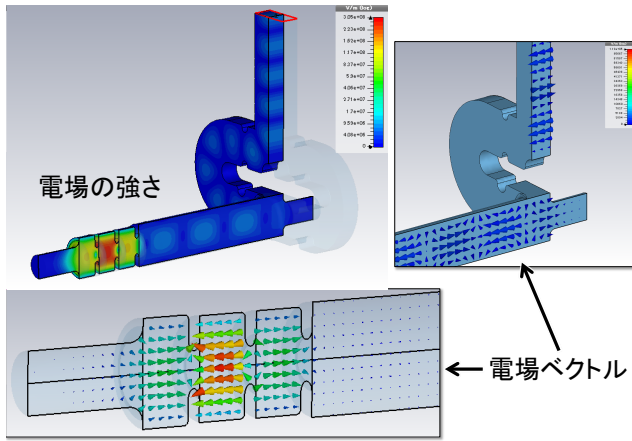


図 32 周波数領域計算の結果例。

式 (267) より、

$$\Gamma = \frac{\omega_0}{Q_L} \quad (299)$$

$$\approx \frac{2\pi \times 11.424 \text{ GHz}}{4500} \quad (300)$$

$$\approx 1.6 \text{ MHz} \quad (301)$$

である。従って、半値幅の十分の一の分解能が欲しいとすると、式 (298) より、

$$t_{\max} \approx \frac{1}{0.16 \text{ MHz}} \quad (302)$$

$$\approx 6.3 \text{ } \mu\text{s} \quad (303)$$

くらいまでの (シミュレーションの世界の中における) 計算時間が必要である。もし、一晩計算ジョブを走らせて、数 ns くらいしか計算が進まなかったとして、時間領域での計算は難しいとわかる。

12.2 時間領域計算の例

時間領域では、電磁場の時間発展を扱うので、過渡現象を見ることが出来る。ここでは、直線加速器でよくあるパルス運転を例にとる。通常のパルスは矩形であるが、図 33(a) の赤色波形にあるような二段階ステップパルス (11.424 GHz の単色波) を図 31 のモデルに投入する。CST STUDIO SUITE でこれを励振源とするには、Time Domain Solver 起動後、ナビゲーションツリーの「Excitation Signals」を右クリックし、「New Excitation Signal」を選択。Signal Type として「User defined」を選んでから、Edit ボタンを押すと、ユーザーが定義出来るウィンドウが現れ、その中で VBA 言語を使って励振波を記述する。図 31 にあるモデルのポートにステップパルスを入力

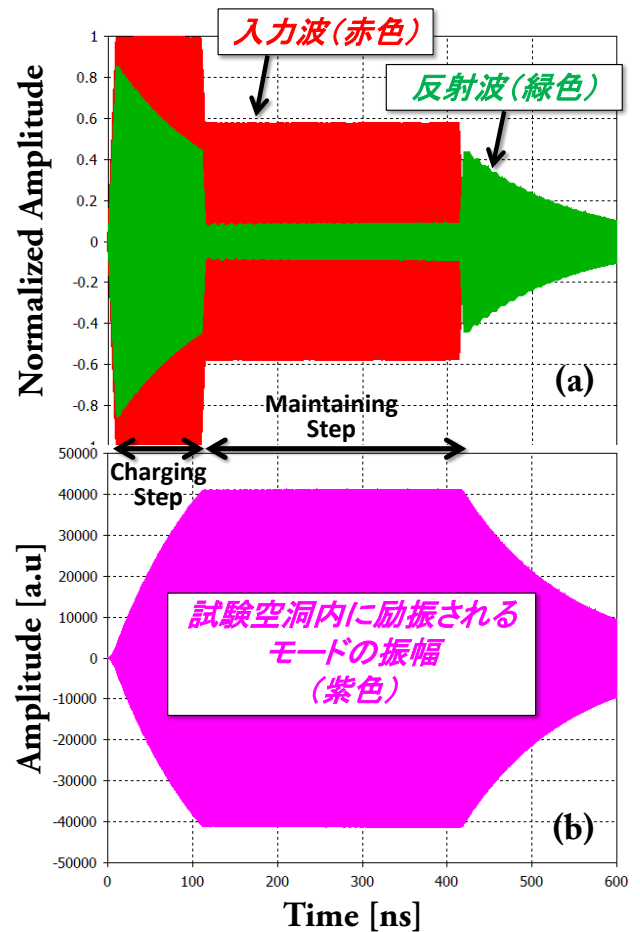


図 33 時間領域計算結果の例。11.424 GHz の単色波ステップパルス ((a) の赤色入力波) を図 31 のモデルに投入した。

する時間領域計算を行うと、図 33 にある結果が得られる。図 33(a) の緑色波形は試験空洞からの反射波である。パルスの立ち上がりと立ち下がりで大きな反射が出ている。これは、整合の取れた状態でも、パルスの立ち上がりと立ち下がりでは共振周波数以外の成分が発生するためである。図 33(b) の紫色波形は、試験空洞の中に励振される固有モード (この場合は π モード) の振幅である。このシミュレーションの入力波のステップ比 (ステップ前半とステップ後半の振幅比) は予め調整してあり、ステップ後半で試験空洞の中に励振されるモードの振幅が一定になるようにしてある。これは、定在波型のパルス運転で、パルス幅が Filling time 程度である場合に使われるテクニックである。実際、Filling time を求めてみよう。この試験空洞の Q_0 値は 9000 で、固有モード周波数は 11.424 GHz である。整合がとれている

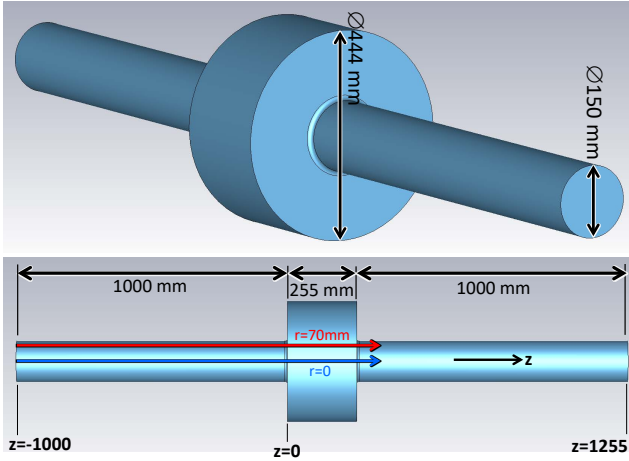


図 34 ピルボックス型加速空洞の例。青色領域は真空。それ以外は導体。

ので、 $Q_L = 9000/2 = 4500$ 。よって、第 I 部の式 (259) より、

$$T_f = \frac{2 \times 4500}{2\pi \times 11.424 \text{ GHz}} \quad (304)$$

$$\approx 125 \text{ ns} \quad (305)$$

である。従って、矩形波でパルス幅が数百 ns 以下の場合、試験空洞内に励振されるモードの振幅は一定にならない（立ち上がり途中）。このシミュレーションは、ステップパルス運転が実際に問題なく行えるかをシミュレーション上で確認するために著者が作ったものである。これにより、実際の高電界試験時はスムーズにステップパルス運転を行えた。現代の電磁場シミュレーションの意義のひとつに、加速器等の実際の運転をフルシミュレーションして、問題・不具合の事前発見や最適な運転パラメータの発見等を行えることにある。

12.3 固有モード計算の例

図 34 にあるピルボックス型加速空洞に対して Eigenmode Solver を走らせてみる。この時、求めたい固有モードの最低周波数と、固有モードの個数を設定する。そうすると、設定した最低周波数以上の固有モードを設定した個数まで計算してくれる。この例では、最低周波数として 500 MHz、固有モードの個数は 4 個とした。計算結果を図 35 に示す。固有モード周波数の低い順に解が求まる。ここで、固有モード 1 は、通常よく粒子加速に使う TM_{010} モードである。その電場強度分布を図 36 に示す。固有モード 4

は、よくビーム不安定性の原因となる TM_{110} モードである。

求めた固有モードに対して、ポストプロセスで Q_0 値等を計算出来る。ここでは、モード 1 に対して空洞電圧の位置非依存性を確認してみる。第 I 部の式 (282) によれば、軸対称性がある場合、どのような形状でも、空洞電圧は積分する位置 ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$) に依らないはずであるが、図 36 にある電場の強さ分布を見る限りでは、 $|V_c(r=0)| > |V_c(r=70\text{mm})|$ となりそうである。ここで、 $z = -1000 \text{ mm}$ から $z = \zeta$ までのエネルギー利得 \tilde{W} を、

$$\tilde{W}(\zeta, r) = \left| \int_{-1000 \text{ mm}}^{\zeta} dz \tilde{E}_z(r, z) e^{-i\omega \frac{z}{c_0}} \right| \quad (306)$$

と定義する。 $\tilde{W}(1000 \text{ mm}, r) = |V_c(r)|$ である。固有モードソルバーのポストプロセッサを使って \tilde{W} を数値計算した結果を図 37 に示す。確かに、 $\zeta < 255 \text{ mm}$ では、 $r = 70 \text{ mm}$ より $r = 0$ を通る方がより多くのエネルギーを得ているが、 $r = 0$ では空洞を過ぎた辺りから減速位相の効果があり、結局、空洞電圧は位置 r に依存しないことがわかる。では、減速位相の効果がないくらい空洞ギャップ長が短い場合はどのようなのであろうか。図 38 に、空洞ギャップ長が 50 mm の場合の固有モード 1 の電場の強さを示す。どう見ても $|V_c(r=0)| < |V_c(r=70\text{mm})|$ となりそうである。しかし、図 39 に示した計算結果からわかるように、空洞内領域では $r = 0$ の方が $r = 70 \text{ mm}$ よりエネルギー利得が少ないが、ビームパイプへの漏れ電場は $r = 70 \text{ mm}$ より $r = 0$ の方が多いので、十分長い領域で積分すれば、結局、この場合も空洞電圧は位置に依存しないことがわかる。以上のことから、マクスウェル方程式から導いた式 (282) を「実感」出来たと思う。

13 最後に

現代の（特に商用の）マイクロ波シミュレーションソフトは完成度が高く、装置開発のためのデザインのみならず、加速器の運転や装置の試験の状態を正確に模擬したフルシミュレーションを行うことにより、問題、不具合、最適な運転パラメータ等の事前発見も可能である。また、マイクロ波理論の物理的理解の補助にもなるという存在意義もある。但し、

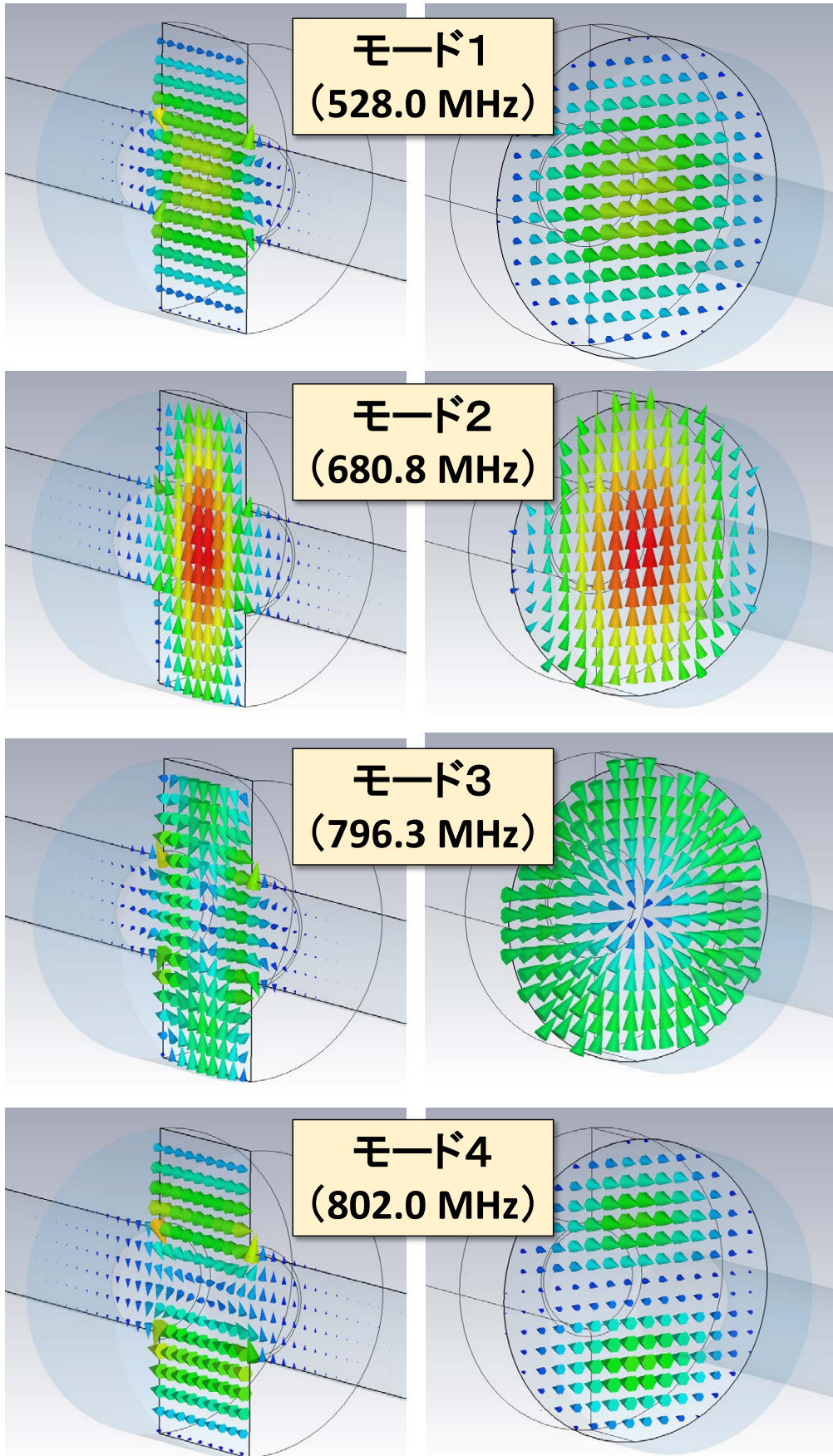


図 35 固有モード計算の結果例。電場ベクトルのみ表示。

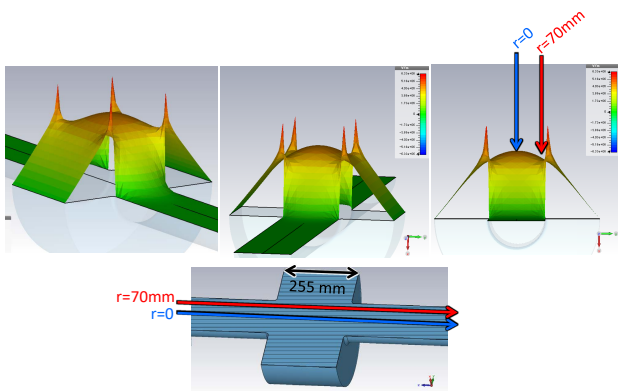


図 36 固有モード 1 の電場の強さをカーペットの高さで表示 (空洞ギャップ長が 255 mm の場合)。

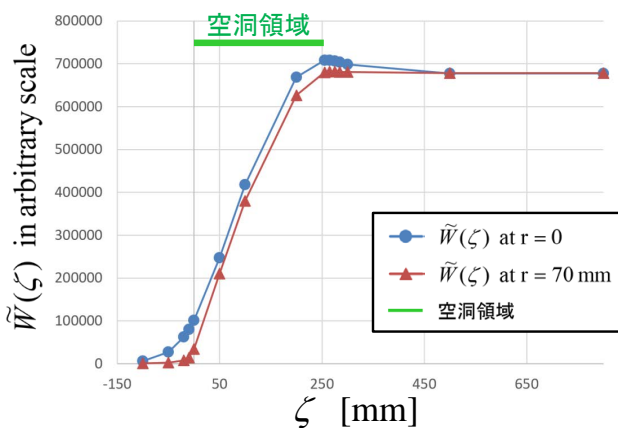


図 37 エネルギー利得計算の結果 (空洞ギャップ長が 255 mm の場合)。

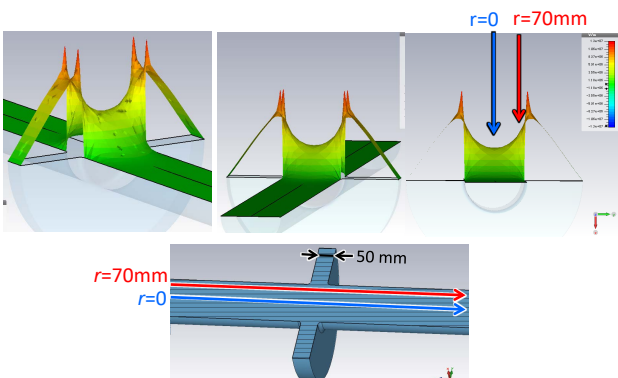


図 38 モード 1 の電場の強さをカーペットの高さで表示 (空洞ギャップ長が 50 mm の場合)。

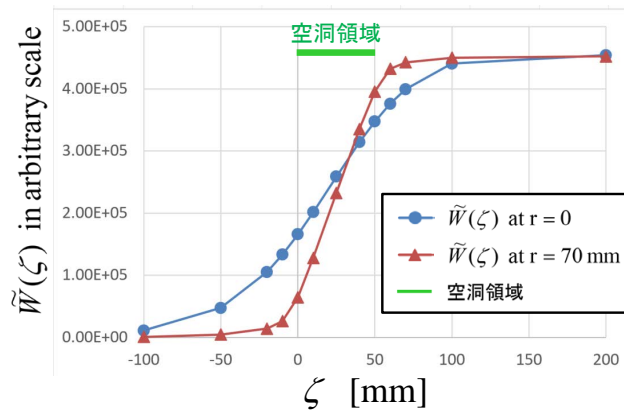


図 39 エネルギー利得計算の結果 (空洞ギャップ長が 50 mm の場合)。

著者の経験から、下記事項には注意が必要であると思われる：

1. シミュレーションは実験ではないので、考慮されている物理は限定されており、それを十分理解しておく。
2. バグのないシミュレーションソフトは存在しないことを頭の片隅に常に置いておく。
3. 計算結果のメッシュサイズ依存性は必ず確認する。
4. 周波数領域と固有モード計算は逐次的方法で物理解を求めるので、(特に複雑な形状では) 非物理解に陥ることもある。計算結果が物理的に妥当かどうかを確認する。
5. 可能ならば、複数のソルバーや、複数のシミュレーションソフトを使ってクロスチェックする。

14 お願い

本書は高エネルギー加速器セミナー OHO'17 用に執筆したのですが、今後も随時更新して、完成度を高めたいと思います。本書を読んで、不具合や要望等ありましたら、著者 (tetsuo.abe@kek.jp) までご連絡いただくと幸いです。更新版はインターネット上で公開予定です。

参考文献

- [1] M. Dal Forno, et al.: “rf breakdown measurements in electron beam driven 200 GHz cop-

- per and copper-silver accelerating structures”, Phys. Rev. Accel. Beams, **19**, 11, p. 111301 (2016).
- [2] A. Bers: “Note on group velocity and energy propagation”, American Journal of Physics, **68**, p. 482 (2000).
- [3] C. Jing, et al.: “Experiment on Multipactor Suppression in Dielectric-loaded Accelerating Structures with a Solenoid Field”, Proceedings, 4th International Particle Accelerator Conference (IPAC 2013): Shanghai, China, May 12-17, 2013, p. TUPEA087 (2013).
- [4] E. L. Ginzton: “*Microwave Measurements*”, Ann Arbor, Michigan (1957).
- [5] J. C. Slater: “*Microwave Electronics*”, D. Van Nostrand (1950).
- [6] <http://www.cybernet.co.jp/ansys/product/lineup/hfss/>.
- [7] http://www.aetjapan.com/software/CST_Overview.php.
- [8] <http://www.gdfidl.de/>.
- [9] K. L. Bane and T. Weiland: “Wake Force Computation in the Time Domain for Long Structures”, Conf. Proc., **C830811**, pp. 314–316 (1983).
- [10] http://research.kek.jp/people/tabe/SS2GD_Manual.pdf.