超簡単！ベクトル解析、他

<u>本講義録を安東愛之輔さんに捧げる！</u>

安東さんは、第一回（1984 年）の OHO の拙書「加速器の原理」の原稿を見て、「おもしろい」と言っていただき、「おせっかいにも」古い cgs 単位系をすべて MKSA 単位系に改めていただいた(安東さんの方が年輩)。安東さんには、本講義録も「おもしろい」と言っていただけるだろうか。さらに、今回はどこに「おせっかい」をしていただけるだろうか。

しかし、今はかなわない・・・・

1. はじめに

カンバンに偽りあり！

［（Web に掲載した）本講義の概要］

ベクトル解析の知識としては、<u>パワポ３枚もあれば十分</u>で、公式集は、多分、不要である。実際、どんな公式も必要な時にすぐに導くことができることを説明する。また、余裕があれば、「感覚的に」わかりにくいかもしれない微分形式への<u>超イントロ</u>を行い、「抵抗感」を少しでも減らしたい。

一般に、ほとんどの広告用カンバンにはうたい文句、誇張やホラなどが含まれており、場合によっては詐欺まがいの文言もなきにしもあらずではないか思われる。この講義録をめくると、明らかに、ページ数がパワポ３枚より、相当（？）、多いことがわかる。つまり、明らかに「カンバンに偽りあり」と判断されてもしょうがない。しかし、このカンバンの真意は、ベクトル解析で記憶すべき知識はパワポ３枚程度で（ほぼ）十分で、それ以上は記憶する必要はないであろうということを（長々と）ページ数を費やして説明したいというものである。なお、Appendix A がこのカンバンで言うところのパワポ３枚程度である。**(コメント：何事もマスターするのに重要なのは、知識や情報の獲得ではなく訓練（exercises）や試行錯誤であろう。［以下、コメントとしている個所には、高齢者である講師の余分な老人性コメンが含まている］）**

さて、多くのサイエンティスト、つまり「非数学的な」サイエンティスト（non-mathematical scientist）にとって、微分形式は相当にとっつきにくいものではないかと思われる。数学の教科書でも、微分形式は使って計算しているうちにだんだんわかってくる「代物」であるというようなことが書いてある。逆に言えば、訓練を受けていない非数学者にはよくわからないということであろうか。本講義の後半部は、この訓練を受けていない、不勉強な講師によるズボラな微分形式への超イントロである。この後半部は、大学時代などに、微分形式をあまり勉強してこなかった読者を対象に、積分や体積を復習することから始めて、それらに微分形式を導入し、外微分、(拡張された、または一般化された) Stokes の定理、Poincare の補題ぐらいまでの基礎をできるだけ初等的に説明しようというものである。これにより、微分形式への「抵抗感」が少しでも減って、今後、少し勉強でもしようかと思っていただければ幸いである。

2. ベクトル解析

2.1.（ベクトル解析）はじめに

本講義は、できるだけ記憶しないで、かつ本や公式集を見ないで、いつでも必要なときにベクトル解析に関する式を出せるようにすることを目的にしている。つまり、記憶力が弱い人、または記憶する努力をしたくない人向けのものであると考えていただいてもよい。

なお、この講義では、ベクトルおよびその計算方法などの初歩は知っているものと仮定して話をする。よって、定義や用語などの慣用語については逐一、説明することはしないし、また、体系的に順序立てて解説をしようというものでもない。むしろ、説明は簡単にして、「実用を第一」としてベクトル解析の手法を使いこなすことをめざしている。ただし、(本講義の講師は、不勉強で、ほとんど文献検索等もしていないので、単に知らないだけかもしれないが) 他の解説書等にはあまり見られない内容や観点等がいくつか含

まれているのではないかと思っており、これらが読者にいささかでも役立てば幸いである。

この節では、Appendix A に掲載した「パワポ３枚程度」の内容に沿って解説し、合わせて付随する事がらについても説明する。なお、説明の便宜のために、Appendix A にある式を本文中にも再掲している。

注：このベクトル解析の部分は、何年か前に京都大学で行った特別講義の中の vector analysis の箇所から多くを引用している。タイプミスや間違いは修正したが、まだこれらが含まれているかもしれない。

2.2. （本講義での）ベクトル

実に様々な対象がベクトルとして扱われる。例えば、複素数（２次元）、*n* 次までの多項式（*n+1* 次元）、ある領域の連続関数（無限次元）等々。これらを統一的に扱うためには、周知のように、ベクトル空間（及びその要素であるベクトル）の定義を必要とする。

しかし、ここで扱うベクトルとは、我々が空間の中に存在（実在）すると感知することできる、ある方向と量（大きさ）をもった幾何学的対象物のことである。つまり、我々がナイーブな感覚でその存在をイメージすることができるもの、または我々の感性で何とか認知することができるようなものに限るのである。

このようなベクトルは、我々が「デカルト的に」空間に描いた座標とは無関係に存在するもので、（人間が恣意的に選んだ）座標系とは独立して存在している（またはそのように定義すると言ってもよい）。言い換えれば、座標変換からは独立している存在で、座標変換には依らない。（若干、誇張した言い方をすれば）ベクトル自体には共変も反変もしないのである。このように座標変換に対して不変な幾何学的対象物がベクトルなのである。同様に、ベクトルから作られた内積及び外積も幾何学的な対象物であり、座標系からは独立している、または座標変換に対して不変である。

しかしながら、我々の貧弱な能力では、ベクトルを詳しく調べよう、または利用しようとすると、どうしてもデカルト的道具、つまり座標系を導入することが必要となる（注：こうすることによって、ベクトルの座標成分からなる数ベクトルが反変したり、共変したりするのである。）この道具を駆使することで、我々は初めてベクトルをきちんと理解し、さらにはこれを有効に使いこなすことができるようになるのである。

そして、本講義でのベクトルが住んでいる空間は、等方性をもった「絶対」空間であり・・云々と、これ以上、哲学的抽象論を展開しても詮無いことのように思われるので、哲学論議はこれまでとして、以下では、我々はベクトル三昧に注力することにしよう。

2.3. 内積

Appendix A に与えてあるようなベクトルの内積と外積の定義については周知のことであろうが、以下で少し復習をしておこう。なお、ここで、注意しておきたいことは、内積と外積のもつ著しい性質は、空間の等方性を反映した双線形性 (bilinearity) にある。

さて、よく使われる内積の定義には二通りがある。一つは「幾何学的定義（geometrical definition)」と呼んでもよいもので、

$$\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta} \tag{2-1}$$

と与えられる。もう一つは、「代数的定義 (algebraic definition)」と呼んでもよいもので、

$$\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n} \tag{2-2}$$

と与えられる（注：ここでは、次元を n 次元としているが、後では、「勝手に」３次元に限定することもある。）この後者の定義が座標系に依らないことは周知であろう（または、そのように了解しておこう。）

我々は、この二つは同じものであるということはよく知っているつもりであるが、これらは、本当に等しいのだろうか。勿論、我々は、長い経験からそれが等しいことを知っているのではあるが・・・。等しいことの一つの説明は、$\cos\theta$ を

$$\cos\theta=\sum a_ib_i \Big/ |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$$

で定義するというものである。これは、いわゆるコーシー・シュワルツの不等式、

$$\left|\sum a_i b_i\right| \le \sqrt{\sum a_i^2 \sum b_i^2}$$

があるので、$\cos\theta$ が「きちんと」求まることが保証される（問：［この不等式を忘れた人へ］これを示せ。）このように定義すると、二つの定義、「幾何学的」定義が「代数的」定義が同じであることが示せたということになる。なお、代数的定義に（固執すると）内積の双線形性は自明である。しかし、この説明では、幾何学的な香りが消えてしまっていることもあり、気分としてはあまりよくない（と思う人もいるかもしれない。）そこでもう少し幾何学的な（または初等的な）雰囲気のある説明をしておこう。

「代数的」定義　＝＞　「幾何学的」定義

上記の説明と似たような感じがするかもしれないが、より初等的な雰囲気があると思う（多分、かつて我々が内積を初めて習った時のものと似ている。）まず、ベクトル、**a** と **b** がなす平面を考え、それを *x-y* 平面とする（これは、なにか座標を変換をしたものということではなく、この平面は初等幾何における補助線（この場合には「補助面」）と思うことにするのである）。

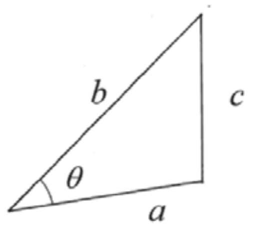


図 1. 平面三角形

すると、よく知られた平面三角法の公式（図 1 を参照）、

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

から、

$$ab\cos\theta = \tfrac{1}{2}\left(\sum a_i^2 + \sum b_i^2 - \sum (b_i - a_i)^2\right)$$

となり、これから、二つの定義、(2-1)、(2-2)が同じであることがわかる（注：ここで、ベクトルの長さ、またはベクトルを表わす「棒」の長さ、例えば、**a** の長さ、a は

$$a = \sqrt{\sum a_i^2}$$

と表わされることを使っている。）

（問（高校生レベル）：［上記の平面三角法の公式を忘れた人へ］初等幾何のレベルでこれを示せ）

「幾何学的」定義　＝＞　「代数的」定義

内積の「幾何学的」定義からは、よく見えないのが、その双線形性であろう。そこで、まず、この定義による内積が双線形性をもつことを示そう。(2-1)式は、明らかに **a** と **b** について対称（θ に関するものも含め）であるので、

$$\mathbf{a}\bullet(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\bullet\mathbf{b} + \mathbf{a}\bullet\mathbf{c} \qquad (2\text{-}3)$$

（分配法則）

となることがわかれば、双線形性が示されたことになる。さらに簡単にすれば、

$$\hat{\mathbf{a}}\bullet(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \hat{\mathbf{a}}\bullet\mathbf{b} + \hat{\mathbf{a}}\bullet\mathbf{c} \qquad (2\text{-}4)$$

となることがわかればよい。ここで、$\hat{\mathbf{a}}$ は **a** 方向の単位ベクトルである。（問：このように簡単化してよいことを示せ。）

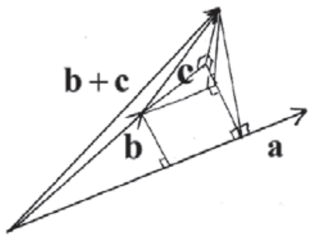


図 2．ベクトルの和

ここで、**図 2** に示すようなベクトル、**a, b, c** からなる平面（補助立体）を考える。すると、図から明らかなように（ヘタに言葉で説明するよりは図を眺める方が明快！）、(2-4)式が成り立つことがわかる。（注：**図 2** には、たくさん垂直の関係を示す記号が書かれているが、そのバックグラウンドには、（古い世代では、高校生で習った）「三垂線の定理」があるということを強調しておく。）

一旦、双線形性が成り立つことがわかると、ベクトル、**a**、**b** を（正規基底ベクトル、$\mathbf{e}_i$ 等で）

$$\mathbf{a} = \sum a_i \mathbf{e}_i \quad , \qquad \mathbf{b} = \sum b_i \mathbf{e}_i$$

と表わすと、

$$\mathbf{a}\bullet\mathbf{b} = \sum_{i,j} (a_i\mathbf{e}_i)\bullet(b_j\mathbf{e}_j) = \sum_{i,j} a_i b_j \mathbf{e}_i\bullet\mathbf{e}_j$$

となるが、$\mathbf{e}_i$ と $\mathbf{e}_j$ との間の角度を θ_{ij} とすると、明らかに

$$\mathbf{e}_i\bullet\mathbf{e}_j = \cos\theta_{ij} = \delta_{ij}$$

なる。つまり、0 か 1 かということになる。これから、代数的定義の式(2-2)が得られる。

以上より、二つの定義、(2-1)、(2-2)は、一見すると異なっているが同じものであることがわかったことになる。

（コメント：以上のようなグチャグチャした（初等的な）説明には興味がなく、how-to に興味のある方は、同じような説明をしている次の項は飛ばした方が精神的に良いかもしれない）

2.4. 外積

内積と同様に外積についても二通りの定義の仕方がある。一つは「幾何学的定義（geometrical definition）」であり、

$$\boxed{\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{n}|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta} \tag{2-5}$$

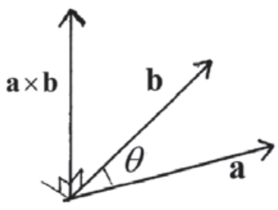


図 3. ベクトル積

と与えられる（図 3 参照）。ここで、**n** は、**a** と **b** に垂直な単位ベクトルであり、**a**、**b**、**n** が右手系をなしている。もう一つの「代数的定義（algebraic definition）」は、

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b}=&\left(a_2b_3-a_3b_2\right)\mathbf{e}_1+\left(a_3b_1-a_1b_3\right)\mathbf{e}_2\\&+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)\mathbf{e}_3\end{aligned}} \tag{2-6}$$

と与えられる。これと同じものであるが、時に便利な形式は、行列式の表式を使った、

$$\boxed{\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & a_1 & b_1\\ \mathbf{e}_2 & a_2 & b_2\\ \mathbf{e}_3 & a_3 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}} \tag{2-7}$$

である 。（問： (2-6)式と(2-7)式は同じものであることを示せ。）ここでも内積と同様に代数的定義は座標系に依らないことは周知であるとする（または、そのように了解しておこう。）また、どちらの定義でも、

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a} \tag{2-8}$$

が成り立つことは明らかであろう。

次に、内積の場合と同様に、幾何学的定義と代数的定義が同じであることを示そう。

<u>「代数的」定義　＝＞　「幾何学的」定義</u>

内積の場合と同様に、ベクトル、**a** と **b** がなす平面を考え、それを x-y 平面とする。すると、

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\left(a_1b_2-a_2b_1\right)\mathbf{e}_3$$

となるが、$\mathbf{e}_3$ の係数、$\left(a_1b_2-a_2b_1\right)$ は、ベクトル、**a** と **b** が作る平行四辺形の（符号付の）面積である（図 4 を参照）。（問：これを示せ。）なお、ベクトル、**a** の方向を x 軸にとると、この係数は、

$$a_1b_2=\text{平行四辺形の底辺}\times\text{(符号付の) 高さ}$$

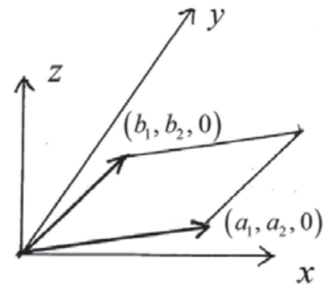


図 4. 平行四辺形の面積

となり、これは（小学生レベルの）平行四辺形の面積の公式となる（ただし、符号付であるが・・）。一方、今の場合、(2-5)式は、

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta\,\mathbf{e}_3$$

となり、$\mathbf{e}_3$ の係数は **a** と **b** が作る平行四辺形の（符号付の）面積である（問：これを示せ。）以上から、代数的定義は幾何学的定義と同じであることがわかったことになる。

なお、ベクトル、**b** の方向を x 軸にとった場合には、係数は、$-a_2b_1$ となり、これは **a** と **b** が作る平行四辺形の（符号付の）面積となる（問：これは、正しい（符号付の）面積であることを示せ。）

上記で、しつこく符号付と言っているが、この符号がないと、外積にはならないのであるが、3 節で説明する微分形式では、この平行四辺形の（符号付の）面積という考え方（概念）が重要な働きをするのである。（コメント： 面積に符号を付けるだけで、小学生レベルからジャンプできる？！）

<u>「幾何学的」定義　＝＞　「代数的」定義</u>

内積の場合と同様に、まずは外積の幾何学的定義での次の双線形性を示す。

$$\mathbf{a}\times\left(\mathbf{b}+\mathbf{c}\right)=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c} \tag{2-9}$$

ここで、内積と同様に、$\mathbf{a}=\hat{\mathbf{a}}$ の場合を示せば十分である。また、(2-9)式が成り立てば、(2-8)から

$$\left(\mathbf{b}+\mathbf{c}\right)\times\mathbf{a}=\mathbf{b}\times\mathbf{a}+\mathbf{c}\times\mathbf{a} \tag{2-10}$$

も成り立つことがわかる。まず、図を使った説明をわかりやすくするために、外積の結果（ベクトル）を $\hat{\mathbf{a}}$ 軸の周りに時計方向に 90 度回転したものを考える（必要なら後で反時計方向に 90 度回転すればよい）。すると、図 5 に示すように、(2-9)式は、単に $\hat{\mathbf{a}}$ 軸に垂直な平面内のベクトル（平面に射影したベクトル）の和の公式にすぎないこと

がわかる。この射影を、P とすれば、$\hat{\mathbf{a}}\times\mathbf{b}$ に相当するものは、$P(\mathbf{b})$ であることから、

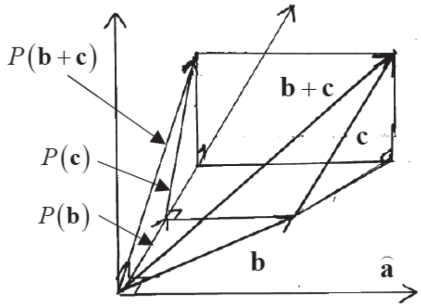


図 5. 90 度回転した外積

$$P(\mathbf{b}+\mathbf{c})=P(\mathbf{b})+P(\mathbf{c})$$

となる。

一旦、双線形性がわかると、

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b}&=(a_2b_3-a_3b_2)\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3\\&+(a_3b_1-a_1b_3)\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1+(a_1b_2-a_2b_1)\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2\end{aligned}\qquad(2\text{-}11)$$

と展開される（問：これを示せ。）また、幾何学的定義から、明らかに、

$$\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_1,\quad \mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_2\qquad(2\text{-}12)$$
$$\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_3$$

であるので、(2-11)は、代数的定義である(2-6)式となることがわかる。

さて、ベクトル解析では、二つのベクトルの関係式（二項関係）として、どうして内積と外積しかでてこないのであろうか？（当たり前だと思う方は飛ばしてもよいが）一応、Appendix B に空間の等方性を考慮すると、スカラー量としては内積、またベクトル量としては外積しかないことを示しておいた（注：ベクトル解析を単なるツールと考え、役に立つか立たないかという観点で見ると、この Appendix B はほとんど役に立たないであろうが・・・）

また、Appendix C に内積と外積のルーツであると言われている四元数について略説しておいた。

2.5. 内積・外積に関する有用な関係式

まず出発点となるのは、次の（最も基本的な関係式であると言ってもよいであろう）二つの関係式である。

$$\boxed{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}$$
$$=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}\qquad(2\text{-}13)$$

$$\boxed{\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}}\qquad(2\text{-}14)$$

(2-13)式は、よく知られている平行 6 面体（parallelepiped）の体積の表式である（図 6）。また、(2-7)式から

$$\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1&b_1&c_1\\\mathbf{e}_2&b_2&c_2\\\mathbf{e}_3&b_3&c_2\end{vmatrix}\qquad(2\text{-}15)$$

であり、これと $\mathbf{a}$ との内積をとることにより、

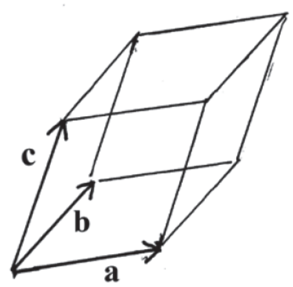


図 6. 平行六面体の体積

(2-13)式の行列式が得られる（それは、(2-15)が基底ベクトル、$\mathbf{e}_1$ 等に関して線形であり、それと $\mathbf{a}$ との内積をとると、a_1 等になることから直ちにわかる。）つまり、ベクトル、$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ の成分からなる行列の行列式が平行六面体の体積になるのである（これも多分、周知のことであろう）。なお、ベクトル、$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ の順番を巡回させた、(2-13)のベクトル表示の箇所は、応用上、重要であるので、再記しておくことにする。

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\qquad(2\text{-}16)$$

この関係は、図 6 から、または行列式の性質から明らかである。

ついでに、ここで逆格子空間（reciprocal lattice space）についてごく簡単に触れておく。それは、以下の式で与えられるベクトルを基底ベクトルとして構成される空間である。

$$\mathbf{a}^*=\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})},\ \mathbf{b}^*=\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})},\ \mathbf{c}^*=\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}\qquad(2\text{-}17)$$

（注：係数に 2π を付ける流儀もある。）

そして、以下の性質をもつ。

$$\mathbf{a}^*\bullet\mathbf{a}=1,\ \mathbf{a}^*\bullet\mathbf{b}=0,\ \mathbf{a}^*\bullet\mathbf{c}=0$$
$$\mathbf{b}^*\bullet\mathbf{a}=0,\ \mathbf{b}^*\bullet\mathbf{b}=1,\ \mathbf{b}^*\bullet\mathbf{c}=0 \qquad (2\text{-}18)$$
$$\mathbf{c}^*\bullet\mathbf{a}=0,\ \mathbf{c}^*\bullet\mathbf{b}=0,\ \mathbf{c}^*\bullet\mathbf{c}=1$$

（問：これを示せ。）

この逆格子ベクトルは、結晶学や固体物理学に登場するもので、逆格子空間における基底ベクトルをなす。さらに、これらは、以下のような対応で、ベクトルを実数に写像する線形写像の空間、双対空間（dual space）の基底とも考えることができる。それは、この線形写像が内積の形で表されるからである。ベクトルを

$$\mathbf{x}=x_1\,\mathbf{a}+x_2\,\mathbf{b}+x_3\,\mathbf{c}$$

とし、これに写像、f を適用すると、

$$\mathrm{f}(\mathbf{x})=\mathbf{x}=x_1\,\mathrm{f}(\mathbf{a})+x_2\,\mathrm{f}(\mathbf{b})+x_3\,\mathrm{f}(\mathbf{c})$$

となり、これは、また

$$\mathrm{f}(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}\mathrm{f}(\mathbf{a}) & \mathrm{f}(\mathbf{b}) & \mathrm{f}(\mathbf{c})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\mathbf{f}^*\bullet\mathbf{x}$$

と内積の形で表わされる。ここで、

$$\mathbf{f}^*=\begin{pmatrix}\mathrm{f}(\mathbf{a})\\\mathrm{f}(\mathbf{b})\\\mathrm{f}(\mathbf{c})\end{pmatrix}$$

である。これらのことから、双対空間の基底と逆格子空間の基底ベクトルの間には、次の対応関係があることがわかる。

$$\begin{bmatrix}\mathrm{f}_{\mathbf{a}^*}\\\mathrm{f}_{\mathbf{b}^*}\\\mathrm{f}_{\mathbf{c}^*}\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\mathbf{a}^*\\\mathbf{b}^*\\\mathbf{c}^*\end{bmatrix}$$

ただし、左側の関数の場合は、ベクトルは関数の引数であり、右側の場合には、内積をとるものとする。このような対応関係は、無限次元空間であるヒルベルト空間でも成り立ち、関数解析におけるリースの定理（表現定理）として知られている。つまり、ヒルベルト空間の連続（または有界）線形汎関数（continuous (or bounded) linear functional）は、内積の形で書けるというものである（有限次元の場合には、「連続」という制約をわざわざつけなくてもよい。）

さて、もう一つの基本的な関係式、(2-14)式、

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$$

は、ベクトル解析で記憶に値する数少ない公式の一つである。それは、これが非常に有用であること、また、完全に忘れてしまうと、一瞬では導くことが（多少）むつかしいことからである。

その証明の一つとしては、顕わにベクトルを成分（ベクトル）で表して計算すればよい（たいした計算ではない）。しかし、若干、見通しがよくない。そこで、以下のように考えて、これを証明してみよう。

まず、式の左辺の形から、これは、$\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ に垂直なベクトルであることがわかる。一方、$\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ は、$\mathbf{b}$ と $\mathbf{c}$ に垂直なベクトルであるから、式の左辺のベクトルは、$\mathbf{b}$ と $\mathbf{c}$ がなす平面内にあることがわかる。よって、

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathrm{f}(\mathbf{a},\mathbf{c})\mathbf{b}+\mathrm{g}(\mathbf{a},\mathbf{b})\mathbf{c}$$

という形に表されることがわかる（問：ベクトル演算の線形性を使って、これを示せ）。上の式で、$\mathbf{b}$ と $\mathbf{c}$ を入れ替えると、

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{b})=-\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathrm{f}(\mathbf{a},\mathbf{b})\mathbf{c}+\mathrm{g}(\mathbf{a},\mathbf{c})\mathbf{b}$$

となる。これから、

$$\mathrm{g}(\mathbf{a},\mathbf{b})=-\mathrm{f}(\mathbf{a},\mathbf{b})$$

となることがわかる。さらに、（スカラー）関数、$\mathrm{f}(\mathbf{a},\mathbf{b})$ は、ベクトル、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ について、線形であることから、

$$\mathrm{f}(\mathbf{a},\mathbf{b})=\lambda(\mathbf{a}\bullet\mathbf{b})$$

となることがわかる（Appendix B を参照のこと。）定数、λ の大きさは、1 程度であろうことは想像にかたくないが、たとえば、

$$\mathbf{j}\times(\mathbf{i}\times\mathbf{j})=\mathbf{i}$$

であることから、$\lambda=1$ であることがわかる。以上で関係式、(2-14)が証明されたことになる。

これらの二つの基本的な関係式を使うと、以下のようにベクトル演算の関係式は容易に証明できる。

ベクトル積の例

ここで取り上げるのは、あくまでもベクトル積のいくつかの例であるが、実用上は多分、これくらいで十分であろう。

$$\mathbf{a}\times\left(\mathbf{b}\times\mathbf{c}\right)+\mathbf{b}\times\left(\mathbf{c}\times\mathbf{a}\right)+\mathbf{c}\times\left(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right)=0 \quad (2\text{-}19)$$

［Jacobi identity］

（問：これを示せ。）

$$\boxed{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\bullet(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a}\bullet\mathbf{c})(\mathbf{b}\bullet\mathbf{d})-(\mathbf{a}\bullet\mathbf{d})(\mathbf{b}\bullet\mathbf{c})} \quad (2\text{-}20)$$

証明は、たとえば、$\left(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right)$ を一つのベクトルと考えて、

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\bullet(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\mathbf{c}\bullet(\mathbf{d}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}))$$

とすればよい（問：証明を完了せよ。）

(2-20)式から、明らかではあるが、重要な関係式、

$$\boxed{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2=\mathbf{a}^2\,\mathbf{b}^2-(\mathbf{a}\bullet\mathbf{b})^2} \quad (2\text{-}21)$$

が導かれる。さらに、これから

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

［ピタゴラスの定理（Pythagorean theorem）］

という（最も）有名かつ重要な定理が導かれる（問：「絶対に忘れてはいけない」この式を示せ。）

以下の式の証明は（全く）容易であろう。

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})&=\left[\mathbf{d}\bullet\left(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right)\right]\mathbf{c}-\left[\mathbf{c}\bullet\left(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right)\right]\mathbf{d}\\&=\left[\mathbf{a}\bullet\left(\mathbf{b}\times\mathbf{d}\right)\right]\mathbf{c}-\left[\mathbf{a}\bullet\left(\mathbf{b}\times\mathbf{c}\right)\right]\mathbf{d}\\&=\left[\mathbf{a}\bullet\left(\mathbf{c}\times\mathbf{d}\right)\right]\mathbf{b}-\left[\mathbf{b}\bullet\left(\mathbf{c}\times\mathbf{d}\right)\right]\mathbf{a}\\&=\left[\mathbf{c}\bullet\left(\mathbf{d}\times\mathbf{a}\right)\right]\mathbf{b}-\left[\mathbf{c}\bullet\left(\mathbf{d}\times\mathbf{b}\right)\right]\mathbf{a}\end{aligned}$$

これから、

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{c})=\left[\mathbf{a}\bullet\left(\mathbf{b}\times\mathbf{c}\right)\right]\mathbf{a}$$

が導かれるが、直接、計算した方が早いであろう。

以上の説明からわかるように、ベクトル演算については、二つの基本的な関係式を知っていれば実用上は十分であることがわかる（多分、それ以外のものは不要であろう。）

次にベクトル演算そのものではないが、これを使った関係式を例示しておく。

物理の教科書などで、（突然、）

$$\boxed{\varepsilon^{ijk}\ \varepsilon^{ilm}=\delta_{jl}\ \delta_{km}-\delta_{jm}\ \delta_{kl}} \quad (2\text{-}22)$$

という関係式が出てきて、（証明は簡単なので）証明なしに使うと「宣言」されて「困惑した」経験はないであろうか。確かに、機械的にすべての場合分けを考えれば、成り立つことはわかるのであるが・・

(2-20)式を使うと、この関係式が成り立つのを「より機械的に」示すことができる。まず、今まで意図的に使ってこなかった、レヴィ・チヴィタの記号を使うと、ベクトルの外積は、

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{e}_i\left(\varepsilon^{ijk}a_jb_k\right)$$

と書ける（これは、読者にとって周知のことであろう。また、重複する添え字については和をとるものとする［いわゆる Einstein の縮約記法］）

ここで、レヴィ・チヴィタの記号、ε^{ijk} は、

$$\varepsilon^{ijk}=\begin{cases}1 & (i,j,k)=(1,2,3)\text{のcyclic置換の場合}\\-1 & (i,j,k)=(2,1,3)\text{のcyclic置換の場合}\\0 & \text{それ以外の場合}\\ & \quad(\mathrm{i,j,k}\text{のどれかが等しい場合})\end{cases} \quad (2\text{-}23)$$

である。［**注：本講義録では、ほとんど場合、添え字の上付き、下付きは区別なく使っている。区別する必要がない座標系（直線直交座標系）を使っているからである。そこで、その場の気分で添え字の位置が上だったり下だったりしている。**］

また、証明になぜ(2-20)式を使うかというと、ε^{ijk} は外積に関係しており、δ_{ij} は内積に関係している（と思うと）、(2-20)と(2-22)とは形がよく似ているからである。(2-20)式は、成分で書くと、

$$\varepsilon^{ijk}\ a_jb_k\,\varepsilon^{ilm}c_ld_m=a_jc_j\ b_kd_k-a_jd_j\ b_kc_k$$

となる。ここで、

$$\mathbf{a}=\mathbf{e}_a \quad \left(\left(\mathbf{e}_a\right)_i=\delta_{ia}\right)$$

とおき（注：ここで、添え字の a は、適当なある整数である）、他も同様に、$\mathbf{b}=\mathbf{e}_b$, $\mathbf{c}=\mathbf{e}_c$, $\mathbf{d}=\mathbf{e}_d$ とおくと、

$$\begin{aligned}&\varepsilon^{ijk}\ \delta_{ja}\delta_{kb}\,\varepsilon^{ilm}\delta_{lc}\delta_{md}\\&=\delta_{ja}\delta_{jc}\ \delta_{kb}\delta_{kd}-\delta_{ja}\delta_{jd}\ \delta_{kb}\delta_{kc}\end{aligned}$$

となる。これから、

$$\varepsilon^{iab}\ \varepsilon^{icd}=\delta_{ac}\ \delta_{bd}-\delta_{ad}\ \delta_{bc} \quad (2\text{-}24)$$

となるが、これは(2-22)式と同じものである。また、(2-22)式から、直ちに

$$\varepsilon^{ijk}\ \varepsilon^{ijm}=2\ \delta_{km} \quad (2\text{-}25)$$

となることもわかる（問：これを示せ。）さらに、

$$\varepsilon^{ijk}\ \varepsilon^{ijk}=6$$

という関係も得られる（注：これは、単に、$3!=6$ を言っているだけでもある。）ここまで説明してしまったので、ついでに関連することを付け加えておく。

$$\mathbf{a}\bullet\left(\mathbf{b}\times\mathbf{c}\right)=a_i\varepsilon^{ijk}b_jc_k$$

であることから、

$$\mathbf{e}_a \bullet (\mathbf{e}_b \times \mathbf{e}_c) = \varepsilon^{abc}$$

$$= \mathrm{Det}\begin{bmatrix} \mathbf{e}_a & \mathbf{e}_b & \mathbf{e}_c \end{bmatrix} = \mathrm{Det}\begin{bmatrix} \mathbf{e}_a{}^T \\ \mathbf{e}_b{}^T \\ \mathbf{e}_c{}^T \end{bmatrix} \tag{2-26}$$

となる。これから、

$$\varepsilon^{ijk}\,\varepsilon^{lmn} = \mathrm{Det}\begin{bmatrix} \mathbf{e}_i{}^T \\ \mathbf{e}_j{}^T \\ \mathbf{e}_k{}^T \end{bmatrix} \mathrm{Det}\begin{bmatrix} \mathbf{e}_l & \mathbf{e}_m & \mathbf{e}_n \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{Det}\begin{bmatrix} \mathbf{e}_i \bullet \mathbf{e}_l & \mathbf{e}_i \bullet \mathbf{e}_m & \mathbf{e}_i \bullet \mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}_j \bullet \mathbf{e}_l & \mathbf{e}_j \bullet \mathbf{e}_m & \mathbf{e}_j \bullet \mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}_k \bullet \mathbf{e}_l & \mathbf{e}_k \bullet \mathbf{e}_m & \mathbf{e}_k \bullet \mathbf{e}_n \end{bmatrix} = \mathrm{Det}\begin{bmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{bmatrix}$$

と求まる。これを使うと（たとえば、行列式の第一列について展開すると）、

$$\varepsilon^{ijk}\,\varepsilon^{imn} = (3-1-1)\mathrm{Det}\begin{bmatrix} \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{Det}\begin{bmatrix} \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} \end{bmatrix} = \delta_{jm}\,\delta_{kn} - \delta_{jn}\,\delta_{km}$$

となり、再び(2-22)式が得られる。

2.6. ベクトルの微分

微分がもつ性質の中で最も重要なものは、多分、その線形性であろう。たとえば、

$$y = \mathrm{f}(\mathbf{x}) = \mathrm{f}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

が与えられたとすると、我々は「習性として」すぐに、微分して、

$$dy = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x_2}dx_2 + \cdots \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x_n}dx_n \tag{2-27}$$

とする。この式は、ある点、$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ を固定して考えると、明らかに dx_1 等について線形である。このことについて、Appendix D で、初等的ではあるが、もう少し説明をしてある。

この線形性に密接に関係している微分の重要な性質は、次のライプニッツ則（Leibniz's rule ）である。

$$\boxed{d(f \bullet g) = df \bullet g + f \bullet dg} \tag{2-28}$$

ここで、f, g は（スカラー）数である。ある意味で微分を特徴づけるものは、このLeibniz's rule であると言ってもよいであろう。なお、(2-27)式で、$y = \mathrm{F}(f, g)$ とし、f, g を（独立）変数とすると、(2-28)式になる。

通常、上記の記号、d は微分形式等（3 節を参照）で用いられており、ベクトルの微分で出てくるものは、偏微分である。周知のように、これについても次の Leibniz's rule が成り立つ。

$$\frac{\partial}{\partial x}(f \bullet g) = (\frac{\partial}{\partial x} f) \bullet g + f \bullet \frac{\partial}{\partial x} g \tag{2-29}$$

なお、以下では、

$$\partial = \frac{\partial}{\partial x}$$

というように変数を明示しない略記号を使うこともある。たとえば、(2-29)式で、f, g に関する双線形性から、

$$\partial = \partial_f + \partial_g$$

と「記号的に」微分をわけると、

$$\partial(f \bullet g) = (\partial_f + \partial_g)(f \bullet g)$$

$$= \partial_f(f \bullet g) + \partial_g(f \bullet g) = (\partial_f f) \bullet g + f \bullet (\partial_g g)$$

と書くことができる。ベクトルに関しても、ベクトル積（内積、外積）の双線形性から、

$$\boxed{\partial(\mathbf{f} * \mathbf{g}) = (\partial \mathbf{f}) * \mathbf{g} + \mathbf{f} * \partial \mathbf{g}} \tag{2-30}$$

となる。ここで、$*$ は内積、$\bullet$ または外積、$\times$ を表わし、$\mathbf{f}, \mathbf{g}$ はベクトル関数である。

（問：ベクトル積の差分、

$$\Delta(\mathbf{f} * \mathbf{g}) = \mathbf{f}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) * \mathbf{g}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})$$
$$- \mathbf{f}(\mathbf{x}) * \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

から、(2-30)式を示せ。）

ここに、よく知られているナブラ記号（nabla）またはデル記号（del）を参考ために記しておく。

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$
$$= \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{2-31}$$

場合によっては、ナブラ記号のように微分とベクトルがいっしょにでてくるために若干、混乱することがある。このような場合には、

$$\boldsymbol{\mu}\,\partial * \mathbf{f} = \boldsymbol{\mu} * \partial \mathbf{f} \tag{2-32}$$

を使うと便利である。（これは「定義」であるとしてもよいが・・）、

$$\boldsymbol{\mu}\Delta*\mathbf{f}=\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})\left(*\mathbf{f}(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x})-*\mathbf{f}(\mathbf{x})\right)$$
$$=\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})*\left(\mathbf{f}(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x})\right)$$

であることから、(2-32)がでてくる。また、時々、有用である記法に、

$$f\overleftarrow{\partial}=\partial f$$

がある。

書くまでもないことであるが、ここに、一応、ベクトルの発散（divergence、記号：div）と回転（rotation、記号：rot）を記しておこう。

$$\boxed{\begin{aligned}div\mathbf{A}=\nabla\bullet\mathbf{A}&=\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\frac{\partial A_2}{\partial x_2}+\frac{\partial A_3}{\partial x_3}\\&=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}rot\mathbf{A}=\nabla\times\mathbf{A}=&\left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2}-\frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right)\mathbf{e}_1+\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3}-\frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right)\mathbf{e}_2\\&+\left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1}-\frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)\mathbf{e}_3\end{aligned}}$$

また、行列式の表示では、

$$\boxed{rot\mathbf{A}=\det\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1&\partial_1&A_1\\\mathbf{e}_2&\partial_2&A_2\\\mathbf{e}_3&\partial_3&A_3\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1&\mathbf{e}_2&\mathbf{e}_3\\\partial_1&\partial_2&\partial_3\\A_1&A_2&A_3\end{bmatrix}}$$

などとなる（**注：ここで、座標系は、直線直交座標系であり、また$\partial\mathbf{e}=0$であることを使っている。**）

以上でベクトルの微分の「基本」が終わったので、後はその応用である。以下にいくつかの例を（順不同で）示すことする（なお、重要なのは、「訓練」である）。

<u>ベクトルの微分の例</u>

ここでの例は、あくまでも例であって、ベクトルの微分のリストを網羅しようという意図は全くないが、実用上、または演習（exercise）用としては十分であろう。

$$\boxed{\nabla(f\cdot g)=(\nabla f)g+f(\nabla g)}$$

（これは、ほとんど Leibniz's rule そのもの）

$$\boxed{\nabla\times\nabla\phi=\mathrm{rot\ grad}\,\phi=0}$$

（$\nabla\times\nabla=0$　であることから）

$$\boxed{\nabla\cdot\nabla\phi=\nabla^2\phi}$$

（ラプラシアン（Laplacian）の定義）

$$\boxed{\nabla\bullet(\nabla\times\mathbf{A})=0}$$

（$\nabla\bullet(\nabla\times\mathbf{A})=\mathbf{A}\bullet(\overleftarrow{\nabla}\times\overleftarrow{\nabla})(=(\nabla\times\nabla)\bullet\mathbf{A})=0$　）

$$\boxed{\nabla\bullet(\phi\mathbf{A})=\nabla\phi\bullet\mathbf{A}+\phi\nabla\bullet\mathbf{A}}$$

（$\nabla=\nabla_\phi+\nabla_{\mathbf{A}}$　）

$$\nabla\times(\phi\mathbf{A})=\nabla\phi\times\mathbf{A}+\phi\nabla\times\mathbf{A}$$

（**注意！**：$\nabla\times(\mathbf{A}\phi)\neq\mathbf{A}\times\nabla\phi+(\nabla\times\mathbf{A})\phi$　）

$$\boxed{\nabla\bullet(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{B}\bullet(\nabla\times\mathbf{A})-\mathbf{A}\bullet(\nabla\times\mathbf{B})}$$

$$\left(\begin{aligned}\nabla\bullet(\mathbf{A}\times\mathbf{B})&=\nabla_{\mathbf{A}}\bullet(\mathbf{A}\times\mathbf{B})+\nabla_{\mathbf{B}}\bullet(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\\&=\mathbf{B}\bullet(\nabla_{\mathbf{A}}\times\mathbf{A})+\mathbf{A}\bullet(\mathbf{B}\times\overleftarrow{\nabla}_{\mathbf{B}})\end{aligned}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=&\mathbf{A}(\nabla\bullet\mathbf{B})-\mathbf{B}(\nabla\bullet\mathbf{A})\\&+(\mathbf{B}\bullet\nabla)\mathbf{A}-(\mathbf{A}\bullet\nabla)\mathbf{B}\end{aligned}}$$

（$\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\nabla_{\mathbf{A}}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})+\nabla_{\mathbf{B}}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$　）

（または、一気に、

$\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{A}(\overleftrightarrow{\nabla}\bullet\mathbf{B})-\mathbf{B}(\overleftrightarrow{\nabla}\bullet\mathbf{A})$　として）

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla(\mathbf{A}\bullet\mathbf{B})=&(\mathbf{A}\bullet\nabla)\mathbf{B}+(\mathbf{B}\bullet\nabla)\mathbf{A}\\&+\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})+\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})\end{aligned}}$$

$$\left(\begin{aligned}&\nabla(\mathbf{A}\bullet\mathbf{B})=\nabla_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}\bullet\mathbf{B})+\nabla_{\mathbf{B}}(\mathbf{A}\bullet\mathbf{B})\\&\mathbf{A}\times(\nabla_{\mathbf{B}}\times\mathbf{B})=\nabla_{\mathbf{B}}(\mathbf{A}\bullet\mathbf{B})-(\mathbf{A}\bullet\nabla_{\mathbf{B}})\mathbf{B}\\&\mathbf{B}\times(\nabla_{\mathbf{A}}\times\mathbf{A})=\nabla_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}\bullet\mathbf{B})-(\mathbf{B}\bullet\nabla_{\mathbf{A}})\mathbf{A}\end{aligned}\right)$$

（または、

$$\mathbf{c}\partial(\mathbf{A}\bullet\mathbf{B})=\mathbf{c}((\partial\mathbf{A})\bullet\mathbf{B})+\mathbf{c}(\mathbf{A}\bullet(\partial\mathbf{B}))$$
$$\mathbf{A}\times(\mathbf{c}\times\partial\mathbf{B})=\mathbf{c}\left(\mathbf{A}\bullet(\partial\mathbf{B})\right)-(\mathbf{A}\bullet\mathbf{c})\partial\mathbf{B}$$

をつかって）

<u>ベクトル演算の基本関係式（二つ目）を適用して、</u>

$$\boxed{\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{A}=\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{A}-\nabla^2\mathbf{A}}$$

$$\left(\begin{array}{l}\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\nabla\bullet\mathbf{A})-\mathbf{A}\overleftarrow{\nabla}^2\\ \text{または}\\ \nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=(\nabla\bullet\mathbf{A})\overleftarrow{\nabla}-\nabla^2\mathbf{A}\end{array}\right)$$

（注：記憶に値する表式である）

または

$$\nabla^2\mathbf{A}=\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{A}-\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})$$

となる・・・・。

と調子よくやってしまうと、混乱を招く結果に陥ることになる。それは、デル記号をあたかも通常のベクトルのごとに扱って、機械的に計算したためのである。ただし、これは、直線直交座標系（デカルト座標系）を用いている場合には、まったく問題はなく、結果の表式は、「本当に」記憶に値するものである。この問題は再度、2.11 節で取り上げるが、ここで問題点を明らかにしておこう。

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) \tag{2-33}$$

をきちんと計算するには、Leibniz's rule をきちんと適用する必要がある。このために(2-33)を以下のように書き換えることにする。

$$\begin{aligned}&\left(\nabla_\nabla+\nabla_A\right)\times(\nabla_A\times\mathbf{A})\\ &=\nabla_\nabla\times(\nabla_A\times\mathbf{A})+\nabla_A\times(\nabla_A\times\mathbf{A})\\ &=\left(\mathbf{A}\bullet\nabla_\nabla\right)\nabla_A-\left(\nabla_\nabla\bullet\nabla_A\right)\mathbf{A}\\ &\quad+\nabla_A\left(\nabla_A\bullet\mathbf{A}\right)-\left(\nabla_A\bullet\nabla_A\right)\mathbf{A}\end{aligned}$$

しかし、この式を間違えないように評価することはむつかしいであろう。たとえば、最後の式の第三項は、$\nabla_A\left(\nabla\bullet\mathbf{A}\right)$ となるが、これは、決して、

$$\nabla\left(\nabla\bullet\mathbf{A}\right)=grad\left(div\mathbf{A}\right)$$

ではない。また、第二項と第四項は合わせて、

$$\begin{aligned}&-\left(\nabla_\nabla\bullet\nabla_A\right)\mathbf{A}-\left(\nabla_A\bullet\nabla_A\right)\mathbf{A}\\ &=-\left(\nabla\bullet\nabla_A\right)\mathbf{A}=-\left(\nabla\bullet\nabla\right)\mathbf{A}\end{aligned}$$

となるが、これを求めるには、まず∇ を$\mathbf{A}$ に作用させて（$\nabla\mathbf{A}$ はベクトル解析の範囲を越える対象物）、それから内積をとり、それに∇を作用させるということをする必要がある。第一項は、このままでは、これ以上、簡単にならないであろう。勿論、直線直交座標系の場合には、簡単になって、「記憶に値する表式」になる（問：これを示せ（ただし、やる必要はないが・・）。）いずれにしろ、「記憶に値する表式」は、Leibniz's rule に忠実に従ったものではなく、少しルールを無視して、直線直交座標系では有用になるようにしたものであると言えるかもしれない。

この計算を間違えないようにやるには、以下のようにするのがよいであろう。

(2-33)のデル記号を以下のようにベクトルと微分にわけ、曲線直交座標系では、このベクトルが座標に依存することを考えると、

$$\begin{aligned}\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})&=\mathbf{a}\partial_a\times(\mathbf{b}\partial_b\times\mathbf{A})\\ &=\mathbf{a}\partial_a\times(\mathbf{b}\times\partial_b\mathbf{A})\\ &=\mathbf{a}\times(\partial_a\mathbf{b}\times\partial_b\mathbf{A})+\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\partial_a\partial_b\mathbf{A})\\ &=\partial_a\mathbf{b}\left(\mathbf{a}\bullet\partial_b\mathbf{A}\right)-\left(\mathbf{a}\bullet\partial_a\mathbf{b}\right)\partial_b\mathbf{A}\\ &\quad+\mathbf{b}\left(\mathbf{a}\bullet\partial_a\partial_b\mathbf{A}\right)-\left(\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}\right)\partial_a\partial_b\mathbf{A}\end{aligned} \tag{2-34}$$

となる。ここで、$\mathbf{a}=\mathbf{e}_a$，$\mathbf{b}=\mathbf{e}_b$ と略記している（本講義での変則的記法である）。もし直線直交座標であるとすると、

$$\partial_a\mathbf{b}=0$$

であり、

$$\left(\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}\right)=\left(\mathbf{e}_a\bullet\mathbf{e}_b\right)=\delta_{a\,b}$$

となる。さらに、$\partial_b\mathbf{a}=0$ であることから、

$$\begin{aligned}&\mathbf{b}\left(\mathbf{a}\bullet\partial_a\partial_b\mathbf{A}\right)=\mathbf{b}\partial_b\left(\mathbf{a}\bullet\partial_a\mathbf{A}\right)=\mathbf{b}\partial_b\left(\mathbf{a}\partial_a\bullet\mathbf{A}\right)\\ &=\nabla\left(\nabla\bullet\mathbf{A}\right)\end{aligned}$$

となる。以上より、(2-34)は、当然のことながら、「記憶に値する表式」になる。一方では、上の計算から、曲線直交座標では、このようにはならないということがわかったことになる。

つまり、

$$\boxed{\nabla^2=\mathrm{grad}\,\mathrm{div}-\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}}$$

とするのは、誤解を与える元となる。もっと言えば、「間違った表式」であるとも言える。これが使えるのは、唯一、直線直交座標系のときのみである。

なお、ナブラ記号が一つしかない場合には、その中のベクトルに外から作用する微分がないので、曲線直交座標系でも、そのままの表式が使える。では、今までに出てきた、$\nabla\times\nabla=\mathbf{0}$ は「どうなのよ？」ということになるが・・・。実際に、これはベクトルの関係式であるので、直線直交座標では明らかに成立するので、OK となるのであるが、これについても 2.11 節で再度、取り上げることにしよう。また、そこでは、デル記号をベクトルと微分にわけて「機械的に」計算するのでは

なく、もう少し（曲線直交座標の）基底ベクトルの性質を使って見通しよく計算している。

なお、デル記号をベクトルと微分にわけるやり方は、直線直交座標系でのベクトルの公式を求める際に心配になった場合には、有効である（不安がなくなる）。

座標ベクトルに関係する微分

露骨に座標成分を考えることで、容易に、

$$\boxed{\nabla \bullet \mathbf{r} = 3}$$

と、

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}}$$

が導かれる。また、多分、露骨に計算した方がよいものとして、

$$\boxed{(\mathbf{a} \bullet \nabla)\mathbf{r} = \mathbf{a}} \qquad (2\text{-}35)$$

がある（**注：この $\mathbf{a} \bullet \nabla$ は、$\mathbf{a}$ 方向の方向微分と呼ばれるもので、「特別な性質」を持っている。それは、内積であるにも関わらず、一つのベクトル、$\mathbf{a}$ のみに依っていることである。また、内積であるので、座標変換に対して不変である。さらに、これを座標ベクトルに作用させると、$\mathbf{a}$ が「復元」される。このようなことから、これはスカラー量ではあるが、なんとなくベクトル、$\mathbf{a}$ に対応するものとして扱ってもよさそうな感じがしてくる。**）

次に、$r^2 = \mathbf{r} \bullet \mathbf{r}$ を微分することで、

$$2r\nabla r = 2(\mathbf{r} \bullet \nabla)\mathbf{r} + 2\mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{r})$$

となるが、上のことから、直ちに、$r\nabla r = \mathbf{r}$ となり、

$$\boxed{\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r} \ (= \mathbf{e}_r = \mathbf{n}) \qquad (r \neq 0)}$$

勿論、座標成分で表して計算しても簡単である。

$$\boxed{\nabla \bullet \mathbf{n} = \frac{2}{r}}$$

これは、$\nabla \bullet \mathbf{n} = \nabla \bullet (\mathbf{r}/r)$ または、$\nabla \bullet \mathbf{r} = \nabla \bullet (r\,\mathbf{n})$ を使えばよい（後者の方が簡単。）

$$\nabla \times \mathbf{n} = 0$$

これは、たとえば、$\mathbf{0} = \nabla \times \mathbf{r} = \nabla \times (r\,\mathbf{n})$ から導かれる。

$$\boxed{\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{\mathbf{n}}{r^2} \ (r \neq 0)}$$

これは、（若干、大げさに言えば）合成関数の微分法（chain rule）から、直ちに（暗算で）求まる。

$$\nabla \bullet \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0 \ (r \neq 0)$$

これは、$\nabla \bullet \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\nabla \bullet \left(\frac{\mathbf{n}}{r^2}\right) = -\frac{\nabla \bullet \mathbf{n}}{r^2} + 2\frac{\mathbf{n}}{r^3}$ から。

なお、原点も含めると、

$$\boxed{\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\,\delta(\mathbf{r})}$$

となる。右辺の符号と係数を忘れてしまった場合には、重力ポテンシャルまたは電磁場ポテンシャルの場合を思い出せばよい（参考：2.9 節のヘルムホルツの定理）。

$$\boxed{\nabla f(r) = f'(r)\frac{\mathbf{r}}{r} = f'(r)\mathbf{n} \qquad (r \neq 0)}$$

これは、Chain rule から直ちに求まる。

$$\boxed{\nabla \times (f(r)\mathbf{r}) = \nabla f(r) \times \mathbf{r} + f(r)\nabla \times \mathbf{r} = 0}$$

これは明らかであろう。

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla \bullet (f(r)\mathbf{r}) &= (\nabla f(r)) \bullet \mathbf{r} + f(r)\nabla \bullet \mathbf{r} \\ &= f'(r)r + 3f(r)\end{aligned}}$$

単に計算するだけ。

$$\boxed{\nabla \bullet (\mathbf{c} \times \mathbf{r}) = 0 \quad (\mathbf{c}:\text{const. vector})}$$

これは、$\nabla \bullet (\mathbf{c} \times \mathbf{r}) = \mathbf{r} \bullet (\nabla \times \mathbf{c}) - \mathbf{c} \bullet (\nabla \times \mathbf{r})$ から。

$$\boxed{\nabla(\mathbf{c} \bullet \mathbf{r}) = \mathbf{c}}$$

これは、

$$\begin{aligned}\nabla(\mathbf{c} \bullet \mathbf{r}) &= (\mathbf{c} \bullet \nabla)\mathbf{r} + (\mathbf{r} \bullet \nabla)\mathbf{c} \\ &\quad + \mathbf{c} \times (\nabla \times \mathbf{r}) + \mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{c})\end{aligned}$$

で、右辺の第一項のみが残ることからわかる。また、成分で表すと、ほとんど明らかであろう。

$$\boxed{\nabla \times (\mathbf{c} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{c} \qquad (\mathbf{c}:\text{const. vector})}$$

$\nabla\times(\mathbf{c}\times\mathbf{r})=(\nabla\bullet\mathbf{r})\mathbf{c}-(\mathbf{c}\bullet\nabla)\mathbf{r}=3\mathbf{c}-\mathbf{c}=2\mathbf{c}$ であるので。ちなみに、電磁気でよくでてくる一様磁場のベクトル・ポテンシャルは、

$$\boxed{\mathbf{A}=\frac{1}{2}\mathbf{B}_0\times\mathbf{r}\qquad(\mathbf{B}_0=const.)}$$

と与えられ、これから、

$$\nabla\times\mathbf{A}=\mathbf{B}_0$$

となる。

$$\boxed{\nabla(\mathbf{c}\bullet f(r)\mathbf{r})=(\mathbf{c}\bullet\nabla)\,f(r)\mathbf{r}\qquad(\mathbf{c}:\text{const. vector})}$$

（問：これを示せ。できれば暗算で・・）

$$\boxed{\nabla(\nabla f(r)\bullet\mathbf{c})=(\mathbf{c}\bullet\nabla)\nabla f(r)\qquad(\mathbf{c}:\text{const. vector})}$$

これは、

$$\nabla(\nabla f(r)\bullet\mathbf{c})=(\mathbf{c}\bullet\nabla)\nabla f(r)+\mathbf{c}\times(\nabla\times\nabla f(r))$$

から。（問：これを示せ。）

$$\boxed{\nabla\times(\nabla f(r)\times\mathbf{c})=(\mathbf{c}\bullet\nabla)\nabla f(r)-(\nabla^2 f(r))\mathbf{c}}$$

$$(\mathbf{c}:\text{const. vector})$$

（問：これを示せ。）

もし、 $\nabla^2 f(r)=0$ であるとすると、

$$\nabla\times(\nabla f(r)\times\mathbf{c})=(\mathbf{c}\bullet\nabla)\nabla f(r)$$

となる。

$$\boxed{(\mathbf{a}\times\nabla)\bullet\mathbf{r}=0}$$

これは明らかであろう。

$$\boxed{(\mathbf{a}\bullet\nabla)\mathbf{n}=\frac{\mathbf{a}-(\mathbf{a}\bullet\mathbf{n})\mathbf{n}}{r}}$$

これは、

$$(\mathbf{a}\bullet\nabla)\mathbf{n}=(\mathbf{a}\bullet\nabla)\frac{\mathbf{r}}{r}=\frac{(\mathbf{a}\bullet\nabla)\mathbf{r}}{r}+(\mathbf{a}\bullet\mathbf{r})\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$$

から導かれる。

＜閑話休題：$\mathbf{a}\bullet d\mathbf{a}=a\,da$ ＞

ここで、一見して明らかな表題の関係について少し触れておこう。

$$a^2=\mathbf{a}\bullet\mathbf{a}=a_1^2+a_2^2+a_3^2$$

であるので、

$$a\,da=\mathbf{a}\bullet d\mathbf{a}=a_1\,da_1+a_2\,da_2+a_3\,da_3$$

であると言ってしまうと、これで話は終わってしまうが、これを図 7 のようなポンチ絵を描いて眺めると、少しの時間はつぶせるかもしれない（$|\mathbf{a}|=a$ であるが、$|d\mathbf{a}|\neq da$ である。）

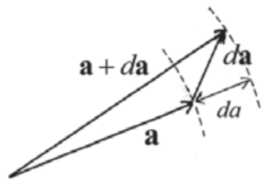


図 7. $\mathbf{a}\bullet d\mathbf{a}=a\,da$

さて、ここで、単位ベクトル、$\mathbf{n}$ を使って、

$$\mathbf{a}=a\,\mathbf{n}$$

とすると、

$$d\mathbf{a}=da\,\mathbf{n}+a\,d\mathbf{n}$$

となる。ここで、重要な関係式、

$$\mathbf{n}\bullet d\mathbf{n}=0$$

（問：これを示せ）を使うと、再び、

$$\boxed{\mathbf{a}\bullet d\mathbf{a}=a\,da}$$

となる（問：これを示せ。）

今、ベクトル、$\mathbf{b}$ と $\mathbf{a}$ が平行である、$\mathbf{b}\parallel\mathbf{a}$ とすると、

$$\mathbf{b}=b\mathbf{n}$$

として、

$$\boxed{\mathbf{b}\bullet d\mathbf{a}=b\,da}\tag{2-36}$$

が導かれる。これは当たり前の式であるとも言えるが、後の 2.12 節で、この関係式を使うであろう。

ついでに、関連する簡単な関係式を以下に列挙しておく（これは、また簡単な練習問題でもある。）なお、$\dot{\mathbf{n}}$ 等は $\mathbf{n}$ の時間微分、距離（道のり）の微分や一つの変数に関する偏微分などを表わしているものとする。

$$\mathbf{n}\bullet\dot{\mathbf{n}}=0,\quad \mathbf{a}\bullet\dot{\mathbf{a}}=a\,\dot{a},\quad \mathbf{b}\bullet\dot{\mathbf{a}}=b\,\dot{a}$$

$$\mathbf{a}\times d\mathbf{a}=a^2\,\mathbf{n}\times d\mathbf{n}$$

$$\mathbf{b}\times d\mathbf{a}=b\,a\,\mathbf{n}\times d\mathbf{n}$$

$$\boxed{\mathbf{a}\times\dot{\mathbf{a}}=a^2\,\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{n}},\ \mathbf{b}\times\dot{\mathbf{a}}=b\,a\,\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{n}}}$$

2.7. ベクトルの積分

積分の初等的イメージは、次のような和の極限である。

$$\sum_i f(x_i)\Delta x \quad \to \quad \int f(x)dx$$

また、和の性質から以下のような線形性がある。

$$\int\big(f(x)+g(x)\big)dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$$

ベクトルの積分も上記と同様に和の極限として定義される。

$$\sum_i \mathbf{f}(x_i)\Delta x \quad \to \quad \int \mathbf{f}(x)dx$$

よって、ベクトル和の性質から、

$$\sum_i f_1(x_i)\mathbf{e}_1+f_2(x_i)\mathbf{e}_2+f_3(x_i)\mathbf{e}_3\Delta x \ \to$$
$$\int f_1(x_i)dx\,\mathbf{e}_1+\int f_2(x_i)dx\,\mathbf{e}_2+\int f_3(x_i)dx\,\mathbf{e}_3$$

となる。つまり、ベクトルを積分するには、ベクトルの各成分の積分をすればよいことがわかる。(言うまでもなく、これらのことは既に知っていることであろう。)

まったく同様の考え方で、ベクトル演算がある積分についても、ベクトル積の（双）線形性を使うと、

$$\int \mathbf{f}*\mathbf{g}\,dx=\int f_i\mathbf{e}_i*g_j\mathbf{e}_j\,dx$$
$$\left(\int f_ig_j\,dx\right)\mathbf{e}_i*\mathbf{e}_j \qquad (2\text{-}37)$$

となり、積分とベクトル演算は、(ある意味で）独立に行うことができることがわかる。

一般的なベクトルの積分は、上述のように考えると、これで「おしまい」となるのであるが、ベクトルの積分で重要なのは、積分の領域を変換する（たとえば、体積積分を表面積分に変換する）公式である。代表的なものには、ガウス（Gauss）の公式やストークス（Stokes）の公式がある。ここで、(これらを含む）より一般的で有用な公式を提示しよう。それは、次の三つの公式である。

$$\int_V dV\,\nabla=\int_S d\mathbf{S}\quad \left(=\int_S \mathbf{n}dS\right) \qquad \text{(Gauss型)}$$
$$\int_S d\mathbf{S}\times\nabla=\int_\ell d\mathbf{r}\quad \left(=\int_\ell \mathbf{t}d\ell\right) \qquad \text{(Stokes型)}$$
$$\int_\ell d\mathbf{r}\cdot\nabla=\ \Big| \qquad \text{(FTC型)}$$

(2-38)

ここで、FTC とは、(曲線上の）微積分の基本定理、Fundamental Theorem of Calculus (*on the curve*)のことで、この FTC 型の右辺の ｜ は、次の積分の｜と同じ意味である。

$$\int_a^b \frac{df}{dx}dx=f(x)\Big|_a^b$$

この(2-38)は、類書には多分、見受けられないのではないかと思われるので、以下に、少し説明を与えておこう。しかし、表式の形からもわかるように、周知の（また記憶しているべき）次の公式と密接に関係しているのである。

［Gauss の公式］

$$\int_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV=\int_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}=\int_S(\mathbf{A}\cdot\mathbf{n})dS \qquad (2\text{-}39)$$
$$(\nabla\cdot\mathbf{A}=\mathrm{div}\,\mathbf{A})$$

［Stokes の公式］

$$\int_S(\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{S}=\int_\ell \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} \qquad (2\text{-}40)$$
$$(\nabla\times\mathbf{A}=\mathrm{rot}\,\mathbf{A})$$

または、

$$\int_S(\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}\,d\,S=\int_\ell(\mathbf{A}\cdot\mathbf{t})d\,\ell$$

［FTC(*on the curve*)］

$$\int_\mathbf{a}^\mathbf{b}\nabla f\cdot d\mathbf{r}=f(\mathbf{r})\Big|_\mathbf{a}^\mathbf{b}=f(\mathbf{b})-f(\mathbf{a}) \qquad (2\text{-}41)$$

(問：［Gauss 及び Stokes の公式を忘れてしまった方へ］これを示せ（ヒント：微少領域で考える。Gauss の公式では直方体、Stokes の公式では、$x-y$ 平面の長方形について考える)。なぜ、$x-y$ 平面のみで十分か？)

また、FTC の証明は、たとえば次のようであったことを思い出しておこう。

$$\int_\mathbf{a}^\mathbf{b}\nabla f\cdot d\mathbf{r}=\int_{t_a}^{t_b}\nabla f\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt=\int_{t_a}^{t_b}\frac{df}{dt}dt$$
$$f(\mathbf{r}(t))\Big|_{t_a}^{t_b}=f(\mathbf{b})-f(\mathbf{a})$$

(2-38)を証明する前に、表式の左辺としては、このような形しかないこと（たとえば、$d\mathbf{S}\cdot\nabla$ のような形はないこと）に注意しよう。(2-38)の左辺は、必ず、

$$dx\frac{\partial}{\partial x}$$

のように、微分（dx）と偏微分 $\partial/\partial x$ が対なっており、これらが計算すると「キャンセル」され、

次元が一つ下がるようになっている。先の $d\mathbf{S}\bullet\nabla$ の場合には、

$$dS_x \frac{\partial}{\partial x}+\cdots = dy\,dz\frac{\partial}{\partial x}+\cdots$$

となってしまい、次元を下げることができないのである。つまり次元を下げることが可能でかつベクトルの形をした形式は、(2-38)の左辺のようなものしかないことがわかる（絶対にないかどうかは知らないが・・・）

なお、(2-38)の左辺の表式では、偏微分が微分にはかからないように視覚的に配置されている点にも注意されたい。

<u>積分公式、(2-38)の証明</u>

以下に二つの証明を与えておこう

（1） 積分とベクトル演算は独立であるので（これは、(2-37)からもわかる）、(2-38)をスカラー関数に適用した場合に成り立つということを示せば十分である。つまり、

$$\int_V dV\,\nabla f = \int_S f\,d\mathbf{S}$$

$$\int_S d\mathbf{S}\times\nabla f = \int_\ell f\,d\mathbf{r}$$

$$\int_\ell d\mathbf{r}\cdot\nabla f = f\Big|$$

が成り立つことを示せばよい。FTC 型は、このままで成り立つことがわかる。Gauss 型と Stokes 型については、これと任意の定数ベクトル、$\mathbf{c}$ との内積をとると、

$$\begin{aligned}\int_V dV\,\nabla f\bullet\mathbf{c} &= \int_S f\,d\mathbf{S}\bullet\mathbf{c}\\ \int_S \left(d\mathbf{S}\times\nabla f\right)\bullet\mathbf{c} &= \int_\ell f\,d\mathbf{r}\bullet\mathbf{c}\end{aligned} \tag{2-42}$$

となる。逆に、これが任意のベクトル、$\mathbf{c}$ について成り立つのが示せたとすると、元の式（Gauss 型と Stokes 型）が成り立つことがわかる（問：これを示せ（ヒント：$\forall\mathbf{c},\ \mathbf{A}\bullet\mathbf{c}=0 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{A}=\mathbf{0}$ ）。）(2-42)は書き換えると、

$$\int_V dV\,\nabla\bullet\left(f\mathbf{c}\right) = \int_S \left(f\mathbf{c}\right)\bullet d\mathbf{S}$$

$$\int_S \left(\nabla\times f\mathbf{c}\right)\bullet d\mathbf{S} = \int_\ell \left(f\mathbf{c}\right)\bullet d\mathbf{r}$$

となる（問：これを示せ。）これは $\mathbf{A}=f\mathbf{c}$ とすると、Gauss の公式と Stokes の公式そのものであるので、成り立っている。以上から、(2-38)が成り立つことが示せたことになる。

（2）次にベクトルの成分に分解して計算する「初等的な」証明をしてみよう。なお、ここでは、Gauss 型と Stokes 型についてのみ説明することにする。FTC 型については、この二つのケースからほとんど自明であろう。

<u>Gauss 型</u>

Gauss 型公式、

$$\int dV\,\nabla = \int d\mathbf{S}$$

の両辺の右側からスカラーやベクトル、さらにはそれらの積（内積や外積）を適当にかけたとしよう。それらを整理して、左辺の ∂_x に対応する項に着目すると、左辺は、

$$\int dx\,dy\,dz\ \frac{\partial f}{\partial x}\left(\mathbf{e}_1 * \mathbf{e}_i * \bullet\bullet\bullet\right) \tag{2-43}$$

となる。また。右辺の対応する項は、

$$\int dS_1\ f\ \left(\mathbf{e}_1 * \mathbf{e}_i * \bullet\bullet\bullet\right) \tag{2-44}$$

となる。図 8 に示すような領域において、(2-43)の dx に関する積分を行うと、

$$\int dy\,dz\ \left(f_2 - f_1\right)\left(\mathbf{e}_1 * \mathbf{e}_i * \bullet\bullet\bullet\right)$$

となる。この積分に関する部分は、

$$\int dy\,dz\ \left(f_2 - f_1\right) = \int f_2\,dS_1 - \int f_1\left(-dS_1\right)$$

となり、結局、(2-43)は、

$$\int dS_1\ f\ \left(\mathbf{e}_1 * \mathbf{e}_i * \bullet\bullet\bullet\right)$$

と書けることがわかり、(2-44)が得られる。これから、Gauss 型の公式が成り立つことがわかる。

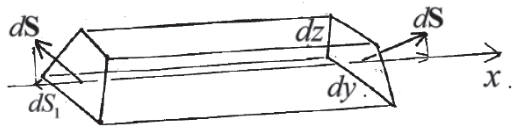


図 8. 微小領域の体積

<u>Stokes 型</u>

この場合にも、上記の Gauss 型と同様のことを行えばよい。

$$\int_S d\mathbf{S}\times\nabla = \int_\ell d\mathbf{r}$$

の両辺の右側から適当なベクトル量をかけて、以下の項に着目する。左辺では、

$$\int \left(dzdx\frac{\partial f}{\partial z} - dxdy\frac{\partial f}{\partial y} \right) \left(\mathbf{e}_1 * \mathbf{e}_i * \bullet\bullet\bullet \right)$$

を、右辺では、

$$\int dx\, f\ \left(\mathbf{e}_1 * \mathbf{e}_i * \bullet\bullet\bullet \right)$$

である。さらに、

$$f\left(x, \Delta y. \Delta z\right) \approx f\left(x,0,0\right) + \partial f\left(x,0,0\right)/\partial y\ \Delta y + \partial f\left(x,0,0\right)/\partial z\ \Delta z$$

であること、また着目している微少表面の四辺形は $dzdx$ と $dxdy$ であることを使って、**図 9** を参照にすると（かつ符号について若干、頭を悩ますと）、左辺は、右辺になる。よって、Stokes 型の公式が成り立つことがわかる。

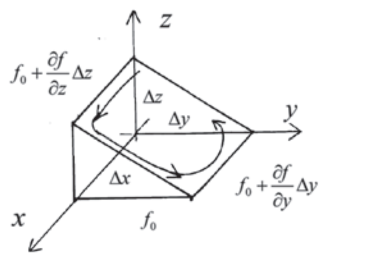


図 9. 微小領域の表面

以上でベクトルの積分の「基本」は終わりであるが、次のことを付け加えおく。3次元空間の中で $x-y$ 平面上の領域と平面内のベクトル、

$$\left(P, Q, 0\right)$$

を考えると、Stokes の公式から、

$$\oint P\,dx + Q\,dy = \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

というグリーン（Green）の公式が導かれる（問：これを示せ。）この公式の右辺の符号は忘れやすいので、この公式を思い出す（または導き出す）には少し頭を悩ます必要がある（問：平面上で関数、P, Q が与えられているとして、Green の公式を導け。）しかし、微分形式における（拡張された）Stokes の公式（generalized（または extended）Stokes formula を知っていると、まったく機械的に（瞬時に）導くことができる。

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega$$

（拡張された Stokes の公式）

いま、$\omega = P\,dx + Q\,dy$ であるとすると、直ちに、$d\omega = dP\,dx + dQ\,dy = -\dfrac{\partial P}{\partial y}dxdy + \dfrac{\partial Q}{\partial x}dxdy$ と求まるのである。つまり、Green の公式を記憶する必要がなくなるのである。

<u>ベクトルの積分の例</u>

ここでの例は、積分公式（Gauss 型、Stokes 型及び FTC 型）のいくつかの応用例であって、ベクトルの積分に関するリストアップをしようというものでない（リストアップは多分、きりがないであろうし、それほど意味があるとは思えない）。

Gauss 型の公式の右からスカラ—関数との積及びベクトルとの内積、外積をとると、

$$\int_V dV\ \nabla\phi = \int_S \phi\, d\mathbf{S} \tag{2-45}$$

$$\int_V dV\ \nabla\cdot\mathbf{A} = \int_S d\mathbf{S}\cdot\mathbf{A} \tag{2-46}$$

$$\int_V dV\ \nabla\times\mathbf{A} = \int_S d\mathbf{S}\times\mathbf{A} \tag{2-47}$$

となる。これらがこの型の基本であろう。二つ目の式、(2-46)は、Gauss の公式そのものであり、その有用性はよく知られているので、改めて述べる必要はないであろうが、次の点だけコメントしておくことにする。

$$div\mathbf{A} = 0$$

であるなら、つまり局所的な発散（湧き出し）がないとすると（問：その意味を確かめよ）、

$$\int_S \mathbf{A}\bullet d\mathbf{S} = 0 \tag{2-48}$$

となる。つまり、ある領域（の境界）から（何かの量の流れ、**A** に伴う）湧き出す全量はゼロになるという至極、当然のことを示している。

さて、次に、

$$\mathbf{A} = \phi\,\nabla\psi$$

とおくと、

$$div\mathbf{A} = \nabla\bullet\left(\phi\,\nabla\psi\right) = \nabla\phi\bullet\nabla\psi + \phi\,\nabla\bullet\nabla\psi$$

であることから、

$$\begin{aligned} \int\ (\phi\nabla^2\psi + \nabla\phi\bullet\nabla\psi)\,dV &= \int\ \phi\frac{\partial\psi}{\partial n}dS \\ &= \int\ \phi\,\mathbf{n}\bullet\nabla\psi\,dS = \int\ \phi\nabla\psi\bullet d\mathbf{S} \end{aligned} \tag{2-49}$$

となる。ここで、$\psi=\phi$ とおき、$\nabla^2\phi=0$ であるとすると（調和関数であるとすると）、

$$\boxed{\int \left(\nabla\phi\right)^2 dV=\int \phi\frac{\partial\phi}{\partial n}dS=\int \phi\nabla\phi\bullet d\mathbf{S}}$$

(2-50)

となるが、これは次の性質を示すのによく使われるものである。

領域の境界で、$\phi=0$ または、$\partial\phi/\partial n=0$ であるなら、（内部を含めた）全領域でϕは一定値をとる（問：これを示せ。）

また、よく知られているように、$\phi=c \ \left(c\neq 0\right)$ でも同様である。これを示すには、$\tilde{\phi}=\phi-c$ として考えてもよいが、

$\int \phi\nabla\phi\bullet d\mathbf{S}=c\int \nabla\phi\bullet d\mathbf{S}=c\int \nabla\bullet\nabla\phi dV=0$ としてもよい（**注：（分離した）境界がいくつかあって、個々の境界で、$\phi=\mathrm{const.}$ という場合には、上のことは必ずしも成立しない。）**

(2-49)式を使うと、または、

$$\mathbf{A}=\phi\left(\nabla\psi\right)-\left(\nabla\phi\right)\psi$$

を使うと、Green の定理、

$$\boxed{\begin{aligned}\int (\phi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\phi)\,dV&=\int (\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\phi}{\partial n})\,dS\\&=\int (\phi\nabla\psi-\psi\nabla\phi)\bullet d\mathbf{S}\,)\end{aligned}}$$

(2-51)

が得られる。これはポテンシャル論でよく使われるということは周知であろう。

(2-46)から、

$$\int_V dV\,\nabla\cdot\left(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right)=\int_S d\mathbf{S}\cdot\left(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right)$$

となるが、もし、

$$\nabla\times\mathbf{A}=\mathbf{0},\quad \nabla\times\mathbf{B}=\mathbf{0}$$

であるとすると、

$$\int_{\partial V} d\mathbf{S}\cdot\left(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right)=0 \qquad (2\text{-}52)$$

となる（問：これを示せ。）ただし、面積積分の範囲は、領域、V の全境界であることを示すために、∂V という記号を使った。例えば、

$$\mathbf{A}=\nabla\phi,\quad \mathbf{B}=\nabla\psi$$

であるとすると、

$$\boxed{\int_{\partial V} d\mathbf{S}\cdot\left(\nabla\phi\times\nabla\psi\right)=0} \qquad (2\text{-}53)$$

となることがわかる。しかし、これは、

$$\nabla\bullet\left(\nabla\phi\times\nabla\psi\right)=0 \qquad (2\text{-}54)$$

ということから（問：これを示せ）、直ちにわかることでもある（(2-48)を参照）。

また、若干、複雑であるが、

$$\begin{aligned}&\nabla\bullet\left(\mathbf{B}\times\left(\nabla\times\mathbf{A}\right)-\mathbf{A}\times\left(\nabla\times\mathbf{B}\right)\right)\\&=\left(\nabla\times\mathbf{B}\right)\bullet\left(\nabla\times\mathbf{A}\right)-\mathbf{B}\bullet\left(\nabla\times\left(\nabla\times\mathbf{A}\right)\right)\\&-\left(\nabla\times\mathbf{A}\right)\bullet\left(\nabla\times\mathbf{B}\right)+\mathbf{A}\bullet\left(\nabla\times\left(\nabla\times\mathbf{B}\right)\right)\\&=\mathbf{A}\bullet\left(\nabla\times\left(\nabla\times\mathbf{B}\right)\right)-\mathbf{B}\bullet\left(\nabla\times\left(\nabla\times\mathbf{A}\right)\right)\end{aligned}$$

となることを使うと、

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_V dV\left[\mathbf{A}\cdot\left(\nabla\times\left(\nabla\times\mathbf{B}\right)\right)-\mathbf{B}\cdot\left(\nabla\times\left(\nabla\times\mathbf{A}\right)\right)\right]\\&=\int_S d\mathbf{S}\cdot\left(\mathbf{B}\times\left(\nabla\times\mathbf{A}\right)-\mathbf{A}\times\left(\nabla\times\mathbf{B}\right)\right)\end{aligned}}$$

となる。ここで、$\mathbf{A},\mathbf{B}$ がともに、発散なし（divergence free）で調和的（$\nabla^2=0$）であるとすると、

$$\int_S d\mathbf{S}\cdot\left(\mathbf{B}\times\left(\nabla\times\mathbf{A}\right)\right)=\int_S d\mathbf{S}\cdot\left(\mathbf{A}\times\left(\nabla\times\mathbf{B}\right)\right)$$

となる（問：これを示せ）。実は、この両辺は、単に、

$$\int_V dV\left(\nabla\times\mathbf{B}\right)\bullet\left(\nabla\times\mathbf{A}\right)$$

に等しいのである（問：これを示せ）。

(2-47)から、

$$\int_V dV\,\nabla\times\left(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right)=\int_S d\mathbf{S}\times\left(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right)$$

となるが、もし、

$$\nabla\bullet\mathbf{A}=0,\quad \nabla\bullet\mathbf{B}=0$$

であるとすると、

$$\nabla\times\left(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right)=\left(\mathbf{B}\bullet\nabla\right)\mathbf{A}-\left(\mathbf{A}\bullet\nabla\right)\mathbf{B}$$

であるので（問：これを示せ）、

$$\begin{aligned}&\int_V dV\left[\left(\mathbf{B}\bullet\nabla\right)\mathbf{A}-\left(\mathbf{A}\bullet\nabla\right)\mathbf{B}\right]\\&=\int_S d\mathbf{S}\times\left(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right)\end{aligned}$$

となる。これを、$\mathbf{A}=\nabla f$，$\mathbf{B}=\nabla g$ に適用すると、もし、

$$\nabla^2 f=0\ ,\qquad \nabla^2 g=0$$

であるとすると、

$$\begin{aligned}&\int_V dV\left[\left(\nabla g\bullet\nabla\right)\nabla f-\left(\nabla f\bullet\nabla\right)\nabla g\right]\\&=\int_S d\mathbf{S}\times\left(\nabla f\times\nabla g\right)\end{aligned}$$

となる。これは、直接、

$$\int_V dV\, \nabla \times \left(\nabla f \times \nabla g \right) = \int_S d\mathbf{S} \times \left(\nabla f \times \nabla g \right)$$

からも求まる（問：これを示せ。）

さて、Stokes 型の公式についても、式の右側から Gauss 型と同じように積をとると、

$$\boxed{\begin{aligned} &\int_S d\mathbf{S} \times \nabla \phi = \int_\ell d\mathbf{r}\, \phi & (2\text{-}55) \\ &\int_S \left(d\mathbf{S} \times \nabla \right) \cdot \mathbf{A} = \int_\ell d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} & (2\text{-}56) \\ &\int_S \left(d\mathbf{S} \times \nabla \right) \times \mathbf{A} = \int_\ell d\mathbf{r} \times \mathbf{A} & (2\text{-}57) \end{aligned}}$$

というこの型の基本が得られる。二つ目の式が Stokes の公式である。この公式からの重要な帰結は、

$$\nabla \times \mathbf{A} = rot\mathbf{A} = \mathbf{0}$$

つまり、局所的に回転なし（rotation free）、または渦無しであるとすると、循環（circulation）がゼロになるということである。

$$\int_\ell d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = \oint \mathbf{A} \bullet d\mathbf{l} = 0$$

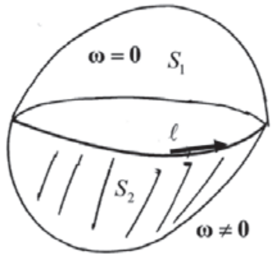


図 10. 表面上の渦度の分布

ちなみに、**図 10** のように、表面で「渦度（vortex）」$\boldsymbol{\omega} = rot\,\mathbf{A}$ が分布しているとしよう。S_1 表面では、$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ で、S_2 表面では、図のように分布しているとする。S_1 に上の式を使うと、

$$\oint_\ell \mathbf{A} \bullet d\mathbf{l} = 0$$

であり、表面、S_2 に適用すると、

$$\oint_\ell \mathbf{A} \bullet d\mathbf{l} = -\oint_{-\ell} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{l} = -\int_{S_2} rot\mathbf{A} \bullet d\mathbf{S} > 0$$

となる（問：これを示せ（符号も含めて)。）つまり、矛盾した結果が得られたことになる。どこがおかしいのであろうか。これは、Gauss の公式を使うと解決する。S_1 表面と S_2 表面で囲まれる体積を V とし、これに Gauss の公式を使うと、

$$\int_V dV\, \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = \int_{S_1+S_2} d\mathbf{S}\, \boldsymbol{\omega}$$

となり、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = \nabla \cdot \left(\nabla \times \mathbf{A} \right) = 0$$

であることから、

$$\int_{S_1} d\mathbf{S}\, \boldsymbol{\omega} + \int_{S_2} d\mathbf{S}\, \boldsymbol{\omega} = 0$$

でなければばならないことがわかる（これから S_1 と S_2 の（共通の）境界線に沿った積分も等しくなることがわかる)。つまり、最初に仮定したような $\boldsymbol{\omega}$ の分布は許されないのである（なお、ここではあくまでも、ある程度のオーダーまでの連続微分が可能であることを想定しての話である。）

次に(2-55)式について考えよう。この式の x 成分は、

$$\int \left(dS_2 \partial_3 \phi - dS_3 \partial_2 \phi \right)$$

$$\int \left(dzdx \frac{\partial \phi}{\partial z} - dxdy \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = \int_\ell \phi dx$$

となるが、これは Stokes 型の公式の証明の際に出てきたものと同じである（問：(符号に注意して）これを示せ。）

(2-55)を閉曲面に適用すると、明らかに、

$$\int_S d\mathbf{S} \times \nabla \phi = 0$$

となるが、この結果は、Gauss 型を適用しても直ちに求まる（問：これを示せ)。

(2-56)及び(2-57)式から、

$$\int_s \left(d\mathbf{S} \times \nabla \right) \cdot \left(\mathbf{A} \times \mathbf{B} \right) = \int_\ell d\mathbf{r} \cdot \left(\mathbf{A} \times \mathbf{B} \right) \qquad (2\text{-}58)$$

$$\int_s \left(d\mathbf{S} \times \nabla \right) \times \left(\mathbf{A} \times \mathbf{B} \right) = \int_\ell d\mathbf{r} \times \left(\mathbf{A} \times \mathbf{B} \right) \qquad (2\text{-}59)$$

となる。(2-58)式の被積分項は、

$$\left(d\mathbf{S} \times \nabla \right) \cdot \left(\mathbf{A} \times \mathbf{B} \right) = d\mathbf{S} \bullet \left(\nabla \times \left(\mathbf{A} \times \mathbf{B} \right) \right)$$

となり、もし、

$$\nabla \bullet \mathbf{A} = 0, \quad \nabla \bullet \mathbf{B} = 0 \qquad (2\text{-}60)$$

とすると、

$$\left(\left(\mathbf{B} \bullet \nabla \right) \mathbf{A} - \left(\mathbf{A} \bullet \nabla \right) \mathbf{B} \right) \bullet d\mathbf{S}$$

となる（問：これを示せ。）よって、(2-58)式は、条件、(2-60)の下で、

$$\int_s \left(\left(\mathbf{B} \bullet \nabla \right) \mathbf{A} - \left(\mathbf{A} \bullet \nabla \right) \mathbf{B} \right) \bullet d\mathbf{S} = \int_\ell d\mathbf{r} \cdot \left(\mathbf{A} \times \mathbf{B} \right)$$

となる。一方、(2-59)の被積分項は、

$$\begin{aligned} &\left(d\mathbf{S} \times \nabla \right) \times \left(\mathbf{A} \times \mathbf{B} \right) = \\ &\quad \mathbf{A} \left(\left(d\mathbf{S} \times \nabla \right) \bullet \mathbf{B} \right) + \left(\mathbf{B} \bullet \left(d\mathbf{S} \times \nabla \right) \right) \mathbf{A} \\ &\quad - \mathbf{B} \left(\left(d\mathbf{S} \times \nabla \right) \bullet \mathbf{A} \right) - \left(\mathbf{A} \bullet \left(d\mathbf{S} \times \nabla \right) \right) \mathbf{B} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\left(d\mathbf{S} \times \nabla \right) \bullet \mathbf{B} = d\mathbf{S} \bullet \left(\nabla \times \mathbf{B} \right), \ \mathbf{B} \bullet \left(d\mathbf{S} \times \nabla \right) = \left(\mathbf{B} \times d\mathbf{S} \right) \bullet \nabla$$

であるので、もし、

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}, \ \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \qquad (2\text{-}61)$$

であるとすると、この条件の下で、(2-59)式は、

$$\left[\int_S \left(\left(\mathbf{B}\times d\mathbf{S}\right)\bullet\nabla\right)\mathbf{A}-\left(\left(\mathbf{A}\times d\mathbf{S}\right)\bullet\nabla\right)\mathbf{B}\right]$$

$$=\int_\ell d\mathbf{r}\times\left(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right)$$

となる。

(2-57)式の左辺の被積分項は、

$$\left(d\mathbf{S}\times\nabla\right)\times\mathbf{A}=-\left(\nabla\bullet\mathbf{A}\right)d\mathbf{S}+\nabla\left(\mathbf{A}\bullet d\mathbf{S}\right)$$

$$=-\left(\nabla\bullet\mathbf{A}\right)d\mathbf{S}+\left(d\mathbf{S}\bullet\nabla\right)\mathbf{A}+d\mathbf{S}\times\left(\nabla\times\mathbf{A}\right)$$

とも書ける（問：これを示せ）ので、(2-57)は、

$$\int_\ell d\mathbf{r}\times\mathbf{A}=\int_S\left[-\left(\nabla\bullet\mathbf{A}\right)d\mathbf{S}+\left(d\mathbf{S}\bullet\nabla\right)\mathbf{A}\right.$$

$$\left.+d\mathbf{S}\times\left(\nabla\times\mathbf{A}\right)\right]$$

と変形できる。

さて、

$$\left(d\mathbf{S}\times\nabla\right)\bullet\left(f\nabla g\right)=d\mathbf{S}\bullet\left(\nabla\times f\nabla g\right)$$

$$=d\mathbf{S}\bullet\left(\nabla f\times\nabla g\right)$$

（問：これを示せ）であることを使うと、

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_S d\mathbf{S}\cdot\left(\nabla f\times\nabla g\right)=\int_S\left(d\mathbf{S}\times\nabla\right)\bullet\left(f\nabla g\right)\\&=\int_\ell f\,\nabla g\cdot d\mathbf{r}=\int_\ell f\,dg=-\int_\ell g\,df\end{aligned}} \quad (2\text{-}62)$$

となる最後の式は、 f,g を入れ換えて得られる。ここで、表面、 S がある領域を囲むものとすると、その表面の境界線はないので、(2-62)式の値はゼロになる。実は、これは、(2-53)式と同じものである。

次に以下の若干、長い式の変形を考えよう。

$$\left(d\mathbf{S}\times\nabla\right)\times\nabla f=\nabla_f f\times\left(\nabla_f\times d\mathbf{S}\right)$$

$$=\nabla_f\left(\nabla_f f\bullet d\mathbf{S}\right)-\left(\nabla_f{}^2 f\right)d\mathbf{S}$$

$$=\left(d\mathbf{S}\bullet\nabla\right)\nabla f+d\mathbf{S}\times\left(\nabla\times\nabla f\right)-\left(\nabla^2 f\right)d\mathbf{S}$$

$$=\left(d\mathbf{S}\bullet\nabla\right)\nabla f-\left(\nabla^2 f\right)d\mathbf{S}$$

（問：これを示せ）この式は、∇ に対して、$d\mathbf{S}$ は定数だと思うと、

$$\left(d\mathbf{S}\times\nabla\right)\times\nabla f=\nabla\times\left(\nabla\times d\mathbf{S}\right)f$$

$$=\left[\left(d\mathbf{S}\bullet\nabla\right)\nabla-\left(\nabla^2\right)d\mathbf{S}\right]f$$

と変形でき、一気に結果が求まる。(2-57)式から、

$$\int_S\left(d\mathbf{S}\times\nabla\right)\times\nabla f=\int_\ell d\mathbf{r}\times\nabla f$$

であるので、上の結果から、

$$\boxed{\int_S\left[\left(d\mathbf{S}\bullet\nabla\right)\nabla f-\left(\nabla^2 f\right)d\mathbf{S}\right]=\int_\ell d\mathbf{r}\times\nabla f} \quad (2\text{-}63)$$

が求まる。ここで、もし、

$$\nabla^2 f=0$$

であるとすると、

$$\int_S\left(d\mathbf{S}\bullet\nabla\right)\nabla f=\int_\ell d\mathbf{r}\times\nabla f$$

となる。なお、表面がある領域を囲んでいるとすると、(2-63)式の右辺はゼロとなる。一方、Gauss型の公式の両辺の右側から、まずナブラ記号、∇ との内積をとり、次にこれを ∇f に作用させると、

$$\int_V\left(dV\,\nabla\bullet\nabla\right)\nabla f=\int_S\left(d\mathbf{S}\bullet\nabla\right)\nabla f$$

となる。また、

$$\int_V dV\,\nabla\left(\nabla^2 f\right)=\int_S\left(\nabla^2 f\right)d\mathbf{S}$$

であることを使うと、(2-63)の左辺もゼロになることがわかる。

最後は、FTC 型についてであるが、ここでは、次の二つをあげるだけにとどめよう。

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_a^b d\mathbf{r}\cdot\nabla\phi=\left.\phi\right|_a^b\\&\int_a^b\left(d\mathbf{r}\cdot\nabla\right)\mathbf{A}=\left.\mathbf{A}\right|_a^b\end{aligned}}$$

始点、a と終点、b が一致する周回積分の場合には、当然、

$$\oint d\mathbf{r}\cdot\nabla\phi=0$$

$$\oint\left(d\mathbf{r}\cdot\nabla\right)\mathbf{A}=\mathbf{0}$$

となる。これらの左辺を Stokes 型の公式で見ると、

$$\oint d\mathbf{r}\cdot\nabla\phi=\int_S\left(d\mathbf{S}\times\nabla\right)\cdot\nabla\phi$$

$$=\int_S d\mathbf{S}\bullet\left(\nabla\times\nabla\right)\phi=0$$

$$\oint\left(d\mathbf{r}\cdot\nabla\right)\mathbf{A}=\int_S\left(\left(d\mathbf{S}\times\nabla\right)\cdot\nabla\right)\mathbf{A}$$

$$=\int_S d\mathbf{S}\bullet\left(\nabla\times\nabla\right)\mathbf{A}=\mathbf{0}$$

となり、また、当然の結果が得られることになる。

<u>位置ベクトルに関係する積分公式</u>

いくつかの例をここで取り上げることにする。なお、ここでの線積分はすべて一周にわたる周回積分である。

$$\boxed{\frac{1}{2}\int\mathbf{r}\times d\mathbf{r}=\mathbf{S}\left(=\int d\mathbf{S}\right)} \quad (2\text{-}64)$$

左辺はある二次元図形の境界積分であり、右辺はその図形の面積ベクトルである（図形は平面である場合には、そのベクトルの大きさは面積で、その方向は平面に垂直である。）これは直感的に明らかであろう。若干、回りくどい証明は以下のとおりである。

Stokes 型の公式から、

$$\int d\mathbf{r}\times\mathbf{r}=\int\left(d\mathbf{S}\times\nabla\right)\times\mathbf{r}$$

が得られるが、

$$\left(d\mathbf{S}\times\nabla\right)\times\mathbf{r}=\nabla_{\mathbf{r}}\left(d\mathbf{S}\bullet\mathbf{r}\right)-d\mathbf{S}\left(\nabla\bullet\mathbf{r}\right)$$

である。ここで、$\nabla_{\mathbf{r}}$ は $d\mathbf{S}$ を一定と考えたナブラ記号である。これから、

$$\nabla_{\mathbf{r}}\left(d\mathbf{S}\bullet\mathbf{r}\right)=\left(d\mathbf{S}\bullet\nabla_{\mathbf{r}}\right)\mathbf{r}+d\mathbf{S}\times\left(\nabla_{\mathbf{r}}\times\mathbf{r}\right)=d\mathbf{S}$$

となり（問：これを示せ)、$\nabla\bullet\mathbf{r}=3$ であることを使うと、

$$\left(d\mathbf{S}\times\nabla\right)\times\mathbf{r}=-2\,d\mathbf{S}$$

となる。これから、(2-64)式が得られる。導出からわかるように、これは位置ベクトルの原点の取り方に依存しないが、これは以下の明示的な表現からもわかる。

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{x}$$

とすると、

$$\int\mathbf{r}\times d\mathbf{r}=\int\mathbf{r}_0\times d\mathbf{r}+\int\mathbf{x}\times d\mathbf{r}$$

となるが、

$$\int\mathbf{r}_0\times d\mathbf{r}=\mathbf{r}_0\times\int d\mathbf{r}=0\qquad\left(\int d\mathbf{r}=0\right)$$

であるので、原点の位置によらないことがわかる。

いま、c を定数とすると、Gauss 型の公式から、

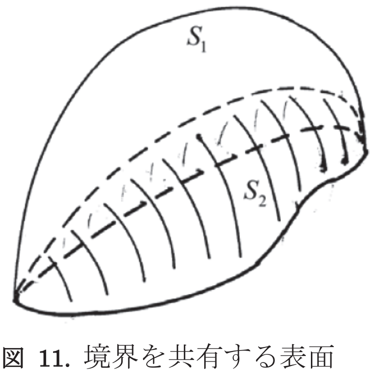


図 11. 境界を共有する表面

$$\int\left(dV\,\nabla\right)c=\int c\,d\mathbf{S}$$

となり、

$$\boxed{\int d\mathbf{S}=\mathbf{0}}$$

となる。**図 11** のように表面をわけると、

$$0=\int d\mathbf{S}=\int d\mathbf{S}_1+\int d\mathbf{S}_2=\int d\mathbf{S}_1-\int d\tilde{\mathbf{S}}_1$$

となり、

$$\int d\mathbf{S}_1=\int d\tilde{\mathbf{S}}_1$$

が得られる。つまり、表面の周回の境界を固定すると、その面積ベクトルは形状には依存しないことがわかる。

また、Gauss 型の公式、

$$\int dV\,\nabla\bullet\mathbf{r}=\int d\mathbf{S}\bullet\mathbf{r}$$

から、直ちに、

$$\boxed{\int\mathbf{r}\bullet d\mathbf{S}=3V}$$

となる。これを球に適用すると、左辺は、

$$r\,4\pi r^2$$

となり、球の体積の公式が得られる。また、次の Gauss 型の公式から、

$$\boxed{0=\int dV\,\nabla\times\mathbf{r}=\int d\mathbf{S}\times\mathbf{r}}$$

となり、

$$\int\mathbf{r}\times d\mathbf{S}_1=\int\mathbf{r}\times d\tilde{\mathbf{S}}_1$$

となるが、これからこの積分も表面の周回境界を固定すると、表面の形状には依存しないことがわかる。

$$\nabla r^2=2r\nabla r=2r\mathbf{n}=2\mathbf{r}$$

から、

$$\boxed{\int\mathbf{r}dV=\frac{1}{2}\int r^2 d\mathbf{S}}$$

次の二つの表式は、直感的に明らかであるが、演習問題として記しておく。

Stokes 型の公式から、

$$\int\left(d\mathbf{S}\times\nabla\right)c=\int c\,d\mathbf{r}$$

となり、あまりにも明らかな、

$$\int d\mathbf{r}=0$$

が得られる。また、

$$0=\int\left(d\mathbf{S}\times\nabla\right)\bullet\mathbf{r}=\int d\mathbf{r}\bullet\mathbf{r}$$

から、

$$\int\mathbf{r}\bullet d\mathbf{r}=0$$

が得られるが、これは、

$$\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}=1/2\,d\mathbf{r}^2.$$

から明らかであろう。

2.8. 積分量の時間変化

空間に分布する物質やその物理量など（以下、物理量という）を記述する方法、または見方には二つのやり方がある。これらのことは周知であろうが、説明の都合上、記述しておく。一つは、オイラー（Euler）的見方で、物理量は次のように表される。

$$f\left(t, x, y, z\right)$$

つまり、空間（＋時間）の中のある点に物理量、f が与えられていると考えるのである。または「場」が与えられていると思ってもよい。この物理量を担っているのが、粒子のようなものだとしても、その粒子の位置（例えば、$x\left(t\right)$ など）や速度のようなものは考えない。あくまでも、$\left(x, y, z\right)$ は空間の座標を示すものであって、粒子の位置とは無関係なものである。

このように考えると、その（空間内のある点における）時間変化は、単に、時間の（偏）微分で与えられることになる。

$$\frac{\partial f\left(t, x, y, z\right)}{\partial t}$$

もう一つの見方は、ラグランジュ（Lagrange）的見方で、物質や物理量を表わすものは、質点、素電荷、（古典的な）素粒子、流体粒子のような仮想的粒子などからできていると考え、時間的変化はその粒子（粒子は全くの仮想的なものでよい）が運動することによると考える見方である。粒子の番号付けを $\mathbf{p}=\left(a,b,c\right)$ とすると（この番号付けは、たとえば粒子の運動の初期値とすることもできる）、物理量は、

$$F\left(t, a, b, c\right)=f\left(t, x\left(t,\mathbf{p}\right), y\left(t,\mathbf{p}\right), z\left(t,\mathbf{p}\right)\right)$$

と表わされる。またその時間微分は、

$$\frac{dF(t,\mathbf{p})}{dt}$$

のように与えられる。これは、番号付けを固定、つまりある粒子に着目したときの時間微分の表現であり、番号付けも変数とみなせば、

$$\frac{\partial F(t,\mathbf{p})}{\partial t}$$

とも書ける。

さて、この二つの（時間微分の）見方をつなぐのが、ラグランジュ微分 (Lagrange's derivative) と呼ばれるものである。粒子の視点に立つと、物理量の変化（粒子が感じる変化）は、

$$f\left(t+\Delta t,\mathbf{r}+\mathbf{v}\Delta t\right)-f\left(t,\mathbf{r}\right)$$
$$\approx \frac{\partial f(t,\mathbf{r})}{\partial t}\Delta t+\frac{\partial f(t,\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}\bullet\mathbf{v}\Delta t$$

となり、これら粒子が感じる時間変化が、

$$\boxed{\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\bullet\nabla \qquad \left(=\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\bullet\mathrm{grad}\right)}$$

と与えられる。ここで、左辺は、ラグランジュ的視点に立った時間微分と同じもの（または時間に関する全微分）であり、

$$\frac{D}{Dt}=\frac{d}{dt}$$

であるが、習慣的に、左辺のように書くことがある。右辺はこれをオイラー的に「表現」しているものである。たとえば、

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{D\mathbf{r}}{Dt}=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}+\mathbf{v}\bullet\nabla\mathbf{r}$$
$$=0+\mathbf{v}=\mathbf{v}$$

と当然の結果が得られるが、ここで、

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}=\mathbf{0},\ \ \mathbf{v}\bullet\nabla\mathbf{r}=\mathbf{v}$$

であることに注意されたい（速度は第一項からではなく、第二項から出てくる。）

空間に固定された領域内の物理量の時間変化を表わす式は簡単で、その時間に関する偏微分について積分すればよい。たとえば、ある体積内のスカラー量の時間変化は、

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial t}dV \tag{2-65}$$

と与えられる。以下では、（ある時点に）ある領域内にあった粒子（粒子の番号付けのある範囲にある粒子）がもつ物理量の総和の時間変化、つまりラグランジュ的な見方での物理量の時間変化を表わす表式を求めることにしよう。

これを求める際に重要なのは、物理量の時間変化は、その物理量を構成する個々の因子の時間変化に伴う変化量の和で表されるという原理である（微分の線形性、Appendix D を参照のこと）。

<u>初等的導出</u>

今、ある体積内の物理量、

$$\int_V f(t,x,y,z)\,dV \tag{2-66}$$

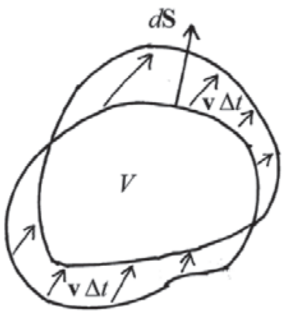


図 12. 体積の時間変化

を考えることにすると、その時間変化は、その体積内の f 変化の総和（積分）と体積の変化に伴う変化との和（線形和）となる。まず、前者は、(2-65)と同じもので、

$$\int_V \frac{\partial f(t,x,y,z)}{\partial t}dV$$

と与えられる。また、（微小）体積の変化は、**図 12** から、

$$\mathbf{v}\cdot d\mathbf{S}$$

と表面の移動に伴う体積変化によるものとして求められる。よって、(2-66)の時間変化は、

$$\frac{d}{dt}\int f\,dV = \int \frac{\partial f}{\partial t}dV + \int f\,\mathbf{v}\cdot d\mathbf{S} \tag{2-67}$$

となる。これは、また、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int f\,dV &= \int\left[\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{div}(f\,\mathbf{v})\right]dV \\ &= \int\left[\frac{Df}{Dt} + f\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\right]dV\end{aligned} \tag{2-68}$$

とも表わされる（問：これを示せ。）

ここで、$f=1$ とし、微小体積を考えると、(2-68)は、

$$\frac{d}{dt}(\Delta V)\Big/\Delta V = \mathrm{div}\,\mathbf{v} \tag{2-69}$$

となる。これはよく知られた体積膨張率と divergence との関係式である。$f=\rho$ （密度）とおき、（粒子とともに動く、つまりラグランジュ的な見方での）その積分量が保存されるとすると（積分量の例：全質量や全電荷など）、

$$\int\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\,\mathbf{v})\right]dV = 0$$

となる。さらに、積分領域に依らずに保存されるとすると、

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\,\mathbf{v}) = 0}$$

または、

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0} \tag{2-70}$$

と、よく知られた保存則の方程式が得られる。

ここで、休憩もかねて、少し脇道にそれよう。(2-70)を導く際に、空間の次元数はいくつであるかは関係していない。そこで、これを Hamilton 系の位相空間に適用してみよう。N 個の粒子からなる系を考えると、その位相空間の座標は、

$$(\mathbf{r}_1,\cdots,\mathbf{r}_N,\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_N)$$

で、次元数は、$6N$ である。また、「速度」、$\mathbf{v}$ は、

$$(\dot{\mathbf{r}}_1,\cdots,\dot{\mathbf{r}}_N,\dot{\mathbf{p}}_1,\cdots,\dot{\mathbf{p}}_N)$$

となる。今、この位相空間の中に（たとえば、初期条件の異なる）多体系を分布させたとしよう**（注：一つの多体系はこの位相空間内の一点で表されており、異なる点同士は物理的には無関係な存在で、ましてや相互作用することはない存在である。単に、初期条件の異なる系を無数に分布させたと考えるのである。）**すると、分布させた系の数は、当然、一定であるが、さらに位相空間の中の分布の運動が滑らかであると仮定すると（つまりある領域を考えると、その境界は境界のままであり、内部の点は境界を飛び越えることはないとすると）、(2-70)に相当する保存則が成り立つことになる。ここで、

$$div\,\mathbf{v} = \sum\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \mathbf{r}_i} + \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_i}{\partial \mathbf{p}_i}\right)$$

となる**（注：本来ならば、左辺は Euler 的に表現すべきであるので、時間微分の形は誤解を与えるかもしれないが・・）**これの運動が Hamiltonian、H に従うとすると、

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \mathbf{r}_i} + \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_i}{\partial \mathbf{p}_i} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i}\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i}\right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i}\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i}\right) = 0$$

であるので、

$$\boxed{div\,\mathbf{v} = 0} \tag{2-71}$$

となる。よって、

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} = 0} \tag{2-72}$$

となる。これがいわゆるリウヴィル Liouville の定理と呼ばれるものである。これは、また、(2-69)と(2-71)から、位相体積が不変であるということと同じである。（注：不変になるのは、$6N$ 次元の位相空間（N が大きな場合には、想像できないような多次元空間）での位相体積であり、（一粒子の場合を除くと）決して6次元空間での位相体積ではないのである）（注：以上では運動が滑らかであると仮定して成り立つものであることに注意しよう。もし粒子の間で衝突（局所的な衝突）があるとすると、位相空間内で（比較的マクロなスケールで）近接する二点の内、衝突のあった一点は、（衝突とはほぼ無関係に）滑らかに運動しているもう一点から、衝突後に大きくそれるようなことが起きる。このような衝突が頻発すると、マクロな視点では微小な位相空間の領域は、時間とともに歯抜けになるとともに、外からその領域内に雑多な点が紛れ込んでくることが起きる。こうなると、実際上は、リウヴィルの定理が破綻するのである。）

さて、多体系ではなく、単純な一粒子系を考えると、(2-72)は（$\rho = f$ とおいて）

$$\frac{D}{Dt} f(\mathbf{r},\mathbf{p}) = \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \dot{\mathbf{p}}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0$$

これをニュートン力学の言葉で書くと、

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0} \qquad (2\text{-}73)$$

となる。先に述べたように、位相空間の異なる点は、たとえば初期条件が異なる別の系であり、点の間には（どんな状況下でも）全く相互作用はない。つまり、点同士の間に衝突はないのである。もし点同士の間に衝突のような相互作用がないとすると、この位相空間にある無数の（仮想的な）粒子を実の粒子だと考えても問題ないことになる。つまり6次元空間、$(\mathbf{r},\mathbf{p})$ のある領域を無数の実の粒子が占めていると考えたとしても、その分布（無衝突の粒子系の分布）は、(2-73)式に従うことになる。今、考えているのは、あくまでも一粒子の問題で、(2-71)式が成り立つための Hamiltonian も一粒子のものであり、それに寄与するポテンシャルなどは外部から与えられたものである。しかし、ここで、外場を着目している粒子以外の粒子からの力などの寄与を（平均化して）加えても、個別の衝突がほぼ無視できる現象であれば、(2-73)式がほぼ成り立つであろうと「物理的直観で推測できる（コメント：こういう時に便利なのは、この言葉かもしれない。）要するに衝突によるような現象は見ないことにするのである。このような考え方、見方は、明らかに、(2-73)式の導出と矛盾するものであるが、自己撞着（self-inconsistency）を、物理的直観により、自己無撞着（self-consistency）に切り替えて多体系の運動を記述しようというものである。そのように考えた時の(2-73)式をブラソフ（Vlasov）方程式という。

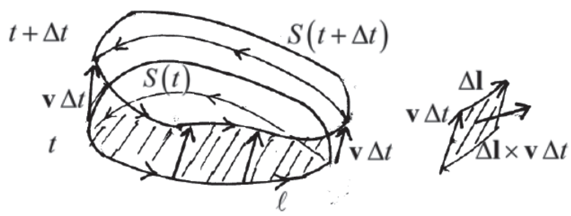


図 13. 表面の時間変化

さて、大分、脇道にそれたので、本道に戻って先を急ごう。次に考えるのは二次元の場合であって、それも二次元の曲面（ふちのある膜のような表面）上の次の量（ベクトルと表面ベクトルとの内積）の時間変化である。

$$\int \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$$

この時間変化は、体積積分の場合と同様に、

$$\int \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}$$

と表面の移動に伴う変化との和とで表される。図 13 を参照にすると、

$$\int (div\,\mathbf{A})\mathbf{v}\Delta t\cdot d\mathbf{S} = \int_{t+\Delta t} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} - \int_{t} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} + \int (d\mathbf{l}\times\mathbf{v}\Delta t)\cdot\mathbf{A}$$

となる（問：これを示せ）。以上から、

$$\frac{d}{dt}\int \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \int \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (div\,\mathbf{A})\,\mathbf{v}\right]\cdot d\mathbf{S} + \int d\mathbf{l}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{v})$$

となり、右辺の最後の項を表面積分に直すと、

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \int \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (div\,\mathbf{A})\,\mathbf{v} + \nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{v})\right]\cdot d\mathbf{S}} \qquad (2\text{-}74)$$

となる（問：これを示せ）。表面が閉じている場合（表面がある領域を包んでいる場合）には、(2-74)式の右辺の最後の項は体積積分に変換することにより、ゼロになることがわかる。よって、

$$\boxed{\frac{d}{dt}\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \oint \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (div\,\mathbf{A})\,\mathbf{v}\right]\cdot d\mathbf{S}}$$

（閉曲面の場合）

が得られる。

次に一次元の場合について考えよう。ここでは、以下のような曲線上の積分、

$$\int_1^2 \mathbf{A}\bullet d\mathbf{r}$$

の時間変化を考えることにする。曲線の移動に伴う変化は、**図 14** を参照にすると、

$$\int (\nabla\times\mathbf{A})\bullet(d\mathbf{r}\times\mathbf{v}\Delta t) = \left(\int_1^2 \mathbf{A}\bullet d\mathbf{r}\right)\Bigg|_t - \left(\int_1^2 \mathbf{A}\bullet d\mathbf{r}\right)\Bigg|_{t+\Delta t} + (\mathbf{A}\bullet\mathbf{v}\Delta t)_2 - (\mathbf{A}\bullet\mathbf{v}\Delta t)_1$$

となる（問：これを示せ）。これから、

$$\boxed{\frac{D}{Dt}\int_1^2 \mathbf{A}\bullet d\mathbf{r} = \int_1^2 \left[\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + (\nabla\times\mathbf{A})\times\mathbf{v}\right]\bullet d\mathbf{r} + (\mathbf{A}\bullet\mathbf{v})_2 - (\mathbf{A}\bullet\mathbf{v})_1} \qquad (2\text{-}75)$$

が得られる（問：これを示せ）。さらに、これから閉曲線の場合には、

$$\boxed{\frac{D}{Dt}\oint \mathbf{A}\bullet d\mathbf{r} = \oint \left[\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + (\nabla\times\mathbf{A})\times\mathbf{v}\right]\bullet d\mathbf{r}}$$

となることがわかる。

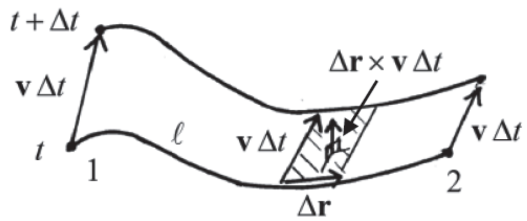


図 14. 曲線の時間変化

以上、スカラーの体積積分、ベクトルと表面ベクトルの内積の積分、ベクトルと線要素との内積の積分についてのみ検討したが、それ以外についても Gauss 型や Stokes 型の公式を使えば、求めることができるが、ここまでとしよう。

<u>機械的計算による導出</u>

これまでは図形を使って、若干、頭をひねった式の導出であったが、微分形式を利用すると、機械的に計算することで、式を導出することができる。そのためには、まず計算方法の基本的な考え方を説明しよう（注：微分形式に不案内な方はこの箇所はスキップした方がよいであろう。そうしないとフラストレーションが溜まるだけであろう）。

（1）積分を形式的に粒子の番号付けの変数 (a,b,c) で表す。ただし、あくまでも形式であって、実際の計算には用いない。

（2）すると、積分における微小体積等の変化をきちんと計算するためには、微分形式を用いる必要がある（これについては、３節の微分形式の説明を参照のこと）。（注：最後まで、番号付け変数 (a,b,c) で表して計算をするのであれば、必ずしも微分形式を用いなくてもよいが、計算や表式が複雑になるであろう。）

（3）　微分形式の時間微分へのコメント

$$x = F(t,a,b,c) \qquad \dot{x} = \partial F(t,a,b,c)/\partial t$$

とおき、微分形式の（外）微分は、空間や番号付け変数についてであって、時間は単なるパラメーターと見なすことにする。すると、

$$dx = \frac{\partial F}{\partial a}da + \frac{\partial F}{\partial b}db + \frac{\partial F}{\partial c}dc$$

$$d\dot{x} = \frac{\partial^2 F}{\partial a\partial t}da + \frac{\partial^2 F}{\partial b\partial t}db + \frac{\partial^2 F}{\partial c\partial t}dc$$

すると、

$$\frac{d}{dt}dx = \frac{\partial^2 F}{\partial t\partial a}da + \frac{\partial^2 F}{\partial t\partial b}db + \frac{\partial^2 F}{\partial t\partial c}dc$$

となり、

$$\boxed{\frac{d}{dt}dx = d\dot{x}}$$

ということがわかる。これはあまりに明らかで証明するまでもないようにも見えるが、$dx, d\dot{x}$ の d は外微分を表わす d であることに注意しよう。もう一つ微分に関するコメントは、微分形式の外積（exterior product または wedge product）は、ベクトルの内積、外積と同様に（多重）線形性をもつということである。よって、その時間微分でも Leibniz's rule が適用できるということである（注：この場合の Leibniz's rule は外微分でいうところの Leibniz's rule ではなく、多重線形性による「普通の」Leibniz's rule である。）

（4）積分の時間変化の計算方式

体積積分を例にとると、積分を、

$$\int f(t,x,y,z)dV(t,x,y,z)$$
$$=\int F(t,a,b,c)d\tilde{V}(t,a,b,c)$$

のように「形式的に」表わしておき、この時間微分をとると、右辺は、

$$\frac{d}{dt}\int F(t,a,b,c)d\tilde{V}(t,a,b,c)$$
$$=\int \frac{dF}{dt}d\tilde{V}+\int F\frac{d}{dt}\left(d\tilde{V}\right)$$

のように書ける（注：右辺の積分領域は時間不変である）。こうしてから、時間微分をラグランジュ微分とする（つまり Euler 的見方をする）のである。

これで準備が終わったので、以下では、具体的な計算を行うことにする。
積分記号の中に着目すると、

$$\frac{D}{Dt}(f\ dx\wedge dy\wedge dz)=\frac{Df}{Dt}dx\wedge dy\wedge dz$$
$$+f\frac{D(dx\wedge dy\wedge dz)}{Dt}$$

であり、

$$\frac{D(dx\wedge dy\wedge dz)}{Dt}=dv_x\wedge dy\wedge dz$$
$$+dx\wedge dv_y\wedge dz+dx\wedge dy\wedge dv_z$$

となる。ここで、

$$f\ dv_x\wedge dy\wedge dz=d(f\ v_x)\wedge dy\wedge dz$$
$$-v_x df\wedge dy\wedge dz$$
$$=d(f\ v_x dy\wedge dz)-v_x\frac{\partial f}{\partial x}dx\wedge dy\wedge dz$$

と変形できるので、ベクトル的な書き方をすると、

$$f\ dv_x\wedge dy\wedge dz=d(f\ \mathbf{v}_x d\mathbf{S}_x)-\mathbf{v}_x\frac{\partial f}{\partial x}dV$$

よって、

$$\frac{D}{Dt}(f\ dx\wedge dy\wedge dz)$$
$$=\frac{Df}{Dt}dV+d(f\mathbf{v}\bullet d\mathbf{S})-(\mathbf{v}\bullet\nabla)fdV$$

となることがわかる。一方、

$$\frac{Df}{Dt}-(\mathbf{v}\bullet\nabla)f=\frac{\partial f}{\partial t}$$

であり、また、

$$\int_V d(f\mathbf{v}\bullet d\mathbf{S})=\int_{\partial V}(f\mathbf{v}\bullet d\mathbf{S})=\int_V \nabla\bullet(f\mathbf{v})dV$$

である。ここで、最初の等号は、微分形式の（拡張された）Stokes の定理から、次の等号は、ベクトル解析の Gauss の公式から導かれる。
以上、まとめると、

$$\frac{d}{dt}\int f\ dV=\int\left[\frac{\partial f}{\partial t}+\mathrm{div}(f\ \mathbf{v})\right]dV$$

となり、再び、(2-68)が得られたことになる。

次に二次元の曲面上の積分、

$$\int \mathbf{A}\bullet d\mathbf{S}$$

の時間変化を考えることにしよう。積分記号の中の x 成分を取り出すと、

$$\frac{D}{Dt}(A_x\ dy\wedge dz)=\frac{DA_x}{Dt}dy\wedge dz+A_x\frac{D(dy\wedge dz)}{Dt}$$

となる。また、

$$A_x\frac{D(dy\wedge dz)}{Dt}=A_x dv_y\wedge dz+A_x dy\wedge dv_z$$
$$=d(A_x v_y)\wedge dz+dy\wedge d(A_x v_z)$$
$$-(v_y dA_x\wedge dz+v_z dy\wedge dA_x)$$

である。ここで、

$$d(A_x v_y)\wedge dz+dy\wedge d(A_x v_z)$$
$$=d(A_x v_y\wedge dz-A_x v_z\wedge dy)$$
$$=d\left(A_x(\mathbf{v}\times d\mathbf{r})_x\right)$$

と書ける（問：これを示せ）。一方、

$$\frac{DA_x}{Dt}dy\wedge dz=\left(\frac{\partial A_x}{\partial t}+\mathbf{v}\bullet\nabla A_x\right)dy\wedge dz$$

であり、

$$\mathbf{v}\bullet\nabla A_x\ dy\wedge dz-(v_y dA_x\wedge dz+v_z dy\wedge dA_x)$$
$$=\frac{\partial A_x}{\partial x}\ \mathbf{v}\bullet d\mathbf{S}$$

となる。以上をまとめると、

$$\frac{d}{dt}\int \mathbf{A}\bullet d\mathbf{S}=\int\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}+(div\,\mathbf{A})\mathbf{v}\right)\bullet d\mathbf{S}$$
$$+\int_S d\left(\mathbf{A}\bullet(\mathbf{v}\times d\mathbf{r})\right)$$

となるが、最後の項は、

$$\int_S d\left(\mathbf{A}\bullet\left(\mathbf{v}\times d\mathbf{r}\right)\right)=\int_{\partial S}\mathbf{A}\bullet\left(\mathbf{v}\times d\mathbf{r}\right)$$

$$=\int_S\left(d\mathbf{S}\times\nabla\right)\bullet\left(\mathbf{A}\times\mathbf{v}\right)=\int_S d\mathbf{S}\bullet\left(\nabla\times\left(\mathbf{A}\times\mathbf{v}\right)\right)$$

と変形できる。ここでも一番目の等号は、微分形式の Stokes の定理であり、二番目の等号は、ベクトル解析での Stokes 型公式である。以上から、

$$\frac{d}{dt}\int\mathbf{A}\bullet d\mathbf{S}=\int\left[\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+\left(div\,\mathbf{A}\right)\mathbf{v}\right.$$
$$\left.+\nabla\times\left(\mathbf{A}\times\mathbf{v}\right)\right]\bullet d\mathbf{S}$$

となり、(2-74)が再び得られる。

次に一次元の線分（曲線）上の積分、

$$\int_1^2\mathbf{A}\bullet d\mathbf{r}$$

の時間変化を考えよう。今までと同様に、積分記号の中の x 成分を取り出すと、

$$\frac{D}{Dt}\left(A_x\,dx\right)=\frac{DA_x}{Dt}dx+A_x\,dv_x$$

$$=\frac{\partial A_x}{\partial t}+\mathbf{v}\bullet\nabla A_x+d\left(A_x\,v_x\right)-v_x dA_x$$

となるが、最後の式の第二項と第四項は、

$$\mathbf{v}\bullet\nabla A_x-v_x dA_x$$
$$=\frac{\partial A_x}{\partial y}\left(d\mathbf{r}\times\mathbf{v}\right)_z-\frac{\partial A_x}{\partial z}\left(d\mathbf{r}\times\mathbf{v}\right)_y$$
$$=A_x\left(\bar{\nabla}\times\left(d\mathbf{r}\times\mathbf{v}\right)\right)_x$$

と書ける（問：これを示せ）。以上をまとめると、

$$\frac{D}{Dt}\int_1^2\mathbf{A}\bullet d\mathbf{r}=\int_1^2\left[\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\bullet d\mathbf{r}\right.$$
$$\left.+\mathbf{A}\bullet\left(\bar{\nabla}\times\left(d\mathbf{r}\times\mathbf{v}\right)\right)+d\left(\mathbf{A}\bullet\mathbf{v}\right)\right]$$

これをさらに変形すると、

$$\frac{D}{Dt}\int_1^2\mathbf{A}\bullet d\mathbf{r}=\int_1^2\left[\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\bullet d\mathbf{r}+\left(\left(\nabla\times\mathbf{A}\right)\times\mathbf{v}\right)\bullet d\mathbf{r}\right]$$
$$+\left(\mathbf{A}\bullet\mathbf{v}\right)_2-\left(\mathbf{A}\bullet\mathbf{v}\right)_1$$

となり（問：これを示せ）、(2-75)が再び得られる。以上の計算例からわかるように、微分形式を使うと、図を見ながら頭を使わなくても機械的に計算するだけで結果を求めることができるのである。

2.9. ヘルムホルツ（Helmholtz）の定理

ベクトル解析でのヘルムホルツの定理とは、ベクトルは、スカラー関数の gradient とあるベクトルの rotation の和で書けるというものである。

$$\boxed{\mathbf{A}=-grad\,\Phi+rot\,\mathbf{B}}$$

簡単な場合

考える空間は全空間であり、ベクトル、$\mathbf{A}$ は、

$$\mathbf{r}\to\infty\ \text{の時、}\ \mathbf{A}\to\mathbf{0}$$

であると仮定しよう（なお、ここでの議論はそれほど厳密ではない）。
一方、よく知られているように、

$$\nabla^2\phi=-\rho\quad\to\quad\phi\left(\mathbf{r}\right)=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\rho\left(\mathbf{r}'\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}dV'$$

である。係数や符号を忘れてしまった方は、たとえば、ρ の分布は、非常に局所的であるとして、Gauss の定理を使えばよい。その後で重ね合わせの原理を使えばよい（または、静電ポテンシャルの場合を思い出してもよい）。これをベクトルの場合に単純に拡張すると、

$$\nabla^2\mathbf{A}=-\mathbf{a}\quad\to\quad\mathbf{A}\left(\mathbf{r}\right)=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\mathbf{a}\left(\mathbf{r}'\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}dV'\tag{2-76}$$

が得られる。そこで、今、「人を食ったような」次の表式を取り上げよう。

$$\nabla^2\mathbf{A}\left(\mathbf{r}\right)=-\left(-\nabla^2\mathbf{A}\right)$$

これに、(2-76)を適用すると、

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{r}\right)=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{\nabla'^2\mathbf{A}\left(\mathbf{r}'\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}dV'$$

ここで、「記憶に値する（かつ悪名高いとも言える）」次の関係式を用いる。

$$\nabla^2=grad\left(div\right)-rot\,rot$$

すると、

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{r}\right)=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{\nabla'\left(div'\mathbf{A}'\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}dV'$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int\frac{\nabla'\times\left(rot'\mathbf{A}'\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}dV'\tag{2-77}$$

となる。さて、

$$\nabla'\left(\frac{\psi}{r}\right)=\frac{1}{r}\nabla'\psi+\nabla'\left(\frac{1}{r}\right)\psi$$

から、もし、$r\ \to\ \infty$ で、急速に$\psi\to 0$ とすると、

$$\int\nabla'\left(\frac{\psi}{r}\right)dV'=\int\frac{\psi}{r}d\mathbf{S}\ \to\ 0.$$

となる。これから、(2-77)の右辺の第一項は、

$$-\frac{1}{4\pi}\int\frac{\nabla'\left(div'\mathbf{A}'\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}dV'$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int\nabla'\left(\frac{1}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\right)div'\mathbf{A}'\,dV'$$

となる。さらに、

$$\nabla' f\left(\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|\right)=-\nabla f\left(\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|\right)$$

に注意すると、この第一項は、

$$-\frac{1}{4\pi}\int\nabla\left(\frac{1}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\right)div'\mathbf{A}'\,dV'=-\frac{\nabla}{4\pi}\int\frac{div'\mathbf{A}'}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}dV'$$

となる。

また、

$$\nabla'\times\left(\frac{\mathbf{a}}{r}\right)=\frac{1}{r}\nabla'\times\mathbf{a}+\nabla'\left(\frac{1}{r}\right)\times\mathbf{a}$$

であるので、もし、$r\ \to\ \infty$ で、急速に$\mathbf{a}\to 0$ とすると、

$$\int dV'\,\nabla'\times\left(\frac{\mathbf{a}}{r}\right)=\int d\mathbf{S}\times\left(\frac{\mathbf{a}}{r}\right)\ \to\ \mathbf{0}$$

であることから、(2-77)の右辺の第二項は、

$$\frac{1}{4\pi}\int\frac{\nabla'\times\left(rot'\mathbf{A}'\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}dV'$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\int\nabla'\left(\frac{1}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\right)\times\left(rot'\mathbf{A}'\right)dV'$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int\nabla\left(\frac{1}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\right)\times\left(rot'\mathbf{A}'\right)dV'$$

$$=\nabla\times\frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{rot'\mathbf{A}'}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\right)dV'$$

と変形できる。以上をまとめると、

$$\mathbf{A}=-grad\,\Phi+rot\,\mathbf{B}$$

と表わすことでき、ここで、

$$\boxed{\Phi=\frac{1}{4\pi}\int\frac{div'\mathbf{A}'}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}dV',\quad \mathbf{B}=\frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{rot'\mathbf{A}'}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\right)dV'}\tag{2-78}$$

と与えられることがわかる。

これから、全空間で、$div\,\mathbf{A}=0$ なら、ベクトル、$\mathbf{A}$ は、

$$\mathbf{A}=rot\,\mathbf{B}$$

となり、また、$rot\,\mathbf{A}=\mathbf{0}$ なら、

$$\mathbf{A}=-grad\,\Phi$$

となることがわかる。しかし、周知のように、(全空間ではない)ある領域では、$div\,\mathbf{A}=0$で、かつ$rot\,\mathbf{A}=\mathbf{0}$ならば、$\mathbf{A}=\mathbf{0}$ であると安易に結論を出してはいけない。たとえば、z 軸上に線電流が流れていているz 軸を除いた領域を考えればわかる(問:この場合の磁場を求めよ)。または軸上に渦糸がある完全流体の場合や(軸ではない)ある太さをもった円筒を除いた場合などでは、$\mathbf{A}=\mathbf{0}$ とはならない

［蛇足］

もし、$\mathbf{r}\to\infty$ の時、$\mathbf{A}\to\mathbf{c}$ である場合には、

$$\tilde{\Phi}=\Phi-\left(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r}\right)$$

または、

$$\tilde{\mathbf{B}}=\mathbf{B}+\frac{1}{2}\left(\mathbf{c}\times\mathbf{r}\right)$$

とすればよい(問:これを示せ)。

$\mathbf{r}\to\infty$ の時、$\mathbf{A}\to\mathbf{c}\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\ \left(\mathbf{k}\neq\mathbf{0}\right)$ であるとすると、

$$\boxed{\tilde{\Phi}=\Phi-\frac{1}{ik}\left(\mathbf{c}\cdot\mathbf{n}\right)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}$$

かつ、

$$\boxed{\tilde{\mathbf{A}}=\mathbf{A}+\frac{1}{ik}\left(\mathbf{c}\times\mathbf{n}\right)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}$$

とすればよいことがわかる。ただし、$k=\left|\mathbf{k}\right|,\ \mathbf{n}=\hat{\mathbf{k}}=\mathbf{k}/k$ である(問:以下の性質を使って、これを示せ)。

スカラー関数やベクトルが$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ に依存するとすると、

$$\nabla\equiv i\,\mathbf{k},\quad \nabla\bullet\equiv i\,\mathbf{k}\bullet,\quad \nabla\times\equiv i\,\mathbf{k}\times$$

であり、また、

$$-grad\,\Phi \;\to\; (\mathbf{c}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}\,,$$
$$rot\,\mathbf{A} \;\to\; \mathbf{n}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{n}) = \mathbf{c}-(\mathbf{c}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$$

となる。

一般の場合

計算が繰り返しのような感じになるが・・・
まず、「簡単な場合」の初めの注からもわかるように、

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\,\delta(r)$$

というよく知られた関係がある。また、明らかに、

$$\nabla^2(f\,\mathbf{c}) = (\nabla^2 f)\mathbf{c}$$

であるが、これらを使うと、

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \int \mathbf{A}(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,dV' \\ &= -\frac{1}{4\pi}\int \mathbf{A}(\mathbf{r}')\nabla^2\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)dV' \\ &= -\frac{\nabla^2}{4\pi}\int \mathbf{A}(\mathbf{r}')\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)dV'\end{aligned}$$

これから、

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -grad&\left[\frac{\nabla}{4\pi}\bullet\int \mathbf{A}(\mathbf{r}')\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)dV'\right] \\ &+rot\left[\frac{\nabla}{4\pi}\times\int \mathbf{A}(\mathbf{r}')\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)dV'\right]\end{aligned} \tag{2-79}$$

となり、既に、 $\mathbf{A} = -grad\,\Phi + rot\,\mathbf{B}$ という形に表されることがわかる。ここで、さらに、

$$(\nabla f)\cdot\mathbf{A} = \nabla\cdot(f\,\mathbf{A}) - f\,\nabla\cdot\mathbf{A}$$
$$(\nabla f)\times\mathbf{A} = \nabla\times(f\,\mathbf{A}) - f\,\nabla\times\mathbf{A}$$

という簡単な関係を使うと、(2-79)式の右辺の第一項と第二項のカギ・カッコの中はそれぞれ以下のように変形できる。第一項は、

$$\begin{aligned}&\frac{\nabla}{4\pi}\bullet\int \mathbf{A}(\mathbf{r}')\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)dV' \\ &= \frac{1}{4\pi}\int \nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\bullet\mathbf{A}(\mathbf{r}')\,dV' \\ &= -\frac{1}{4\pi}\int \nabla'\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\bullet\mathbf{A}(\mathbf{r}')\,dV' \\ &= -\frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{\mathbf{A}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\bullet d\mathbf{S}' + \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\left(\nabla'\bullet\mathbf{A}(\mathbf{r}')\right)dV'\end{aligned}$$

となり、第二項は、

$$\begin{aligned}&\frac{\nabla}{4\pi}\times\int \mathbf{A}(\mathbf{r}')\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)dV' \\ &= \frac{1}{4\pi}\int \nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\times\mathbf{A}(\mathbf{r}')\,dV' \\ &= -\frac{1}{4\pi}\int \nabla'\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\times\mathbf{A}(\mathbf{r}')\,dV' \\ &= -\frac{1}{4\pi}\int d\mathbf{S}'\times\left(\frac{\mathbf{A}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) + \frac{1}{4\pi}\int\frac{\nabla'\times\mathbf{A}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV'\end{aligned}$$

となる。以上をまとめると、(2-79)は、以下のようにも書ける。

$$\mathbf{A} = -grad\,\Phi + rot\,\mathbf{B} \tag{2-80}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\Phi &= \frac{1}{4\pi}\int\frac{div'\mathbf{A}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV' - \frac{1}{4\pi}\int\frac{\mathbf{A}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\bullet d\mathbf{S}' \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{rot'\mathbf{A}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)dV' + \frac{1}{4\pi}\int\frac{\mathbf{A}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\times d\mathbf{S}'\end{aligned}} \tag{2-81}$$

もし、表面上で、 $\mathbf{A}=\mathbf{0}$ であるなら、(2-78)と同じ形になる。また、表面上で、 $\mathbf{A}_\perp=\mathbf{0}$ とすると、Φ は(2-78)の Φ と同じになり、 $\mathbf{A}_\parallel=\mathbf{0}$ とすると、$\mathbf{B}$ が(2-78)の $\mathbf{B}$ と同じになる。

なお、この一般の場合には、必ずしも $div\,\mathbf{A}=0$ なら、 $\mathbf{A}=rot\,\mathbf{B}$ となり、 $rot\,\mathbf{A}=\mathbf{0}$ なら、 $\mathbf{A}=-grad\,\Phi$ となるわけではない。どのような場合にそうなるかについては、3 節の微分形式を参照されたい（参考までに言えば、空間が連続的に一点に変形可能、つまり可縮空間（contractible space）であるならば、そうである)。

［蛇足］

さて、以上と同じ手法をスカラー関数に適用すると、

$$\boxed{\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{4\pi}\int\frac{\nabla^2\Phi}{r}dV \\ &+\frac{1}{4\pi}\int\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial n}dS-\frac{1}{4\pi}\int\Phi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS\end{aligned}}$$

となる。ここで、

$$r=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$$

とおき、右辺の積分は、「ダッシュ」付の位置座標について行うものとする。しかし、この式は、既に導出されている(2-51)で、

$$-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

とおけば、直ちに求まる（問：これを示せ)。

ここで、さらに、

$$\nabla^2\Phi=0$$

であるとすると、

$$\boxed{\Phi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi}\int\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial n}dS-\frac{1}{4\pi}\int\Phi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS}$$

となる。この表式の著しい特徴は、領域内のΦの値が、すべて境界での値によって規定されているということにある。

上の表式は３次元の場合であったが、二次元の場合には、

$$\nabla^2\ln r=2\pi\,\delta(\mathbf{r})$$

という関係がある。これは、たとえば、z軸上に一様に電荷が分布している静電場の計算から容易にわかる（問：これを示せ)。これと３次元の場合の対応する式と比べると、直ちに、

$$\boxed{\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2\pi}\int\left(\nabla^2\Phi\right)\ln r\,dS \\ &-\frac{1}{2\pi}\int\ln r\frac{\partial\Phi}{\partial n}ds+\frac{1}{2\pi}\int\Phi\frac{\partial}{\partial n}\ln r\,ds\end{aligned}}$$

と求まる。また、$\nabla^2\Phi=0$の場合には、

$$\boxed{\Phi(\mathbf{r})=-\frac{1}{2\pi}\int\ln r\frac{\partial\Phi}{\partial n}ds+\frac{1}{2\pi}\int\Phi\frac{\partial}{\partial n}\ln r\,ds}$$

となる。

［付記］無限遠点での境界積分

ここでは、無限遠点での境界積分の振る舞いについて考えてみよう。Φの境界積分は、(2-81)から、

$$\Phi_S=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{\mathbf{A}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\bullet d\mathbf{S}'$$

であるが、いま、$\mathbf{R}=\mathbf{r}'$とおくと、

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}=\frac{1}{R}\left(1+\frac{\mathbf{R}\bullet\mathbf{r}}{R^2}+\cdots\right)$$

と展開できる。よって、無限遠点では、

$$\Phi_S=-\frac{1}{4\pi R}\int\mathbf{A}\bullet d\mathbf{S}-\frac{1}{4\pi R^3}\int(\mathbf{R}\bullet\mathbf{r})\mathbf{A}\bullet d\mathbf{S}$$

として十分であろう（ここで、面倒なので、変数の「ダッシュ」を外している。また、位置の積分変数は、$\mathbf{R}$である)。ここで、第一項は、

$$I_1=-\frac{1}{4\pi R}\int\mathbf{A}\bullet d\mathbf{S}=-\frac{1}{4\pi R}\int div\mathbf{A}\,dV$$

となる。また、第二項は、

$$\nabla(\mathbf{R}\bullet\mathbf{r})=\mathbf{r}$$

に注意する（問：これを示せ）と、

$$\begin{aligned}I_2&=-\frac{1}{4\pi R^3}\int(\mathbf{R}\bullet\mathbf{r})\mathbf{A}\bullet d\mathbf{S}=-\frac{1}{4\pi R^3}\int\nabla\bullet\left((\mathbf{R}\bullet\mathbf{r})\mathbf{A}\right)dV\\&=-\frac{1}{4\pi R^3}\int(\mathbf{R}\bullet\mathbf{r})\,div\mathbf{A}\,dV-\frac{1}{4\pi R^3}\mathbf{r}\bullet\int\mathbf{A}\,dV\end{aligned}$$

となる。ここで、まず、

$$\int div\mathbf{A}\,dV \quad ：有限$$

であると仮定しよう（これは、$div\mathbf{A}$を$\mathbf{A}$の発生源（ソース）であると考えると、ソースの全空間積分が有限であるという仮定と同じである)。さらに、無限遠点で

$$\mathbf{A}\ \to\ \mathbf{a}$$

となると仮定すると、

$$\int\mathbf{A}\,dV\ \to\ \frac{4\pi R^3}{3}\mathbf{a}$$

となる（または、$\mathbf{a}$を$\mathbf{A}$の全空間での平均値と思ってもよい。)。以上の仮定をすると$\mathbf{R}\to\infty$で、

$$I_1\ \to\ 0$$

$$I_2\ \to\ -\frac{\mathbf{r}\bullet\mathbf{a}}{3}$$

となる。よって、

$$-grad\,\Phi_S\ \to\ \frac{\mathbf{a}}{3}$$

さらに、もし、$div\mathbf{A}=0$であるなら、

$$I_1 = 0\,,\quad I_2 = -\frac{\mathbf{r}\bullet\mathbf{a}}{3}$$

となり、Φ の体積積分の項も明らかにゼロになるので、

$$\boxed{\Phi \;\rightarrow\; -\frac{\mathbf{r}\bullet\mathbf{a}}{3}}$$

となる。この項による $\mathbf{A}$ への寄与は、次のベクトルの rotation と同じであるので、ベクトル、$\mathbf{B}$ に繰り込むことが可能となる。

$$\frac{1}{6}(\mathbf{a}\times\mathbf{r})$$

つまり、$div\mathbf{A} = 0$ なら、$\Phi = 0$ とおくことができるということが示されたことになる。

次に、(2-81)の $\mathbf{B}$ に関する境界積分、$\mathbf{B}_S$ について考えよう。

$$\mathbf{B}_S = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathbf{A}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\times d\mathbf{S}'$$

であるので、無限遠点では、

$$\mathbf{B}_S = \frac{1}{4\pi R}\int \mathbf{A}\times d\mathbf{S} + \frac{1}{4\pi R^3}\int (\mathbf{R}\bullet\mathbf{r})\,\mathbf{A}\times d\mathbf{S}$$

となる。この式の第一項を I_3 とすると、

$$I_3 = \frac{1}{4\pi R}\int \mathbf{A}\times d\mathbf{S} = -\frac{1}{4\pi R}\int \nabla\times\mathbf{A}\,dV$$

となり、第一項を I_4 とすると、

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{1}{4\pi R^3}\int (\mathbf{R}\bullet\mathbf{r})\,\mathbf{A}\times d\mathbf{S} \\ &= -\frac{1}{4\pi R^3}\int \nabla\times\big((\mathbf{R}\bullet\mathbf{r})\,\mathbf{A}\big)\,dV \\ &= -\frac{1}{4\pi R^3}\int (\mathbf{R}\bullet\mathbf{r})\,rot\mathbf{A}\,dV - \frac{1}{4\pi R^3}\mathbf{r}\times\int \mathbf{A}\,dV \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\int \nabla\times\mathbf{A}\,dV \quad ：有限$$

と仮定し、先と同様に、

$$\mathbf{A} \;\rightarrow\; \mathbf{a}$$

と仮定すると、

$$\int \mathbf{A}\,dV \;\rightarrow\; \frac{4\pi R^3}{3}\mathbf{a}$$

であるので、$\mathbf{R} \;\rightarrow\; \infty$ で、

$$I_3 \;\rightarrow\; 0$$

$$I_4 \;\rightarrow\; \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{r}}{3}$$

となり、

$$rot\,\mathbf{B}_S \;\rightarrow\; \frac{2\mathbf{a}}{3}$$

が得られる。さらに、もし、$rot\mathbf{A} = \mathbf{0}$ であるとすると、

$$I_3 = 0\,,\quad I_4 = \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{r}}{3}$$

となるが、$\mathbf{B}$ の体積積分の項も明らかにゼロになるので、

$$\boxed{\mathbf{B} \;\rightarrow\; \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{r}}{3}}$$

となる。この項による $\mathbf{A}$ への寄与は、次のスカラー・ポテンシャルの gradient と同じであるので、ポテンシャル、Φ に繰み込むことが可能である。つまり、

$$\Phi = -\frac{2}{3}\mathbf{a}\bullet\mathbf{r}$$

とすればよい。よって、$rot\mathbf{A} = \mathbf{0}$ なら、$\mathbf{B} = 0$ とおくことができる。

（コメント：　$\mathbf{A}$ に特異点（singularity）があっても、その点で積分が発散しなければ、たとえ無限遠までの積分（特異点からの寄与）が発散しても、平均には寄与しないことに注意しよう。たとえば、特異点付近の座標依存性が $\propto 1/r^2$ であれば平均には寄与しない（特に点電荷による静電場のような場合には、まったく寄与しない）。また、座標依存性が空間全体で、$\propto 1/r$ のような場合には、無限遠点までの積分がより大きく発散するが、平均には寄与しない。（問：これらのことを示せ。）よって、（通常は）平均に寄与するのは、無限遠点での値、$\mathbf{a}$ のみであり、これが平均そのものになるのである。）

以上で、無限遠点での境界積分に関する話は終わりであるが、先に、$\mathbf{r}\rightarrow\infty$ の時、$\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{c}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ $(\mathbf{k}\neq\mathbf{0})$ とした場合のことに触れたので、比較的マニアックではあるが、これについても若干の概略的な説明を加えておこう。なお、この場合には、境界積分が消えていることに注意されたい。よって、この無限の様子は、体積積分から出てくるのである。まず、

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\,\delta(r)$$

から、

$$\int e^{i\mathbf{k}\bullet\mathbf{r}'}\nabla^2\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)dV = -4\pi\int \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,e^{i\mathbf{k}\bullet\mathbf{r}'}dV$$

となるが、右辺は、簡単に、

$$-4\pi e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

左辺は、この種の計算でよく使われる「怪しげな」なテクニック、無限遠点で、$e^{-\varepsilon r}\ \left(\varepsilon>0\right)$ というような減衰項をつけるテクニックで、境界上の積分を消去することにすると、部分積分またはGreen の定理により、

$$\int\left(\nabla^2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'}\right)\left(\frac{1}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\right)dV=-k^2\int\left(\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'}}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\right)dV$$

となる。よって、

$$\int\left(\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'}}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\right)dV=\frac{4\pi}{k^2}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

が得られる。これを使うと、

$$\frac{1}{4\pi}\int\frac{div'\mathbf{A}'}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}dV'=i\frac{\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{c}\right)}{k^2}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

となり、書き換えると、

$$-\frac{1}{ik}\left(\mathbf{c}\cdot\mathbf{n}\right)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

となる。同様にして、

$$\frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{rot'\mathbf{A}'}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\right)dV'=i\frac{\left(\mathbf{k}\times\mathbf{c}\right)}{k^2}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}=\frac{\left(\mathbf{c}\times\mathbf{n}\right)}{ik}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

となる。以上のことから、$\mathbf{r}\to\infty$ の時、

$$\Phi\ \to\ -\frac{1}{ik}\left(\mathbf{c}\cdot\mathbf{n}\right)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\ ,\quad \mathbf{A}\ \to\ \frac{1}{ik}\left(\mathbf{c}\times\mathbf{n}\right)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

となることがわかる。よって、
$\mathbf{r}\to\infty$ の時、

$$-grad\Phi+rot\,\mathbf{A}\ \to\ \mathbf{c}\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

となる（問：これを示せ）。以上から、$\mathbf{A}\to\mathbf{c}\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ となる項については、Φ 及び $\mathbf{A}$ の体積積分の表式の中に含めることができるが示せたことになる。なお、ついでに、「怪しげな」テクニックを使わない、他の方法（または考え方）は、現実には、単一周波数の（純粋の）波動はないということを用いる方法である。具体的には、

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\to\int A\left(\mathbf{k}\right)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\,d^3k$$

とし、$A\left(\mathbf{k}\right)$ は、ある $\mathbf{k}_0$ を中心として狭い範囲でのみゼロでないとするのである。極端な場合（ $A\left(\mathbf{k}\right)=\delta\left(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0\right)$ ）には、当然、$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ に戻る。こうすると、よく知られているように、（たとえ近場では、波数 k の波が揃っていても）遠方では、波がバラバラになって、実質、振幅が小さくなってくる。つまり、人為的な減衰をさせたのと同じになるのであるが、このように設定した方があまり「人為的な感じ」がしないであろう。また、「関心のある」遠方では、それに応じて $A\left(\mathbf{k}\right)$ の分布の幅を十分狭くとれば、波は $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ に近い。

いま、簡単のために、$A\left(\mathbf{k}\right)$ は、$\mathbf{k}_0$ の周りに等方的に波数ベクトルが分布している仮定しよう。つまり、

$$A\left(\mathbf{k}\right)=A\left(\Delta\mathbf{k}\right)=A\left(\mathbf{a}\right)=A\left(a\right),\ \left(\Delta\mathbf{k}=\mathbf{a}\right)$$

とすると、

$$\int A\left(\mathbf{k}\right)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\,d^3k=e^{i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}}\int A\left(a\right)e^{iaR\cos\phi}\,a^2da\,d\Omega$$

$$d\Omega=-2\pi\,d\left(\cos\phi\right)$$

のような形になる。これから、以下のような評価が得られる。

$$\left|\int A\left(\mathbf{k}\right)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\,d^3k\right|\le C\int\left|\frac{A\left(a\right)}{R}\right|ada\sim O\left(\frac{1}{R}\right)$$

さて、先の問題の積分において、部分積分またはGreen の定理を適用し、積分内の ∇^2 を、

$$\nabla^2\left(\frac{1}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\right)\ \to\ \nabla^2\left(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'}\right)\left(\frac{1}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\right)$$

のように移す際に、$\mathbf{r}\to\infty$ とともに発散する傾向を示す境界積分がでてくる。これは、係数等を省略すると（また、$\mathbf{k}$ と $\mathbf{k}_0$ の違いを無視すると）、

$$k^2R\int e^{ikR\cos\theta}d\cos\theta$$

である（問：これを示せ）。よって、この境界積分は、

$$\sim O\left(1\right)$$

となる。これと上の評価とを合わせて、$\mathbf{r}\to\infty$ で境界積分が消えるということがわかる（問：これらを示せ）。

2.10　座標変換とベクトル変換

ベクトルの定義

今頃、ベクトルを定義するのかと言われそうであるが、この講義では、必要がない限り定義を前面に出すことはやめて、物事を感覚的、初等的に把握することを目指しているので、今頃、定義らしきものを説明するのである。

　ベクトルとは、「絶対」空間の中に実在する（方向と量をもった）対象物で、人間が勝手に描いた座標とは無関係に存在するものである（と定義するのである）。つまり座標変換によらない、言い換えれば、座標変換に対して不変な存在としてベクトルを考えるのである。

追記（1）：絶対空間などを持ち出して、前時代的なことを言っていると思われるかもしれないが、ここで言っていることは、何か特別な絶対座標があるということを言っているのではなく、座標などなくても存在する幾何学的空間のことであり、少なくとも我々の感覚で感じとることができる、または存在するに違いないと直感的に感じることができる空間のことである。大げさに言えば（宗教的、霊験的気分で言えば）、ここでいう絶対空間とは、人間が感得することはできても、完全には理解することはできないであろう神聖とも言えるような存在であり、その前では、すべての座標系は等しく平等であり、相対的であるようなものである。**（コメント：忙しい現代人にとって、たまにはこのような情感に浸るのも悪くないかもしれない）。**

追記（2）：また、ここには時間という概念はない（座標変換やベクトル変換で時間をパラメーターのように扱うことはあっても・・）。ちなみに、絶対時空なるものを考えて、すべての座標系はそこでは平等で相対的と考えると（さらにローレンツ計量を加えると）、アインシュタインの特殊相対論になるであろう。

　以上のような「大見得を切った定義」を用いると、座標変換の見通しがよくなる。

今 n 次元空間の中に勝手な n 個の独立なベクトル、$\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_n$ を選んで、これを基底とする座標系（古い座標系とする）を設定したとしよう（以下、明示しないかぎり $n=3$ でなくてもよい）。すると、一般にベクトル、$\mathbf{a}$ は、その座標系での成分ベクトル（数ベクトル）を $\left(a_1,\ \cdots\ ,a_n\right)$ で、

$$\mathbf{a}=\sum_{i=1}^{n}a_i\,\mathbf{u}_i=a_i\,\mathbf{u}_i=\left(\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_n\right)\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$$

と書ける。ここで、3 番目の式では、和記号を省略する簡易則を用いている。また、最後の式は行列としての演算（一行及び一列の行列であるが・・）である。**（注：行列の要素にベクトルが並ぶことに抵抗感をもつ方がいるかもしれないが、ベクトル空間での演算にはベクトル間の加法や実数とベクトルとの積が許されることから、要素が実数のみの行列の演算と同じに扱うことができるので、このような記法が許される。後で、ベクトルを要素とする行列同士の積も使われるが、例えばその積として内積を使うことにすれば、同様に行列の演算として行ってもよいことがわかる。）**

　さて、ここで別の n 個の独立なベクトル、$\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n$ を選んで、これを基底とする別の（新しい）座標系を考え、成分ベクトル（数値ベクトル）を $\left(a_1',\ \cdots\ ,a_n'\right)$ とすると、ベクトル、$\mathbf{a}$ 自体は不変であるので、

$$\mathbf{a}=\left(\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_n\right)\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\left(\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n\right)\begin{pmatrix}a_1'\\ \vdots\\ a_n'\end{pmatrix}\tag{2-82}$$

となる。今、二つの座標系の基底ベクトルの間に、

$$\begin{pmatrix}\mathbf{v}_1\\ \vdots\\ \mathbf{v}_n\end{pmatrix}=\mathbf{A}\begin{pmatrix}\mathbf{u}_1\\ \vdots\\ \mathbf{u}_n\end{pmatrix}\tag{2-83}$$

という関係があったとする（ここで $\mathbf{A}$ は座標変換を表す行列である）。

すると、

$$\left(\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n\right)=\left(\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_n\right)\mathbf{A}^T$$

となるが、（基底ベクトルの一次独立性を使うと）、

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \mathbf{A}^T \begin{pmatrix} a_1' \\ \vdots \\ a_n' \end{pmatrix} \tag{2-84}$$

または、

$$\begin{pmatrix} a_1' \\ \vdots \\ a_n' \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{T^{-1}} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{2-85}$$

まとめると、

(１)ベクトル a 自体は座標変換で不変

(２)基底ベクトルの変換

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{pmatrix}$$

(covariant、共変)

(３)数ベクトルの変換

$$\begin{pmatrix} a_1' \\ \vdots \\ a_n' \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{T^{-1}} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

(contravariant、反変)

となる。一般に基底ベクトルのように変換するベクトル（または数ベクトル）を共変ベクトルと言い、上の数ベクトルのように変換が転置逆行列で表されるものを反変ベクトルと言う。

本講師は、contravariant の（正しい）意味を知らないが、con=反または逆、tra=transpose（転置）と勝手に解釈すると、記憶しやすい。

なお、反変の数ベクトルの添字を下付から上付きに変えると（単に表記を変更すると）、

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n} a^i \, \mathbf{u}_i = a^i \, \mathbf{u}_i$$

となり、より便利な（間違いの少ない）表記となるが、この講義録のほとんどの箇所では、あえてこの表記法は用いていない。と言いながら、次のコメントでは、この表記を用いることにする。

今、二つの数ベクトルを考えて、一つが反変、もう一つが共変であるとしよう。

$$\begin{pmatrix} a'^1 \\ \vdots \\ a'^n \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{T^{-1}} \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} b_1' \\ \vdots \\ b_n' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

すると、

$$\left(a'^1, \cdots, a'^n\right) \begin{pmatrix} b_1' \\ \vdots \\ b_n' \end{pmatrix} = \left(a^1, \cdots, a^n\right) \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{2-86}$$

となる。つまり、

$$\sum_{i=1}^{n} a'^i b_i' = \sum_{i=1}^{n} a^i b_i$$

となり、周知の反変ベクトルと共変ベクトルの内積は不変であるということがわかる。なお、(2-86)の右辺を見ると、反変ベクトルの変換の仕方がよりわかりやすいかもしれない。また、(2-86)で数、b_i をベクトル、$\mathbf{u}_i$ に置き換えても行列算は成り立つので、「内積らしき」計算をすると、ベクトル自体は、座標変換で不変であるという、そもそもの前提に戻ることになる。このような見方、ベクトルは、「内積もどき」の形をしているので座標変換に対して不変であるという見方は、時々、重要である。

<u>直交座標系の間の座標変換</u>

以下では、3 次元空間での直交座標系の間の座標変換について考えることにする。ベクトル、$\mathbf{x}$ を（古い）正規直交基底、$\mathbf{e}_i$ で展開すると、

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = \left(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

となる。次に、ベクトル、$\mathbf{x}$ を別の（新しい）正規直交基底、$\mathbf{e}_i'$ で展開したとすると、

$$\mathbf{x}' = x_1'\mathbf{e}_1' + x_2'\mathbf{e}_2' + x_3'\mathbf{e}_3' = \left(\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\right) \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

となる。ここで、$\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ である（ベクトルは座標不変)。いま、この二つの新・旧直交座標系の基底の間に、次のような関係があるとしよう。

$$\left(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\right) = \left(\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\right) P \tag{2-87}$$

ここで、P は基底変換の行列、$P = \left(p_{ij}\right)$ であり、我々が大学等で習った線形代数でよく使われる表式、

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j' p_{ji}$$

を行列表示したものである（注：行列の添え字の順番に注意)。この(2-87)は、また、

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1' \\ \mathbf{e}_2' \\ \mathbf{e}_3' \end{pmatrix} \tag{2-88}$$

とも書ける。さて、$\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ であることから、

$$\left(\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3\right)\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\end{pmatrix}=\left(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=\left(\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3\right)P\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

となり、(基底ベクトルの独立性を使うと)、

$$\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

が導かれる。一方、(2-87)と(2-878)から、

$$\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\\mathbf{e}_2\\\mathbf{e}_3\end{pmatrix}\bullet\left(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\right)=P^T\begin{pmatrix}\mathbf{e}'_1\\\mathbf{e}'_2\\\mathbf{e}'_3\end{pmatrix}\bullet\left(\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3\right)P$$

となるが（• は内積)、たとえば、

$$\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\\mathbf{e}_2\\\mathbf{e}_3\end{pmatrix}\bullet\left(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\right)=\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\bullet\mathbf{e}_1&\mathbf{e}_1\bullet\mathbf{e}_2&\mathbf{e}_1\bullet\mathbf{e}_3\\\mathbf{e}_2\bullet\mathbf{e}_1&\mathbf{e}_2\bullet\mathbf{e}_2&\mathbf{e}_2\bullet\mathbf{e}_3\\\mathbf{e}_3\bullet\mathbf{e}_1&\mathbf{e}_3\bullet\mathbf{e}_2&\mathbf{e}_3\bullet\mathbf{e}_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$$

となる（I は単位行列）ことから、

$$P^TP=I \qquad (2\text{-}89)$$

となり、行列、P は直交行列であるというよく知られた結果が得られる。

以上をまとめると（古い座標系から新しい座標系への変換は）、

$$\boxed{\begin{aligned}&\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\\&\begin{pmatrix}\mathbf{e}'_1\\\mathbf{e}'_2\\\mathbf{e}'_3\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\\mathbf{e}_2\\\mathbf{e}_3\end{pmatrix}\qquad\left(\Leftarrow\left(P^T\right)^{-1}=P\right)\end{aligned}} \qquad (2\text{-}90)$$

となる。（注：先の n 次元での座標変換の行列、$\mathbf{A}$ と行列、P とは、$\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1}=P$ という関係にあるが、結局のところ、$\mathbf{A}=P$ という関係と同じになる。）

（コメント：(2-90)式のような記憶しやすい表現があまり使われていないのは不思議な気がする。）

<u>擬ベクトル（pseudo vector）の座標変換</u>

座標変換に対して不変なものとしてベクトルを定義したが、このようなベクトルは、通常、極性ベクトルと言われている。これに対して、二つの極性ベクトルの外積で作られたようなベクトルは、軸性ベクトル、または擬ベクトルと呼ばれており、極性ベクトルとは異なり、すべての座標変換に対して不変とはならない。(2-90)式を使うと、二つのベクトルの外積は、

$$\mathbf{a}'\times\mathbf{b}'=\begin{vmatrix}\mathbf{e}'_1&a'_1&b'_1\\\mathbf{e}'_2&a'_2&b'_2\\\mathbf{e}'_3&a'_3&b'_3\end{vmatrix}$$

$$=\left|P\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\\mathbf{e}_2\\\mathbf{e}_3\end{pmatrix}\quad P\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\quad P\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\right|$$

$$=\det P\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1&a_1&b_1\\\mathbf{e}_2&a_2&b_2\\\mathbf{e}_3&a_3&b_3\end{vmatrix}=\det P\left(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right)$$

のように変換する（注：このように容易に結果が導かれたのは、外積を行列式で表しておいて、変換式、(2-90)を使ったおかげである）。(2-89)から、

$$\det P=\pm1$$

が得られる。さらに、変換、P が恒等変換からの連続的な変化による場合には、

$$\det P=1$$

となる。つまり、座標系の間の変換が不連続な変換を伴わないような場合には、外積によって得られたベクトルは普通の（極性）ベクトルと同様に座標変換に対して不変となる。このように座標変換に対してベクトルの外積と同じように変換するベクトルを擬ベクトルといい、その変換は、

$$\boxed{\mathbf{c}'=\left(\det P\right)\mathbf{c}}$$

で与えられる。また、擬ベクトルの座標成分の変換は、

$$\left(\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\right)\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ c_3' \end{pmatrix} = \det P\left(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\right)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$= \det P\left(\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\right) P\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

であることから、

$$\boxed{\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ c_3' \end{pmatrix} = \left(\det P\right) P\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}}$$

と求まる。もし、座標変換が反転であるとすると、その変換行列、P は、

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となり、擬ベクトルは、

$$\mathbf{c}' = -\mathbf{c}$$

となる。しかし、座標成分は、

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ c_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

で与えられる。ちなみに、極性ベクトル、$\mathbf{a}$ は、

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a}$$

であり、その座標成分は、

$$\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$$

となる（問：これらのことを図で示せ、また、$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ についても同様に図で示せ）。

また、x 軸のみが反転した場合には、

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり、

$$\mathbf{c}' = -\mathbf{c}$$

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ c_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ -c_2 \\ -c_3 \end{pmatrix}$$

となり、また、

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a}$$

$$\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

となる。さらに、x 軸と y 軸が反転した場合には、

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で、

$$\mathbf{c}' = \mathbf{c}$$

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ c_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 \\ -c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

となり、

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a}$$

$$\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

となる。この場合には、当然ではあるが、擬ベクトルも（極性）ベクトルも同じ変換に従う。

ベクトルの変換（回転）

今までは、空間内で不変な存在としてのベクトル、つまり空間に固定されたベクトルが座標変換によってどう見えるかということを考えてきたが、次に、ベクトル自体が空間内で動いた時にどうなるかを考えることにしよう。ただし、ベクトルの一般的な変形ではなく、単純な回転（剛体的回転）のみを取り扱うことにする。今度は、座標系は固定しているので、その基底は変わらないということに注意しよう。

ベクトルを回転させると、基底は変わらないが、その座標成分は、ある行列を用いて、

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

のように表わされる（はずである）（問：これを示せ）。**（注：それはベクトルの線形変換になっているからである）。**

また、剛体的な回転であることから、ベクトルの長さは不変である。

$$\|\mathbf{x}'\|^2 = \|R\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2$$

ここで、$\mathbf{x}$ は任意のベクトルである。

これから、任意のベクトル、$\mathbf{x}, \mathbf{y}$ について

$$(R\mathbf{y}, R\mathbf{x}) = (\mathbf{y}, R^T R\mathbf{x}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

となる。ただし、$(\ ,\ )$ は内積である。（問：これを示せ（ヒント：$\mathbf{x}+\mathbf{y}$ の長さを考える））これからさらに、

$$R^T R = I$$

となることがわかる（問：これらを示せ）。つまり、R は少なくとも直交行列であることがわかる。

もし、仮に基底も一緒に回転したとすると、その座標系で見て、ベクトルの座標成分は、回転前と同じとなるので、この仮の座標変換の変換行列を、P とすると、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = PR \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

となる。つまり、

$$\boxed{PR = I \quad \rightarrow \quad R = P^{-1} = P^T}$$

となり、回転行列は、座標変換の行列の逆行列、または転置行列に等しいことがわかる。これをもって、ベクトルの回転は、座標系を逆回転したものと同じであるというようなことがよく言われるが、これに執着すると頭の中が回転を始め、だんだん混乱をきたすようになるであろう。実際に回転するのはベクトルであって、座標系は静止したままであるということに注意する必要がある。また、回転が何段にも行われたとすると、それに伴う仮の座標回転を、

$$P = P_n P_{n-1} \cdots P_1$$

とすると、

$$\boxed{R = P^{-1} = P_1^T \cdots P_{n-1}{}^T P_n^T}$$

となり、行列のかけ算の順番が逆になる（問：計算ではなく図示して、これを示せ（頭の中がぐるぐる回転するかもしれないが・・・））。

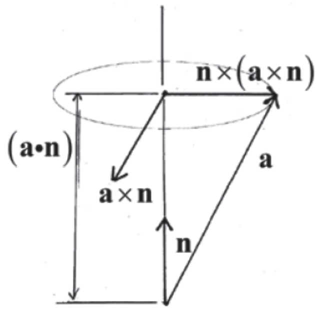


図 15. ある軸のまわりのベクトルの回転

<u>ある軸の周りのベクトルの回転</u>

一般に、ベクトルは、ある単位ベクトル、$\mathbf{n}$ を用いて、

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a}\bullet\mathbf{n})\mathbf{n} + \mathbf{n}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{n}) \tag{2-91}$$

のように、単位ベクトルに平行な成分と垂直な成分とに分解できる。これは、**図 15** からも明らかであるが、

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{n}) = \mathbf{a}(\mathbf{n}\bullet\mathbf{n}) - (\mathbf{a}\bullet\mathbf{n})\mathbf{n}$$

ということからも明らかあろう。次に、この単位ベクトルの周りに（正方向に、または反時計回りに）角度、Φ だけベクトルを回転してみよう。すると、**図 16** からわかるように、回転後のベクトルを

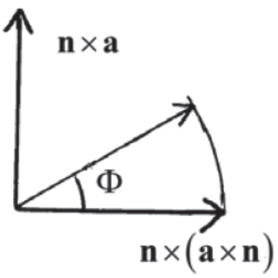


図 16. 単位ベクトルに垂直な面内のベクトルの回転

$\mathbf{a}'$ とすると、

$$\mathbf{a}' = (\mathbf{a}\bullet\mathbf{n})\mathbf{n} + \mathbf{n}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{n})\cos\Phi + (\mathbf{n}\times\mathbf{a})\sin\Phi$$

となることがわかる（問：これを示せ）。これを書き換えると、

$$\boxed{\mathbf{a}' = \mathbf{a}\cos\Phi + (\mathbf{a}\bullet\mathbf{n})\mathbf{n}(1-\cos\Phi) + (\mathbf{n}\times\mathbf{a})\sin\Phi}$$

または、

$$\boxed{\mathbf{a}' = \mathbf{a} + ((\mathbf{a}\bullet\mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{a})(1-\cos\Phi) + (\mathbf{n}\times\mathbf{a})\sin\Phi}$$

と書ける。これを行列表示すると、若干、複雑であるが、

$$\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$+2s\begin{pmatrix} (n_1n_1-1)s & n_1n_2s-n_3c & n_1n_3s+n_2c \\ n_2n_1s+n_3c & (n_2n_2-1)s & n_2n_3s-n_1c \\ n_3n_1s-n_2c & n_3n_2s+n_1c & (n_3n_3-1)s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

となる。ただし、

$$c=\cos\frac{\Phi}{2}.\ s=\sin\frac{\Phi}{2}$$

である（問：これを示せ)。

逆に、ある回転行列、R が与えられた場合、必ず回転軸が存在することを示そう。もしそのような回転軸があるとすると、この軸ベクトル、$\mathbf{n}$ は回転で不変であるので、

$$R\,\mathbf{n}=\mathbf{n}$$

となり、

$$\det(R-I)=0$$

でなければばならないことがわかる。一方、

$$\det(R-I)=\det R\det\left(I-R^{-1}\right)$$

$$=\det\left(I-R^{T}\right)=\det(I-R)$$

であるので、

$$\det(R-I)=0$$

となる（問：これは、奇数次元の場合（今の場合、3 次元）のみ成立することを示せ)。これから、確かに、回転で不変なベクトルが存在するということがわかったことになる。つまり、固有値、1 の固有ベクトルが（少なくとも）一つは必ず存在するということになる。では、他の固有値はどうなっているのであろうか。回転行列は、恒等変換からの連続的な変化によって得られるので、

$$\det R=1$$

であるが、一つの固有値は、1 であることから、二つの固有値には、

$$\lambda_1\lambda_2=1 \tag{2-92}$$

という関係があることがわかる。いま、これらの固有値の一つ、λ が実数であるとしよう（当然、もう一つも実数になる)。すると、実数の固有ベクトルを $\mathbf{v}$ とすると、

$$R\,\mathbf{v}=\lambda\,\mathbf{v}$$

となるが、両辺のベクトルの内積をとると、

$$\lambda^2=1$$

となる（問：これを示せ)。よって、

$$\lambda=\pm1$$

となるので、$\lambda_1=1,\lambda_2=1$ または、$\lambda_1=-1,\lambda_2=-1$ となる。前者は恒等変換、後者は、回転軸のまわりの $180°$ の回転を表わしているが、これらは、以下の特別な場合と見なすことができる。次に、固有値が（真の）複素数であるとすると、

一つの固有ベクトルの関係から、

$$R\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$$

となり、その複素共役をとって、

$$R\mathbf{x}^*=\lambda^*\mathbf{x}^*$$

という別の関係（$\lambda\neq\lambda^*$） が得られる。これら二つの式の内積をとって、

$$|\lambda|^2=1$$

となるが、これと(2-92)式から、

$$(\lambda_1,\lambda_2)=e^{\pm i\Phi}$$

となることがわかる。また、行列、R のトレースは、

$$Tr(R)=1+e^{i\Phi}+e^{-i\Phi}=1+2\cos\Phi$$

となる。

オイラー（Euler）角による回転表示

ここでは、（話を戻って）ベクトルの回転ではなく、まずは、座標変換をオイラー角で表示することから説明しよう。なお、このオイラー角による表示のやり方は（変換の順番や回転軸のとり方で）いくつかあるが、ここでは以下のようにとるものとする。まず、z 軸のまわりに正の方向に、角度、ϕ だけ回転させると、その変換行列、P_ϕ は、

$$P_\phi=\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と与えられる。次に新しい y 軸のまわりに（正の方向に）角度、θ だけ回転させると、その変換行列、P_θ は、

$$P_\theta=\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

となる。そして、最後に、新しいz 軸のまわりに（正の方向に）角度、ψ だけ回転させると、その変換行列、P_ψ は、

$$P_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。以上より、全体の変換行列、$P = P_\psi P_\theta P_\phi$ は、(2-93)となり、これから対応する（ベクトルの）回転行列、$R = P^{-1} = P^T$ は、(2-94)となる。

$$P = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\theta\cos\phi - \sin\psi\sin\phi & \cos\psi\cos\theta\sin\phi + \sin\psi\cos\phi & -\cos\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\theta\cos\phi - \cos\psi\sin\phi & -\sin\psi\cos\theta\sin\phi + \cos\psi\cos\phi & \sin\psi\sin\theta \\ \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (2\text{-}93)$$

$$R = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\theta\cos\phi - \sin\psi\sin\phi & -\sin\psi\cos\theta\cos\phi - \cos\psi\sin\phi & \sin\theta\cos\phi \\ \cos\psi\cos\theta\sin\phi + \sin\psi\cos\phi & -\sin\psi\cos\theta\sin\phi + \cos\psi\cos\phi & \sin\theta\sin\phi \\ -\cos\psi\sin\theta & \sin\psi\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (2\text{-}94)$$

（問：これらを示せ（見かけほど計算は大変ではない)。）また、

$$Tr(R) = 1 + 2\cos\Phi$$

であることから、

$$\cos\Phi = \cos^2\frac{\theta}{2}\cos(\psi+\phi) - \sin^2\frac{\theta}{2}$$

となる。これを書き換えると、

$$\boxed{\cos\frac{\Phi}{2} = \cos\frac{\theta}{2}\cos\left(\frac{\psi+\phi}{2}\right)}$$

となる。ただし、$\theta = \psi = \phi = 0$ のとき、$\Phi = 0$ となるように符号を決めた（$\Phi = 2\pi$ とはしない)。
なお、$\theta = 0$ の場合、

$$\cos\Phi = \cos(\psi + \phi)$$

つまり、回転角は、$\Phi = \psi + \phi$ となり、回転軸のベクトルは、明らかに、

$$\mathbf{n} = (0, 0, 1)$$

である（ただし、言わずもがなではあるが、$\Phi = 0$ のときは、ベクトルは不定)。
また、$\theta = \pi$ の場合には、

$$\cos\Phi = -1$$

となり、回転角は、ψ, ϕ の値によらず、$\Phi = \pi$ となる（若干、びっくりする結果かもしれない)。
また、回転軸のベクトルは、

$$\mathbf{n} = \left(\sin\left(\frac{\psi-\phi}{2}\right), \cos,\left(\frac{\psi-\phi}{2}\right), 0\right)$$

となる（問：これを示せ)。
一般の場合には、当然、回転軸は、

$$(R - I)\mathbf{v} = 0$$

の解を求めればよいのであるが、直接、計算するのは腕力を必要とするであろう。そこで、まず、ベクトル、$\mathbf{v}$ は少なくとも上の行列の第三行と直交するということに着目すると、容易に、次の二つのベクトルがそうであることがわかる。

$$\mathbf{v}_{1=} \begin{pmatrix} -\cos\psi\sin\theta \\ \sin\psi\sin\theta \\ 1+\cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \sin\psi \\ \cos\psi \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって、$\mathbf{v} = \mathbf{v} = A\mathbf{v}_1 + B\mathbf{v}_2$ とおいて、上の行列の第一行と直交するようにすると、

$$A = \sin\psi + \sin\phi,\ B = \sin\theta(\cos\psi + \cos\phi)$$

と求まる。これから、

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sin\theta\sin(\psi-\phi) \\ \sin\theta(1+\cos(\psi-\phi)) \\ (\sin\psi + \sin\phi)(1+\cos\theta) \end{pmatrix}$$

となるが、共通因子を除くと、

$$
\hat{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \sin\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{\psi-\phi}{2} \\ \sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\psi-\phi}{2} \\ \cos\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{\psi+\phi}{2} \end{pmatrix}
$$

となり、これが回転軸の方向を示すベクトルになる（ただし、ベクトルの長さは規格化されていない)。なお、

$$
|\hat{\mathbf{v}}|^2 = 1 - \cos^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\psi+\phi}{2}
$$

または、

$$
|\hat{\mathbf{v}}| = \sin\frac{\Phi}{2}
$$

である（問：(計算が好きな方へ）一連の結果を示せ)。また、(この規格化については）Appendix C も参照のこと。

このように半角が登場してくると、回転行列(回転群）と SU(2)との対応について言及したくなってくるが、それはベクトル解析の範囲を越えているように思われるので、次の話題に移ることにしよう。

2.11 直交曲線座標におけるベクトル

（grad, div, rot, Laplacian の表式）

この節は、Appendix A の最後の箇所、「パワポ３枚程度のカンバンの外」にある直交曲線座標(orthogonal curvilinear coordinates) におけるベクトル解析の公式を説明したものである。**図 17** のような直交曲線座標を描くと、その線要素は、

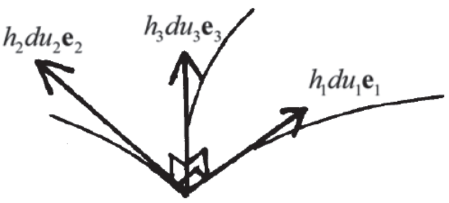


図 17. 線要素（直交曲線座標系）

$$
\boxed{d\mathbf{r} = h_1du_1\ \mathbf{e}_1 + h_2du_2\ \mathbf{e}_2 + h_3du_3\ \mathbf{e}_3} \quad (2\text{-}95)
$$

である。同様にして、面積及び体積要素も、

$$
\boxed{\begin{aligned} d\mathbf{S} &= h_2h_3\ du_2du_3\ \mathbf{e}_1 + h_3h_1\ du_3du_1\ \mathbf{e}_2 + h_1h_2\ du_1du_2\ \mathbf{e}_3 \\ dV &= h_1h_2h_3\ du_1du_2du_3 \end{aligned}}
$$

と与えられるが、これらのことは既知であろう。

<u>初等的な説明</u>

通常、直交曲線座標でのベクトル解析の公式は以下のように与えられる。

まず、gradient、∇ であるが、直交直線座標（デカルト座標）では、既出のように

$$
\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}
$$

であり、その意味を考えると、曲線座標では、

$$
\boxed{\nabla f = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\mathbf{e}_3}
$$

とかけることがわかる。ここで、$\mathbf{e}_i$ は i 方向の単位ベクトルである。

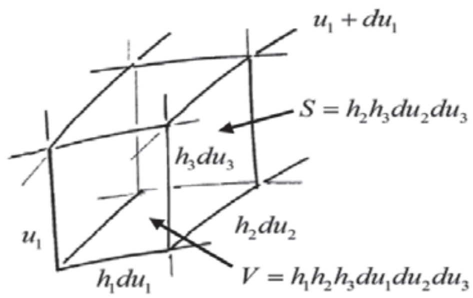


図 18. 微小体積（直交曲線座標系）

また、divergence の公式は、ガウスの公式を**図 18** のように微小体積に適用して求められる。

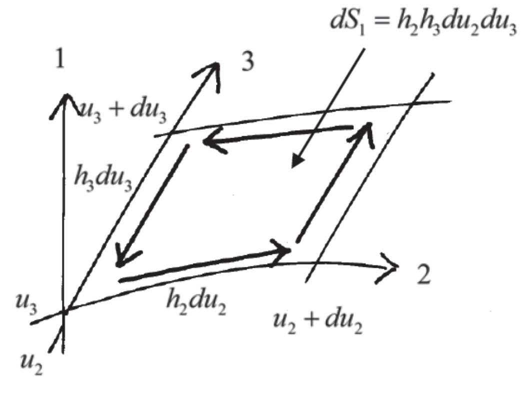


図 19. 微小表面積（直交曲線座標系）

$$
\begin{aligned}
\int div\mathbf{A}dV &= div\mathbf{A}h_1h_2h_3\ du_1du_2du_3 \\
\int \mathbf{A}\bullet d\mathbf{S} &= \left(A_1h_2h_3\right)\Big|_{u_1+du_1} du_2du_3 \\
&\quad - \left(A_1h_2h_3\right)\Big|_{u_1} du_2du_3 + \cdots
\end{aligned}
$$

であるので、

$$\nabla\bullet\mathbf{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(h_2h_3A_1\right)+\cdots\right]$$

となる。また、rotation は、Stokes の公式を図 19 のような微小面積に適用して求められる。

$$\int rot\mathbf{A}\bullet d\mathbf{S}=\left(rot\mathbf{A}\right)_1 dS_1=\left(rot\mathbf{A}\right)_1 h_2h_3\,du_2du_3$$

$$\int\mathbf{A}\bullet d\mathbf{r}=\left(A_3h_3\right)\Big|_{u_2+du_2}du_3-\left(A_3h_3\right)\Big|_{u_2}du_3$$
$$-\left(A_2h_2\right)\Big|_{u_3+du_3}du_2+\left(A_2h_2\right)\Big|_{u_3}du_2$$

であるので、

$$\left(\nabla\times\mathbf{A}\right)_1=\frac{1}{h_2h_3}\left(\frac{\partial\left(h_3A_3\right)}{\partial u_2}-\frac{\partial h_2A_2}{\partial u_3}\right)$$

と求まる。

また、スカラー関数 ϕ の Laplacian は、

$$\nabla^2\phi=\nabla\bullet\left(\nabla\phi\right)$$

として、gradient の公式に divergence の公式を適用して得られる。以上をまとめると、

$$\begin{aligned}
&\nabla\bullet\mathbf{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(h_2h_3A_1\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(h_3h_1A_2\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(h_1h_2A_3\right)\right]\\
&\nabla\times\mathbf{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix}h_1\mathbf{e}_1 & h_2\mathbf{e}_2 & h_3\mathbf{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3}\\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3\end{vmatrix}\\
&\nabla^2\phi=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial u_3}\right)\right]
\end{aligned}\qquad(2\text{-}96)$$

となる（問：これを示せ）。（コメント：記憶力に自信がない場合は、この公式は忘れてもよい。必要なときには、ポンチ絵を描いてみれば、容易に思い出すことができるので・・・）

<u>積分公式を使わない説明</u>

一般に、

$$d\mathbf{r}=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_2}du_2+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_3}du_3$$

と書けるが、(2-95)と比較すると、

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1}=h_1\mathbf{e}_1,\ \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_2}=h_2\mathbf{e}_2,\ \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_3}=h_3\mathbf{e}_3\qquad(2\text{-}97)$$

また、一般的に、

$$d\mathbf{r}\bullet d\mathbf{r}=\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u^i}\bullet\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u^j}\right)du^idu^j=g_{ij}du^idu^j$$

であるが、 (2-97)から、

$$g_{ij}=h_i^2\,\delta_{ij}$$

となることがわかる。再度、書けば、

$$d\mathbf{r}\bullet d\mathbf{r}=\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1}\right)^2du_1{}^2+\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_2}\right)^2du_2{}^2+\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_3}\right)^2du_3{}^2$$
$$=h_1{}^2du_1{}^2+h_2{}^2du_2{}^2+h_3{}^2du_3{}^2$$

である。なお、(適当にとった) 直線直交座標を使うと、たとえば、

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1}=\frac{\partial x}{\partial u_1}\mathbf{i}+\frac{\partial y}{\partial u_1}\mathbf{j}+\frac{\partial z}{\partial u_1}\mathbf{k}$$

となることに注意しよう。

また、直交曲線座標でのデル記号は、直線直交座標から変換すれば、

$$\nabla=\mathbf{u}_1\frac{\partial}{\partial u_1}+\mathbf{u}_2\frac{\partial}{\partial u_2}+\mathbf{u}_3\frac{\partial}{\partial u_3}\qquad(2\text{-}98)$$

となる。ここで、

$$\mathbf{u}_i=\partial u_i/\partial x\,\mathbf{i}+\partial u_i/\partial y\,\mathbf{j}+\partial u_i/\partial z\,\mathbf{k}$$

である（問：これを示せ)。つまり、

$$\nabla u_1=\mathbf{u}_1,\quad\nabla u_2=\mathbf{u}_2,\quad\nabla u_3=\mathbf{u}_3$$

であることがわかる。これは、また、(2-98)から、

$$\nabla u_i = \mathbf{u}_j \frac{\partial u_i}{\partial u_j} = \mathbf{u}_j \delta_{ij}$$

と直接、計算してもわかる。さらに、

$$\mathbf{u}_i \bullet \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u_j} + \frac{\partial u_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u_j} + \frac{\partial u_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u_j}$$

$$= \frac{\partial u_i}{\partial u_j} = \delta_{ij}$$

となる（これから、$\mathbf{u}_i$ 等は、$\partial \mathbf{r}/\partial u_i$ の双対基底であることがわかる)。たとえば、$\mathbf{u}_1$ は、$\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ に直交している。よって、$\mathbf{u}_1$ は実は、$\mathbf{e}_1$ に平行であることがわかる（**注：双対基底であっても、一般には、このようには言えないことに注意しよう）**。以上のことから、

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{e}_1}{h_1} = \nabla u_1\ ,\ \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{e}_2}{h_2} = \nabla u_2\ ,$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{e}_3}{h_3} = \nabla u_3$$

が得られる。また、これから、次の性質も容易に示せる。

$$\nabla \times \mathbf{u}_i = \nabla \times \nabla u_i = \mathbf{0}$$

これは、(2-96)の $\nabla \times \mathbf{A}$ の公式にある行列の第三行が、この場合、$(h_1/h_1,\ 0,\ 0) = (1,\ 0,\ 0)$ となることからもわかる。

また、同様に

$$\nabla \bullet (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3) = \nabla \bullet (\nabla u_2 \times \nabla u_3) = 0 \qquad (2\text{-}99)$$

これも成分で表せば、

$$\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3 = \frac{1}{h_2 h_3}\mathbf{e}_1$$

であるので、(2-96)から直ちにわかる。

以上の性質を使うと、まず、(2-98)から gradient は、

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1} + \mathbf{e}_2 \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2} + \mathbf{e}_3 \frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}$$

となる。また、

$$\nabla \bullet \mathbf{A} = \nabla \bullet \left(A_1 \mathbf{e}_1 + \cdots\right) = \nabla \bullet \left(A_1 \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 + \cdots\right)$$

$$= \nabla \bullet \left(h_2 h_3 A_1 \mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3 + \cdots\right)$$

$$= \nabla\left(h_2 h_3 A_1\right) \bullet \left(\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3\right) + \cdots$$

$$\frac{\nabla\left(h_2 h_3 A_1\right)}{h_2 h_3} \bullet \left(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3\right) + \cdots$$

$$= \frac{1}{h_2 h_3}\left(\frac{\partial\left(h_2 h_3 A_1\right)}{h_1 \partial u_1}\mathbf{e}_1 + \cdots\right) \bullet \mathbf{e}_1 + \cdots$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{\partial\left(h_2 h_3 A_1\right)}{\partial u_1} + \cdots$$

となる。ここで、(2-99)を使っている。以上より、(2-99)の一番目の結果が得られる。

rotation についても、

$$\nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \left(A_1 \mathbf{e}_1 + \cdots\right) = \nabla \times \left(h_1 A_1 \mathbf{u}_1 + \cdots\right)$$

$$= \nabla\left(h_1 A_1\right) \times \mathbf{u}_1 + \cdots = \frac{\nabla\left(h_1 A_1\right)}{h_1} \times \mathbf{e}_1 + \cdots$$

$$= \frac{1}{h_1}\left(\mathbf{e}_1 \frac{1}{h_1}\frac{\partial\left(h_1 A_1\right)}{\partial u_1} + \mathbf{e}_2 \frac{1}{h_2}\frac{\partial\left(h_1 A_1\right)}{\partial u_2}\right.$$

$$\left. + \mathbf{e}_3 \frac{1}{h_3}\frac{\partial\left(h_1 A_1\right)}{\partial u_3}\right) \times \mathbf{e}_1 + \cdots$$

$$= \frac{1}{h_1}\left(-\mathbf{e}_3 \frac{1}{h_2}\frac{\partial\left(h_1 A_1\right)}{\partial u_2} + \mathbf{e}_2 \frac{1}{h_3}\frac{\partial\left(h_1 A_1\right)}{\partial u_3}\right) + \cdots$$

$$= \left(-\frac{1}{h_3 h_2}\frac{\partial\left(h_2 A_2\right)}{\partial u_3} + \frac{1}{h_2 h_3}\frac{\partial\left(h_3 A_3\right)}{\partial u_2}\right)\mathbf{e}_1 + \cdots$$

となり、(2-99)の二番目の対応する結果が得られる。

ここで、ついでに $rot\,rot$ の式を書いておこう。

$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})$

$$=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{bmatrix} h_1\mathbf{e}_1 & h_2\mathbf{e}_2 & h_3\mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ \dfrac{h_1}{h_2h_3}\left(\dfrac{\partial h_3A_3}{\partial u_2}-\dfrac{\partial h_2A_2}{\partial u_3}\right) & \dfrac{h_2}{h_3h_1}\left(\dfrac{\partial h_1A_1}{\partial u_3}-\dfrac{\partial h_3A_3}{\partial u_1}\right) & \dfrac{h_3}{h_1h_2}\left(\dfrac{\partial h_2A_2}{\partial u_1}-\dfrac{\partial h_1A_1}{\partial u_2}\right) \end{bmatrix}$$

これを使えば、例の誤解を生じやすい（表記が悪い）、∇^2 が、

$$\nabla^2\mathbf{A}=\nabla(\nabla\bullet\mathbf{A})-\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})$$

から求めることができる。

次によく使われる円筒座標と球座標に関する具体的な表式を参考のために挙げておこう。これらは、上記の公式から比較的容易に求められる。

円筒座標

$$h_1=1,\ h_2=r,\ h_3=1$$

$$\nabla=\mathbf{e}_1\frac{\partial}{\partial r}+\mathbf{e}_2\frac{\partial}{r\,\partial\theta}+\mathbf{e}_3\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla\bullet\mathbf{A}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,A_r)+\frac{\partial A_\theta}{r\,\partial\theta}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\mathbf{A}=\mathbf{e}_1\left(\frac{\partial A_z}{r\,\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)+\mathbf{e}_2\left(\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r}\right)+\mathbf{e}_3\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,A_\theta)-\frac{\partial A_r}{r\,\partial\theta}\right)$$

$$\nabla^2=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\mathbf{A}=\mathbf{e}_1\left(\nabla^2A_r-\frac{A_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}\right)+\mathbf{e}_2\left(\nabla^2A_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}-\frac{A_\theta}{r^2}\right)+\mathbf{e}_3\left(\nabla^2A_z\right)$$

球座標

$$h_1=1,\ h_2=r,\ h_3=r\sin\theta$$

$$\nabla=\mathbf{e}_1\frac{\partial}{\partial r}+\mathbf{e}_2\frac{\partial}{r\,\partial\theta}+\frac{\mathbf{e}_3}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$\nabla\bullet\mathbf{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\,A_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

$$\nabla\times\mathbf{A}=\frac{\mathbf{e}_1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial\sin\theta A_\phi}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right)+\frac{\mathbf{e}_2}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi}-\frac{\partial(r\,A_\phi)}{\partial r}\right)+\frac{\mathbf{e}_3}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\,A_\theta)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)$$

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\mathbf{A} = \mathbf{e}_1 &\left(\nabla^2 A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} \right) \\
+\mathbf{e}_2 &\left(\nabla^2 A_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{A_\theta}{r^2\sin^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} \right) \\
+\mathbf{e}_3 &\left(\nabla^2 A_\phi + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi} - \frac{A_\phi}{r^2\sin^2\theta} \right)
\end{aligned}
$$

さて、これまで（ある意味で巧みに）基底ベクトルの座標微分が顕わな形で出ないようにしてきたが、この基底ベクトルの座標微分について求めてみよう（この箇所は、G. K. Bachelor, “Fluid Dynamics”, Cambridge University Press, 1970 の Appendix 2 を参照にしているが、より適した参考文献があるかもしれない)。

まず、（少なくとも C^2 級の微分可能性を仮定すると）

$$\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial u_2\partial u_1} = \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial u_1\partial u_2}$$

であるので、

$$\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1\mathbf{e}_1) = \frac{\partial}{\partial u_1}(h_2\mathbf{e}_2)$$

となり、これから、

$$\frac{\partial h_1}{\partial u_2}\mathbf{e}_1 + h_1\frac{\partial\mathbf{e}_1}{\partial u_2} = \frac{\partial h_2}{\partial u_1}\mathbf{e}_2 + h_2\frac{\partial\mathbf{e}_2}{\partial u_1}$$

であるので、

$$h_1\frac{\partial\mathbf{e}_1}{\partial u_2}\bullet\mathbf{e}_2 = \frac{\partial h_2}{\partial u_1} \qquad (2\text{-}100)$$

が導かれる（問：これを示せ)。

また、

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1}\bullet\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_2} = 0$$

であることから、

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1}\bullet\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_2}\right) = \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_3}\right)\bullet\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_2} + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1}\bullet\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_3}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_3}\bullet\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_2}\right) - \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_3}\bullet\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1}\bullet\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_3}\right) - \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_3}\bullet\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1}\right) \\
&= -2\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_3}\bullet\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial u_1\partial u_2}
\end{aligned}
$$

となる。これから、

$$\frac{\partial(h_1\mathbf{e}_1)}{\partial u_2}\cdot\mathbf{e}_3 = 0, \quad \frac{\partial(h_2\mathbf{e}_2)}{\partial u_1}\cdot\mathbf{e}_3 = 0$$

となり、

$$\frac{\partial\mathbf{e}_1}{\partial u_2}\cdot\mathbf{e}_3 = 0, \quad \frac{\partial\mathbf{e}_2}{\partial u_1}\cdot\mathbf{e}_3 = 0$$

が導かれる（問：これを示せ)。これと、(2-100)と合わせると、

$$\frac{\partial\mathbf{e}_1}{\partial u_2} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial u_1}\mathbf{e}_2$$

となることがわかる。これが意味するところは、ある基底ベクトルのそれと垂直方向の変化量は、この垂直方向を向いており、もう一つの垂直方向（今の場合、u_3 方向）の成分をもたないということである。つまり、曲線直交座標系では、ある座標系の方向に進む際に、座標がねじれていないということを意味しているのである。また、（この「原則」に従うと、または実際に計算することで）

$$\frac{\partial\mathbf{e}_1}{\partial u_3} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_3}{\partial u_1}\mathbf{e}_3$$

となることがわかる。さらに、

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3$$

であることから、

$$\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial u_1}=\frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial u_1}\times\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_2\times\frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial u_1}$$
$$=\frac{\partial h_1}{h_2\partial u_2}\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_2\times\frac{\partial h_1}{h_3\partial u_3}\mathbf{e}_1$$

となり、

$$\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial u_1}=-\frac{\partial h_1}{h_2\partial u_2}\mathbf{e}_2-\frac{\partial h_1}{h_3\partial u_3}\mathbf{e}_3$$

が導かれる。これらをまとめると、次表が得られる。

	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\dfrac{\partial}{\partial u_1}$	$-\dfrac{\partial h_1}{h_2\partial u_2}\mathbf{e}_2-\dfrac{\partial h_1}{h_3\partial u_3}\mathbf{e}_3$	$\dfrac{\partial h_1}{h_2\partial u_2}\mathbf{e}_1$	$\dfrac{\partial h_1}{h_3\partial u_3}\mathbf{e}_1$
$\dfrac{\partial}{\partial u_2}$	$\dfrac{\partial h_2}{h_1\partial u_1}\mathbf{e}_2$	$-\dfrac{\partial h_2}{h_3\partial u_3}\mathbf{e}_3-\dfrac{\partial h_2}{h_1\partial u_1}\mathbf{e}_1$	$\dfrac{\partial h_2}{h_3\partial u_3}\mathbf{e}_2$
$\dfrac{\partial}{\partial u_3}$	$\dfrac{\partial h_3}{h_1\partial u_1}\mathbf{e}_3$	$\dfrac{\partial h_3}{h_2\partial u_2}\mathbf{e}_3$	$-\dfrac{\partial h_3}{h_1\partial u_1}\mathbf{e}_1-\dfrac{\partial h_3}{h_2\partial u_2}\mathbf{e}_2$

これを使えば、どんな微分演算についても（機械的に）計算をすることができる。たとえば、

$$\mathbf{A}=A_1\mathbf{e}_1+A_2\mathbf{e}_3+A_3\mathbf{e}_3$$

の divergence は、

$$div\,\mathbf{A}=\nabla\bullet\left(A_1\mathbf{e}_1+\cdots\right)=\left(\nabla A_1\right)\bullet\mathbf{e}_1+A_1\nabla\bullet\mathbf{e}_1+\cdots$$
$$=\frac{\partial A_1}{h_1\partial u_1}+A_1\left(\mathbf{e}_1\frac{\partial}{h_1\partial u_1}+\mathbf{e}_2\frac{\partial}{h_2\partial u_2}+\mathbf{e}_3\frac{\partial}{h_3\partial u_3}\right)\bullet\mathbf{e}_1+\cdots=\frac{\partial A_1}{h_1\partial u_1}+A_1\left(\frac{\partial h_2}{h_2h_1\partial u_1}+\frac{\partial h_3}{h_3h_1\partial u_1}\right)+\cdots$$
$$=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left(h_2h_3\frac{\partial A_1}{\partial u_1}+A_1h_3\frac{\partial h_2}{\partial u_1}+A_1h_2\frac{\partial h_3}{\partial u_1}\right)+\cdots=\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}\left(h_2h_3A_1\right)+\cdots$$

と計算でき、先の公式が得られる。

同様にして、次の方向微分をベクトルに作用させたものも得られる。

$$\boxed{\begin{aligned}\left(\mathbf{n}\bullet\nabla\right)\mathbf{A}=\mathbf{e}_1&\left(\left(\mathbf{n}\bullet\nabla\right)A_1+\frac{A_2}{h_1h_2}\left(n_1\frac{\partial h_1}{\partial u_2}-n_2\frac{\partial h_2}{\partial u_1}\right)+\frac{A_3}{h_3h_1}\left(n_1\frac{\partial h_1}{\partial u_3}-n_3\frac{\partial h_3}{\partial u_1}\right)\right)\\+\mathbf{e}_2&\left(\left(\mathbf{n}\bullet\nabla\right)A_2+\frac{A_3}{h_2h_3}\left(n_2\frac{\partial h_2}{\partial u_3}-n_3\frac{\partial h_3}{\partial u_2}\right)+\frac{A_1}{h_1h_2}\left(n_2\frac{\partial h_2}{\partial u_1}-n_1\frac{\partial h_1}{\partial u_2}\right)\right)\\+\mathbf{e}_3&\left(\left(\mathbf{n}\bullet\nabla\right)A_3+\frac{A_1}{h_3h_1}\left(n_3\frac{\partial h_3}{\partial u_1}-n_1\frac{\partial h_1}{\partial u_3}\right)+\frac{A_2}{h_2h_3}\left(n_3\frac{\partial h_3}{\partial u_2}-n_2\frac{\partial h_2}{\partial u_3}\right)\right)\end{aligned}}$$

2.12 ベクトル解析の応用例

古典力学や電磁気学を学んだ人は、ベクトルという概念によって、これら二つの分野の公式が如何に簡潔に記述され、かつ公式の意味を明瞭に把握できるという経験をしてきている。また、内積と外積は、そのためになくてはならない量であるということも知っている。このように古典力学や電

磁気学にはなくてはならないものとして、ベクトル解析という分野が歴史的に発展してきたと言ってもよいであろう。
しかし、おもしろいことに、古典力学（ニュートン力学）の基礎方程式には、内積も外積も現れてこない。また、Maxwell 方程式でも、rotation という形で外積が入っているが、二つのベクトルの内積や外積は現れてこない。文章だけではつまらないので、すこし古典力学（ニュートン力学の方程式）と Maxwell 方程式を思い出そう（少なくとも物理を専攻した者はすらすらと書けないとまずいが・・）。なお、以下では用語（慣用語）の説明は省略する。また、ここでは、古典力学や電磁気学を講義しようというものではなく、ベクトル解析の一つの具体例として取り上げているものであることを付記しておく。

<u>古典力学（ニュートン力学）</u>
まずは、復習である。ニュートンの第二法則は、

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\mathbf{F} \qquad (\mathbf{p}=m\mathbf{v}=m\dot{\mathbf{r}})$$

であり、この両辺に $\mathbf{v}$ をかけると、

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}m\mathbf{v}^2=\mathbf{F}\bullet\mathbf{v}$$

となる。これから、

$$\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2-\frac{1}{2}m\mathbf{v}_0{}^2=\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$$

となる。ここで、$\mathbf{F}$ が保存力であるとすると、
$\mathbf{F}=-\nabla U$ から、

$$-\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}=\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}}\nabla U\bullet d\mathbf{r}=U-U_0$$

となる。ここで、（言うまでもないことではあるが）最後の等式に、FTC 型の公式を使っている。これから、

$$E_{total}=\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2+U=const.$$

となり、（よく知られている）エネルギー保存則が導かれる。運動エネルギーを、E とすると、

$$E=\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2=\frac{\mathbf{p}^2}{2m}$$

から、

$$dE=\mathbf{v}\bullet d\mathbf{p}$$

となる。
ついでに、特殊相対論についても触れておく。特殊相対論でも、

$$dE=\mathbf{v}\bullet d\mathbf{p} \qquad (2\text{-}101)$$

という関係がある（有用な関係式のひとつ）。ただし、ここでもＥは運動エネルギー（kinetic energy）である。よく知られているように、初等的には、

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}=mc^2\gamma,\ \mathbf{p}=\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}=m\gamma\,\mathbf{v}$$

であり、ここで、$\beta=v/c,\gamma=1\big/\sqrt{1-\beta^2}$ である。これから、

$$E^2=\mathbf{p}^2c^2+m^2c^4\ ,\quad \mathbf{p}=\frac{E}{c^2}\mathbf{v} \qquad (2\text{-}102)$$

が得られるが、これらも有名な関係式である。
(2-102)の第一式を微分して、それに第二式を使うと、(2-101)が直ちに得られる。特殊相対論の E,p,v の間にはいくつかの関係式があるが、これらは、次の対応関係を使うと単に双曲三角関数の間の関係式に帰着する（よって E,p,v の関係式は覚えておく必要はない）。

$$\begin{aligned} E &\ \to\ \gamma=\cosh\theta \\ p &\ \to\ \mu=\sinh\theta \\ v &\ \to\ \beta=\tanh\theta \end{aligned}$$

たとえば、(2-101)式は、

$$d\cosh\theta=\tanh\theta\, d\sinh\theta$$

と同じであり、(2-102)も次の明らかな関係と同じことである。

$$\cosh^2\theta=\sinh^2\theta+1,\ \sinh\theta=\cosh\theta\tanh\theta$$

しかし、E,p,v の間の微分関係は、次の関係式（対数微分の関係）を覚えていると、具体的な計算を行う際に、双曲三角関よりもっと便利であろう。

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\gamma}{\gamma}&=\beta^2\frac{d\mu}{\mu} \\ \frac{d\gamma}{\gamma}&=\mu^2\frac{d\beta}{\beta} \\ \frac{d\mu}{\mu}&=\gamma^2\frac{d\beta}{\beta} \end{aligned}}$$

これを覚えるのは、**図 20** で、左辺には上位にあるもの、右辺には下位にあるものをとり、残りのものを二乗してかけるとするのである(注:実は、双曲三角関数のスカラーの関係式で、(2-101)のベクトルの関係式を証明したつもりになったのは、(一般的に言えば)反則である。しかし、今の場合、$\mathbf{p}$ が $\mathbf{v}$ と平行であるので、2.6 節の**＜閑話休題＞**の関係式が使える。よって、反則が正当化されるのである。同様に、$\mathbf{v}\bullet d\mathbf{p}=vdp$ も有効である。しかしながら、ベクトル間の関係では、たとえば、

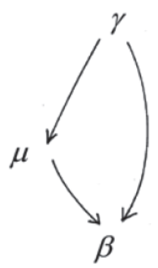


図 20. γ, μ, β の関係

$\dfrac{d\mathbf{p}}{p}=\dfrac{d\boldsymbol{\mu}}{\mu}\neq\gamma^2\dfrac{d\boldsymbol{\beta}}{\beta}=\gamma^2\dfrac{d\mathbf{v}}{v}$ である。しかし、上のように内積の形にもっていける場合には、常に成立する。たとえば、$\mathbf{v}\bullet d\mathbf{p}=\gamma^2\mathbf{p}\bullet d\mathbf{v}$ となる。)

ここで、ニュートン力学に戻って、「てこ」の原理を考えると、トルク、$\mathbf{N}$ という概念に行き当たり、さらに角運動量というものが重要であるということがわかる。ニュートンの第二法則から、

$$\mathbf{r}\times d\mathbf{p}/dt=\mathbf{r}\times\mathbf{F}=\mathbf{N}$$

となり、左辺は、$\mathbf{p}=m\dot{\mathbf{r}}$ であることから、

$$\frac{d\left(\mathbf{r}\times\mathbf{p}\right)}{dt}=\mathbf{N}$$

と書け、角運動量、$\mathbf{L}$ を、

$$\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$$

と定義すると、

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt}=\mathbf{N}$$

と求まる。ここで、$\mathbf{F}$ がゼロ、またはその方向が $\mathbf{r}$ と平行であるとすると(たとえば中心力の場合)、角運動量の保存則が導かれる。その他の場合でも、例えば、x 方向のトルクがゼロの場合には、x 方向の角運動量が保存される。また、

$$\mathbf{r}\bullet\mathbf{L}=0,\ \ \mathbf{p}\bullet\mathbf{L}=0$$

となる(問:これを示せ)。$\mathbf{L}$ が保存されるとすると、当然、その方向も保存されるので、上記の関係から、運動は、$\mathbf{L}$(例えば、z 方向)と垂直な平面内($x-y$ 平面)で考えればよいことがわかる。

さて、一般に、ベクトル、$\mathbf{a}$ は、ある方向の単位ベクトル、$\mathbf{n}$ を使って、

$$\mathbf{a}=\left(\mathbf{a}\bullet\mathbf{n}\right)\mathbf{n}+\mathbf{n}\times\left(\mathbf{a}\times\mathbf{n}\right)$$

と内積と外積により、分解できる(問:既に示してあるが、忘れた場合には、復習せよ。)
ここで、$\mathbf{n}$ を半径方向の単位ベクトル($\mathbf{n}=\mathbf{r}/r$)とし、$\mathbf{a}$ を $\mathbf{n}$ の時間微分、$\dot{\mathbf{n}}$ とすると、

$$\dot{\mathbf{n}}=\left(\dot{\mathbf{n}}\bullet\mathbf{n}\right)\mathbf{n}+\mathbf{n}\times\left(\dot{\mathbf{n}}\times\mathbf{n}\right)$$

となるが、右辺の第一項は、ゼロとなる。それは一般に大きさが一定のベクトルの変化はベクトルの方向に垂直な方向にしか変化できないからである。このことは前にも述べているが、重要な性質であるので、再度、説明しておこう。

$$\mathbf{v}\bullet\mathbf{v}=const.$$

であると、

$$\mathbf{v}\bullet d\mathbf{v}=\mathbf{0}$$

となる(問:これを示せ)これは、長さ(ベクトルの長さ)が抑えられていると直交する方向にしか変化できないという当たり前のことを言っているのである。よって、単位ベクトルの時間変化は、(必ず)

$$\dot{\mathbf{n}}=\mathbf{n}\times\left(\dot{\mathbf{n}}\times\mathbf{n}\right)$$

と書けることがわかる。これを書き直すと、

$$\mathbf{n}\times\left(\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{n}}\right)+\dot{\mathbf{n}}=0 \qquad (2\text{-}103)$$

となる。この左辺の第一項は、

$$\mathbf{n}\times\left(\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{n}}\right)=\frac{1}{r^3}\mathbf{r}\times\left(\mathbf{r}\times r\dot{\mathbf{n}}\right)$$

と書き換えることができる。ここで、

$$\dot{\mathbf{r}}=d\left(r\mathbf{n}\right)/dt=\dot{r}\mathbf{n}+r\dot{\mathbf{n}}$$

であるが、$\mathbf{r}\parallel\mathbf{n}$ であるので、

$$\mathbf{r}\times r\dot{\mathbf{n}}=\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}$$

となることがわかる。よって、(2-103)の両辺に m をかけると、

$$\frac{1}{r^3}\mathbf{r}\times\mathbf{L}+m\dot{\mathbf{n}}=0 \qquad (2\text{-}104)$$

となる（注：ここまでは、見かけはさておき、物理は関係していない）。次に、重力の逆二乗法則による運動方程式、

$$\dot{\mathbf{p}} = -k\frac{\mathbf{n}}{r^2} = -k\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

を使うと、(2-104)は、

$$-\dot{\mathbf{p}}\times\mathbf{L} + km\dot{\mathbf{n}} = 0$$

となるが、$\mathbf{L}$ は定数ベクトル（保存量）であったので、

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{p}\times\mathbf{L} - km\mathbf{n}\right) = 0$$

とも書ける。これから、

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{p}\times\mathbf{L} - km\mathbf{n}}$$

が保存することがわかる。この保存されるベクトルをレンツ・ベクトル（Laplace-Runge-Lenz vector）という。なお、このベクトルは、明らかに軌道平面内にあることに注意（問：これを示せ）。

このベクトル、$\mathbf{A}$ の二乗を計算すると、

$$\mathbf{A}^2 = \left(\mathbf{p}\times\mathbf{L}\right)^2 + k^2m^2 - 2km\,\mathbf{n}\bullet\left(\mathbf{p}\times\mathbf{L}\right)$$

となる。また、

$$\left(\mathbf{p}\times\mathbf{L}\right)^2 = \mathbf{p}^2\mathbf{L}^2,\ \mathbf{n}\bullet\left(\mathbf{p}\times\mathbf{L}\right) = \mathbf{L}^2\big/r$$

である（問：これを示せ）。よって、

$$\mathbf{A}^2 = 2m\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{k}{r}\right)\mathbf{L}^2 + k^2m^2$$

$$= 2mE\,\mathbf{L}^2 + +k^2m^2$$

となることがわかる。また、ベクトル、$\mathbf{A},\mathbf{r}$ の間の角度を、θ とすると、

$$\mathbf{A}\bullet\mathbf{r} = Ar\cos\theta = \mathbf{L}^2 - kmr$$

となり、これから、

$$r = \frac{\mathbf{L}^2}{km}\cdot\frac{1}{\left(1+\dfrac{A}{km}\cos\theta\right)} = \frac{\mathbf{L}^2/km}{1+e\cos\theta}$$

という軌道の方程式が導かれる。ただし、

$$A = kme$$

と、離心率、e を使って表わしてある。これが楕円を表わしているということは周知であろう。また、離心率、e がゼロ、つまり軌道が円であると、Lenz ベクトルが消滅するということがわかる。

まず、レンツ・ベクトルがどの方向を向いている

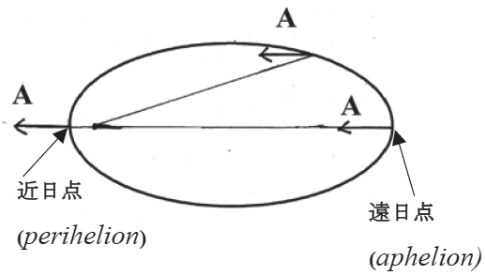


図 21. Lenz ベクトル

かを見てみよう。このベクトルは一定であるので、軌道上の都合のよい場所で計算すればよい。軌道の対称性から、図 21 の近日点や遠日点が便利なはずである。そこでは、レンツ・ベクトルは、

$$\mathbf{A} = \left(r\left(mv\right)^2 - km\right)\mathbf{n}$$

と書ける。ただし、速度、v は θ 方向の速度である（動径方向の速度はゼロ）（問：これを示せ）。

また、（その場所での動径方向の）運動方程式は、

$$m\ddot{r} = mv^2\big/r - k\big/r^2$$

であるので、

$$m^2r^2\ddot{r} = rm^2v^2 - km$$

となり、

$$\mathbf{A} = m^2r^2\,\ddot{r}\,\mathbf{n}$$

となることがわかる。これから、（場所によらず一定なベクトルである）レンツ・ベクトルは、近日点（遠日点）での動径方向に平行で、向きは、$\ddot{r}$ によることがわかる。（図で考えれば明らかなように）近日点では、$\ddot{r}$ は正で、遠日点では負であるので、レンツ・ベクトルは図 21 のようになっていること（近日点の方向を向いていること）がわかる。また、軌道が円軌道の場合、$\ddot{r}$ はゼロであるので、レンツ・ベクトルもゼロになることが再び導かれる。これは、平面内の軌道が円であるという対称性を考えると、平面内に運動の定数として、特別な方向をもったベクトルが存在しないからである

（コメント：　平面内に円をおいても、そこには特定の方向を示すようなものはない。ただし、今の場合、この円を粒子が特定の方向をぐるぐる回っているという状況がある。このような状況では、確かに、$\mathbf{r},\mathbf{p}$ のように平面内にベクトルが存在するのであるが、時間的に一定なベクトル、たとえば、長時間平均をとっても変わらないベ

クトルは存在しないのである（運動が見えないくらいに長時間を考え、静的な状況になったと考えるのである）。なお、粒子がぐるぐる回っている状況を「直接に」表現するような表記、算法（代数）はベクトル解析の中には存在しないが、回転の状況を「かなり忠実に」表現する（一定な）ベクトルとして外積を用いた角運動量ベクトルがある（言わずもがなであるが・・）。しかし、存在するとしてもこのベクトルは円の平面内には存在できず、それに垂直でなければならない。また、このベクトルは、円を回る方向が逆になれば、向きが反転するもので、回っている状況を無理やり、ある方向を示すベクトルとして表しているとも言えるものである。まさに、これは擬ベクトルの名前に「ふさわしい」もので、座標系を（勝手に）右手系から左手系に変えたりすると、向きが変わるようなものである。しかしながら、その重要性、有用性には、たいへん大きなものがあることはご存知の通りである。（蛇足を言えば、）レンツ・ベクトルは、本物のベクトル、極性ベクトルであるが、もっともシンプルな円軌道では消滅してしまうような「はかない」ベクトルである。一方、擬ベクトルである角運動量は、破滅的な状況を招くような特異なケースを除くと、決して、ゼロにはならない「しぶとい」ベクトルである。）

電磁気学（Maxwell 方程式）

Maxwell の方程式（のベクトル表示）は、実用単位系（MKSA 単位系）では、

$$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{j}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\qquad\text{(I)}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\qquad\text{(II)}$$

$$\nabla\bullet\mathbf{D}=\rho\qquad\text{(III)}$$

$$\nabla\bullet\mathbf{B}=0\qquad\text{(IV)}$$

で、

$$\mathbf{D}=\varepsilon\,\mathbf{E}\,,\qquad \mathbf{B}=\mu\,\mathbf{H}$$

である（と、ここでは「仮定」する）。

上の(I)と(III)から、直ちに、電荷の保存則が導かれる（問：これを示せ）。

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\mathbf{j}=0$$

また、(IV)は、(II)とは矛盾しないことがわかる。(II)からは、時間的に、

$$div\mathbf{B}=\text{const.}$$

が一定であることがわかるからである。

さて、電磁的エネルギー、W は、

$$W=\frac{1}{2}\int dV\left(\mathbf{E}\bullet\mathbf{D}+\mathbf{H}\bullet\mathbf{B}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\int dV\left(\varepsilon\mathbf{E}^2+\mu\mathbf{H}^2\right)$$

で与えられるので、その時間変化は、

$$\frac{dW}{dt}=\frac{\partial W}{\partial t}=\int dV\left(\mathbf{E}\bullet\dot{\mathbf{D}}+\mathbf{H}\bullet\dot{\mathbf{B}}\right)$$

となる（問：これを示せ）。これに、(I)と(II)を代入すると、

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\int dV\left(\mathbf{E}\bullet\left(\nabla\times\mathbf{H}-\mathbf{j}\right)-\mathbf{H}\bullet\left(\nabla\times\mathbf{E}\right)\right)$$

なるが、

$$\nabla\bullet\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)=\mathbf{H}\bullet\left(\nabla\times\mathbf{E}\right)-\mathbf{E}\bullet\left(\nabla\times\mathbf{H}\right)$$

であったので、

$$\frac{\partial W}{\partial t}=-\int\nabla\bullet\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)dV-\int\left(\mathbf{E}\bullet\mathbf{j}\right)dV$$

と求まる。これは、また、

$$\frac{\partial W}{\partial t}=-\int\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)\bullet d\mathbf{S}-\int\left(\mathbf{E}\bullet\mathbf{j}\right)dV$$

とも書ける。ここで、右辺は、電磁エネルギーがある領域から失われることを示しており、第一項の被積分項は、ポインティング（Poynting）・ベクトル、$\mathbf{S}$ と呼ばれるもので、

$$\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{H}$$

と与えられる。また、第二項は、ジュール損（Joule loss）であり、初等的な表式、$V\ I$ （電圧×電流）と同じものである。以上のことは、電磁気学の基本的な事柄であるので、周知のことであろう。

以下では、ベクトル解析の応用例として、磁場に関する例と導波管内の電磁場の例を取り上げよう。

初めに、静的磁場（または、(I) で電束電流、$\partial\mathbf{D}/\partial t$ が無視できる場合）を考えることにする。その場合、必要となる式は、以下のものである。

$$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{j}\,,\ \nabla\bullet\mathbf{B}=0$$

$$\mathbf{B}=\mu\,\mathbf{H}$$

ここで、$\nabla\bullet\mathbf{B}=0$ であることから、通常は、

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$$

とおくのであるが、なぜこうなるのかの明確な説明にはお目にかかったことがないのではないかと思う。(コメント：たとえば、(後で簡単に触れるが) 初めに Lagrangian ありき、よって 初めに potential、$\phi, \mathbf{A}$ ありきで、次に $\mathbf{B}$ は、上の式で与えられるという立場に立てば、これ以上、何も言うことはないが、最初に Maxwell 方程式ありきという立場では、若干、「ぐちゃぐちゃ」言う必要があるように思われる。なんとなれば、このようにできるということは、うるさく言えば、保証の限りではないからである。Helmholtz の定理でも保証はされていないのである。しかし、先に述べたように、空間が可縮空間なら、Poincare の補題により厳密に成り立つのである。) こうなることの、もう少し納得できるかもしれない「理屈」は、次のようなものである。

$$\mathbf{B} = \mu_0\left(\mathbf{H}+\mathbf{M}\right)$$

を使って、$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{j}$ から、

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\left(\mathbf{j}+\nabla\times\mathbf{M}\right) = \mu_0\mathbf{j}_T$$

とし、$\mathbf{B}$ を発生する原因は、右辺の「電流」であると考えることにするのである。すると、Helmholtz の定理から、

$$\mathbf{B} = -grad\phi+\nabla\times\mathbf{A}$$

としても、

$$\nabla\times\mathbf{B} = \nabla\times\left(\nabla\times\mathbf{A}\right) = \mu_0\mathbf{j}_T$$

となり、「電流」、$\mathbf{j}_T$ は、ϕ の「発生」には寄与しないことがわかる。よって、

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$$

とおくことができると主張するのである。
そして、「とどめの屁理屈(納得)」は、以下のような信仰によるものである。Maxwell 方程式は、静的、動的な場合に拘わらず、我々を取り巻く世界(少なくともフラットな「全空間」)では(少なくともマクロ的には)成立していると信じるのである。つまり、たとえ境界があったとしても、その外の世界も含め、成立していると信じるのである。このように信じると、2.9 節の Helmholtz の定理の「付記」に述べたことから、Maxwell 方程式に現れるすべてのベクトル、$\mathbf{A}$ は、

$$\nabla\bullet\mathbf{A}=0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}=\nabla\times\mathbf{C}$$

$$\nabla\times\mathbf{A}=\mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}=-\nabla\Phi$$

となる(ただし、上の条件は全空間で成り立っている必要がある)。(全空間で) $\nabla\bullet\mathbf{A}=0$ かつ $\nabla\times\mathbf{A}=\mathbf{0}$ ならば、$\mathbf{A}=\mathbf{0}$ が結論される。しかし、このようなことは、たとえば、渦なしで縮まない完全流体のような場合には、その方程式は境界を越えた全空間に適用できるとは、(誰も?)信じてはいないであろう。いずれにしろ、Maxwell 方程式は、マクロ的には全空間で成立すると固く信じている(と盲信している)サイエンティストは、この信仰により心穏やかに過ごすことができるであろう(つまり信じる者は救われるのである)。なお、Poincare の補題を使うならば、Maxwell 方程式は全空間で成立している必要はなく、対象となる領域を包む可縮空間(たとえば、十分大きな半径の三次元球体の内部)で成立していればよい(その外部がどうなっているかは問わない)。(追加のコメント：Helmholtz の定理の簡単な場合の導出は、ベクトル、$\mathbf{A}$ を発生するのは源(ソース)であって、(たとえば無限遠の)境界からの影響は考慮しないというものであった。よって、この簡単な場合に基づいて、上述のような議論をするためには、全空間のベクトル場は、何らかのソースから発生しており、無限遠点または十分に遠くに設定した境界からの影響は受けないと考える必要がある(伝搬速度は光速を越えないので、無限遠点の影響が及ぶには、無限の時間がかかるので、無限遠点の境界の影響は無視できるという物理的な「高圧的?」議論を展開してもよいかもしれない)。Helmholtz の定理に基づいて、$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$ であること納得するためには、無限空間の存在を信じ、その空間内で Maxwell 方程式が成立するという信仰が必要であったが、Poincare の補題に基づく場合には、局所的な領域での Maxwell 方程式の成立を信じればよいので、納得しやすいかもしれない。Helmholtz の定理は、ベクトル場、$\mathbf{A}$ は、そのソースと見なすことができる、$div\mathbf{A}$ や $rot\,\mathbf{A}$ よって発生されるという見方であると考えることができる。一方、Poincare の補題は、ソースという概念ではなく、ベクトル場、$\mathbf{A}$ が $div\mathbf{A}=0$ となるのか、$rot\,\mathbf{A}=\mathbf{0}$ となるのかは、ベクトル場自体の領域内の様相によって決まるとする見方であると考えることができる。よって、どちらを信仰するかは、各自の判断であろう。)
(再追加のコメント：信じるか信じないかは別にして、ほぼ間違いなく、$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$ であろうと大方の方は「信じている」と思うが、だからと言って、この信仰は、$\mathbf{B}=-grad\phi$ とすることを禁じているわけではない。あくまでも「・・と表わされる」ということであり、「・・と表わしていけない」ということでないのである。このようなことから、時として、$\mathbf{B}=-grad\phi$ とすると便利な場合がある。ただし、$div\mathbf{B}=0$ を満たすために、$\nabla^2\phi=0$ である必要があるが・・)

さて、「哲学的な話」はこれくらいにして、話を戻すと、磁場のエネルギーは、

$$W_m=\frac{1}{2}\int \mathbf{H}\bullet\mathbf{B}\,dV$$

と与えられるので、

$$W_m=\frac{1}{2}\int \mathbf{H}\bullet\left(\nabla\times\mathbf{A}\right)dV$$

となり、

$$\nabla\bullet\left(\mathbf{A}\times\mathbf{H}\right)=\mathbf{H}\bullet\left(\nabla\times\mathbf{A}\right)-\mathbf{A}\bullet\left(\nabla\times\mathbf{H}\right)$$

であることから、

$$W_m=\frac{1}{2}\int\left(\mathbf{A}\times\mathbf{H}\right)\bullet d\mathbf{S}+\frac{1}{2}\int \mathbf{A}\bullet\left(\nabla\times\mathbf{H}\right)dV$$

となり、無限遠で場が急速にゼロになるとすると、

$$\boxed{W_m=\frac{1}{2}\int \mathbf{A}\bullet\mathbf{j}dV} \qquad (2\text{-}105)$$

が得られる（問：これを示せ）。これは時々、役に立つ表式である。いま、ある種の電磁石が一つあるとしよう。これを回路要素であると思うと、そのエネルギーは、電磁石のインダクタンス、L を用いて（電流をI として）、

$$\frac{1}{2}LI^2$$

と与えられる。一方、電磁石の鉄心の透磁率が相当に高いとし、さらに、簡単のためにそれが∞ であると近似すると、鉄心の中の$\mathbf{H}$ はゼロであると近似できる（問：これを示せ）ので、

$$\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2\mu_0}\int_{air}\mathbf{B}^2\,dV$$

と求まる（問：これを示せ）。これは電磁石の設計で重要な関係式である。例えば、偏向電磁石の場合には、ほとんど gap の間の磁場の値を右辺に代入すれば、L が簡単に求まる（磁場のしみ出しを見込めばより正確となる）。また、磁場計算で、$\mathbf{A}$ を使っている場合には、L は、(2-105)式から求まる。

次に、真空中に電流が流れている場合を考えてみよう。すると、$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{j}$ から、

$$\nabla\times\left(\nabla\times\mathbf{A}\right)=\mu_0\mathbf{j}$$

となる。左辺は、例の関係から、

$$grad\left(\nabla\bullet\mathbf{A}\right)-\nabla^2\mathbf{A}$$

となる。ここで、前と同じような議論をしよう。ただし、説明は簡略化する。

$$\mathbf{A}=-grad\Phi+\nabla\times\mathbf{C}$$

となるが、Φ は磁場、$\mathbf{B}$ に寄与しないので（または先の議論、信仰により）、ゼロとしてもよい。よって、$\nabla\bullet\mathbf{A}=-\nabla^2\Phi$ から、$\nabla\bullet\mathbf{A}=0$ とおくことができる。以上から、

$$\nabla^2\mathbf{A}=-\mu_0\mathbf{j} \qquad (2\text{-}106)$$

と求まる。なお、この式は、$\nabla\bullet\mathbf{A}=0$ から $\nabla\bullet\mathbf{j}=0$ が得られるが、これは電荷の（静的な）連続の式であり、物理的な矛盾はない。

(2-106)から、（たとえば、Helmholtz の定理のところの議論を参照して）、

$$\mathbf{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{j}'}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}dV' \qquad (2\text{-}107)$$

と求まるが、一つの（細い）コイルに電流、I が流れているとすると、コイルから離れた点では、これは、

$$\mathbf{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{Id\mathbf{s}'}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|} \qquad (2\text{-}108)$$

となるとしてよい。

いま、空中にいくつかのコイルが存在するとし、i 番目のコイルが発生する磁場を$\mathbf{B}_i$ とすると、全体の磁場エネルギーは、

$$\sum_{i,j}\mathbf{B}_i\bullet\mathbf{B}_j$$

に比例することになる。それに対応した回路のインダクタンタンスを「定義」すると、磁場エネルギーは、

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j}L_{ij}I_iI_j=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\int\mathbf{A}_i\bullet\mathbf{j}_jdV \qquad (2\text{-}109)$$

と書ける。これに(2-108)を適用すると、

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j}L_{ij}I_iI_j=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{d\mathbf{s}_i\bullet d\mathbf{s}_j}{\left|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j\right|}I_iI_j$$

となる（ただし、$i=j$ の場合、つまり同じコイルの中の電流による寄与は(2-108)では必ずしも正しく評価できない）。$i\neq j$ の場合で、コイルの太さが相対的に細いとみなされる場合には、上式から、いわゆる相互インダクタンス、L_{ij} が、

$$\boxed{L_{ij}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{d\mathbf{s}_i\bullet d\mathbf{s}_j}{\left|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j\right|}} \qquad (2\text{-}110)$$

と求まる。これは、ノイマン（Neumann）の公式と呼ばれるものである。ただし、自己インダクタンスにこの式を直接適用するのはあまり好ましくないであろう（問：これを示せ。）なお、こ

の形に書くと、明らかに $L_{ij}=L_{ji}$ であることがわかる。さらに、(2-110)は、次のように変形することができる。

$$L_{ij}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{d\mathbf{s}_i\bullet d\mathbf{s}_j}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|}$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left(d\mathbf{S}_j\times\nabla_j\right)\bullet\left(\frac{d\mathbf{s}_i}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|}\right)$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int d\mathbf{s}_i\bullet\left(d\mathbf{S}_j\times\nabla_j\left(\frac{1}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|}\right)\right)$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left(d\mathbf{S}_i\times\nabla_i\right)\bullet\left(d\mathbf{S}_j\times\nabla_j\left(\frac{1}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|}\right)\right)$$

(2-111)

（問：これを示せ。）ここで

$$\left(d\mathbf{S}_i\times\nabla_i\right)\bullet\left(d\mathbf{S}_j\times\nabla_j\right)$$
$$=\left(d\mathbf{S}_i\bullet d\mathbf{S}_j\right)\left(\nabla_i\bullet\nabla_j\right)-\left(d\mathbf{S}_i\bullet\nabla_j\right)\left(d\mathbf{S}_j\bullet\nabla_i\right)$$

である。今の場合、∇ が作用するのは、$1/\left(|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|\right)$ という形をしているので、

$$\nabla_i=-\nabla_j$$

となる。また、

$$\nabla_i^{\,2}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|}\right)=-4\pi\,\delta\left(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j\right) \qquad (2\text{-}112)$$

であるが、（常に）$\mathbf{r}_i\neq\mathbf{r}_j$ であるとすると、

$$\left(d\mathbf{S}_i\times\nabla_i\right)\bullet\left(d\mathbf{S}_j\times\nabla_j\right)$$
$$=-\left(d\mathbf{S}_i\bullet\nabla_i\right)\left(d\mathbf{S}_j\bullet\nabla_j\right)$$

となる。よって、(2-111)は、

$$L_{ij}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{d\mathbf{s}_i\bullet d\mathbf{s}_j}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|}$$
$$=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left(d\mathbf{S}_i\bullet\nabla_i\right)\left(d\mathbf{S}_j\bullet\nabla_j\right)\left(\frac{1}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|}\right)$$

(2-113)

とも表わされることがわかる。

さて、(2-108)を微小断片、$d\mathbf{s}'$ にわけて考えると、

$$d\mathbf{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\mathbf{s}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

となるが、これによる磁場は、

$$d\mathbf{B}=\nabla\times d\mathbf{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\frac{Id\mathbf{s}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}I\,\nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\times d\mathbf{s}'=\frac{\mu_0}{4\pi}I\frac{-\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\times d\mathbf{s}'$$

$$\frac{\mu_0}{4\pi}I\frac{d\mathbf{s}'\times\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

となる。これがよく知られているビオ・サバール（Bio-Savart）の公式である。

今、二つのコイルの場合で一番目のコイルが細いとすると、(2-109)から、

$$L_{21}I_2I_1=\int\mathbf{A}_2\bullet I_1d\mathbf{s}_1$$

となるが、両辺を I_1 で割って、一番目のコイルは、単に空間に「輪」を描いたと考えることにしてみよう。また、添え字も省略すると、

$$LI=\int\mathbf{A}\bullet d\mathbf{s}=\int\left(\nabla\times\mathbf{A}\right)\bullet d\mathbf{S}$$
$$=\int\mathbf{B}\bullet d\mathbf{S}=\Phi_m$$

(2-114)

という式が得られる。ここで、$\mathbf{\Phi}_m$ は磁束である。（なお、この式の次元は、エネルギー／電流で、V·sec であることに注意。）この両辺を時間微分すると、

$$L\frac{dI}{dt}=\int\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\bullet d\mathbf{S}=-\int\left(\nabla\times\mathbf{E}\right)\bullet d\mathbf{S}$$
$$-\int\mathbf{E}\bullet d\mathbf{s}=-V$$

となり、よく知られた、インダクタンスに誘起される電圧の式（電磁誘導の式）が得られる。

また、一つの（細い）コイルに単位電流が流れている場合には、(2-108)から、

$$\mathbf{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{d\mathbf{s}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

となり、磁場は、

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\int\frac{d\mathbf{s}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

と与えられる。ここで、$\boldsymbol{\omega}=4\pi\mathbf{B}/\mu_0$ とすると、

$$\boldsymbol{\omega}=\int\frac{d\mathbf{s}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}=\int\nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\times d\mathbf{s}'$$

(2-115)

ここで、簡単にするために、

$$\varphi=\varphi\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)=\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

とおき、(2-115)の被積分項を以下のように変形しよう（積分記号を省略したため、正しい表記に従っていないが・・・）。

$$
\begin{aligned}
\nabla\varphi\times d\mathbf{s}' &= -d\mathbf{s}'\times\nabla\varphi \\
&= -\left(d\mathbf{S}'\times\nabla'\right)\times\nabla\varphi \\
&= \nabla\varphi\times\left(d\mathbf{S}'\times\bar{\nabla}'\right) \qquad (2\text{-}116)\\
&= \left(\nabla'\bullet\nabla\varphi\right)d\mathbf{S}'-\nabla'\left(d\mathbf{S}'\bullet\nabla\varphi\right) \\
&= -\nabla\left(d\mathbf{S}'\bullet\nabla'\varphi\right)
\end{aligned}
$$

ここで、最後から二番の式で、$\nabla^2\left(1/r\right)=0$ ということを使った（後で再検討するが・・）（問：以上の変形を示せ。）

すると、(2-115)は、次のように書けることがわかる。

$$
\boldsymbol{\omega}=\nabla\Omega\ ,\qquad \Omega=-\int d\mathbf{S}'\bullet\nabla'\varphi \qquad (2\text{-}117)
$$

すると、Ω は、

$$
\Omega=-\int\frac{-\left(\mathbf{r}'-\mathbf{r}\right)}{\left|\mathbf{r}'-\mathbf{r}\right|^3}\bullet d\mathbf{S}'=\int\frac{\mathbf{n}\bullet d\mathbf{S}'}{\left|\mathbf{r}'-\mathbf{r}\right|^2}
$$

となる（$\mathbf{n}$ は$\mathbf{r}'-\mathbf{r}$ 方向の単位ベクトル)。すると、**図 22** からわかるように、Ω は、コイルを境界とする曲面を位置、$\mathbf{r}$ から見た時の立体角であることがわかる。つまり、「規格化した」磁場は、立体角をスカラー・ポテンシャルとする ベクトルと考えることができる（昔の古い電磁気学の教科書には書いてあったように思う)。この曲面の裏から（$d\mathbf{S}'$ の方向に）曲面をよぎったとすると、その時の立体角の様子は、**図 23** のようになるであろう。しかし、「規格化した」磁場は、立体角のグラフの傾きであり、(境界以外は適当に取った) 曲面の面をよぎる際にも連続的に変化するはずである。しかし、面上の交差点では、ポテンシャルである､立体角は-4π だけジャンプしている。ということは、この場所で磁場は、δ関数的になってしまっていることになる。よって、どこかで式の導出におかしなことをしてしまったはずである。それは、(2-116)で、｢不用意に｣ $\nabla^2\left(1/r\right)=0$ としてしまったことが原因である。ゼロとしてしまった項は、実は、

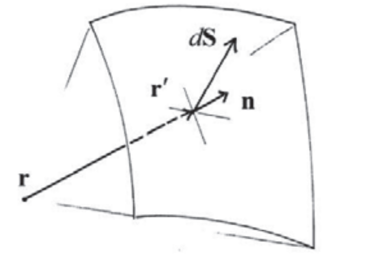


図 22. 立体角とスカラー・ポテンシャル（１）

$$
\begin{aligned}
\left(\nabla'\bullet\nabla\varphi\right)d\mathbf{S}' &= -d\mathbf{S}'\nabla^2\varphi \\
&= 4\pi d\mathbf{S}'\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)
\end{aligned}
$$

である。（δ 関数があるので、議論は局所的で十分であることから）曲面上の交差点付近で面上に、x, y 座標をとり、表面に垂直な方向にz 座標をとって、曲面上で積分すると、

$$
4\pi\delta\left(z-z'\right)\mathbf{n}'
$$

となる（$\mathbf{n}'$ は曲面の表面に垂直な単位ベクトルである。）つまり、本当のスカラー・ポテンシャルは、立体角に曲面を裏から表に（または表から裏に）よぎるたびに、4π（-4π） 加えたものである（もっとも「規格化した」磁場を積分するということでスカラー・ポテンシャルを求めれば、コイルに触れない限り、このような操作は必要ないが・・。）$\boldsymbol{\omega}$ をある閉じた軌道上で積分したもの、または一周後のスカラー・ポテンシャルの差を4π で割ったものは、コイル同士、または一次元の閉じた輪同士の巻き付きの程度を表わすもので、winding number（回転数）と呼ばれている。以上の導出の途中に出てきた、(2-117)などを使うと、若干、複雑に見える(2-113)は、

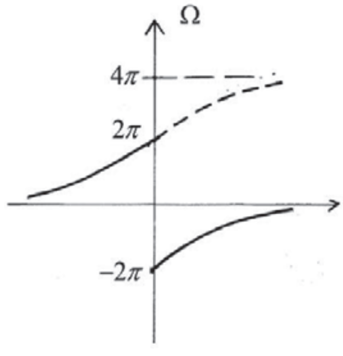


図 23. 立体角とスカラー・ポテンシャル（２）

$$
L_{ij}=\int\left(d\mathbf{S}_i\bullet\mathbf{B}_j\right)
$$

と非常に簡単になる（ただし、磁場は、単位電流が流れているj 番目のコイルがi 番目のコイルの場所に作る磁場である)。これは、本質的には、(2-114)と同じものであり、式のクロス・チェックにもなっている。

先に、ラグランジュアン（Lagrangian）について触れたので、ここにベクトル解析の観点から簡単に述べておくことにしよう。

まず、$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$ はよしとして、次は、電場、$\mathbf{E}$ であるが、

$$
\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}
$$

から、

$$\nabla\times\left(\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)=0$$

となり、ナイーブな議論より（または信仰により)、

$$\mathbf{E}=-grad\,\phi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

となる。さて、非相対論的な（粒子の運動の）Lagrangian は、「天下り的に」、

$$L=\frac{m\mathbf{v}^2}{2}-q\phi+q\mathbf{v}\bullet\mathbf{A} \qquad (2\text{-}118)$$

と与えられる。ただし、運動エネルギー以外の項は、このままで相対論的になっている（これに dt をかけると、相対論的な４元ベクトルの内積になっているのである)。この Lagrangian については、適当な古典力学の教科書を参照していただくとして、ここでは、これから運動方程式を導き、合わせてローレンツ（Lorentz）力が出てくることを示そう。(2-118)から、

$$\frac{\partial L}{\partial\mathbf{v}}=m\mathbf{v}+q\mathbf{A}\,,\ \frac{\partial L}{\partial\mathbf{r}}=-q\nabla\phi+\nabla\left(\mathbf{v}\bullet\mathbf{A}\right)$$

となる（ベクトルの偏微分の記法は周知であるとしているが、それは gradient と同じであるし、心配なら成分ごとに求めればよい)。

すると、ラグランジュの方程式、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\mathbf{v}}\right)=\frac{\partial L}{\partial\mathbf{r}}$$

の左辺は、

$$m\dot{\mathbf{v}}+q\frac{d\mathbf{A}}{dt}$$

となるが、

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}\left(=\frac{D\mathbf{A}}{Dt}\right)=\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+\left(\mathbf{v}\bullet\nabla\right)\mathbf{A}$$

であり、右辺の最後の項は、

$$\nabla\left(\mathbf{v}\bullet\mathbf{A}\right)=\left(\mathbf{v}\bullet\nabla\right)\mathbf{A}+\mathbf{v}\times\left(\nabla\times\mathbf{A}\right)$$

である。これらを代入すると、ラグランジュの方程式は、

$$\begin{aligned}&m\dot{\mathbf{v}}+q\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+q\left(\mathbf{v}\bullet\nabla\right)\mathbf{A}\\&=-q\nabla\phi+q\left(\mathbf{v}\bullet\nabla\right)\mathbf{A}+q\mathbf{v}\times\left(\nabla\times\mathbf{A}\right)\end{aligned}$$

となり、これから、

$$m\dot{\mathbf{v}}=q\left(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)$$

となる。この右辺がローレンツ力である。

最後に、もう一つのベクトル解析の応用例として、導波管内の電磁場を考えよう。ただし、導波管の断面は、電磁場の「進行方向」には一様と仮定する。その進行方向を z 軸（この方向の単位ベクトル、$\mathbf{n}$ ）とし、その方向の電場、磁場を、

$$E=\mathbf{E}_z\,,\quad H=\mathbf{H}_z$$

と略記する。さらに、場の z 及び時間依存性を、

$$\propto e^{ikz-i\omega t}$$

と仮定すると、（真空の）導波管内の電磁場は、一般に、次の式で与えられることが知られている。

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{E}_\perp&=\frac{i}{\gamma^2}\left[k\nabla_\perp E-\left(\frac{\omega}{c}\right)\mathbf{n}\times\nabla_\perp\left(Z_0H\right)\right]\\Z_0\mathbf{H}_\perp&=\frac{i}{\gamma^2}\left[\left(\frac{\omega}{c}\right)\mathbf{n}\times\nabla_\perp E+k\nabla_\perp\left(Z_0H\right)\right]\end{aligned}}$$

(2-119)

ここで、

$$\gamma^2=\left(\omega/c\right)^2-k^2,\quad c=\sqrt{1/\varepsilon_0\mu_0}\,,\quad Z_0=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$$

であり、

$$\nabla_\perp=\left(\partial/\partial x\,,\ \partial/\partial y\right)$$

である。これを使うと、Laplacian は、

$$\nabla^2=\nabla_\perp^2-k^2$$

となる。(2-119)で、

$E=0$ の場合： TE-mode
$H=0$ の場合： TM-mode
$E=0, H=0$ の場合： TEM-mode

という。最後の場合には、式が意味を持つためには、$\gamma^2=0$ でなければならない。つまり、

$$\omega=ck$$

でなければならない。これは、位相速度が光速であることを言っている（問：これを示せ)。

(2-119)は、若干、式が込み入っており、記憶力がよくないと覚えられないかもしれないので、これをできるだけ簡単に導出することを試みてみよう。真空中の Maxwell 方程式は、

$$\nabla\times\mathbf{H}=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t},\qquad \nabla\bullet\mathbf{E}=0$$
$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\qquad \nabla\bullet\mathbf{B}=0 \tag{2-120}$$

で、

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\,\mathbf{E},\qquad \mathbf{B}=\mu_0\,\mathbf{H}$$

となる。ここで、

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0(x,y)\exp(i\,kz-i\,\omega t)$$
$$\mathbf{H}=\mathbf{H}_0(x,y)\exp(i\,kz-i\,\omega t)$$

とおき、これを(2-120)に代入すると、

$$\nabla\times\mathbf{H}=-i\,\omega\,\varepsilon_0\,\mathbf{E}$$
$$\nabla\times\mathbf{E}=i\,\omega\,\mu_0\,\mathbf{H} \tag{2-121}$$

が得られ（ここで、添え字,0 は省略）、また、これから、$\nabla\bullet\mathbf{E}=0$ と $\nabla\bullet\mathbf{B}=0$ の式は不要であることがわかる。(2-121)は書き換えると、

$$\nabla\times Z_0\mathbf{H}=-i\left(\omega/c\right)\mathbf{E}$$
$$\nabla\times\mathbf{E}=i\left(\omega/c\right)Z_0\mathbf{H} \tag{2-122}$$

となる。ここで、式の変形を容易にするために、

$$c=1,\,Z_0=1$$

とおこう。すると、

$$\omega/c\to\omega,\ Z_0\mathbf{H}\to\mathbf{H}$$

となり、(2-122)は次のようになる。

$$\nabla\times\mathbf{H}=-i\,\omega\,\mathbf{E},\qquad \nabla\times\mathbf{E}=i\,\omega\,\mathbf{H} \tag{2-123}$$

ここで、簡単な関係、

$$\left(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right)_z=\mathbf{A}_\perp\times\mathbf{B}_\perp$$

に注意すると、(2-123)から、

$$\nabla_\perp\times\mathbf{H}_\perp=-i\,\omega\,E\,\mathbf{n},\qquad \nabla_\perp\times\mathbf{E}_\perp=i\,\omega\,H\,\mathbf{n}$$

となる。これから、

$$\nabla_\perp\times\left(\nabla_\perp\times\mathbf{H}_\perp\right)=\nabla_\perp\left(\nabla_\perp\bullet\mathbf{H}_\perp\right)-\nabla_\perp^2\mathbf{H}_\perp$$
$$=-i\,\omega\nabla_\perp E\times\mathbf{n} \tag{2-124}$$

となることがわかる。

ここで、次のような演算子の性質に注意しよう。

$$\nabla\bullet=0$$

これから、

$$\left(\nabla_\perp+i\,k\,\mathbf{n}\right)\bullet=0$$

となる。例えば、

$$\nabla_\perp\bullet\mathbf{H}_\perp+i\,k\,H=0$$

である。また、明らかに、

$$\nabla^2+\omega^2=0$$

である（問：これを示せ）から、

$$\nabla_\perp^2+\left(\omega^2-k^2\right)=0$$

となる。よって、

$$\nabla_\perp^2=-\gamma^2 \tag{2-125}$$

である。以上を使うと、(2-124)は、

$$-i\,k\nabla_\perp H+\left(\omega^2-k^2\right)\mathbf{H}_\perp=i\,\omega\,\mathbf{n}\times\nabla_\perp E$$

となる。同様にして、

$$-i\,k\nabla_\perp E+\left(\omega^2-k^2\right)\mathbf{E}_\perp=-i\,\omega\,\mathbf{n}\times\nabla_\perp H$$

も得られる。これらから、

$$\mathbf{E}_\perp=\frac{i}{\omega^2-k^2}\left[k\nabla_\perp E-\omega\,\mathbf{n}\times\nabla_\perp H\right]$$
$$\mathbf{H}_\perp=\frac{i}{\omega^2-k^2}\left[\omega\,\mathbf{n}\times\nabla_\perp E+k\nabla_\perp H\right] \tag{2-126}$$

という結果が得られる。ここで、

$$\omega/c\leftarrow\omega,\ Z_0\mathbf{H}\leftarrow\mathbf{H}$$

という「戻し」を行うと、(2-119)が得られるのである。さらに、(2-125)から、

$$\nabla_\perp^2 E=-\gamma^2\,E,\ \ \nabla_\perp^2 H=-\gamma^2\,H \tag{2-127}$$

となる。よって、(2-127)が解ければ、その解を(2-119)に代入して、$\mathbf{E}_\perp$，$\mathbf{H}_\perp$ が求まることになる。この(2-127)の偏微分方程式（固有値問題）を解くためには、境界条件（boundary condition）が必要となる。導波管が完全導体できている（導電率、$\sigma=\infty$）と仮定すると、導体内の電場はゼロでなければならない。すると、たとえば導体内でも成り立つ、(2-121)の第二式をつかうと、磁場もゼロなければならないことがわかる。これらのことと、

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\ \ \nabla\bullet\mathbf{B}=0$$

を使うと、

・導体表面に平行な電場は、ゼロ　(A)
・導体表面に垂直な磁場は、ゼロ　(B)

であることがわかる（問：これを示せ（ヒント：上の式に対応する積分形で考える)。

まず、(A)から、

$$E\big|_{surface}=0$$

であることがわかるが、(B)からは直ちに、(2-127)の H に適用できる境界条件はでてこない。しかし、表面上で、(2-119)または(2-126)の第二式と表面の垂直方向 $\mathbf{s}$ との内積をとると、

$$\mathbf{s}\bullet\nabla_{\perp}H=0$$

となり、

$$\left.\frac{\partial H}{\partial s}\right|_{surface}=0$$

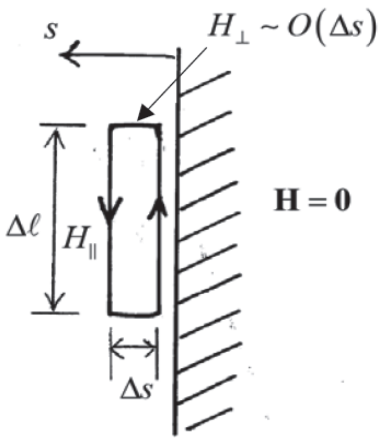


図 24. 磁場の境界条件

となることがわかる。または、より一般に、(2-121)の第一式を表面付近に使うと、**図 23** を参照にして、同様の条件を導くことができる。

以上をまとめると、

TM-mode の場合には、二次元の偏微分方程式、

$$\nabla_{\perp}^{2}\Phi=-\gamma^{2}\,\Phi$$

を境界条件（ディリクレ（Dirichlet's）条件）、

$$\Phi|_{surface}=0$$

の下で解き、

$$E=\Phi$$

とすればよい。

TE-mode の場合には、同じ方程式、

$$\nabla_{\perp}^{2}\Psi=-\gamma^{2}\,\Psi$$

を境界条件（ノイマン（Neumann）条件）、

$$\partial\Psi/\partial n|_{surface}=0$$

の下で解き、

$$H=\Psi$$

とすればよいことになる。(**注：上記の偏微分方程式の固有値問題には、境界条件も含め、電磁場に関するものは一切、含まれておらず、関係するのは領域の「幾何学的な」ものだけである。よって、固有値、$\gamma^{2}=\beta_{n}^{2}\ \left(n=1,2,\cdots\right)$ も純粋に幾何学的形状のみから決まる。**)

さて、(2-126)から、容易に、

$$\mathbf{E}_{\perp}\bullet\mathbf{H}_{\perp}=\nabla_{\perp}E\bullet\nabla_{\perp}H$$

となることがわかる（問：これを示せ)。よって、TE-mode または TM-mode のいずれかの場合、

$$\mathbf{E}_{\perp}\bullet\mathbf{H}_{\perp}=0$$

となり、(transverse 方向の）電場と磁場は直交することがわかる。よって、

$$\mathbf{E}\bullet\mathbf{H}=0$$

と、電場と磁場のベクトル自体も直交することになるのである。また、進行方向の（$\mathbf{n}$ 方向の）ポインティング・ベクトル（見やすいように磁場は複素共役とするというか、「(平均の）物理量」を計算しやすいようにすると）は、

TM-mode については、

$$\mathbf{S}=\mathbf{E}_{\perp}\times\mathbf{H}^{*}{}_{\perp}=\frac{k\omega}{\gamma^{4}}\varepsilon_{0}\left|\nabla_{\perp}E\right|^{2}\mathbf{n}$$

TE-mode については、

$$\mathbf{S}=\mathbf{E}_{\perp}\times\mathbf{H}^{*}{}_{\perp}=\frac{k\omega}{\gamma^{4}}\mu_{0}\left|\nabla_{\perp}H\right|^{2}\mathbf{n}$$

となる（問：これを示せ)。

最後に、TEM-mode を(2-126)に基づいて考えてみよう。ここでは、次のようなトリックを使うことにする、TEM-mode でも(2-126)が成立するようにしようと、先に注意したように、

$$E,H\to 0\qquad\Rightarrow\quad\omega^{2}\to k^{2}$$

としなければならない。そこで、

$$E,H\propto\omega^{2}-k^{2}$$

としてから、$\omega\to k$ とすると、

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\perp}&=\nabla_{\perp}\phi-\mathbf{n}\times\nabla_{\perp}\psi\\ \mathbf{H}_{\perp}&=\mathbf{n}\times\nabla_{\perp}\phi+\nabla_{\perp}\psi\end{aligned}\qquad(2\text{-}128)$$

という形になることがわかる（i も式の中に吸収してしまっている。なお、付記で複素関数を利用するが、そこでの ϕ,ψ は実数関数のように「錯覚」しても問題は生じない)。また、

$$\nabla_{\perp}^{2}=-\gamma^{2}=0$$

であることから、

$$\nabla_{\perp}^{2}\phi=0\,,\qquad\nabla_{\perp}^{2}\psi=0\qquad(2\text{-}129)$$

とラプラス方程式を満たすことがわかる。また、

$$\mathbf{E}_{\perp}\bullet\mathbf{H}_{\perp}=0$$

$$Z_{0}\mathbf{H}_{\perp}=\mathbf{n}\times\mathbf{E}_{\perp}$$

となる（ただし、後者の式は元の単位に戻してある）（問：これを示せ）。また、ϕ, ψ は個別の場を表わすと考えて、境界条件を求めると、

$$\phi\big|_{surface} = 0\,, \qquad {\partial\psi}\big/{\partial s}\Big|_{surface} = 0$$

となる（問：これを示せ）。ただし、初めの条件の右辺は必ずしもゼロである必要はなく定数であればよい。すると、ϕ は境界を等電位面とするポテンシャルのような役割をすることがわかる。一方、ψ は、$\psi = \mathrm{const.}$ の面が境界と垂直交わり、かつ電場の方向と平行、つまり電場ベクトルの「流線面」を表わしているものと考えることがわかる（磁場で見ると、ϕ, ψ の役割が入れ替わっている）。このようなことから、実際には、ϕ, ψ のどちらか一方のみを考えれば十分であろうことがわかる（この節の付記を参照のこと）。

さて、前にも次式を示した。

$$\int (\nabla\phi\bullet\nabla\phi + \phi\nabla^2\phi)\,dV = \int \phi\frac{\partial\phi}{\partial n}dS \qquad (2\text{-}130)$$

また、$\nabla^2\phi = 0$ の場合には、

$$\int (\nabla\phi\bullet\nabla\phi)\,dV = \int \phi\frac{\partial\phi}{\partial n}dS$$

であった。いま、関数は、すべて、x, y のみに依存するとすると、２次元領域にもそのまま適用できる（例えば、z 方向には厚みが非常に薄い円盤のような領域を想定するのである）（問：これを示せ）。よって、

$$\int (\nabla_\perp\phi\bullet\nabla_\perp\phi)\,dV = \int \phi\frac{\partial\phi}{\partial n}dS \qquad (2\text{-}131)$$

となる（ここで、dV, dS は薄い（３次元の）円盤に関するものと考えている）。これに境界条件、$\phi\big|_{surface} = 0$ を適用すると、領域内のすべての点で、

$$\nabla_\perp\phi = \mathbf{0}$$

となることがわかる（ $\phi\big|_{surface} = \mathrm{const.} \neq 0$ でも同様の結論になる）。つまり、電場、磁場がゼロとなることがわかる。まったく同様にして、ψ についても同じことが言える。よって、TEM-mode は存在しないことが証明できたという結論になったように思われるが、そこには逃げ道があるのである。それは（２次元空間での単連結領域（simply connected region）のように）境界が一つしかない場合にはそうなったのであって、繋がっていない境界が二つ（以上）あれば、それぞれの境界で別の一定値を与えれば、$\nabla_\perp\phi = \mathbf{0}$ とはならないのである。よく知られたシンプルな例は同軸ケーブルを伝搬する TEM-mode の場合である。一方、

$${\partial\psi}\big/{\partial s}\Big|_{surface} = 0$$

という境界条件をもつ、ψ の場合には、(2-131) から、境界がいくつあっても、常に、$\nabla_\perp\psi = \mathbf{0}$ となり、電場、磁場が存在しないことを示唆しているように思われる。しかし、この場合でも逃げ道があり、(2-131)が成り立つのは、ψ が一価関数の場合であるので、そうでないとすればよいのである。そのシンプルな例は、やはり同軸ケーブルの場合であって、

$$\psi \propto \theta$$

である（この場合、同軸の周りを一周すると、値が元に戻らない。つまり多価関数となる。）勿論、関数が一価になるように、領域に区切りを入れることもできるが、その場合には、入れた区切りが境界となり、そこではゼロと異なる値をとることができるので、$\nabla_\perp\phi = \mathbf{0}$ と結論できないことになる。最後に、ϕ, ψ の解法はポテンシャル問題と全く同じであるが、我々が求めていたものは、場が、

$$\propto e^{i\,kz - i\,\omega t}$$

という依存性をもつ導波管内を伝搬する電磁波であったということを注意しておこう。

導波管内の電磁波について、これ以上、述べることは、今回の OHO の他の講義の内容に踏み込み過ぎることになるであろうから、具体的な電磁波の様相及び実例については、他の講義または専門書を参照されたい。ここでは、初歩的な事柄についてコメントしておくことする。(2-130)の２次元版を書くと、

$$\int (\nabla_\perp\phi\bullet\nabla_\perp\phi + \phi{\nabla_\perp}^2\phi)\,dV = \int \phi\frac{\partial\phi}{\partial n}dS$$

となるが、これに、E または H の波動方程式と境界条件を代入すると、たとえば、

$$\int \left(\nabla_\perp E_n\right)^2 dV = {\beta_n}^2 \int {E_n}^2 dV$$

となる。これから、

$$\gamma^2 = \left(\omega/c\right)^2 - k^2 = \beta_n{}^2 \geq 0 \qquad (2\text{-}132)$$

となることがわかる。ここで、若干、しつこいかもしれないが、次の初等的な式について考えてみよう。

$$a^2 - b^2 = c^2 \ (= \text{const.},\ \text{c: real})$$

という式で、

$$a \to 0 \qquad (\text{A})$$

$$a \to \infty \qquad (\text{B})$$

となるときの様子を見てみよう。

(A) の場合、a とともに、b も減少するが、b が実数であるとすると、

$$a^2 = c^2 + b^2 \geq c^2$$

となり、$a \geq c$ でなければならないことがわかる。a は c より小さくなれない。これを(2-132)に適用すると、

$$\omega < \omega_c \ (= c\beta_n)$$

であるような周波数の電磁波は伝搬できないことがわかる（ω_c : cut-off frequency）。右辺の固有値として最小なものを採用すると、どんな mode でも電磁波を伝搬させることができないことがわかる。また、$\omega = \omega_c$ の場合には、$k = 0$ となり、導波管内での波長（管内波長）は無限大となる。それ以下の周波数の電磁波を「無理々々」伝搬させよとすると、（上の式を成立させるためには）b または(2-132)の k を虚数にする必要がある。つまり、進行方向に減衰する波となり、$\omega << \omega_c$ であると、ほんの入り口付近にしか電磁波は入っていかないことになる。

(B) の場合も興味深い。a がどんどん大きくなると、それに合わせて、b も大きくならないといけないことは明らかであるが、実は、（定数 c が何であっても）a と b の差がゼロに近づく、つまり、等しくなるのである。それは、たとえば、

$$a - b = c^2 / (a+b)$$

としてみると、はっきりとわかる（または、a と b に関する双曲線、または ω と k の分散曲線の図を描いてみるとわかりやすい）。つまり、周波数が大きくなると（cut-off 周波数より、かなり大きくなると）、(2-132)から、

$$\omega \approx ck$$

となることがわかる。つまり位相速度が mode によらず光速にほぼ等しくなることかわかる。さらに、(2-119)で、γ^2 は固有値で領域の幾何学的形状から決まるもので、（mode には依っても）周波数には依らないこと、また $\nabla_\perp$ についても全く同様であることに注意すると、周波数が大きくなると、相対的に longitudinal field の強さは transverse field の強さより弱くなることがわかる。つまり、（超）高周波になると、どんな mode の電磁場でも、「平面波化」すると言える。導波管の断面の大きさ（径の大きさ）の程度を、a とすると、場の相対的な強さの程度は、（オーダーで示すと）、

$$\mathbf{E}_\perp \sim \frac{a}{\lambda} E \quad \text{または} \quad \mathbf{E}_\perp \sim \frac{a}{\lambda} Z_0 H$$

となる。ここで、λ は電磁波の波長である。また、$Z_0\mathbf{H}$ についても、同様である。（問：これを示せ。ヒント：$\nabla_\perp \sim 1/a,\ \beta_n{}^2 \sim \nabla_\perp{}^2$ ）

（コメント：普通のサイズの導波管や金属パイプをのぞいて景色を見ても（視野は狭くなることを別にすれば）景色は全く変わらない。）

なお、（説明の順番が逆のような気もするが）(2-132)から明らかに、

$$\left(\omega/c\right)^2 \geq k^2$$

であるので、導波管内の電磁波の位相速度は、（常に）光速より大きいということがわかる。これは一見、特殊相対論に反する「事実」のように思われるが、実は、この種の「事実」はいくらでも作り出すことができるのである。一例をあげると、光速より十分に遅い東海道新幹線の「ひかり」を各駅に配置し、東京から「ひかり」が発車するのと同時に「光」を発射したとしよう（ただし、その「光」は各駅で見ることができると仮定する。）他の各駅では、いつ「ひかり」が発車するのか事前にわかっており、「光」が到達する前にその駅にある「ひかり」を発車するとしてみよう。すると、これを遠くから眺めていると、「ひかり」車両の集団は、光速より速く動作しているように見えるのである（または、JR 東海のような巨大な組織でも組織内の情報伝達の速度が光速を越えているように見えるのである）。実際上は、そう

なっていると判別することはむつかしいであろうが、そうなっているのは、「事実」であることは間違いないはずである。

以上は、位相速度についてであったが、一方、(よく知られていることではあるが) 群速度は光速より遅い。これについても簡単に触れておこう。ω と k は双曲的な関係にあるので、

$$\omega/c = \beta\cosh\theta\,,\ k = \beta\sinh\theta$$

とおくと、記述が簡単になる。これから、容易に、

phase velocity: $v_{\text{ph}} = \omega/k = c\coth\theta\ \left(>c\right)$

group velocity: $v_{\text{g}} = d\omega/dk = c\tanh\theta\ \left(<c\right)$

となり、

$$v_{\text{ph}}\, v_g = c^2$$

という関係が得られる。

また、(明らかに説明の順番が逆になっているのであるが) 平面波についても一言、コメントしておこう。この平面波を、

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp\left(\mathbf{k}\bullet\mathbf{r} - \omega t\right),\ \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp\left(\mathbf{k}\bullet\mathbf{r} - \omega t\right)$$

とおき、真空中の Maxwell 方程式、(2-120)を眺めると、直ちに (暗算で)、

$$\mathbf{k}\bullet\mathbf{E} = \mathbf{k}\bullet\mathbf{H} = 0 \qquad (2\text{-}133)$$

$$\mathbf{k}\times\mathbf{E} = \omega\mathbf{B}\,,\ \mathbf{k}\times\mathbf{H} = -\omega\mathbf{D} \qquad (2\text{-}134)$$

と求まる。今まで (不思議なことに)「真っ当な」波動方程式が一度も出てこなかったが、これも Maxwell 方程式を眺めると、(暗算で)

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\begin{bmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

と求まる (ただし、暗算ができるためには、例の $rot\,rot = grad\,div - \nabla^2$ と $c^2 = 1/\varepsilon_0\mu_0$ を覚えていなければむつかしいかもしれないが・・。)

これから、平面波の場合、これも暗算で

$$\left(\omega/c\right)^2 = \mathbf{k}^2$$

と求まる。なお、これは、(2-134)と(2-135)を使えば、ベクトル算でも求まる (すこし頑張れば、暗算でも容易に求まるであろう)。以上から、平面波は、(必ず) 横波であり、伝搬速度は (位相速度、群速度とも) 光速であることがわかる。また、(2-134)から、

$$\mathbf{n}\times\mathbf{E} = c\mathbf{B} \qquad (2\text{-}135)$$

となる。ただし、$\mathbf{k} = k\,\mathbf{n}$ としている。これを真空の特性インピーダンス (characteristic impedance)、Z_0 で表わすと、

$$\mathbf{n}\times\mathbf{E} = Z_0\mathbf{H}$$

となり、導波管内の電場と磁場の関係に類似のものが得られる (問:平面波の進行方向と平行、または反平行に、(ほぼ) 光速で走る電子が受ける力を求めよ。また、(普通の) 速度の電子が (普通の) 光から受ける力は、(普通は) 電場のみを考慮すればよいことを示せ)。

なお、蛇足であるが、光速は、

$$c = 2.99792458\times10^8\ \left[\text{m/sec}\right]$$

であり、現在では、これは測定値ではなく、「定義値」となっているので、(記憶力のよい方は) 覚えておいて損はないであろう (携帯電話の番号より桁数が少ない!) また、$Z_0\left(\approx 376.7\,\Omega\right)$ も同様に定義値 ($Z_0 = \mu_0 c$) であるが、桁数が無限大であるので、誰も正確な数値を覚えていない (覚えられない) (問:これを示せ)。

[付記]

(2-128)の電場を成分で表すと、

$$E_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}$$
$$E_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad (2\text{-}136)$$

となる。また、(2-129)から、ϕ, ψ は調和関数である。これから、複素関数の2次元静電場への応用とかなり関連していることが推測される (一見、少し変な形をしているが)。今、一つの複素関数 (複素ポテンシャル) を、

$$f_1\left(z\right) = \phi + i\tilde{\psi}$$

とおき、もう一つの複素関数 (複素ポテンシャル) を、

$$f_2\left(z\right) = \tilde{\phi} + i\psi$$

としてみよう (勿論、関数は正則関数である)。すると、複素関数の性質から、

$$\frac{df_1}{dz} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial x} - i\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

$$\frac{df_2}{dz} = -i\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial y} + i\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

となる。また、よく知られているように、

$$\frac{df}{dz} = E_x - iE_y$$

であるので、

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z)$$

とおくと、(2-136)が導かれることがわかる。よって、

$$f(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$$

とおくと、

$$\mathbf{E}_\perp = \nabla_\perp \Phi$$

となり、一つの関数、Φ だけがあれば十分ということがわかる。なお、磁場は、既に示したように、$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_\perp$ から求まる（問：以上のことを示せ)。

2.13 結語（ベクトル解析）

以上で本講義のベクトル解析のセクションは終了したことになるが、（すべてを忘れて）もう一度、この講義の「カンバン」である Appendix A を見られることを勧めたい。すると、これだけあれば、ベクトル解析はほぼ十分であることを了解していただけるであろう。ベクトルは、時代遅れの（obsolete）概念であると言う方々もいるようであるが、ベクトルは、素朴で、直感的で、かつ美しいということを少しでも再認識していただければ、幸いである。なお、本講義では、

・線形性（特に双線形性）

・内積・外積を含む微分（Leibniz 則）

　ベクトル演算（内積・外積）と微分演算は独立であること

・積分に関する三つの型（Gauss、Stokes、FTC）

を強調して解説した。

なお、何事にも共通していることではあるが、ベクトル解析をマスターするには、訓練（exercises）が大切で、その中でたくさんミスをすることが重要である。そうすることで、

「Everyone makes mistakes. Except me. (Pauli)」という境地に達することができるであろう。

なお、ベクトル解析の直接の応用の一つとして、曲線論や曲面論があり、これ自体、たいへん面白い分野で、「余生に」勉強したいと思っている分野でもある。

3. 微分形式への超イントロ

3.1（微分形式）はじめに

本講義録の「はじめに」に述べたように、この微分形式への超イントロは、積分や体積を復習することから始めて、それらに微分形式を導入し、それから外微分、（拡張された）Stokes の定理、Poincare の補題（の逆）ぐらいまでの基礎と二、三の応用をできるだけ初等的に説明しようというものである。

（通常の）積分の表式は、たとえば、

$$\int_V \mathrm{f}\left(x,y,z\right) dx\, dy\, dz \tag{3-1}$$

と表わされる。この表現には、積分に必要な機能が過不足なく含まれているだけでなく、これ自体、完璧と言ってもよい美しい表現になっている。よって、この表式を変更する必要は全くないように思われる。

しかしながら、この表式では、座標変換や積分領域の写像を適用しようとすると、若干、無理が生じてくる。**（コメント：座標変換や写像が円滑に、または「頭を使わないで」機械的にできないようでは数学的対象物とは言えないであろう。）**たとえば、直交座標での体積要素は、

$$dV_r = dx\, dy\, dz$$

であり、その体積積分は、(3-1)で与えられが、極座標での体積要素は、

$$dV_s = r^2 \sin\theta dr\, d\theta\, d\varphi$$

であり、体積積分は、

$$\int \tilde{\mathrm{f}}\left(r,\theta,\varphi\right) r^2 \sin\theta dr\, d\theta\, d\varphi$$

と与えられる。ただし、$\mathrm{f}\left(x,y,z\right) = \tilde{\mathrm{f}}\left(r,\theta,\varphi\right)$ としている。すると、当然のことながら、

$$dx\, dy\, dz = r^2 \sin\theta dr\, d\theta\, d\varphi$$

としたいという強い誘惑に駆れる。しかし、残念ながら（当然のことではあるが）、

$$dx\, dy\, dz \neq r^2 \sin\theta dr\, d\theta\, d\varphi$$

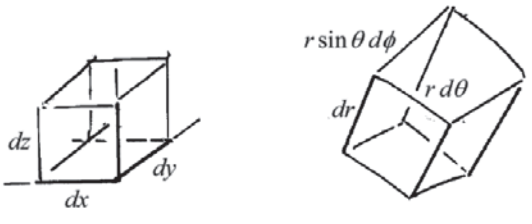


図 25. 直線座標系と球座標

である。これは、**図 25** をみれば明らかである。そもそも直方体と歪んだ直方体の体積を同じと考えることに無理がある。さらに、dx, dy, dz は体積要素の x, y, z 方向の長さと見なしているものであり、これと歪んだ体積要素の長さを表わしている、$dr, d\theta, d\varphi$ の間の関係も明らかでない（注：関係を付けようと努力しても結構だが、無駄に終わるであろう）。つまり、

$$dV_r \neq dV_s$$

であり、局所的には、等しくないのであるが、これを使った積分（大局的な量）は等しいということになるのである。しかし、局所的には×であるというのでは、何かと都合が悪いであろう。これをたいへんうまく解決してくれるのが、微分形式である。つまり、微分形式の表現では、以下のように局所的なものが等しくなるのである。

$$dx \wedge dy \wedge dz = r^2 \sin\theta dr \wedge d\theta \wedge d\varphi$$

（微分形式に慣れてくると、$\wedge$は省略することが多い）このように座標変換をしても局所的に等しい形式が得られると、積分をしないで局所的な解析が可能になるというメリットが出てきて、これだけで強力な解析手段となり得るのである。

3.2 積分再考

「積分再考」と大層な表題になっているが、ここでは積分の枠組み（形式）について初等的な考察（復習）をして、一次元の場合でも微分形式の考え方、表記が必要になることを見てみようというものである。あくまでも積分の枠組みのようなものについて考えるのであって、具体的な対象に対する正確な（厳密な）積分法については一切、考えないのである。つまり、Lebesgue 積分は勿論のこと、Riemann 積分も登場しないのである。ほとんど有限和（高校生レベル？）による近似という程度のことしか出てこない（コメント：しかし、積分の枠組み、または形式という舞台設定がされると、そこに Riemann 積分、さらには Lebesgue 積分が登壇すると考えるのである。）

<u>積分の線形性</u>

直接、微分形式とは関係なさそうなことから、話を始めよう（ただし、この節は超イントロであるので、簡略であることを旨とするのであるが・・）

積分でもその重要な性質は、微分と同様に線形性である。一次元で書くと、簡潔に、

$$\int\left(f(x)+g(x)\right)dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$$

となる。積分を習い始めた時に、

$$\int f(x)dx$$

とは、点、x_i の場所での関数、f の値、$f(x_i)$ に、微小な長さ、Δh をかけて、和をとったもので、近似されるものであり、グラフ、f と x 軸との間の領域の面積であると習っている。ただし、「但し書き」が付いていて、$f(x_i)$ が負の場合でもそのままにして計算するというものである。$f(x_i)$ の値の絶対値をとって計算すれば、x 軸との間の面積が求まるのに、どうしてそんなことにしたのであろうか。それは、積分の線形性を損なわないようにする、平たく言えば、自由にたし算ができるようにするためである。たとえば、積分を、

$$S(f;\{a,b\})=\int_a^b\left|f(x)\right|dx$$

のように定義したとすると、線形性が損なわれ、自由なたし算（機械的なたし算）ができなくなるのである。なお、線形性が損なわれることは、

$$\left|f(x)+g(x)\right|\neq\left|f(x)\right|+\left|g(x)\right|$$

から明らかであろう。とにかく、頭を使わないで機械的にたし算（＋引き算）ができないようでは、計算の道具として、あまり役に立たないであろう（**コメント：面積の計算が複雑だと、そうでなくても頻繁に起きている土地騒動がもっと起きるであろう。**）いずれしろ、線形性をもつように積分は定義する必要があるのである。また、多重積分で、

$$\int f(\mathbf{y})\,dy_1dy_2\cdots dy_n$$

$$=\int f(\mathbf{y}(\mathbf{x}))\left|\det\begin{bmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}\right|dx_1dx_2\cdots dx_n$$

としている定義も見かける（右辺の縦線は絶対値を表わしている）が、これも線形性を損なっているので（または頭を捻らないと線形性を維持できないので）、望ましくないと思われる。

積分の下限・上限

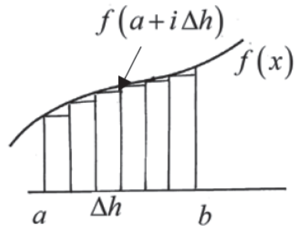


図 26. 積分の有限和近似

次に、積分の下限、上限について考えてみよう。積分の（初等的な）イメージは**図 26** のような分割の有限和の極限である。たとえば、

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\sum_{i=1}^{n}f(a+i\ \Delta h)\Delta h$$

である（ただし、$a<b$ とする）。また、$\Delta h=(b-a)/n$ で、これは微小な線分の長さ、または微小な一次元のブロックの長さ $(\Delta h>0)$ である。積分の初等的なイメージで推測すると、

$$\sum_{i=1}^{n}f(a+i\ \Delta h)\Delta h=\sum_{i=n}^{1}f(a+i\ \Delta h)\Delta h$$

$$\approx\int_b^a f(x)\,dx$$

としてもよいような気もがするが、実は（これも積分を習い始めた時に習ったように）、

$$\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx \tag{3-2}$$

である（と定義するといってもよい）。この式は、下限と上限を入れ換えたので、「積分の方向」が逆になったので、マイナス符号がつくということで納得しているのであるが・・

$a<b$ なら、$\Delta h>0$ で、$a>b$ なら、$\Delta h<0$ であるので、当たり前と考えてもよいが、積分は、グラフと x 軸の間の（符号付の）面積であるという見方からすると、何か腑に落ちないし、積分の表式を見ているだけでは、それほどはっきりしないであろう（たとえば、Lebesgue 積分では、（通常の）測度（measure）は常に非負（$m(dx)\geq 0$ である）。いずれにしろ、このように定義することで、次の線形性が保証されるのである。

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

ここで、c は必ずしも、$a<c<b$ である必要はないのである（問：これを示せ）。

微分形式による一次元の積分

ここまで、なんと初等的な話をしているのかと思われるかもしれないが、それは、微分形式（こ

こでは一次元ではあるが・・）への導入になるからである。微分形式では、積分を次のように定義するのである。

$$\int_C f(x)\,dx \approx \sum_i f(x_i)\,dx(\Delta\mathbf{a}_i) \qquad (3\text{-}3)$$

ここで、C は向きをもった積分領域（今の場合には一次元の領域）で、それは、微小なベクトル、$\Delta\mathbf{a}_i$ から構成されているとみなす。また、dx は今まで出てきたブロックの長さなのか、符号付の長さ（これの数学的な意味は不明確ではあるが・・）なのか、はっきりしないものではなく、$\Delta\mathbf{a}_i$ の x 成分をとるものとする、または、ベクトルに作用して、その x 成分を取り出す演算子とするのである（dx は何か微小な量を示すものではない。これについては、後で、再度、説明するであろう）。このようにわざと話を複雑にしたように見える定義をすると、実は、物事がすっきりするのである。

たとえば、C として、領域、$[a,b]$ をとり、向きは、$a \to b$ の方向をもっているとしよう。これを微小なベクトル、$\Delta\mathbf{a}_i$ に細分して、$\Delta\mathbf{a}_i = \Delta h_i \mathbf{i}$ とする（今の場合、$\Delta h_i > 0$ である）。すると、$dx(\Delta\mathbf{a}_i) = \Delta h_i$ となり、(3-3)の有限和は、

$$\sum_i f(x_i)\,dx(\Delta\mathbf{a}_i) = \sum_i f(x_i)\,\Delta h_i$$

となり、初等的な積分（線分をブロックに細分した積分）の近似和となる。次に、同じ領域、$[a,b]$ をとるが、向きを逆にしてみよう（この領域を、C' とする）。すると、今度は、$\Delta\mathbf{a}_i = -\Delta h_i \mathbf{i}$ となり、$dx(\Delta\mathbf{a}_i) = -\Delta h_i$ となるので、(3-3)の有限和は、

$$\sum_i f(x_i)\,dx(\Delta\mathbf{a}_i) = -\sum_i f(x_i)\,\Delta h_i$$

となる。ここで、符号は別にすれば、初等的な積分の近似和で、たし算の順番を逆にしても和は変わらない。（いつまで初歩的な説明を繰り返すのかと思われるかもしれないが、）このことが微分形式を理解するための肝である（と思うからである）。ここで、$C' = -C$ という（もっともらしい）記法を使うと、

$$\int_{-C} f(x)\,dx = -\int_C f(x)\,dx$$

と表わされる。これを通常の表現で書けば、(3-2)となる。**（コメント：しかし実際の積分計算では、こんな回りくどいことはしないで、長年、やり慣れた方法と考え方で計算する方が便利で速いであろう）。**

次に、変数変換について、考えてみよう。$x = \phi(u)$ とすると、周知のように、

$$\int_C f(x)\,dx = \int_{\tilde{C}} f(\phi(u))\,\phi'(u)\,du \qquad (3\text{-}4)$$

となる。ここで、C と $\tilde{C}$ は同じ領域を異なる変数で表しているものである。ここで

$$dx = \phi'(u)\,du$$

であったが、我々は、有限和を考えているので、これは、「無限小」の量の間の関係を表わしていると考えるのではなく、関数を（ある点で）線形化したもの（初等的には接線の式）を表わしていると思うのである。つまり、d は無限小を示すシンボルではなく、線形化を表わしているものとするのである。よって、ある点では、c を定数として、

$$dx = c\,du$$

となる。また、微小量、Δx と Δu の間には、当然、

$$\Delta x = c\,\Delta u$$

という関係がある。さて、座標ベクトルは、今の場合、一次元であるので、

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i}$$

と表わされ、線形化された空間では、これは、

$$\mathbf{r} = u\,\mathbf{a} \quad (\mathbf{a} = c\,\mathbf{i})$$

とも表わされる。dx は、先に述べたように、ベクトルに作用すると、そのベクトルの x 成分をとるのであった。よって、$\Delta\mathbf{r} = \Delta x\,\mathbf{i} = \Delta u\,\mathbf{a}$ であるとすると、

$$dx(\Delta\mathbf{r}) = dx(\Delta x\,\mathbf{i}) = \Delta x$$

となるが、これを次のようにしてもよい。

$$dx(\Delta\mathbf{r}) = dx(\Delta u\,\mathbf{a}) = \Delta u\,dx(\mathbf{a}) = \Delta u\,dx(c\,\mathbf{i})$$
$$= c\,\Delta u\,dx(\mathbf{i}) = c\,\Delta u = \Delta x$$

一方、u 座標では、

$$du(\Delta\mathbf{r}) = du(\Delta u\,\mathbf{a}) = \Delta u$$

となり、同様に、

$$du(\Delta\mathbf{r}) = du(\Delta x\,\mathbf{i}) = \Delta x\,du(\mathbf{a}/c)$$
$$= \Delta x/c = \Delta u$$

としてもよい。随分、初等的な計算をしているように思われるかもしれないが、ここで、言いたいことは、微分形式にベクトルを作用させた結果は、そのベクトルの座標表示はよらないということである。**（注：これ以降、この小節の終わりまでは、スキップしてもよいかもしれない。）**

ここで、すこし、先走って、

$$\mathbf{i} \ \rightarrow \ \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\mathbf{a} \ \rightarrow \ \frac{\partial}{\partial u}$$

と同一視を行うと、

$$dx\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=1=\frac{\partial x}{\partial x},\ du\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)=1=\frac{\partial u}{\partial u}$$

となる（とおける）。
より一般的には、

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx$$

であることから、上の関係を使って、

$$df\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=\frac{\partial f}{\partial x}$$

とするのである。最初は、このような変な記号や操作に抵抗があるかもしれないが、このようにしておくと、ベクトルの成分を抽出する際に間違いがないのである。
こうしておくと、

$$dx(\Delta\mathbf{r})=\phi'(u)\,du(\Delta\mathbf{r})=c\,du(\Delta\mathbf{r})$$

で、$\Delta\mathbf{r}$ にどの表記をつかっても同じ結果が得られるのである。ついでに、さらに先走って、一般に、ベクトルを、

$$X=a_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+a_n\frac{\partial}{\partial x_n}$$

と書くと（同一視すると）、（適当に傾いた）f 座標で見たときの成分は、

$$df(X)=Xf=a_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\cdots+a_n\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

と表わされる。これは、ベクトル解析の言葉で表すと、

$$(\mathbf{a}\bullet\nabla)f$$

と同じものであり、ベクトル、$\mathbf{a}$ 方向の方向微分と言われるものである（大雑把に言えば、ベクトル、$\mathbf{a}$ だけ動いたときの（座標である）f の変化量を表わしているものである）。ベクトルの基底を座標の偏微分と同一視すると、

$$dx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)=\delta_{ij}$$

となり、上付き下付きの添え字を使うと、

$$dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\delta^i_j$$

とも書ける。すると、dx^i を双対空間の基底と見なすこともできるのである。また、ベクトルをこのように見なすと、そこには、かけ算（Lie 積）を導入することができ、代数（algebra）構造を入れることができるようになるのであるが、これについては適当な数学書を参照されたい。本講義では、あくまでも座標成分の抽出ということに留めることにする。

3.3 n次元の体積と表面積

ここでは、n 次元空間における体積と表面積（$n-1$次元の超平面における面積）について考えてみよう。

<u>体積の表式</u>

二次元の体積（つまり面積）は、横×縦と定義される（問：なぜ、そのように定義するのが「便利」なのかを暇つぶしに考えよ。ただし、暇のない方は考えなくてもよい）。また、小学校では、平行四辺形の面積は、底辺×高さということ習った。そして、（多分？）大学で、辺のベクトルを、$\mathbf{a},\mathbf{b}$ とすると、同じ面積が、$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$ で与えられるということを習った。いずれにしろ、面積は、一つの辺の長さと、その辺に垂直な方向に測った高さをかければ求められるということである（また、面積は、上辺を下辺に平行に移動して、長方形の形にしても面積は変わらないという性質も習った）。次は、3次元での直方体の体積、V であるが、これは小学生の時に習ったように、縦l l、幅w、高さhを用いて、

$$V=l\,w\,h$$

と表わされる。また、微少な体積、dV の縦、幅、高さが dx, dy, dz で与えられる場合、

$$dV=dx\,dy\,dz$$

となるのであった。しかし、これらは、測った縦、幅、高さの方向が直交している場合であって、これらが斜めに傾いているとすると（**図 6** を参照）、

$$V=\mathbf{c}\bullet(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\det[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]$$

となり、微少な体積は、

$$dV=d\mathbf{c}\bullet(d\mathbf{a}\times d\mathbf{b})=\det[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]\,dudvdw$$

となる。ただし、ここで、

$$d\mathbf{a}=\mathbf{a}du\ ,\ d\mathbf{b}=\mathbf{b}dv\ ,\ d\mathbf{c}=\mathbf{c}dw$$

としている。これをn次元に拡張すると、

$$V=\det\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n\right] \qquad (3\text{-}5)$$

となり、微少な体積は、

$$\boxed{dV=\det\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n\right]du_1du_2\cdots du_n} \qquad (3\text{-}6)$$

のように表わされる（ただし、この体積は符号付であり、正の値にこだわるのであれば、これらの絶対値をとる必要がある)。なぜこのようになるのかは、３次元からの類推と言ってしまえばおしまいであるが、ここで、少し、説明をしておくことにしよう。

帰納法を使うのである。$n-1$次元については、公式、(3−5)は証明されたと仮定しよう。次に、n 次元空間の中に、n 個のベクトル、$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ を考える。ここで、体積は、「人為的」にとったどんな座標系にもよらないはずであると思うのである。すると、$n-1$ 個のベクトルからなる（部分）空間に、座標、$2,\cdots,n$ を入れて、一番目の座標、1 をそれらに直交するようにする。すると、n 個のベクトルの成分は、$\mathbf{a}_i$ の k 座標を、a_{ki} とし、$\mathbf{a}_i$ の成分を縦にならべると、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

のようになる。$n-1$ 次空間の$n-1$個のベクトル、$\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ による体積は、公式から

$$\det\begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

と与えられる（ただし、当面は、符号については考慮しないことにして・・)。よって、n 次元空間の体積は、この$n-1$ 次元空間に垂直な方向の高さ、つまり$\mathbf{a}_1$ の一番目の座標をかければよい。つまり、体積、V は、

$$V=a_{11}\cdot\det\begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (3\text{-}7)$$

と求まる。これは、また、

$$V=\det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

とも書ける。ここで、更に、行列式の性質を使うと、

$$V=\det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

なる。一つ前の式は、ちょうど、ベクトル、$\mathbf{a}_1$ をベクトル、$\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ がなす底面に平行移動したものになっている。以上で帰納法は終わり、(3−5)が証明されたことになる。なお、(3−5)の表式は、座標変換（直交変換）に対して不変である。それは、

$$V'=\det\left[P\mathbf{a}_1,P\mathbf{a}_2,\cdots,P\mathbf{a}_n\right]$$
$$=\det P\cdot\det\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n\right]=V$$

であるからである。ただし、ここでは、$\det P=1$ としている。このことから、（固有）回転の場合には、体積の符号は変わらないが、たとえば、二つのベクトルを入れ換えるようなことをすると、符号が変わることがわかる。また、座標系の座標の順番にn 個の単位ベクトルをとった場合には、体積は正で、$+1$ である。よって、これから、体積が消滅しないように連続的にベクトルを変化させた場合には、体積の符号は常に正のままである。

表面積の表式

(3−7)式は、次のようにも解釈できる。体積は、n 次元空間の$n-1$ 次元の平面上の表面積に、それに垂直方向の高さ、a_1 をかけたものであるので、

$$V=a_1\cdot\Delta S_1=a_1\mathbf{n}\bullet\Delta\mathbf{S}$$

となる（記号の意味は明らかであろう)。また、一般的な体積の表式は、

$$\boxed{\begin{aligned} V &= \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \bullet \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \mathbf{e}_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{e}_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{a}_1 \bullet \Delta\mathbf{S} = \mathbf{a}_1 \bullet \left(\mathbf{e}_1 \, \Delta S_1 + \cdots + \mathbf{e}_n \, \Delta S_n \right) \end{aligned}}$$

となる（問：これを示せ)。よって、表面積ベクトル、$\Delta\mathbf{S}$ のi 成分、ΔS_i は、元の行列式の第一列のi 成分の余因子で与えられることがわかる。（コメント： 以下の話を簡単にするために、notation を変える。$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$ を $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \cdots$ とし、上の $\Delta\mathbf{S}$ を、

$$\mathbf{a}^* = \Delta\mathbf{S}_a = \Delta\mathbf{S}$$

とおき、これ以外についても、たとえば、

$$\mathbf{c}^* = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \mathbf{e}_1 & \cdots \\ a_2 & b_2 & \mathbf{e}_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & \mathbf{e}_n & \cdots \end{pmatrix}$$

とおくことにする。すると、たとえば、

$$\mathbf{b} \bullet \Delta\mathbf{S}_b = V, \ \mathbf{b} \bullet \Delta\mathbf{S}_c = 0$$

となる（問：これを示せ）。つまり、表面ベクトル、$\Delta\mathbf{S}_c$ 等は、または、$\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*, \mathbf{c}^*, \cdots$ 等は、$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \cdots$ の双対基底（ただし、規格化はされていない）になることがわかる。そして、これは、３次元の場合の逆格子ベクトルと同じものであることがわかる。）

3.4 n 次元の積分と微分形式

まず、次のような一般的な座標変換を考えることにする。

$$\begin{matrix} x_1 & = & x_1 \left(u_1, u_2, \cdots, u_n \right) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & x_n \left(u_1, u_2, \cdots, u_n \right) \end{matrix}$$

すると、

$$d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_1 \\ \vdots \\ du_n \end{pmatrix}$$

となるが、我々は、積分を有限和で近似しているので、体積要素としては、空間のある点で線形近似した体積の表式を使うのである（その点での線形空間である接平面（tangent space）上で考えれば、正確な体積の表式となるが・・)。いずれにしろ、この点上では、偏微分係数は定数となるので、

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} = \mathbf{a}_1 du_1 + \cdots + \mathbf{a}_n du_n \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_1 \\ \vdots \\ du_n \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad (3\text{-}8)$$

のように表わされる。

***n* 次元の積分**

さて、ここで、一旦、x 座標とu 座標との関係を忘れることにしよう。まず、x 座標に関する積分については、当然、

$$\int f \ dx_1 dx_2 \cdots dx_n \qquad (3\text{-}9)$$

の形に表される。ここで、微小体積は、

$$dV_x = dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

となっている。一方、u 座標については、n 個の微小なベクトル、$\mathbf{a}_1 du_1, \ldots \mathbf{a}_n du_n$ を辺とするn 次元の斜体が微小体積を構成している。よって、(3−6)から、体積は、

$$dV_u = \det\left[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n\right] du_1 du_2 \cdots du_n \qquad (3\text{-}10)$$

と与えられる。一方、関数、$f\left(\mathbf{x}\right)$ は、点、$\mathbf{x}\left(\mathbf{u}\right)$ での値は変わらないので（丁寧に書けば)、

$$\begin{aligned} \tilde{f}\left(\mathbf{u}\right) &= \tilde{f}\left(u_1, \cdots, u_n\right) = f\left(\mathbf{x}\left(\mathbf{u}\right)\right) \\ &= f\left(x_1\left(u_1, \cdots, u_n\right), \cdots, x_n\left(u_1, \cdots, u_n\right)\right) \end{aligned}$$

となる。よって、積分は（場所によって、ベクトル、$\mathbf{a}$ が変わるので、偏微分に戻して)、次式の右辺で与えられるが、この積分値は、(3−9)に等しいはずなので、

$$\int f\ dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int \tilde{f}\ \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{bmatrix} du_1 du_2 \cdots du_n$$

となるのである。しつこいかもしれないが、三次元の場合にこれを書けば、

$$\int f(x,y,z)\,dxdydz = \int \tilde{f}(a,b,c)\det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{bmatrix} dadbdc$$

であり、ここで、

$$\tilde{f}(a,b,c) = f\big(x(a,b,c), y(a,b,c), z(a,b,c)\big)$$

と与えられる。場合によっては、det（行列式）の絶対値をとるという表式もあるが、ここでは積分の線形性を保つために、絶対値はとらないことにしよう。

さて、本節の「はじめに」でも述べたように、これらの表式を眺めていると、勢い余って、

$$dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{bmatrix} du_1 du_2 \cdots du_n$$

としたいという誘惑に駆られてもやむを得ないであろう。たとえば、

$$dV_r = dx\,dy\,dz = dV_h = \det[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]dudvdw$$

とし、たとえば、球座標で考えて、

$$dV_r = dx\,dy\,dz = dV_s = r^2 \sin\theta dr\,d\theta\,d\varphi$$

としたくなるのである。しかしながら、既に述べたように、

$$dV_r \neq dV_h\ ,\ dV_r \neq dV_s$$

である（**図 25** を参照のこと）。微小体積、dV_r の表式に出てくる dx は x 方向の長さ、つまり一種の棒の長さのようなものであり、直方体の体積、dV_r は、このような長さを三つかけたものになっている。つまり、dx は棒の長さ（ブロックの辺の長さ）であり、座標変換に対して（見かけの表記とは異なり）x 座標のようには変換しないはずである（実際に、これは、長さなので、変換に対して不変である）。また、直方体とは形の異なるブロックの体積、dV_h や dV_s とは等しくならないはずである（等しくなる方がおかしいであろう）。しかし、そうは言っても、何とかこれらを座標変換に応えるような形にして、できれば、微小体積が等しいものにならないかならないかと思うのは人情（人の常？）であろう。そこで、すこし試行してみよう。

三次元の場合の(3−9)の行列を A としよう。これを使って、直方体、dV_r を構成するベクトル、

$$\begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} du_1 \\ dv_1 \\ dw_1 \end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix} 0 \\ dy \\ 0 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} du_2 \\ dv_2 \\ dw_2 \end{pmatrix}$$

$$,\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dz \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} du_3 \\ dv_3 \\ dw_3 \end{pmatrix}$$

を考え、これから積、$dx\,dy\,dz$ を求めてみると、9種類の $du_1 \cdots, dw_3$ が混じったものが得られる。これは明らかに dV_h の表式とは全く異なるものとなる。その他、いろいろと試してみてもすべて徒労に終わるであろう（ただし、暇つぶしとしては悪くないかも・・）。いずれにしろ、積分の形にしてしまうと、どんな座標系をとっても、それぞれの微少な体積の表式は等しいかのごとくに扱ってもよいが、微少な体積それ自体の表式は等しくないということがわかるのである。そもそも、$dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ という n 個の量のかけ算と $du_1 du_2 \cdots du_n$ のかけ算の量を直接、座標変換から求める方法は見つからないのである。このような状況では、いろいろと不具合なことが起きることになる。つまり、このように座標変換に素直に従わないような代物は、とても数学的な対象物とは言えないであろう。

<u>微分形式の導入</u>

体積、dV_u の表式、(3-10)の行列式を展開すると、

$$dV_u = \sum_\sigma \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\,\sigma(1)} \cdots a_{n\,\sigma(n)} du_1 \cdots du_n$$

である。一方、(3-8)を使って、$dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ の積を作ってみると、

$$dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \sum_{i_1, i_2, \cdots i_n} a_{1 i_1} a_{2 i_2} \cdots a_{n i_n} du_{i_1} du_{i_2} \cdots du_{i_n}$$

となり、この二つの式は似て非なるものであることがわかる。dV_u の式では、すべての項に共通に $du_1 \cdots du_n$ の積が表れているが、$dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ では、du_i が重複して出てくる項があり、すべて、du_1 の積のみという「ひどい場合」もある。そこで、(暇つぶしに) 同じ du_i が出てきたら、つぶす (ゼロにする) としてみよう。しかし、そこまで踏み込まないで、隣に du_i が続いてでてきたら、ゼロにするとしてみよう。ただし、怪しげな計算方式であるので、積の順序などは保つようにするのである。また、計算における分配法則までは手を付けないことにする (これに手をつけると、とんでもないことになりそうなので・・)

すると、まず、

$$du_i du_i = 0$$

同様にして、

$$\left(du_i + du_j\right)\left(du_i + du_j\right) = 0$$

となり、これから

$$du_i du_j = -du_j du_i$$

これを使うと、du_i 等の積の中で場所が離れていても、同じ du_i が二度出てくるものはゼロになることがわかる (符号は無視して、隣に来るまで入れ換えを行えばよいので・・) また、隣同士で入れ換える (互換する) と符号が変わるのであるが、離れていても符号が変わることがわかる (問 : これを示せ)。以上のことと、置換、σ は互換の積で書け、$\operatorname{sgn}(\sigma)$ は互換が偶数 (奇数) の場合に $+1$ (-1) であったことから、

$$dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} du_1 \cdots du_n \tag{3-11}$$

となり、dV_u と「等しく」なる。しかし、等しくなったとは言え、怪しげな操作をしてそうなっただけであるとも言える。しかしながら、怪しげな形式的なものでも等号が成り立つということは、何か意味があるであろうと推測される。そこで、これは体積そのものの量を示すものではなく、演算子であると称するのである (演算子であると言われると、少しは怪しげではなくなってくるような気分になってくるであろう)。また、積の順番を不用意に入れ換えることがないように、積の記号として、$\wedge$ (wedge) を用いるのである (この積を外積という。ベクトルの外積に似て非なるものであるが・・) つまり、

$$dx_1 dx_2 \cdots dx_n = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

とする (ただし、慣れてくると、または面倒になってくると、左辺のように略記する。だたし、積の順番には注意して・・) この記法を使うと、(3-11) は、

$$\boxed{\begin{aligned} & dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \\ & = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} du_1 \wedge \cdots \wedge du_n \\ & = \det(A)\, du_1 \wedge \cdots \wedge du_n \end{aligned}} \tag{3-12}$$

と表わされる。これを微分形式 (differential form) という (正確には、まだ、単に「形式」という方がよいかもしれないが・・・)。

そして、仕上げは、この演算子が何に作用するかということであるが、それは、n 個のベクトルの組に作用して、このベクトルで構成される直方体の体積を与えるとするのである。つまり、

$$\boxed{\begin{aligned} & V = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \left[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n\right] \\ & == \det\begin{pmatrix} dx_1(\mathbf{a}_1) & \cdots & dx_1(\mathbf{a}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ dx_n(\mathbf{a}_1) & \cdots & dx_n(\mathbf{a}_n) \end{pmatrix} \end{aligned}}$$

とし、ここで、一次元の積分の場合と同じように、

$$dx_i\left(\mathbf{a}_j\right) = a_{ij}$$

と、ベクトルの i 成分を抽出する操作 (作用) であるとするのである。すると、

$$V = \det A = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

となる。真面目にここまで読んでくると、「ふざけるな!」という一言ではないかと思う。怪しげな操作をして、最後は、det (行列式) をとるのかよと・・・。せいぜい、

$$V = \det\begin{pmatrix} dx_1(\mathbf{a}_1) & \cdots & dx_1(\mathbf{a}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ dx_n(\mathbf{a}_1) & \cdots & dx_n(\mathbf{a}_n) \end{pmatrix}$$

という表記ぐらいで、$dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$ というようなものはいらないのではないか等々・・、このような苦情がでてきても不思議ではない。しか

し、しばらく我慢して付き合っていると、この表記法が如何に優れているか、だんだんわかってくるのである。まず、第一に、最後の計算では、行列式をとるにしても、その途中経過では、行列式のように書くのが面倒な形式は不要となる。そして最も重要なことは、怪しげな形式であっても、座標変換で等号が成り立つということである。

以上のやり方がどうなるか、簡単な場合から調べてみよう。dV_r は、

$$dV_r = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \left[\Delta x_1\, \mathbf{i}_1, \Delta x_2\, \mathbf{i}_2,, \cdots, \Delta x_n\, \mathbf{i}_n\right]$$

$$== \det\begin{pmatrix} \Delta x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Delta x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \Delta x_n \end{pmatrix} = \Delta x_1\, \Delta x_2 \cdots \Delta x_n$$

となり、さらに簡単な場合、

$$V_{unit} = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \left[\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2,, \cdots, \mathbf{i}_n\right]$$

$$== \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = 1$$

となる。つまり、それぞれの座標の方向に単位の長さをとったベクトルからなる立方体の体積は、（当然、そうあるべき値である）１となる。この立方体を連続的に変形するとし（ただし、体積を一度もゼロまでつぶさないように変形すると）、その変換の行列、A は、まさに $A = \left(\mathbf{a}_1 \cdots, \mathbf{a}_n\right)$ で与えられ、

$$V = \det A \ \left(>0\right)$$

となる。つまり、ベクトル、$\mathbf{a}_1 \cdots, \mathbf{a}_n$ を辺とする斜体の体積が求まるのである。座標系を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ とした時に、その座標順に単位ベクトルをとると、体積が１になることに注意しよう。もし、単位ベクトルの順番を変えると、符号が変わる。同様に、座標系の順番を変えても符号が変わる（これは、行列式の列または行の入れ換えに相当している。）

さて、ベクトルの組、$\mathbf{a}_1 \Delta u_1, \cdots, \mathbf{a}_n \Delta u_n$ を(3-12)に適用してみよう。まず、左辺は、

$$dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \left[\mathbf{a}_1 \Delta u_1, \cdots, \mathbf{a}_n \Delta u_n\right]$$

$$= \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Delta u_1\, \Delta u_2 \cdots \Delta u_n$$

$$= \det\left(A\right) \Delta u_1\, \Delta u_2 \cdots \Delta u_n$$

となる。u 座標で見ると、上のベクトルの組は、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Delta u_1, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \Delta u_n$$

となる。よって、

$$du_1 \wedge du_2 \wedge \cdots \wedge du_n \left[\mathbf{a}_1 \Delta u_1, \cdots, \mathbf{a}_n \Delta u_n\right]$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \Delta u_1\, \Delta u_2 \cdots \Delta u_n$$

$$= \Delta u_1\, \Delta u_2 \cdots \Delta u_n$$

これから右辺も、

$$\det\left(A\right) \Delta u_1\, \Delta u_2 \cdots \Delta u_n$$

となる。これは、要するに、

$$dV_u = dV_u$$

ということを言っている（だけである）。今度は、ベクトルの組、$\Delta x_1\, \mathbf{i}_1, \Delta x_2\, \mathbf{i}_2,, \cdots, \Delta x_n\, \mathbf{i}_n$ を(3-12)に適用してみよう。左辺は、明らかで、$\Delta x_1\, \Delta x_2 \cdots \Delta x_n$ と与えられる。右辺を求めるのに必要なことは、上のベクトルの組が u 座標でどのように見えるかである。たとえば、$\Delta x_1\, \mathbf{i}_1$ を $\mathbf{a}_1 u_1 + \cdots + \mathbf{a}_n u_n$ とした時の $u_1, \cdots u_n$ の値は何であるかということである。つまり、行列で書くと、

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

の $u_1, \cdots u_n$ は何かということになる。よって、

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

と求まる。よって、右辺は、

$$\det(A)\,du_1\wedge du_2\wedge\cdots\wedge du_n\left[\Delta x_1\,\mathbf{i}_1,\Delta x_2\,\mathbf{i}_2,\ ,\cdots,\Delta x_n\,\mathbf{i}_n\right]$$

$$=\det(A)\det\begin{pmatrix} u_1 & \cdots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n & \cdots & \cdot \end{pmatrix}$$

となるが、det の中に、上で求めた$u_1,\cdots u_n$を代入し、さらに他の部分についても同様に求めたものを代入すると、

$$=\det(A)\det\left(A^{-1}\begin{pmatrix}\Delta x_1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\quad A^{-1}\begin{pmatrix}0\\ \Delta x_2\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\quad\cdots\quad A^{-1}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ \Delta x_n\end{pmatrix}\right)$$

となる。これから、

$$=\det(A)\det\left(A^{-1}\right)\det\begin{pmatrix}\Delta x_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \Delta x_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \Delta x_n\end{pmatrix}$$

$$=\Delta x_1\,\Delta x_2\cdots\Delta x_n$$

となる。つまり、

$$dV_r = dV_r$$

が得られたことになる。要するに、微分形式にしたところで、相変わらず、$dV_r \neq dV_u$ であるが、どんな座標系で計算しても、体積の値は変わらないということが示されたことになる（それも体積の微分形式にベクトルの組を単に代入すれば、体積が求まるということになっているのである。）

この微分形式を使うと、積分は、次のように表される。

$$\int f(\mathbf{x})\,dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n$$

$$\approx\sum f(\mathbf{x}_i)\,dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n\left[\mathbf{a}_1\Delta u_1,\cdots,\mathbf{a}_n\Delta u_n\right]$$

左辺は、積分の表現の簡略版であり、その意味は、右辺の有限和（の極限）を表わしているとみなすのである。既に見たように、ベクトルの組が、$\Delta x_1\,\mathbf{i}_1,\Delta x_2\,\mathbf{i}_2,,\cdots,\Delta x_n\,\mathbf{i}_n$ の場合には、右辺は、

$$\sum f(\mathbf{x}_i)\Delta x_1\,\Delta x_2\cdots\Delta x_n$$

となり、通常の積分の有限和近似になっているのである。このようなことから、慣れてくると、

$$\boxed{\begin{aligned}&\int f(\mathbf{x})\,dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n\\ &\qquad=\int f(\mathbf{x})\,dx_1 dx_2\cdots dx_n\end{aligned}}$$

と書く（面倒なのでそうすることが多い）。この略記を使うと、

$$\int f(\mathbf{x})\,dx_1 dx_2\cdots dx_n=\int f(\mathbf{x})\,dx_1 dx_2\cdots dx_n$$

と書いて、左辺は微分形式の積分で、右辺は通常の積分であると言ったりすることがある。なお、上の説明では、便宜上、ベクトル、$\mathbf{a}_1\cdots,\mathbf{a}_n$ を使ったが、一般の座標変換を明示的に表すと、

$$dx_1 dx_2\cdots dx_n$$

$$=\det\begin{bmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \cdots\frac{\partial x_1}{\partial u_n}\\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots\frac{\partial x_2}{\partial u_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots\ \vdots\\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} & \cdots\frac{\partial x_n}{\partial u_n}\end{bmatrix}du_1 du_2\cdots du_n$$

となる（当然、ここで、dx や du の積は外積であると了解するのである。また、この式は、外積を使えば、積分が単なる機械的な計算でできることを示している）。なお、外積の導入の仕方から、二つの微分形式の外積は、

$$a\,dx_a\wedge dx_b\wedge\cdots\ \wedge\ b dx_i\wedge dx_j\wedge\cdots$$
$$=a\,b\,dx_a\wedge dx_b\wedge\cdots dx_i\wedge dx_j\wedge\cdots$$

となっていることがわかる（これを定義とおもってよい）さらに、これらは、空間のある点、$\mathbf{x}$ に関して行っているので、

$$a(\mathbf{x})\,dx_a\wedge dx_b\wedge\cdots\ \wedge\ b(\mathbf{x})\,dx_i\wedge dx_j\wedge\cdots$$
$$=a(\mathbf{x})\,b(\mathbf{x})\,dx_a\wedge dx_b\wedge\cdots dx_i\wedge dx_j\wedge\cdots$$

でもあることに注意しよう。

これまででも、一応、微分形式を導入すると、体積の計算の見通しがよくなるということから、その「有難味」を少し感じることができたが、次の小節で説明する外微分が導入されると、微分形式の本領が発揮されるのである。

3.5 外微分と Hodge の星印作用素

外微分

外微分とは、微分＋外積を組にしたような演算であるが、関数の場合には、形は普通の全微分と同じ形をしている。関数、$f(\mathbf{x})$ の全微分は、

$$\boxed{df=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n}$$

と与えられるが、dx_i 等を微分形式と見なした時、df を関数、f の外微分という。df は微分形式であるので、これをベクトル、

$$\mathbf{v}=v_1\mathbf{i}_1+\cdots+v_n\mathbf{i}_n$$

に作用させると、

$$dx_i\left(\mathbf{v}\right)=v_i$$

であるので、

$$df\left(\mathbf{v}\right)=v_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\cdots+v_n\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

ベクトルの表記を使うと、

$$df\left(\mathbf{v}\right)=\left(\mathbf{v}\bullet\nabla\right)f$$

とも書ける。また、(前にも、同様の説明をしているが・・・) ベクトルの基底を偏微分と同一視すると、ベクトル、$\mathbf{v}$ と、

$$X=v_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+v_n\frac{\partial}{\partial x_n}$$

を同一視できる。

$$dx_i\left(X\right)=Xx_i=v_i$$

であるので、

$$df\left(X\right)=v_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\cdots+v_n\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

となる。これは、また、

$$\boxed{df\left(X\right)=Xf}$$

と直接、微分演算子を f に作用しても得られる。

次に高次の微分形式 (dx_i 等をいくつかかけたもの) の外微分を以下のように (本講義では) 定義しよう。

$$\omega=\sum f_A\left(\mathbf{x}\right)dx_i\wedge dx_j\wedge\cdots$$

とした時、その外微分は、

$$\boxed{d\omega=\sum df_A\left(\mathbf{x}\right)\wedge dx_i\wedge dx_j\wedge\cdots}$$

と定義するのである。ここで、df_A は関数、f_A の外微分で、先に与えたものと同じで

$$df_A=\frac{\partial f_A}{\partial x_1}dx_1+\cdots+\frac{\partial f_A}{\partial x_n}dx_n$$

である。そして、これと残りの項との外積をとったものを外微分とするのである。(なお、この形から、$dx_i\wedge dx_j\wedge\cdots$ をあるベクトル空間の基底ように見なすと d は、一つ高次の微分形式の空間への線形作用素でもあることもわかる)。

なぜ、このように定義すると、よいことがあるのかは、以下を見ればわかってくるであろう (特に、Gauss、Stokes、FTC の定理が、簡便かつ美しい一つの定理 (拡張されたストークスの定理) に統一されるという点が挙げられる)。二つの微分形式の外積に、外微分、d を作用させてみよう。二つの微分形式を、

$$\omega=f\left(\mathbf{x}\right)dx_a\wedge dx_b\wedge\cdots$$

$$\eta=g\left(\mathbf{x}\right)dx_i\wedge dx_j\wedge\cdots$$

とおくと、その外積は、

$$\omega\wedge\eta=f\left(\mathbf{x}\right)dx_a\wedge dx_b\wedge\cdots\wedge g\left(\mathbf{x}\right)dx_i\wedge dx_j\wedge\cdots$$

$$=f\left(\mathbf{x}\right)g\left(\mathbf{x}\right)dx_a\wedge dx_b\wedge\cdots\wedge dx_i\wedge dx_j\wedge\cdots$$

となるので、

$$d\left(\omega\wedge\eta\right)$$

$$=d\left(f\left(\mathbf{x}\right)g\left(\mathbf{x}\right)\right)dx_a\wedge dx_b\wedge\cdots\wedge dx_i\wedge dx_j\wedge\cdots$$

$$=\left(gdf+fdg\right)\wedge dx_a\wedge dx_b\wedge\cdots\wedge dx_i\wedge dx_j\wedge\cdots$$

となる。g は単なる関数であるので、

$$gdf\wedge dx_a\wedge dx_b\wedge\cdots\wedge dx_i\wedge dx_j\wedge\cdots$$

$$=df\wedge dx_a\wedge dx_b\wedge\cdots\wedge gdx_i\wedge dx_j\wedge\cdots$$

$$=d\omega\wedge\eta$$

である。一方、dg は一次の微分形式、つまり、dx_i 等の一次結合であるので、dx_a と入れ換えると、符号が変わる。よって、ω の次数を、l とすると、

$$fdg\wedge dx_a\wedge dx_b\wedge\cdots\wedge dx_i\wedge dx_j\wedge\cdots$$

$$=\left(-1\right)^l fdx_a\wedge dx_b\wedge\cdots\wedge dg\wedge dx_i\wedge dx_j\wedge\cdots$$

$$=\left(-1\right)^l\omega\wedge\eta$$

以上から、

$$\boxed{d\left(\omega\wedge\eta\right)=d\omega\wedge\eta+\left(-1\right)^l\omega\wedge d\eta}\qquad(3\text{-}13)$$

となる。これを<u>外微分の Leibniz 則</u>という。通常の関数の積の Leibniz 則では、$\left(-1\right)^l$ の因子はないのであるが・・。なお、(若干、記述するのが遅くなったが) 二つの微分形式の外積の入れ換えは、η の次数を、m とすると、

$$\boxed{\eta\wedge\omega=\left(-1\right)^{lm}\omega\wedge\eta}$$

となる (問:これを示せ)。また、この両辺の外微分をとり、右辺に(3-13)を使うことで、定義からではなく、

$$d\left(\eta\wedge\omega\right)=d\eta\wedge\omega+\left(-1\right)^m\eta\wedge d\omega$$

となるのを示すことができる（問：これを示せ)。
さて、このように定義した外微分、d を df に作用させると、

$$d(df) = d\left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_i d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \wedge dx_i$$

$$= \sum_j \sum_i \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right) dx_j \wedge dx_i$$

となるが、$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ という性質（これには、$dx_i \wedge dx_i = 0$ も自動的に含まれている）を使うと、

$$d(df) = 0 \qquad (3\text{-}14)$$

となる。同様に、

$$d(d\omega) = \sum d(df_A) \wedge dx_i \wedge dx_j \wedge \cdots$$

となるので、(3-14)を使うと、

$$d(d\omega) = 0 \qquad (3\text{-}15)$$

という重要な性質が得られる。これは、ポアンカレの補題（Poincare's lemma）と言われるが、通常は、この補題の逆（後述）のことをポアンカレの補題ということが多いようである。
さて、以上は外微分としての微分であったが、次に普通の微分について考えてみよう。2.8 節の「積分量の時間変化」で外微分の時間変化、

$$\frac{d}{dt}(dx) = d(\dot{x})$$

について説明したが、もう一度、簡単に説明しておこう。いま、関数、f が、t をパラメーターとして含んでいるとすると、

$$df_{t+\Delta t} - df_t = d(f_{t+\Delta t} - f_t) \approx d(\dot{f}\Delta t)$$

$$\frac{d}{dt}(df) = \lim_{\Delta t \to 0} d\left(\frac{f_{t+\Delta t} - f_t}{\Delta t}\right) = d(\dot{f})$$

となる。これを使って、力学（ハミルトン系）におけるポアンカレ不変量（Poincare's invariant）を説明しよう。この不変量は、微分形式を使って、

$$\boxed{Q = dq_1 \wedge dp_1 + dq_2 \wedge dp_2 + \cdots + dq_n \wedge dp_n}$$

と表わされる。これを時間微分すると、普通の Leibniz 則により、

$$\dot{Q} = d\dot{q}_1 \wedge dp_1 + d\dot{q}_2 \wedge dp_2 + \cdots + d\dot{q}_n \wedge dp_n$$
$$+ dq_1 \wedge d\dot{p}_1 + dq_2 \wedge d\dot{p}_2 + \cdots + dq_n \wedge d\dot{p}_n$$

となる。すると、ハミルトンの運動方程式から、

$$d\dot{q}_i = d\frac{\partial H}{\partial p_i} = \sum_j \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_i} dq_j + \sum_j \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_i} dp_j$$

となる。$d\dot{p}_i$ についても同様である。これらを上の式に代入すると、

$$\dot{Q} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_i} dq_j \wedge dp_i + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_i} dp_j \wedge dp_i$$
$$- \sum_{i,j=1}^{n} dq_i \wedge \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial q_i} dq_j - \sum_{i,j=1}^{n} dq_i \wedge \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_i} dp_j$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_i} dq_j \wedge dp_i - \sum_{i,j=1}^{n} dq_j \wedge \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j} dp_i$$
$$= 0$$

となる（問：これを示せ)。よって、Q は運動の不変量であることがわかったことになる。もし運動が線形であるとすると、ある時点での運動状態を、

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}$$

とし、ある時間経過後の運動状態を、

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{pmatrix}$$

とすると、ある行列（transfer matrix）で、

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{M}\,\mathbf{x}$$

と表わされるはずである。一方、Q に二つの状態ベクトル、$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ を代入すると、

$$Q(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbf{x}_1^T \mathbf{J}\,\mathbf{x}_2$$

となる（問：これを示せ)。ここで、$\mathbf{J}$ は、

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

で、I_n は、$n \times n$ の単位行列である。よって、Q は不変量であるから、

$$\tilde{\mathbf{x}}_1^T \mathbf{J}\,\tilde{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{x}_1^T \mathbf{J}\,\mathbf{x}_2$$

となる。これから、transfer matrix は、

$$\boxed{\mathbf{M}^T \mathbf{J}\,\mathbf{M} = \mathbf{J}}$$

という条件(symplectic condition）を満足しなければならないということがわかる。上の計算で、微分形式、Q は不変なので、$\tilde{Q} = Q$ はよいとしても、$Q(\tilde{\mathbf{x}}_2, \tilde{\mathbf{x}}_1) = Q(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)$ と異なるベクトル

を代入してもよいのか、と思われるかもしれないので、若干、しつこいが、少し説明をしておく。しつこく書くと、上の導出では、

$$\tilde{Q}\left(\tilde{\mathbf{x}}_2,\tilde{\mathbf{x}}_1\right)=\tilde{Q}\left(\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_1\right)=Q\left(\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_1\right)$$

という性質を使っているのである。疑問は、一番目の等式が OK かということである。

説明を簡単にするために、一次元の場合を考えることにし、notation を簡略して、$x=x\left(t,a\right)$ となっているとする。すると、説明は、基本的には、3.2 節での繰り返しになるのであるが、しつこく説明をしておこう。まず、

$$dx=\frac{\partial x}{\partial a}da,\ \Delta x=\frac{\partial x}{\partial a}\Delta a$$

となる（前者は微分形式、後者は、微分量である）。ここで、一次元のベクトルを、

$$\Delta\mathbf{x}=\left(\Delta x\right),\ \Delta\mathbf{a}=\left(\Delta a\right)$$

とする（各左辺は、成分ベクトル）と、

$$dx\left(\Delta\mathbf{x}\right)=\det\left(\Delta x\right)=\Delta x$$

$$dx\left(\Delta\mathbf{a}\right)=\frac{\partial x}{\partial a}da\left(\Delta\mathbf{a}\right)=\frac{\partial x}{\partial a}\det\left(\Delta a\right)=\frac{\partial x}{\partial a}\Delta a$$

となり、

$$dx\left(\Delta\mathbf{x}\right)=dx\left(\Delta\mathbf{a}\right)$$

となることがわかる。これらは、もっと簡単に、

$$dx\left(\Delta a\frac{\partial}{\partial a}\right)=\frac{\partial x}{\partial a}\Delta a,\ dx\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}\right)=\Delta x$$

としてもよい。以上ことから、

$$Q\left(\tilde{\mathbf{x}}_2,\tilde{\mathbf{x}}_1\right)=Q\left(\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_1\right)$$

が成り立つことがわかるのである。しかし、$x=x\left(t,a\right)$を座標変換と思うと、議論は、体積の場合の座標変換と全く同じであるので、無駄に紙面を使ってしまったとも言えなくもない（注：代入したのは、全く異なるベクトルではなく、「座標変換」されたベクトルである）。

また、

$$Q^n=\left(-1\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}n!\,dq_1dq_2\cdots dq_ndp_1dp_2\cdots dp_n$$

となる（問：これを示せ）が、これも当然、不変量であるので、これから位相体積が不変であるということがわかる（注：右辺では wedge 積を省略している。また、$\left(-1\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ は、所詮、±1 にしかならないが、そのべきの形は、その導出方法を暗示している）。

さて、外微分形式の解説書では、ベクトル解析の微分との対応がよく取り上げられているので、ここでも、例にもれず、同様の説明をしておこう。最初に、この対応について簡単なコメントを一つしておこう。

まず、ベクトル、$\mathbf{A}$ は、微分演算子、X との間に次のような対応（同一視）を考えることができる（あくまでも「できる」であるが・・）（注：本講義では、できるだけ、添え字の上付き、下付きについて区別しない、気にしないようにしてきたが、誤解が生じないように、ここでは、区別して記述することとしる）。

$$\mathbf{A}=A^1\mathbf{e}_1+\cdots+A^n\mathbf{e}_n$$

$$\Updownarrow$$

$$X=A^1\frac{\partial}{\partial x^1}+\cdots+A^n\frac{\partial}{\partial x^n}$$

（注：この対応は、ここでの説明には必ずしも必要ではないのであるが・・。）

一方、一次の微分形式は、基底、$\mathbf{e}_i$ 等の双対基底（添え字を上げた基底）を用いて、

$$d\alpha=A_1dx^1+\cdots+A_ndx^n$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbf{A}=A_1\mathbf{e}^1+\cdots+A_n\mathbf{e}^n$$

の対応があると考えることができる（注：$\mathbf{e}^i\left(\mathbf{e}_j\right)=\mathbf{e}^i\bullet\mathbf{e}_j=\delta^i_j$ に、$dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\frac{\partial x^i}{\partial x^j}\delta^i_j$ が対応している）、ベクトル、$\mathbf{A}$ 自体は、添え字の付け方には無関係であるので、

$$\mathbf{A}=A^1\mathbf{e}_1+\cdots+A^n\mathbf{e}_n$$

$$\Updownarrow$$

$$d\alpha=A_1dx^1+\cdots+A_ndx^n$$

と対応していると考えることができる。この対応を写像を用いて表すこともできるが、記述が複雑になるので、「適当に」対応させて（同一視して）考えることにしよう。

前置きが長くなったが、関数の外微分は、

$$d:f\left(x,y,z\right)\rightarrow$$

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$$

であり、

$$grad\ f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

と対応している。

また、次の一次の微分形式の外微分は、

$$d : \alpha = A_1\,dx + A_2\,dy + A_3\,dz \ \rightarrow$$

$$d\alpha = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)dy\,dz + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)dz\,dx + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)dx\,dz$$

であり、これには、次のようなベクトルの微分演算、

$$rot : \boldsymbol{\alpha} = A_1\,\mathbf{i} + A_2\,\mathbf{j} + A_3\,\mathbf{k} \ \rightarrow$$

$$rot\ \boldsymbol{\alpha} = \nabla \times \boldsymbol{\alpha} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

が対応している。

また、二次の微分形式の外微分、

$$d : \beta = B_1\,dy\,dz + B_2\,dz\,dx + B_3\,dx\,dy \ \rightarrow$$

$$d\beta = \left(\frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

には、ベクトルの微分、

$$div : \boldsymbol{\beta} = B_1\,\mathbf{i} + B_2\,\mathbf{j} + B_3\,\mathbf{k} \ \rightarrow$$

$$div\boldsymbol{\beta} = \nabla \bullet \boldsymbol{\beta} = \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z}$$

が対応していることがわかる。

（問：以上の式の外微分の計算をせよ。）

微分形式は、簡潔で美しいものではあるが、実際の具体的な計算では、結構、手が疲れるので、専門家には叱られるかもしれないが、以下のようなベクトル的な notation を導入しよう。

$$d\mathbf{r} = \left(dx, dy, dz\right)$$

$$d\mathbf{S} = \left(dy\,dz, dz\,dx, dx\,dy\right)$$

$$dV = dx\,dy\,dz$$

すると、上記の結果は、

$$\boxed{\begin{aligned} df &= \left(\nabla f\right) \bullet d\mathbf{r} \\ d\left(\mathbf{A} \bullet d\mathbf{r}\right) &= \left(\nabla \times \mathbf{A}\right) \bullet d\mathbf{S} \\ d\left(\mathbf{B} \bullet d\mathbf{S}\right) &= \left(\nabla \bullet \mathbf{B}\right) dV \end{aligned}}$$

と書ける。これとベクトルの積分定理（FTC、Stokes, Gauss）を比較すると、

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega$$

とまとめられることがわかる（問：これを示せ）。

ホッジの星印作用素（Hodge star operator）

上の $d\mathbf{r}$ と $d\mathbf{S}$ を眺めると、それぞれの成分を対応づけておくと、便利であろうと容易に推測される。そこで、この対応を写像または作用素と考えて、それを＊ と表記すると、

$$*d\mathbf{r} = d\mathbf{S}$$

$$*d\mathbf{S} = d\mathbf{r}$$

となる。これに、1 と dV も対応させせると、

$$*1 = dV$$

$$*dV = 1$$

となる。専門家に叱られない notation で表すと、

$$\boxed{\begin{array}{ll} *dx = dy\,dz & *dx\,dy = dz \\ *dy = dz\,dx & *dy\,dz = dx \\ *dz = dx\,dy & *dz\,dx = dy \\ *1 = dV & *dV = 1 \end{array}}$$

となる。この＊ のことをホッジの星印作用素 Hodge star operator という。きちんとした定義は、「付記」を参照していただくとして、この作用素は、上のどれかの微分形式を、α とすると、

$$\alpha \wedge *\alpha = dV$$

となるように定義されているのである。ちなみに、

$$*dy\,dx = -dz$$

となるが、これも明らかであろう。なお、（ベクトルの公理を満たすものは、何でもベクトルと見なすという視点に立つと）、k 次微分形式からなる空間、Ω^k は、

$$dx_1 dx_2 \cdots dx_k$$

等を基底ベクトルとするベクトル空間と考えることができる（注：これら、「基底」ベクトルとして選んだものは、当然、独立である）。このベクトル空間の次元は、明らかに、

$${}_nC_k = \frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}$$

である（注：k 次ではない）。一方、星印作用素で移った $n-k$ 次の微分形式からなる空間、Ω^{n-k} の次元は、

$${}_nC_{n-k} = {}_nC_k$$

であり、元の空間の次元と等しい。よって、星印作用素による写像は、（ベクトル空間の間の写像であるので）同型写像となる。
この星印作用素を使うと、関数の場合、

$$\omega=\phi$$

とおくと、

$$d\omega=\left(\nabla\phi\right)\bullet d\mathbf{r}$$

であるので、

$$*d\omega=\left(\nabla\phi\right)\bullet d\mathbf{S}$$

となる。これの外微分は、

$$d*d\omega=\left(\nabla\bullet\nabla\phi\right)dV$$

となるので、

$$*d*d\omega=\left(\nabla\bullet\nabla\phi\right)$$

が導かれる。これから、スカラー関数に対して、

$$*d*d=\nabla^2$$

となることがわかる。さらに、ベクトル（に対応する一次微分形式）に対して、

$$*d*=\nabla\bullet$$

となることがわかる。これを空間の写像として見ると、次のような図式になる。

$$d:\Omega^k \longrightarrow \Omega^{k+1}$$

$$*d*:\Omega^k \xrightarrow{\ *\ } \Omega^{n-k} \xrightarrow{\ d\ } \Omega^{n-k+1} \xrightarrow{\ *\ } \Omega^{k-1}$$

つまり、d は微分形式の次数を一つ上げるが、$*d*$ は次数を一つ下げる働きをするのである。よって、（当たり前のことではあるが）、$*d*d=\nabla^2$ はスカラー関数をスカラー関数に移すのである（注：後で出てくる d の順番を変えた、$d*d*$ も微分形式の次数を変えない）。

次に、同様の計算を、

$$\omega=\mathbf{A}\bullet d\mathbf{r}$$

について行ってみよう。

$$*d\omega=\left(\nabla\times\mathbf{A}\right)\bullet d\mathbf{r}$$

となるので、この場合には、

$$*d=\nabla\times$$

と見なすことができる。よって、

$$*d*d\omega=rot\,rot\mathbf{A}\bullet d\mathbf{r}$$

となる。一方、

$$*d*\omega=div\,\mathbf{A}$$

であったので、

$$\begin{aligned}&\left(d*d*-*d*d\right)\omega\\&=\left(grad\left(div\,\mathbf{A}\right)-rot\,rot\mathbf{A}\right)\bullet d\mathbf{r}=\left(\nabla^2\mathbf{A}\right)\bullet d\mathbf{r}\end{aligned}$$

となり、ベクトルへの作用の場合、

$$\boxed{\nabla^2=d*d*-*d*d}$$

となることがわかる。次は、空間を時空（ローレンツ空間）とした場合について考えよう。この場合には、星印作用素の作用は、

$$\boxed{\begin{array}{ll}*1=-dV\,dt & *dV\,dt=1\\ *d\mathbf{r}=-d\mathbf{S}\,dt & *d\mathbf{S}\,dt=-d\mathbf{r}\\ *dt=-dV & *dV=-dt\\ *d\mathbf{S}=-d\mathbf{r}\,dt & *d\mathbf{r}\,dt=d\mathbf{S}\end{array}}$$

となる。成分で書くと、

$$\begin{array}{ll}*1=-dx\,dy\,dz\,dt & *dx\,dy\,dz\,dt=1\\ *\left(dx\,dy\right)=-dz\,dt & *\left(dz\,dt\right)=dx\,dy\\ *\left(dy\,dz\right)=-dx\,dt & *\left(dx\,dt\right)=dy\,dz\\ *\left(dz\,dx\right)=-dy\,dt & *\left(dy\,dt\right)=dz\,dx\\ *dx=-dy\,dz\,dt & *\left(dy\,dz\,dt\right)=-dx\\ *dy=-dz\,dx\,dt & *\left(dz\,dx\,dt\right)=-dy\\ *dz=-dx\,dy\,dt & *\left(dx\,dy\,dt\right)=-dz\\ *dt=-dx\,dy\,dz & *\left(dx\,dy\,dz\right)=-dt\end{array}$$

なお、ここでは、時間、t の順番を空間の後にしている。つまり、四次元空間の体積要素を、

$$dV\,dt$$

としている。もし、時間を空間の前にもってくると、符号の付き方が異なる。さらに、これ以降は、簡単のため、$c=1$ として、dt は、dx と同じ次元をもつとしよう。これらの関係式は、符号の付き方が一見、複雑に見えるが、次のように考えると、実は、符号も含め、この関係式は一切、覚える必要はなくなる。それは、上のどれかの微分形式を、α とすると、まず、

$$\alpha\wedge\beta=dV\,dt$$

となるような、β を求め、もし、その中に、dt が入っていれば、－の符号を付けるというものである。つまり、dt が入っているかどうかで、

$$*\alpha=\pm\beta$$

とするのである（問：このハウツーの規則で上記の関係式を示せ）。しかし、何の理由もないままのハウツーは大嫌いだという向きの方は、「付記」を参照いただきたい。

以上では、時空を３次元空間＋一次元（時間）と考えているが、この観点を保ったまま、以下の微分形式の微分を考えてみよう。

$$\omega=A=\mathbf{A}\bullet d\mathbf{r}-\phi\,dt \qquad (3\text{-}16)$$

なお、外微分とる際に、

$$d = d_{\mathbf{r}} + d_t$$

であることに注意すると、計算が容易になる。(3-16)にd を作用させると、

$$d\omega = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} dt \cdot d\mathbf{r} - (\nabla \phi) \cdot d\mathbf{r}\, dt \tag{3-17}$$

いま、これを

$$F = d\omega \left(= dA\right)$$

として、(勝手に)

$$F = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} dt + \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

とおくと、

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},\ \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

となる(問:これを示せ)。これから、

$$\begin{aligned} dF &= ddA = 0 \\ &= (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} dt + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dt \cdot d\mathbf{S} + (\nabla \cdot \mathbf{B}) dV \end{aligned}$$

となるので、

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0},\quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

となることがわかる。上に出てきた変数を通常のMaxwell 方程式のものと同一視すると、Maxwell 方程式の四つ組の内の二つは、微分形式の

$$d^2 = 0$$

と同じものであることがわかる。残りの二つの式は、以下のように関連づけることかできる(ただし、ここでは、簡単のために3次元空間は真空であると仮定する)。まず、

$$*F = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} - \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} dt$$

であるので、これの外微分をとると、

$$d*F = (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} dt \cdot d\mathbf{S} + (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} dt$$

となる。Maxwell 方程式の残りの二つの式は、

$$c = 1 \ \rightarrow \varepsilon_0 \mu_0 = 1$$

であることを使うと、

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

であるので、

$$d*F = \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV - \mu_0 \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} dt \tag{3-18}$$

となる。よって、

$$*d*F = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} dt + \mu_0 \mathbf{j} \cdot d\mathbf{r}$$

となるが、ここで、

$$J = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{r} - \rho dt$$

という微分形式を導入すると、Maxwell 方程式の残りの二つの式は、

$$*d*F = \mu_0 J \tag{3-19}$$

または、

$$*d*dA = \mu_0 J$$

に対応することがわかる。

次に、(3-18)の外微分をとると、

$$0 = dd*F = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} dtdV - \mu_0 \left(div\mathbf{j}\right) dVdt$$

となり、これから、電荷保存則、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\mathbf{j} = 0$$

が導かれる。さて、(3-17)に戻って、これに星印作用素を作用させると、

$$*d\omega = -(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{r} dt - \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi\right) \cdot d\mathbf{S}$$

となり、これから、

$$\begin{aligned} d*d\omega = &-\left(\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})\right) \cdot d\mathbf{S} dt \\ &-\left(\frac{\partial div\mathbf{A}}{\partial t} + div(\nabla \phi)\right) dV \\ &-\left(\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \left(\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}\right)\right) dt \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

となる(問:これを示せ)。これから、

$$\begin{aligned} *d*d\omega = &\left(\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})\right) \cdot d\mathbf{r} \\ &+\left(\frac{\partial div\mathbf{A}}{\partial t} + div(\nabla \phi)\right) dt \\ &+\left(\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \left(\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}\right)\right) \cdot d\mathbf{r} \end{aligned} \tag{3-20}$$

が得られる。一方、

$$*\omega = -\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} dt + \phi\, dV$$

であるので、

$$d*\omega = -div\mathbf{A}\, dVdt + \frac{\partial \phi}{\partial t} dtdV$$

となり、

$$*d*\omega = -div\mathbf{A} - \frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{3-21}$$

が得られる。さらに、これの外微分をとると、

$$d*d*\omega=-\nabla\left(div\mathbf{A}\right)\bullet d\mathbf{r}-\frac{\partial\left(div\mathbf{A}\right)}{\partial t}dt-\frac{\partial\left(\nabla\phi\right)}{\partial t}\bullet d\mathbf{r}-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}dt \tag{3-22}$$

となる。(3-20)と(3-22)から、

$$\left(d*d*+*d*d\right)\omega=\left(-\left(grad\,div-rot\,rot\right)\mathbf{A}+\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}\right)\bullet d\mathbf{r}+\left(\nabla^2\phi-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)dt$$

となることがわかる。ここで、

$$\Box=\nabla^2-\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

という、ダランベリアン（d'Alembert operator）を用いると、

$$\boxed{\left(d*d*+*d*d\right)\omega=-\left(\Box\mathbf{A}\right)\bullet d\mathbf{r}+\Box\phi\,dt} \tag{3-23}$$

となり、ローレンツ空間の一次の微分形式について、

$$\boxed{d*d*+*d*d=-\Box}$$

という関係式が得られる。次に、

$$\omega_1=\omega+d\chi$$

としてみよう。これは、

$$\mathbf{A}\to\mathbf{A}+\nabla\chi,\ \phi\to\phi-\frac{\partial\chi}{\partial t}$$

とすることと同じである（電磁場のゲージ変換と同じである）。すると、

$$d\omega_1=d\omega$$

であるので、(3-23)の左辺の第二項にはこの変換は、全く影響しないことがわかる。一方、(3-21)は、次のように変換される。

$$-div\mathbf{A}-\frac{\partial\phi}{\partial t}\to-div\mathbf{A}-\frac{\partial\phi}{\partial t}-\left(\nabla^2-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\chi$$

よって、

$$\left(\nabla^2-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\chi=-div\mathbf{A}-\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

という波動方程式を満足する、χを使って、最初から変換してあったとすると、

$$div\mathbf{A}+\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$$

とすることができる（ローレンツゲージ（Lorenz gauge)。すると、(3-23)の第一項は、ゼロとなる。

また、第二項は、(3-19)の左辺、そのものであるので、

$$-\left(\Box\mathbf{A}\right)\bullet d\mathbf{r}+\Box\phi\,dt=\mu_0\left(\mathbf{j}\bullet d\mathbf{r}-\rho dt\right)$$

となる。これから、電磁場の波動方程式が得られる。

$$\Box\mathbf{A}=-\mu_0\mathbf{j},\ \Box\phi=-\mu_0\rho \tag{3-24}$$

なお、$t\to ct$ と普通の単位にもどすと、

$$\left(\mathbf{j},\rho\right)\to\left(\mathbf{j},\rho c\right),\ \left(\mathbf{A},\phi\right)\to\left(\mathbf{A},\phi/c\right)$$

となる。このようにもどるということを示すには、最初から、普通の単位で式を書き直せばよいのであるが、それでは元も子もない。簡単にもどすには、次元解析をすればよい（特に、前者は、電荷保存則から明らかであろう）。すると、(3-24)の第二式は、

$$\left(\nabla^2-\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}\right)\frac{\phi}{c}=-\mu_0\rho c$$

となり、これから、

$$\left(\nabla^2-\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}\right)\phi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

となって、見慣れたスカラー・ポテンシャルの波動方程式になるのである。

この小節を終える前に、

$$\boxed{\begin{aligned}&d\omega\left(X_1,\cdots,X_{n+1}\right)\\&=\sum_i\left(-1\right)^{i+1}X_i\left(\omega\left(X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_{n+1}\right)\right)\\&+\sum_{i<j}\left(-1\right)^{i+j}\omega\left(\left[X_i,X_j\right],X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_{n+1}\right)\end{aligned}} \tag{3-25}$$

という関係式を証明しておこう。これから、次の簡単な場合が導かれる。

$$d\omega\left(X,Y\right)=X\left(\omega\left(Y\right)\right)-Y\left(\omega\left(X\right)\right)-\omega\left(\left[X,Y\right]\right)$$

イメージ的には、左辺には、X がY に作用するような項はないのであるが、右辺の最初の二つの項には、そのような項が含まれ、交換子ような形をしていように見える。そして、それがちょうど第三項のものとキャンセルしているであろうと見なせるのである。例として、

$$\omega=f\,dx+g\,dy$$

$$X=a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y},\ Y=c\frac{\partial}{\partial x}+d\frac{\partial}{\partial y}$$

を考えると、a,b,c,d が定数の場合には、簡単に成り立つことがわかる（問：これを示せ）が、これらが関数の場合には、見かけによらず、計算が面倒であることがわかる。さて、(3-25)の証明であるが、これは機械的ではあるものの、以下のように紙面を相当浪費することがわかる（もっと簡単で短い証明があるかもしれないなが・・)。

$$\omega = f_1\, df_2 \cdots df_{n+1}$$

とおくと、

$$d\omega = df_1\, df_2 \cdots df_{n+1}$$

であることから、

$$d\omega\left(X_1,\cdots,X_{n+1}\right) = \begin{vmatrix} X_1 f_1 & \cdots & X_{n+1} f_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_1 f_{n+1} & \cdots & X_{n+1} f_{n+1} \end{vmatrix} = \sum_i X_i f_1 \left(-1\right)^{i+1} \begin{vmatrix} X_1 f_2 & \cdots & \widehat{X_i f_2} & \cdots & X_{n+1} f_2 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\ X_1 f_{n+1} & \cdots & \widehat{X_i f_{n+1}} & \cdots & X_{n+1} f_{n+1} \end{vmatrix}$$

となる。一方、

$$\sum_i X_i \left(f_1 \left(-1\right)^{i+1} \begin{vmatrix} X_1 f_2 & \cdots & \widehat{X_i f_2} & \cdots & X_{n+1} f_2 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\ X_1 f_{n+1} & \cdots & \widehat{X_i f_{n+1}} & \cdots & X_{n+1} f_{n+1} \end{vmatrix} \right)$$

$$= \sum_i \left(X_i f_1\right)\left(-1\right)^{i+1} \begin{vmatrix} X_1 f_2 & \cdots & \widehat{X_i f_2} & \cdots & X_{n+1} f_2 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\ X_1 f_{n+1} & \cdots & \widehat{X_i f_{n+1}} & \cdots & X_{n+1} f_{n+1} \end{vmatrix} + f_1 \sum_i \left(-1\right)^{i+1} X_i \left(\begin{vmatrix} X_1 f_2 & \cdots & \widehat{X_i f_2} & \cdots & X_{n+1} f_2 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\ X_1 f_{n+1} & \cdots & \widehat{X_i f_{n+1}} & \cdots & X_{n+1} f_{n+1} \end{vmatrix} \right)$$

と書ける。この右辺の第二項は、

$$f_1 \sum_i \left(-1\right)^{i+1} X_i \left(\begin{vmatrix} X_1 f_2 & \cdots & \widehat{X_i f_2} & \cdots & X_{n+1} f_2 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\ X_1 f_{n+1} & \cdots & \widehat{X_i f_{n+1}} & \cdots & X_{n+1} f_{n+1} \end{vmatrix} \right)$$

$$= f_1 \sum_i \sum_{j<i} \left(-1\right)^{i+1} \left(\begin{vmatrix} X_1 f_2 & \cdots & X_i X_j f_2 & \cdots & \widehat{X_i f_2} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \cdots & \ddots \\ X_1 f_{n+1} & \cdots & X_i X_j f_{n+1} & \cdots & \widehat{X_i f_{n+1}} & \cdots \end{vmatrix} \right) + f_1 \sum_i \sum_{i<j} \left(-1\right)^{i+1} \left(\begin{vmatrix} X_1 f_2 & \cdots & \widehat{X_i f_2} & \cdots & X_i X_j f_2 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ X_1 f_{n+1} & \cdots & \widehat{X_i f_{n+1}} & \cdots & X_i X_j f_{n+1} & \cdots \end{vmatrix} \right)$$

$$= f_1 \sum_i \sum_{j<i} \left(-1\right)^{i+1} \left(-1\right)^{j+1} \left(\begin{vmatrix} X_i X_j f_2 & X_1 f_2 & \cdots & \widehat{X_j f_2} & \cdots & \widehat{X_i f_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \cdots & \ddots \\ X_i X_j f_{n+1} & X_1 f_{n+1} & \cdots & \widehat{X_j f_{n+1}} & \cdots & \widehat{X_i f_{n+1}} & \cdots \end{vmatrix} \right)$$

$$+ f_1 \sum_i \sum_{i<j} \left(-1\right)^{i+1} \left(-1\right)^{j} \left(\begin{vmatrix} X_i X_j f_2 & X_1 f_2 & \cdots & \widehat{X_i f_2} & \cdots & \widehat{X_j f_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ X_i X_j f_{n+1} & X_1 f_{n+1} & \cdots & \widehat{X_i f_{n+1}} & \cdots & \widehat{X_j f_{n+1}} & \cdots \end{vmatrix} \right)$$

となるが、

$$f_1\sum_i\sum_{j<i}(-1)^{i+1}(-1)^{j+1}\left(\begin{vmatrix} X_iX_jf_2 & X_1f_2 & \cdots & \widehat{X_jf_2} & \cdots & \widehat{X_if_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \cdots & \ddots \\ X_iX_jf_{n+1} & X_1f_{n+1} & \cdots & \widehat{X_jf_{n+1}} & \cdots & \widehat{X_if_{n+1}} & \cdots \end{vmatrix}\right)$$

$$=f_1\sum_j\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\left(\begin{vmatrix} X_jX_if_2 & X_1f_2 & \cdots & \widehat{X_if_2} & \cdots & \widehat{X_jf_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \cdots & \ddots \\ X_jX_if_{n+1} & X_1f_{n+1} & \cdots & \widehat{X_if_{n+1}} & \cdots & \widehat{X_jf_{n+1}} & \cdots \end{vmatrix}\right)$$

と書き換えることができる。ここで、

$\sum_i\sum_{i<j} = \sum_j\sum_{i<j} = \sum_{i<j}$ に注意すると（問：これを示せ）、

$$\sum_i X_i\left(f_1(-1)^{i+1}\begin{vmatrix} X_1f_2 & \cdots & \widehat{X_if_2} & \cdots & X_{n+1}f_2 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\ X_1f_{n+1} & \cdots & \widehat{X_if_{n+1}} & \cdots & X_{n+1}f_{n+1} \end{vmatrix}\right)$$

$$=\sum_i(X_if_1)(-1)^{i+1}\begin{vmatrix} X_1f_2 & \cdots & \widehat{X_if_2} & \cdots & X_{n+1}f_2 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\ X_1f_{n+1} & \cdots & \widehat{X_if_{n+1}} & \cdots & X_{n+1}f_{n+1} \end{vmatrix}-f_1\sum_i\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\left(\begin{vmatrix} [X_i,X_j]f_2 & X_1f_2 & \cdots & \widehat{X_if_2} & \cdots & \widehat{X_jf_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [X_i,X_j]f_{n+1} & X_1f_{n+1} & \cdots & \widehat{X_if_{n+1}} & \cdots & \widehat{X_jf_{n+1}} & \cdots \end{vmatrix}\right)$$

となる。

これを微分形式で書くと、(3-25)になることがわかる。

［付記］ホッジの星印作用素の定義

この作用素は、上述の説明からわかるように、大雑把に言えば、 k 次の微分形式（の基底）とその微分形式にこの作用素を作用させたものとの外積（wedge 積）をとると、最高次の微分形式になるようなものである。具体的には、

$$\lambda = dx_{i_1}dx_{i_2}\cdots dx_{i_k}$$

としたとき、適当な、

$$*\lambda = dx_{i_{k+1}}dx_{i_{k+2}}\cdots dx_{i_n}$$

をとって、

$$\lambda\wedge *\lambda = dx_1dx_2\cdots dx_n \;\; (=\sigma) \qquad (3\text{-}26)$$

となるような作用素、$*$ を（正確な定義ではないが）ホッジの星印作用素というのである。明らかに、(3-26)の左辺がゼロとならないためには、$(i_{k+1},\cdots,i_n)$ は、$(1,2,\cdots,n)$ の中で、$(i_1,\cdots,i_k)$ の補集合でなければならない。よって、必ずそのような補集合をとることにすると、(3-26)の左辺は、

$$dx_{i_1}dx_{i_2}\cdots dx_{i_k}\wedge dx_{i_{k+1}}dx_{i_{k+2}}\cdots dx_{i_n}$$
$$=\varepsilon(i_1\cdots i_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

となる。ここで、

$$\varepsilon(i_1\cdots i_n) = \mathrm{sgn}\left(\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_n \end{pmatrix}\right)$$

とした。よって、

$$\boxed{*\lambda = \varepsilon(i_1\cdots i_n)dx_{i_{k+1}}dx_{i_{k+2}}\cdots dx_{i_n}}$$

となることがわかる（ただし、上の「補集合をとる」という規則に従うもとする）。また、

$$\boxed{**\lambda} = \varepsilon(i_1\cdots,i_k,i_{k+1}\cdots i_n)*\left(dx_{i_{k+1}}dx_{i_{k+2}}\cdots dx_{i_n}\right)$$
$$=\varepsilon(i_1\cdots,i_k,i_{k+1}\cdots i_n)\varepsilon(i_{k+1}\cdots i_n,i_1\cdots,i_k)$$
$$\times\left(dx_{i_1}dx_{i_2}\cdots dx_{i_k}\right)$$
$$\boxed{=(-1)^{k(n-k)}dx_{i_1}dx_{i_2}\cdots dx_{i_k}}$$

となる（問：これを示せ）。

大抵は以上の定義で十分であるのであるが、きちんとやるには、この星印作用素を「数学的な」線形作用素として定義しておく必要がある（こうすると、ローレンツ空間でも使えることになる）。その定義は、以下のとおりである。

まず、ある k 次の微分形式、λ をとり、これと $n-k$ 次の微分形式、μ との外積をとると、最

高次、n の微分形式が得られるが、この最高次のベクトル空間の基底は、σ しかないので、あるスカラー量、$f(\lambda,\mu)$ で、

$$\lambda\wedge\mu=f(\lambda,\mu)\sigma=f(\lambda,\mu)dx_1dx_2\cdots dx_n \tag{3-27}$$

と表わされるはずである。つまり、

$$f:\lambda\wedge\mu\to f(\lambda,\mu)$$

というスカラー量を与える線形写像が得られることになる。ここで、λ を固定して考えると、この f は、$n-k$ 次の微分形式、μ に作用して、スカラー量を与える線形写像であると考えることができる。すると、これは、$n-k$ 次の微分形式のベクトル空間の中のあるベクトルとの内積を与えるものであると見なすことができる（問；常にそう見なせることを示せ）。このあるベクトルは、当然、k 次の微分形式、λ に関係づけられているはずであるので、次のような写像を考えることができる。

$$*:\Omega^k\ \to\ \Omega^{n-k}$$

そして、これがホッジの星印作用素であり、成分で書くと、

$$*;\ \lambda\ \mapsto\ *\lambda$$

である。これを使うと、(3-27)は、

$$\lambda\wedge\mu=\langle *\lambda,\mu\rangle\sigma=\langle *\lambda,\mu\rangle dx_1dx_2\cdots dx_n \tag{3-28}$$

となる。ここで、f を同じ空間の内積として表わしてある。これから、

$$\lambda\wedge *\lambda=\langle *\lambda,*\lambda\rangle\sigma=\langle *\lambda,*\lambda\rangle dx_1dx_2\cdots dx_n \tag{3-29}$$

ともなる。一般のベクトルではなく、基底ベクトルにもどって考えると、(3-29)から、$*$ の作用は、基底ベクトルを構成している dx_i の組をその「補集合」の組に移すということがわかる（$*$の作用素が意味あるものにするには、少なくともそのような成分をもっている必要がある。）また、(3-28)で、基底ベクトル、μ が「補集合」の組からできていないとすると、左辺が ゼロになることから、右辺の内積を入れたベクトル空間の基底は直交基底になることがわかる。よって、さらにこれら基底が規格化直交基底になるように、内積を定義し直してよいことがわかる（それに応じて、$*$を再定義するのである。）いま、l 次の微分形式の基底、$dx_1dx_2\cdots dx_l$ 等を外積、$\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\cdots\wedge\mathbf{e}_l$ 等と同一視すると（注：内積を考えているので、抵抗感がないようにベクトル的記述にするのである)、上で言っていることは、

$$\left\langle \mathbf{e}_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathbf{e}_{i_l},\mathbf{e}_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathbf{e}_{j_l}\right\rangle$$

の添え字の組が同じであれば、1 、そうでなければ、0 とするということである（問：二つの添え字の組の順番を同時に入れ替えても値は変わらないことを示せ)。なお、同じ添え字の組をとるが、添え字の組み合わせが違うときでも一律に1にしたのは$*$作用素をそのように定義したと言ってしまってもよいが、空間の等方性を使えば、$\mathbf{e}_i$ 等が互いに「対等」であるすれば、一般的にそれらの内積は同じ値になることがわかる。さて、一般のl 次の微分形式の空間（いまは当面、l 次の外積の空間と考えている）のベクトルの組に対しては、内積は次のようになる。

$$\mathbf{a}_k=(a_{1k}.a_{2k},\cdots,a_{nk})$$

等々とおくと、

$$\omega_a=\mathbf{a}_1\wedge\cdots\mathbf{a}_l\ ,\ \omega_b=\mathbf{b}_1\wedge\cdots\mathbf{b}_l$$

に対して、

$$\begin{aligned}\langle\omega_a,\omega_b\rangle&=\langle\mathbf{a}_1\wedge\cdots\mathbf{a}_l,\mathbf{b}_1\wedge\cdots\mathbf{b}_l\rangle\\&=\sum_{1\le i_1\cdots i_l\le n}\ \sum_{1\le j_1\cdots j_l\le n}a_{i_1 1}\cdots a_{i_l l}b_{j_1 1}\cdots b_{j_l l}\\&\quad\times\left\langle\mathbf{e}_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathbf{e}_{i_l},\mathbf{e}_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathbf{e}_{j_l}\right\rangle\end{aligned} \tag{3-30}$$

となる。ここで、外積の性質を使うと、これは、

$$\langle\omega_a,\omega_b\rangle=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_l\le n}\ \sum_{1\le j_1<\cdots<j_l\le n}\det\begin{pmatrix}a_{i_1 1}&\cdots&a_{i_1 l}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{i_l 1}&\cdots&a_{i_l l}\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}b_{j_1 1}&\cdots&b_{j_1 l}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ b_{j_l 1}&\cdots&b_{j_l l}\end{pmatrix}$$
$$\times\left\langle\mathbf{e}_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathbf{e}_{i_l},\mathbf{e}_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathbf{e}_{j_l}\right\rangle$$

となり、さらに、これに内積に性質を使うと、

$$\langle\omega_a,\omega_b\rangle=\sum_{i_1<\cdots<i_l}\det\begin{pmatrix}a_{i_1 1}&\cdots&a_{i_1 l}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{i_l 1}&\cdots&a_{i_l l}\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}b_{i_1 1}&\cdots&b_{i_1 l}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ b_{i_l 1}&\cdots&b_{i_l l}\end{pmatrix}$$

となる（問；以上を示せ)。さて、線形代数で二つの行列の積の行列式について習い、正方行列、A,B の場合には、簡単に、

$$\det(AB)=|AB|=|A|\cdot|B|$$

となることを知っている。同様に、正方行列でない場合にも、A を(p,n) 行列、B を(n,p) 行列とすると、行列の積は、

$$AB = \begin{array}{c} \\ p \end{array}\!\!\overset{n}{\begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix}}\; n\overset{p}{\begin{pmatrix} & & \\ & B & \\ & & \end{pmatrix}}$$

となり、行列式は、

$$|AB| = \sum_{1\le i_1 \cdots \le i_p \le n} \begin{vmatrix} a_{1i_1} & \cdots & a_{pi_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1i_p} & \cdots & a_{pi_p} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{i_1 1} & \cdots & b_{i_1 p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i_p 1} & \cdots & b_{i_p p} \end{vmatrix}$$

となることを示すことができる（問：これを示せ（ヒント：正方行列の場合と同じ方法を使う））。ただし、$p > n$ の場合には、ゼロとなる。また、$p = n$ の場合には、右辺は、一つの項しかなく、$|A|\cdot|B|$ となるのである。

すると、先のベクトル、$\mathbf{a}_i\,\mathbf{b}_j$ から、(n,l)

$$A = (\mathbf{a}_1, \cdots \mathbf{a}_l),\ B = (\mathbf{b}_1, \cdots \mathbf{b}_l)$$

なる行列を考えると、

$$\langle \omega_a, \omega_b \rangle = \det\left(A^T B\right)$$

となることがわかる。さらに、数ベクトルの「普通の」内積を使って、

$$\langle \omega_a, \omega_b \rangle = \det\begin{pmatrix} \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_l \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{a}_l, \mathbf{b}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{a}_l, \mathbf{b}_l \rangle \end{pmatrix} \qquad (3\text{-}31)$$

と表わされる。右辺は、グラムの行列式（Gramian）と言われるものである。若干、仕掛けが大仰であったが、普通のユークリッド空間の場合でかつ基底ベクトル、$\mathbf{e}_{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{i_n}$（$n-k$ 次の微分形式の空間の $dx_{i_{k+1}} dx_{i_{k+2}} \cdots dx_{i_n}$ と同一視されたもの）の場合には、

$$\begin{aligned} &\left\langle \mathbf{e}_{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{i_n}, \mathbf{e}_{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{i_n} \right\rangle \\ &= \det\begin{pmatrix} \langle \mathbf{e}_{i_{k+1}}, \mathbf{e}_{i_{k+1}} \rangle & \cdots & \langle \mathbf{e}_{i_n}, \mathbf{e}_{i_{k+1}} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{e}_{i_{k+1}}, \mathbf{e}_{i_n} \rangle & \cdots & \langle \mathbf{e}_{i_n}, \mathbf{e}_{i_n} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \det(I) = 1 \end{aligned}$$

となる（これは初めからわかっていたことで、何をやっていたのだろうという感じなるであろうが・・）。なお、行列式の中の内積は、基底を数ベクトルとした場合の内積である。これから、基底ベクトル、$\lambda = dx_{i_1} dx_{i_2} \cdots dx_{i_k}$ に対し、(3-29)から、

$$*\lambda = \varepsilon\left(i_1 \cdots i_n\right) dx_{i_{k+1}} dx_{i_{k+2}} \cdots dx_{i_n}$$

が得られることがわかる（問：これを示せ）。

次は、ローレンツ空間のように、不定計量をもつ場合であるが、これについても、(3-31)のような内積の形を活かすために、たとえば、ω_a, ω_b のベクトル、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ 等を次のように表すことにする。

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + \cdots + a^n\mathbf{e}_n$$
$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}^1 + \cdots + b_n\mathbf{e}^n$$

つまり、ベクトル、$\mathbf{a}$ の座標成分は、反変ベクトルとし、ベクトル、$\mathbf{b}$ の座標成分は、共変ベクトルとするのである。こうすると、ベクトル、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の内積は、

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_i a^i b_i$$

となり、「似非」ではあるが、ユークリッド空間のように見なせる。また、(3-30)式の中の基底ベクトルの内積は、

$$\left\langle \mathbf{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{i_l}, \mathbf{e}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^{i_l} \right\rangle$$

のように考えるのである。すると、この値は、1 か 0 かになる（注：$\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}^j \rangle = \delta_i^j$ である）。すると、すべては、上述の導出と全く同じようにでき、結果の形も同じになるのである。しかし、次の数ベクトルとしての基底ベクトルの内積については、不定計量の符号に依存して、

$$\begin{aligned} &\left\langle \mathbf{e}^{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^{i_n}, \mathbf{e}^{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^{i_n} \right\rangle \\ &= \det\begin{pmatrix} \langle \mathbf{e}^{i_{k+1}}, \mathbf{e}^{i_{k+1}} \rangle & \cdots & \langle \mathbf{e}_{i_n}, \mathbf{e}^{i_{k+1}} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{e}^{i_{k+1}}, \mathbf{e}^{i_n} \rangle & \cdots & \langle \mathbf{e}^{i_n}, \mathbf{e}^{i_n} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} \pm 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \pm 1 \end{pmatrix} = (-1)^{s_2} \end{aligned}$$

となる。ここで、s_2 は、上記のベクトルのうち、計量の符号が -1 であるものの数である。

以上から、先ほどの結果と合わせて、

$$\boxed{*dx_{i_1}dx_{i_2}\cdots dx_{i_k} = \varepsilon\left(i_1\cdots i_n\right)\left(-1\right)^{s_2} dx_{i_{k+1}}dx_{i_{k+2}}\cdots dx_{i_n}}$$

となることがわかる。ただし、s_2 は、右辺の $dx_{i_{k+1}}dx_{i_{k+2}}\cdots dx_{i_n}$ のうち、計量の符号が -1 であるものの数である。これが先に述べたハウツーの計算法である。また、

$$\boxed{**\lambda} = \varepsilon\left(i_1\cdots,i_k,i_{k+1}\cdots i_n\right)(-1)^{s_2} *\left(dx_{i_{k+1}}dx_{i_{k+2}}\cdots dx_{i_n}\right)$$
$$= \varepsilon\left(i_1\cdots,i_k,i_{k+1}\cdots i_n\right)\varepsilon\left(i_{k+1}\cdots i_n,i_1\cdots,i_k\right)$$
$$\times(-1)^{s_2}(-1)^{s_1}\left(dx_{i_1}dx_{i_2}\cdots dx_{i_k}\right)$$
$$\boxed{=\left(-1\right)^{k(n-k)+s} dx_{i_1}dx_{i_2}\cdots dx_{i_k}}$$

となる。ここで、s_1 は $dx_{i_1}dx_{i_2}\cdots dx_{i_k}$ に含まれるものの計量の符号が -1 であるものの数であり、$s = s_1 + s_2$ は $dx_1dx_2\cdots dx_n$ の中で計量が -1 であるものの数である。なお、実際の星印作用素の計算では、微分形式の空間のベクトルは、ω_a, ω_b の形ではなく、すべてその空間の基底ベクトルで展開した後に、作用素を施すのがよい。上述の若干、大仰な設定は、星印作用素を線形作用素としてきちんと定義するためであった。こうすることで、ベクトルを展開して、個々の項に作用させることができるのである。

3.6 拡張された Stokes の定理 (extended Stokes' Theorem)

この定理は、今までも何度か出てきたが、extended Stokes' theorem とか general (generalized) Stokes's theorem とか、いろいろな名前で呼ばれているものである。これは、美しい（かつ簡潔な）定理であるので、ここにもう一度、書いておこう。

$$\boxed{\int_C d\omega = \int_{\partial C}\omega}$$

ここで、∂C は、左辺の積分領域の境界を表わす記号である。または、左辺の積分領域を表わす、C の境界をとる作用素（演算子）であるとしてもよい。ただし、本講義では、この演算子については詳しい説明はしない。単純に境界を表わす記号と考えることにする。

さて、この Stokes の定理のきちんとした証明は、適当な参考書等を見て頂くことにして、ここでは直感的な証明を与えておくことにしよう。多分、抵抗感の少ない説明になっているのではないかと思う。ただし、ここでは、一般の多様体のように、幾つもの座標系をペタペタと貼り付けないといけないような空間は取り扱わない。素朴で（素直な）ユークリッド空間での話にするのである。

この説明は、二つの段階に分けて行う。第一段でガウスの定理を微分形式で表す。第二段で「通常の」やり方（引き戻し（pull back）の操作）で任意の低次元での定理、つまり、いわゆる Stokes の定理に相当するものを証明する。
なお、前にも述べたが、この定理のすごいところ（の一つ）は、次のグリーンの定理を忘れてしまっても、全く頭を使わずに、一瞬にして導くことができることである。

$$\oint P\,dx + Q\,dy = \int\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

<u>第一段</u>
三次元でのガウス（Gauss）の定理を n 次元に拡張すると、

$$\int \mathrm{div}\,\mathbf{f}\; dV = \int \mathbf{f}\bullet d\mathbf{S} \qquad (3\text{-}32)$$
$$\mathrm{div}\,\mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$
$$\mathbf{f}\bullet d\mathbf{S} = f_1 dS_1 + f_2 dS_2 + \cdots + f_n dS_n$$

となるが、この意味するところは三次元からの類推で明らかであるので、証明は要しないと言えるかもしれないが、後の便宜のために、簡単に説明を加えておこう。**図 27** のように、単純な形状の領域を考え、そのうちの微少な一部（イメージと

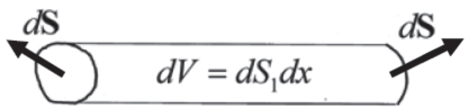


図 27. n 次元の微小体積

しては、図中にある、x 方向に延びた細長い領域）については、

$$\int_a^b \frac{\partial f_1}{\partial x} dV = \int_a^b \frac{\partial f_1}{\partial x} dx\, dS_x = \left(f_1\left(b\right) - f_1\left(a\right)\right)dS_x$$

となるが、最後の項は、$\mathbf{f}\bullet d\mathbf{S}$ の x に関する積分に関する部分になる。このような細長い領域を束ねて、積分領域の体積とすれば、この項に関する積分が得られる。また、積分領域がこのような操

作ができないような単純でない形状の場合には、この領域をいくつかに切断して考えればよい。切断箇所については、となり合う領域の$\mathbf{f}\bullet d\mathbf{S}$に関する積分が互いにキャンセルするので、結果には切断したという「痕跡」は残らないのである（コメント：一般によく用いられる手法であるが、数学の分野以外に用いるとロクなことにはならないようである）。同様にして、

$$\int_c^d \frac{\partial f_2}{\partial y} dV = \int_c^d \frac{\partial f_2}{\partial y} dy\, dS_y = \left(f_2(d) - f_1(c)\right) dS_y$$

となり、$\mathbf{f}\bullet d\mathbf{S}$の$y$に関する部分に等しいことがわかる。そして、全体積について、たし合わせるのである。以下同様に、云々・・・。そして、これらをまとめると、一般の次元でのガウスの定理、(3-32)が導かれる。

次にやるべきことは、これを微分形式に読み換えることである。体積については、

$$dV \;\to\; dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

でよいが、$d\mathbf{S}$ はどうなのかということは、少し議論が必要であろう。前に体積と表面積のところで出てきた、体積、V と面積ベクトル、$\Delta\mathbf{S}$ の次の関係に着目しよう。

$$V = \mathbf{a}_1 \bullet \Delta\mathbf{S}$$

であり、

$$\Delta\mathbf{S} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \mathbf{e}_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{e}_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

であったが、$\Delta\mathbf{S}$の表式を見やすい形で表すと、

$$\Delta\mathbf{S} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & dx_1(\mathbf{b}) & dx_1(\mathbf{c}) & \cdots \\ \mathbf{e}_2 & dx_2(\mathbf{b}) & dx_2(\mathbf{c}) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{e}_n & dx_n(\mathbf{b}) & dx_n(\mathbf{c}) & \cdots \end{pmatrix}$$

というような形になる。この行列式の第一列について展開し、微分形式の形に書くと、

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{S} = \big(&\mathbf{e}_1 dx_2 dx_3 \cdots dx_n - \mathbf{e}_2 dx_1 dx_3 \cdots dx_n \\ &+ (-1)^{i+1} \mathbf{e}_i dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_n \\ &+ \cdots\big)(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \cdots)\end{aligned}$$

となる。これから、面積の微分形式は、

$$\begin{aligned} d\mathbf{S} = &\mathbf{e}_1 dx_2 dx_3 \cdots dx_n - \mathbf{e}_2 dx_1 dx_3 \cdots dx_n \\ &+ (-1)^{i+1} \mathbf{e}_i dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_n + \cdots \end{aligned}$$

となることがわかる（注：もし上の議論で、体積を、$V = \mathbf{b}\bullet\Delta\mathbf{S}_b$ と考えると、$d\mathbf{S}$ の符号が変わるが、ここでは、座標の順番に、$\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \cdots, \mathbf{e}_n$ をとったときの超平面の面積を$+1$ としているのである）。これから、

$$\begin{aligned} \mathbf{f}\bullet d\mathbf{S} = &f_1 dx_2 dx_3 \cdots dx_n - f_2 dx_1 dx_3 \cdots dx_n \\ &+ (-1)^{i+1} f_i dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_n + \cdots \end{aligned}$$

となることがわかる。この外微分をとると、

$$\begin{aligned} d(\mathbf{f}\bullet d\mathbf{S}) &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 \cdots dx_n \\ &\quad - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 dx_1 dx_3 \cdots dx_n \\ &\quad + \frac{\partial f_i}{\partial x_i} (-1)^{i+1} f_i dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_n + \cdots \\ &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= \operatorname{div}\mathbf{f}\, dV \end{aligned}$$

となる。以上から、$\omega = \mathbf{f}\bullet d\mathbf{S}$ とおくと、n 次元の Gauss の定理を、（拡張された）Stokes の定理、

$$\int_V d\omega = \int_S \omega$$

に書き換えができたことになる。なお、ここで、$V = C$ で、$S = \partial C$ である。

<u>第二段（ガウスの定理の引き戻し（pull back））</u>

n 次元空間の中に、k 次元の領域を考えて、それに関する積分を行うとする場合の一つの方法は、その領域を表わすn 次元の座標を（便利な）k 個のパラメーターからなる媒介変数で表して、これについて積分を行うことである。つまり、

$$\begin{aligned} &\int \sum_i f_i(\mathbf{x}) dx_{i_1} \cdots dx_{i_k} \\ &= \int \left(\sum_i f_i(\mathbf{x}(\mathbf{t})) D_i(\mathbf{x}(\mathbf{t})) \right) dt_1 \cdots dt_k \end{aligned} \tag{3-33}$$

というような形の計算をするのである（注：n 次元空間の中のk 次元の領域は、一般には、ユークリッド空間ではなくなり、多様体になるのであるが、ここでは素朴にk 個の媒介変数の空間と考えることする）。（繰り返しになるが）この計算のやり方は、

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{t})$$

がわかれば、それを、$f_i(\mathbf{x})$ や dx_i 等に「代入する」ことで、(3-33)の左辺を計算するという方法である。これを写像という観点でみると、媒介変数の空間から、n 次元空間に、

$$\mathbf{t} \to \mathbf{x}$$

という写像、$\mathbf{x}(\mathbf{t})$ が与えられており、これにより、$f_i(\mathbf{x})$ や dx_i 等が媒介変数の関数として書き換えられるというものである。単に代入するという操作であるが、これを空間の写像という観点に立つと、**図 28** のようなイメージになる。図では、わかりやすいように、変数の notation を変えている。空間の写像、ϕ は、

$$\phi: \mathbf{x} \to \mathbf{y}$$

であり、これにより、関数、$f(\mathbf{y})$ が、

$$f(\mathbf{y}) \to f(\phi(\mathbf{x}))$$

と、空間、$\mathbf{x}$ の関数になることになるが、これを空間、$\mathbf{y}$ の関数を空間、$\mathbf{x}$ の関数に「引き戻し（pull back)」をしたと言い、

$$\boxed{\phi^* f = f \circ \phi}$$

という記号で表す。引数を付けて書くと、

$$(\phi^* f)(\mathbf{x}) = (f \circ \phi)(\mathbf{x}) = f(\phi(\mathbf{x}))$$

となる。初めてこの記号に接した方は、単なる代

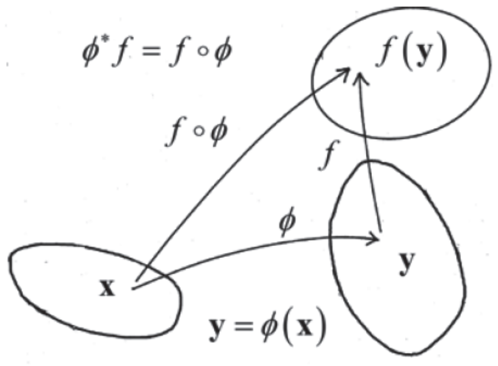


図 28. 引き戻し（pull-back）

入を、なんと持って回った言い方をするのかと思われるかもしれないが、この記法（また、pull back という考え方）は、微分形式、または外微分の記法と非常に相性がよいである。

積分の座標変換は、

$$\int f(\mathbf{y}) dy_1 \wedge dy_2 \wedge \cdots \wedge dy_n$$
$$= \int f(\mathbf{y}(\mathbf{x})) dy_1(\mathbf{x}) \wedge dy_2(\mathbf{x}) \wedge \cdots \wedge dy_n(\mathbf{x})$$

であり、右辺の $dy_i(\mathbf{x})$ は、外微分をとって、変数、$\mathbf{x}$ の微分形式にするのであった。ここで、

$$\omega = f(\mathbf{y}) dy_1 \wedge dy_2 \wedge \cdots \wedge dy_n$$

とおくと、pull back 操作は、単なる代入であるので、上式の右辺の被積分項は、$\phi^*\omega$ となる。つまり、

$$\boxed{\int \omega = \int \phi^* \omega} \qquad (3\text{-}34)$$

となり、これは、微分形式に pull back 操作をしても（または、いくら座標変換をしたとしても)、積分値は変わらないということを示している。一方、(3-33)の場合には、どうしてよいか、さだかにはわからないのである。努力すればわかるであろうが、（一見）複雑なものが得られるであろう。（または天下り的に、（符号はよくわからないが）D_i は座標変換の Jacobian であるとするのである）さて、微分形式で表し、ϕ^* を代入操作であるとすると、(3-34)のように簡単になるが、ϕ^* を左から作用する演算子（作用素）だと思って、(3-34)を眺めると、かなり大胆なことをやっていることがわかる。

$$\phi^* f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}(\mathbf{x}))$$

はよしとしても、

$$\phi^*(dy_i) = dy_i(\mathbf{x})$$
$$\phi^*(dy_1 \wedge dy_2 \wedge \cdots \wedge dy_n)$$
$$= \phi^*(dy_1) \wedge \phi^*(dy_2) \wedge \cdots \wedge \phi^*(dy_n)$$

などである。（逆に言えば、ϕ^* の作用とはこのようなものであるとすれば、(3-34)が成りたつことになることから、これらの関係は定義であるとすれば、都合がよいかもしれないが・・・)。上の関係式の二番目は、ϕ^* が代入操作である考えれば、明らかであり、

$$\phi^*(\omega \wedge \eta) = \phi^*\omega \wedge \phi^*\eta$$

となるが、ここで、重要なのは、

$$\phi^*(d\omega) = d(\phi^*\omega)$$

という関係であり、記号的に表すと、

$$\boxed{\phi^* d = d\phi^*} \qquad (3\text{-}35)$$

という関係になる。つまり、ϕ^* と d は自由に交換してよいということ言っているのである（平たく言えば、（外）微分は、代入する前にとっても、代入後にとっても同じであるということである)。何となく当たり前のようにも思えるが、こ

れを示すには帰納法を使う。まず、$y_j = y_j(\mathbf{x})$とすると、

$$dy_j = \sum \frac{\partial y_j}{\partial x_i} dx_i$$

である。$\phi^*(dy)$は、代入操作だと思うと、右辺、そのものである。また、$d(\phi^* y_j) = dy_j(\mathbf{x})$ のことであり、これも明らかに、右辺となる。次に、$\mathbf{y} = \phi(\mathbf{x})$ とし、$f = f(\mathbf{y})$ とすると、微分の chain rule によって、(3-35)が成り立つことがわかる（問：これを示せ）。さて、いま、ω を$n-1$次の微分形式としよう。たとえば、

$$\omega = x_{i_1} dx_{i_2} \cdots dx_{i_n}$$

であるとする。すると、

$$fd\omega$$

は、n 次の微分形式となる。これに、$\phi^* d$ を作用させると、

$$\phi^* d(fd\omega) = \phi^*(dfd\omega) = d\phi^*(f)\phi^* d\omega$$
$$= d\phi^*(f) d\phi^*(\omega)$$

となる。一方、$d\phi^*$ を作用させると、

$$d\phi^*(fd\omega) = d\left(\phi^*(f)\phi^*(d\omega)\right)$$
$$= d\left(\phi^*(f) d\phi^*(\omega)\right) = d\phi^*(f) d\phi^*(\omega)$$

よって、この場合のn 次の微分形式について、(3-35)が成立する。これから、一般的なn 次の微分形式についても成立することがわかるのである（問：これを示せ）。

さて、最初の問題設定にもどって、n 次元空間の中のk次元の領域に関する積分について考えてみよう。まず、(3-34)と(3-35)から、以下の二つの式がわかる。

$$\int \omega = \int \phi^* \omega \qquad (3\text{-}36)$$

$$\int d\omega = \int \phi^*(d\omega) = \int d(\phi^* \omega) \qquad (3\text{-}37)$$

ここで、ϕ^* は、n 次元空間から、k次元のパラメーター―空間への引き戻し（pull back）であるとするのである。パラメーター―空間での積分（体積積分は、まさにこの空間の体積積分である）には、微分形式での Gauss の定理が使えるので、

$$\int_V d(\phi^* \omega) = \int_S \phi^* \omega$$

となることがわかる。よって、(3-36)、(3-37)から、一般の場合にも成り立つ、Stokes の定理、

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega$$

が得られたことになる。しかし、議論に少し抜けている点がある。それは、次元の問題である。(3-35)については、その証明で、写像、ϕ の「写像元」の空間の次元（今の場合は、k 次元）と写像で移った空間の次元（今の場合は、n 次元）については、特に制約を付けなかったのでよいが、問題は、(3-34)である。その証明では、両方の次元が等しいということが前提になっているのである。ただし、この式は、積分の変数変換の式であるので、次元が異なっても正しいであろうと思われる。この点をもう少しきちんとするには、以下のように考えればよい。まず、n 次元空間の中のk 次元の領域をk 次元の部分空間（または超平面）と考えて、その中に留まるような座標をとり、それ以外の座標は、その空間外の座標とするのである（全体では当然、n 次元にである）。いま、n 次元空間のk 次の微分形式を（簡単化のために）、

$$\omega = \sum d\mathbf{x}$$

と書くことする。ここで、$d\mathbf{x}$ は、

$$d\mathbf{x} = dx_{i_1} \cdots dx_{i_k}$$

であるが、これを、k 次元の部分空間の微分形式、$d\mathbf{u}$ とその外の空間の微分形式、$d\mathbf{v}$ とで表すと、

$$\omega = \sum d\mathbf{u} d\mathbf{u} + \sum d\mathbf{u} d\mathbf{v} + \sum d\mathbf{v} d\mathbf{v} \qquad (3\text{-}38)$$

となる。積分とは、微分形式に（今の場合は、k 個の）ベクトルの組を作用させたものをたし合わせるものであるとする（と定義すると言ってもよい）と、このk個のベクトルがk 次元の部分空間の中にある場合には、(3-38)の中で残るのは、第一項に関わる部分となる。よって、実効的には、

$$\omega\left(= \sum d\mathbf{x}\right) = \sum d\mathbf{u} d\mathbf{u}$$

であると見なしてよいことになる（実際にも、k 次元の部分空間で考えた方が、イメージがはっきりするのである）。そして、このk個の変数からなるk次微分形式に、(3-34)を適用すると考えるのである（初めから媒介変数パラメーターをk次元部分空間の座標にとっておけば、ϕ^* は不要であるが、一般的には、媒介変数は便利なようにとるべきものであろう）。

3.7 ポアンカレの補題（Poincare lemma）

ベクトル解析の部分とかなり重複しているが、この小節の前書きとして、若干の説明をしておこう。我々は、大学での勉強やその後の長い経験から、以下のことを知っている。もし、ベクトル、$\mathbf{A}$ が rotation free である、つまり、

$$rot\mathbf{A} = \mathbf{0}$$

であるなら、

$$\mathbf{A} = grad\,\phi$$

となっている（少なくとも大抵の場合には・・。）
また、ベクトル、$\mathbf{A}$ が divergence free である、つまり、

$$div\mathbf{A} = 0$$

であるなら、

$$\mathbf{A} = rot\mathbf{B}$$

となっている（少なくとも多くの場合には・・。）
　これを微分形式の言葉で表すと、

$$\alpha = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3$$

で、$d\alpha = 0$ であるなら、

$$\alpha = d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_3} dx_3$$

となっている。また、

$$\beta = A_1 dx_2 dx_3 + A_2 dx_3 dx_1 + A_3 dx_1 dx_2$$

で、$d\beta = 0$ であるなら、

$$\beta = d\lambda = d\left(B_1 dx_1 + B_2 dx_2 + B_3 dx_3\right)$$
$$= \left(\frac{\partial B_3}{\partial x_2} - \frac{\partial B_2}{\partial x_3}\right) dx_2 dx_3 + \left(\frac{\partial B_1}{\partial x_3} - \frac{\partial B_3}{\partial x_1}\right) dx_3 dx_1$$
$$+ \left(\frac{\partial B_2}{\partial x_1} - \frac{\partial B_1}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2$$

となっているということである。
　しかしながら、我々は、以上のことがうまくいかない（典型的な）例も知っている。
　例えば、z 軸上に線電流が流れている場合の磁場の例や z 軸上に渦糸がある場合の流体の運動の例などがある。磁場や流れを表わすベクトルを $\mathbf{A}$ とすると、（係数を省略して）

$$\mathbf{A} = \left(A_r,\ A_\theta,\ A_z\right) = \left(0,\ 1/r,\ 0\right)$$

　となる。これを微分形式で表すと、

$$\omega = \frac{-\sin\theta}{r} dx + \frac{\cos\theta}{r} dy$$
$$= \frac{-y\,dx + x\,dy}{r^2}$$

　となり、これから、$d\omega = 0$ となる（問：これを示せ）。一方、

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

から、直ちに

$$d\theta = \frac{-y\,dx + x\,dy}{r^2}$$

と書ける。これから、ナイーブに、$\omega = d\theta$ とおき、直ちに、$d\omega = 0$ となると言いたくなるが、これはダメである。なぜなら、θ は局所的には（一価の）関数であるが、大域的には関数ではないからである（一価関数ではない）。つまり、$d\omega = 0$ となっても $\omega = d\alpha$ とは必ずしもならないことになる。
　ある微分形式、ω が、

$$d\omega = 0$$

となるとき、この ω は、閉形式（closed form）であるいう。たとえば、

$$\omega = df$$

と、関数、f（0 形式）の外微分で与えられたとすると、

$$d\omega = ddf = 0$$

となり、この ω は閉形式であることがわかる。一方、微分形式、ω が、

$$\omega = d\alpha$$

という形で与えられているとき、この ω は、完全形式（exact form）という。当然、完全形式であると、

$$d\omega = d\,d\alpha = 0$$

であるので、閉形式である。つまり、（k 次の）閉形式の微分形式の集合（空間）を Z^k とし、（k 次の）完全形式の空間を B^k とすると、（少なくとも）

$$B^k \subseteq Z^k \qquad (3\text{-}39)$$

となることがわかる。しかし、場合によっては、

$$B^k = Z^k \qquad (3\text{-}40)$$

となる（例えば、連続的に一点に変形可能な空間（可縮空間、contractible space）の場合などである）。（注：数学者は、(3-39)のような関係を見ると、すぐに、Z^k / B^k というような商を作るようである。これ

から、ド・ラーム コホモロジー（de Rahm chorology）が生まれるのであるが、本講義のような初等的な議論の範疇外であろう。）さらに、空間を「星形」領域（star-shaped region）に限ると、(3-40)が導かれ、さらに、$d\omega = 0$ であるようなωが、

$$\boxed{\omega = d\left(K\omega\right)} \qquad (3\text{-}41)$$

のような具体的な式で表すことができる。これが、「Poincareの補題」と呼ばれるものである。ここで、星形領域とは、（少なくとも）ある一点から見ると、領域のすべてを見渡すことができるような領域のことをいう（図 29）（注：周知のように、どんな点から見ても領域のすべてを見ることができる領域は、凸領域と呼ばれるものであるが、星形領域は、これを含むより拡張された概念であり、Poincareの補題にピッタリのものである。）また、(3-41)の右辺のKは、ある積分演算子であり、ホモトピー演算子（homotropy operator）と呼ばれるものである。

図 29. 可縮空間の例（星形領域）

以下では、このPoincareの補題をストークスの定理を使って証明してみよう。まず、図 30のように星形領域の「直線的な」縮小変形を考え、その縮小変形のパラメーター、t を次元の一つに追加した空間を考えることにする（$\mathbf{R}\times\Omega^n$）。この拡大した空間で、縮小変形を式で表すと、

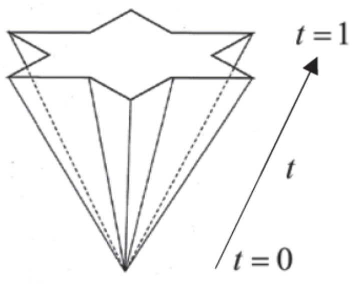


図 30. 空間の一点への縮小変形

$$\left(t, \mathbf{y}\right) = \mathrm{F}\left(t, \mathbf{x}\right) = \left(t, t\,\mathbf{x}\right) \qquad (3\text{-}42)$$

となる。（Ω^n空間内では）$t=1$ の場合は、縮小変形がない元の領域で、$t=0$が、一点（ここでは、原点が全領域を見渡せる点としているが、常に座標変換によってそのようにできる）に領域が縮小された場合である。

つまり、

$$\mathrm{F}\left(t, \mathbf{x}\right) = \begin{Bmatrix} \left(1, \mathbf{x}\right) & \text{for } t = 1 \\ \left(0, \mathbf{0}\right) & \text{for } t = 0 \end{Bmatrix}$$

である。ここで、右辺の$\mathbf{x}$ は、元の空間そのものであり、$\mathbf{0}$ はその空間の原点である。なお、縮小の過程ですべての点が領域内に留まるというのが、星形領域を採用したミソである。

次に、（当面は、縮小変形は忘れて）$\mathbf{R}\times\Omega^n$ 空間で図 31 のような（非常に）細長い円筒領域にストークスの定理を適当しよう。

$$\int_V d\omega = \int_{cylinder} \omega + \int_{S_2} \omega + \int_{S_1} \omega \qquad (3\text{-}43)$$

ここで、

$$d\omega = a\left(\mathbf{x}, t\right) dt \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \qquad (3\text{-}44)$$

とし、

$$\omega = b\left(\mathbf{x}, t\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n + \sum c_i\left(\mathbf{x}, t\right)\left(-1\right)^{i-1} dt \wedge dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \qquad (3\text{-}45)$$

とする。当然、$a\left(\mathbf{x}, t\right)$ と$b\left(\mathbf{x}, t\right), c_i\left(\mathbf{x}, t\right)$との間には、外微分を取ることによる、ある関係が存在するはずであるが、当面、明示的な表式は使わない（注：外微分形式の次元が n より低い場合には、ストークスの定理の証明と同じようにpull-back写像を使えばよいので、次元が n の場合に証明すれば十分である。）

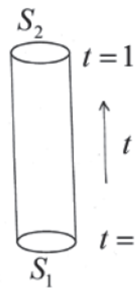


図 31. 円筒領域

今、細長い円筒領域の円盤部分、つまり（$\mathbf{R}\times\Omega^n$ 空間の部分空間である）Ω^n 空間での円盤の体積をΔVとし、また、（幾何学的に考えて）t方向の単位ベクトルを$\mathbf{n}$ としよう。すると、$\mathbf{R}\times\Omega^n$ 空間では、円盤部分の「面積」ベクトルは、

$$\Delta\mathbf{S} = \mathbf{n}\,\Delta V$$

となり、$\mathbf{R}\times\Omega^n$ 空間の微少体積は、

$$\Delta\tilde{V} = \Delta t\,\mathbf{n}\bullet\Delta\mathbf{S} = \Delta t\,\mathbf{n}\bullet\mathbf{n}\Delta V = \Delta t\Delta V$$

となる。

これから、(3-43)式の左辺は、

$$\int_V d\omega = \int_0^1 a\left(\mathbf{x}, t\right) dt\, \Delta V \qquad (3\text{-}46)$$

となり、(3-43)式の右辺の第二項と第三項は、

$$\int_{S_2}\omega+\int_{S_1}\omega=b(\mathbf{x},1)\Delta V-b(\mathbf{x},0)\Delta V \qquad (3\text{-}47)$$

となる（これは、Ω^n 空間の微少な円盤の体積分である。）

次に、(3-43)の第一項の積分、円筒の側面についての積分を考えよう。明らかに(3-45)の第一項は積分に寄与しない。第二項は、

$$(-1)^i\,dt\wedge dx_1\cdots\hat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_n$$

が側面の面積の外微分形式であることから（dt の項があることに注意)、

$$\int_{cylinder}\omega=-\int_{\partial S}\sum\int_0^1 c_i(\mathbf{x},t)\,dt\,d\mathbf{l}$$

となる。ここで、∂S は円盤の境界で、$d\mathbf{l}$ はその要素である。ここで、簡単のために、

$$C(\mathbf{x})=\sum\int_0^1 c_i(\mathbf{x},t)\,dt$$

とおくと、

$$\int_{cylinder}\omega=-\int_{\partial S}C(\mathbf{x})\,d\mathbf{l}$$
$$=-\int_{\partial S}C(\mathbf{x})(-1)^{i-1}dx_1\cdots\hat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_n$$

となる。これにストークス定理を適用すると、

$$\int_{cylinder}\omega=-\int_{\partial S}\frac{\partial C(\mathbf{x})}{\partial x_i}dx_1\cdots dx_i\cdots\wedge dx_n$$
$$=-\frac{\partial C(\mathbf{x})}{\partial x_i}\Delta V \qquad (3\text{-}48)$$

(3-46)、(3-47)及び(3-48)式を使うと、(3-43)式は、

$$\int_0^1 a(\mathbf{x},t)\,dt+\sum\int_0^1\frac{\partial c_i(\mathbf{x},t)}{\partial x_i}dt$$
$$=b(\mathbf{x},1)-b(\mathbf{x},0) \qquad (3\text{-}49)$$

と書ける。ところが、(3-45)式の外微分をとって、(3-44)と比較すると、

$$a(\mathbf{x},t)=\frac{\partial b(\mathbf{x},t)}{\partial t}-\sum\frac{\partial c_i(\mathbf{x},t)}{\partial x_i} \qquad (3\text{-}50)$$

となり、これから、直ちに、(3-49)が得られる。つまり、長い「無駄な（？）」計算をして、間違いがなかっただけと言うこともできる。

さて、(3-49)式の両辺に、Ω^n 空間の体積要素、$dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n$ をかけると、

$$\int_0^1 a(\mathbf{x},t)\,dt\,dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n$$
$$+\sum\int_0^1\frac{\partial c_i(\mathbf{x},t)}{\partial x_i}dt\,dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n$$
$$=(b(\mathbf{x},1)-b(\mathbf{x},0))dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n \qquad (3\text{-}51)$$

となる。勿論、これは、(3-49)式を導いたときに、省略した ΔV を残したままにしておいて、

$$\Delta V=dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots$$
$$\wedge dx_n(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n)du_1du_2\cdots du_n \qquad (3\text{-}52)$$

として、導くこともできる。

ここで、次のような演算子、$\tilde{K}$ を定義しよう。(3-44)式の右辺のような形の dt を含む場合、

$$\tilde{K}\left[a(\mathbf{x},t)\,dt\wedge dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n\right]$$
$$=\int_0^1 a(\mathbf{x},t)\,dt\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n \qquad (3\text{-}53)$$

とし、dt を含まない(3-45)式の右辺の第一項のような場合には、

$$\tilde{K}\left[b(\mathbf{x},t)dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n\right]=0 \qquad (3\text{-}54)$$

と定義すると、(3-51)式は、

$$\tilde{K}(d\omega)+d\,\tilde{K}(\omega)=\omega\Big|_{\substack{t=1\\dt=0}}-\omega\Big|_{\substack{t=0\\dt=0}} \qquad (3\text{-}55)$$

となることがわかる（問：この右辺と(3-51)の右辺が一致することを確かめよ。）なお、円筒の上底、下底の円盤上の積分には、(3-47)式からわかるように dt を含む項は寄与しないので、最初から、$dt=0$ として、考えてよいことになる。

さて、忘れていた縮小変形を思い出そう。図 31 の円筒領域から、図 30 の対応した領域への(3-42)の写像、F を考えよう。そして、図 30 の領域上の ω を円筒領域に pull-back すると、(3-55)式から、

$$\tilde{K}(dF^*\omega)+d\,\tilde{K}(F^*\omega)=F^*\omega\Big|_{\substack{t=1\\dt=0}}-F^*\omega\Big|_{\substack{t=0\\dt=0}} \qquad (3\text{-}56)$$

となる。

$$F^*\omega\Big|_{\substack{t=1\\dt=0}}=\omega,\quad F^*\omega\Big|_{\substack{t=0\\dt=0}}=0$$

となる。ここで、第一式の右辺の ω を、$\mathbf{R}\times\Omega^n$ 空間内の部分空間、Ω^n 空間での ω と同一視することにしよう。さらに、

$$K=\tilde{K}F^*$$

と定義し（この K は homotopy operator と呼ばれる）、$dF^* = F^* d$ であることを使うと、(3-56)式は、

$$\boxed{K(d\omega) + d(K\omega) = \omega} \tag{3-57}$$

と書ける。これから、$d\omega = 0$ であるとすると、

$$\omega = d(K\omega) \tag{3-58}$$

となり、Poincare の補題が導かれたことになる。

以下でこの Poincare の補題に関する例を二つ、示しておく。

例１．　$rot\,\mathbf{A} = 0$ の場合

$\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ とし、

$$\alpha(\mathbf{x}) = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3 \tag{3-59}$$

なる微分形式を考えると、$rot\,\mathbf{A} = 0$ は、$d\alpha = 0$ と同じ意味になる。よって、

$$\begin{aligned}\alpha(t\,\mathbf{x}) &= A_1(t\,\mathbf{x})\,d(t\,x_1) + A_2(t\,\mathbf{x})\,d(t\,x_2) + A_3(t\,\mathbf{x})\,d(t\,x_3) \\ &= A_1(t\,\mathbf{x})\,x_1 dt + A_2(t\,\mathbf{x})\,x_2 dt + A_3(t\,\mathbf{x})\,x_3 dt \\ &\quad + (dt\text{を含まない項})\end{aligned} \tag{3-60}$$

となる。よって、

$$\boxed{\begin{aligned}K\alpha &= \int_0^1 A_1(t\,\mathbf{x})\,dt\;x_1 \\ &\quad + \int_0^1 A_2(t\,\mathbf{x})\,dt\;x_2 + \int_0^1 A_3(t\,\mathbf{x})\,dt\;x_3\end{aligned}} \tag{3-61}$$

となる。ベクトル表示書くと、

$$\mathbf{A} = grad\,\phi \qquad (\phi = K\alpha) \tag{3-62}$$

となる。なお、(3-61)式は、当然、$\omega = \alpha$ とした、(3-58)式を満たすはずである。その証明には、式の表示が若干、長くなるので、証明の要点だけをここに記すことにする。(3-61)の第一項のみに着目して、これを外微分すると、次の二つの項が出てくる。一つは、

$$\begin{aligned}&\int_0^1 A_1(t\,\mathbf{x})\,dt\;dx_1 \\ &= tA_1(t\,\mathbf{x})\Big|_{t=0}^{t=1} dx_1 - \int_0^1 t\,\frac{dA_1(t\,\mathbf{x})}{dt}\,dt\;dx_1\end{aligned} \tag{3-63}$$

もう一つは、

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{\partial A_1(t\,\mathbf{x})}{\partial x_1}\,dt\;x_1 dx_1 + \int_0^1 \frac{\partial A_1(t\,\mathbf{x})}{\partial x_2}\,dt\;x_1 dx_2 \\ &\quad + \int_0^1 \frac{\partial A_1(t\,\mathbf{x})}{\partial x_3}\,dt\;x_1 dx_3\end{aligned} \tag{3-64}$$

である。(3-63)式の第一項から、

$$A_1(\mathbf{x})\,dx_1$$

がでてくるので、その他の項は足し合わせるとゼロになることを示せばよい。ここで、$X_1 = t\,x_1$（他も同様）とおくと、

$$\frac{dA_1(t\,\mathbf{x})}{dt} = \frac{\partial A_1}{\partial X_1}x_1 + \frac{\partial A_1}{\partial X_2}x_2 + \frac{\partial A_1}{\partial X_3}x_3$$

となり、(3-64)式の中の偏微分は、たとえば、

$$\frac{\partial A_1(t\,\mathbf{x})}{\partial x_1} = \frac{\partial A_1}{\partial X_1}t$$

となる。これらを（途中の計算を省略して）まとめると、(3-63)のその他の項と(3-64)は、ベクトル表示を用いて、

$$\int_0^1 rot_X\,\mathbf{A}(\mathbf{X})\cdot(d\mathbf{r}\times\mathbf{r})\,t\,dt$$

となることがわかる（問：これを示せ。）ここで、rot_X は、$X_1\ (= t\,x_1)$ 等に関するものである。よって、$rot\,\mathbf{A} = 0$ を使うと、(3-59)が導かれることになる。

例２．　$div\mathbf{B} = 0$ の場合

$\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$ として、

$$\beta(\mathbf{x}) = B_1 dx_2 dx_3 + B_2 dx_3 dx_1 + B_3 dx_1 dx_2 \tag{3-65}$$

とおくと、$div\mathbf{B} = 0$ は、$d\beta = 0$ と同じ意味になる。すると、

$$\begin{aligned}\beta(t\mathbf{x}) &= B_1(t\mathbf{x})\,d(tx_2)\,d(tx_3) \\ &\quad + B_2(t\mathbf{x})\,d(tx_3)\,d(tx_1) + B_3(t\mathbf{x})\,d(tx_1)\,d(tx_2) \\ &= B_1(t\mathbf{x})(tx_2 dt dx_3 - tx_3 dt dx_2) \\ &\quad + B_2(t\mathbf{x})(tx_3 dt dx_1 - tx_1 dt dx_3) \\ &\quad + B_3(t\mathbf{x})(tx_1 dt dx_2 - tx_2 dt dx_1) \\ &\quad + (dt\text{を含まない項})\end{aligned} \tag{3-66}$$

となり、これから、

$$\boxed{\begin{aligned}K\beta &= \int_0^1 B_1(t\mathbf{x})\,tdt\,(x_2 dx_3 - x_3 dx_2) \\ &\quad + \int_0^1 B_2(t\mathbf{x})\,tdt\,(x_3 dx_1 - x_1 dx_3) \\ &\quad + \int_0^1 B_3(t\mathbf{x})\,tdt\,(x_1 dx_2 - x_2 dx_1)\end{aligned}} \tag{3-67}$$

と求まる。ベクトル表示すると、

$$\mathbf{B} = rot\,\mathbf{A}$$

となり、ベクトル、$\mathbf{A}$ の第一座標は、

$$\int_0^1 B_2(t\mathbf{x})\,tdt\;x_3 - \int_0^1 B_3(t\mathbf{x})\,tdt\;x_2$$

のように与えられる。この場合にも、当然、(3-58)に相当する、

$$\beta = d\left(K\beta\right)$$

を満たすはずである。この証明についてもその要点のみを以下に記すことにする。

(3-67)式の第一項を外微分すると、次の二つの項が出てくる。一つは、

$$\int_0^1 B_1\left(t\mathbf{x}\right)tdt\cdot 2dx_2dx_3 = \\ t^2B_1\left(t\mathbf{x}\right)\Big|_{t=0}^{t=1} dx_2dx_3 - \int_0^1 t^2\frac{dB_1\left(t\mathbf{x}\right)}{dt}dt\ dx_2dx_3 \tag{3-68}$$

である。もう一つは、

$$\int_0^1 t^2\left(\frac{\partial B_1}{\partial X_1}dx_1 + \frac{\partial B_1}{\partial X_2}dx_2 + \frac{\partial B_1}{\partial X_3}dx_3\right)dt \\ \cdot\left(x_2dx_3 - x_3dx_2\right) \tag{3-69}$$

である。(3-68)式の第一項から、

$$B_1\left(\mathbf{x}\right)dx_2dx_3$$

が出てくる。また、第二項は、

$$-\int_0^1 t^2\frac{dB_1\left(t\mathbf{x}\right)}{dt}dt\ dx_2dx_3 = \\ -\int_0^1 t^2\left(\frac{\partial B_1}{\partial X_1}x_1 + \frac{\partial B_1}{\partial X_2}x_2 + \frac{\partial B_1}{\partial X_3}x_3\right)dt\ dx_2dx_3$$

となる。これと(3-69)の第一項を合わせると、

$$-\int_0^1 t^2\frac{\partial B_1}{\partial X_1}dt\left(x_1dx_2dx_3 + x_2dx_3dx_1 + x_3dx_1dx_2\right)$$

となることがわかる（問：これを示せ。）以上をまとめると、

$$d\left(K\beta\right) = B_1dx_2dx_3 + B_2dx_3dx_1 + B_3dx_1dx_2 \\ -\int_0^1 t^2 div_X\mathbf{B}\left(\mathbf{X}\right)dt\ \mathbf{r}\bullet{*}d\mathbf{r}$$

となる。ここで、$*$ は Hodge の星印作用素で、

$$*d\mathbf{r} = *\left(dx_1\mathbf{e}_1 + dx_2\mathbf{e}_2 + dx_3\mathbf{e}_3\right) \\ = dx_2dx_3\mathbf{e}_1 + dx_3dx_1\mathbf{e}_2 + dx_1dx_2\mathbf{e}_3$$

と与えられる。よって、$div\mathbf{B} = 0$ であれば、

$$d\left(K\beta\right) = \beta$$

となることがわかるのである。

以上、微分形式への超イントロを終わるが、体力、能力及び時間的制約の問題があり、内容や文章に誤りがあると思われるが、その点、ご容赦をお願いしたい。

参 考 文 献

本講義に関連する参考文献を以下に挙げる。まず、講師自身が一応、きちんと読んだ参考書を二つ挙げておく。

ベクトル解析

[1] 安達忠次、「ベクトルとテンソル」、培風館、新数学シリーズ(1957)

これは相当、古い教科書であるので、参考書として挙げるのは適当ではないかもしれない。また、ベクトル解析に関しては、多くの優れた教科書があるようであるので、適当な参考書を一冊程度選んで、手を動かして計算しながら精読すれば、勉強としては十分であろう。実際には、物理、工学等の教科書の中で勉強した方がより身につくであろう。

微分形式

[2] 松本幸夫、「多様体の基礎」、東京大学出版会、基礎数学 5 (1988)

これは微分形式の教科書ではないが、これも含め多様体全般について「やさしく」解説してあり、お薦めである。位相については初歩から説明してあるが、ある程度の予備知識があった方がよいかもしれない。

次に、ツンドク程度しかしていないもの、通読していないもの、余生に読むかもしれないもの（実情は読んだ内容もほとんど忘れているものもあるが・・）を次に挙げておく。

ベクトル解析

[3] J. E. Marsden and A. J. Tromba, “Vector Calculus”, Fifth ed., W. H. Freeman and Company, New York.

これは、分厚いが内容はやさしいように思う。

[4] 大田浩一、「ナブラのための協奏曲」、共立出版（2015）

買っただけに近いが、そのうち読みたいと思っているものである。

微分形式

参考書として本来なら挙げるべきものとして、

[5] H. フランダース（岩堀長慶 訳）、「微分形式の理論」、岩波書店（1967）

H. Flanders, “Differential Forms”, Dover edition, Dover Publications, Inc, New York (1989).

があるが、その他、

[6] D. G. B. Edelen, “Applied Exterior Calculus”, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley&Sons (1985).

[7] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, “Gravitation”, W. H. Freeman and Company, San Francisco.の微分形式の箇所

などを挙げておくが、もっと適当な教科書があるかもしれない。

Appendix A

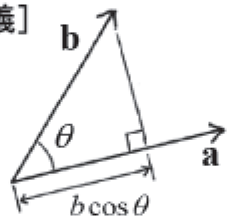
<u>ベクトル解析の要点（パワポ３枚程度）</u>

ベクトル：　$\mathbf{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\mathbf{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$

内積（inner product）

$$\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta \qquad\qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}$$

［幾何学的定義］　　　　　　［代数的定義］

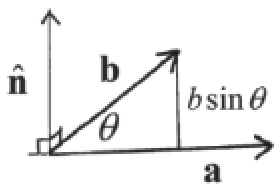


外積（cross product）

$$\boxed{\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\hat{\mathbf{n}}|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta}$$

$\hat{\mathbf{n}}$: $\mathbf{a}$と$\mathbf{b}$に垂直な単位ベクトル

［幾何学的定義］



$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\mathbf{e}_1+(a_3b_1-a_1b_3)\mathbf{e}_2+(a_1b_2-a_2b_1)\mathbf{e}_3=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & a_1 & b_1\\ \mathbf{e}_2 & a_2 & b_2\\ \mathbf{e}_3 & a_3 & b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

［代数的定義］

※　ベクトル積（内積、外積）の重要な性質：　<u>双線形性（bilinearity）</u>

二つの基本的な関係式

$$\boxed{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}}$$

$$\boxed{\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}}$$

ベクトルの微分

微分の重要な性質:ライプニッツ則（Leibnitz's rule）

$$d(f \bullet g) = df \bullet g + f \bullet dg \qquad \frac{\partial}{\partial x}(f \bullet g) = (\frac{\partial}{\partial x} f) \bullet g + f \bullet \frac{\partial}{\partial x} g$$

（f, gはスカラー関数） $\partial = \dfrac{\partial}{\partial x}$ と以下、簡略

（※: 重要な「当たり前の」性質: f、g に関する双線形性）

$d = d_f + d_g$ 、 $\partial = \partial_f + \partial_g$ と「記号的に」微分をわけると

$$(\partial_f + \partial_g)(f \bullet g) = \partial_f (f \bullet g) + \partial_g (f \bullet g) = \left(\partial_f f\right) \bullet g + f \bullet \left(\partial_g g\right)$$

ベクトル積（内積、外積）の双線形性から、

$$\boxed{\partial(\mathbf{f} * \mathbf{g}) = (\partial \mathbf{f}) * \mathbf{g} + \mathbf{f} * \partial \mathbf{g} \qquad \text{（*：内積または外積）}}$$

（ $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$はベクトル関数）

$\boxed{\boldsymbol{\mu} \partial * \mathbf{f} = \boldsymbol{\mu} * \partial \mathbf{f}}$ （※ 時々、有用なnotation） $\boxed{f \overleftarrow{\partial} = \partial f}$

ベクトルの積分

$$\int_V dV\, \nabla = \int_S d\mathbf{S} \quad \left(= \int_S \mathbf{n} dS\right) \qquad \text{(Gauss型)}$$

$$\int_S d\mathbf{S} \times \nabla = \int_\ell d\mathbf{r} \quad \left(= \int_\ell \mathbf{t} d\ell\right) \qquad \text{(Stokes型)}$$

$$\int_\ell d\mathbf{r} \cdot \nabla = \Big| \qquad \text{(FTC型)}$$

FTC: Fundamental Theorem of Calculus *on the curve*

FTC型の右辺の｜は、次の積分の｜と同じ意味: $\int_a^b \frac{df}{dx} dx = f(x)\Big|_a^b$

$$\int_V \nabla \bullet \mathbf{A}\, dV = \int_S \mathbf{A} \bullet d\mathrm{S} = \int_S (\mathbf{A} \bullet \mathbf{n}) dS \qquad (\nabla \bullet \mathbf{A} = \mathrm{div}\, \mathbf{A}) \qquad \text{（Gaussの公式）}$$

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \bullet d\mathbf{S} = \int_\ell \mathbf{A} \bullet d\mathbf{l} \quad \text{or} \quad \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \bullet \mathbf{n}\, d\mathrm{S} = \int_\ell (\mathbf{A} \bullet \mathbf{t}) d\ell$$

$(\nabla \times \mathbf{A} = \mathrm{rot}\, \mathbf{A})$ （Stokesの公式）

$$\int_a^b \nabla f \bullet d\mathbf{r} = f(\mathbf{r})\Big|_a^b = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) \qquad \text{（FTC）}$$

座標変換(直交変換)

ベクトルの「行列表示」

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

直交変換

(orthogonal transformation)

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)P$$

(旧基底)　　(新基底)

$$PP^T = I \qquad (I : \text{unit matrix})$$

※　<u>ベクトル自体は座標変換で不変ある(定義)</u>

$$\boxed{\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}}$$

$$\mathbf{a}' \times \mathbf{b}' = \begin{vmatrix} \mathbf{e}'_1 & a'_1 & b'_1 \\ \mathbf{e}'_2 & a'_2 & b'_2 \\ \mathbf{e}'_3 & a'_3 & b'_3 \end{vmatrix} = \left| P\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \quad P\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad P\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right| = \det P \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \mathbf{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \mathbf{e}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \det P(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

ベクトルの座標変換

$$\boxed{\mathbf{a}' = \mathbf{a}}$$

外積または擬ベクトルの座標変換

$$\boxed{\mathbf{c}' = (\det P)\mathbf{c}}$$

外積または擬ベクトルの座標成分の変換

$$(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)\begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \end{pmatrix} = \det P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \det P(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)P\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \end{pmatrix} = (\det P)P\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}}$$

ベクトルの変換（回転）

※　ベクトルの回転：　基底は変わらない

ベクトルの「成分ベクトル」の変換：　R

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{\text{もし、基底も回転したとすると、}} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

$$\boxed{PR = I \qquad R = P^{-1} = P^T}$$

付録：　直交曲線座標（orthogonal curvilinear coordinates）

※　パワポ3枚程度のカンバンの外

線、面積及び体積要素

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= h_1 dq_1 \mathbf{e}_1 + h_2 dq_2 \mathbf{e}_2 + h_3 dq_3 \mathbf{e}_3 \\ d\mathbf{S} &= h_2 h_3\, dq_2 dq_3\, \mathbf{e}_1 + h_3 h_1\, dq_3 dq_1\, \mathbf{e}_2 + h_1 h_2\, dq_1 dq_2\, \mathbf{e}_3 \\ dV &= h_1 h_2 h_3\, dq_1 dq_2 dq_3 \end{aligned}$$

grad, div, rot, Laplacian

$$\nabla f = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}\mathbf{e}_3$$

$$\nabla \bullet \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3}(h_1 h_2 A_3)\right]$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\mathbf{e}_1 & h_2\mathbf{e}_2 & h_3\mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial \phi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial \phi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial \phi}{\partial q_3}\right)\right]$$

Appendix B

なぜ内積と外積しかないのか？

1. 前提条件

（通常の）ベクトル解析の二項関係式には、なぜ内積と外積しかないのか？なぜこの形しかないのか？また、外積はなぜこのような「変な」形をしているのか？という素朴な疑問について、ここで考えてみよう。

（コメント：内積とか外積は「定義」されているものであるので疑問をもつものではない、疑問を持つこと自体が馬鹿げている、時間の無駄であると思う向きの方は以下を読む必要はない）

（注：内積は、一般の n 次元空間でも定義できるが、以下では、空間は３次元であるとして話をする。）

これを考える上で、最初に、次のような前提条件をおくことにする。

［前提 1］　ベクトルの二項関係式は、双線形性（bilinearity）をもつ。

［前提 2］　空間は等方的である。つまり特別な方向は存在しない。

（注：位置ベクトルのように空間の異なる２点が関係すると、空間の一様性が前提条件として必要になるであろうが、ここでは、ベクトルは空間の一点で定義されている量であると考えることにする。大げさに言えば、その点での接空間（tangent space）が等方的であると考えるのである）

［前提 3］（通常の）ベクトル解析に出てくるスカラーとベクトル以外の量は考えない。つまり、テンソルや dyad のようなものは考えない。

このような前提をおくと、スカラー量は内積しかなく、ベクトル量は外積しかないとうことを導くことができる。以下では、このことについて、

2. 初等的（幾何学的）説明

3. 代数的説明

の順で説明しよう。

2. 初等的（幾何学的）説明

2.1.（空間の等方性を反映した）スカラー量

ベクトル $\mathbf{a}$ 、$\mathbf{b}$ から作られるスカラー量を、

$$\mathrm{f}(\mathbf{a},\mathbf{b}) \qquad \text{(B-1)}$$

とすると、その双線形性から、

$$\mathrm{f}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \sum_{i,j} a_i b_j \,\mathrm{f}(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j) \qquad \text{(B-2)}$$

となるが、ここで、

$$\mathrm{f}(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i * \mathbf{e}_j$$

とおくことにする。すると、たとえば、$\mathbf{e}_1 * \mathbf{e}_2 = c$ （あるスカラー）であったとすると、空間の等方性から、座標軸１から見て座標軸２も座標軸３も特別な方向ではないので、$\mathbf{e}_1 * \mathbf{e}_3 = c$ でもあることがわかる。さらに、

$\mathbf{e}_1 * (\cos\theta\,\mathbf{e}_2 + \sin\theta\,\mathbf{e}_3) = c$ （θ は任意の角度）

であることもわかる。

よって、

$$c(\cos\theta + \sin\theta) = c$$

でなければならない。これから、$c = 0$ が導かれる（問：これを示せ。）

同様の考察から、

$$\mathbf{e}_i * \mathbf{e}_j = 0 \qquad (i \neq j)$$

となる。また、空間の等方性から、

$$\mathbf{e}_1 * \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 * \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 * \mathbf{e}_3$$

であることもわかる。以上より、二つのベクトル $\mathbf{a}$ 、$\mathbf{b}$ から作られる（空間の等方性を反映した）(B-1)式のスカラー量、$\mathrm{f}(\mathbf{a},\mathbf{b})$ は、通常の内積の記号・を用いて、

$$\boxed{\mathrm{f}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \lambda\,\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}} \qquad (\lambda:\text{ある定数})$$

と書けることがわかる。つまり、スカラー量となるべきものは、（定数を無視すると）通常の内積以外はないことがわかったことになる。

（問（この問いは解かなくてもよい）：

$\mathbf{f}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (\mathbf{a}\bullet\mathbf{c})(\mathbf{b}\bullet\mathbf{d})$ としてみると、これは双線形性を満たすが、これに空間の等方性を課すと、$\mathbf{f}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \mathbf{0}$ となることを示せ。＜ヒント：上と同じような記法を用いるとよい。＞　なお、空間の等方性から特別な方向を指す $\mathbf{c}$ や $\mathbf{d}$ が表式に

入っては「まずい」ということから、**c** または **d** は特別な方向を持たない（特別な）ベクトル、**0** でなければならないと言って、証明了としてしまうこもできるが・・）

［付記］

より幾何学的な考察を若干付け加えておく（本質的には全く変わらないが・・）。まず、ベクトル **a** 、**b** が直交する場合を考えると、上記の議論と同様に空間の等方性から、

$$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}\;\Rightarrow\;\mathbf{a}*\mathbf{b}=\mathbf{0}$$

となる（注：たとえば、**a** に垂直な平面内で二つの直交するベクトルを考える。）

次に、必ずしも直交していないベクトル **a** 、**b** を考えると、双線形性と空間等方性から（係数を無視すれば）

$$\mathbf{a}*\mathbf{b}=\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}$$

となることがわかる。

略証（慣用語の説明なし）:

$$\mathbf{a}*\mathbf{b}=\mathbf{a}*\left(\mathbf{b}_{\parallel}+\mathbf{b}_{\perp}\right)=\mathbf{a}*\mathbf{b}_{\parallel}=ab\cos\theta\,\hat{\mathbf{a}}*\hat{\mathbf{a}}$$

空間等方性から、$\hat{\mathbf{a}}*\hat{\mathbf{a}}=\text{const.}$ となる。

2.2. （空間の等方性を反映した）ベクトル

ベクトル **a** 、**b** から作られるベクトルを

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{a},\mathbf{b}\right)=\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\qquad\text{(B-3)}$$

とおく。二番目の表式は、内積の場合と同様に、単に記述の簡略化のためである。

まず、$\mathbf{b}=\mathbf{a}$ の場合、つまりベクトル、$\mathbf{a}\wedge\mathbf{a}$ を考え、これを **a** と平行な成分と垂直な成分に分解する（図 B-1）。

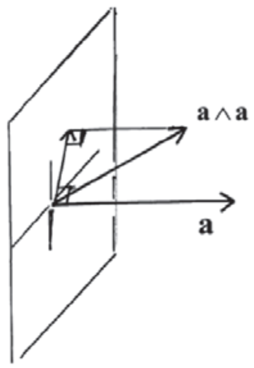


図 B-1. **a** と $\mathbf{a}\wedge\mathbf{a}$

もし垂直成分の大きさがゼロでないとすると、それは垂直平面内の特定の方向を指し示すことになる。しかし、空間の等方性を考慮すると、**a** のみから、その特定の方向を決めることができない。よって、この垂直成分はゼロでなければならないことが結論される。これから、

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{a}=\mathrm{f}\left(\mathbf{a}\right)\mathbf{a}$$

と書けることがわかる。ここで、$\mathrm{f}\left(\mathbf{a}\right)$は、スカラー量である。また、$\mathbf{a}\wedge\mathbf{a}$ は **a** について双線形性であることから、$\mathrm{f}\left(\mathbf{a}\right)$は、**a** に関して線形であることがわかる。さて、この$\mathrm{f}\left(\mathbf{a}\right)$はどんな形をしているのだろうか。すぐ、（素朴に）思いつくものは、a の絶対値であろう。

$$\mathrm{f}\left(\mathbf{a}\right)=\lambda\left|\mathbf{a}\right|$$

しかし、この思いつきはすぐに破たんする。そもそも絶対値をとる演算は線形ではないからである。**a** の代わりに **−a** を代入すると、

$\left(-\mathbf{a}\right)\wedge\left(-\mathbf{a}\right)=\lambda\left|-\mathbf{a}\right|\left(-\mathbf{a}\right)$ となる。これから、

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{a}=-\lambda\left|\mathbf{a}\right|\mathbf{a}$$

となり、矛盾することがわかる。

実際に、この f(a)の形を見るのには、その線形性を使うのがよい。

$$\mathrm{f}\left(\mathbf{a}\right)=a_1\,\mathrm{f}\left(\mathbf{e}_1\right)+a_2\,\mathrm{f}\left(\mathbf{e}_2\right)+a_3\,\mathrm{f}\left(\mathbf{e}_3\right)$$

となる。ここで、$\mathbf{c}=\left(\mathrm{f}\left(\mathbf{e}_1\right),\mathrm{f}\left(\mathbf{e}_2\right),\mathrm{f}\left(\mathbf{e}_3\right)\right)$とおくと、

$$\mathrm{f}\left(\mathbf{a}\right)=\mathbf{c}\bullet\mathbf{a}$$

とベクトルの内積の形に書けることがわかる。ここで、再度、空間の等方性を使うと、つまり、空間には a 以外に特別な方向はないということを使うと、$\mathbf{c}=\mathbf{0}$ となる。以上より、

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{a}=\mathbf{0}$$

でなければならないことがわかる。

これから、容易に、

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}=-\mathbf{b}\wedge\mathbf{a}$$

となることがわかる。

（問：これを示せ。ヒント：$\left(\mathbf{a}+\mathbf{b}\right)\wedge\left(\mathbf{a}+\mathbf{b}\right)=\mathbf{0}$ と双線形性を使う）

以上のことから、成分で書くと、

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}=\left(a_1b_2-a_2b_1\right)\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2+\left(a_2b_3-a_3b_2\right)\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3+\left(a_3b_1-a_1b_3\right)\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_1$$

となる。ここで、ベクトル、$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ の成分で $\mathbf{e}_1$ と $\mathbf{e}_2$ のなす平面に垂直な成分、つまり $\mathbf{e}_3$ 方向の成分を λ とすると、

$$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \lambda \mathbf{e}_3 + \left(\mathbf{e}_1\text{と}\mathbf{e}_2\text{のなす平面内のベクトル}\right)$$

と書ける。ここで空間の等方性を考えると、

$$\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = \lambda \mathbf{e}_1 + \left(\mathbf{e}_2\text{と}\mathbf{e}_3\text{のなす平面内のベクトル}\right)$$

$$\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 = \lambda \mathbf{e}_2 + \left(\mathbf{e}_3\text{と}\mathbf{e}_1\text{のなす平面内のベクトル}\right)$$

となることがわかる。

（問：この順番で合っていることを、空間をイメージして確かめよ）

次に進むのに、基底ベクトルのままで議論してもよいが、以下のようにした方が簡単であろう。

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ を $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ がなす平面内の成分と、それに垂直な成分に分解すると、

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathrm{f}(\mathbf{b})\mathbf{a} + \mathrm{g}(\mathbf{a})\mathbf{b} + \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

となる。ここで、f 及び g はスカラー関数であり、$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は通常の外積を表わす。このように表されることは、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ がなす平面内に $\mathbf{e}_1$ と $\mathbf{e}_2$ をとって考えれば、容易にわかる。

$$\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = \mathrm{f}(\mathbf{a})\mathbf{b} + \mathrm{g}(\mathbf{b})\mathbf{a} + \lambda(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = -\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$$

となるので、$\mathrm{g}(\mathbf{a}) = -\mathrm{f}(\mathbf{a})$ であることがわかる（注：暗黙に $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は独立であると仮定している。独立でない場合はそもそも $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{0}$ であるので議論は不要。）よって、スカラー関数、f に関して以前と同様の議論をすると、

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} + \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

となる。ところが、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ 以外には空間に特別な方向がないことから、（任意の $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ に対して成り立つためには）$\mathbf{c} = \mathbf{0}$ でなければならないことがわかる。ちなみに、この式は

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

とも表わすことができる。この形にすると、$\mathbf{c} = \mathbf{0}$ となることは見やすい。

以上より、双線形性と空間の等方性を仮定すると、二つのベクトルから作られるベクトルは、外積の形しかないことが結論される。つまり、

$$\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})} \qquad \text{(B-4)}$$

（コメント：ベクトル積の反対称性について、ある種の心理的抵抗があるかもしれないが、これは、$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$ という性質（と双線形性）からの必然的な結果であり、ベクトル積の反対称性は、使うときに便利な性質であると思うと抵抗感が減るであろう。）

3. 「代数的」説明

3.1. スカラー量

(B-2)式は、

$$\mathrm{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i,j} a_i b_j \, \mathrm{f}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$$

であるが、ここで、

$$\mathrm{f}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = g_{ij}$$

とおき、行列、$\mathrm{G} = (g_{ij})$ を

$$\mathrm{G} = \mathrm{G}_S + \mathrm{G}_A$$

と対称行列と反対称行列に分解する。つまり、

$$\mathrm{G}_S = \left(\mathrm{G} + \mathrm{G}^T\right)/2 \ , \qquad \mathrm{G}_A = \left(\mathrm{G} - \mathrm{G}^T\right)/2$$

とする。G_S は対称行列であるので、適当に座標変換（直交変換）をすれば、対角化できる（なお、ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ もこの座標変換に合わせて変換される）。

$$\mathrm{G}_S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

しかし、空間を等方的であるとしたことから、すべての対角成分は、等しいことがわかる。よって、

$$\mathrm{G}_S = \lambda \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

となる。この行列は単位行列（の定数倍）であることがわかったので、元の座標に戻しても単位行列のままである。つまり、適当な座標変換は不要であって、最初から対角化されていたことがわかる。よって、ベクトル $\mathbf{a}$ 、$\mathbf{b}$ も変換前と変わらないとしてもよい。また、このことは、変換行列を P とすると、

$$
\begin{aligned}
a_i b_j \mathrm{G}_{S\,ij} &= \mathbf{a}^T \mathrm{G}_S \mathbf{b} \left(= \mathbf{a} \bullet \mathrm{G}_S \mathbf{b}\right) \\
&= \mathbf{a}^T P P^T \mathrm{G}_S P P^T \mathbf{b} = \mathbf{a}^T P \lambda I P^T \mathbf{b} \\
&= \lambda \mathbf{a}^T \mathbf{b} = \lambda \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}
\end{aligned}
$$

となり、式の変形からもわかる。

反対称行列、G_A は、

$$
\mathrm{G}_A = \begin{pmatrix} 0 & c_3 & -c_2 \\ -c_3 & 0 & c_1 \\ c_2 & -c_1 & 0 \end{pmatrix}
$$

と表わすことができるので、

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}^T \mathrm{G}_A \mathbf{b} &= \mathbf{a} \bullet \mathrm{G}_A \mathbf{b} \\
&= \mathbf{a} \bullet \left(\mathbf{b} \times \mathbf{c}\right) = \mathbf{c} \bullet \left(\mathbf{a} \times \mathbf{b}\right)
\end{aligned}
$$

となる（なお、外積は数ベクトルとしての外積である。）以上の議論をまとめると、

$$
\mathrm{f}\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}\right) = \lambda \left(\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}\right) + \mathbf{c} \times \left(\mathbf{a} \times \mathbf{b}\right)
$$

となるが、上式の右辺の第二項は空間の等方性を考えるとゼロとなることがわかる（それは、空間が等方的であるとすると、特別な方向をもつベクトル、$\mathbf{c}$ は存在しないからである。）

したがって、空間の等方性を仮定するすると、本質的なスカラー量は、内積、$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$ しかないことがわかる。

$$
\boxed{\mathrm{f}\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}\right) = \lambda \left(\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}\right)}
$$

3.2. ベクトル量

ベクトル量, $\mathbf{F}\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}\right)$ は、双線形性を使うと、

$$
\mathbf{F}\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}\right) = \sum a_i b_j \mathbf{F}\left(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\right)
$$

となるが、ベクトルの成分で書くと、右辺は、

$$
\begin{aligned}
\sum a_i b_j \mathbf{F}\left(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\right) &= \mathbf{e}_1 \sum a_i b_j G_1 \left(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\right) \\
&+ \mathbf{e}_2 \sum a_i b_j G_2 \left(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\right) + \mathbf{e}_3 \sum a_i b_j G_3 \left(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\right)
\end{aligned}
$$

となる。初めに、今までの議論と同じように、G_1 を対称行列、$G_{1\ S}$ と反対称行列、$G_{1\ A}$ に分解し、$G_{1\ S}$ を対角化すると、

$$
\mathrm{G}_S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}
$$

となる。ここで以下のように考えることにしよう（注： もうすこしエレガントな議論ができるかもしれないが・・・。）よく知られているように、対称行列の対角化と二次形式の主軸変換とは同じことであることに注意すると、空間の等方性から、一つの主軸は、もしそれが特別な方向に向いているとすると、$\mathbf{e}_1$ と同じ方向であるということがわかる（$\mathbf{e}_1$ は $G_{1\ S}$ に関しては特別な方向であるから）。つまり、最初から主軸の方向が基底ベクトルの方向であったことがわかる。また他の二つの主軸は、等方的であることから、少なくとも $\lambda_2 = \lambda_3$ であることもわかる。ここで、

$$
\mu_1 = \lambda_2, \quad \Delta\mu_1 = \lambda_1 - \mu_1
$$

とおき、$\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ に関する項についても同様のことを行うと、$\mathbf{F}\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}\right)$ の対称行列に関わる部分、

$\mathbf{F}_S$ は、

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}_S \left(\mathbf{a}, \mathbf{b}\right) &= \mathbf{e}_1 \Delta\mu_1\, a_1 b_1 + \mathbf{e}_2 \Delta\mu_2\, a_2 b_2 + \mathbf{e}_3 \Delta\mu_3\, a_3 b_3 \\
&+ \left(\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}\right)\left(\mu_1 \mathbf{e}_1 + \mu_2 \mathbf{e}_2 + \mu_3 \mathbf{e}_3\right)
\end{aligned}
$$

と書ける。ただし、$\Delta\mu_2$ 、μ_2 等は、上記の $\mathbf{e}_1$ の場合と同じ意味を持つ量とする。この式は、

$$
\mathbf{F}_S \left(\mathbf{a}, \mathbf{b}\right) = \sum_i \mathbf{e}_i \Delta\mu_i \left(\mathbf{a} \bullet \mathbf{e}_i\right)\left(\mathbf{b} \bullet \mathbf{e}_i\right) + \left(\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}\right)\mathbf{c}
$$

とも書ける。ここで、

$$
\mathbf{c} = \mu_1 \mathbf{e}_1 + \mu_2 \mathbf{e}_2 + \mu_3 \mathbf{e}_3
$$

である。

よって、空間の等方性から（特別な方向をもつベクトル $\mathbf{c}$ は存在し得ないので）$\mathbf{F}_S$ の最後の項は消えることがわかる。それ以外の項についても、基底、$\mathbf{e}_1$ 、$\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ は特別な方向として残っているので、同様に消えることがわかるが、次のように考えるとよりはっきりするであろう。ベクトル $\mathbf{a}$ 、$\mathbf{b}$ として、

$$
\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}
$$

を考えると（$\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ であるので）、

$$
\mathbf{F}_S \left(\mathbf{a}, \mathbf{b}\right) = 0
$$

になることがわかる。

$\mathbf{F}_S$ なる量は、空間の等方性から、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の間の関係のみで決まるはずであるが、$\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ という直

交関係を維持したまま、すこし回転したとすると（または基底ベクトルをすこし回転したとすると）、明らかに、$\mathbf{F}_S\left(\mathbf{a},\mathbf{b}\right)\neq 0$ であることがわかる。$\mathbf{F}_S$ は（等方的な空間内の）ベクトル量であるので、このような操作でゼロになったり、ゼロでなくなったりするのはおかしい。これから、$\mathbf{F}_S$ は恒等的にゼロでなければならないことがわかる（または $\Delta\mu_1$ 等がゼロであることがわかる。）

以上の議論から、$\mathbf{F}\left(\mathbf{a},\mathbf{b}\right)$ に関係する行列、G_1 等は反対称行列であることがわかる。スカラー量の時と同様に、G_A を、

$$\mathrm{G}_A=\begin{pmatrix} 0 & c_3 & -c_2 \\ -c_3 & 0 & c_1 \\ c_2 & -c_1 & 0 \end{pmatrix}$$

のような形で表すと、$\mathbf{e}_1$ に関する項は、

$$\mathbf{a}\bullet\left(\mathbf{b}\times\mathbf{c}^1\right)\mathbf{e}_1=\mathbf{c}^1\bullet\left(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right)\mathbf{e}_1$$

のように書けることがわかる。ここで、

$$\mathbf{c}^1=\begin{pmatrix} c^1{}_1 & c^1{}_2 & c^1{}_3 \end{pmatrix}$$

とする。すると、$\mathbf{F}\left(\mathbf{a},\mathbf{b}\right)$ の数ベクトル（成分ベクトル）は

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{a},\mathbf{b}\right)=\begin{pmatrix} c^1{}_1 & c^1{}_2 & c^1{}_3 \\ c^2{}_1 & c^2{}_2 & c^2{}_3 \\ c^3{}_1 & c^3{}_2 & c^3{}_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

のような形に書ける。ただし、

$$\mathbf{d}=\begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$$

とおいた。

今までの議論と同じように、この行列を対称行列と反対称行列に分解して、対称行列については、空間の等方性を考慮すると、

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{a},\mathbf{b}\right)=\lambda\left(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right)+\left(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right)\times\tilde{\mathbf{c}}$$

のような形になることがわかる。

空間の等方性から右辺の第二項は消えるので、最終的に、

$$\boxed{\mathbf{F}\left(\mathbf{a},\mathbf{b}\right)=\lambda\left(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right)}$$

となることがわかるのである。

Appendix C

四元数と二つの短い挿話

1. はじめに

本講師は、歴史に疎いが、内積と外積は、ベクトル解析の創始者（の一人）とである Gibbs が Hamilton 四元数の積の公式から有用なものとして取り出したものであると言われている（歴史に興味のある方はウェッブ等で調べてみられるとよい）。そこで、まず、この四元数について簡単に紹介しておこう。また、次の節で、息抜きとして二つの挿話を入れておいた。

2. 四元数の簡単な紹介

複素数は、$a+bi$ と表わされ、(ゼロによる割り算以外の）四則計算が自由にできる（つまり体 (field）をなす)。複素数は、実数と虚数の二つの数からなる「二元数」であると考え、この二元数を拡張しようとした時に、四元数が産み出されたのである。拡張した数が（複素数と同じように）四則演算が可能であるようにしようとすると（体 (field）しようとすると)、三元数ではだめで、四元数まで拡張する必要があり、また次のような関係式が成り立つ必要があるということを Hamilton が発見した。しかし、「残念なことに」、二つの四元数の積は交換関係を満たさないのである。
四元数 p を、

$$p = p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}$$

とすると、$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ には、

$$\mathbf{i}\,\mathbf{i} = \mathbf{j}\,\mathbf{j} = \mathbf{k}\,\mathbf{k} = \mathbf{i}\,\mathbf{j}\,\mathbf{k} = -1$$

という関係になることを Hamilton が示した。これから、

$$\begin{aligned} &\mathbf{i}\,\mathbf{j} = -\mathbf{j}\,\mathbf{i} = \mathbf{k}\,, \quad \mathbf{j}\,\mathbf{k} = -\mathbf{k}\,\mathbf{j} = \mathbf{i}\,, \\ &\mathbf{k}\,\mathbf{i} = -\mathbf{i}\,\mathbf{k} = \mathbf{j} \end{aligned} \tag{C.1}$$

となることがわかる（問：これを示せ)。いま、もう一つの四元数 q を、

$$q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$$

としよう。ここで、

$$\mathbf{p} = p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}\,,\ \mathbf{q} = q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$$

は、vector part と呼ばれるのである。また、$p = \mathbf{p}$ のとき（つまり、$p_0 = 0$ のとき)、pure imaginary と呼ばれる（複素数の pure imaginary（純虚数）を真似て・・)。さらに、(この言葉づかいからわかるように) p_0 は、scalar part と呼ばれる。
(C.1)の $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ に関する関係式を使うと、p と q の積は、

$$p\,q = p_0 q_0 - \mathbf{p}\bullet\mathbf{q} + p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \mathbf{p}\times\mathbf{q}$$

となる。ただし、ここで、$\mathbf{p}\bullet\mathbf{q}$ 及び $\mathbf{p}\times\mathbf{q}$ は、$\mathbf{p}$ と $\mathbf{q}$ を普通の３次元ベクトルと見なしたときの内積及び外積である（問：これを示せ)。
これから、p、q が pure vector であるとすると、つまり、$p = \mathbf{p}$，$q = \mathbf{q}$ であるとすると、

$$p\,q = -\mathbf{p}\bullet\mathbf{q} + \mathbf{p}\times\mathbf{q}$$

となることがわかる。これから、Gibbs は、$\mathbf{p}\bullet\mathbf{q}$ と $\mathbf{p}\times\mathbf{q}$ を別々に取り出して、ベクトル解析で有用な量としたということである。

なお、複素数の共役数を真似て、四元数 p の共役数は、

$$\overline{p} = p_0 - p_1\mathbf{i} - p_2\mathbf{j} - p_3\mathbf{k} = p_0 - \mathbf{p}$$

と定義される。これを使うと、

$$\begin{aligned} p\,\overline{p} &= p_0 p_0 + \mathbf{p}\bullet\mathbf{p} \\ &= p_0 p_0 + p_1 p_1 + p_2 p_2 + p_3 p_3 \ \geq 0 \end{aligned}$$

となる（問：これを示せ)。また、これがゼロになるのは、$p = 0$ の時のみ。よって、$p \neq 0$ であれば、$|p|^2 = p_0 p_0 + \mathbf{p}\bullet\mathbf{p}$ とすると、

$$p\,\overline{p} \big/ |p|^2 = 1$$

となるので、p の（積の）逆元、p^{-1} が、

$$p^{-1} = \overline{p} \big/ |p|^2$$

と求まることがわかる。さらに、$|p| = 1$ であるとすると、

$$p^{-1} = \overline{p}$$

となり、複素数の場合と同じになる（$z = e^{i\theta}$ とすると、$1/z = \overline{z}$ である)。以上から、(上の計算で加法については、暗黙のうちに四元数が群をなすこと（加減算が四元数の中で自由にできること）を想定していたが）積についても $p \neq 0$ を除けば、群をなすことがわかる。以上から、四元数が体（field）をなすことがわかる。
いずれにしろ、以上のことからわかるように、四元数の計算の中に、内積と外積が自然な形で表れてくるのである。ただし、0 次元目の基底 1 はス

カラーの１と同じであるので、内積のスカラーとベクトルが混在していることに違和感をもつかもしれない。これを解消するためには、または四元数を「普通の言葉」で理解するためには、以下の対応を考えるとよい。
よく知られているように、パウリ行例は以下のような性質を持っている。

$$\sigma_i^2 = 1,\ \sigma_i \sigma_j = -\sigma_j \sigma_i = i\,\sigma_k \qquad \text{(C.2)}$$

（ただし、i, j, k は 1,2,3 の cyclic 置換）
具体的には、

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

であるが、この表現は特に必要ない。(C.2)の交換関係をにらむと、両辺に $-1\left(=(-i)\cdot(-i)\right)$ をかければ、次のようにパウリ行列と四元数、$(1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ との対応（同一視）ができることがわかる。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} I \\ -i\sigma_1 \\ -i\sigma_2 \\ -i\sigma_3 \end{pmatrix} \qquad (I : \text{unit matrix})$$

つまり、この対応によって、四元数、p を

$$p = p_0\, I + p_1(-i\sigma_1) + p_2(-i\sigma_2) + p_3(-i\sigma_3) \qquad \text{(C.3)}$$

と考えるのである。
　次に、（話は若干、天下り的であるが・・・）四元数を使った回転を考えてみよう。いま、二つの四元数、

$$p = (s, \mathbf{p}),\ a = (0, \mathbf{a})$$

の積を求めると、

$$p\,a = \left(-\mathbf{p}\bullet\mathbf{a},\ s\,\mathbf{a} + \mathbf{p}\times\mathbf{a}\right)$$

となるが、さらに、これに、

$$p' = (s', \mathbf{p}')$$

を右からかけると、

$$\begin{aligned} p\,a\,p' = \big(&-s'\,\mathbf{p}\bullet\mathbf{a} - s\mathbf{a}\bullet\mathbf{p}' - (\mathbf{p}\times\mathbf{a})\bullet\mathbf{p}', \\ &-(\mathbf{p}\bullet\mathbf{a})\mathbf{p}' + ss'\mathbf{a} + s'\mathbf{p}\times\mathbf{a} \\ &+s\,\mathbf{a}\times\mathbf{p}' + (\mathbf{p}\times\mathbf{a})\times\mathbf{p}'\big) \end{aligned}$$

ここで、$p' = \overline{p}$ とすると、

$$p\,a\,\overline{p} = \left(0\,, (\mathbf{p}\bullet\mathbf{a})\mathbf{p} + s^2\mathbf{a} + 2s\,\mathbf{p}\times\mathbf{a} + \mathbf{p}\times(\mathbf{p}\times\mathbf{a})\right)$$

となる。

ここで、さらに、$|p| = 1$ とすると、$\mathbf{n}$ をある単位ベクトルとして、

$$p = (\cos\varphi, \sin\varphi\,\mathbf{n})$$

と書ける（問：これを示せ）ので、$pa\overline{p}$ の vector parts は、

$$\begin{aligned} &\sin^2\varphi(\mathbf{n}\bullet\mathbf{a})\mathbf{n} + \cos^2\varphi\,\mathbf{a} \\ &\quad +2\cos\varphi\sin\phi\,\mathbf{n}\times\mathbf{a} + \sin^2\varphi\,\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{a}) \end{aligned}$$

となる。これは、なんとなくベクトル、$\mathbf{a}$ の回転に似ていることがわかる。少し形を整えると（どのように整えてもよいが・・）、

$$(\mathbf{n}\bullet\mathbf{a})\mathbf{n} + \cos 2\varphi\,\mathbf{n}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{n}) + \sin 2\varphi\,\mathbf{n}\times\mathbf{a}$$

となる。ここで、$\mathbf{a}$ の分解、

$$\mathbf{a} = (\mathbf{n}\bullet\mathbf{a})\mathbf{n} + \mathbf{n}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{n})$$

を使っている。以上をまとめると、

$$p = \left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\mathbf{n}\right)$$

として、$pa\overline{p}$ の vector part、$\mathbf{a}'$ を求めると、

$$\mathbf{a}' = (\mathbf{n}\bullet\mathbf{a})\mathbf{n} + \cos\theta\,\mathbf{n}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{n}) + \sin\theta\,\mathbf{n}\times\mathbf{a}$$

となり、ベクトル、$\mathbf{a}$ を（単位）ベクトル、$\mathbf{n}$ の周りに角度、θ だけ回転させたベクトルが得られることになる。
　いま、四元数、n を、

$$n = (0, \mathbf{n})$$

とすると、

$$n^2 = (-\mathbf{n}^2, 0) = -(1, 0)$$

となるので、

$$p = e^{\frac{\theta}{2}n}$$

と（形式的に）表すことができる（**注：この種の記法における定義と同じように、右辺は、指数関数を Taylor 展開したものとして定義する**）。つまり、

$$(a' =)\ pap' = e^{\frac{\theta}{2}n}\,a\,e^{\frac{-\theta}{2}n}$$

となる。さらに、vector part に着目すれば、

$$\mathbf{a}' = e^{\frac{\theta}{2}\mathbf{n}}\,\mathbf{a}\,e^{\frac{-\theta}{2}\mathbf{n}}$$

と表される。ただし、計算はすべて、四元数としての計算規則に従って行うのである（なお、$\mathbf{n}$ を四元数と見なせば、$n = \mathbf{n}$ である ）。
　Pauli 行列との対応で言えば、

$$e^{\frac{\theta}{2}\mathbf{n}} \Leftrightarrow e^{-i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{\sigma}\bullet\mathbf{n}}$$

となる。ただし、左の項の $\mathbf{n}$ は四元数で、右側の $\mathbf{n}$ は普通のベクトルである。ちなみに、四元

数の vector part を Pauli 行列の具体的表現で表すと、

$$-i\begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix}$$

となる。だんだん、どこかで見た表式がでてきたところで、ここでの話は終わりとしよう。**（注：上で求めた回転の式は、ベクトルを空間内で実際に回転した場合のものであることに注意。座標系の回転の場合には、**

$$p=e^{\frac{-\theta}{2}\mathbf{n}} \Leftrightarrow e^{i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}}$$

となる）。

（注： 2.10 に出てきた、Euler 角と p 数の関係は、notation を合わせるために、

$$p=\left(\cos\frac{\Phi}{2},\ \sin\frac{\Phi}{2}\mathbf{n}\right)$$

とすると、

$$p=\left(\cos\frac{\theta}{2}\cos\left(\frac{\psi+\phi}{2}\right),\ \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi-\phi}{2},\right.$$
$$\left.\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi-\phi}{2},\ \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi+\phi}{2}\right)$$

となる（問：これを示せ））。

3.　二つの短い挿話（小話）

＜個人的な追憶＞　高校時代、高校の物理は味気ない感じがして化学の方が好きであったが、大学初年の初めの化学（有機化学？）の授業で、チンプンカンプンのシュレーディンガー方程式が突然出てきて、これは与えられたものとして受け入れなさいという趣旨の話があり、これを契機に化学が嫌いになった。当然、その後の授業には出席していない。もっとも、悪い先輩がいて、大学の授業は出るものではないと教えられたので、その有難い教えに従って、その他の授業もほとんどサボったように記憶している。しかし、この化学の授業でもう少し説明をしてから、受け入れなさいと言ってもらえれば、化学は好きなままであったかもしれないのだが・・。曰く、「この方程式は「不条理」の方程式であるので、なんだかんだともっともらしい理屈をつけても、所詮は理解できない（直感的には理解できない）。よって、結果的には受け入れるしかない」と・・・

この小節で取り上げようとしているのは、紙面を汚すような「個人的な追憶」ではなく、一つは Hamilton に関するもので、もう一つは、Schrodinger に関するものである。

Hamilton が四元数を発見した挿話は有名であるので、周知の方も多いであろう。また、ネットサーフィンすれば、すぐに見つかる（多分、全部がほぼ同じ内容の短い話であろう）。Hamilton は十年以上にわたり、1 と i から構成される（二次元の）複素数を三次元に拡張しようと努力をしてきたが、全部、徒労に終わっていた。しかし、時は、1843 年 10 月 16 日の朝、the Royal Society of Dublin（アイルランド）の会合に出席するため、Hamilton は奥さんと一緒に運河（the Royal Canal）に沿って歩いていた。Brougham Bridge（現在の名称：Broom Bridge）という橋に差しかかったその時、（三次元ではなく）四次元の拡張である四元数（quaternion）が頭を過ぎり、これを発見したということである。そして、直ちに、

$$\mathbf{i}\,\mathbf{i}=\mathbf{j}\,\mathbf{j}=\mathbf{k}\,\mathbf{k}=\mathbf{i}\,\mathbf{j}\mathbf{k}=-1$$

という関係を橋に刻み込んだというのが、その挿話である。そして、その後、亡くなるまで、四元数に入れ込んだということである。

この四元数の世界から、ベクトルの内積と外積を取り出して、ベクトル解析を創始したのが、Gibbs（米国）と Heaviside（英国）であると言われている。なお、pure imaginary の四元数、$p=(0,\mathbf{p})$ と $q=(0,\mathbf{q})$ をかけると、

$$p\,q=(-\mathbf{p}\cdot\mathbf{q},\ \mathbf{p}\times\mathbf{q})$$

となり、ベクトルの内積と外積しか出てこない。また、Gibbs がベクトル解析を作った背景には、グラスマン代数の Grassmann のアイデアや Maxwell 方程式をわかりやすくしようという試みがあったということである。

一方、我々にとって（大多数の者にとって）、Hamilton と言えば、Hamiltonian のことであり、力学の多くの問題は、Hamiltonian がわかり、Hamilton の運動方程式が解ければ、解決すると言っても過言ではない（しかし、これは若干、言い過ぎで、一般には、Lagrangian を求めて、Lagrange の運動方程式を解く方がよいのであるが・・）さらに、Schrodinger 方程式にも、

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=H\,\Psi$$

と Hamiltonian が登場する。そして、固有値問題、

$$H\Phi=E\Phi$$

が解ければ、量子力学の多くの問題が解決するのである。（何で読んだかも忘れたので記憶が怪しいが）Schrodinger が Schrodinger 方程式の着想を得たのは、若いガールフレンドと一緒にスイス

を旅行している時であったとのことである（Schrodinger も若かったが、自宅には奥さんがいたとのこと）。さらに、Schrodinger の後年の私生活は、「事実は小説より奇なり」を地でいくようなものであったようである。イギリス風の紳士の世界とは相容れなかったようである（多分、日本でも（芸能人以外は？）×であろう。だから、このようなことは、（日本の）大学では教えないのであろうか）。なお、他人の私生活に興味のある方は、たとえば、Ian Stewart；Why Beauty Is Truth: A History of Symmetry などを参照されたい。

明らかに現代の社会に、より多くのインパクトを与えたのは、Schrodinger 方程式の方であったことは言をまたないであろう。しかし、何代もの時代を経た後には、Hamilton の四元数の方がより大きなインパクトを与え、生き延びるかもしれない・・・？

Appendix D

微分とテーラー展開

1. はじめに

このAppendix Dでは、役に立つと思われる微分とテーラー展開について初等的な説明をする。とは言え、内容は完全に大学初年度程度であるので、読むには値しないかもしれないが、飛ばし読みでもすれば、復習にはなるかもしれない。なお、最後に、ベクトルを、

$$\mathbf{v} = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

と表わしておくと「便利」であることを示しておいた。

2. 微分（Differential）

我々は、微分を（独立変数の）微小変動による（従属変数の）変化量の極限（微小変動を無限小変動にもっていったときの変化量）であると習った（と思う）。このことから、以下のような微分に関する（非常に）重要な性質が導かれる。

線形性（linearity）

$$df\left(x_1, \cdots, x_n\right) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \tag{D.1}$$

ライプニッツ則（Leibnitz's rule）

$$d\left(f \cdot g\right) = df \cdot g + f \cdot dg \tag{D.2}$$

合成関数の微分（chain rule）

$$\frac{d}{dx} F\left(f\left(x\right)\right) = \frac{dF}{df} \frac{df}{dx}$$

微分としては、上の三つの性質だけで、多分、十分であろうが、(D.1)については、若干、説明がいるかもしれない。この式は、無限小について成り立つ式で、dx_i 等が有限の微小量の場合には、近似的しか成り立たないというような説明がよくなされる。

$$\Delta f\left(x_1, \cdots, x_n\right) \approx \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n$$

そして、無限小になって、初めて等号が成立するという説明である。「日常の生活」では、このような考え方で全く支障は生じることはないのであるが、無限小とは何かということを深く考え始めると、実数とは何かという問題になり、絶望の淵に立たされることになるであろう。それは通常の数の世界（今の場合には実数の世界）には無限小の量という概念がうまくマッチしないためである。しかし、(D.1)の意味を解釈し直すことで、このような深遠な暗黒の世界を避けることができ、かつその意味も単純、明快になるのである（または、実用的になると言ってもよい）。その解釈とは、(D.1)は、ある点、$\mathbf{x} = \left(x_1, \cdots, x_n\right)$ での「接線」を表わすものとするのである。もっと「格好よい」表現を使えば、その点での（平らな）接平面（tangent plane）上の式であると解釈するのである（**コメント：各点、$\mathbf{x}$ で接平面、E_n をとるということは、空間を拡大して、空間、$\left(\mathbf{x}, E_n\right)$ を考えるということになるが、我々は、ここでは、そのようなことまでは考えないことしよう**）。以上のように考えると、dx_i 等は無限小である必要はなく、勝手な有限な量とすることができる（**蛇足：無限小を増幅率「無限大」で拡大して有限な量にするという宇宙論よりすごいインフレーション理論は不要である**）。さらに、記号、d は何か（無限小の）微小量を示すものでなく、線形化を表わしているものとするのである。とは言え、時には、微小量と思うと便利ではあるが・・・。

(D.1)の微分の線形性は、初等的でかつ明らかで何かを言うまでもないと思われるであろうが、それが意味することを再度、深く感じとることは無駄ではないであろう。この線形性は、何かの自然法則によるものではなく、

$$f = f\left(x_1, \cdots, x_n\right)$$

という何かの関数関係（微分可能性は仮定）があれば、線形性が成り立つということである。たとえば、要因、$\left(x_1, \cdots, x_n\right)$ と結果、f に何らかの関数関係があると仮定して、実験したとしよう。

もし、要因の量、$\left(x_1,\cdots,x_n\right)$を、わずかに変化させた時の結果が、変化量に線形に応答しない（比例関係にない）と（明らかに）わかったとすると、もう、これ以上、実験しなくとも、$f=f\left(x_1,\cdots,x_n\right)$という、いかなる関数関係も一切ないと判定することができるのである（**余分なコメント：この実験では、物理法則等の自然法則などとは無関係に、何らの関数関係がないと結論づけることができるのである**）。この実験では、線形化を用いているので、議論が精密ではないような印象を与えるかもしれないが、次のような時間微分を考えると、この議論が精密化して見えるであろう。

$$\frac{df}{dt}\left(x_1,\cdots,x_n\right)=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$$
$$=f_1\,\dot{x}_1+\cdots+f_n\,\dot{x}_n$$

つまり、上のように関数関係があるとすると、結果の時間変化は（要因の）時間変化（速度）に（完全に）比例しているということになる（たとえば、化学反応のようなものを想定してもよいかもしれない）。比例関係（一次依存性）がないとわかった時点で、どんな関数関係を見つけようとしても無駄であることがわかるのである。話は少し飛ぶが、力学で、座標、$\mathbf{r}$ を一般座標、q_i で表わすと、

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}\left(q_1,\cdots,q_n\right)$$
$$\dot{\mathbf{r}}=\sum_i\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_i}\dot{q}_i$$

となるが、速度の線形性から、

$$\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial\dot{q}_i}=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\dot{q}_i}=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_i}$$

となる。この一見、奇妙な式（微分の線形性からは明らかであるが、初めて見た時には奇妙に思えたであろう式）は、ニュートンの運動方程式をラグランジュの運動方程式に変換する際に役に立つものであった（これは、Lagrangian から直接、導く場合には不要であるが・・）。

なお、関数、f が（顕わに）時間に依存する場合には、

$$\frac{df}{dt}\left(t,x_1,\cdots,x_n\right)=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$$

となることは周知であろう。また、これを書き換えると、Lagrange 微分の表式が得られる。

$$\frac{d}{dt}=\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\left(\dot{\mathbf{q}}\cdot\nabla\right)$$

また、（若干、余分かもしれないが）、

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{D}{Dt}=\frac{D}{Dt}\frac{\partial}{\partial q_i}$$

という関係も得られる。（**余分なコメント：以上では、しつこく線形性を強調してきたが、もし、関数、f が複雑な式であるとすると、その複雑さは、微係数、$\partial f/\partial x_i$ の複雑さに反映されて、物事は、単純な（定数の）比例関係ではなくなることに注意。**）

次に、Leibnitz 則について、若干、説明しておこう。

Leibnitz 則、(D.2)の中の関数のかけ算記号「・」は、単なる数のかけ算と同じものであるが、この Leibnitz 則が成り立つのは、このかけ算が、f と g について（双）線形性が成り立つからである。よって、双線形性が成り立つかけ算であれば、どのようなもの（ベクトルの内積・外積、wedge 積等）でも、Leibnitz 則が成り立つのである。この単純で明らかなことも重要な性質である（**外微分は、微分に wedge 記号をつけたものであるので、(D.2)の Leibnitz 則はそのままでは成り立たない**）。

また、微分、d を

$$d=d_f+d_g$$

のように、f のみの微分、d_f と g のみの微分、d_g にわけて、

$$d\left(f\cdot g\right)=\left(d_f+d_g\right)\left(f\cdot g\right)$$
$$=d_f\left(f\cdot g\right)+d_g\left(f\cdot g\right)=\left(d_f f\right)g+f\,d_g g$$

のように計算してもよい。また、d_f と d_g は明らかに可換である。

$$d_f d_g=d_g d_f$$

（問：これを示せ。）

このことから、

$$d^n=\left(d_f+d_g\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}d_f^{\,n-k}d_g^{\,k}$$

となる。よって、

$$\frac{d^n\left(f\cdot g\right)}{dx^n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{d^{n-k}f}{dx^{n-k}}\frac{d^k g}{dx^k}$$

となる（実用上、時々、役に立つ関係式である）。

(問：(解かなくてよいが・・)、

$$\frac{d^n\left(f_1\cdot f_2\cdot f_3\right)}{dx^n},\ \frac{d^n\left(f_1\cdot f_2\cdots f_m\right)}{dx^n}$$

は、どのようになるかを示せ。)

次に、平均値の定理等、実用上、有用な公式等を説明しよう。

(超)有名な平均値の定理(Mean Value Theorem)は、

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)\qquad (a<\xi<b)\qquad \text{(D.3)}$$

で与えられる。また、この証明には、ロールの定理(Rolle's theorem)を使うのであった(**注：これと中間値の定理(intermediate value theorem)とを混同しないこと。(このようなことを聞くと)、この他にも最大値・最小値の定理があったという記憶が呼び起こされるであろう。なお、これらの基本的な定理は感覚的には明らかなものばかりであるが、位相を少し勉強すると、明確かつ簡潔に把握することができるのである。)**

この平均値の定理の拡張は、コーシーの平均値の定理(Cauchy's mean value theorem)と呼ばれるもので、

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\qquad \text{(D.4)}$$

である。若干、乱暴な証明は、$g=g(x)$ をひっくり返して(逆関数があると仮定して)、平均値の定理、(D.3)の x を g に置き換えるのである。すると(記法も正確ではないが)、

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{df}{dg}(\xi)$$

となる。右辺は、

$$\frac{df}{dg}(\xi)=\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{dg}{dx}}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

となり、(D.4)が得られる。きちんとした証明は、平均値の定理、(D.3)と同じように、

$$F(x)=f(x)-f(a)$$
$$-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left(g(x)-g(a)\right)$$

として、これにロールの定理を適用すればよい。

さて、コーシーの定理の応用で、実用上、最も有用なものは、ロピタルの規則(l'Hospital's rule)であろう。

まずは、$\frac{0}{0}$型で、(D.4)で $f(a)=g(a)=0$ とすると、

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\qquad \text{(D.5)}$$

となる。右辺が依然として、$\frac{0}{0}$型であれば、これを左辺に入れて繰り返すのである。

$\frac{\infty}{\infty}$型の場合には、

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}=\lim_{\xi\to a}\frac{\frac{g'(\xi)}{g(\xi)^2}}{\frac{f'(\xi)}{f(\xi)^2}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)^2}{g(x)^2}\lim_{\xi\to a}\frac{g'(\xi)}{f'(\xi)}$$

とし(注：二番目の等式にコーシーの定理を適用している)、これから、この場合にも、

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

となることがわかる。

$x\to\infty$ 型の場合、$y=1/x$ として、

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{y\to 0}\frac{f(1/y)}{g(1/y)}$$

$$=\lim_{\zeta\to 0}\frac{\frac{f'(1/\zeta)}{\zeta^2}}{\frac{g'(1/\zeta)}{\zeta^2}}=\lim_{\xi\to\infty}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

なる。よって、この場合にも、似たような形に書けることがわかる。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\xi\to\infty}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

まとめると、どの場合でも、(D.5)の表式で計算すればよいことがわかる。

なお、これを不用意に適用するとまずい場合があり、それは、右辺の微分が振動したりする場合である。典型的な例としては、たとえば、

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{\xi\to\infty}\frac{1+\cos\xi}{1}$$

などがある。よってこの場合には、上の式が成り立たないとするのである（実際には、極限値は、１であると簡単に求まるのであるが・・・）。（コメント：「変な例」をいくつか持ち出して、式が成り立たない、よってロピタルの規則は危なっかしいので注意が必要とよく言われているようである。しかしながら、次の式は、依然として成り立つのである。

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} \tag{D.6}$$

ここで、ξ は x に依存するということを明記した。そして、この $\xi(x)$ が（多価で）不連続な振る舞いをして、たとえば、一見、f' の振動しているように見える項が漸近的にある値に収束するのである。いずれにしろ、変な例でも式は正しいのであるが、極限値は簡単には求まらないので、実用的ではないのであるが・・・。変な例も含め、(D.6)は成立しているということがあまり言われていないように思われる。なお、この $\xi(x)$ の振る舞いは、かなり面白いのであるが、あまりにも脇道に逸れてしまうので、ここまでとしよう。）

この節は、微分の話であるが、平均値の定理に話が及んだので、積分に関する平均値の定理にも一言、触れておこう（それを次節でも使うので・・）。

まずは、積分の（第一）平均値定理（(first) Mean Value Theorem for Integration）で、

$$\int_a^b f(x)\rho(x)dx=f(\xi)\int_a^b\rho(x)dx \tag{D.7}$$

である。ここで、$\rho(x)$ は連続で、区間、$a<x<b$ でゼロにはならないとし、また $f(x)$ は連続であるとする。

証明は簡単で、連続関数、$f(x)$ の最小値と最大値を m と M とすると、

$$m<f(x)<M$$

である。また、$\rho(x)$ は連続でゼロにはならないので、常に正か負である。いま正と仮定すると（負の場合の証明も同様）、

$$\int_a^b m\,\rho(x)dx<\int_a^b f(x)\,\rho(x)dx<\int_a^b M\rho(x)dx$$

よって、

$$m<\frac{\int_a^b f(x)\,\rho(x)dx}{\int_a^b\rho(x)dx}<M$$

となる。ここで、

$$\int_a^b\rho(x)dx>0$$

であることを使っている。ここで、中間値の定理を $f(x)$ に適用すると、(D.7)が得られる。

積分の（第二）平均値定理（(second) Mean Value Theorem for Integration）は、

$$\begin{aligned}&\int_a^b f(x)g(x)dx\\&=f(a)\int_a^\xi g(x)dx+f(b)\int_\xi^b g(x)dx\end{aligned} \tag{D.8}$$

で与えられる。ここで、これが成立するために必要な条件として、以下のような簡単な仮定をおくことにする。$g(x)$ は連続で、$f(x)$ は C^1（連続微分可能）でかつ $f'(x)$ は区間、$a<x<b$ でゼロにはならないとする。証明は以下のとおりである。まず、

$$G(x)=\int_a^x g(x)dx$$

とおき、(D.8)の左辺を部分積分すると、

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(x)G(x)\Big|_a^b-\int_a^b f'(x)G(x)dx$$

となるが、右辺の第二項に、(D.7)を適用すると、右辺は、

$$\begin{aligned}&f(b)G(b)-G(\xi)\int_a^b f'(x)dx\\&=f(b)G(b)-G(\xi)\big(f(b)-f(a)\big)\\&=f(a)G(\xi)+f(b)\big(G(b)-G(\xi)\big)\end{aligned}$$

となり、(D.8)が得られることがわかる。さらに、$f(x)$ は、区間、$a<x<b$ で減少関数であり、かつ正であるとすると、最後の式は、

$$f(a)\big(G(\xi)(1-t)+G(b)t\big)$$

と書ける。ただし、$t=f(b)/f(a)$ とおいた。ここで、t は、$0<t<1$ であるので、上式のカッコの中の値は、$G(\xi)$ と $G(b)$ の中間の値をと

るはずであるので、中間値の定理から、この値は、$G(\xi_1)$ $(\xi < \xi_1 < b)$ と求まる。よって、この条件の下では、(D.8)は、

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^{\xi_1} g(x)dx$$

のようにも表わされることがわかる。

3. テーラー展開（Taylor Expansion）

「もしテーラー展開がなかったとしたら、解析の分野は貧しいものになったであろう」と数学者に言わせるほど、テーラー展開は非常に重要で、かつ実用上もたいへん役に立つものである。この誰もが知っているテーラー展開をわざわざここに書くまでもないであろうが、参考のためいくつかの型を挙げておこう。

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + R \tag{D.9}$$

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2}f''(a)(b-a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(b-a)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(b-a)^n + R \tag{D.10}$$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)h^3 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n + R \tag{D.11}$$

ただし、(細かいことを言えば) ここで、$f(x)$ は、C^{n+1} 級であるとしている（C^{n+1} : $n+1$ 階まで連続微分可能（f^{n+1} が存在して、かつ連続)）。また、$a=0$ の場合をマクローリン (Maclaurin) 展開と言われることも周知であろう。

さて、以上のテーラー展開の形は誰もが知っているであろうが、上式の中の剰余項、R については、誰でも、ということでないであろう。多分、最も簡単な R の表式は、たとえば、(D.9)では、

$$R = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1},\ (a < \xi < x)$$

であろう。この表式は確かに正しいのであるが、‘（一般的には） ξ の正確な値を誰も知り得ないという欠点がある。「正確な」表式は、たとえば、(D.10)の形で書けば、

$$R = \frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \tag{D.12}$$

と与えられる（記憶力のよい方は覚えているかもしれないが・・)。なお、この式の特徴は、f^{n+1} が積分区間で大きく変動しないとすると、n が大きくなるとともに、R への寄与はほとんど、a の近傍付近の振る舞いによって決まるというものである。

このように誰もが知っているテーラー展開ではあるが、その導出はどうなっていたかを覚えている方はそう多くはないかもしれない。そこで (一つのやり方でしかないが) その導出を以下に与えよう。出発点は、明らかな式、

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)dt$$

からである。これに積分法の最も強力な手段、部分積分法を上式の右辺の第二項に次々と適用することでテーラー展開が得られるのである。まず、$f'(t)$ の前に「隠れている」1 の積分には、$t, t-a, t+c$ 等、いろいろあるであろう。どれを採用しても「それなりの」テーラー展開が得られるのであるが、最もシンプルに「本来の」テーラー展開を導くには、若干、変な形の積分、$-(b-t)$ を採用するのがよい。こうすると、第一段の部分積分は、

$$f(b)=f(a)-(b-t)f'(t)\Big|_a^b$$
$$+\int_a^b (b-t)f''(t)dt$$
$$=f(a)+f'(a)(b-a)+\int_a^b (b-t)f''(t)dt$$

となる。後は、同様に機械的な計算を繰り返せば、(D. 10)が得られ、剰余項も(D. 12)で与えられることがわかる。

なお、この剰余項の評価として、以下のものがある（ただし、$a<\xi<b$ とする)。

$$R_{n+1}=\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi) \qquad [\text{Lagrange}]$$

これは、(D.12)に積分の（第一）平均値定理を適用すれば、直ちに得られる（問：これを示せ)。

$$R_{n+1}=\frac{(b-a)(b-\xi)^n}{n!}f^{(n+1)}(\xi) \quad [\text{Cauchy}]$$

これも同様に平均値定理から直ちに得られる（この場合には、(D.7)で $\rho(x)=1$ とおくのである）（問：これを示せ)。

$$R_{n+1}=\frac{(b-a)^p(b-\xi)^{n+1-p}}{n!\,p}f^{(n+1)}(\xi)$$
$$=\frac{(b-a)^{n+1}(1-\theta)^{n+1-p}}{n!\,p}f^{(n+1)}\big(a+\theta(b-a)\big)$$
$$(0\le\theta\le 1)$$
$$[\text{Roche-Schlömilch}]$$

この場合も、$\rho(x)=(b-x)^{p-1}$ とおけば直ちに得られる（問：これを示せ)。
さて、$f(x)$ が何回でも微分可能（C^∞ 級）であるとすると、(D.9)で、$n\to\infty$ として、

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$$
$$+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n+\cdots$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k \qquad \text{(D.13)}$$

としたい気がしてくる(コメント：余分なことながら、上式の中の二番目の「･･･ 」は、（単に、点が三つほど並んでいるとか、限りなく項が並んでいるとかという意味ではなく）極限をとる（極限値を求めて代入する）という通常の無限級数の表記で用いる数学的操作を意味している。より正確には、「＋･･･ 」の意味は、と言った方がよいかもしれない。)。しかし、一般には、$n\to\infty$ で $R\to 0$ とはならないので、上式の等式は成立しないのである。この反例の代表的な例は、

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x\le 0)\\ e^{-1/x} & (x>0)\end{cases}$$

であり、これは、原点ですべての微係数がゼロであるという性質をもっている非常に滑らかな関数である。このため、$a=0$ に(D.13)を適用すると、右辺のすべての項はゼロとなるので、右辺はゼロとなって、等式が成り立たないことがわかる。しかし、この反例の関数は、多様体における「１の分割」(partition of unity）で中心的な役割を担う関数である。一方、$n\to\infty$ で $R\to 0$ となる関数を解析的と言って、 C^ω というのであるが、多様体では、多くの場合、C^∞ 級までを仮定するのである。

次に多変数関数の場合のテーラー展開を考えよう。考える領域を星形領域（star-shaped region）とすると、物事は簡単になり、一変数のテーラー展開の延長で話をすることができる。以下では、記述を簡単にするために、次元は３次元としよう。いま、星形領域の「中心」を $\mathbf{x}_0=(a,b,c)$ とすると、領域内のどんな点、$\mathbf{x}_1$ にも中心から領域外に出ないで、直線的に行くことができる。

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_0+t\,\mathbf{h}\,,\quad \mathbf{h}=(h,k,l)$$

で、$\mathbf{x}_1=\mathbf{x}(1)=\mathbf{x}_0+\mathbf{h},\ \mathbf{x}_0=\mathbf{x}(0)$ とおく。すると、関数、$f(\mathbf{x})$ は、

$$F(t)=f\big(\mathbf{x}(t)\big)$$

という、全区間、$0<t<1$ で定義された、t の関数、$F(t)$ と考えることができる。

$$F(t)=f(a+t\,h,b+t\,k,c+t\,l)$$

この微分は、

$$\frac{d}{dt}F(t)=h\frac{\partial f}{\partial a}+k\frac{\partial f}{\partial b}+l\frac{\partial f}{\partial c}$$

となり、

$$\frac{d}{dt}=h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}+l\frac{\partial}{\partial c} \qquad \text{(D.14)}$$

と見なすことができる。$F(t)$のテーラー展開（マクローリン展開）は、

$$F(t)=F(0)+F'(0)t+\frac{1}{2}F''(0)t^2$$
$$+\frac{1}{3!}F'''(0)t^3+\bullet\bullet\bullet$$
$$+\frac{1}{n!}F^{(n)}(0)t^n+R$$

であるので、$F(1)$ を書き直すと、

$$f(a+h,b+k,c+l)=f(a,b,c)+\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}+l\frac{\partial}{\partial c}\right)f(a,b,c)$$
$$+\frac{1}{2}\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}+l\frac{\partial}{\partial c}\right)^2 f(a,b,c)+\bullet\bullet\bullet+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}+l\frac{\partial}{\partial c}\right)^n f(a,b,c)+R$$

となる。ここで、

$$R=\frac{1}{n!}\int_0^1(1-t)^n F^{(n+1)}(t)\,dt$$

である。

さて、よく知られたように、

$$\exp(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\bullet\bullet\bullet+\frac{1}{n!}x^n+\bullet\bullet\bullet$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k$$

である（と定義されると言った方がよいであろう）。ここで、普通は、x に実数を代入するのであるが、xが実数以外の何かであっても、たし算とかけ算（今の場合、べき乗）がきちんと定義され、かつ収束が保証されているとすると、この $\exp(x)$ は意味をもつのである。いま、$f(x)$ が C^{ω} 級であるとすると、上記の記法を使って、

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{1}{2}f''(a)h^2$$
$$+\bullet\bullet\bullet+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n+\bullet\bullet\bullet$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}h^k\frac{d^k}{dx^k}f(x)\Big|_{x=a}=e^{h\frac{d}{dx}}f(x)\Big|_{x=a}$$
$$==e^{h\frac{d}{da}}f(a)$$

とすることができる。同様にして、多変数の場合も、

$$F(1)=\exp(\frac{d}{dt})F(t)\Big|_{t=0}$$
$$=f(a+h,b+k,c+l)$$
$$=e^{1\frac{d}{dt}}f(a+t\,h,b+t\,k,c+t\,l)\Big|_{t=0}$$

と表わすことができる。さらに、(D.14)を使って、若干、丁寧に書けば、

$$f(a+h,b+k,c+l)$$
$$=e^{1\frac{d}{dt}}f(a+t\,h,b+t\,k,c+t\,l)\Big|_{t=0}$$
$$=\exp\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}+l\frac{\partial}{\partial c}\right)f(a+t\,h,b+t\,k,c+t\,l)\Big|_{t=0}$$
$$=\exp\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}+l\frac{\partial}{\partial c}\right)f(a,b,c)$$

より一般的には、

$$\frac{d}{dt}=\mathbf{h}\cdot\nabla$$

となるので、

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h})=e^{1\frac{d}{dt}}f(\mathbf{x}+t\mathbf{h})\Big|_{t=0}=\exp(\mathbf{h}\cdot\nabla)f(\mathbf{x})$$

と表わすことができる。つまり、標語的に言えば、テーラー展開とは、微分演算子（一次元の場合には、$h\frac{d}{dx}$、多次元の場合には、$\mathbf{h}\bullet\nabla$）をexp 関数の肩に乗せた（引数とした）ものを初期値にかけると終値が得られる方法であると言える。ついでに言えば、

$$\mathbf{p}=\frac{\hbar}{i}\nabla$$

とおいて、上式を書き換えれば、

$$f\left(\mathbf{x}+\mathbf{h}\right)==\exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{h}\cdot\mathbf{p}\right)f\left(\mathbf{x}\right)$$

となり、量子力学に出てくる並進の演算子となる（逆に言えば、元に戻ると、量子力学の雰囲気が何も感じられないのである）。

次に以上のことを使って、常微分方程式を（形式的に）解くことを考えてみよう。まずは、非常に簡単な例である、

$$\frac{d}{dt}x=a\,x$$

の解は、

$$x\left(t\right)=e^{at}x_0$$

であるが、これは、

$$\frac{d}{dt}=a$$

であることから、

$$x\left(h\right)=\exp\left(h\frac{d}{dt}\right)x\Big|_{t=0}=e^{ha}x_0$$

としても求まるのである。同様にして、多次元の微分方程式、

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}=\mathbf{A}\,\mathbf{x}\ \left(\mathbf{A}:\text{constant matrix}\right)$$

についても、

$$\frac{d}{dt}=\mathbf{A}$$

であることから、

$$\mathbf{x}\left(h\right)=\mathbf{x}\left(0+h\right)=e^{h\frac{d}{da}}\mathbf{x}\left(a\right)\Big|_{a=0}=e^{h\mathbf{A}}\mathbf{x}\left(a\right)\Big|_{a=0}$$

となり、微分方程式の解が、

$$\mathbf{x}\left(t\right)=\exp\left(t\,\mathbf{A}\right)\mathbf{x}_0$$

と求まる。そこで、調子に乗って、

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}=\mathbf{A}\left(t\right)\mathbf{x}$$

を解くことを考えよう。

$$\frac{d}{dt}=\mathbf{A}\left(t\right)$$

であり、もし、行列、$\mathbf{A}$ が定数行列であるとすると、

$$t\,\mathbf{A}=\int_0^t\mathbf{A}\,dt$$

であることから、解が、

$$\mathbf{x}\left(t\right)=\exp\left(\int_0^t\mathbf{A}\left(s\right)ds\right)\mathbf{x}_0 \qquad \text{(D.15)}$$

となるであろうと推測される。しかし、これは間違いである。いま、$\mathbf{A}\left(t\right)$ が以下のように区分的に定数であると仮定しよう。

$$\mathbf{A}\left(t\right)=\begin{cases}\mathbf{C}_1 & \left(0\le t<t_1\right)\\ \vdots & \\ \mathbf{C}_n & \left(t_{n-1}\le t<t\right)\end{cases}$$

すると、各区間内では、

$$\exp\left(t\mathbf{A}\right)=\mathbf{M}_i=\exp\left(\mathbf{C}_{i=}\Delta t_i\right)$$

となるので、

$$\mathbf{x}\left(t\right)=\mathbf{M}_n\cdots\mathbf{M}_1\,\mathbf{x}_0$$

のように表わされる（これは正しい）。これから、より一般的には、

$$\mathbf{x}\left(t\right)=\lim_{\substack{N\to\infty\\ \Delta t\to 0}}\prod_{n=0}^{N}\exp\left(\mathbf{A}\left(t_n\right)\Delta t_n\right)\mathbf{x}_0$$

と表わされることがわかる。ここで、a,b が何であっても、

$$e^a\,e^b=e^{a+b}$$

となるのであれば、上式は、(D.15)に帰すことになるのであるが、残念ながら、そうなるためには、a と b が可換であることが必要となる。よって、一般的には、(D.15)は間違いであることがわかったのであるが、$\mathbf{A}\left(t\right)$ が対角行列であるような特別な場合には、(D.15)は成立するのである。特に一次元の場合には、よく知られているように（初等的かつ暗算でも求まるように）、

$$x\left(t\right)=\exp\left(\int_0^t A\left(s\right)ds\right)x_0$$

と解が表わされるのである。

最後に、次の常微分方程式、

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t)=\mathbf{v}(\mathbf{x})=\begin{pmatrix} v_1(x_1,\cdots,x_n) \\ \vdots \\ v_n(x_1,\cdots,x_n) \end{pmatrix}$$

を解くことを考えよう（注：この常微分方程式は右辺がt に顕わに依存していないことに特徴がある。自励系（autonomous system）と言われる。）この解、$\mathbf{x}(t)$ が求まったとすると、$\mathbf{x}$ の関数、$\mathbf{f}(\mathbf{x})$ をt の関数と見なして、

$$\frac{d}{dt}\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))=\left(\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\right)\mathbf{f}(\mathbf{x})=(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

となることがわかる。すると、微分演算子、$\dfrac{d}{dt}$ は、

$$\frac{d}{dt}=\mathbf{v}\cdot\nabla=v_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+v_n\frac{\partial}{\partial x_n}$$

となる。これから、

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))=\exp\left(t\frac{d}{ds}\right)\mathbf{f}(\mathbf{x}(s))\Big|_{s=0}$$
$$=\exp\left(t\left(v_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+v_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_0\right)\mathbf{f}(\mathbf{x}(0)) \tag{D.16}$$

となる。ここで、記述を簡単にするために、

$$\hat{\mathbf{v}}=v_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+v_n\frac{\partial}{\partial x_n}$$

とすると、

$$\frac{d}{dt}=\hat{\mathbf{v}}$$

と書ける。当然のことであるが、これから、

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\hat{\mathbf{v}}\,\mathbf{x}=\mathbf{v} \tag{D.17}$$

（問：二番目の等号を示せ。）

さらに、$\mathbf{a}=\mathbf{x}(0),\ \mathbf{u}=\mathbf{v}(\mathbf{a})$ とおき、

$$\hat{\mathbf{v}}_0=u_1\frac{\partial}{\partial a_1}+\cdots+u_n\frac{\partial}{\partial a_n}$$

としよう。すると、

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))=\exp(t\,\hat{\mathbf{v}}_0)\mathbf{f}(\mathbf{a})$$

となる。特に、

$$\mathbf{x}(t)=\exp(t\,\hat{\mathbf{v}}_0)\mathbf{a},\ \mathbf{v}(t)=\exp(t\,\hat{\mathbf{v}}_0)\mathbf{u}$$

となる。これを省略形でない変数で書いたものを眺めると、いくらテーラー展開が初期値（＋その微分係数）のみで決まるとは言え、驚きを覚えざるを得ないであろう（もっとも条件として、すべてがC^{ω}級、さらには星形領域であるというのが加わっているのではあるが・・）また、

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t)=\frac{d}{dt}\left(\exp(t\,\hat{\mathbf{v}}_0)\mathbf{a}\right)$$
$$=\hat{\mathbf{v}}_0\exp(t\,\hat{\mathbf{v}}_0)\mathbf{a}=\hat{\mathbf{v}}_0\,\mathbf{x}$$

となり、(D.17)と合わせて、

$$\hat{\mathbf{v}}=\hat{\mathbf{v}}_0$$

が導かれる。これも省略形でない形で書くと、相当な驚きを禁じ得ないであろう。これは、$\mathbf{x}(t)$ とともに動く系から見たベクトルであり、$\mathbf{x}(t)$は、この座標系から見た座標変換であるという視点に立てば、このベクトルは、まさにベクトルそのものであり、座標変換に対して不変であることを言っていると見なせないこともないが、感覚的には納得しがたいものがあるであろう。そこで、計算によりこれを確かめてみよう。

$$\hat{\mathbf{v}}_0=u_1\frac{\partial}{\partial a_1}+\cdots+u_n\frac{\partial}{\partial a_n}$$
$$=u_1\frac{\partial x_i}{\partial a_1}\frac{\partial}{\partial x_i}+\cdots+u_n\frac{\partial x_i}{\partial a_n}\frac{\partial}{\partial x_i}$$

となるので、$\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ の項の係数のみをまとめると、

$$u_1\frac{\partial x_i}{\partial a_1}+\cdots+u_n\frac{\partial x_i}{\partial a_n}$$
$$=\left(u_1\frac{\partial}{\partial a_1}+\cdots+u_n\frac{\partial}{\partial a_n}\right)x_i=\mathbf{v}_0\ x_i$$

一方、

$$\mathbf{v}_0\mathbf{x}=\mathbf{v}_0\exp(t\,\hat{\mathbf{v}}_0)\mathbf{a}$$
$$=\exp(t\,\hat{\mathbf{v}}_0)\mathbf{v}_0\mathbf{a}=\exp(t\,\hat{\mathbf{v}}_0)\mathbf{u}=\mathbf{v}$$

であるので、

$$\mathbf{v}_0x_i=v_i$$

となる。これから、$\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ の係数がv_i であるので、

$$\hat{\mathbf{v}}_0=\hat{\mathbf{v}}$$

となることが示せたことになる。

さて、$\hat{\mathbf{v}}=\mathbf{v}\bullet\nabla$ としたが、右辺は、内積であるので、直交座標変換に対して不変である（実は

一般座標変換に対しても不変なのであるが・・)。一方、普通の内積とは異なり、これはベクトル、$\mathbf{v}$ のみで決まるものである。よって、ベクトル解析の視点ではあくまでもスカラー量なのであるが、何となくベクトル的でもあるようにも思える。ついでに言えば、$(\mathbf{v}\bullet\nabla)\mathbf{x}=\mathbf{v}$ でもある。このようなことから、ベクトル解析上では、

$$\mathbf{v}=v_1\mathbf{e}_1+\cdots+v_n\mathbf{e}_n$$

とし、演算子として見るときは、「∧ 」記号をとって、

$$\mathbf{v}=v_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+v_n\frac{\partial}{\partial x_n}$$

としてもよいであろう。つまり、必要に応じて、

$$\mathbf{e}\ \leftrightarrow\ \frac{\partial}{\partial x}$$

と適当に入れ換えて考えるのである。しかし、ベクトル解析でも座標変換では、右側の見方の方がはるかに優れている（変換の仕方を覚えている必要がないのである。上の証明でも使ったように単なる chain rule で計算できるのである)。また、普通のベクトルのように基底ベクトルがベクトルらしくないものもあるので、上のような入れ換えもしないで、上の関係の「右翼」に留まる方がよいようにも思える。しかしながら、

$$\left\langle\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right\rangle$$

が基底の間の内積であると言われてしまうと、普通人の普通の感覚では拒否反応が起きてしまうであろう。何とかしてもらえないものかと思ってしまうのであるが・・・

［付記］部分和（partial sum）の方法

英語では、部分積分法を integration by parts と言い、部分和の方法は partial sum と言われる。このように言われると、なんとなく別物であるような感じを受けるが、その点、日本語だと二つの方法は（積分とは所詮、たし算の拡張であると思うと）全く同じものであろうということが暗示されている。さて、我々は、解析の初めの方で、級数の収束について学び、収束の判定法のいくつかを教わるが、多分、すべてをマスターしている方は多くはないであろう（相当、マニアックでない限りはいないのではないかと思われる)。そして、Abel の定理などで部分和の方法が出てくるころには、疲れてしまってきちんと勉強しないで終わってしまっているのではないかと思われる。しかし、部分積分法は、積分で最も強力な手段であることを考えると、部分和の方法も同様に強力であろうと考えるのは自然なことであろう。そして、実際に、強力なのである。

しかしながら、一般に高学歴になるにつれて、(たとえば、情報過多で能力、体力不足に陥り）たし算のような機械的な作業ができなくなってくる傾向（一種の退化傾向）にあるようであるので、ここでは、積分と和との類似を使って、部分和の方法のイメージ的な説明を行うことにしよう（説明も簡単になるし、イメージに従って正確な表式に直すことも容易であろう)。よって、等式も全く等式ではなく、発散か収束かを示す指標ぐらいであると思っていただきたい（しかし、大方はかなり高精度で等式が成り立っているのであるが・・・）

ここでの類似とは、

$$\sum_n a_n=\int a(n)dn$$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{da(n)}{dn}$$

とすることである。ただし、後者については、適宜、微分を差分のままにすることもある。

ディリクレの判定法（Dirichlet's test）

これは以下のようなものである。

数列、a_n は減少列（非増加列)、$a_{n+1}\le a_n$ で、$\lim_{n\to\infty}a_n=0$ とする。また、数列、b_n からなる級数和、$\sum_n b_n$ は、有界（bounded）であるとする（$\left|\sum_n b_n\right|\le M$)。

すると、

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$$

は収束するというものである（**コメント：数列、a_n を a_1 で規格化すると、$\sum_n b_n$ は有界であるので、各項に１より小さい数をかけるのであるから、収束する方向と**

なり、さらに、a_n はゼロに近づくのであるから、上の級数は収束するであろうと推測される。しかし、a_n は減少としか仮定していないので、例えば、いつまでも1に近いままであるとすると、たとえ a_n はゼロに近づいても a_n の級数和は発散する。つまり、このような発散級数を考えても、上の級数は収束するということを言っているである。これはそれほど明らかなことではないであろう）

さて、イメージによる、この証明は以下のとおりである。

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_n = \int_1^n b(k)\,dk = B(n),\ \left(B(1)=0\right)$$

とすると、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \int_1^{\infty} a(n)\,b(n)\,dn$$

$$= a(n)\,B(n)\Big|_1^{\infty} - \int_1^{\infty} a'(n)\,B(n)\,dn$$

すると、$a'(n) = a_{n+1} - a_n$ は常に負（正ではない）であるので、

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n\right| \le M\int_1^{\infty} -a'(n)\,dn = M\left(-a(n)\right)\Big|_1^{\infty}$$

$$= Ma(1)$$

となる。これでイメージによる証明ができたことになる。ただし、数式をそのまま受け入れてはいけないのは当然であるが・・・

Dirichlet's test の応用例

次のような級数を考えよう。

$$e^{i\theta} + \frac{e^{2i\theta}}{2} + \cdots + \frac{e^{ni\theta}}{n} + \cdots$$

ここで、$a_n = \dfrac{1}{n}$，$b_n = e^{in\theta}$ とおくと、

$$|B_n| = \left|e^{i\theta}\frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}}\right| = \left|\frac{\sin\dfrac{n\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}\right|$$

となり、$\theta = 0$ 以外では、B_n は有界であるので、この級数は収束することがわかる（ただし、$\theta = 0$ の時は、よく知られているように発散する）。

アーベルの（連続性）定理（Abel's theorem）

この内容は、以下のとおりである。

$$f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

が収束するとしよう。すると、

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

は、$|z| < 1$ で収束し、かつ、

$$\lim_{z\to 1} f(z) = f(1)$$

となる。つまり、$z = 1$ で（近づき方によっては）連続になるということである。ただし、$z \to 1$ は、$|z| < 1$ で、

$$\frac{|1-z|}{1-|z|}$$

が有限であるように、1 に近づくものとするのである（ストルツ角（Stolz angle）内から近づくとする（これについては、後述のコメントを参照のこと）。簡単に言えば、単位円の円周はむやみに近づきすぎないようにして、（素直に）1に近づくのである）。

いま、（Abel の定理の証明に使われるように）最初から、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ の極限値を差し引いておくのである。すると、

$$f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$$

であると、仮定するのである。また、

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k\ ,\quad s_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k$$

とおき、例により、

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_n = \int_0^n a(k)\,dk = A(n),\ \left(A(0)=0\right)$$

とすると（注：$A_0 = a_0$ であるのであるが・・）、

$$s_n(n) = \int_n^{\infty} a(n)\,z^n\,dn =$$

$$A(n)\,z^n\Big|_n^{\infty} - \int_n^{\infty} A(n)\frac{dz^n}{dn}\,dn$$

ここで、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ はゼロに収束するので、任意の ε に対して、n が十分大きいと、$|A(n)| < \varepsilon$ となる。また、n に関する微分は、差分に置き換えることにすると、最後の式の第二項は、

$$\left|\int_n^\infty A(n)\frac{dz^n}{dn}dn\right| = \int_n^\infty A(n) z^n (z-1)\, dn$$

$$\le \varepsilon|1-z|\int_0^\infty |z|^n\, dn = \varepsilon|1-z|\sum_{n=0}^{\infty}|z|^n$$

$$= \frac{\varepsilon|1-z|}{1-|z|}$$

最後の式の第一項は、明らかに、$<\varepsilon$ であるので、$z\to 1$ のとき、

$$\frac{|1-z|}{1-|z|}$$

がある有限値を越えないとすると、

$$|f(z)-S_n(z)| < \varepsilon$$

と抑えることができる（ε は再定義することにして・・）。明らかに、$S_n(z)$ は多項式であるので、

$$\lim_{z\to 1} S_n(z) = S_n(1) = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

である。よって、

$$\left|\lim_{z\to 1} f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k\right| < \varepsilon$$

以上でアーベルの定理が証明できたことになる。

ストルツ角（Stolz angle）へのコメント

これを理解するには、図で考えた方がよい。**図 D-1** に示すような記号を用いると、

$$r = |z|,\ s = |1-z|$$

であり、

$$r^2 = 1 + s^2 - 2s\cos\theta$$

であることを使うと、

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} = \frac{s}{1-r} = \frac{1+r}{2\cos\theta - s}$$

となることがわかる。これから、角度、θ が α（ストルツ角）を越えないようにすると、

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} < \frac{2}{2\cos\alpha - s}$$

と評価される。さらに、z が1 に近いとき、つまり s がゼロに近いときを考えることにすると、$s < \cos\alpha$ としてもよいであろう。よって、

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} < \frac{2}{\cos\alpha}$$

という簡単な評価式が得られる。よって、z が $|z|<1$ で、ストルツ角の内側から、1 に近づくとすると、左辺はある有限値で抑えられることがわかるのである。

最後によく知られている例を挙げておこう。

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+x^2}dx = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

である。また、

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

は交代級数であるので、収束する。よって、アーベルの定理から、

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \frac{\pi}{4}$$

また、

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+x}dx = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

であり、

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1}$$

は同じく交代級数であるので、収束する。よって、

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots = \log 2$$

以上でかなり偏った「微分とテーラー展開」の話は終わりにするが、たまには初心に帰って数学の基礎を復習するのも悪くないと思っていただければ幸いである。

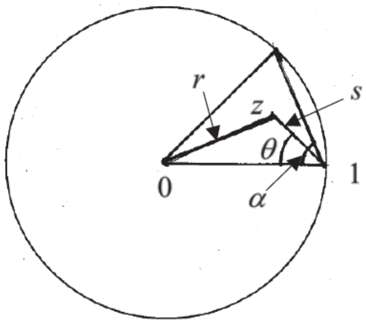


図 D-1. Stolz angle α