

# 陽子加速器の加速管

## はじめに

電子や陽子等の荷電粒子の加速に用いられる加速管は、進行波型 (traveling-wave type) 加速管と定在波型 (standing-wave type) 加速管に分けられる。進行波型加速管は主に電子の加速に用いられ、高周波の電磁場が電子の速度と同期して加速管の中を進行する。<sup>\*1</sup> 一方定在波型加速管では、空洞共振器内に生じる定在波の電場を荷電粒子の加速に用いている。電子と陽子についてそれらのエネルギーと速度  $\beta = v/c$  の関係を示した図 1 からわかるように、エネルギーを与えても陽子の速度は電子ほど急激に上がっていかない。速度が光速に比べて十分小さい陽子の加速においては、この定在波型加速管が用いられる。

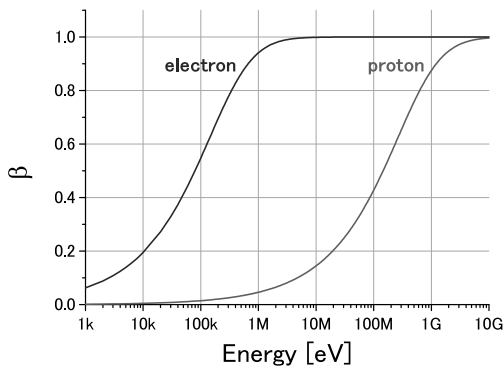


図 1 エネルギーと速度  $\beta$  の関係

通常、陽子の線形加速器 (本テキストではリニアックと呼ぶ) では、複数の加速管構造が採用される。これは、そのエネルギー領域によって効率の良い加速管構造が異なるからである。日本の大強度陽子加速器施設 J-PARC (Japan Proton Accelerator Research Complex) のリニアックにおいては、

<sup>\*1</sup> 導波管を伝搬する電磁波の位相速度  $v_p$  は光速  $c$  より大きい (後述)。そこで、導波管に穴の空いた円盤を周期的に設置することにより、位相速度を電子の速度  $v_e \approx c$  に合わせる。

- RFQ (Radio-Frequency Quadrupole)<sup>\*2</sup>
- DTL (Drift Tube Linac)<sup>\*3</sup>
- ACS (Annular-ring Coupled Structure)<sup>\*4</sup>

と複数の種類の加速管により、イオン源で生成した大強度の陽子ビーム<sup>\*5</sup>を 400MeV まで加速する。本講義では、電磁気学を基礎として、これら定在波型加速管の基礎的事項を解説する。

<sup>\*2</sup> 高周波四重極型加速管。本テキストでは解説していないが、大強度陽子リニアックにおいて非常に重要な加速管。

<sup>\*3</sup> 後述するアルバレ型加速管。

<sup>\*4</sup> 後述する  $\pi/2$  モード結合空洞型加速管の一つ。

<sup>\*5</sup> 正確には、負水素イオン  $H^-$  ビーム。

# 1 電磁波の基本性質

## 1.1 マクスウェルの方程式

次の4つの式

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{i} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.4)$$

をまとめて、マクスウェルの方程式 (Maxwell's equations) という。<sup>\*6</sup> 各記号は、

$\vec{E}$  : 電場 (強度) (Electric field intensity)

$\vec{H}$  : 磁場 (強度) (Magnetic field intensity)

$\vec{D}$  : 電束密度 (Electric flux density)

$\vec{B}$  : 磁束密度 (Magnetic flux density)

$\vec{i}$  : 電流密度 (Electric current density)

$\rho$  : 電荷密度 (Electric charge density)

を表す。またこれらは、

$\epsilon$  : 誘電率 (Permittivity of the dielectric)

$\mu$  : 透磁率 (Permeability of the material)

$\sigma$  : 電気伝導率 (Electrical conductivity)

として

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (1.5)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (1.6)$$

$$\vec{i} = \sigma \vec{E} \quad (1.7)$$

を満たす。

真空中の光の速さ  $c$  は、真空の誘電率  $\epsilon_0$

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ [F/m]}$$

および、真空の透磁率  $\mu_0$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ [H/m]}$$

<sup>\*6</sup> 式 (1.2), (1.3) と、ベクトル解析の公式  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$  を用いることにより、電荷の保存則

$$\nabla \cdot \vec{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

が得られる。

を用いて、

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.99792458 \times 10^8 \text{ [m/s]}$$

と表すことができる。

真空中 (電流密度  $\vec{i} = 0$ 、電荷密度  $\rho = 0$ ) の電磁波を考えよう。このとき、式 (1.1) および式 (1.2) は

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (1.8)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.9)$$

となる。これらの式を  $t$  で微分して、ベクトル解析の公式  $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$  を用いると、次の波動方程式

$$\nabla^2 \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = 0 \quad (1.10)$$

が得られる。角周波数  $\omega$  を用いて、 $\vec{E}, \vec{H} \propto e^{j\omega t}$  とすると、式 (1.10) は、ヘルムホルツ方程式

$$\nabla^2 \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = 0 \quad (1.11)$$

となる。

## 1.2 真空中の平面電磁波

直行座標系の中で、真空中を  $+z$  方向に進む平面電磁波を考えよう。このとき、式 (1.11) は

$$\frac{d^2}{dz^2} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = 0 \quad (1.12)$$

となる。よって、 $+z$  方向に進む平面電磁波は、波数  $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  を用いて、

$$\begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{H}_0 \end{pmatrix} e^{j(\omega t - k_0 z)} \quad (1.13)$$

と書ける。次に、これを直角座標系の各成分に書き分けると、

$$\begin{aligned} E_x &= E_{0x} e^{j(\omega t - k_0 z)}, & H_x &= H_{0x} e^{j(\omega t - k_0 z)} \\ E_y &= E_{0y} e^{j(\omega t - k_0 z)}, & H_y &= H_{0y} e^{j(\omega t - k_0 z)} \\ E_z &= E_{0z} e^{j(\omega t - k_0 z)}, & H_z &= H_{0z} e^{j(\omega t - k_0 z)} \end{aligned} \quad (1.14)$$

となる。これを式 (1.8), (1.9) に代入することにより、次の関係を得る。

$$\begin{aligned}\sqrt{\varepsilon_0}E_{0x} &= \sqrt{\mu_0}H_{0y} \\ -\sqrt{\varepsilon_0}E_{0y} &= \sqrt{\mu_0}H_{0x} \\ E_{0z} &= 0, \quad H_{0z} = 0\end{aligned}\quad (1.15)$$

よって、真空中の平面電磁波が、次の基本性質をもつことがわかる。

1. 電磁場は進行方向に対して垂直であり、進行方向にその成分をもたない。このような波を、TEM 波 (Transverse electromagnetic waves) と呼ぶ。
2. 電場と磁場は互いに垂直であり ( $\vec{E} \cdot \vec{H} = 0$ )、これらは次の関係をもつ。

$$\frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = Z_0 \quad (1.16)$$

ここで、 $Z_0$  は特性インピーダンス (Characteristic impedance) と呼ばれ、真空中では  $Z_0 = 376.7 \text{ [Ohm]} \approx 120\pi \text{ [Ohm]}$  である。また、電場と磁場は同位相である。

3. 電磁波の進む方向は、ポインティングベクトル (Poynting vector)

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (1.17)$$

の向きと一致する。またその速さ  $v_p$  は、

$$v_p = \frac{\omega}{k_0} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = c \quad (1.18)$$

となり、真空中の光の速さ  $c$  と一致する。

### 1.3 電磁場のエネルギーとポインティングベクトル

電気エネルギー密度  $u_e$  は

$$u_e = \frac{1}{2}\varepsilon\vec{E} \cdot \vec{E} \quad (1.19)$$

ある空間 (体積  $V$ ) 内の電気エネルギー  $U_e$  は

$$U_e = \iiint_V \frac{1}{2}\varepsilon\vec{E} \cdot \vec{E} dV \quad (1.20)$$

と記述される。また、磁気エネルギー密度  $u_m$  は

$$u_m = \frac{1}{2}\mu\vec{H} \cdot \vec{H} \quad (1.21)$$

ある空間 (体積  $V$ ) 内の磁気エネルギー  $U_m$  は

$$U_m = \iiint_V \frac{1}{2}\mu\vec{H} \cdot \vec{H} dV \quad (1.22)$$

と記述される。

式 (1.17) で表されるポインティングベクトルの発散

$$\nabla \cdot \vec{S} = \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \quad (1.23)$$

について考えよう。これは、ベクトル解析の公式  $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$ 、および式 (1.1), (1.2) を用いて、

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{S} &= -\mu\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{i} - \varepsilon\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2}\varepsilon\vec{E} \cdot \vec{E} + \frac{1}{2}\mu\vec{H} \cdot \vec{H} \right) - \vec{E} \cdot \vec{i} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} (u_e + u_m) - \vec{E} \cdot \vec{i}\end{aligned}\quad (1.24)$$

と書ける。この両辺を閉空間 (体積  $V$ 、表面積  $S'$ ) で積分すると、左辺はガウスの積分定理を用いて

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{S} dV = \iint_{S'} \vec{S} \cdot \vec{n} dS' \quad (1.25)$$

と表され ( $\vec{n}$  は閉曲面上で外向きの単位法線ベクトル)、右辺は

$$\begin{aligned}-\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (u_e + u_m) dV - \iint_{S'} \vec{E} \cdot \vec{i} dV \\ = -\frac{\partial}{\partial t} (U_e + U_m) - \iint_{S'} \vec{E} \cdot \vec{i} dV\end{aligned}\quad (1.26)$$

と表される。よって、

$$\begin{aligned}-\frac{\partial}{\partial t} (U_e + U_m) \\ = \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{i} dV + \iint_{S'} \vec{S} \cdot \vec{n} dS'\end{aligned}\quad (1.27)$$

となり、左辺は単位時間に減少する閉空間内の電磁場エネルギーを、右辺第一項は単位時間に閉空間内でジュール熱 (電圧  $\times$  電流) として失われるエネルギーを表している。エネルギーの保存則により、右辺第二項は、単位時間に閉曲面から外に出る電磁場のエネルギーを表すと解釈することができる。つまり、ポインティングベクトルは、単位時間に単位面積を通過する電磁場のエネルギーを意味することがわかる。

電磁場のエネルギーは時間とともに変化するの  
で、これを時間平均で表そう。角周波数  $\omega$  を用い  
て、電場および磁場を

$$\begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{H}_0 \end{pmatrix} e^{j\omega t} \quad (1.28)$$

と表すと、電気エネルギー密度  $u_e$  の時間平均  $w_e$   
は、

$$w_e = \frac{1}{4} \varepsilon \vec{E} \cdot \vec{E}^* \quad (1.29)$$

磁気エネルギー密度  $u_m$  の時間平均  $w_m$  は、

$$w_m = \frac{1}{4} \mu \vec{H} \cdot \vec{H}^* \quad (1.30)$$

と書ける。<sup>\*7</sup> ここで、式中の \* は、複素共役を表  
す。つまり、任意の複素数  $z$  について、その実部  
を  $\text{Re}\{z\} = x$ 、虚部を  $\text{Im}\{z\} = y$  と表すと、

$$\begin{aligned} z &= x + jy \\ z^* &= x - jy \end{aligned} \quad (1.31)$$

である。また、ポインティングベクトル  $\vec{S}$  の時間  
平均  $\langle \vec{S} \rangle$  は、

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}\{\vec{E} \times \vec{H}^*\} \quad (1.32)$$

<sup>\*7</sup>  $\vec{E}, \vec{H}$  の各成分を

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{0x} e^{j\omega t} \\ E_{0y} e^{j\omega t} \\ E_{0z} e^{j\omega t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |E_{0x}| e^{j\theta_{ex}} e^{j\omega t} \\ |E_{0y}| e^{j\theta_{ey}} e^{j\omega t} \\ |E_{0z}| e^{j\theta_{ez}} e^{j\omega t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{0x} e^{j\omega t} \\ H_{0y} e^{j\omega t} \\ H_{0z} e^{j\omega t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |H_{0x}| e^{j\theta_{mx}} e^{j\omega t} \\ |H_{0y}| e^{j\theta_{my}} e^{j\omega t} \\ |H_{0z}| e^{j\theta_{mz}} e^{j\omega t} \end{pmatrix}$$

と書くと、 $u_e$  は

$$\begin{aligned} u_e &= \frac{1}{2} \varepsilon ((\text{Re}\{E_x\})^2 + (\text{Re}\{E_y\})^2 + (\text{Re}\{E_z\})^2) \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon (|E_{0x}|^2 \cos^2(\omega t + \theta_{ex}) \\ &\quad + |E_{0y}|^2 \cos^2(\omega t + \theta_{ey}) \\ &\quad + |E_{0z}|^2 \cos^2(\omega t + \theta_{ez})) \end{aligned}$$

となる。よって、 $u_e$  の時間平均  $w_e$  は、

$$\begin{aligned} w_e &= \frac{1}{2} \varepsilon \left( \frac{1}{2} |E_{0x}|^2 + \frac{1}{2} |E_{0y}|^2 + \frac{1}{2} |E_{0z}|^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \varepsilon \vec{E} \cdot \vec{E}^* \end{aligned}$$

と表せる。同様に、 $u_m$  の時間平均  $w_m$  は、

$$\begin{aligned} w_m &= \frac{1}{2} \mu \left( \frac{1}{2} |H_{0x}|^2 + \frac{1}{2} |H_{0y}|^2 + \frac{1}{2} |H_{0z}|^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \mu \vec{H} \cdot \vec{H}^* \end{aligned}$$

と表せる。

と書ける。<sup>\*8</sup> また一般に、

$$\text{Re}\{\vec{E} \times \vec{H}^*\} = \frac{1}{2} \{(\vec{E} \times \vec{H}^*) + (\vec{E}^* \times \vec{H})\} \quad (1.33)$$

が成り立つので、ポインティングベクトルの時間  
平均  $\langle \vec{S} \rangle$  の発散は、

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \langle \vec{S} \rangle &= \frac{1}{4} \{ \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^*) + \nabla \cdot (\vec{E}^* \times \vec{H}) \} \\ &= -\frac{1}{4} \varepsilon \left( \vec{E}^* \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}^*}{\partial t} \right) \\ &\quad - \frac{1}{4} \mu \left( \vec{H}^* \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}^*}{\partial t} \right) \\ &\quad - \frac{1}{4} \sigma (\vec{E}^* \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \vec{E}^*) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4} \varepsilon \vec{E} \cdot \vec{E}^* + \frac{1}{4} \mu \vec{H} \cdot \vec{H}^* \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sigma \vec{E} \cdot \vec{E}^* \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} (w_e + w_m) - \langle \vec{E} \cdot \vec{i} \rangle \end{aligned} \quad (1.34)$$

となる。この両辺を閉空間（体積  $V$ 、表面積  $S'$ ）

<sup>\*8</sup> 例えば、 $\vec{S}$  の  $x$  成分  $S_x$  は、

$$\begin{aligned} S_x &= \text{Re}\{E_y\} \text{Re}\{H_z\} - \text{Re}\{E_z\} \text{Re}\{H_y\} \\ &= |E_{0y}| |H_{0z}| \cos(\omega t + \theta_{ey}) \cos(\omega t + \theta_{mz}) \\ &\quad - |E_{0z}| |H_{0y}| \cos(\omega t + \theta_{ez}) \cos(\omega t + \theta_{my}) \\ &= \frac{1}{2} |E_{0y}| |H_{0z}| \{ \cos(2\omega t + \theta_{ey} + \theta_{mz}) \\ &\quad + \cos(\theta_{ey} - \theta_{mz}) \} \\ &\quad - \frac{1}{2} |E_{0z}| |H_{0y}| \{ \cos(2\omega t + \theta_{ez} + \theta_{my}) \\ &\quad + \cos(\theta_{ez} - \theta_{my}) \} \end{aligned}$$

となる。よって、 $S_x$  の時間平均  $\langle S_x \rangle$  は、

$$\begin{aligned} \langle S_x \rangle &= \frac{1}{2} \{ |E_{0y}| |H_{0z}| \cos(\theta_{ey} - \theta_{mz}) \\ &\quad - |E_{0z}| |H_{0y}| \cos(\theta_{ez} - \theta_{my}) \} \\ &= \frac{1}{2} (\text{Re}\{E_y H_z^*\} - \text{Re}\{E_z H_y^*\}) \\ &= \frac{1}{2} \text{Re}\{(\vec{E} \times \vec{H}^*)_x\} \end{aligned}$$

と書ける。つまり、 $\vec{S}$  の時間平均  $\langle \vec{S} \rangle$  は、

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}\{\vec{E} \times \vec{H}^*\}$$

と表せる。

で積分し、ガウスの積分定理を用いると、

$$-\frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m) = \iiint_V \langle \vec{E} \cdot \vec{i} \rangle dV + \iint_{S'} \langle \vec{S} \rangle \cdot \vec{n} dS' \quad (1.35)$$

が得られる。これは、時間平均についても、式(1.27)のエネルギー保存則が成り立つことを表している。

例えば、真空中を $+z$ 方向に進む平面電磁波について、その電磁場のエネルギーとポインティングベクトルの関係を調べよう。電磁場のエネルギー密度を $u = u_e + u_m$ として、ポインティングベクトル $S_z$ が

$$S_z = cu \quad (1.36)$$

電磁場のエネルギー密度の時間平均を $w = w_e + w_m$ として、ポインティングベクトルの時間平均 $\langle S_z \rangle$ が

$$\langle S_z \rangle = cw \quad (1.37)$$

と表されることが、簡単な計算により確かめられる。つまり、電磁場のエネルギーが平面波の進行方向に光速 $c$ で伝搬していることを表している。

#### 1.4 表皮効果

$+z$ 方向に進む平面電磁波について、電気伝導率 $\sigma \neq 0$ の場合を考えよう。式(1.1)および式(1.2)を $t$ で微分して、ベクトル解析の公式 $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$ を用いると、

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} &= (\omega^2 \epsilon \mu - j\omega \sigma \mu) \vec{E} \\ \nabla(\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H} &= (\omega^2 \epsilon \mu - j\omega \sigma \mu) \vec{H} \end{aligned} \quad (1.38)$$

を得る。ここで、 $\vec{E}, \vec{H}$ について、平面波であることから、 $\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \vec{H} = 0$ となる。そして、 $x$ 軸と $y$ 軸をそれぞれ電場の向きと磁場の向きに一致するように選ぶと、上式は

$$\frac{d^2}{dz^2} \begin{pmatrix} E_x \\ H_y \end{pmatrix} + (\omega^2 \epsilon \mu - j\omega \sigma \mu) \begin{pmatrix} E_x \\ H_y \end{pmatrix} = 0 \quad (1.39)$$

となる。次に、複素数 $n = \beta - j\alpha$ を用いて

$$\omega^2 \epsilon \mu - j\omega \sigma \mu = n^2 = (\beta - j\alpha)^2 \quad (1.40)$$

とすると、上の微分方程式の解は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_x \\ H_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E_{0x} \\ H_{0y} \end{pmatrix} e^{j(\omega t - nz)} \\ &= \begin{pmatrix} E_{0x} \\ H_{0y} \end{pmatrix} e^{-\alpha z} \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} \end{aligned} \quad (1.41)$$

と書け、電磁場が $e^{-\alpha z}$ で減衰することがわかる。また、式(1.40)の実数部と虚数部から、 $\alpha$ と $\beta$ がそれぞれ

$$\alpha^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \epsilon \mu \left( \sqrt{\frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2} + 1} - 1 \right) \quad (1.42)$$

$$\beta^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \epsilon \mu \left( \sqrt{\frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2} + 1} + 1 \right) \quad (1.43)$$

と書けることがわかる。

特性インピーダンス $Z$ は、式(1.41)を式(1.1)に代入することにより、

$$Z = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\omega \mu}{\alpha^2 + \beta^2} (\beta + j\alpha) \quad (1.44)$$

と得られる。つまり、電場の位相が磁場の位相に比べて $\theta = \tan^{-1}(\alpha/\beta)$ だけ進んでいることを示している。電気伝導率 $\sigma$ と位相差 $\theta$ の関係を、図2に示す。真空中では $\sigma = 0$ であるから、 $\alpha = 0$ 、 $\beta = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = k_0$ となり、電場と磁場が同位相で、減衰は生じない。一方、 $\sigma$ が十分大きくなると、電場と磁場の位相差が $45^\circ$ となり、電磁波が進むにつれて減衰する。

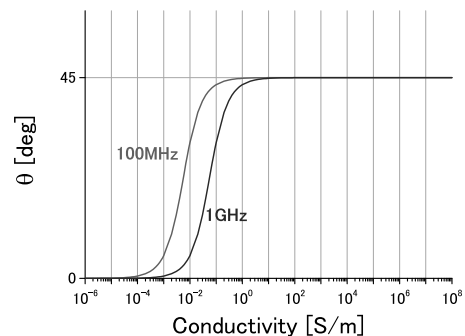


図2 電気伝導率と位相差

通常金属導体では、 $\sigma \simeq 10^7$  [S/m]、 $\epsilon \simeq \epsilon_0$ であるので、 $\sigma/\omega \epsilon \simeq 10^{18}/\omega$ となり、 $\omega$ が非常に大きくならない限り、 $\sigma/\omega \epsilon \gg 1$ の関係が成り立つ。

ゆえに導体中では、式 (1.42), (1.43) から

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{1}{\delta} \quad (1.45)$$

となる。よって、導体中の電磁波の電場と磁場は、

$$\begin{pmatrix} E_x \\ H_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{0x} \\ H_{0y} \end{pmatrix} e^{-z/\delta} \cdot e^{j(\omega t - z/\delta)} \quad (1.46)$$

となる。ここで、

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad (1.47)$$

を表皮の厚さ (Skin depth) と呼ぶ。金属導体の場合、電気伝導率  $\sigma$  が大きいので、表皮の厚さ  $\delta$  は非常に小さい。導体内部に入射した電磁波は、 $e^{-z/\delta}$  の項によって急速に減衰する。このような現象を表皮効果 (Skin effect) と呼ぶ。表皮効果によって、電磁場は  $z = \delta$  の位置で、表面 ( $z = 0$ ) に比べて  $e^{-1}$  減少する。銅 ( $\sigma = 5.8 \times 10^7$ ) とアルミニウム ( $\sigma = 3.8 \times 10^7$ ) について、周波数  $f$  と表皮厚さ  $\delta$  の関係を図 3 に示す。

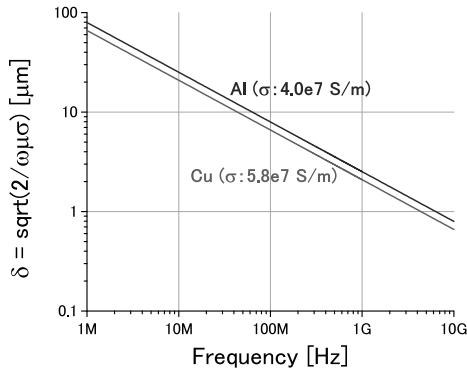


図 3 周波数と表皮の厚さ

導体中を  $+z$  方向に進む平面電磁波 (電場の向きに  $x$  軸、磁場の向きに  $y$  軸を選ぶ) について、特性インピーダンス  $Z$  は、式 (1.45) を式 (1.44) に代入することにより、

$$Z = \frac{E_x}{H_y} = (1+j) \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = (1+j)R_s \quad (1.48)$$

と得られる。ここで、

$$R_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = \frac{1}{\delta\sigma} \quad (1.49)$$

を表皮抵抗 (skin resistance) と呼ぶ。よって、このときのポインティングベクトルの時間平均  $\langle S_z \rangle$  は、

$$\begin{aligned} \langle S_z \rangle &= \frac{1}{2} \text{Re}\{E_x H_y^*\} \\ &= \frac{1}{2} \text{Re}\{(1+j)R_s H_y H_y^*\} \\ &= \frac{1}{2} R_s H_y H_y^* \end{aligned} \quad (1.50)$$

となる。

## 1.5 境界条件 電場の接線成分

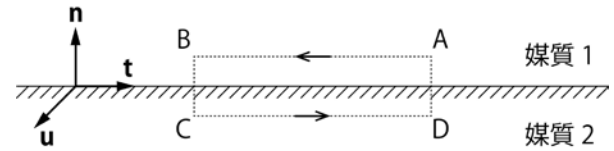


図 4 電磁場の接線成分

図 4 のように、境界面に平行な 2 本の線分 AB, CD をとり、面に交差する閉曲線 ABCD を作る。そして、この線分 AB, CD の長さを  $\Delta l$ 、線分 BC, DA の長さを  $\Delta d$  とする。また、境界における単位接線ベクトルを  $\vec{t}$ 、単位法線ベクトルを  $\vec{n}$  とし、単位ベクトル  $\vec{u}$  を、 $\vec{u} = \vec{t} \times \vec{n}$  とする。この閉曲線 ABCD 上で電場  $\vec{E}$  の線積分を考えよう。これは、この閉曲線 ABCD 上の単位接線ベクトルを  $\vec{t}$  としてストークスの定理と式 (1.1) を用いることにより、

$$\begin{aligned} \oint_{ABCD} \vec{E} \cdot \vec{t} ds &= \iint_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{u} dS \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot \vec{u} dS \\ &= -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.51)$$

と表せる。 $\Phi$  は曲面 ABCD をつらぬく磁束を表す。ここで、 $E_{t1}, E_{t2}$  をそれぞれ媒質 1, 2 における電場の接線成分として、 $\Delta d$  (線分 BC, DA) を十分小さくしてやれば、式 (1.51) は

$$-E_{t1} \Delta l + E_{t2} \Delta l = 0 \quad (1.52)$$



となる。これにより、電場の接線成分について境界条件

$$E_{t1} = E_{t2} \quad (1.53)$$

が得られる。すなわち、電場の接線成分は両媒質の境界面で連続である。

次に、媒質 1 が空気（または真空）、媒質 2 が  $\sigma = \infty$  の完全導体である場合を考えよう。完全導体の中には電磁波は侵入せず、電磁場は 0 である。つまり、 $E_{t2} = 0$  であるから、

$$E_{t1} = 0 \quad (1.54)$$

となり、電磁波の電場は導体表面に平行な成分をもたないことがわかる。

### 磁場の接線成分

同様に、図 4 の閉曲線 ABCD 上で磁場  $\vec{H}$  の線積分を考えよう。これも、ストークスの定理と式 (1.2) を用いることにより、

$$\begin{aligned} \oint_{\text{ABCD}} \vec{H} \cdot \vec{t} ds &= \iint_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot \vec{u} dS \\ &= \iint_S \vec{j} \cdot \vec{u} dS + \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{D} \cdot \vec{u} dS \end{aligned} \quad (1.55)$$

と表せる。ここで、 $H_{t1}, H_{t2}$  をそれぞれ媒質 1, 2 における磁場の接線成分として、 $\Delta d$ （線分 BC, DA）を十分小さくしてやれば、式 (1.55) は

$$-H_{t1}\Delta l + H_{t2}\Delta l = 0 \quad (1.56)$$

となる。これにより、磁場の接線成分について境界条件

$$H_{t1} = H_{t2} \quad (1.57)$$

が得られる。すなわち、磁場の接線成分も境界面で連続である。

次に、媒質 1 が空気（または真空）、媒質 2 が  $\sigma = \infty$  の完全導体である場合を考えよう。このとき、式 (1.55) の右辺第一項

$$\iint_S \vec{j} \cdot \vec{u} dS = \sigma \vec{E} \cdot \vec{u} \Delta l \Delta d \quad (1.58)$$

は、 $\Delta d \rightarrow 0$  で 0 とはならない。ここで、表面電流密度  $\vec{i}_s = \vec{j} \Delta d$  を用いると、式 (1.55) は

$$-H_{t1}\Delta l + H_{t2}\Delta l = \vec{i}_s \cdot \vec{u} \Delta l \quad (1.59)$$

となる。また、完全導体の中には電磁波は侵入せず、磁場は 0 である。つまり、 $H_{t2} = 0$  であるから、

$$H_{t1} = \vec{i}_s \cdot (-\vec{u}) \quad (1.60)$$

となり、磁場によって  $\vec{n} \times \vec{H}_1$  の方向に大きさ  $|H_{t1}|$  の表面電流が流れることがわかる。

### 電束密度の法線成分

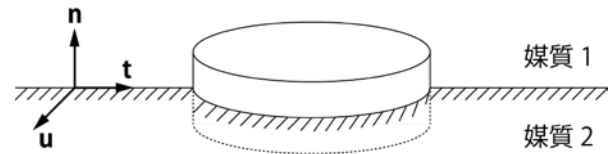


図 5 電磁場の法線成分

図 5 のように、境界面にまたがった 2 つの面で作られる円柱形について考えよう。これらの面は境界面に平行で、面積を  $\Delta S$  とし、この円柱の高さを  $\Delta d$  とする。この円柱形閉曲面（体積  $V$ 、表面積  $S'$ ）について、電束密度  $\vec{D}$  にガウスの発散定理を用いると

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{D} dV = \iint_{S'} \vec{D} \cdot \vec{n}' dS' \quad (1.61)$$

となる（ $\vec{n}'$  は閉曲面上で外向きの単位法線ベクトル）。ここで、式 (1.3) を用いると、これは

$$\iiint_V \rho dV = \iint_{S'} \vec{D} \cdot \vec{n}' dS' \quad (1.62)$$

となる。円柱が十分薄い（ $\Delta d$ ）としてその側面より出る電束を無視すると、上式は

$$\rho \Delta S \Delta d = D_{n1} \Delta S - D_{n2} \Delta S \quad (1.63)$$

となる。ここで、表面電荷密度  $\rho_s = \rho \Delta d$  を用いると、電束密度の法線成分について、境界条件

$$D_{n1} - D_{n2} = \rho_s \quad (1.64)$$

が得られる。

次に、媒質 1 が空気（または真空）、媒質 2 が  $\sigma = \infty$  の完全導体である場合を考えよう。完全導体の中には電磁波は侵入せず、電磁界は 0 である。つまり、 $D_{n2} = 0$  であるから、

$$D_{n1} = \rho_s \quad (1.65)$$

となる。

### 磁束密度の法線成分

図 5 の円柱形閉曲面（体積  $V$ 、表面積  $S'$ ）について、磁束密度  $\vec{B}$  にガウスの発散定理を用いると

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{B} dV = \iint_{S'} \vec{B} \cdot \vec{n}' dS' \quad (1.66)$$

となる。ここで、式 (1.4) を用いると、これは

$$0 = \iint_{S'} \vec{B} \cdot \vec{n}' dS' \quad (1.67)$$

となる。円柱が十分薄い ( $\Delta d$ ) としてその側面より出る磁束を無視すると、上式は

$$0 = B_{n1} \Delta S - B_{n2} \Delta S \quad (1.68)$$

となる。よって、磁束密度の法線成分について、境界条件

$$B_{n1} = B_{n2} \quad (1.69)$$

が得られる。

次に、媒質 1 が空気（または真空）、媒質 2 が  $\sigma = \infty$  の完全導体である場合を考えよう。完全導体の中には電磁波は侵入せず、電磁界は 0 である。つまり、 $B_{n2} = 0$  であるから、

$$B_{n1} = 0 \quad (1.70)$$

となる。

## 2 導波管

### 2.1 TE 波と TM 波

導波管の管軸方向 (+z 方向) に

$$e^{j\omega t - \gamma z} = e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (2.1)$$

で伝搬する電磁波を考えよう。ここで、伝搬定数 (propagation constant)  $\gamma$  は、減衰定数 (attenuation constant)  $\alpha$  と位相定数 (phase constant)  $\beta$  を用いて

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (2.2)$$

と表される。

導波管における減衰がない場合 ( $\alpha = 0$  の場合)、電場  $\vec{E}(x, y, z, t)$  および磁場  $\vec{H}(x, y, z, t)$  は次のように記述できる。

$$\begin{pmatrix} \vec{E}(x, y, z, t) \\ \vec{H}(x, y, z, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{E}_0(x, y) \\ \vec{H}_0(x, y) \end{pmatrix} e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (2.3)$$

まず、真空中のマクスウェル方程式 (1.8), (1.9) を各成分について書き分けると、

$$\frac{\partial E_{0z}}{\partial y} - \frac{\partial E_{0y}}{\partial z} = -j\omega\mu_0 H_{0x} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial E_{0x}}{\partial z} - \frac{\partial E_{0z}}{\partial x} = -j\omega\mu_0 H_{0y} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial E_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial E_{0x}}{\partial y} = -j\omega\mu_0 H_{0z} \quad (2.6)$$

および、

$$\frac{\partial H_{0z}}{\partial y} - \frac{\partial H_{0y}}{\partial z} = j\omega\varepsilon_0 E_{0x} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial H_{0x}}{\partial z} - \frac{\partial H_{0z}}{\partial x} = j\omega\varepsilon_0 E_{0y} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial H_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial H_{0x}}{\partial y} = j\omega\varepsilon_0 E_{0z} \quad (2.9)$$

となる。ここで、 $\partial/\partial z = -j\beta$  であるから、式 (2.4), (2.5), (2.7), (2.8) より、進行方向に垂直な成分  $E_{0x}, E_{0y}, H_{0x}, H_{0y}$  は、

$$E_{0x} = \frac{-j}{k_c^2} \left( \omega\mu_0 \frac{\partial H_{0z}}{\partial y} + \beta \frac{\partial E_{0z}}{\partial x} \right) \quad (2.10)$$

$$E_{0y} = \frac{+j}{k_c^2} \left( \omega\mu_0 \frac{\partial H_{0z}}{\partial x} - \beta \frac{\partial E_{0z}}{\partial y} \right) \quad (2.11)$$

$$H_{0x} = \frac{+j}{k_c^2} \left( \omega\varepsilon_0 \frac{\partial E_{0z}}{\partial y} - \beta \frac{\partial H_{0z}}{\partial x} \right) \quad (2.12)$$

$$H_{0y} = \frac{-j}{k_c^2} \left( \omega\varepsilon_0 \frac{\partial E_{0z}}{\partial x} + \beta \frac{\partial H_{0z}}{\partial y} \right) \quad (2.13)$$



と書ける。ただし、

$$k_c^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \beta^2 \quad (2.14)$$

である。式 (2.10)~(2.13) からわかるように、電場と磁場が管軸方向に成分をもたない ( $E_z = H_z = 0$ ) とすれば、 $E_x, E_y, H_x, H_y$  はともに一定の解をもたない。上式が意味をもつためには、 $E_z, H_z$  のいずれか一方が 0 でない場合のみである。 $E_z = 0, H_z \neq 0$  の場合を TE 波 (Transverse electric waves)、 $E_z \neq 0, H_z = 0$  の場合を TM 波 (Transverse magnetic waves) と呼ぶ。

## 2.2 方形導波管

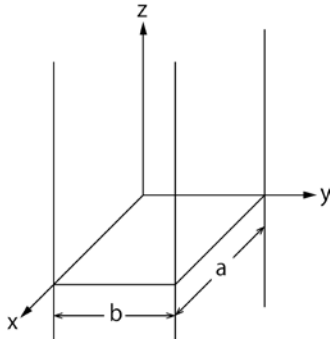


図6 方形導波管

式 (2.3) をヘルムホルツ方程式 (1.11) に代入すると、式 (2.14) の  $k_c$  を用いて

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \begin{pmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{H}_0 \end{pmatrix} + k_c^2 \begin{pmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{H}_0 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.15)$$

となる。これを完全導体の境界条件を用いて解くことにより、TE 波 ( $E_z = 0$ ) および TM 波 ( $H_z = 0$ ) の場合について、方形導波管を伝搬する電磁場を求めよう。

### 方形導波管を伝搬する TE 波

TE 波 ( $E_z = 0$ ) の場合、 $H_{0z}(x, y)$  を

$$H_{0z}(x, y) = X(x)Y(y) \quad (2.16)$$

のように変数分離すると、式 (2.15) は磁場について

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_c^2 = 0 \quad (2.17)$$

と書くことができる。この解は、

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (2.18)$$

として、

$$X(x) = \cos(k_x x + \theta_x) \quad (2.19)$$

$$Y(y) = \cos(k_y y + \theta_y) \quad (2.20)$$

と表される。よって、 $H_{0z}(x, y)$  は

$$H_{0z} = \cos(k_x x + \theta_x) \cos(k_y y + \theta_y) \quad (2.21)$$

と書けるので、これを式 (2.10)~(2.13) に代入することにより、 $E_{0x}, E_{0y}, H_{0x}, H_{0y}$  が求まる。

方形導波管の  $E_x, E_y$  についての境界条件

$$E_{0y}(x=0, y) = E_{0y}(x=a, y) = 0 \quad (2.22)$$

$$E_{0x}(x, y=0) = E_{0x}(x, y=b) = 0 \quad (2.23)$$

から、

$$\theta_x = \theta_y = 0 \quad (2.24)$$

$$k_x = \frac{m\pi}{a} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.25)$$

$$k_y = \frac{n\pi}{b} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.26)$$

でなければならない。よって、方形導波管を伝搬する TE 波は、

$$E_{0x} = \frac{j\omega\mu_0 k_y}{k_c^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \quad (2.27)$$

$$E_{0y} = \frac{-j\omega\mu_0 k_x}{k_c^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \quad (2.28)$$

$$E_{0z} = 0 \quad (2.29)$$

$$H_{0x} = \frac{j\beta k_x}{k_c^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \quad (2.30)$$

$$H_{0y} = \frac{j\beta k_y}{k_c^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \quad (2.31)$$

$$H_{0z} = \cos(k_x x) \cos(k_y y) \quad (2.32)$$

と表される。最低次のモードは、 $m = 1, n = 0$  の、TE<sub>10</sub> モードである。

### 方形導波管を伝搬する TM 波

TM 波 ( $H_z = 0$ ) の場合の  $E_{0z}(x, y)$  についても、TE 波のときの  $H_{0z}(x, y)$  と同様に

$$E_{0z}(x, y) = X(x)Y(y) \quad (2.33)$$

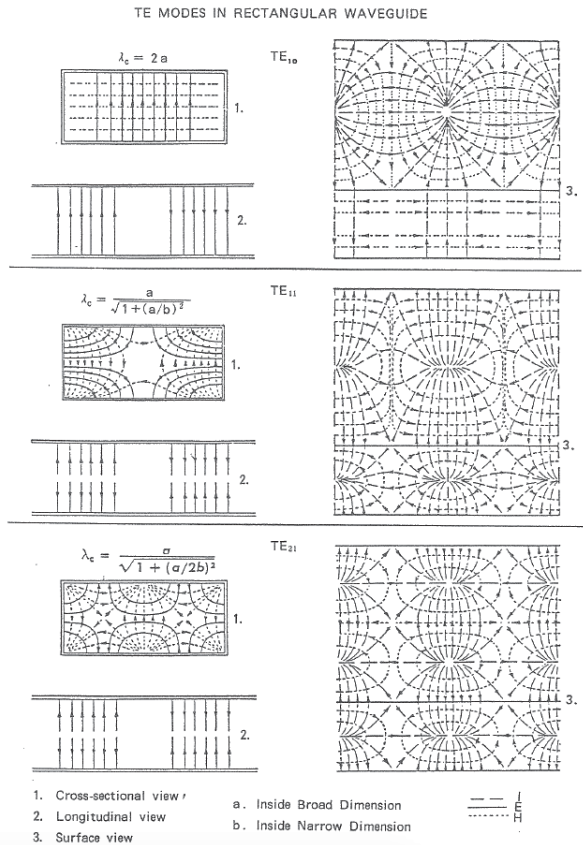


図7 方形導波管の TE モード電磁場 (参考文献 [11] より)

と変数分離することにより、

$$E_{0z} = \sin(k_x x + \theta_x) \sin(k_y y + \theta_y) \quad (2.34)$$

と書ける。ただし、

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (2.35)$$

である。よって、式 (2.34) を式 (2.10)~(2.13) に代入することにより、 $E_{0x}, E_{0y}, H_{0x}, H_{0y}$  が求まる。

境界条件 (式 (2.22), (2.23)) より

$$\theta_x = \theta_y = 0 \quad (2.36)$$

$$k_x = \frac{m\pi}{a} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.37)$$

$$k_y = \frac{n\pi}{b} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.38)$$

でなければならないので、方形導波管を伝搬する

TM 波は、

$$E_{0x} = \frac{-j\beta k_x}{k_c^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \quad (2.39)$$

$$E_{0y} = \frac{-j\beta k_y}{k_c^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \quad (2.40)$$

$$E_{0z} = \sin(k_x x) \sin(k_y y) \quad (2.41)$$

$$H_{0x} = \frac{j\omega\epsilon_0 k_y}{k_c^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \quad (2.42)$$

$$H_{0y} = \frac{-j\omega\epsilon_0 k_x}{k_c^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \quad (2.43)$$

$$H_{0z} = 0 \quad (2.44)$$

と表される。最低次のモードは、 $m = 1, n = 1$  の、 $TM_{11}$  モードである。

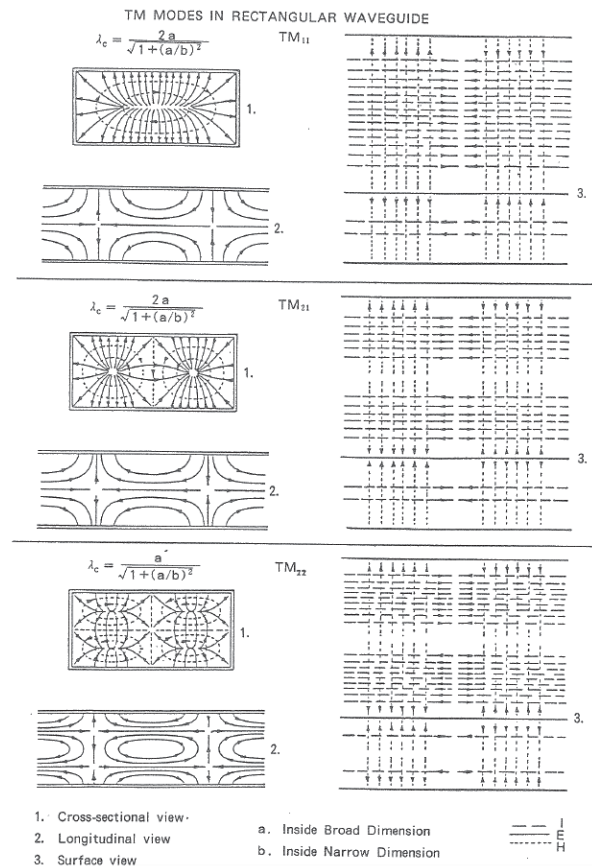


図8 方形導波管の TM モード電磁場 (参考文献 [11] より)

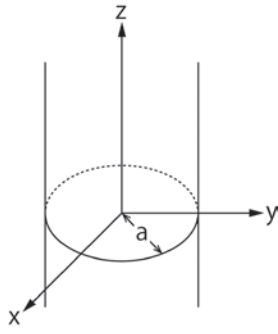


図9 waveguide\_2

### 2.3 円形導波管

式(2.15)を、円柱座標

$$x = r \cos \phi \quad (2.45)$$

$$y = r \sin \phi \quad (2.46)$$

$$z = z \quad (2.47)$$

で表すと、

$$\left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \begin{pmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{H}_0 \end{pmatrix} + k_c^2 \begin{pmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{H}_0 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.48)$$

と書ける。<sup>\*9</sup> 方形導波管のときと同様に、完全導体の境界条件を用いてこれを解き、円形導波管を伝搬する電磁場を求めよう。

#### 円形導波管を伝搬する TM 波

TM 波 ( $H_z = 0$ ) の場合、 $E_{0z}(r, \phi)$  を

$$E_{0z}(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi) \quad (2.49)$$

のように変数分離すると、式(2.48)は、 $m^2$  を定数として

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left( k_c^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (2.50)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + m^2 \Phi = 0 \quad (2.51)$$

<sup>\*9</sup>  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\phi = \tan^{-1}(y/x)$  であるから、

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

となる。

と書くことができる。式(2.51)の解は、

$$\Phi(\phi) = \cos(m\phi) \quad (2.52)$$

と書ける。ただし、周期条件  $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$  より、 $m$  は整数でなければならない。また、式(2.50)は

$$\frac{d^2 R}{d(k_c r)^2} + \frac{1}{k_c r} \frac{dR}{d(k_c r)} + \left( 1 - \frac{m^2}{(k_c r)^2} \right) R = 0 \quad (2.53)$$

と書き直すことにより、ベッセルの微分方程式であることがわかる。よって、この解は  $m$  次のベッセル関数  $J_m(x)$  を用いて、

$$R(r) = J_m(k_c r) \quad (2.54)$$

と表される。<sup>\*10</sup> 図10に、ベッセル関数  $y = J_m(x)$  を示す。<sup>\*11</sup> これらにより、 $E_{0z}$  は

$$E_{0z}(r, \phi) = J_m(k_c r) \cos(m\phi) \quad (2.55)$$

と書くことができるので、これを式(2.10)~(2.13)に代入することにより、 $E_{0r}, E_{0\phi}, H_{0r}, H_{0\phi}$  が求

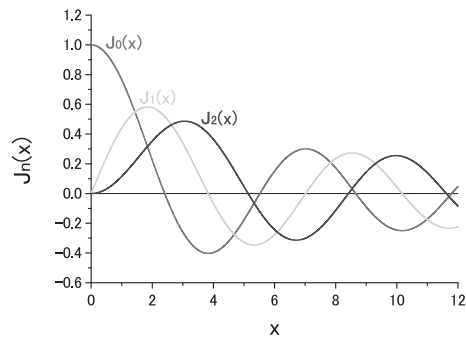


図10 ベッセル関数 ( $J_0(x), J_1(x), J_2(x)$ )

<sup>\*10</sup> ベッセルの微分方程式

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left( 1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) y = 0$$

の一般解は、ベッセル関数  $J_\nu(x)$  とノイマン関数  $Y_\nu(x)$  を用いて

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x)$$

と表されるが、 $x \rightarrow 0$  のとき  $Y_\nu(x) \rightarrow -\infty$  であるため、 $C_2 = 0$  としている。

<sup>\*11</sup> ベッセル関数  $J_m(x)$  は次数  $m$  が大きくなるほど立上りの遅い関数で、一旦立上ってしまうと、三角関数のような振動を続ける。その周期はほぼ  $2\pi$  であり、振幅は  $1/\sqrt{x}$  に比例して小さくなっていく。

まる。<sup>\*12</sup>

ここで、円形導波管の  $E_\phi$  についての境界条件

$$E_{0\phi}(r = a, \phi) = 0 \quad (2.56)$$

から、

$$J_m(k_c a) = 0 \quad (2.57)$$

でなければならない。つまり、式 (2.57) の解を  $k_c a = \rho_{mn}$  とすると、

$$k_c = \frac{\rho_{mn}}{a} \quad (2.58)$$

でなければならない。表 1 に、 $\rho_{mn}$  の比較的低次のいくつかの値を示す。

表 1  $J_m(x) = 0$  の根 :  $x = \rho_{mn}$

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$m = 0$	2.405	5.520	8.654
$m = 1$	3.832	7.016	10.173
$m = 2$	5.136	8.417	11.620

円形導波管を伝搬する TM 波は、

$$E_{0r} = \frac{-j\beta}{k_c} J'_m(k_c r) \cos(m\phi) \quad (2.59)$$

$$E_{0\phi} = \frac{j\beta m}{k_c^2} \frac{J_m(k_c r)}{r} \sin(m\phi) \quad (2.60)$$

$$E_{0z} = J_m(k_c r) \cos(m\phi) \quad (2.61)$$

$$H_{0r} = \frac{-j\omega\epsilon_0 m}{k_c^2} \frac{J_m(k_c r)}{r} \sin(m\phi) \quad (2.62)$$

$$H_{0\phi} = \frac{-j\omega\epsilon_0}{k_c} J'_m(k_c r) \cos(m\phi) \quad (2.63)$$

$$H_{0z} = 0 \quad (2.64)$$

と表される。最低次のモードは、 $m = 0, n = 1$  の、 $TM_{01}$  モードである。

<sup>\*12</sup> 任意のベクトル  $\vec{V}$  について成り立つ

$$V_r = V_x \cos \phi + V_y \sin \phi$$

$$V_\phi = -V_x \sin \phi + V_y \cos \phi$$

を用いればよい。

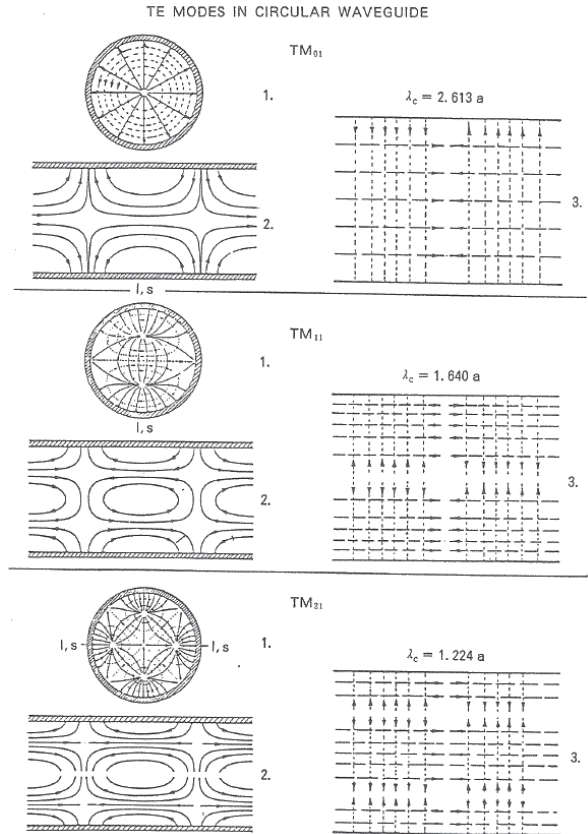


図 11 円形導波管の TM モード電磁場 (参考文献 [11] より)

円形導波管を伝搬する TE 波

TE 波 ( $E_z = 0$ ) の場合の  $H_{0z}(r, \phi)$  についても、TM 波のときの  $E_{0z}(r, \phi)$  と同様に

$$H_{0z}(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi) \quad (2.65)$$

と変数分離することにより、

$$H_{0z}(r, \phi) = J_m(k_c r) \cos(m\phi) \quad (2.66)$$

と書くことができる。よって、これを式 (2.10)~(2.13) に代入することにより、 $E_{0r}, E_{0\phi}, H_{0r}, H_{0\phi}$  が求まる。ここで、 $E_{0\phi}(r, \phi)$  について書くと、

$$E_{0\phi}(r, \phi) = \frac{j\omega\mu_0}{k_c} J'_m(k_c r) \cos(m\phi) \quad (2.67)$$

であるが、境界条件 (式 (2.56)) により

$$J'_m(k_c a) = 0 \quad (2.68)$$

でなければならない。つまり、式 (2.68) の解を  $k_c a = \rho'_{mn}$  とすると、

$$k_c = \frac{\rho'_{mn}}{a}$$

でなければならない。表 2 に、 $\rho'_{mn}$  の比較的低次のいくつかの値を示す。

表 2  $J'_m(x) = 0$  の根 :  $x = \rho'_{mn}$

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$m = 0$	3.832	7.016	10.173
$m = 1$	1.841	5.331	8.536
$m = 2$	3.054	6.706	9.969

円形導波管を伝搬する TE 波は、

$$E_{0r} = \frac{j\omega\mu_0 m J_m(k_c r)}{k_c^2 r} \sin(m\phi) \quad (2.69)$$

$$E_{0\phi} = \frac{j\omega\mu_0 J'_m(k_c r)}{k_c} \cos(m\phi) \quad (2.70)$$

$$E_{0z} = 0 \quad (2.71)$$

$$H_{0r} = \frac{-j\beta}{k_c} J'_m(k_c r) \cos(m\phi) \quad (2.72)$$

$$H_{0\phi} = \frac{j\beta m J_m(k_c r)}{k_c^2 r} \sin(m\phi) \quad (2.73)$$

$$H_{0z} = J_m(k_c r) \cos(m\phi) \quad (2.74)$$

と表される。最低次のモードは、 $m = 0, n = 1$  の、TE<sub>01</sub> モードである。

## 2.4 導波管を伝搬する電磁波の性質

### 遮断周波数と管内波長

位相定数  $\beta = 0$  のときの周波数を  $\omega = \omega_c$  とすると、式 (2.14) より

$$\omega_c = \frac{k_c}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = ck_c \quad (2.75)$$

となり、これを遮断角周波数 (cutoff angular frequency) と呼ぶ。つまり、角周波数が遮断角周波数より大きいとき、電磁波は導波管を伝搬することができる。遮断波長 (cutoff wavelength)  $\lambda_c$  は、遮断周波数 (cutoff frequency)  $f_c = \omega_c/2\pi$  を用いて

$$\lambda_c = \frac{c}{f_c} = \frac{2\pi}{k_c} \quad (2.76)$$

と表せる。

管内波長 (guide wavelength)  $\lambda_g$  は、位相定数

TM MODES IN CIRCULAR WAVEGUIDE

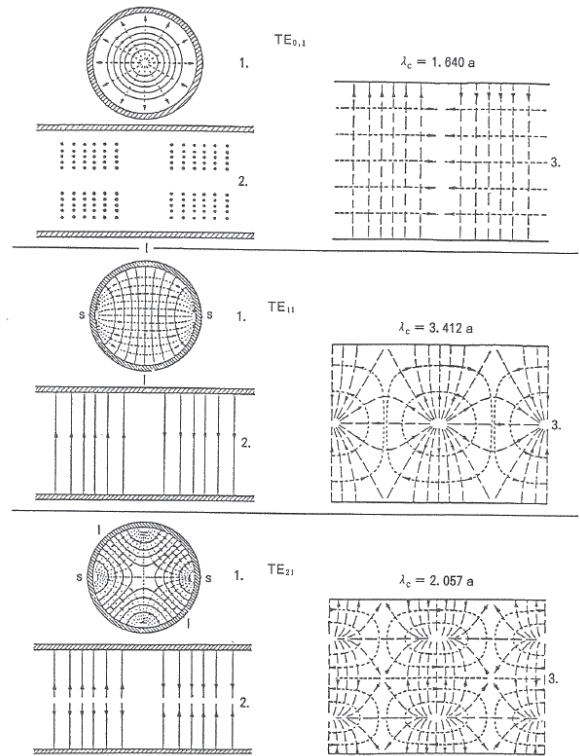


図 12 円形導波管の TE モード電磁場 (参考文献 [11] より)

$\beta$  を用いて

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} \quad (2.77)$$

と表される。ここで、式 (2.14) より

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda_g}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_c}\right)^2 \quad (2.78)$$

であるので、

$$\frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{\lambda_c^2} + \frac{1}{\lambda_g^2} \quad (2.79)$$

となり、管内波長  $\lambda_g$  は

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}} \quad (2.80)$$

と書ける。

位相速度 (phase velocity)  $v_p$  は、位相定数  $\beta$  を用いて

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \quad (2.81)$$

と表される。つまり、

$$v_p = f\lambda_g = \frac{c}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}} \quad (2.82)$$



と書ける。

具体的に、方形導波管を  $TE_{m0}$  モードで伝搬する電磁波について考えよう。 $n = 0$  であるため、

$$k_c = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = \frac{m\pi}{a} \quad (2.83)$$

となり、導波管を  $e^{j(\omega t - \beta z)}$  で伝搬する電磁場は

$$E_{0y} = -\frac{j\omega\mu_0 a}{m\pi} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \quad (2.84)$$

$$H_{0x} = \frac{j\beta a}{m\pi} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \quad (2.85)$$

$$H_{0z} = \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \quad (2.86)$$

$$E_{0x} = E_z = H_y = 0 \quad (2.87)$$

と表される。この電場は  $y$  成分のみで、電場も磁場も  $x$  の関数である。またこのとき、 $m' = 1, 2, \dots, m$  とし  $x = a(2m' - 1)/(2m)$  で、電場が最大となる。遮断波長  $\lambda_c$  は、

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c} = \frac{2a}{m} \quad (2.88)$$

であるから、管内波長  $\lambda_g$  は、

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{m\lambda}{2a}\right)^2}} \quad (2.89)$$

と書ける。ここで、方形導波管内を進む平面波は、図 13 のように描くことができる。図 13 で、電磁波の進行方向と垂直な面では、電場の大きさ、向きとも同じである。この面が AC に沿って進み、C 点で反射されて CF に沿って進む。C 点で反射される際、電場の向きは逆となる。これにより C 点の電場が 0 となり、境界条件を満たすことになる。また、C 点の向かい側にある C' 点においても境界条件を満たさなければならないので、C'B 面

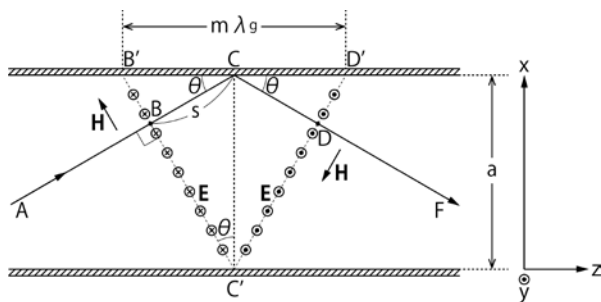


図 13 方形導波管を  $TE_{m0}$  モードで伝搬する平面波

上の電場と C'D 面上の電場は、大きさが同じで向きが逆になる必要がある。そのためには、B 点の電場が C 点で反射され、D 点に到達するまでに、位相がちょうど一周期、またはその整数倍だけ経過しなければならない。つまり、BC 間、CD 間の距離を  $s$  とし、B 点から D 点に到達するまでの位相の進みが

$$2\pi \frac{s}{\lambda} + \pi + 2\pi \frac{s}{\lambda} = \pi + 2\pi m \quad (2.90)$$

でなければならない。これにより、C 点に入射する角度  $\theta$  は、

$$\sin \theta = \frac{s}{C'C} = \frac{m\lambda}{2a} \quad (2.91)$$

となる。よって管内波長  $\lambda_g$  は、

$$\frac{m\lambda_g}{2} \cos \theta = s = \frac{m\lambda}{2} \quad (2.92)$$

より

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\cos \theta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{m\lambda}{2a}\right)^2}} \quad (2.93)$$

となり、式 (2.80) と一致することがわかる。

図 13 からはまた、以下のことがわかる。平面波が管軸方向 (+z 方向) に進む速度を  $v'$  とすると、これは

$$v' = c \cos \theta \quad (2.94)$$

である。これは電磁場のエネルギーの伝搬速度であり (後述)、光速より小さい。また位相速度  $v_p$  については

$$v_p \cos \theta = c \quad (2.95)$$

が成り立ち、光速より大きい。しかしこれは、電磁場のモードの形が伝搬する速度であり、実際の電磁場のエネルギーがその速度で伝搬しているのではない。周波数が遮断周波数に近づけば ( $\omega \rightarrow \omega_c$ )、位相速度  $v_p$  は無限大となる。またこのとき、 $\theta \rightarrow \pi/2$  となり、電磁波は導波管を伝搬しない。式 (2.94), (2.95) より、 $v'$  と  $v_p$  には

$$v'v_p = c^2 \quad (2.96)$$

の関係があることがわかる。



## 導波管における電磁場のエネルギー

導波管で伝搬される電力の時間平均値  $P$  は、式 (1.32) で与えられるポインティングベクトルの時間平均値  $\langle \vec{S} \rangle$  を、導波管断面積  $S'$  で積分することによって次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
 P &= \iint_{S'} \langle \vec{S} \rangle \cdot \vec{n} dS' \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \operatorname{Re}\{(\vec{E} \times \vec{H}^*)_z\} dx dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \operatorname{Re}\{-E_y H_x^*\} dx dy \\
 &= \frac{\beta \omega \mu a^2}{2m^2 \pi^2} \int_0^b \int_0^a \sin^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx dy \\
 &= \frac{\beta \omega \mu a^3 b}{4m^2 \pi^2} \quad (2.97)
 \end{aligned}$$

単位長さあたりの電気エネルギーの時間平均値  $W_e$  は、式 (1.29) を単位長さあたりの体積について積分して

$$\begin{aligned}
 W_e &= \frac{\varepsilon}{4} \int_0^b \int_0^a \vec{E} \cdot \vec{E}^* dx dy \\
 &= \frac{\omega^2 \varepsilon \mu^2 a^2}{4m^2 \pi^2} \int_0^b \int_0^a \sin^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx dy \\
 &= \frac{\omega^2 \varepsilon \mu^2 a^3 b}{8m^2 \pi^2} \quad (2.98)
 \end{aligned}$$

同じく、単位長さあたりの磁気エネルギーの時間平均値  $W_m$  は、式 (1.30) を単位長さあたりの体積について積分して

$$\begin{aligned}
 W_m &= \frac{\mu}{4} \int_0^b \int_0^a \vec{H} \cdot \vec{H}^* dx dy \\
 &= \frac{\mu}{4} \int_0^b \int_0^a \left( \frac{\beta^2 a^2}{m^2 \pi^2} \sin^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \right. \\
 &\quad \left. + \cos^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \right) dx dy \\
 &= \frac{\mu ab}{8} \left( \frac{\beta^2 a^2}{m^2 \pi^2} + 1 \right) \\
 &= \frac{\omega^2 \varepsilon \mu^2 a^3 b}{8m^2 \pi^2} = W_e \quad (2.99)
 \end{aligned}$$

よって、単位長さあたりの電磁場のエネルギー  $W$  は、

$$W = W_e + W_m = \frac{\omega^2 \varepsilon \mu^2 a^3 b}{4m^2 \pi^2} \quad (2.100)$$

と書ける。ここで、電磁場のエネルギーの伝搬速度を  $v_{en}$  とすると、

$$P = v_{en} W \quad (2.101)$$

の関係があるので、

$$v_{en} = \frac{P}{W} = \frac{\beta}{\omega \varepsilon \mu} = \frac{c^2}{v_p} \quad (2.102)$$

となり、 $v_{en}$  が式 (2.96) の  $v'$  と一致することが確認できる。

## 群速度と分散曲線

角周波数  $\omega$  と位相速度  $\beta$  の関係（分散関係）を表す式 (2.14) を用いて、群速度（group velocity） $v_g$  を求めよう。これは、

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{\beta c^2}{\omega} = \frac{c^2}{v_p} \quad (2.103)$$

となり、式 (2.102) で表される電磁場のエネルギーの伝搬速度  $v_{en}$  と一致していることがわかる。つまり、電磁場のエネルギーは群速度  $v_g$  で伝搬し、これは光速より小さい。

式 (2.14) の分散関係を図示すると、図 14 のような分散曲線（dispersion curve）が描ける。分散曲線は、 $\omega = \pm c\beta$  なる漸近線（図中の破線）をもち、 $\omega$  軸と遮断角周波数  $\omega_c = ck_c$  で交わる双曲線となる。位相速度  $v_p$  は、原点から分散曲線上の点  $(\beta, \omega)$  に引いた直線の傾き  $\omega/\beta$  によって与えられる。また群速度  $v_g$  は、点  $(\beta, \omega)$  における分散曲線の接線の傾き  $d\omega/d\beta$  に等しい。そして、 $0 < \beta$  の領域では  $+z$  方向への前進波を表し、 $\beta < 0$  の領域では  $-z$  方向への後進波を表している。

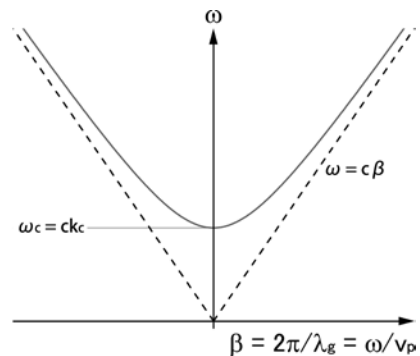


図 14 分散曲線 ( $k_c^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - \beta^2$ )

### 3 空洞共振器

#### 3.1 空洞共振器の共振周波数

$z$  方向を管軸方向として、 $z = 0$  および  $z = d$  で導波管に導体でフタをして箱を作ろう。このとき、周波数と管軸方向長さ  $d$  がある条件を満たすとき、この箱の中で電磁場が共振する。つまり、 $+z$  方向に進む電磁場と  $-z$  方向に進む電磁場が重なり合って、定在波を生じさせる。この箱を空洞共振器 (cavity resonator) と呼び、このときの周波数を共振周波数 (resonant frequency) と呼ぶ。

空洞共振器内の電磁場は、共振角周波数  $\omega_0$  を用いて  $\vec{E}, \vec{H}$  を

$$\begin{pmatrix} \vec{E}(x, y, z, t) \\ \vec{H}(x, y, z, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{E}_0(x, y, z) \\ \vec{H}_0(x, y, z) \end{pmatrix} e^{j\omega_0 t} \quad (3.1)$$

と表し、これを波動方程式 (1.10) に代入して得られる次のヘルムホルツ方程式

$$\nabla^2 \begin{pmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{H}_0 \end{pmatrix} + \omega_0^2 \varepsilon \mu \begin{pmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{H}_0 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.2)$$

を解くことにより得られる。<sup>\*13 \*14</sup>

フタ  $z = 0, d$  における境界条件から、管内波長  $\lambda_g$  は、 $p$  を整数として

$$\lambda_g = \frac{2d}{p} \quad (3.3)$$

でなければならない。よって、式 (2.79) より共振波長  $\lambda_0$  は

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_0^2} &= \frac{1}{\lambda_c^2} + \frac{1}{\lambda_g^2} \\ &= \left(\frac{k_c}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{p}{2d}\right)^2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

<sup>\*13</sup> ここで、

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

である。

<sup>\*14</sup> 導波管のときと同様に、直方体空洞共振器については、

$$H_{0z} = X(x)Y(y)Z(z) \quad \text{TE モード}$$

$$E_{0z} = X(x)Y(y)Z(z) \quad \text{TM モード}$$

円柱空洞共振器については、

$$H_{0z} = R(r)\Phi(\phi)Z(z) \quad \text{TE モード}$$

$$E_{0z} = R(r)\Phi(\phi)Z(z) \quad \text{TM モード}$$

と変数分離して、境界条件 (導波管のときの境界条件とフタ  $z = 0, d$  における境界条件) を用いればよい。

つまり、

$$\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{(k_c/2\pi)^2 + (p/2d)^2}} \quad (3.5)$$

となるのがわかる。このときの共振周波数  $f_0$  は、

$$f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{k_c^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2} \quad (3.6)$$

である。<sup>\*15</sup>

#### 3.2 直方体空洞共振器

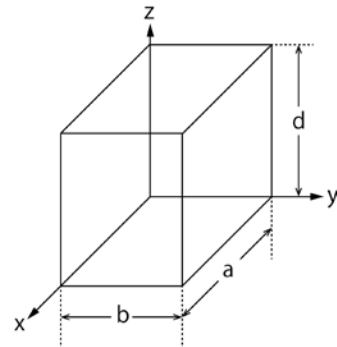


図 15 直方体空洞共振器

<sup>\*15</sup> 空洞共振器内の電磁場 (定在波) は、導波管内の進行波 ( $\beta \rightarrow +\beta$ ) の電磁場と後進波 ( $\beta \rightarrow -\beta$ ) の電磁場を重ね合わせることによっても得られる。このときの位相定数  $\beta$  は、

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_g} = \frac{p\pi}{d}$$

である。

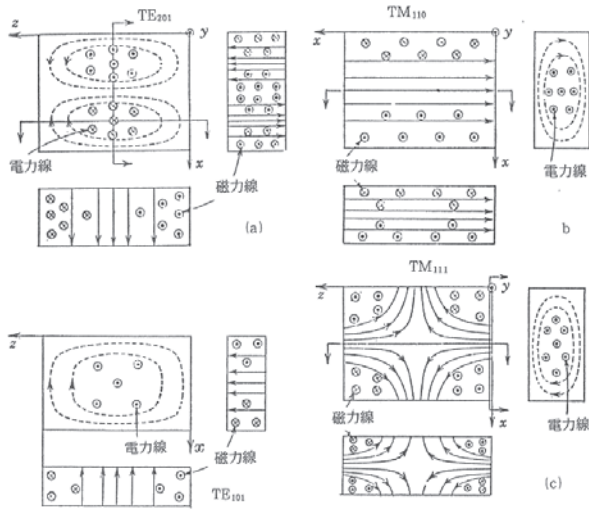


図 16 直方体空洞共振器の電磁場 (参考文献 [11] より)

### 直方体空洞共振器における TE モード

$$E_{0x} = \frac{j\omega_0\mu_0 k_y}{k_c^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \quad (3.7)$$

$$E_{0y} = \frac{-j\omega_0\mu_0 k_x}{k_c^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \quad (3.8)$$

$$E_{0z} = 0 \quad (3.9)$$

$$H_{0x} = \frac{-k_z k_x}{k_c^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \quad (3.10)$$

$$H_{0y} = \frac{-k_z k_y}{k_c^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \quad (3.11)$$

$$H_{0z} = \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_y y) \quad (3.12)$$

ここで、

$$\omega_0^2 \varepsilon_0 \mu_0 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (3.13)$$

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad k_z = \frac{p\pi}{d} \quad (3.14)$$

$$k_c^2 = \omega_0^2 \varepsilon_0 \mu_0 - k_z^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (3.15)$$

である。共振周波数  $f_0$  および共振波長  $\lambda_0$  は

$$f_0 = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2} \quad (3.16)$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{(m/2a)^2 + (n/2b)^2 + (p/2d)^2}} \quad (3.17)$$

である。

### 直方体空洞共振器における TM モード

$$E_{0x} = \frac{-k_z k_x}{k_c^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \quad (3.18)$$

$$E_{0y} = \frac{-k_z k_y}{k_c^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \quad (3.19)$$

$$E_{0z} = \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \quad (3.20)$$

$$H_{0x} = \frac{j\omega_0 \varepsilon_0 k_y}{k_c^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \quad (3.21)$$

$$H_{0y} = \frac{-j\omega_0 \varepsilon_0 k_x}{k_c^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \quad (3.22)$$

$$H_{0z} = 0 \quad (3.23)$$

ここで、

$$\omega_0^2 \varepsilon_0 \mu_0 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (3.24)$$

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad k_z = \frac{p\pi}{d} \quad (3.25)$$

$$k_c^2 = \omega_0^2 \varepsilon_0 \mu_0 - k_z^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (3.26)$$

である。共振周波数  $f_0$  および共振波長  $\lambda_0$  は

$$f_0 = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2} \quad (3.27)$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{(m/2a)^2 + (n/2b)^2 + (p/2d)^2}} \quad (3.28)$$

である。

### 3.3 円柱空洞共振器

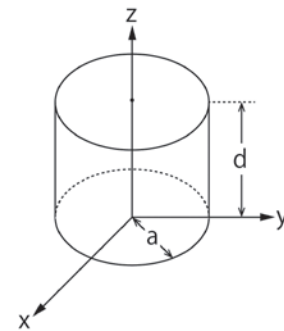


図 17 円柱空洞共振器

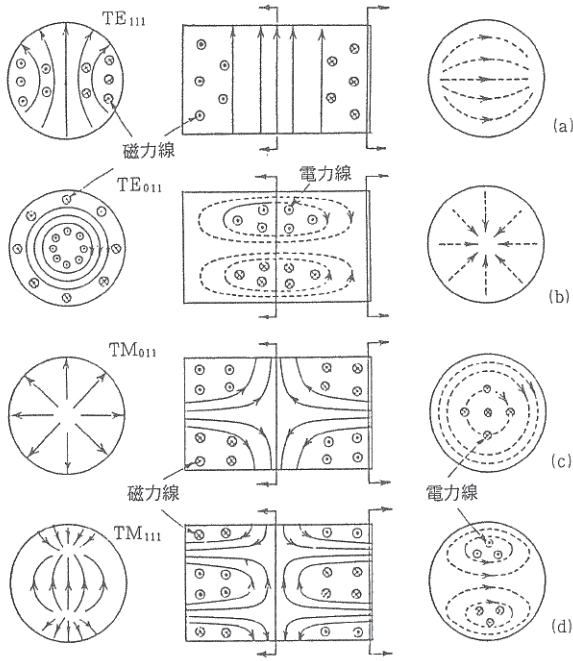


図 18 円柱空洞共振器の電磁場（参考文献 [11] より）

### 円柱空洞共振器における TM モード

$$E_{0r} = \frac{-k_z}{k_c} J'_m(k_c r) \cos(m\phi) \sin(k_z z) \quad (3.29)$$

$$E_{0\phi} = \frac{mk_z}{k_c^2} \frac{J_m(k_c r)}{r} \sin(m\phi) \sin(k_z z) \quad (3.30)$$

$$E_{0z} = J_m(k_c r) \cos(m\phi) \cos(k_z z) \quad (3.31)$$

$$H_{0r} = \frac{-j\omega\epsilon m}{k_c^2} \frac{J_m(k_c r)}{r} \sin(m\phi) \cos(k_z z) \quad (3.32)$$

$$H_{0\phi} = \frac{-j\omega\epsilon}{k_c} J'_m(k_c r) \cos(m\phi) \cos(k_z z) \quad (3.33)$$

$$H_{0z} = 0 \quad (3.34)$$

ここで、

$$k_c = \frac{\rho_{mn}}{a}, \quad k_z = \frac{p\pi}{d} \quad (3.35)$$

$$k_c^2 = \omega_0^2 \epsilon_0 \mu_0 - k_z^2 \quad (3.36)$$

である。共振周波数  $f_0$  および共振波長  $\lambda_0$  は

$$f_0 = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\rho_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2} \quad (3.37)$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{(\rho_{mn}/2\pi a)^2 + (p/2d)^2}} \quad (3.38)$$

である。

### 円柱空洞共振器における TE モード

$$E_{0r} = \frac{j\omega\mu m}{k_c^2} \frac{J_m(k_c r)}{r} \sin(m\phi) \sin(k_z z) \quad (3.39)$$

$$E_{0\phi} = \frac{j\omega\mu}{k_c} J'_m(k_c r) \cos(m\phi) \sin(k_z z) \quad (3.40)$$

$$E_{0z} = 0 \quad (3.41)$$

$$H_{0r} = \frac{k_z}{k_c} J'_m(k_c r) \cos(m\phi) \cos(k_z z) \quad (3.42)$$

$$H_{0\phi} = \frac{-k_z m}{k_c^2} \frac{J_m(k_c r)}{r} \sin(m\phi) \cos(k_z z) \quad (3.43)$$

$$H_{0z} = J_m(k_c r) \cos(m\phi) \sin(k_z z) \quad (3.44)$$

ここで、

$$k_c = \frac{\rho'_{mn}}{a}, \quad k_z = \frac{p\pi}{d} \quad (3.45)$$

$$k_c^2 = \omega_0^2 \epsilon_0 \mu_0 - k_z^2 \quad (3.46)$$

である。共振周波数  $f_0$  および共振波長  $\lambda_0$  は

$$f_0 = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\rho'_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2} \quad (3.47)$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{(\rho'_{mn}/2\pi a)^2 + (p/2d)^2}} \quad (3.48)$$

である。

### 3.4 空洞共振器の $Q$ 値

空洞共振器の  $Q$  値は、

$$Q_L = \omega_0 \frac{\text{共振器中の蓄積エネルギー}}{1 \text{ 秒間に失われるエネルギー}} \quad (3.49)$$

で定義される。つまり、

$$Q_L = \omega_0 \frac{W}{P} = \omega_0 \frac{W}{-dW/dt} \quad (3.50)$$

である。

空洞の壁損失による消費電力を  $P_0$ 、結合孔（導波管等）から出る電力を  $P_{\text{ext}}$  とすると、

$$P = P_0 + P_{\text{ext}} \quad (3.51)$$

であるから、

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{\text{ext}}} \quad (3.52)$$

と書ける。このとき、

$$Q_0 = \omega_0 \frac{W}{P_0} \quad (3.53)$$

$$Q_{\text{ext}} = \omega_0 \frac{W}{P_{\text{ext}}} \quad (3.54)$$

であり、 $Q_0$  は内部  $Q$  (internal  $Q$ ) もしくは無負荷  $Q$  (unloaded  $Q$ ) と呼ばれ、 $Q_{\text{ext}}$  は外部  $Q$  (external  $Q$ ) と呼ばれる。また、 $Q_L$  は負荷  $Q$  (loaded  $Q$ ) と呼ばれる。

共振器内で損失があると、当然蓄積エネルギー  $W$  は減衰する。式 (3.50) より、

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{\omega_0}{Q_L} W \quad (3.55)$$

であるので、蓄積エネルギー  $W$  は、 $e^{-(\omega_0/Q_L)t}$  で減衰することがわかる。よって、共振器内の電磁場は、 $e^{-(\omega_0/2Q_L)t}$  で減衰する。 $Q$  が高い程共振が持続することがわかる。

## 4 定在波型加速管

### 4.1 ピルボックス空洞

まず最初に、定在波型加速管で最も基本となる、ピルボックス空洞の  $\text{TM}_{010}$  モードについて考えよう。ここで、ピルボックス空洞 (pillbox cavity) とは前節の円柱空洞共振器 (cylindrical cavity) のことであり、 $\text{TM}$  モードにおける電場の管軸方向 ( $z$  方向) 成分  $E_z$  を荷電粒子の加速に用いる。

ピルボックス空洞において基本モード (最低次のモード) である  $\text{TM}_{010}$  モードの電磁場は、式 (3.29)~(3.34) で  $m = 0, n = 1, p = 1$  とすることにより

$$E_{0z} = J_0(k_c r) \quad (4.1)$$

$$H_{0\phi} = -j\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} J'_0(k_c r) \quad (4.2)$$

$$E_{0r} = E_{0\phi} = H_{0z} = H_{0r} = 0 \quad (4.3)$$

と得られる。ここで、

$$k_c = \frac{\rho_{01}}{a} \quad (4.4)$$

である。電場  $E_{0z}$  および磁場  $H_{0\phi}$  はともに、 $r$  にのみ依存し、 $z$  によらない。 $E_{0z}$  および  $H_{0\phi}$  の径方向依存性を図 19 に示す。 $E_{0z}$  は管軸上 ( $r = 0$ ) で最大となり、 $H_{0\phi}$  は、 $\rho_{01}r/a = 1.841$  で最大となる。<sup>\*16</sup>

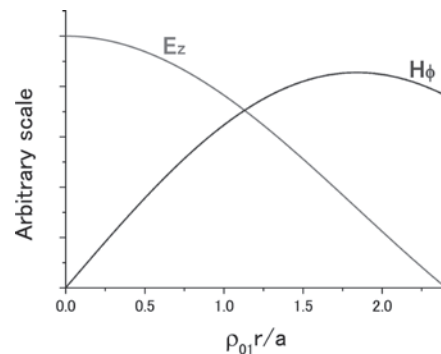


図 19 ピルボックス空洞  $\text{TM}_{010}$  モードの電磁場

<sup>\*16</sup>  $J'_0(x)$  について、最大値は

$$J'_0(1.841) = 0.5819$$

また、 $r = a$ 、つまり、 $x = k_c r = k_c a = \rho_{01} = 2.405$

共振周波数  $f_0$  は

$$f_0 = \frac{c}{2\pi} \frac{\rho_{01}}{a} \quad (4.5)$$

となり、円柱の径  $a$  にのみ依存し、軸方向長さ  $d$  によらない。

次に、ピルボックス空洞における  $\text{TM}_{010}$  モードの  $Q$  値を求めよう。<sup>\*17</sup> まず、電気エネルギーの時間平均  $W_e$  は

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{4} \varepsilon \iiint \vec{E} \cdot \vec{E}^* dV \\ &= \frac{1}{4} \varepsilon \cdot d \int_0^a J_0(k_c r)^2 \cdot 2\pi r dr \\ &= \frac{1}{4} \varepsilon \cdot d \cdot \frac{2\pi}{k_c^2} \int_0^{\rho_{01}} x J_0(x)^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \varepsilon \cdot d \cdot \frac{2\pi}{k_c^2} \cdot \frac{\rho_{01}^2}{2} J_1(\rho_{01})^2 \\ &= \frac{1}{4} \varepsilon \pi a^2 d J_1(\rho_{01})^2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

磁気エネルギーの時間平均  $W_m$  は

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{4} \mu \iiint \vec{H} \cdot \vec{H}^* dV \\ &= \frac{1}{4} \mu \cdot d \int_0^a \frac{\varepsilon}{\mu} J_0'(k_c r)^2 \cdot 2\pi r dr \\ &= \frac{1}{4} \mu \cdot d \cdot 2\pi \frac{\varepsilon}{\mu} \int_0^a J_1(k_c r)^2 r dr \\ &= \frac{1}{4} \mu \cdot d \cdot 2\pi \frac{\varepsilon}{\mu} \cdot \frac{1}{k_c^2} \int_0^{\rho_{01}} x J_1(x)^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \mu \cdot d \cdot 2\pi \frac{\varepsilon}{\mu} \cdot \frac{1}{k_c^2} \cdot \frac{\rho_{01}^2}{2} J_1(\rho_{01})^2 \\ &= \frac{1}{4} \varepsilon \pi a^2 d J_1(\rho_{01})^2 = W_e \end{aligned} \quad (4.7)$$

となり、 $W_e$  と等しいことがわかる。よって、蓄積エネルギーの時間平均  $W$  は

$$W = W_e + W_m = \frac{1}{2} \varepsilon \pi a^2 d J_1(\rho_{01})^2 \quad (4.8)$$

のとき、 $J_0'(x)$  値は

$$J_0'(2.405) = 0.5191$$

である。

<sup>\*17</sup> 以下の計算では、ベッセル関数について成り立つ

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

$$\frac{d}{dx} (x^\nu J_\nu(x)) = x^\nu J_{\nu-1}(x)$$

$$\int x J_\nu(x)^2 dx = \frac{x^2}{2} (J_\nu(x)^2 - J_{\nu+1}(x) J_{\nu-1}(x))$$

を用いる。

と求められる。

次に、 $z = 0$  もしくは  $z = d$  で失う電力  $P_1$  は

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{2} R_s \int_0^a H_\phi^* H_\phi \cdot 2\pi r dr \\ &= \frac{1}{2} R_s \int_0^a \frac{\varepsilon}{\mu} J_0'(k_c r)^2 \cdot 2\pi r dr \\ &= \frac{1}{2} R_s \cdot 2\pi \frac{\varepsilon}{\mu} \cdot \frac{1}{k_c^2} \cdot \frac{\rho_{01}^2}{2} J_1(\rho_{01})^2 \\ &= \frac{1}{2} R_s \pi a^2 \frac{\varepsilon}{\mu} J_1(\rho_{01})^2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

$r = a$  で失う電力  $P_2$  は

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{1}{2} R_s \cdot H_\phi^* H_\phi \cdot 2\pi a d \\ &= \frac{1}{2} R_s \cdot \frac{\varepsilon}{\mu} J_0'(k_c a)^2 \cdot 2\pi a d \\ &= R_s \pi a d \frac{\varepsilon}{\mu} J_1(\rho_{01})^2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

よって、壁から失われる電力  $P_0$  は

$$\begin{aligned} P_0 &= 2 \times P_1 + P_2 \\ &= R_s \pi a (a + d) \frac{\varepsilon}{\mu} J_1(\rho_{01})^2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

と求められる。よって、式 (3.53) より、 $Q_0$  値は

$$\begin{aligned} Q_0 &= \frac{\rho_{01}}{2R_s} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{1 + a/d} \\ &= \frac{a}{\delta(1 + a/d)} \end{aligned} \quad (4.12)$$

と求められる。ここで、 $\delta$  は式 (1.47) で与えられる表皮の厚さである。

## 4.2 アルバレ型加速管

図 20 のように、ピルボックス空洞の両端の壁を凸型にしよう。このときの電場分布を図 20(a) に、磁場分布を図 20(b) に示す。ここで、左右の凸型電極の間隙  $g$  をギャップと呼ぶ。

次に、この空洞の  $z$  軸上にビームが通過するための穴（ビームホール）を開け、2 個隣接して並べてみよう。図 20 の空洞 1 個をセルと呼ぶ。セルに励振される基本モード電磁場の組み合わせは、図 21 のように 2 通りあり、上図を  $2\pi$  モード（0 モード）、下図を  $\pi$  モードと呼ぶ。 $2\pi$  モードでは隣合うセルの電磁場の位相が同位相であり、 $\pi$  モー



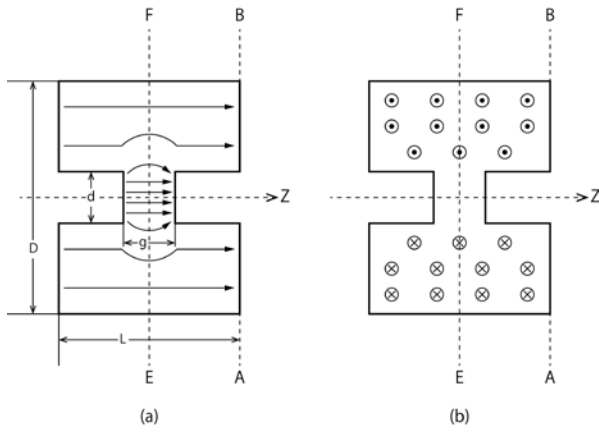


図 20 アルバレ型加速管のユニットセルとなる空洞の断面図。(a) 電場分布。(b) (a) から 1/4 周期後の磁場分布。

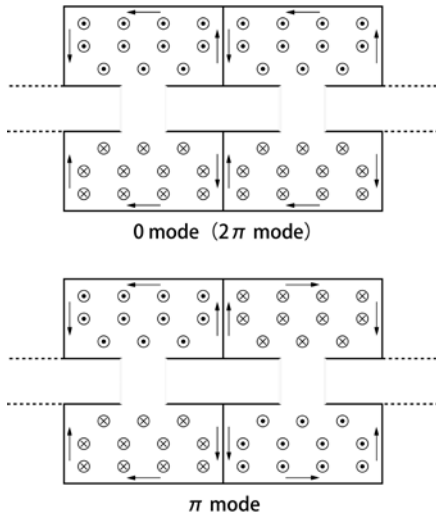


図 21 上図：0 モード (2π モード)。下図：π モード。

ドではこれが逆位相 (位相差が 180°) となっている。2π モードでは、共通の壁で電流がゼロとなり、必要ではなくなる。これを陽子の加速管として応用するため、1 セルの軸方向 (z 方向) 長さ L を

$$L = \frac{v}{f_0} = \frac{v}{c} \frac{c}{f_0} = \beta \lambda \quad (4.13)$$

としよう。このときの  $\beta$  は、光の速度に対する粒子の速度  $v/c$  であり、 $\lambda$  は空洞内で共振する高周波の波長である。電場が加速方向を向いているときに陽子が筒と筒の間を通過し、電場が逆方向を向いているときに陽子が筒の中を通過すれば、陽子は高周波に同期して加速の力を受けることになる。

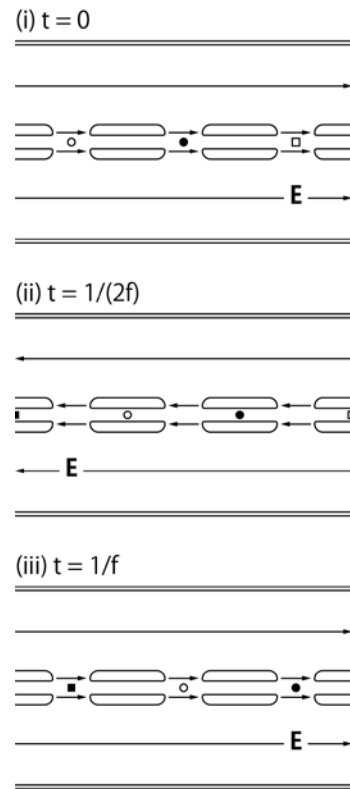


図 22 アルバレ型加速管による荷電粒子加速の原理

この筒をドリフトチューブ (drift tube) と呼ぶ。このような加速管をアルバレ型ドリフトチューブリニアック (Alvarez drift-tube linac) と呼ぶ (本テキストでは、アルバレ型加速管と呼ぶ)。アルバレ型加速管による荷電粒子加速の原理を図 22 に示す。

### 4.3 シャントインピーダンス

空洞の軸上加速電圧  $V_0$  を、空洞長さ  $L$ 、軸上電場  $E_z(z)$  を用いて、

$$V_0 = \int_0^L E_z(z) dz \quad (4.14)$$

と定義する。このとき、軸上平均電場  $E_0$  は、

$$E_0 = \frac{1}{L} \int_0^L E_z(z) dz = \frac{V_0}{L} \quad (4.15)$$

と書ける。

シャントインピーダンス (shunt impedance)  $R_{sh}$  [MΩ] は、さきほどの  $V_0$  と壁損失  $P_0$  を用いて、

$$R_{sh} = \frac{V_0^2}{P_0} \quad (4.16)$$

と定義される。これは、軸上平均電場  $E_0$  と空洞長さ  $L$  を用いて、

$$R_{\text{sh}} = \frac{E_0^2}{P_0/L^2} \quad (4.17)$$

と書くことができる。空洞内で磁場が励振しているときには、空洞内壁を電流が流れるため、損失  $P_0$  が生じる。加速空洞としては、空洞に電力を投入した際、ビーム軸上にどれだけ加速電圧を生じさせられるかが重要である。シャントインピーダンス  $R_{\text{sh}}$  は、投入電力  $P(=P_0)$  に対して、どれだけの加速電圧を生じさせるかを表している。つまり、加速空洞の投入電力に対する加速効率の良さを表している。

また、単位長さあたりのシャントインピーダンス  $Z_{\text{sh}}$  [ $\text{M}\Omega/\text{m}$ ] は、

$$Z_{\text{sh}} = \frac{R_{\text{sh}}}{L} = \frac{E_0^2}{P_0/L} \quad (4.18)$$

である。

$R_{\text{sh}}/Q_0$  [ $\text{M}\Omega$ ] は

$$\frac{R_{\text{sh}}}{Q_0} = \frac{V_0^2/P_0}{\omega_0 W/P_0} = \frac{V_0^2}{\omega_0 W} \quad (4.19)$$

であり、 $Z_{\text{sh}}/Q_0$  [ $\text{M}\Omega/\text{m}$ ] は、

$$\frac{Z_{\text{sh}}}{Q_0} = \frac{E_0^2}{\omega_0 W/L} \quad (4.20)$$

である。これらは空洞の材質に依存せず、空洞の形のみで決まる。つまり、空洞の形で決まる加速効率を表している。

#### 4.4 トランジットタイムファクター

荷電粒子が  $z$  軸上で受ける電場  $E_z(z, t)$  は、

$$E_z(z, t) = E_z(z) \cos(\omega t(z) + \phi) \quad (4.21)$$

と書ける。 $z = 0$  を加速ギャップの中心とし、 $L = \beta\lambda$  とすると、加速ギャップを通過する電荷  $q$  の荷電粒子が得るエネルギー  $\Delta W$  は、

$$\Delta W = q \int_{-L/2}^{L/2} E_z(z) \cos(\omega t(z) + \phi) dz \quad (4.22)$$

と書ける。

$t = 0$  のときに加速ギャップの中心 ( $z = 0$ ) を通過する荷電粒子を考えると、この荷電粒子が加速ギャップの中心  $z = 0$  で受ける電場は、

$$E_z(0, 0) = E_z(0) \cos \phi \quad (4.23)$$

である。つまり  $\phi$  は、この荷電粒子がこの加速ギャップを通過するときの電場の加速位相を表している。この加速位相  $\phi$  を用いて、加速ギャップを通過する電荷  $q$  の荷電粒子が得るエネルギー  $\Delta W$  を、

$$\Delta W = qV_0 T \cos \phi \quad (4.24)$$

と表そう。ここで  $V_0$  は、軸上平均電場

$$E_0 = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} E_z(z) dz \quad (4.25)$$

を用いて、

$$V_0 = E_0 L = \int_{-L/2}^{L/2} E_z(z) dz \quad (4.26)$$

と定義される。加速ギャップを通過する荷電粒子が得るエネルギー  $\Delta W$  をこのように表すと、式 (4.22) より

$$qV_0 T \cos \phi = q \int_{-L/2}^{L/2} E_z(z) \cos(\omega t(z) + \phi) dz \quad (4.27)$$

であるから、 $T$  は

$$\begin{aligned} T &= \frac{\int_{-L/2}^{L/2} E_z(z) \cos(\omega t(z) + \phi) dz}{V_0 \cos \phi} \\ &= \frac{\int_{-L/2}^{L/2} E_z(z) \cos \omega t(z) dz}{\int_{-L/2}^{L/2} E_z(z) dz} \\ &\quad - \tan \phi \frac{\int_{-L/2}^{L/2} E_z(z) \sin \omega t(z) dz}{\int_{-L/2}^{L/2} E_z(z) dz} \end{aligned} \quad (4.28)$$

となる。この  $T$  をトランジットタイムファクター (transit-time factor) と呼ぶ。ここで、加速ギャップの中心 ( $z = 0$ ) に対して、普通  $E_z(z)$  は偶関数であるので、 $E_z(z) \sin \omega t(z)$  は奇関数となる。よって、

$$\int_{-L/2}^{L/2} E_z(z) \sin \omega t(z) dz = 0 \quad (4.29)$$

であるから、トランジットタイムファクターは

$$T = \frac{\int_{-L/2}^{L/2} E_z(z) \cos \omega t(z) dz}{\int_{-L/2}^{L/2} E_z(z) dz} \quad (4.30)$$

と書ける。さらに、加速ギャップにおける荷電粒子の速度変化は非常に小さいため、 $\omega t(z)$  を

$$\omega t(z) \approx \omega \frac{z}{v} = \frac{2\pi z}{\beta \lambda} \quad (4.31)$$

とすると、トランジットタイムファクターは、

$$T = \frac{\int_{-L/2}^{L/2} E_z(z) \cos(2\pi z/\beta \lambda) dz}{\int_{-L/2}^{L/2} E_z(z) dz} \quad (4.32)$$

と書ける。つまり、電場  $E_z$  が  $\cos(\omega t)$  で変化するために、荷電粒子が得るエネルギー  $\Delta W$  が、 $qV_0 \cos \phi$  に対して、その  $T$  倍に小さくなることを意味している。

#### ギャップ長とトランジットタイムファクター

ギャップ長  $g$  の内側で電場  $E_z(z) = E_g$ 、外側で電場  $E_z(z) = 0$  である矩形電場を考える。このときのトランジットタイムファクターは、

$$\begin{aligned} T &= \frac{\int_{-g/2}^{g/2} E_g \cos(2\pi z/\beta \lambda) dz}{\int_{-g/2}^{g/2} E_g dz} \\ &= \frac{\sin(\pi g/\beta \lambda)}{\pi g/\beta \lambda} \end{aligned} \quad (4.33)$$

となる。このとき、横軸をセル長に対するギャップ長  $g/\beta \lambda$ 、縦軸をトランジットタイムファクター  $T$  として図示すると、図 23 のようになる。つま

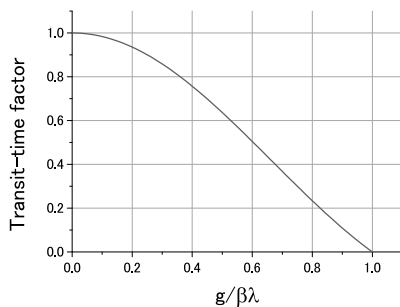


図 23 矩形電場のときのトランジットタイムファクター

り、ギャップ長  $g$  が小さいほど、トランジットタイムファクターが大きくなり、最大値である 1 に近づくことがわかる。加速ギャップ  $g$  の決め方には 2 つの制約がある。第 1 は、放電限界であり、第 2 はユニットセルの共振周波数  $f_0$  を一定に保つ必要性である。

#### キルパトリック限界

放電限界の 1 つの指標として使われるのが、次のキルパトリックの式 (Kilpatrick formula) である。

$$f = 1.64 E_k^2 \exp\left(-\frac{8.5}{E_k}\right) \quad (4.34)$$

ここで、

$f$  : 周波数 [MHz]

$E_k$  : 放電限界を与える電場 (Kilpatrick limit) [MV/m]

である。これを図示すると、図 24 のようになる。 $f$  が大きくなるほど、 $E_k$  が大きくなることがわかる。このキルパトリック限界は、今日ほどの高真空が実現されるより前の時代に、実験により得られたものである。現在では、これは絶対的な許容限界値ではなく、”キルパトリックの何倍の電界強度に相当”などと、1 つの目安として使われている。<sup>\*18</sup>

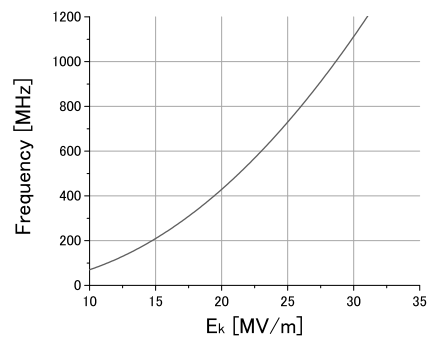


図 24 キルパトリックの放電限界

\*18 最大表面電場  $E_s$  を  $E_k$  を用いて

$$E_s = b E_k$$

と表し、 $b$  は”bravery factor”と呼ばれる (参考文献 [1])。

#### 4.5 有効シャントインピーダンス

空洞の軸上加速電圧  $V_0$  および軸上加速電場  $E_0$  は、 $\cos(\omega t)$  で変動する。よって実際にビームに寄与するのは、トランジットタイムファクター  $T$  を用いて、それぞれ  $V_0 T$  および  $E_0 T$  である。そこで、シャントインピーダンス  $R_{sh}$  を

$$\frac{(V_0 T)^2}{P_0} = \frac{(E_0 T)^2}{P_0/L^2} = R_{sh} T^2 \quad (4.35)$$

と書き直そう。この  $R_{sh} T^2$  [MΩ] を、有効シャントインピーダンス (effective shunt impedance) と呼ぶ。同様に、単位長さあたりの有効シャントインピーダンス  $Z T^2$  [MΩ/m] は、

$$Z_{sh} T^2 = \frac{R_{sh} T^2}{L} = \frac{(E_0 T)^2}{P_0/L} \quad (4.36)$$

となる。

アルバレ型加速管の有効シャントインピーダンスについて考えよう。まず、ユニットセルの共振周波数  $f_0$  を一定に保つ必要性から、セル長  $L = \beta\lambda$  とギャップ長  $g$  の関係を調べよう。図 20 より、ユニットセルは  $LC$  共振回路とみなすことができるので、その共振周波数は  $\omega_0^2 = 1/LC$  と表すことができる。  $g$  が  $\beta\lambda$  に比べて十分小さいとして、ユニットセルを同軸管とみなすことにより、磁束  $\Phi$  は

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS \\ &\sim \mu_0 \beta \lambda \int_{d/2}^{D/2} \frac{I}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I \beta \lambda}{2\pi} \ln \frac{D}{d} \end{aligned} \quad (4.37)$$

と表される。よって、 $\Phi = LI$  であるから、

$$L \sim \frac{\mu_0 \beta \lambda}{2\pi} \ln \frac{D}{d} \quad (4.38)$$

と求まる。また静電容量  $C$  については、ギャップを平行平板とみなすことにより

$$C \sim \varepsilon_0 \frac{\pi d^2}{4g} \quad (4.39)$$

と得られる。よって、共振周波数は

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \sim \frac{g}{\beta\lambda} \cdot \frac{8c^2}{d^2 \ln \frac{D}{d}} \quad (4.40)$$

と書ける。

エネルギーが高くなるにしたがって  $\beta$  が大きくなるため、セル長は長くなる。そこで、 $\beta$  にあわせて  $g$  を長くすることによって、 $g/\beta\lambda$  を一定に保つ。すると上のような単純な近似では、 $d$  や  $D$  を変えなくても空洞の共振周波数を一定に保つことができる。しかし実際には、 $d$  に比べて  $g$  が大きくなるにしたがって、加速ギャップの電場がしみだし、式 (4.39) の計算よりも  $C$  が大きくなる。したがって、 $d$  や  $D$  を一定に保ったまま共振周波数を一定に保つためには、 $g/\beta\lambda$  を大きくする必要が生じ、これはトランジットタイムファクターの低下を招く。つまり、加速効率 (有効シャントインピーダンス) が低下することを意味する。図 25 に、陽子エネルギーと単位長さあたりの有効シャントインピーダンスの関係を示す。アルバレ型加速管の有効シャントインピーダンスが小さくなる高エネルギー側では、次に述べる結合空洞型の加速管が用いられる。

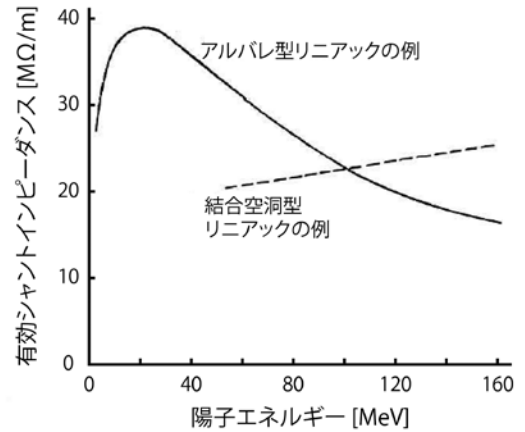


図 25 陽子エネルギーと有効シャントインピーダンス (参考文献 [2] より)

#### 4.6 結合空洞型加速管

結合空洞型加速管 (coupled-cavity linac) は、多連空洞とも呼ばれ、複数の加速空洞をビーム軸方向に連結したものである。この連結された空洞のひとつひとつをセルと呼ぶ。各セルに励振される電磁場は、ビームホールなどを通して電磁的に結合している。結合空洞型加速管に励振される電

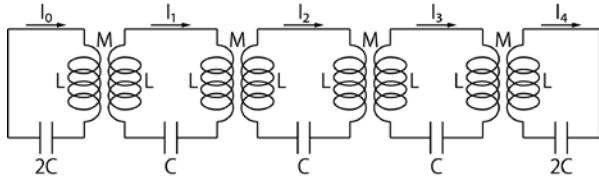


図 26 相互インダクタンス  $M$  によって結合された 5 結合共振器

磁場のモードは、図 26 のように、複数の共振回路が相互インダクタンス  $M$  によって結合した結合共振器を考えると理解しやすい。ここでは 5 つの  $LC$  共振回路を想定し、それぞれが同じ共振周波数  $\omega_0$  をもつ空洞共振器を表すと考えよう。両端のセルについても同じ共振周波数  $\omega_0^2 = 1/LC$  をもたせるため、両端の共振回路の静電容量を  $2C$  にしている。共振回路に流れる電流を、左から  $I_0, I_1, I_2, I_3, I_4$  とすると、これらに関して次の 5 つの方程式が成り立つ。

$$-\frac{1}{2C}I_0 = L\frac{d^2I_0}{dt^2} + M\frac{d^2I_1}{dt^2} \quad (4.41)$$

$$-\frac{1}{C}I_1 = 2L\frac{d^2I_1}{dt^2} + M\frac{d^2I_0}{dt^2} + M\frac{d^2I_2}{dt^2} \quad (4.42)$$

$$-\frac{1}{C}I_2 = 2L\frac{d^2I_2}{dt^2} + M\frac{d^2I_1}{dt^2} + M\frac{d^2I_3}{dt^2} \quad (4.43)$$

$$-\frac{1}{C}I_3 = 2L\frac{d^2I_3}{dt^2} + M\frac{d^2I_2}{dt^2} + M\frac{d^2I_4}{dt^2} \quad (4.44)$$

$$-\frac{1}{2C}I_4 = L\frac{d^2I_4}{dt^2} + M\frac{d^2I_3}{dt^2} \quad (4.45)$$

これら 5 つの共振器が結合した 5 結合共振器の共振周波数を  $\Omega$  とし、 $n = 0, 1, 2, 3, 4$  として式 (4.41)~(4.45) の解を

$$I_n = x_n e^{j\Omega t} \quad (4.46)$$

と書くと、これらの方程式は次のように書き直すことができる。

$$\frac{\omega_0^2}{\Omega^2}x_0 = x_0 + kx_1 \quad (4.47)$$

$$\frac{\omega_0^2}{\Omega^2}x_1 = x_1 + \frac{k}{2}x_0 + \frac{k}{2}x_2 \quad (4.48)$$

$$\frac{\omega_0^2}{\Omega^2}x_2 = x_2 + \frac{k}{2}x_1 + \frac{k}{2}x_3 \quad (4.49)$$

$$\frac{\omega_0^2}{\Omega^2}x_3 = x_3 + \frac{k}{2}x_2 + \frac{k}{2}x_4 \quad (4.50)$$

$$\frac{\omega_0^2}{\Omega^2}x_4 = x_4 + kx_3 \quad (4.51)$$

ここで、 $k = M/L$  とした。次に、行列  $M$  を

$$M = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 & 0 \\ k/2 & 1 & k/2 & 0 & 0 \\ 0 & k/2 & 1 & k/2 & 0 \\ 0 & 0 & k/2 & 1 & k/2 \\ 0 & 0 & 0 & k & 1 \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

固有ベクトル  $\mathbf{X}$  を

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

とすると、式 (4.47)~(4.51) は

$$M\mathbf{X} = \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}\mathbf{X} \quad (4.54)$$

と書くことができる。ここで、行列  $M$  の固有値  $\Omega_q$  ( $q = 0, 1, 2, 3, 4$ ) は、 $E$  を  $5 \times 5$  単位行列として

$$\det\left(M - \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}E\right) = 0 \quad (4.55)$$

を計算することにより、次のように得られる。

- 0 モード

固有ベクトル  $\mathbf{X}_0$  は

$$\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

であり、隣り合うセルの電磁場の位相差は、0 である。またこのときの共振周波数  $\Omega_0$  は、

$$\Omega_0 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}} \quad (4.57)$$

となる。

- $\pi/4$  モード

固有ベクトル  $\mathbf{X}_1$  は

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

であり、隣り合うセルの電磁場の位相差は、 $\pi/4$  である。またこのときの共振周波数  $\Omega_1$  は、

$$\Omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + k/\sqrt{2}}} \quad (4.59)$$

となる。

- $\pi/2$  モード

固有ベクトル  $\mathbf{X}_2$  は

$$\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

であり、隣り合うセル電磁場の位相差は、 $\pi/2$  である。またこのときの共振周波数  $\Omega_2$  は、

$$\Omega_2 = \omega_0 \quad (4.61)$$

となる。

- $3\pi/4$  モード

固有ベクトル  $\mathbf{X}_3$  は

$$\mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} \quad (4.62)$$

であり、隣り合うセルの電磁場の位相差は、 $3\pi/4$  である。またこのときの共振周波数  $\Omega_3$  は、

$$\Omega_3 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - k/\sqrt{2}}} \quad (4.63)$$

となる。

- $\pi$  モード

固有ベクトル  $\mathbf{X}_4$  は

$$\mathbf{X}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.64)$$

であり、隣り合うセルの電磁場の位相差は、 $\pi$  である。またこのときの共振周波数  $\Omega_4$  は、

$$\Omega_4 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - k}} \quad (4.65)$$

となる。

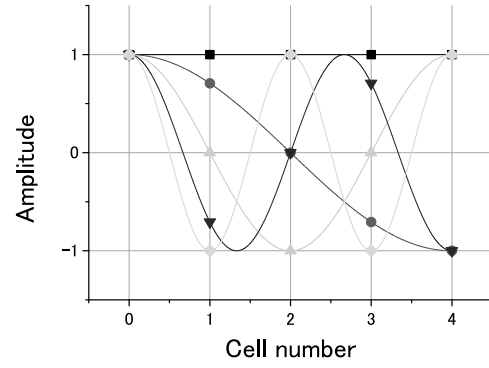


図 27 5 結合空洞のモード。■:  $\mathbf{X}_0$  (0 モード)。●:  $\mathbf{X}_1$  ( $\pi/4$  モード)。▲:  $\mathbf{X}_2$  ( $\pi/2$  モード)。▼:  $\mathbf{X}_3$  ( $3\pi/4$  モード)。◆:  $\mathbf{X}_4$  ( $\pi$  モード)。

これら 5 つの固有ベクトル  $\mathbf{X}_q$  ( $q = 0, 1, 2, 3, 4$ ) の成分を図示すると、図 27 のようになる。

ここまでは 5 結合共振器を考えたが、次に  $N+1$  個の空洞の結合を考えよう。 $q$  をモード番号 ( $q = 0, 1, 2, \dots, N$ ) として、固有値  $\Omega_q$  は

$$\Omega_q = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + k \cos(\pi q/N)}} \quad (4.66)$$

となる。またその固有ベクトル  $\mathbf{X}_q$  について、その  $n$  番目 ( $n = 0, 1, 2, \dots, N$ ) のセルの成分  $\mathbf{X}_{q,n}$  は、

$$\mathbf{X}_{q,n} = \cos\left(\frac{\pi q}{N}n\right) \quad (4.67)$$

となる。ここで、隣り合うセルの位相差  $\phi$  は、

$$\phi = \frac{\pi q}{N} \quad (4.68)$$

である。例えば、 $q = 0$  のとき 0 モード、 $q = N/2$  のとき  $\pi/2$  モード、 $q = N$  のとき  $\pi$  モードとなる。0 モード、 $\pi/2$  モード、 $\pi$  モードにおける各セルの電場分布を図示すると、図 28 のようになる。 $\pi/2$  モードでは、電場の発生するセルとしないセルが交互に現れ、これらはそれぞれ加速セル、結合セルと呼ばれる。各セルの軸方向長さを  $d$ 、励振されるモードの波長を  $\lambda_g$  とすると、隣り合うセルの電磁場の位相差  $\phi$  は、

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda_g}d = \beta d \quad (4.69)$$



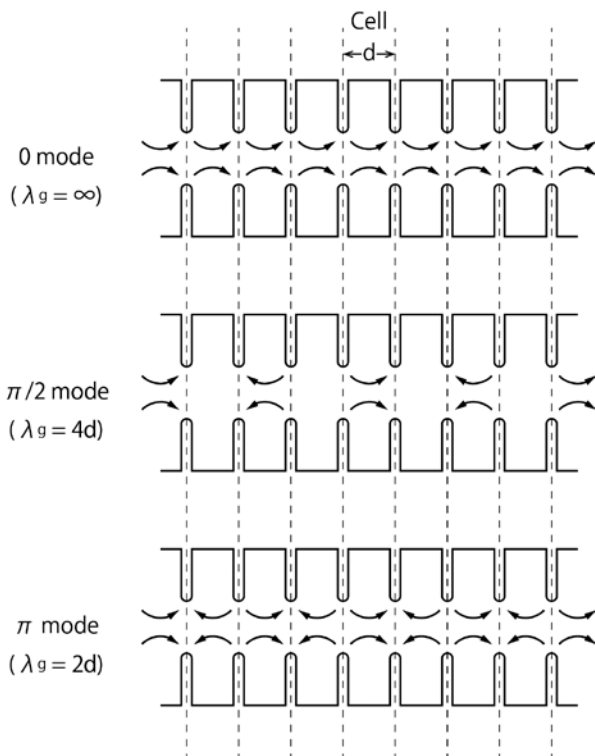


図 28 結合空洞型加速管の電場分布

であることがわかる。ここで、 $\beta = 2\pi/\lambda_g$  は位相定数である。<sup>\*19</sup>

位相差  $\phi$  は位相定数  $\beta$  に比例しているため、位相差  $\phi$  と共振周波数  $\Omega$  の関係を表す式 (4.66) より、図 29 のように分散曲線を描くことができる。図中の 5 つの点は 5 結合共振器のときのモードを表している。図 29 より、分散曲線の傾き、つまり群速度は、0 モードおよび  $\pi$  モードで 0 であり、 $\pi/2$  モードで最大となることがわかる。また、バンド幅 (bandwidth)  $\delta\omega$  は、 $k \ll 1$  のとき、

$$\begin{aligned} \delta\omega &= \Omega_N - \Omega_0 \\ &= \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}} - \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}} \\ &\cong \omega_0 k \end{aligned} \quad (4.70)$$

となる。つまり、バンド幅は  $N$  によらず、群速度は結合係数  $k$  が大きいほど大きくなる。

<sup>\*19</sup> 式 (4.67) は定在波を表すから、時間変化を考慮して

$$\mathbf{X}_{q,n} e^{j\Omega_q t} = \frac{1}{2} \left( e^{j(\Omega_q t + \frac{\pi q n}{N})} + e^{j(\Omega_q t - \frac{\pi q n}{N})} \right)$$

と書き直すことにより、

$$\beta = \frac{\pi q n}{N z} = \frac{\pi q}{N d} = \frac{\phi}{d}$$

であることがわかる。

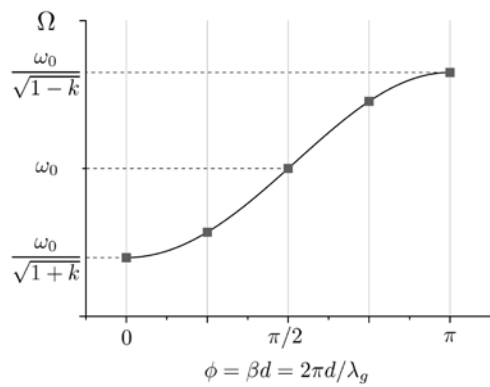


図 29 結合空洞型加速管における分散曲線 (■ : 5セルの場合)。

群速度があるということは、電磁場のエネルギーに流れがあるということである。群速度が大きければ、なんらかの原因でどこかのセルの蓄積エネルギーが小さくなったとき、速やかにこのセルにエネルギーを供給することができる。つまり、加速管内に安定な電磁場を励振させることができる。よって、 $\pi/2$  モードで群速度が最大になるということは、 $\pi/2$  モードで最も安定に電磁場を励振できることを意味している。このほかにも  $\pi/2$  モードには、隣接するモードの周波数差が最大、個々のセルの共振周波数のずれが与える電場分布の歪み (ティルト) が小さい、等の長所がある。一方  $\pi/2$  モードでは、電場が発生せずビーム加速に寄与しない結合セルが 1 つおきに存在するため、0 モードや  $\pi$  モードに比べて単位長さあたりの加速効率が悪い。そこで、安定な電磁場を励振させることのできる  $\pi/2$  モード加速管について、その加速効率を高めるための改良が進められてきた。これらの  $\pi/2$  モード結合空洞型加速管の例を図 30 に示す。APS (Alternating Periodic Structure) 型加速管では、結合セルの軸方向長さを短くすることにより、単位長さあたりの加速電場の割合を大きくしている。SCS (Side Coupled Structure) 型加速管では、結合セルをビーム軸から横に外し、軸上には加速セルだけが並んでいる。ACS (Annular-ring Coupled Structure) 型加速管では、ビーム軸を中心として結合セルを環形状とすることによりビーム軸から外し、軸上には加速セルだけが並んでいる。APS では、加速セルと結合セルがビームホー

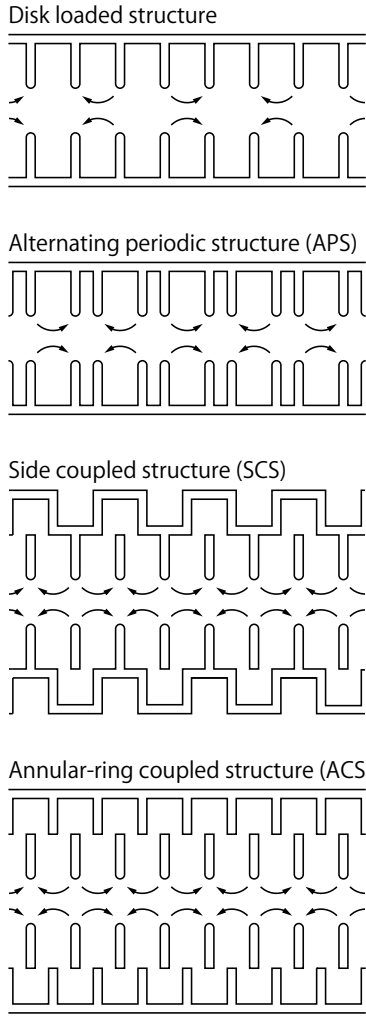


図 30  $\pi/2$  モード結合空洞型加速管

ルを通して電磁氣的に結合される。一方、SCS および ACS では、加速セルと結合セルの間に設けられた結合スロットを通して結合される。

#### 4.7 空洞への電力投入

空洞への電力投入を考えよう。高周波源で発生させた高周波電力は、導波管等の立体回路を通じて空洞まで供給される。導波管と空洞は、カップラーと呼ばれる結合器により結合される。このとき、結合係数  $\beta$  を

$$\beta = \frac{P_{\text{ext}}}{P_0} \quad (4.71)$$

により定義する。これと、式 (3.52)~(3.54) により、

$$Q_L = \frac{1}{1+\beta} Q_0 \quad (4.72)$$

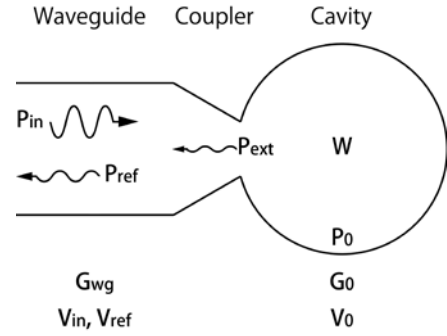


図 31 wg-cavity

と書ける。

図 31 より、次式のエネルギー保存則

$$\frac{dW}{dt} = P_{\text{in}} - P_{\text{ref}} - P_0 \quad (4.73)$$

が成り立つことがわかる。ここで、導波管におけるアドミッタンス  $G_{\text{wg}}$ 、および空洞におけるアドミッタンス  $G_0$  を用いると、左辺は

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{Q_0 P_0}{\omega_0} \right) \\ &= \frac{(1+\beta)Q_L}{\omega_0} \cdot \frac{d}{dt} (G_0 V_0^2) \\ &= \frac{(1+\beta)Q_L}{\omega_0} \cdot 2G_0 V_0 \frac{dV_0}{dt} \end{aligned} \quad (4.74)$$

と書ける。また右辺は、

$$\begin{aligned} P_{\text{in}} - P_{\text{ref}} - P_0 &= G_{\text{wg}} V_{\text{in}}^2 - G_{\text{wg}} V_{\text{ref}}^2 - G_0 V_0^2 \\ &= G_{\text{wg}} V_{\text{in}}^2 - G_{\text{wg}} (V_0 - V_{\text{in}})^2 - G_0 V_0^2 \\ &= -G_{\text{wg}} V_0^2 + 2G_{\text{wg}} V_{\text{in}} V_0 - G_0 V_0^2 \\ &= -\beta G_0 V_0^2 + 2\beta G_0 V_{\text{in}} V_0 - G_0 V_0^2 \\ &= G_0 V_0 \{ -(1+\beta)V_0 + 2\beta V_{\text{in}} \} \end{aligned} \quad (4.75)$$

と書ける。ここで、

$$V_{\text{ref}} = V_0 - V_{\text{in}} \quad (4.76)$$

$$\beta = \frac{G_{\text{wg}}}{G_0} \quad (4.77)$$

を用いた。式 (4.74), (4.75) より、式 (4.73) のエネルギー保存則は

$$\frac{2Q_L}{\omega_0} \frac{dV_0}{dt} + V_0 = \frac{2\beta}{1+\beta} V_{\text{in}} \quad (4.78)$$

と書き直せる。 $V_0$  について、式 (4.78) を解くと、

$$V_0(t) = \frac{2\beta}{1+\beta} \left( 1 - e^{-\frac{\omega_0}{2Q_L} t} \right) V_{\text{in}} \quad (4.79)$$

となる。<sup>\*20</sup>

$0 < t < t_1$  のとき、 $V_{\text{ref}}$  は

$$V_{\text{ref}} = - \left( \frac{1-\beta}{1+\beta} + \frac{2\beta}{1+\beta} e^{-\frac{\omega_0}{2Q_L} t} \right) V_{\text{in}} \quad (4.80)$$

となる。このときの反射係数  $\Gamma(t) = V_{\text{ref}}/V_{\text{in}}$  は、

$$\Gamma(t) = \frac{\beta-1}{\beta+1} - \frac{2\beta}{1+\beta} e^{-\frac{\omega_0}{2Q_L} t} \quad (4.81)$$

である。 $t_1 < t$  では、

$$\begin{aligned} V_0(t) &= V_0(t_1) e^{-\frac{\omega_0}{2Q_L} (t-t_1)} \\ &= \frac{2\beta}{1+\beta} \left( e^{\frac{\omega_0}{2Q_L} t_1} - 1 \right) e^{-\frac{\omega_0}{2Q_L} t} V_{\text{in}} \quad (4.82) \end{aligned}$$

となる。また、 $V_{\text{in}} = 0$  であるから、 $V_{\text{ref}}$  は

$$V_{\text{ref}}(t) = V_0(t) \quad (4.83)$$

$$= \frac{2\beta}{1+\beta} \left( e^{\frac{\omega_0}{2Q_L} t_1} - 1 \right) e^{-\frac{\omega_0}{2Q_L} t} V_{\text{in}} \quad (4.84)$$

となる。図 32 に、 $\beta = 0.2, 1.0, 2.0$  としたときの反射電力  $P_{\text{ref}}$  および蓄積エネルギー  $W \propto V_0^2$  を示す。 $t = 0$  で、 $P_{\text{in}} = P_{\text{ref}}$ 、つまり全反射が起こる。 $P_{\text{in}} = 1\text{MW} \sim 1.5\text{MW}$  と大きいので、使用している高周波機器の耐圧等に注意が必要である。

$0 < t < t_1$  で、 $t$  が十分大きいと、

$$\Gamma = \frac{\beta-1}{\beta+1} \quad (4.85)$$

<sup>\*20</sup>

$$V_0 = \tilde{V} e^{-\frac{\omega_0}{2Q_L} t}$$

として、式 (4.78) に代入すると

$$\frac{d\tilde{V}}{dt} = \frac{\omega_0}{2Q_L} \cdot \frac{2\beta}{1+\beta} V_{\text{in}} e^{\frac{\omega_0}{2Q_L} t}$$

となる。これを  $t$  で積分することにより、 $C$  を積分定数として

$$\tilde{V} = \frac{2\beta}{1+\beta} V_{\text{in}} e^{\frac{\omega_0}{2Q_L} t} + C$$

が得られる。よって、

$$V_0 = \frac{2\beta}{1+\beta} V_{\text{in}} + C e^{-\frac{\omega_0}{2Q_L} t}$$

となる。ここで、初期条件  $V_0(t=0) = 0$  により、 $C$  は

$$C = -\frac{2\beta}{1+\beta} V_{\text{in}}$$

となる。よって、式 (4.78) の解として、式 (4.79) が得られる。

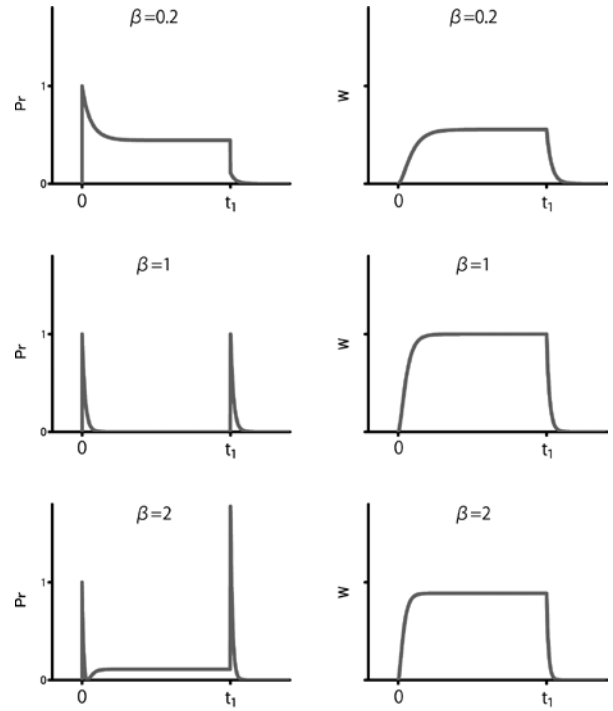


図 32 結合係数  $\beta = 0.2, 1.0, 2.0$  のときの反射電力  $P_{\text{ref}}$  (左図) と蓄積エネルギー  $W \propto V_0^2$  (右図)。

であるから、

$$\beta = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} \quad (1 < \beta : \text{over coupling}) \quad (4.86)$$

$$\beta = \frac{1-|\Gamma|}{1+|\Gamma|} \quad (\beta < 1 : \text{under coupling}) \quad (4.87)$$

となる。<sup>\*21</sup>  $\beta = 1$  : critical coupling) のとき、 $\Gamma = 0$  となり、全透過を表している。

<sup>\*21</sup> つまり、VSWR (Voltage Standing Wave Ratio) を用いて

$$\text{VSWR} = \beta \quad (1 < \beta)$$

$$\text{VSWR} = \frac{1}{\beta} \quad (\beta < 1)$$

と書ける。

## おわりに

以上、陽子リニアックの初学者を対象に、定在波型加速管の基本的な内容について解説しました。本テキストをまとめるにあたって、主に下記の [1]～[17] を参考にさせていただきました。これらを書きました諸先生方に心より感謝を申し上げます。陽子用加速空洞のわかりやすい入門書となるよう意識して書き始めましたが、筆者の力不足により、これら参考文献の出来の悪い抜粋になってしまった感もあります。物理的・工学的意味の説明が不十分な箇所や、より詳細な内容等については、過去の OHO テキスト等の良書を参考に各自補足してください。

最後に、歴史ある本セミナーの講師をさせて頂く機会を与えて下さいました小林幸則氏、道園真一郎氏、内藤富士雄氏に心からお礼を申し上げます。

## 参考文献

- [1] Thomas P. Wangler, "RF Linear Accelerators", WILEY-VCH.
- [2] 亀井亨, 木原元央, "加速器科学", 丸善.
- [3] 後藤憲一, 山崎修一郎, "詳解 電磁気学演習", 共立出版.
- [4] 小野寺嘉孝, "物理のための応用数学", 裳華房.
- [5] 堤井信力, "電磁波の基礎", 内田老鶴圃.
- [6] 中島将光, "マイクロ波工学", 森北出版.
- [7] Robert E. Collin, "Foundations for Microwave Engineering, 2nd Edition", McGraw-Hill, Inc.
- [8] 加藤隆夫, "ライナックとその周辺", OHO'84.
- [9] 山崎良成, "高周波加速装置", OHO'84.
- [10] 肥後寿泰, "高周波空洞の設計", OHO'85.
- [11] 高崎栄一, "陽子リニアック", OHO'89.
- [12] 福本貞義, "リニアークセラレータ入門", OHO'97.
- [13] 高田耕治, "高周波加速", OHO'97.
- [14] 池上雅紀, "線形加速器 (II)", OHO'01.
- [15] 山口誠哉, "加速管・立体回路", OHO'05.
- [16] 吉田光宏, "電子線形加速器における高周波デバイスの基礎", OHO'08.
- [17] 青寛幸, "高周波加速の基礎", OHO'12.