

マイクロ波ローレベル制御

1 はじめに

マイクロ波ローレベル制御とは、低電力高周波制御のことであり、LLRF(Low Level Radio-Frequency) 制御といわれている。

大電力のまま RF のモニターや制御系を構築するのは難しく、また制御対象に大きな影響を加えることになるので、制御対象に影響を与えない程度のほんの一部の電力を取り出してモニターし、RF の制御がおこなわれている。また、何か異常があった場合には瞬時に RF を停止するなどのインターロック系も重要な制御項目の一つである。

安定なビーム加速を実現するため、加速電場の振幅・位相の安定化が重要である。空洞内の電場は、

- クライストロン印加電圧のリップルなどによる RF の変動
- 空洞の共振周波数のずれ
- ビームローディング

などの外乱で変化してしまう。安定化のため、クライストロンなどの大電力 RF 源への入力 RF の振幅・位相制御や、空洞の共振周波数をコントロールするためのチューナー制御が行われる。

近年、超伝導加速空洞を用いた加速器が多く建設されており、特に X 線自由電子レーザー (XFEL) の施設では、振幅 0.01%、位相 0.01deg の安定度が要求されてきている。高い安定度や、フレキシブルな制御を実現するため、AD 変換後デジタル演算処理を行い、DA 変換して出力するデジタルフィードバック制御が広く採用されている。本稿では、デジタルフィードバック制御を中心に紹介していきたい。

また、KEK にある超伝導加速空洞を用いた 2 つの線形加速器の試験施設

cERL: compact Energy Recovery Linac

STF : Superconducting RF Test Facility

における制御方法について、具体的に例を挙げて説明を行う。これらの施設の RF 周波数は 1.3 GHz で、cERL では CW 運転、STF ではパルス運転が行われている。

2 高周波加速空洞

まずは、制御の対象となる高周波加速空洞についての基礎的なことについて述べたい。

2.1 Q 値

高周波加速空洞は、LCR 回路と等価な共振器である。

共振回路の Q 値 (Quality factor) は、次のように定義される。

$$Q = 2\pi \frac{\text{空洞の蓄積エネルギー}}{\text{1 周期あたりの損失電力}} \quad (2.1)$$

空洞の蓄積エネルギーを U とする。1 周期の時間を T 、平均損失電力を P_{loss} とすると、1 周期あたりの損失電力は $P_{loss}T$ となる。よって Q 値は次のように表される。

$$Q = 2\pi \frac{U}{P_{loss}T} = \frac{\omega U}{P_{loss}} \quad (2.2)$$

ここで、 ω は角周波数である。空洞の蓄積エネルギー U に対する微少時間での減衰量は、

$$dU = -P_{loss}dt \quad (2.3)$$

であるので、

$$\frac{dU}{dt} = -P_{loss} = -\frac{\omega U}{Q} \quad (2.4)$$

と表され、空洞への RF 入力を OFF にした場合は、空洞の蓄積エネルギーは次のように時定数 τ で減衰する。

$$U(t) \propto e^{-\omega t/Q} = e^{-t/\tau} \quad (2.5)$$

$$\tau = Q/\omega \quad (2.6)$$

ちなみに、時定数とは $1/e$ の大きさとなる時間である。

P_{loss} が、空洞の壁面でのジュール損失のみの場合、Q 値は無負荷 Q (Q_0) と呼ばれ、空洞の材料や形状に依存し、空洞の性能を表す。超伝導加速空洞の場合、 Q_0 は 10^{10} 程度である。

しかし、実際に加速器で使う場合は、加速空洞にマイクロ波を注入するための入力カップラーや、空洞電場を測定するためのピックアップポートからのエネルギーの漏れ P_t がある。(ただし、ピックアップポートからのエネルギー損失は小さく設計されているため、ここでは、入力カップラーからの損失のみを考える。) 加速ビームが無い場合 ($I_b = 0$)、空洞壁面でのジュール損失を P_0 ,

空洞外部 (external) への損失を P_{ext} とすると、1 周期あたりの全損失エネルギーは、

$$P_{tot} = P_0 + P_{ext} \quad (2.7)$$

と表される。 Q_{ext} を外部 (external)Q 値、 Q_L を負荷 (Loaded)Q 値とすると、

$$Q_{ext} = \omega \frac{U}{P_{ext}} \quad (2.8)$$

$$Q_L = \omega \frac{U}{P_{tot}} \quad (2.9)$$

と定義され、

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{ext}} \quad (2.10)$$

の関係で表される。入力カップラーの結合度 β は

$$\beta = \frac{P_{ext}}{P_0} \quad (2.11)$$

と定義されるので、

$$Q_L = \frac{Q_0}{1 + \beta} \quad (2.12)$$

となる。

ここで、ビームがある場合を考える。高周波源からの入力電力を P_g 、反射電力を P_r 、ビームが持ち去る電力を P_b とすると、

$$P_g - P_r = P_0 + P_b$$

入力カップラーの結合度 β は、ビーム加速時に反射が無いように選ばれる。そのため、外部から $P_0 + P_b$ が供給されるようにするには、

$$\beta = \frac{P_g}{P_0} = \frac{P_0 + P_b}{P_0} = 1 + \frac{P_b}{P_0} \quad (2.13)$$

超伝導加速空洞の場合、 $P_b \gg P_0$ であるため、 $\beta \gg 1$ となり、 β は、 $10^3 - 10^4$ 程度の大きい値となる。

図 1 は、STF における超伝導加速空洞の電圧パターンである。RF がオフすると、指数関数的に減衰しているのが分かる。空洞のピックアップ信号を ADC で取り込む際は電圧信号となるので、信号処理は電圧で取り扱うことが多い。 $U \propto V_c^2$ なので、

$$\frac{dU}{U} = 2 \frac{dV_c}{V_c} \quad (2.14)$$

式 (2.4) に代入すると電圧の減衰曲線と時定数 τ_v は次のようになる。

$$V_c(t) \propto e^{-\omega t/2Q} = e^{-t/\tau_v} \quad (2.15)$$

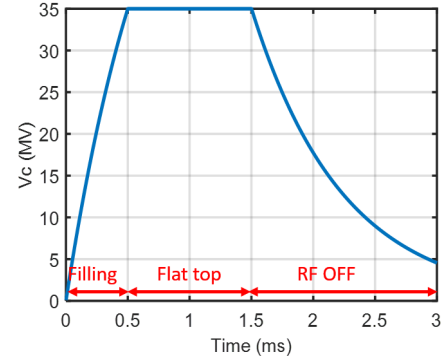


図 1 STF での超伝導加速空洞の電圧パターンの例 (共振周波数=1.3 GHz, $Q_L = 3 \times 10^6$ の場合)

$$\tau_v = 2Q/\omega \quad (2.16)$$

共振周波数が 1.3 GHz、空洞の Q_L 値が 3×10^6 の場合の空洞電圧は、735 μ s の時定数で減衰する。

同様に、空洞の減衰カーブから、 Q_L を求めることもできる。超伝導加速空洞でクエンチ (超伝導状態が破れて急激な発熱) が起きた際は Q_L 値が大きく低下する。STF では、図 1 のようなパルス運転を 5 Hz の繰り返しで行っているが、パルス毎に Q_L が計算され、クエンチ検出が行われている。クエンチ発生時には速やかに RF の供給を停止している。

2.2 空洞の等価回路

2.2.1 インピーダンス

空洞は、図 2 のように LCR 等価回路で表される。

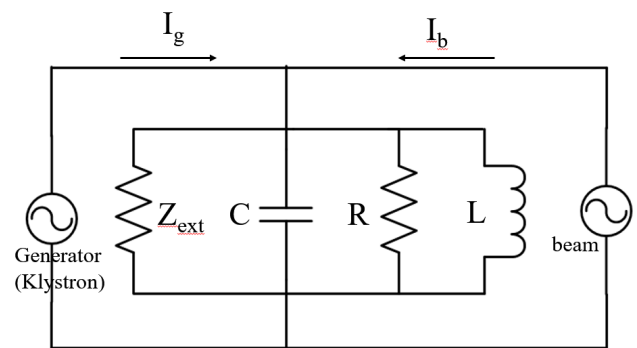


図 2 空洞の等価回路

空洞の抵抗を R 、外部の負荷抵抗を Z_{ext} とすると、合成抵抗 R_L は、

$$\frac{1}{R_L} = \frac{1}{R} + \frac{1}{Z_{ext}} \quad (2.17)$$

ここで、 Z_{ext} は次のように表される。

$$\beta = \frac{P_{ext}}{P_0} = \frac{R}{Z_{ext}} \quad (2.18)$$

$$Z_{ext} = \frac{R}{\beta} \quad (2.19)$$

よって、合成抵抗は

$$R_L = \frac{R}{1 + \beta} \quad (2.20)$$

となり、負荷インピーダンスと言われる。空洞のインピーダンス Z_c は、

$$\frac{1}{Z_c} = j\omega C + \frac{1}{R_L} + \frac{1}{j\omega L} \quad (2.21)$$

$$Z_c = \frac{R_L}{1 + j\frac{R_L}{\omega L}(\omega^2 LC - 1)} \quad (2.22)$$

共振角周波数は $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ である。また、空洞電圧の振幅を V_c とすると、空洞の蓄積エネルギーは $CV_c^2/2$ 、消費電力は $V_c^2/(2R_L)$ であるので、

$$\begin{aligned} Q_L &= \omega_0 \frac{CV_c^2/2}{V_c^2/(2R_L)} \\ &= \omega_0 CR_L \\ &= \frac{R_L}{\omega_0 L} \end{aligned} \quad (2.23)$$

ゆえに、式 (2.22) は、 R_L, Q_L と ω_0 で表すことができる。

$$\begin{aligned} Z_c &= \frac{R_L}{1 + jQ_L \frac{\omega_0}{\omega} (\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1)} \\ &= \frac{R_L}{1 + jQ_L (\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})} \end{aligned} \quad (2.24)$$

空洞電圧 V_c は、入力 RF によって励振されるジェネレータ電圧 V_g とビームによって空洞に誘起される電圧 V_b のベクトル和で表される。

$$\mathbf{V}_c = Z_c(\mathbf{I}_g + \mathbf{I}_b) = \mathbf{V}_g + \mathbf{V}_b \quad (2.25)$$

回路に流れる電流を $I = I_0 \cos \omega t$ 、空洞電圧を $V = V_c \cos(\omega t + \psi)$ とすると、 $V = IZ_c$ より、位相 ψ と振幅 V_c は、次のように表される*1。

$$\tan \psi = Q_L \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right) \quad (2.26)$$

$$V_c = \frac{I_0 R_L}{\sqrt{1 + \tan^2 \psi}} \quad (2.27)$$

ゆえに Z_c は次のように書き直すことができる。

$$Z_c = \frac{R_L}{1 - j \tan \psi} \quad (2.28)$$

*1 $1/(1 + jX)$ の位相は、 $\tan^{-1}(-X)$

特に、入力 RF 周波数 ω が共振周波数 ω_0 に近い場合、共振周波数からのずれを $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$ とすると、

$$\tan \psi \approx 2Q_L \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 2Q_L \frac{\Delta f}{f_0} \quad (2.29)$$

と近似することができる。図3に空洞の振幅・位相の共振曲線を示す。

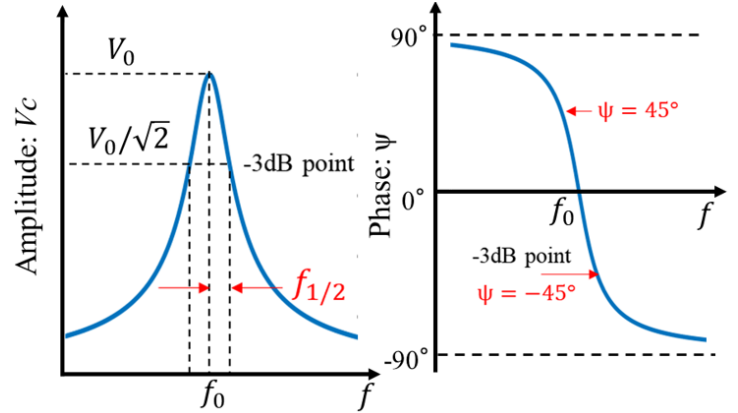


図3 空洞の振幅・位相の共振曲線

空洞の共振周波数と入力 RF の周波数が等しい $\Delta f = 0$ のときに振幅が最大となり、位相 ψ は 0° となる。入力 RF 周波数が空洞の共振周波数からずれると、空洞電圧が低下する。 $\psi = \pm 45^\circ$ のときは、空洞電圧が $1/\sqrt{2}$ となり、蓄積パワーは半分となる。このときの Δf は -3dB 帯域幅を表すので $f_{1/2}$ と定義すると、

$$f_{1/2} = \frac{f_0}{2Q_L} \quad (2.30)$$

と表され、 Q_L が高いと帯域幅が狭くなる。また、上記の式より、 Q 値 (Q_0 や Q_L) は、共振の幅と共振周波数を測定することによって求めることができる。

$$Q_{0,L} = \frac{f_0}{2f_{1/2}} \quad (2.31)$$

空洞の振幅は、電流と負荷インピーダンス R_L によって決まる。式 (2.23) は、 Q_L と Q_0 に対して、 R_L と R を使うことで同様の関係で表され、インピーダンスと Q 値の比をとると次式のように、 L と C だけで表される。

$$R_L/Q_L = R/Q_0 = \sqrt{L/C} \equiv \frac{1}{2}(r/Q) \quad (2.32)$$

上記 r/Q は、材質によらず空洞の形状だけで決まるパラメータであり、通常、この数値が与えられる。cERL の入射空洞は、 r/Q が 205Ω 、主空洞は 897Ω 、STF の空洞は 1016Ω である。

Q_L 値と積をとることで、シャントインピーダンス R_{sh} が計算できる。

$$R_{sh} = r/Q \cdot Q_L = 2R_L \quad (2.33)$$

シャントインピーダンスとは、加速電圧を求めるのに便利になるように R_L を 2 倍した数値で、加速電圧の 2 乗と空洞内部での消費電力 P_c の比をとったものに等しい。

$$R_{sh} = V^2/P_c \quad (2.34)$$

2.2.2 電圧の微分形式

ここまでは、直観的に取り扱えるように、インピーダンスの導出から行ってきた。過渡的な状態を記述するために空洞電圧を微分形式で扱いたいので、キルヒホフの法則から再度表記し直す。

$$I_C + I_R + I_L = I_g + I_b = I \quad (2.35)$$

$$C \frac{dV_c}{dt} + \frac{V_c}{R_L} + \frac{1}{L} \int V_c dt = I \quad (2.36)$$

(上式に、 $V_c = \hat{V}e^{j\omega t}$, $I = \hat{I}e^{j\omega t}$ を代入すると、式(2.22)のインピーダンスの式が簡単に導出できる。)

$$\begin{aligned} \ddot{V}_c + \frac{1}{CR_L} \dot{V}_c + \frac{1}{LC} V_c &= \frac{1}{C} \dot{I} \\ \ddot{V}_c + \frac{\omega_0}{Q_L} \dot{V}_c + \omega_0^2 V_c &= \frac{\omega_0 R_L}{Q_L} \dot{I} \\ \ddot{V}_c + 2\omega_{1/2} \dot{V}_c + \omega_0^2 V_c &= 2\omega_{1/2} R_L \dot{I} \end{aligned} \quad (2.37)$$

ここに

$$V_c = V_c(t)e^{j\omega t}, I = I(t)e^{j\omega t}$$

$$\dot{V}_c = (\dot{V}_c + j\omega V_c)e^{j\omega t}, \dot{I} = (\dot{I} + j\omega I)e^{j\omega t}$$

$$\ddot{V}_c = (\ddot{V}_c + 2j\omega \dot{V}_c - \omega^2 V_c)e^{j\omega t}$$

を代入すると、

$$\begin{aligned} \ddot{V}_c + 2(\omega_{1/2} + j\omega) \dot{V}_c + (\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\omega_{1/2}\omega) V_c \\ = 2\omega_{1/2} R_L (\dot{I} + j\omega I) \end{aligned} \quad (2.38)$$

2 次の微分項は非常に小さいとして無視し、 2ω で両辺を割ると、

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega_{1/2}}{\omega} + j\right) \dot{V}_c + \left(\frac{(\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega)}{2\omega} + j\omega_{1/2}\right) V_c \\ = \frac{\omega_{1/2}}{\omega} R_L \dot{I} + j\omega_{1/2} R_L I \end{aligned} \quad (2.39)$$

$\frac{\omega_{1/2}}{\omega}$ は非常に小さく、 $\omega_0 \approx \omega$ とすると、次のような 1 次の微分方程式で表すことができる。

$$\dot{V}_c(t) + (\omega_{1/2} - j\Delta\omega) V_c(t) = \omega_{1/2} R_L I(t) \quad (2.40)$$

■I/Q 表記 デジタル制御を行う場合、信号の実部と虚部の直交座標系で扱うことが多い。電圧・電流も I/Q 直交座標系で表記したいので、I/Q について説明を行う。

振幅 A 、位相 θ の波は次のように表される。

$$\begin{aligned} Ae^{j(\omega t + \theta)} &= A(\cos \theta + j \sin \theta)e^{j\omega t} \\ &= (I + jQ)e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (2.41)$$

ここで、

$$\begin{aligned} I &= A \cos \theta \\ Q &= A \sin \theta \end{aligned} \quad (2.42)$$

である。この関係を図 4 に示す。実部 (I) と虚部 (Q) の直交座標で表され、 I は In-phase, Q は Quadrature の意味である。

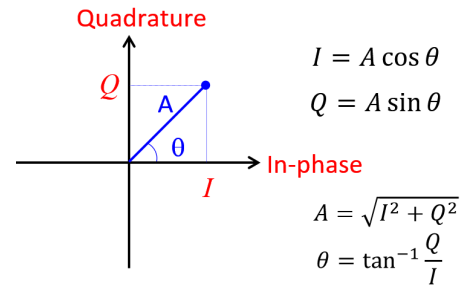


図 4 振幅 A 、位相 θ と I, Q の関係

$V_c(t)$ と $I(t)$ を実部 (I) と虚部 (Q) の直交座標系で表す。

$$\begin{aligned} V_c &= (V_I(t) + jV_Q(t))e^{j\omega t} \\ I &= (I_I(t) + jI_Q(t))e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (2.43)$$

これを式(2.40)に代入すると、

$$\begin{aligned} \dot{V}_I + \omega_{1/2} V_I + \Delta\omega V_Q &= R_L \omega_{1/2} I_I \\ \dot{V}_Q + \omega_{1/2} V_Q - \Delta\omega V_I &= R_L \omega_{1/2} I_Q \end{aligned} \quad (2.44)$$

行列形式で書き直すと、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} V_I \\ V_Q \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\omega_{1/2} & -\Delta\omega \\ \Delta\omega & -\omega_{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_I \\ V_Q \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} R_L \omega_{1/2} & 0 \\ 0 & R_L \omega_{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_I \\ I_Q \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.45)$$

空洞のシミュレーションを連続時間系で行う際は、式(2.45)の右辺を計算し、それを積分していく。

■空洞シミュレータ この微分形式を微少時間 Δt での偏差で表す。

$$\dot{V} = \frac{V(n+1) - V(n)}{\Delta t} \quad (2.46)$$

を使って $V(n+1)$ について整理し直すと、次のように離散的に表すことができる。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} V_I \\ V_Q \end{pmatrix}_{n+1} &= \begin{pmatrix} V_I \\ V_Q \end{pmatrix}_n \\ &+ \Delta t \begin{pmatrix} -\omega_{1/2} & -\Delta\omega \\ \Delta\omega & -\omega_{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_I \\ V_Q \end{pmatrix}_n \\ &+ \Delta t \begin{pmatrix} R_L\omega_{1/2} & 0 \\ 0 & R_L\omega_{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_I \\ I_Q \end{pmatrix}_n \end{aligned} \quad (2.47)$$

第1項目は、直前の状態、2項目は微小時間における減衰、および離調の効果、第3項目は、微小時間の電流入力によって空洞に誘起される電圧である。

低電力高周波系の試験のため、実際の空洞ではなく、ADC や DAC を持つ FPGA ボードに空洞シミュレータを構築して利用している。この際、式 (2.47) を使って FPGA 内部に模擬空洞を構築している。入力電流は、 $R_L I$ で電圧となるので電圧として ADC から取り込むことができ、I/Q 成分のサンプリング周期を Δt とし、対象としている空洞の $\omega_{1/2}$ や離調周波数 $\Delta\omega$ をパラメータ入力している。空洞の V_I, V_Q を DAC から出力させている。

2.2.3 空洞の極座標表記

式 (2.40) の空洞の一次微分方程式に対して極座標をとることにより、振幅と位相に対する微分形式で表すことができる。文献 [10] で述べられているが、後に示すダイナミックデチューニング (過渡的状态における離調) を求めるときに重要となるので、ここで導出しておく。

式 (2.40) の $R_L I$ は V_{in} に代えて表すと、

$$\dot{V}_c(t) + (\omega_{1/2} - j\Delta\omega)V_c(t) = \omega_{1/2}V_{in}(t) \quad (2.48)$$

ここに

$$V_c(t) = |V_c(t)|e^{j\theta} = A(t)e^{j\theta}, \quad \dot{V}_c = (\dot{A} + jA\dot{\theta})e^{j\theta},$$

$$V_{in}(t) = |V_{in}(t)|e^{j\varphi} = u(t)e^{j\varphi}$$

を代入し、実部と虚部に分ける。

$$\begin{aligned} (\dot{A} + A\omega_{1/2}) \cos \theta - (A\dot{\theta} - A\Delta\omega) \sin \theta &= \omega_{1/2}u \cos \varphi \\ (\dot{A} + A\omega_{1/2}) \sin \theta + (A\dot{\theta} - A\Delta\omega) \cos \theta &= \omega_{1/2}u \sin \varphi \end{aligned} \quad (2.49)$$

(第2式) $\times \cos \theta -$ (第1式) $\times \sin \theta$ とすると

$$\begin{aligned} A\dot{\theta} - A\Delta\omega &= \omega_{1/2}u(\sin \varphi \cos \theta - \cos \varphi \sin \theta) \\ &= \omega_{1/2}u \sin(\varphi - \theta) \end{aligned} \quad (2.50)$$

(第1式) $\times \cos \theta +$ (第2式) $\times \sin \theta$ とすると

$$\begin{aligned} \dot{A} + A\omega_{1/2} &= \omega_{1/2}u(\cos \varphi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta) \\ &= \omega_{1/2}u \cos(\varphi - \theta) \end{aligned} \quad (2.51)$$

式 (2.50) より、離調は次のように表される。

$$\Delta\omega = \dot{\theta} - \omega_{1/2} \frac{u}{A} \sin(\varphi - \theta) \quad (2.52)$$

離調は、空洞位相の時間微分と、入力 RF との位相差のみならず振幅比にも依存することが分かる。

式 (2.51) については、例えば、 $t=0$ で振幅 $A=0$ という初期条件をとると

$$A(t) = u \cos(\varphi - \theta)(1 - e^{-j\omega_{1/2}t}) \quad (2.53)$$

となる。一方入力をオフした場合、 $u = 0$ であるため、 $\dot{A} + A\omega_{1/2} = 0$ となり、 $e^{-\omega_{1/2}t}$ で減衰していくことを意味している。

2.3 RF システムの等価回路

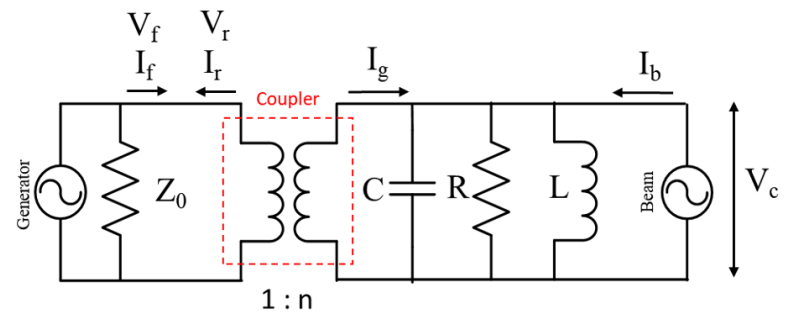


図5 RF システムの等価回路

図5は、空洞の入力カップラーを 1:n のトランスとして表し、導波管側と空洞がトランスで接続されているとした等価回路である。導波管側の進行波を V_f, I_f 、反射波を V_r, I_r 、伝送ラインの特性インピーダンスを Z_0 とする。トランスの一次側 (導波管側) から見た空洞電圧 V_{c1} と空洞電流 I_{c1} 、及びビーム電流 I_{b1} は

$$V_{c1} = V_c/n \quad (2.54)$$

$$I_{c1} = nI_c, \quad I_{b1} = nI_b \quad (2.55)$$

式 (2.18) より

$$\beta = \frac{R}{Z_{ext}} = \frac{R}{n^2 Z_0} \quad (2.56)$$

$$n^2 = \frac{R}{\beta Z_0} \quad (2.57)$$

空洞の無負荷インピーダンス Z_{c0} は、式 (2.24) と式 (2.26) を使って表すと、

$$\begin{aligned} Z_{c0} &= \frac{R}{1 + jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \\ &= \frac{R}{1 - j(1 + \beta)\tan\psi} \end{aligned} \quad (2.58)$$

Z_{c0} を導波管側から見たインピーダンスを Z_{c1} とすると、

$$Z_{c1} = Z_{c0}/n^2 = \frac{\beta Z_0}{R} Z_{c0} \quad (2.59)$$

1 次側から見た空洞電圧 V_{c1} と空洞電流 I_{c1} 、及びビーム電流は、

$$\mathbf{V}_{c1} = \mathbf{V}_f + \mathbf{V}_r \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{c1} &= \mathbf{I}_f + \mathbf{I}_r + \mathbf{I}_{b1} \\ &= \frac{\mathbf{V}_f}{Z_0} - \frac{\mathbf{V}_r}{Z_0} + \mathbf{I}_{b1} \end{aligned} \quad (2.61)$$

V_r を消去すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{c1} &= Z_{c1}\mathbf{I}_{c1} \\ &= \frac{Z_{c1}}{Z_0}(\mathbf{V}_f - (\mathbf{V}_{c1} - \mathbf{V}_f) + Z_0\mathbf{I}_{b1}) \\ &= \frac{Z_{c1}}{Z_0}(2\mathbf{V}_f - \mathbf{V}_{c1} + Z_0\mathbf{I}_{b1}) \end{aligned} \quad (2.62)$$

よって、

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{c1} &= \frac{Z_{c1}}{Z_0 + Z_{c1}}(2\mathbf{V}_f + Z_0\mathbf{I}_{b1}) \\ &= \frac{\beta}{\beta + 1} \cdot \frac{1}{1 - j\tan\psi}(2\mathbf{V}_f + Z_0\mathbf{I}_{b1}) \end{aligned} \quad (2.63)$$

導波管側の進行波を空洞電圧とビーム電流で表すと、

$$\mathbf{V}_f = \frac{1}{2} \left[\frac{\beta + 1}{\beta} (1 - j\tan\psi) \frac{1}{n} \mathbf{V}_c - nZ_0\mathbf{I}_b \right] \quad (2.64)$$

ここで、ビーム電流 I_b の DC 成分を I_{b0} とすると、運転周波数の成分は $2I_{b0}$ となり、空洞電圧に対するビーム位相を ϕ_b とすると、ビーム電流は次のように表される。

$$\mathbf{I}_b = 2I_{b0}(\cos\phi_b + j\sin\phi_b) \quad (2.65)$$

ビーム位相との関係から $\mathbf{V}_c = V_c + j0$ とすると

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_f &= \frac{1}{2} \frac{\beta + 1}{\beta} \frac{1}{n} V_c \left[(1 - j\tan\psi) - \frac{\beta}{\beta + 1} \frac{1}{V_c} n^2 Z_0 \mathbf{I}_b \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{\beta + 1}{\beta} \frac{1}{n} V_c \left[(1 - j\tan\psi) - \frac{R_L}{V_c} \mathbf{I}_b \right] \end{aligned} \quad (2.66)$$

進行波のパワーは、

$$P_f = P_g = \frac{|\mathbf{V}_f|^2}{2Z_0} = \frac{\mathbf{V}_f \cdot \mathbf{V}_f^*}{2Z_0} \quad (2.67)$$

であるので、入力パワーは次のようになる。

$$P_g = \frac{\beta + 1}{8\beta} \frac{V_c^2}{R_L} \left[\left(1 + \frac{2R_L I_{b0}}{V_c} \cos\phi_b\right)^2 + \left(\tan\psi + \frac{2R_L I_{b0}}{V_c} \sin\phi_b\right)^2 \right] \quad (2.68)$$

超伝導加速空洞の場合 $\beta \gg 1$ であり、また、 r/Q と Q_L での表記の方が使いやすいため、次式を使って計算される。

$$P_g = \frac{V_c^2}{4\left(\frac{r}{Q}\right)Q_L} \left[\left(1 + \frac{\left(\frac{r}{Q}\right)Q_L I_{b0}}{V_c} \cos\phi_b\right)^2 + \left(\frac{\Delta f}{f_{1/2}} + \frac{\left(\frac{r}{Q}\right)Q_L I_{b0}}{V_c} \sin\phi_b\right)^2 \right] \quad (2.69)$$

ビームが $I_{b0} \neq 0$ 、 $\phi_b \neq 0$ の場合、

$$\tan\psi_{opt} = -\frac{2R_L I_{b0}}{V_c} \sin\phi_b \quad (2.70)$$

となるように ψ_{opt} (最適同調角: optimum tuning angle) をとることにより、2 つ目の () 内がゼロとなり、入力電力を最小にすることができる。

ここで、例として cERL の主空洞について考える。 $r/Q=897 \Omega$ 、 $Q_L=1 \times 10^7$ 、 $V_c=15 \text{ MV}$ に対し、ビームが無い場合は、

$$P_g = 6.27 \text{ kW} \left[1 + \left(\frac{\Delta f}{f_{1/2}}\right)^2 \right]$$

ビーム電流が 10 mA で、クレスト位相 ($\phi_b=0$) で加速される場合は、

$$P_g = 6.27 \text{ kW} \left[6.98^2 + \left(\frac{\Delta f}{f_{1/2}}\right)^2 \right]$$

となり、 $\Delta f = 0$ の場合でも 305 kW の入力電力が必要となる。しかし、cERL では、加速されたビームが 1 ターン周回後、空洞で減速されてエネルギーが回収されるため、加速・減速が交互行われる運転状態の場合、ビームローディングを無視することができる。

ここで、式 (2.63) を再度見直す。

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - j\tan\psi} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\psi}} (1 + j\tan\psi) \\ &= \cos\psi e^{j\psi} \end{aligned} \quad (2.71)$$

$$\alpha = \beta/(\beta + 1) \quad (2.72)$$

とおくと、

$$\mathbf{V}_{c1} = \alpha \cos\psi e^{j\psi} (2\mathbf{V}_f + Z_0\mathbf{I}_{b1}) \quad (2.73)$$

1 次側でも、

$$\mathbf{V}_{c1} = \mathbf{V}_{g1} + \mathbf{V}_{b1} \quad (2.74)$$

の関係が成り立ち、次のように表すことができる。

$$V_{g1} = 2\alpha \cos \psi e^{j\psi} V_f \quad (2.75)$$

$$V_{b1} = \alpha \cos \psi e^{j\psi} Z_0 I_{b1} \quad (2.76)$$

2次側(空洞側)から見た進行波と反射波を V'_f, V'_r とし、空洞側での関係式を表す。

$$V_c = V'_f + V'_r \quad (2.77)$$

$$V_c = V_g + V_b \quad (2.78)$$

$$V_g = 2\alpha \cos \psi e^{j\psi} V'_f = \alpha \cos \psi e^{j\psi} V_{gr} \quad (2.79)$$

$$V_b = \alpha \cos \psi e^{j\psi} Z_0 n^2 I_b = \alpha \cos \psi e^{j\psi} R_L I_b \quad (2.80)$$

V_{gr} は、離調が0の時のジェネレータ電圧で、 V'_f の2倍に相当する。ここで、

$$V_{gr} = \sqrt{2R_L P_g} \quad (2.81)$$

超伝導空洞の場合、結合定数 β は非常に大きいため、 $\alpha = 1$ となる。この結果、図6のようなベクトル線図を描くことができる。

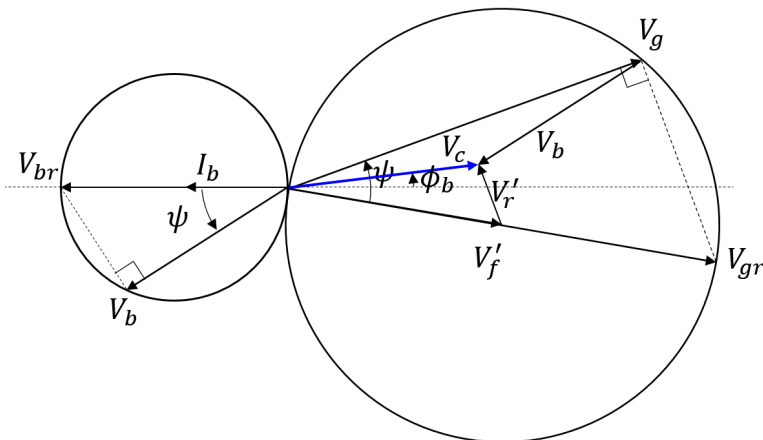


図6 空洞の Phaser ダイアグラム

3 伝達関数とフィードバック制御

フィードバックシステムの安定性を評価する際、制御システムを理解する必要がある。

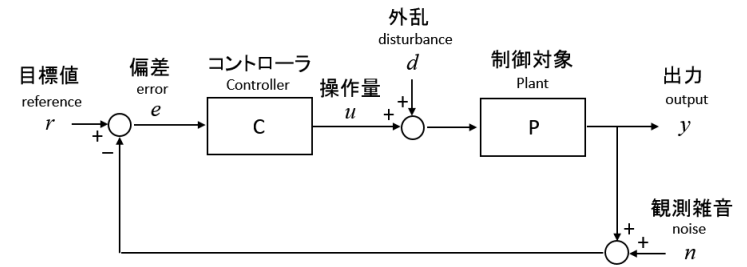


図7 フィードバック制御系の構成要素

図7にフィードバック制御系の構成要素を示す。加速空洞の制御を例として考えると、制御対象のPは、空洞電場である。出力yは、空洞のピックアップ信号を取り込んだ値となるため、Pにはセンサー部も含むこととする。rは、目標とする空洞電場の振幅・位相、または、それを直交座標系で表されるI/Qの値となる(図4参照)。デジタル制御系では、取り扱いの容易さからI/Q制御が用いられることが多い。フィードバックとは、出力yが目標値rとなるように制御することであり、コントローラCには、そのための制御回路はもちろんのこと、簡単表記のためここでは、高周波増幅器、ループ遅延時間など縦続結合されるものを含めて考えることとする。実際のシステムには外乱dや、観測雑音nが存在するので、これらの影響をできるだけ小さくする必要があるのである。

3.1 負帰還と正帰還

偏差eは、

$$e = r - y \quad (3.1)$$

である。このように、rからyを引いたものにゲイン(利得)をかけてフィードバックする場合を負帰還といて、安定な制御には大切なルールである。一方、 $e = r + y$ となる場合を正帰還といい、ループを回す毎に値がどんどん増加するため発散する。

注意が必要なのは、空洞制御で安定なフィードバック制御系があったとし、そのシステムの途中にケーブルを追加したり場合、ケーブル分だけ位相が回転し、正帰還となって発散してしまうことがある。そのため、回路に新たなものを追加する場合は、必ず、位相キャリブレーションを行い、負帰還となるように位相を補正する必要

がある。y に対し、アナログ制御であれば移相器で位相を回し、デジタル制御であれば、出力 y の I/Q 値に対し、回転行列演算を行い補正を行う。キャリブレーションの方法は、フィードバック制御をオフにし、例えばコントローラで振幅一定で $\theta = 0^\circ$ の高周波を生成して、観測された y の位相がほぼ 0° となるように補正をかけている。後述するデジタル制御のブロック図を確認してほしい。

その他、空洞の運転周波数以外の共振周波数が制御周波数帯域内に入っている場合、運転周波数に対しては安定な系でも、フィードバックループで寄生周波数成分のベクトルが正帰還の向きになっていると、意図せずに発振が起きてしまうので注意が必要である。

3.2 伝達関数

システムの応答を考える際、時間領域で考えると微分方程式で表わされる各要素を組み合わせることとなり、取り扱いが複雑になってしまう。しかし、ラプラス変換をおこない、時間領域 (t) から周波数領域 ($s = j\omega$) に変えることで取り扱いが容易となるため、各要素は、s で表された伝達関数として取り扱われる。詳しい説明は、制御理論の教科書 [6, 7] や、OHO06 の松本氏、および OHO15 Qiu 氏の講義資料を参考にしてほしい。

図 7 の構成要素が周波数パラメータ s で表されるとする。r(s) から y(s) への伝達関数 G_{yr} (閉ループの伝達関数) は、

$$y(s) = e(s)C(s)P(s) = (r(s) - y(s))C(s)P(s) \quad (3.2)$$

より、

$$G_{yr}(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} \quad (3.3)$$

と表され、CP が大きい程、伝達関数は 1 に近づく。

一方、外乱 d(s) から y(s) への伝達関数 G_{yd} は、

$$y(s) = [d(s) - y(s)C(s)]P(s) \quad (3.4)$$

より、

$$G_{yd}(s) = \frac{P(s)}{1 + C(s)P(s)} \quad (3.5)$$

C(s) が大きいほど、外乱による影響は小さくなる。

上記より、コントローラのゲインが高い方が望ましいが、一般にコントローラのゲインが高くなっていくと、次第にシステムは不安定になってくる。

3.3 開ループ伝達関数による閉ループ安定判別

伝達関数を一般化して表すと、

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \\ &= \frac{B(s)}{(s + x_n) \dots (s + x_2)(s + x_0)} \\ &= \frac{A_n}{s + x_n} + \dots + \frac{A_2}{s + x_2} + \frac{A_1}{s + x_1} \quad (3.6) \end{aligned}$$

のように部分分数展開して表すことができる。(ここで、 $m < n$). $\frac{1}{s+\alpha}$ のラプラス逆変換は、 $e^{-\alpha t}$ なので、 $\alpha > 0$ で安定、 $\alpha < 0$ では、増大していくため不安定となる。式 (3.6) に当てはめると、分母=0 の特性方程式の解の実数部が全て負である必要がある。

そのため、式 3.3 で表されるフィードバック制御系が安定であるための必要十分条件は、分母の $1 + CP$ に対して、特性方程式

$$1 + C(s)P(s) = 0$$

の全ての根が s 平面 (複素平面) の左半分にあること。つまり、根の実数部が負となる必要がある。

3.3.1 ナイキストの安定判別法

安定判別のために極を調べたが、安定の度合いを知るためには、ナイキストの安定判別法が用いられる。

伝達関数を複素平面上にプロットしたものをナイキスト線図といい、開ループ $C(s)P(s)$ に対し、 ω を 0 から ∞ に変化させた際、複素平面上で (-1, j0) を左手側に見れば安定、右手側に見れば不安定となる。

3.3.2 ボード線図とゲイン余裕・位相余裕

ナイキスト線図で、(-1, j0) を左手にみるというのは、位相が -180° で、ゲイン (利得) が 1 を超えないということの意味する。伝達関数の絶対値はゲインを意味し、図 8 のように横軸を周波数として、ゲインと位相をプロットしたものをボード線図という。フィードバックの安定度を評価するには、開ループ $C(s)P(s)$ のボード線図をプロットし、 -180° となる周波数におけるゲインを調べ、ゲインが 1 (0 dB) に要するゲインをゲイン余裕 (gain margin) という。また、ゲインが 1 (0 dB) となる周波数で、位相が -180° となるまでの位相の差

分を位相余裕 (phase margin) という。実用的に言い換えると、ゲイン余裕に相当するゲインを加えた時には、フィードバックが持続振動する安定限界である。

ゲイン余裕と位相余裕が大きいほど、フィードバックは安定であるが、ゲインが小さいと、レスポンスも遅く、外乱による影響の抑制や目標値までの到達度合が悪い。ゲインの設定値については、コントローラの項で述べる。

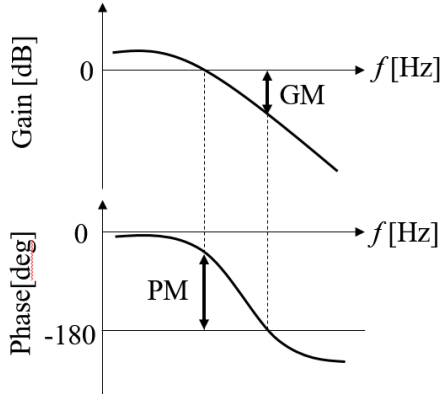


図 8 開ループ伝達関数のボード線図におけるゲイン余裕 (GM:Gain Margin) と位相余裕 (PM:Phase Margin)

3.4 空洞の伝達関数

式 (2.45) をラプラス変換する。

$$s \begin{pmatrix} V_I(s) \\ V_Q(s) \end{pmatrix}_{out} = \begin{pmatrix} -\omega_{1/2} & -\Delta\omega \\ \Delta\omega & -\omega_{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_I(s) \\ V_Q(s) \end{pmatrix}_{out} + \begin{pmatrix} \omega_{1/2} & 0 \\ 0 & \omega_{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_I(s) \\ V_Q(s) \end{pmatrix}_{in} \quad (3.7)$$

$$\begin{pmatrix} s + \omega_{1/2} & \Delta\omega \\ -\Delta\omega & s + \omega_{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_I(s) \\ V_Q(s) \end{pmatrix}_{out} = \begin{pmatrix} \omega_{1/2} & 0 \\ 0 & \omega_{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_I(s) \\ V_Q(s) \end{pmatrix}_{in} \quad (3.8)$$

空洞の伝達関数を $G_c(s) = V_{out}/V_{in}$ とすると、

$$G_c(s) = \frac{\omega_{1/2}}{(s + \omega_{1/2})^2 + \Delta\omega^2} \begin{pmatrix} s + \omega_{1/2} & -\Delta\omega \\ \Delta\omega & s + \omega_{1/2} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

$\Delta\omega = 0$ のとき、

$$G_c(s) = \frac{\omega_{1/2}}{s + \omega_{1/2}} \quad (3.10)$$

空洞の伝達関数は、カットオフ周波数が $f_{1/2} = \frac{\omega_{1/2}}{2\pi}$ の一次のローパスフィルター (LPF) と同じ形式で表され

る。例として、cERL と STF の空洞のボード線図を図 9 に示す。一次遅れ要素であるので、位相は 90° だけ遅れる。振幅が -3dB となる周波数が空洞の帯域幅を示す。

cERL 主空洞 ($Q_L=1 \times 10^7$): $f_{1/2} = 65 \text{ Hz}$

STF ($Q_L=3 \times 10^6$): $f_{1/2} = 217 \text{ Hz}$

cERL 入射空洞 ($Q_L=5 \times 10^5$): $f_{1/2} = 1.3 \text{ kHz}$

cERL バンチャー空洞 ($Q_L=1 \times 10^4$): $f_{1/2} = 65 \text{ kHz}$

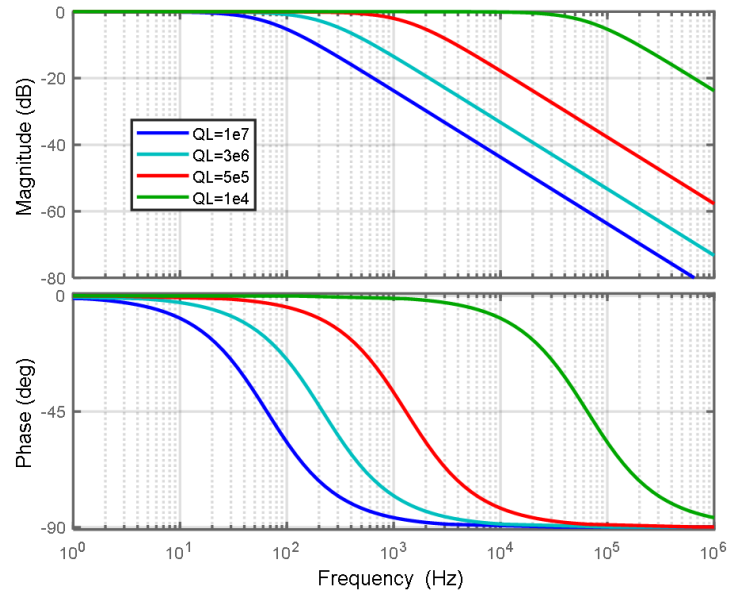


図 9 cERL と STF の空洞のボード線図

3.5 閉ループ遅延時間 (Loop Delay)

空洞の伝達関数は 1 次遅れ要素であるため、フィードバックに遅延が無い場合は、フィードバックゲインを無限大 ∞ にすることができる。しかし、実際には空洞のピックアップ信号をケーブルで伝送し信号処理回路を通して出力された RF をアンプで増幅してから空洞へ入力するので、必ず遅れが存在する。この遅れにより、フィードバックゲインの大きさは大きく制限される。遅延は、むだ時間要素といわれ、遅延時間を τ とすると、伝達関数は次のように表される。

$$G_{delay}(s) = e^{-\tau s} \quad (3.11)$$

比例ゲイン K_P を 1 として、帯域幅 1kHz の空洞に遅延を加えた場合の開ループボード線図を図 10 に示す。

ゲインカーブは変わらないが、遅延があると周波数に依存して位相が回る。遅延が $1\mu\text{s}$ の場合を考えると、空洞は高い周波数で -90° まで位相が変わり、さらに、 -90° まわると、 -180° となる。 $1\mu\text{s}$ で位相が -90° 回る周波数は、 250 kHz である。遅延が大きいほど、空洞と遅延の足し合わせで位相が -180° となる周波数が下

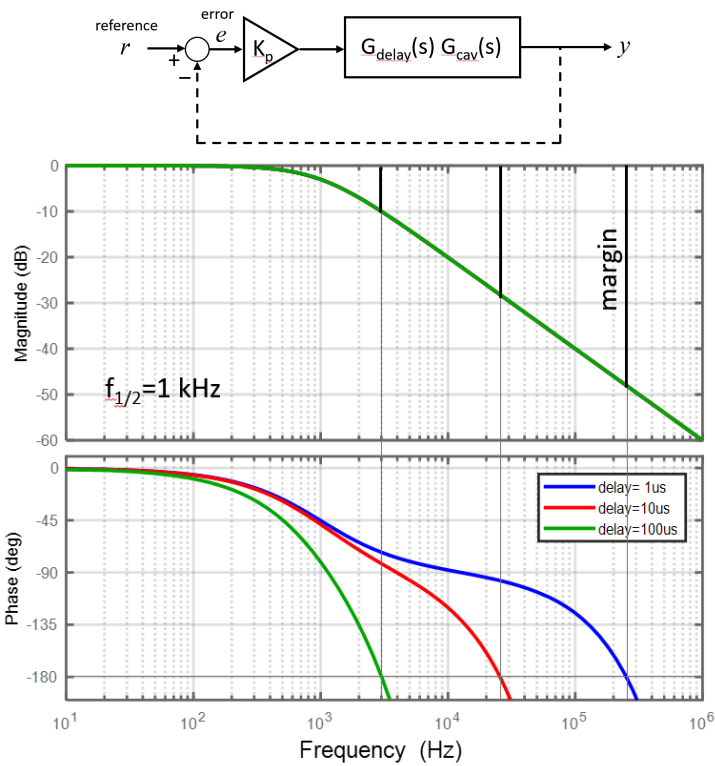


図 10 $f_{1/2}=1\text{kHz}$ の帯域を持つ空洞に対し、フィードバックループ遅延を $1\mu\text{s}$, $10\mu\text{s}$, $100\mu\text{s}$ とした場合の開ループボード線図

がり、ゲイン余裕が小さくなるのが分かる。よって、フィードバックゲインを高くするためには、できるだけ遅延時間を減らす工夫が必要である。中間周波数の選択やデジタル制御回路内での演算、特にフィルター部は多段とならないようにする必要がある。

cERL などでは、フィードバック制御ボードの DAC からステップ信号を出力させ、ADC で検出するまでの時間差を測り、ボード内部の処理演算部のレイテンシ (遅れ) を加えることで Loop Delay を決定しており、cERL のシステムでは、およそ $1.5\mu\text{s}$ である。

3.6 システム全体の伝達関数

RF フィードバック系のブロック図を、図 11 に示す。

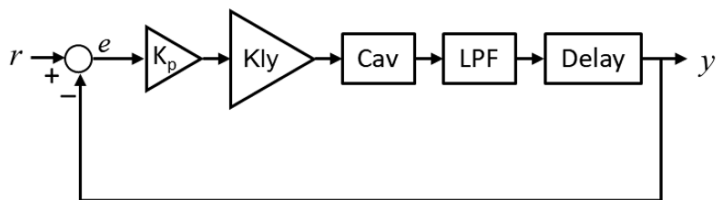


図 11 RF フィードバック系のブロック図

フィードバックシステムでのゲイン余裕を考える。システムの開ループ伝達関数は

$$G_{open} = K_p \cdot G_{kly} \cdot G_{cav} \cdot G_{LPF} \cdot G_{delay} \quad (3.12)$$

と表される。

G_{kly} は、クライストロンの伝達関数で、帯域が 3 MHz の 1 次のローパスフィルタ (LPF) と近似する。

$$G_{kly} = \frac{1}{1 + s/(2\pi f_c)}, \quad f_c = 3\text{MHz} \quad (3.13)$$

G_{cav} は、空洞の伝達関数で、ここでは、例として STF の空洞 ($Q_L=3 \times 10^6$) を考える。

$$G_{cav} = \frac{1}{1 + s/(2\pi f_{1/2})}, \quad f_{1/2} = 217\text{Hz} \quad (3.14)$$

G_{LPF} は、ローパスフィルタ (LPF) の伝達関数でノイズ除去や空洞の他の寄生モード除去などを除去するために使用される。STF の空洞は 9 セルの空洞で、運転では π モードが使われている。しかし、 $\frac{8}{9}\pi$ モードの周波数は、1.3 GHz の π モードの周波数に対し、800 kHz 程しか離れておらず、このモードを除去する必要がある。I/Q 分離後のベースバンド信号に対して LPF をかけており、制御帯域を広く確保しながら近接するモードを除去したい場合は高次のフィルターが用いられる。ここでは、簡単のため 1 次のローパスフィルタの場合を考える。

ループ遅延時間を $1.5\mu\text{s}$ 、比例ゲイン K_p を 1 とし、LPF のカットオフ周波数 f_c を 1 kHz, 10 kHz, 100 kHz とした場合の開ループボード線図を図 12 に示す。

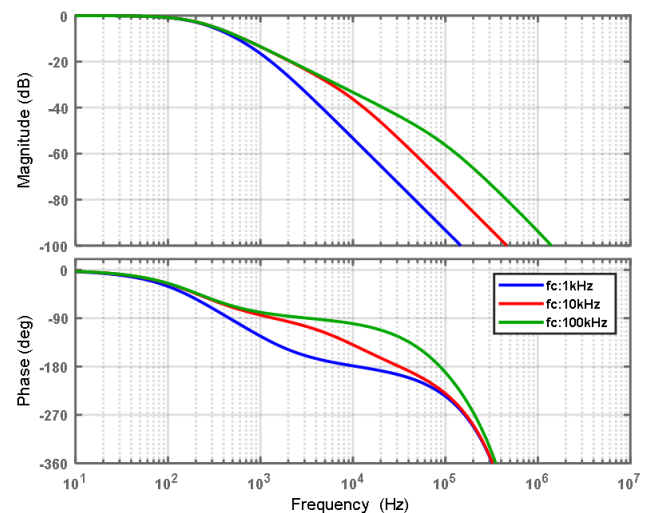


図 12 STF の RF システムの開ループボード線図。(LPF のカットオフ周波数 f_c を 1 kHz, 10 kHz, 100 kHz とした場合)

それぞれのフィルターに対するゲイン余裕 (GM) は、
 $f_c = 1 \text{ kHz} : \text{GM}=576 \text{ at } 11 \text{ kHz}$
 $f_c = 10 \text{ kHz} : \text{GM}=491 \text{ at } 32 \text{ kHz}$
 $f_c = 100 \text{ kHz} : \text{GM}=537 \text{ at } 87 \text{ kHz}$
 となり、ゲイン余裕はどれも同じ程度になった。空洞の

帯域幅が狭いため、クライストロンの帯域幅の影響は全く、空洞と遅延の影響の方が大きいことがわかる。

次に、閉ループについて確認する。閉ループの伝達関数は、 $G_{open}/(1 + G_{open})$ で表され、ゲイン 1 (0 dB) が望ましい。 $K_p = 100$ を与えた場合の閉ループボード線図を図 13 に示す。1 次遅れ要素の場合は、ゲインが 1 より大きくなることはないが、2 次遅れ要素になると、ゲインが 1 を超える共振ピークが現れる。LPF の f_c を 1 kHz とした場合、ゲインが 4.6 の共振ピークが 4.6kHz あたりに見られる。共振ピークとなる周波数を共振周波数という。

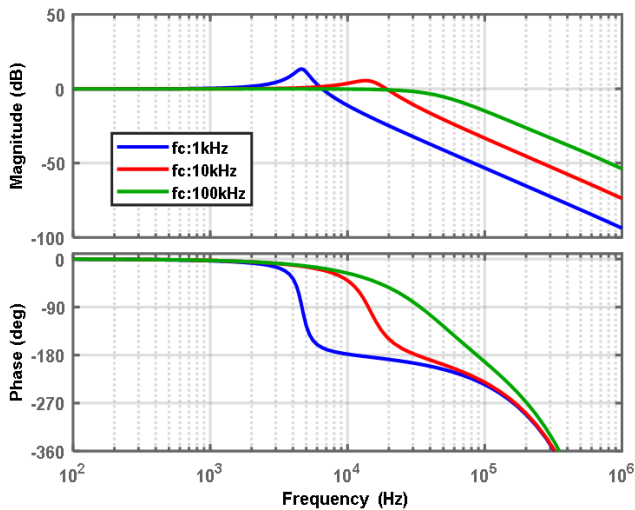


図 13 STF の RF システムに対する閉ループボード線図 ($K_p=100$). (LPF のカットオフ周波数 f_c を 1 kHz, 10 kHz, 100 kHz とした場合)

2 次遅れ要素の標準形は次のように表される。

$$H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.15)$$

ここで、 ζ は減衰係数、 ω_n は固有周波数と呼ばれるものである。2 次遅れ要素のボード線図を図 14 に示す。 $0 < \zeta < 1/\sqrt{2}$ で共振ピークが生じ、 ζ が小さいほど、共振ピークのゲインが大きくなる。

空洞と LPF を共に 1 次遅れ要素であるとしているため、それぞれの帯域を $\Delta\omega_1, \Delta\omega_2$, 比例ゲインを P とし、減衰係数 ζ を求めてみる。開ループの伝達関数は次のように表される。

$$\begin{aligned} G_{open} &= P \cdot \frac{1}{1 + s/\Delta\omega_1} \cdot \frac{1}{1 + s/\Delta\omega_2} \\ &= \frac{P \cdot \Delta\omega_1 \cdot \Delta\omega_2}{s^2 + (\Delta\omega_1 + \Delta\omega_2)s + \Delta\omega_1\Delta\omega_2} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$G_{open} = Num/Den$ として、閉ループの伝達関数を求

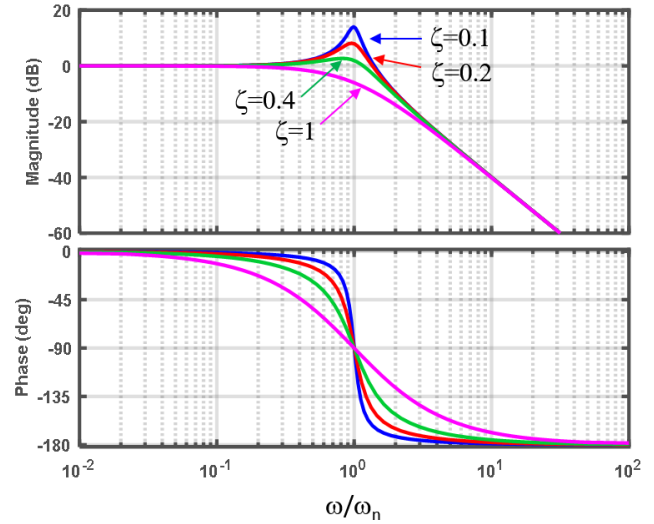


図 14 2 次遅れ要素のボード線図

めると、

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{G_{open}}{1 + G_{open}} = \frac{Num}{Den + Num} \\ &= \frac{P \cdot \Delta\omega_1 \Delta\omega_2}{s^2 + (\Delta\omega_1 + \Delta\omega_2)s + (1 + P)\Delta\omega_1 \Delta\omega_2} \end{aligned} \quad (3.17)$$

この式と、標準形の式 (3.15) のパラメータを比較すると

$$\omega_n = \sqrt{(1 + P)\Delta\omega_1 \Delta\omega_2} \quad (3.18)$$

$$K = \sqrt{\frac{P}{1 + P}} \quad (3.19)$$

$$2\zeta\omega_n = 2\zeta\sqrt{(1 + P)\Delta\omega_1 \Delta\omega_2} = \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2$$

ゆえに

$$\zeta = \frac{\Delta\omega_1 + \Delta\omega_2}{2\sqrt{(1 + P)\Delta\omega_1 \Delta\omega_2}} \quad (3.20)$$

上記の式に従い、減衰係数の値が決定される。例として、

- 空洞の帯域 $\Delta\omega_1$ に比べ LPF の帯域 $\Delta\omega_2$ が非常に広い場合 ($\Delta\omega_1 \ll \Delta\omega_2$),

$$\zeta = \frac{1 + \Delta\omega_1/\Delta\omega_2}{2\sqrt{(1 + P)\Delta\omega_1/\Delta\omega_2}} \quad (3.21)$$

となり、共振が生じない $\zeta > 1/\sqrt{2}$ となるには、

$$(1 + P) \frac{\Delta\omega_1}{\Delta\omega_2} > \frac{1}{2} \quad (3.22)$$

となれば良い。

- $\Delta\omega_1 \simeq \Delta\omega_2$ の場合

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1 + P}} \quad (3.23)$$

となり、共振ピークが生じやすい。

上記の結果より、比例ゲイン P に依存するものの、共振ピークを持たないようにするには、制御の帯域は、空洞の帯域よりも広くとることが望ましい。

図 13 でプロットした閉ループ伝達関数に対する減衰係数を求めると、

$$P=100, f_c=1 \text{ kHz} : \zeta=0.13$$

$$P=100, f_c=10 \text{ kHz} : \zeta=0.35$$

$$P=100, f_c=100 \text{ kHz} : \zeta=1.07$$

と計算される。

図 13 で示した閉ループ特性に対するステップ応答を図 15 に示す。共振ピークが大きい場合は、ステップ応答の安定度が悪く、共振ピークが無い場合は、追従性が良い。

実際の STF の運転では、カットオフ周波数が 250 kHz の 4 次の LPF を使用しており、比例ゲインは 150 が採用されている。

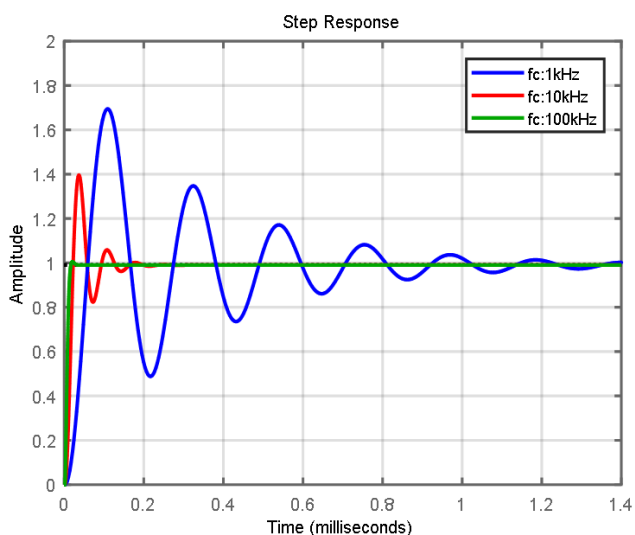


図 15 $K_p=100$ とした時の STF 閉ループに対するステップ応答. (LPF のカットオフ周波数 f_c を 1 kHz, 10 kHz, 100 kHz とした場合)

3.7 コントローラ

3.7.1 PID コントローラ

フィードバック制御回路で広く用いられている PID コントローラについて説明する。PID とは、比例 (Proportional)・積分 (Integral)・微分 (Differential/Derivative) を並列結合した制御系である。

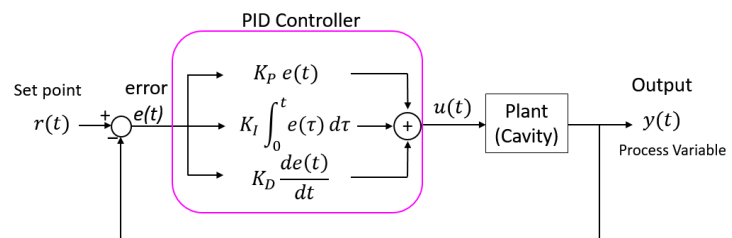


図 16 PID コントローラ

操作量 $u(t)$ は次のように表される。

$$u(t) = K_p e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{d}{dt} e(t) \quad (3.24)$$

ここで、 K_p は比例係数、 K_I は積分係数、 K_D は微分係数であり、 $e(t)$ は目標値と出力値の偏差である。ラプラス変換すると、

$$\begin{aligned} u(s) &= C(s)e(s) \\ &= \left[K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s \right] \cdot e(s) \end{aligned} \quad (3.25)$$

と表される。

比例制御は、偏差に比例した値を出力し、積分制御は偏差を積分していき最終的に偏差を 0 にすることができる。微分制御は、偏差の微分量に比例した値を出力するが、ノイズによる影響を受けやすいため、通常はフィルターと組み合わせた形式で使用される。ここでは、実際に空洞の高周波制御で使用されている P と I、および PI 制御について説明する。

■P 制御 P 制御は、最もシンプルなフィードバック制御である。閉ループを図 17 のように表すと、偏差 e は、

$$e = r - y = r - \frac{G}{1+G} r = \frac{1}{1+G} r \quad (3.26)$$

となり、目標値に対し必ず $1/(1+G)$ の割合で残差が残る。超伝導加速空洞の場合、100 より大きなゲインをセットできるため残差が小さいが、常伝導加速空洞などではゲイン余裕が小さく、大きなゲインを採用できないため目標到達性能が悪くなる。

ゲインはコントローラだけでなく、外部の増幅器などシステム全体を含むため、P制御でフィードバックをかけ、出力 y と残差 e の比をとることで、システム全体のゲイン G を求めることができる。

$$\frac{y}{e} = \frac{G}{1+G} r \cdot \frac{1+G}{r} = G \quad (3.27)$$

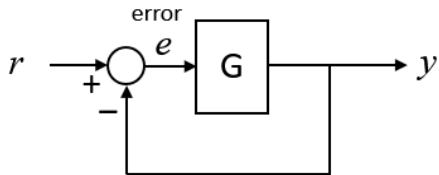


図 17 ゲイン G のフィードバックループ

P制御におけるゲインは、一般に、安定限界(持続振動)となるゲイン P_c の半分の値が推奨されている。

■PI制御 まず、I制御を用いると、応答は遅いが残差 e をゼロとすることができる。Q値が低い空洞ではI制御だけでも可能だが、Qが高い空洞では、応答が非常にゆっくりしすぎているため安定に動作させることが難しい。応答を早くするために積分ゲインを上げる必要があるが、残差の大きい状態では、積分が急激に増大するため行き過ぎとなり発振してしまう。そのため、Pと組み合わせたPI制御が通常用いられる。

ゲインパラメータの決定方法についてであるが、制御理論の教科書などを参照すると限界感度法が紹介されている。ここで伝達関数の係数を次のように定義し直す。

$$C_{PID}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (3.28)$$

限界感度法は、 K_p を大きくして持続振動状態となる点を探し、その時の比例ゲインを K_c 、持続振動の周期を T_c とし、各パラメータを表 3.7.1 に従い決定するものである。

表 1 限界感度法のパラメータ設定 [6, 7]

	K_p	T_I	T_D
P制御	$0.5 K_c$	—	—
PI制御	$0.45 K_c$	$0.83 T_c$	—
PID制御	$0.6 K_c$	$0.5 T_c$	$0.125 T_c$

3.7.2 シミュレーションによる応答の比較

次の2種類の空洞

- (1) $Q_L = 1 \times 10^4$ ($f_{1/2}=65$ kHz) の常伝導空洞
- (2) $Q_L = 1 \times 10^6$ ($f_{1/2}=0.65$ kHz) の超伝導空洞

に対するフィードバック応答の比較を行う。RFは1.3 GHzのCW運転とし、加速電圧の設定値(目標値)は1 MV、パルス幅1 msの矩形のビームローディングがあるとする。応答を比較したいので、ビームローディングは、両空洞とも0.1 MVとなるようにした。フィードバックシステムの閉ループ遅延時間を $1.5 \mu s$ とすると、 $K_p=1$ に対するゲイン余裕(GM)と位相が -180° となる位相交差周波数(WGM)は、

- (1) GM=3.23, WGM=1.25 MHz
- (2) GM=307, WGM=1.05 MHz

となり、(1)の常伝導空洞のゲイン余裕が非常に小さい。図18にP制御の結果を示す。目標値の1MVに対し、式(3.26)で表される残差が残っていることが見て取れる。(1)の空洞ではゲインが低いため、目標値の半分しか電圧が到達しておらず、明かにPゲインのみでは運転が困難なことが分かる。一方、(2)の超伝導空洞の場合、残差はあるものの非常に小さい。そのため、特にパルス運転などでは、P制御のみ、またはP制御にフィードフォワード(FF)を足した運転が行われることが多い。

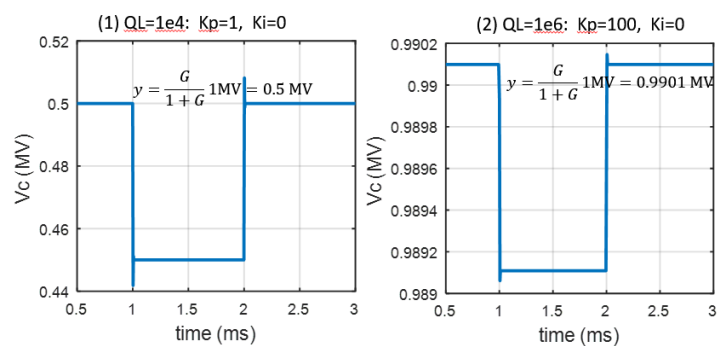


図 18 P制御時の応答. 左図: $Q_L=1 \times 10^4$ の常伝導空洞に対し $K_P = 1$, 右図: $Q_L=1 \times 10^6$ の超伝導空洞に対し $K_P = 100$ とした場合. 1ms-2ms はビームローディングによる影響

図 19 に (1) の空洞に対する $K_p=1$ と $K_i=2 \times 10^5$ のPI制御の結果と $K_p = 0$ としたI制御のみの結果を示す。I制御を入れると残差無く目標値に到達しているのが分かる。(1)の空洞の場合、この設定ゲインではI制

御のみでも大きな影響はないことがわかる.*2

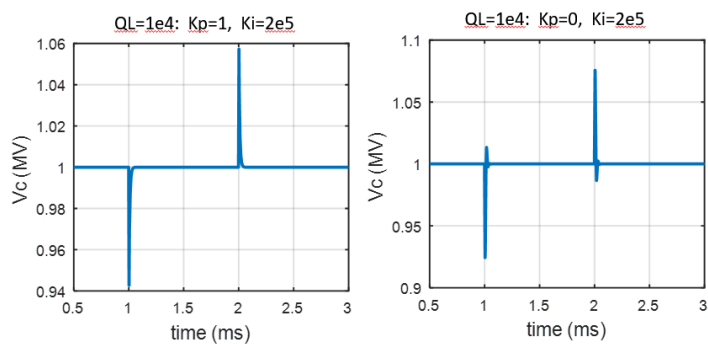


図 19 $Q_L=1 \times 10^4$ の空洞に対する PI 制御と I 制御の比較. 左図: PI 制御 ($K_p=1, K_i=2 \times 10^5$), 右図: I 制御のみ ($K_p=0, K_i=2 \times 10^5$)

図 20 は, (2) の空洞に対して $K_p=100$ と $K_i=5 \times 10^5$ で PI 制御した場合と $K_p=0$ として I 制御のみとした場合の結果である. 同じ K_I ゲインでも I 制御のみでは, 不安定になるのが分かる. 図 21 には, 図 20 の PI 制御時の比例制御と積分制御部からの出力と空洞入力の電力波形を示す. 電力波形から, ビームローディングの補償がなされていることがわかる. ビームローディングの先頭の変動は, P 制御が大きく働き, 積分器は徐々に増加しているのがわかる. Q_L が大きいと応答が遅いため, P 制御部をオフにしてしまうと大きな残差がどんどん積分され, 積分器の値が行き過ぎとなり振動してしまう.

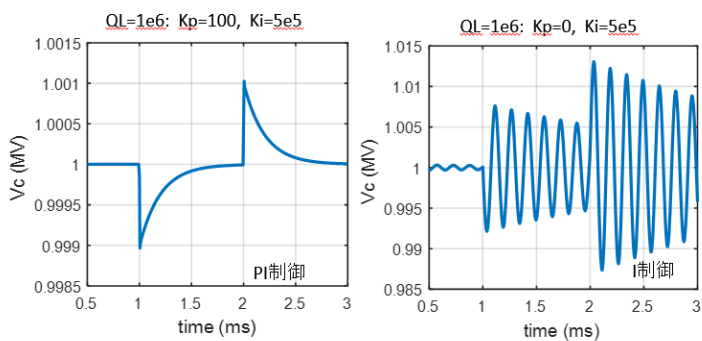


図 20 $Q_L=1 \times 10^6$ の空洞に対する PI 制御と I 制御の比較. 左図: PI 制御 ($K_p=100, K_i=5 \times 10^5$), 右図: I 制御のみ ($K_p=0, K_i=5 \times 10^5$)

次に, 空洞 (2) に対し, 限界感度法によるパラメータの決定を試してみる. まず, ゲイン余裕の結果から, $K_p=307$ で比例制御を行うと, 図 22 のように不安定となり振動が発生する. 周期を調べると $T_c = 6\mu s$ であ

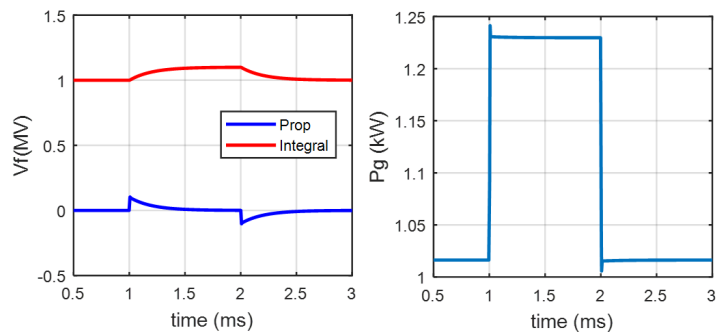


図 21 図 20 の PI 制御時の比例制御と積分制御部からの出力 (左図) と空洞入力の電力波形 (右図)

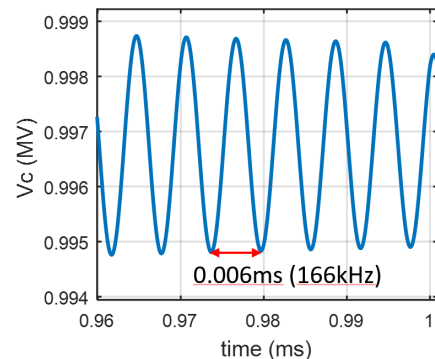


図 22 $Q_L=1 \times 10^6$ の空洞に対して安定限界となるゲインをセットしたときの振動の様子

る. これを表 3.7.1 に当てはめると,

$$K_p = 0.45 \cdot 307 = 138$$

$$K_i = K_p / (0.83 \cdot 6 \times 10^{-6}) = 2.77 \times 10^7$$

となる. この係数をセットした計算結果を図 23 に示す. I ゲインが大きいため, 応答時間が大きく改善されている.

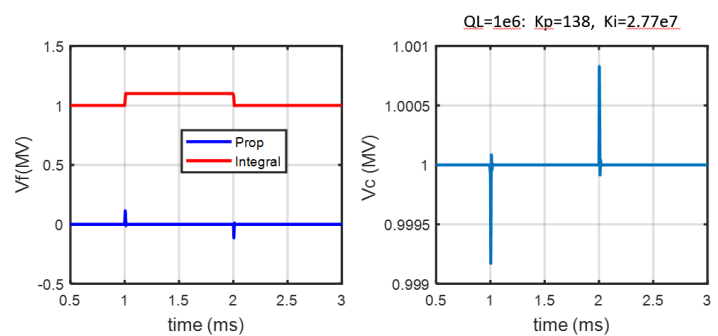


図 23 $Q_L=1 \times 10^6$ の空洞に対して限界感度法で求めたゲインで PI 制御した場合 ($K_p=138, K_i=2.77 \times 10^7$). 左図: 比例制御と積分制御部からの出力, 右図: 空洞電圧.

*2 限界感度法で導出されるゲインを用いた場合, K_i が 7×10^5 と大きく, $K_p=0$ とすると発振してしまう.

4 デジタル LLRF システム

デジタルフィードバック制御は、高速演算が可能で書き換えが可能な FPGA(Field Programmable Gate Array) の普及により、様々な分野で広く使われている。

アナログ制御は、一般的にデジタルに比べ速いフィードバックが可能といった利点がある。そのため、高速な制御が必要な個所ではアナログ制御を選択する必要がある。しかし、回路のパラメータ変更や新たな機能の追加には、コストや手間がかかる。

一方、デジタル制御は、回路がプログラマブルな FPGA 上に構築されるので、機能の追加や大幅な回路変更も容易となる。例えば、アナログではフィルタのカットオフ周波数を変更するにはデバイス変更が必要だが、デジタルでは、数値を変更し、演算するだけで実現できる。また、システムの状態に応じて、フィードバック演算のパラメータが容易に変更できるメリットがある。フィードバックループの遅延時間は $1\mu\text{s}$ 以上かかるため、デジタルフィードバック制御系が可能となるのは、それよりも十分に長いパルス運転に対してとなる。

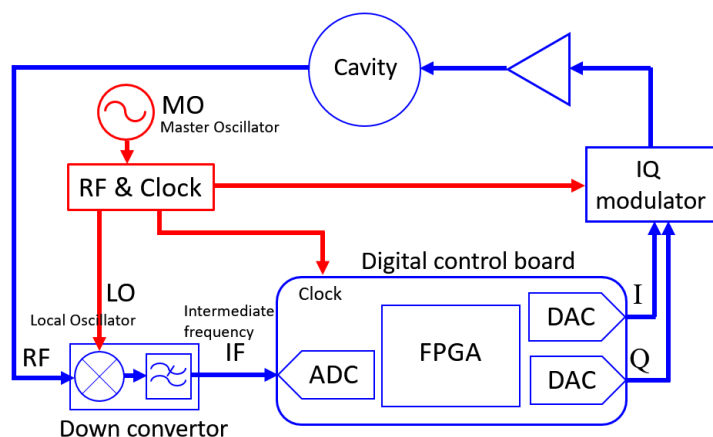


図 24 デジタル LLRF システムの概略図

図 24 にデジタル LLRF システムの概略図を示す。空洞からのピックアップ信号は、周波数が高く、直接 ADC で取得するのが難しいため、中間周波数 (IF:Intermediate Frequency) に落としてから ADC でデジタル化され、FPGA でフィードバック演算が行われる。DAC からアナログ信号を出力し、IQ モジュレータでアップコンバージョンされた RF は、半導体アンプやクライストロンなどの大電力高周波源に入力され、空洞に供給される。

必要な性能を満足するには、次のことに気を付ける必要がある。

- 低ジッター MO 及び LO・クロック生成
- 短い閉ループ遅延時間
- 高分解能・高速サンプリングが可能で S/N 性能の良い ADC の選定
- 温度や湿度による位相ドリフトの抑制

4.1 I/Q 制御

デジタル制御では、I/Q ベクトル制御が広く使われている。振幅 A ・位相 θ と I/Q の関係は、図 4 のように表される。

I/Q 制御の特徴として、

- 振幅が 0 に近い場合、振幅・位相制御では位相が不定となってしまうが、I/Q ベクトル制御では不定とならない。
- 通常、I と Q は共通した回路構成となっており、シンプルな回路構成となっている。
- 多空洞を一つの RF 源で励振する場合、最終的なビームの加速エネルギーを一定にしたい。I/Q 制御により、ベクトル和が一定となるようなベクター・サム (Vector-sum) フィードバック制御を容易に行うことができる。

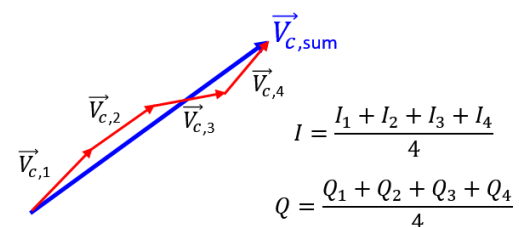


図 25 空洞電圧のベクトル和

- 任意の振幅・位相の波形を作る際、I と Q 成分のベースバンドの波形を DAC から生成し、局部発振器 (LO:Local Oscillator) を 0° (cos 成分) と 90° (sin 成分) に分けたものと掛け合わせて合成することで、簡単に生成することができる (図 26)。

$$Ie^{j\omega t} + Qe^{j(\omega t + \pi/2)} = (I + jQ)e^{j\omega t} \quad (4.1)$$

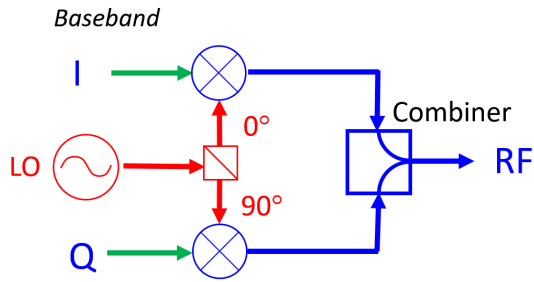


図 26 IQ 変調器

4.2 ミキサーモジュール

前述した I/Q から RF を作り出す IQ 変調器 (ベクターモジュレータ) や, RF 信号を I/Q に変換する復調器には, RF ミキサーが使われている. ミキサーは, 図 27

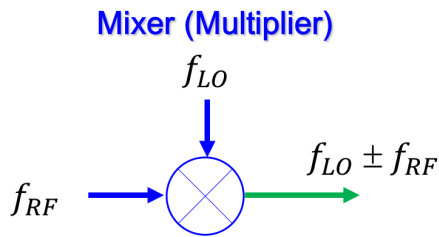


図 27 RF ミキサー

に示すように, RF 同士の掛け算を行うものである. ミキサーへの入力信号の LO と RF を $A_1 \cos(2\pi f_{LO}t)$ と $A_2 \cos(2\pi f_{RF}t + \theta)$ とすると,

$$\begin{aligned} & A_1 \cos(2\pi f_{LO}t) A_2 \cos(2\pi f_{RF}t + \theta) \\ &= \frac{A_1 A_2}{2} (\cos[2\pi(f_{LO} + f_{RF})t + \theta] \\ & \quad + \cos[2\pi(f_{LO} - f_{RF})t - \theta]) \end{aligned} \quad (4.2)$$

となり, 周波数の和と差の成分が出力される. フィルターで差成分を取り出すことでダウンコンバータとなり, 和成分を取り出すことでアップコンバータとなる.

周波数が変わっても, 入力信号の振幅・位相情報が出力側に保存されていることが重要な特徴である. 高い周波数の信号を高分解能の ADC で取得したい場合サンプリング速度が限られているため, 通常, 低い周波数に変換して信号取得が行われる.

4.3 I/Q 検出

式 (2.41) で表される I/Q 複素平面で定義した信号は,

$$\begin{aligned} & (I + jQ)e^{j\omega t} \\ &= (I + jQ)(\cos \omega t + j \sin \omega t) \\ &= (I \cos \omega t - Q \sin \omega t) + j(Q \cos \omega t + I \sin \omega t) \end{aligned} \quad (4.3)$$

であり, 実際に観測されるのは実数部分である. 上記と同じことではあるが, RF を次のように振幅 A , 位相 θ で表し, 図 4 の定義で I/Q に変換すると,

$$\begin{aligned} A \cos(\omega t + \theta) &= A \cos \theta \cos \omega t - A \sin \theta \sin \omega t \\ &= I \cos \omega t - Q \sin \omega t \end{aligned} \quad (4.4)$$

と表される. 以上より, 観測される信号の \cos 成分の係数が I , \sin 成分の係数が $-Q$ である.

I/Q の測定方法として, ダイレクトコンバージョン方式・中間周波数 (IF:Intermediate Frequency) サンプリング方式・アンダーサンプリング方式 (ダイレクトサンプリング) などが LLRF システムで使われることが多い. これらの手法について, 簡単に説明する.

4.3.1 ダイレクトコンバージョン方式

ダイレクト・コンバージョン方式を図 28 に示す.

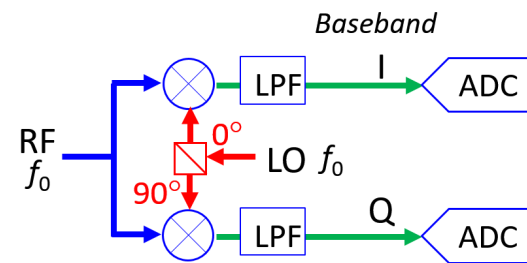


図 28 ダイレクト・コンバージョン方式

RF と同じ周波数の LO 信号を 0° (\cos 成分) と 90° (\sin 成分) に分けて RF 信号とミキサー (掛け算器) を使って掛け合わせることで, ベースバンド (0 Hz) の I/Q 信号にダイレクトに変換される. I/Q ベースバンド信号は, 各々 ADC に取り込まれる. この方式のメリットは, 高速に I/Q データが取得できることである.

(KEK 電子陽電子入射器の RF モニターには, この手法が採用されている. RF 周波数は 2.856GHz で, パルス圧縮器 (SLED) の RF パルス出力は, 幅が $1 \mu\text{s}$ と短く, 鋭いピーク構造を持っている. ピーク周りの振幅・

位相安定度が重要となるため、14bit の ADC を用いて 114 MHz のサンプリングで I/Q データの取得を行っている。))

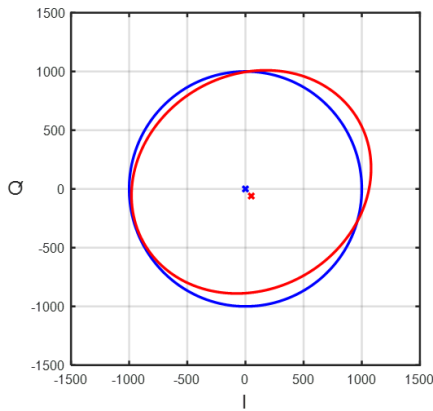


図 29 IQ オフセットと歪

一方、この方式のデメリットを挙げると、I/Q が別々のミキサやADCで取得されるため

- DC オフセット
- ゲインの違い
- 0°/90° からのずれ (skew)

などの誤差が発生しやすく、位相を回して円を描くと、円の中心のずれやひずみなどが生じる。そのため、測定データに対し、予めキャリブレーション測定で得られた校正テーブルを用いて、オフセットやひずみなどの補正が必要である。

4.3.2 IF サンプリング方式

高い周波数の RF を低い中間周波数 (IF) に落としてから ADC でサンプリングした後、FPGA 内で演算処理することで I/Q に分離する方式である。cERL や STF では、1.3 GHz の RF を 1.31 GHz の LO 信号を使って 10 MHz の IF 信号にダウンコンバートしている。IF サンプリングの良い点は、オフセット電圧が I/Q 変換演算時に打ち消され、また、同一の回路でデータ取得しているためゲインバランスの違いが発生しない点である。

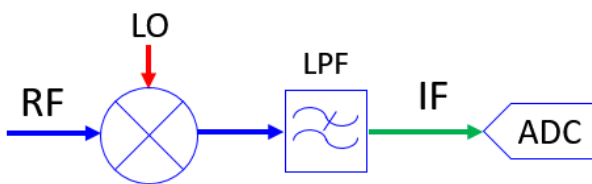


図 30 IF サンプリング

■4 倍 (90°) サンプリング方式 これは、IF の 4 倍の周波数で ADC サンプリングさせ、以下のように I/Q を求めるものである。

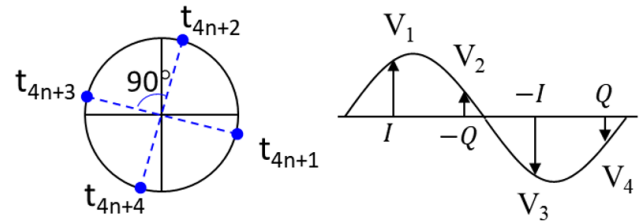


図 31 4 倍サンプリング

IF の 4 倍でサンプリングすると、次のように I/Q を求めることができる。

$$\frac{V_1 - V_3}{2} = \frac{(I_0 + \delta) - (-I_0 + \delta)}{2} = I_0 \quad (4.5)$$

$$\frac{-V_2 + V_4}{2} = \frac{-(-Q_0 + \delta) + (Q_0 + \delta)}{2} = Q_0 \quad (4.6)$$

ここで δ は信号オフセットで、不要なオフセットをキャンセルすることができる。

I/Q 軸に対し、位相が $-\phi$ ずれている場合は、次のように回転行列で補正することができる。

$$\begin{pmatrix} I \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_0 \\ Q_0 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

I/Q データの実際のサンプリングレートは、サンプリング周波数の 1/2 となる。IF が 10 MHz の場合、40 MHz でサンプリングを行い、I/Q のサンプリングレートとしては 20 MHz となる。

■n 倍サンプリング方式 これは、IF の n 倍 ($n \geq 4$) の周波数でサンプリングする方法で、I/Q は次式のように求められる。

$$I_0 = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n V_k \cos(2\pi \frac{k-1}{n}) = \sum_{k=1}^n C_k V_k$$

$$Q_0 = -\frac{2}{n} \sum_{k=1}^n V_k \sin(2\pi \frac{k-1}{n}) = \sum_{k=1}^n S_k V_k \quad (4.8)$$

サンプリング周波数によってきまる係数 C_k, S_k をあらかじめ定義しておき、ADC から取り込まれた信号に掛けて和をとることで求めることができる。4 倍サンプリングもこの形式であらわされる。cERL や STF では、1.3 GHz の RF を 1.31 GHz の LO 信号を使って 10 MHz の IF 信号にダウンコンバージョンしている。現在 cERL や STF では $n=8$ を選択している。

I/Q の測定精度は、ADC の分解能はもちろんのこと、LO の位相ノイズの影響を受けやすいため、位相ノイズ

の少ない安定した LO を生成することが重要なポイントである。

4.3.3 アンダーサンプリング方式

高い分解能を持つ ADC で測定したい場合、サンプリング周波数に限りがあるためダウンコンバートして RF 周波数を下げている。しかし、広い帯域を有する高分解能の ADC の出現により、アンダーサンプリングによる測定手法も使われるようになった。

例えば、高速 ADC : ADS5474 は、14bit の分解能で、400MSPS のサンプリング周波数、そして 1.4 GHz の帯域幅を有する。これにより、超伝導加速空洞で広く使用されている 1.3GHz の RF をダイレクトに測定することが可能になった。ダイレクトサンプリングとも言われ、文献 [4] に詳しく述べられている。

サンプリング f_s と RF 周波数 f_0 の関係は、次のように決めることができる。

$$f_s = \frac{f_0}{k + \frac{m}{n}}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.9)$$

ここで、分母の m/n の項が 0 の場合、整数で割り切れるため、測定される値は全て同じになってしまう。そのため、アンダーサンプリングでは、 $m/n (n > m)$ が重要となる。k は間引かれる波数、 m/n は端数を意味しており、サンプリング毎に位相が

$$\Delta\phi = \frac{m}{n} 2\pi \quad (4.10)$$

だけ進んでみえる。そのため、アンダーサンプリングされた波形は、 $f_s \cdot m/n$ の周波数として観測される。

図 32 に、RF 周波数を 1 GHz、サンプリング周波数を 240 MHz ($k = 4, n = 6, m = 1$) とした場合の波形を示す。アンダーサンプリングの結果、1 GHz の RF は、

$$240\text{MHz}/6 = 40\text{MHz}$$

の周波数の RF として観測される。

I/Q は次式に従って計算できる。

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} V_i \cos(i\Delta\phi) \\ Q &= -\frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} V_i \sin(i\Delta\phi) \end{aligned} \quad (4.11)$$

帯域が広いことと、サンプリングクロックに比べ、測定する RF の周波数が高いため、クロックジッター Δt による誤差が大きくなってしまふ。クロックジッター

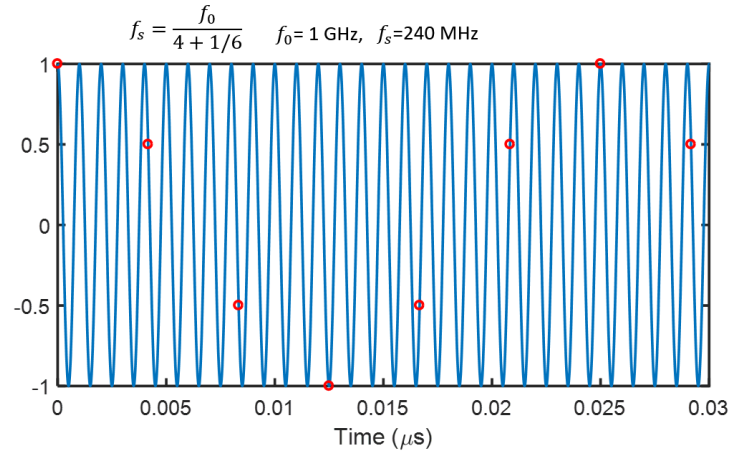


図 32 1GHz の RF を、サンプリング周波数 240 MHz ($k=4, n=6, m=1$) でサンプリングした場合の例

による ADC のサンプリング誤差をアパーチャ誤差といい、それによる ADC の SNR は

$$SNR_{jitter} = -20\log_{10}(2\pi f_{RF}\Delta t) \quad (4.12)$$

と表される。文献 [4] で具体的に述べられている通り、クロックジッターを $\Delta t = 0.3$ ps rms とすると、1GHz に対しては SNR は 54dB となり、ダイレクトにサンプリングされたままだと、アパーチャノイズが 0.18% となる。ただし、I/Q をフーリエ係数から導出する際、6 サンプル分使っているため、 $\Delta f = 1/T = f_s/n = 40\text{MHz}$ のバンドパスフィルターを通したのと等価で、ナイキスト周波数 $f_s/2$ と比べると、帯域が 1/3 になる。I/Q 導出の際、2 周分足すと 20MHz、3 周分足すと 10MHz となり、フィルター帯域が狭くなる効果がある。I/Q から求めた振幅・位相の安定度は、計算上、0.055% rms、 0.055° rms となる。また、実際には、アパーチャジッター以外の影響もあるので、それらのノイズ成分をカットするためにも、I/Q 分離後に、デジタルローパスフィルターを用いて、高周波成分をカットしている。

4.4 デジタル制御ボード

ここでは、例として KEK の cERL や STF の 1.3GHz 超伝導加速空洞用に使用されているデジタル制御ボードについて紹介する。

制御ボードは図 33 に示すような AMC.0(Advanced Mezzanine Card) という規格のボードで MicroTCA というシェルフに入れて使用される。ボードは、16bit の ADC が 4ch, 16bit の DAC が 4ch, それに FPGA, デジタル I/O, スロー ADC, トリガー入力を有する。

同じボードを使い、FPGA のロジック回路を変更することで、RF フィードバック制御と共振制御のためのチューナーフィードバック制御を行っている。(大きなサイズの FPGA を採用すれば、一枚のボードで両方の機能を持たせることもできる。)

FPGA の良い点としては、回路を簡単に書き換えることができる点や高速処理が行えること、また、同期クロックにより ADC からのデータを直接同期して取り込むことができる点である。

また、デジタル I/O は、1 μ s 以下の高速応答が可能なものを採用しており、外部インターロックシステムとの高速連動を可能としている。

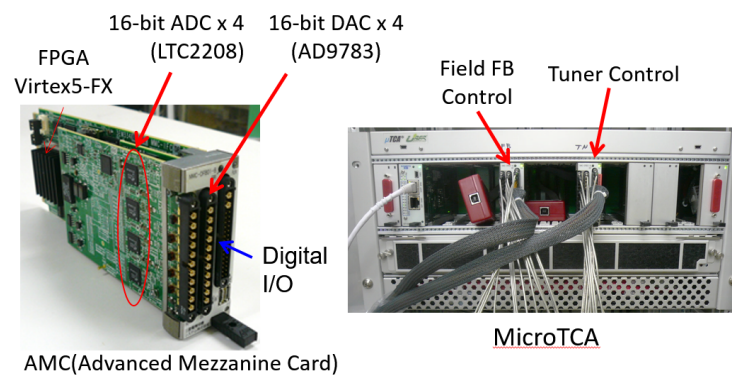


図 33 デジタル制御ボード

5 RF フィードバックシステム

図 34 に cERL や STF における RF フィードバックボードのブロック図を示す。1.3GHz の信号を、16bit の高分解能で直接取り込むのが難しいため、10MHz の中間周波数 (IF) に変換してから ADC に入力している。以下にブロック図を順序立てて説明していく。

■I/Q 変換 ADC では、IF の 8 倍のサンプリングスピードでデータを取り込んでいる。ADC でサンプリング

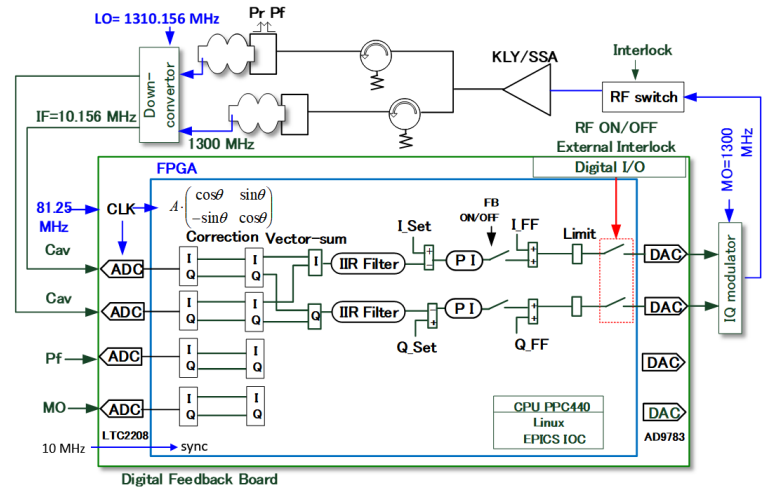


図 34 RF フィードバックボードのブロック図

後、式 (4.8) で $n=8$ として I/Q 変換を行っている。

$$I = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^8 V_k \cos\left(2\pi \frac{k-1}{8}\right) = \sum_{k=1}^8 C_k V_k$$

$$Q = -\frac{1}{4} \sum_{k=1}^8 V_k \sin\left(2\pi \frac{k-1}{8}\right) = \sum_{k=1}^8 S_k V_k \quad (5.1)$$

cos 成分と sin 成分の係数をかけて 8 個のデータを足していき、もし電源を OFF/ON した場合係数を掛け合わせるタイミングがずれて位相の定義がずれてしまう恐れがある。そのため、中間周波数と同じ 10MHz のクロックを入力し、FPGA で 1~8 のカウンタを 10MHz でリセットするようにしており、電源を切っても、位相定義が再現するようにしている。

■I/Q 変換後の振幅・位相の補正 位相の定義は、正帰還となってフィードバックが発散しないように、ボード内での 0° の定義と観測される信号の位相を合わせるようにしている。やり方は、フィードフォワードで DAC から出力した位相と測定された位相の位相差をキャンセルするように、回転行列で補正をかけている。重要なことは、位相キャリブレーションを行う際は、チューナーを用いて空洞の離調が補償された状態にしてから行うことである。

振幅補正は、ベクターサム運転のために空洞間のゲインバランスを調整するために使用される。外部アッテネータで出来るだけ合わせこみ、係数 A は微調整としている。

■ベクターサム ベクターサムはベクトル和が一定となるようにフィードバック制御を行うものである。そのため、I/Q それぞれで足し合わせを行う。足し合わせる空洞が多くなると、数値が大きくなってしまいうため、平均値とするようにしている。これにより、ベクターサ

ムをする空洞の台数が変わっても、目標値 (Set 値) を変える必要がない。

■デジタルローパスフィルタ 運転周波数 (基準信号) の成分は、I/Q 変換時にベースバンド (DC 成分) に変換される。

- ノイズ成分の低減
- 空洞の寄生モードの除去
- 高いフィードバックゲインの適用

上記のためには、できるだけ帯域の狭いローパスフィルタ (LPF) が好ましいが、あまり狭くしすぎると本当の空洞電場の変動を検出することができなくなる。高周波源のリプルなどの外乱を抑えるのに必要な広い帯域が必要であり、しかしながら不安定の原因となる寄生共振モードは十分除去することができる帯域をとる必要がある。

ここで、簡単な IIR ローパスフィルタの例を紹介する。

$$V(n) = (1 - \Delta t \cdot \omega_{1/2})V(n-1) + \Delta t \cdot \omega_{1/2} \cdot X(n) \quad (5.2)$$

これは、式 (2.47) と同じ式で、1 次のローパスフィルタの離散系である。入力 $X(n)$ に対し $\Delta t \cdot \omega_{1/2}$ をかけたものを加え、元値 $V(n-1)$ から $\Delta t \cdot \omega_{1/2}$ をかけたものを差し引いて出力させるものである。

Δt はフィルタのレイテンシ (遅延時間) で、 $\omega_{1/2}$ は帯域幅を表し、 $\omega_{1/2} = 2\pi f_c$ となる。カットオフ周波数が低いと、 $\Delta t \cdot \omega_{1/2}$ は非常に小さい値となるので、丸め誤差に注意が必要である。

デジタルフィルタの帯域は、実際にパラメータスキャンを行い、測定結果から最適となる値で決定されている。

■PI 制御 フィードバックゲインは、パラメータスキャンをして、安定なゲインを決定している。

また、目標値 (set 値) をステップで立ち上げると、立ち上がり直後はエラー (セット値と空洞の測定値の差) が大きいため、RF 源の出力パワーの許容値を超えてしまう恐れがある。そのため、パルス運転では、filling 時に RF 源から一定のパワーが供給されるように空洞の応答関数を時系列の配列データにして、フィードバックの目標値として与えることで、過剰なパワーの振り込みを防いでいる。

cERL における CW 運転の場合も、設定値を変更する際は、変更ステップを小さくし、徐々に値が変化するようにしている。

■フィードフォワード (FF) 制御 フィードバックは行わず、あらかじめ決まった数値を出力するものである。

ビームローディングなどの外乱により急な変化がある場合、オーバーシュートやアンダーシュートが発生する。パルスビームの電流値など、あらかじめ分かっている外乱に対しては、それを補償するためのフィードフォワード制御が行われる。

■DAC 出力 DAC からは、フィードバック演算結果がベースバンドで出力され、IQ モジュレータでアップコンバートされた RF 信号が空洞に供給される。ベースバンドの欠点として、IQ モジュレータの DC オフセットにより RF 出力を 0 としていても、オフセットのために RF が出力されてしまう点である。そのため、あらかじめ I/Q 出力にオフセット補正を加えている。

cERL における RF フィードバックの結果を図 35 に示す*3。RF フィードバックが OFF の場合、マイクロフォニクスの影響で 50 Hz のふらつきがみられる。この時の安定度は、振幅安定度が 0.15% rms、位相安定度が 0.6° rms であった。これに対し、RF フィードバックを ON にすると安定化され、振動の成分が消えているのがわかる。振幅安定度は 0.013% rms、位相安定度は 0.015° となり、安定度が改善されたことがわかる。*4

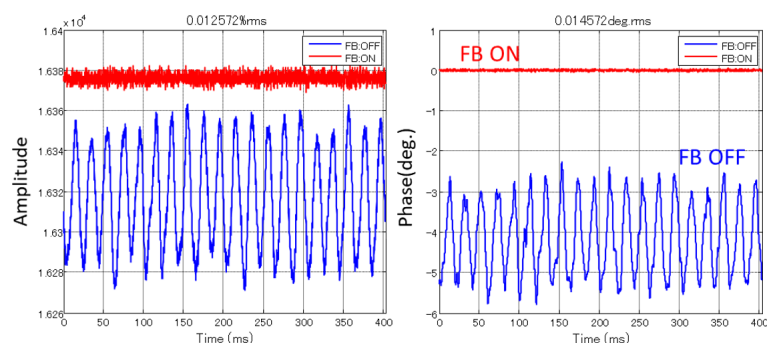


図 35 cERL 主空洞に対する RF フィードバックの結果 (左: 振幅, 右: 位相)

*3 振動対策がされておらず、マイクロフォニクスの影響が大きかったころの結果

*4 マイクロフォニクス対策でポンプの防振対策が取られた現在では、安定度が 0.01% rms, 0.01° rms を満足している。

6 チューナーによる離調制御

6.1 離調

空洞の共振周波数のずれは離調 (detuning) と言われ、超伝導加速空洞の場合は、空洞電場の大きさに依存した変形によるもの (Lorentz force detuning) や床などの外部からの振動で加わるもの (Microphonics) がある。

加速器の運転では、通常、ビームや他の機器と同期をとるために運転周波数が固定されている。そのため、空洞の共振周波数のずれ (離調:detuning) を補正し、マスターオシレータの RF 周波数に同調させる必要がある。

入力電流と空洞電場が一定の定常状態時の離調 Δf に対する振幅・位相は、式 (2.27) と (2.29) で表される。例えば、cERL の主空洞は、 $Q_L = 1 \times 10^7$ の超伝導加速空洞で、1.3GHz の周波数に対し、共振の幅が $\pm f_{1/2} = \pm 65 \text{ Hz}$ と非常に狭く (図 36)、チューナーによる共振周波数フィードバックが必要となる。

$$f_{1/2} = \frac{f_0}{2Q_L} = 65 \text{ Hz}$$

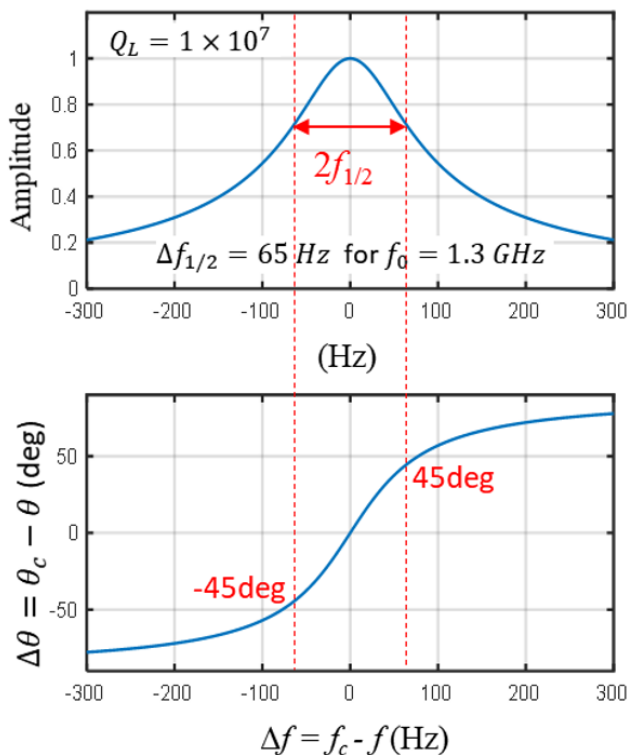


図 36 KEK-cERL の主空洞の共振カーブ

6.1.1 Lorentz force detuning

空洞内の電磁場が高くなると、空洞壁に生じるローレンツ力 (Maxwell 応力) によって径方向には広がり、軸方向には収縮するような力が加わるため空洞の共振周波数が変化する [5]。

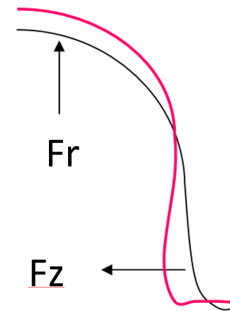


図 37 ローレンツ力による空洞の変形 [5]

定常状態の Lorentz force detuning の量は、次式で表される。

$$\Delta f_0 = -K \cdot E_{acc}^2 \quad (6.1)$$

電場の 2 乗に比例して共振周波数が下がるため、電場が高くなるほど離調量が大きい。変形量は空洞の硬さなどで変わるため、比例係数 K (Lorentz force constant) は、空洞のデザインによって異なる。図 38 と図 39 には、TESLA Test Facility (TTF) における測定結果 [1] を示す。図 38 は、各空洞電場に対し共振点となるように、離調位相 $\Delta\psi = 0$ で PLL (Phase Lock Loop) をかけて離調周波数を測定した結果であり、 K は、 $0.9 \text{ Hz}/(\text{MV}/\text{m})^2$ となっている。

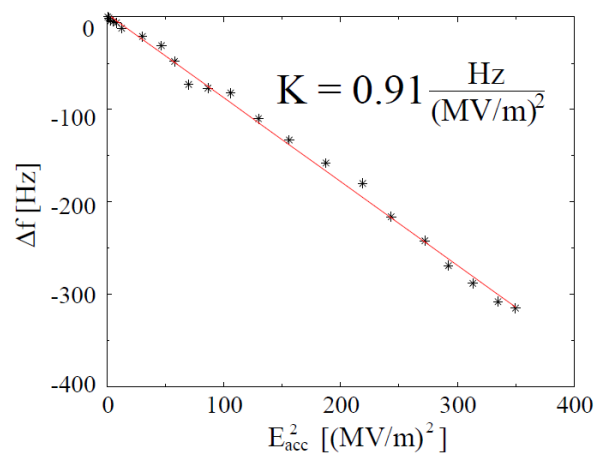


図 38 TTF における Static Lorentz force constant の測定 [1].

図 39 は、Lorentz force detuning によって共振曲線が歪曲することを示している。電場が上がるにつれ、図

38 で得られた係数 K に従い離調周波数が下がっていく状態が測定されている。

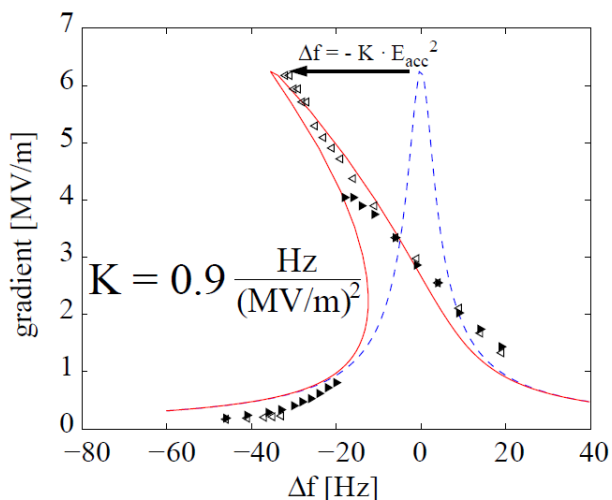


図 39 TTF における Static Lorents force detuning を含んだ共振曲線の測定結果. ∇ は共振より高い周波数側から周波数を下げていって空洞の電場をプロットしたもの. \blacktriangle は, 共振より低い周波数から周波数を上げていき電場をプロットしたもの [1]

6.1.2 Dynamic Lorentz force detuning

図 1 のようなパルス運転の場合, 空洞の電圧が変化した直後には, ローレンツ力による力が働いても, 空洞は機械的な時定数をもって変形するため, 共振周波数も機械的な時定数で変化する。

図 40 は, TTF における Dynamic Lorentz force detuning の測定結果である。これは, パルスショートニングという手法で測定された結果である。

フラットトップ部は, RF フィードバックにより電場が一定に維持されているにも関わらず離調が変化していくことから, 式 (6.1) をそのまま式 (2.29) に当てはめて考えることができない。

そこで, Dynamic Lorentz force detuning の導出には, 式 (2.52) が使われる。

$$\Delta\omega = \dot{\theta} - \omega_{1/2} \frac{u}{A} \sin(\varphi - \theta) \quad (6.2)$$

図 40 のグラフは, パルスショートニングという手法で測定されたものである。入力 RF がオフとなると

$$2\pi\Delta f = \dot{\theta}$$

と表され, 位相進みの傾きから離調周波数を求めることができる。徐々に RF を OFF するタイミングを変えながら, オフした直後の空洞位相の時間変化を線形フィットして傾きを求め, 離調周波数を導出している。

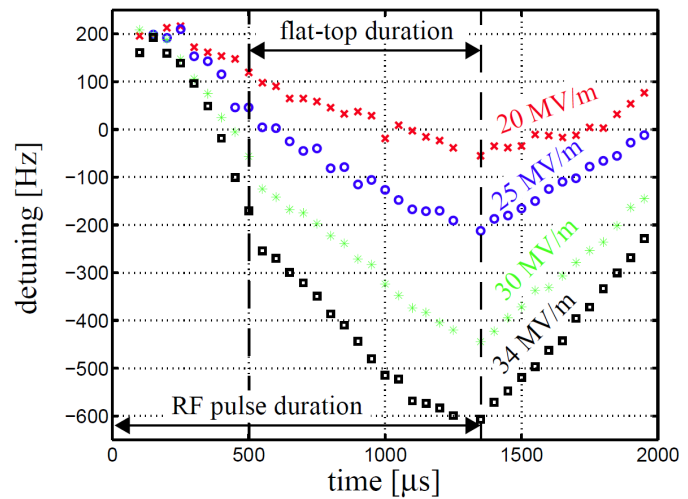


図 40 TTF における Dynamic Lorentz force detuning の測定結果 [8, 9]

パルスショートニングは, 測定するのに時間がかかり面倒な上, 離調補償のためのチューナー調整をする際, この方法では難しい。

そのため, 式 (6.2) を使い, 入力 RF と空洞のピックアップ信号の振幅・位相から離調を導出することを考える。このためには, 入力波形と空洞波形のキャリブレーションが必要となるが, 式 (2.77) の関係から, 測定された空洞ピックアップ信号, 入力カップラー手前の方向性結合器からの進行波と反射波の信号を V_c, V_f, V_r とすると, 次のように表すことができる。

$$\mathbf{V}_c = \mathbf{a} \cdot \mathbf{V}_f + \mathbf{b} \cdot \mathbf{V}_r \quad (6.3)$$

それぞれの信号は, I/Q 直交座標で表され, $(I + jQ)$ の複素数で表現されている。そのため, 係数 a, b も複素数である。

$$\begin{pmatrix} V_c \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_f & V_r \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$CC = BB \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

よって係数は,

$$BB^{-1}CC$$

で求めることができ, Matlab を使うと $BB \setminus CC$ コマンドで線形フィットした係数 (a, b) を導出することができる。図 41 より, 係数 a, b が適切に導出されていることがわかる。測定データにはノイズが含まれるので, 各点毎に前後数点のデータを用いて線形フィット, または平均した数値を用いて式 (6.2) に代入することで離調を容易に算出することができる。図 42 に式 (6.2) を使って導出した離調と, パルスショートニングによって測定した離調の TTF での測定結果を示す。よく一致してお

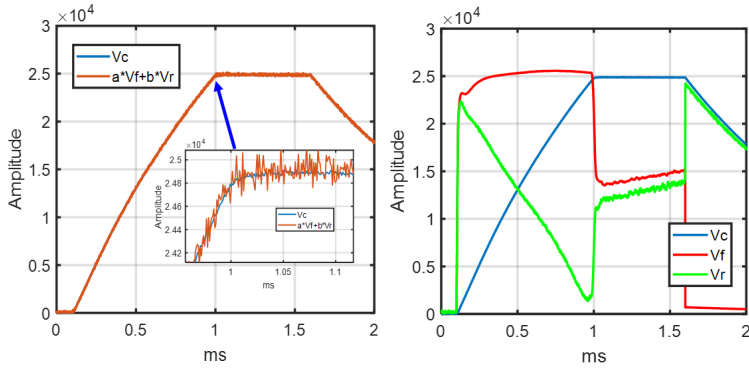


図 41 V_c, V_f, V_r の測定データを使って $V_c = aV_f + bV_r$ となる係数 a, b を導出して反映した結果

り，通常運転時のモニターとしては，式 (6.2) による導出方法が採用されている。

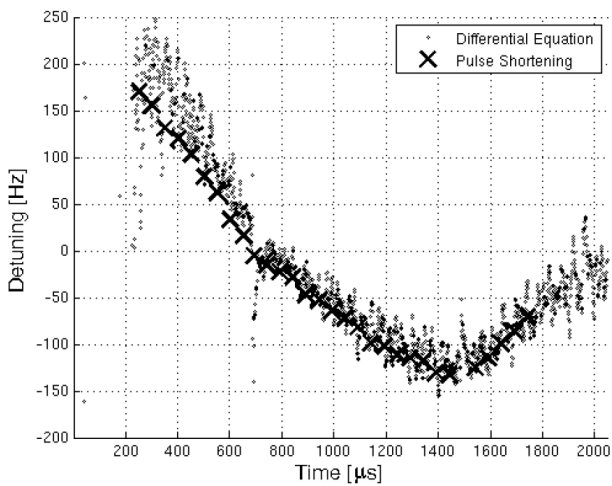


図 42 TTF でのパルスショートニングと式 (6.2) を使って算出した離調の測定結果 [10]

CW 運転の加速器では，空洞位相と入力進行波の位相差 (ψ : 離調角) から離調周波数を導出している。比較してみたのでその結果を示す*5。RF ON 直後は位相差のみからの演算では，適切に導出できていない。また，RF OFF では入力信号が無くなるため算出できない。フラットトップ部では，絶対値に違いがあるが，傾向は一致しているようだ。

空洞の離調は，機械時定数 τ_m を導入して表されている。Dynamic Lorentz force detuning のモデル化は，機械振動の共振周波数を ω_m とし， Q_m を機械振動モードの Q 値， k_m はモード m に対する Lorentz force constant として各モードにおける離調周波数を Δf_m とすると，

$$\Delta \ddot{f}_m + \frac{\omega_m}{Q_m} \Delta \dot{f}_m + \omega_m \Delta f_m = -k_m \omega_m^2 E_{acc}^2 \quad (6.4)$$

のようになされている [8, 9]。この式の導出については，

*5 Preliminary な結果であるので，参考という位置づけである

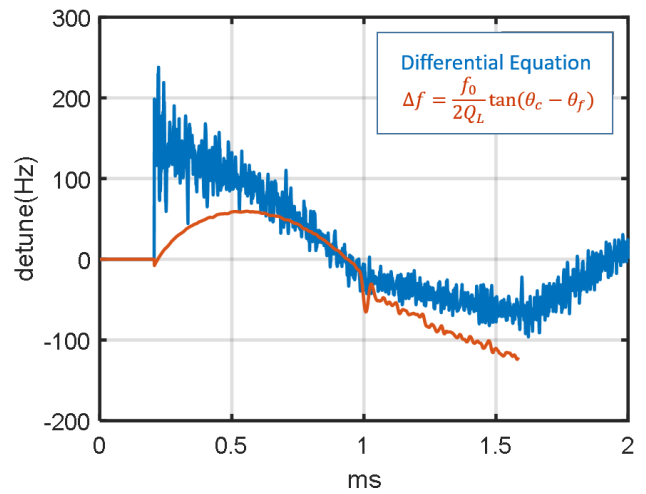


図 43 式 (6.2) を使って算出した離調と空洞と入力波の位相差から導出した離調周波数

文献 [11] で詳しく述べられているので参考にしてほしい。観測される離調は， Δf_m の総和である。

$$\Delta f = \sum \Delta f_m \quad (6.5)$$

ダンピングの項の係数は，機械時定数 τ_m を導入し，

$$\tau_m = 2Q_m / \omega_m \quad (6.6)$$

と定義される。この時定数 τ_m は，空洞シミュレータで Dynamic Lorentz force detuning を模擬するとき導入されている。

さて，STF の空洞の負荷 Q 値は， $Q_L = 3 \times 10^6$ 程度であるので， $f_{1/2}$ は 216 Hz である。空洞の加速勾配が高くなるにつれ離調が大きくなり，離調補正をしないと，共振帯域幅から外れてしまい空洞にパワーを蓄積することができなくなる。

そのため，チューナーによる離調補正が必要である。Lorentz force detuning は，共振周波数がかかる方向に大きく変化するため，メカニカルチューナーで予め離調をプラス方向にセットしておく。これを Pre-detuning という。図 44 のように，ハーフサインの形状の波形でピエゾチューナーをドライブすることで離調補正がなされている。振幅やタイミング等を調整することにより，離調量を減らすことができている。このため，RF フィードバック ON 状態でのフラットトップ部の入力パワーは，一定となっており，うまく補償できていることがわかる。STF における離調測定や考察など，文献 [13] に詳しく述べられているので，そちらを参考にしてほしい。

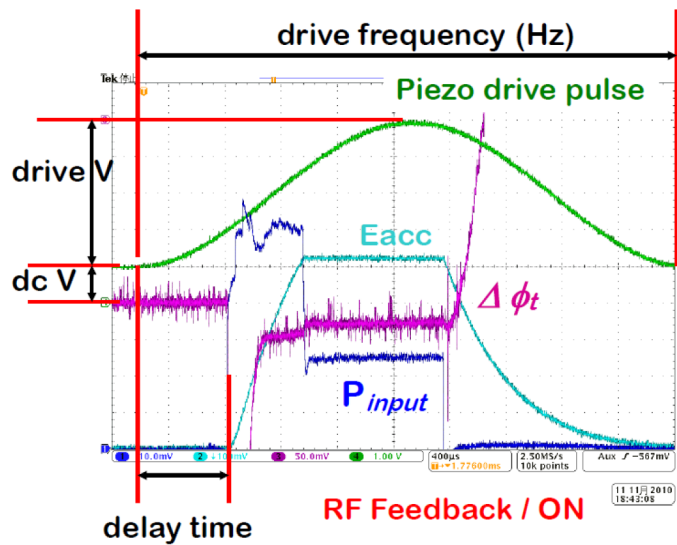


図 44 STF におけるピエゾチューナーを使った離調制御 [12]

6.1.3 マイクロフォニクス

マイクロフォニクスは、外部環境の振動が空洞に伝わり空洞離調の振動となるものである。例えば、真空ポンプの振動がビームダクトや地面を介して空洞に伝わったり、交通などによる地面の揺れ、液体 He 用の冷凍機のコンプレッサーやポンプによる振動などが空洞の離調に影響する。マイクロフォニクスを抑えるためには、できるだけ振動を伝えないようにすることや、機械振動の共振周波数を外部の振動周波数に一致させないように設計を行う必要がある。

図 45 と図 46 に cERL の入射空洞と主空洞の機械振動測定の結果を示す。入射空洞では、ピエゾチューナーで空洞に機械的振動を与え、それによる離調の大きさを測定している。各空洞で、400 Hz - 450Hz あたりに大きなピークが観測された。主空洞では、機械振動を外部から与え、実際にひずみセンサーを用いて、変形量の振幅を測定している。55 Hz 付近に最も大きなピークが見られ、また、さらに低い 40 Hz 付近にも共振が観測された。

cERL の主空洞 (9-cell, $Q_L=10^7$) では、クライオモジュールの断熱真空真空槽用に使用しているスクロールポンプの影響で、マイクロフォニクスによる 50Hz の振動が主空洞で観測された。図 47 は、一定 RF 入力 (RF フィードバック OFF) の場合の加速電場の振幅・位相の測定結果である。振幅に比べ、位相の変動が大きいことがわかる。変動の値自体は、RF フィードバックにより抑え込めるくらいの変動であるが、もし、空洞がやわらかく振動しやすい場合や、 Q_L 値が一桁以上高い場合

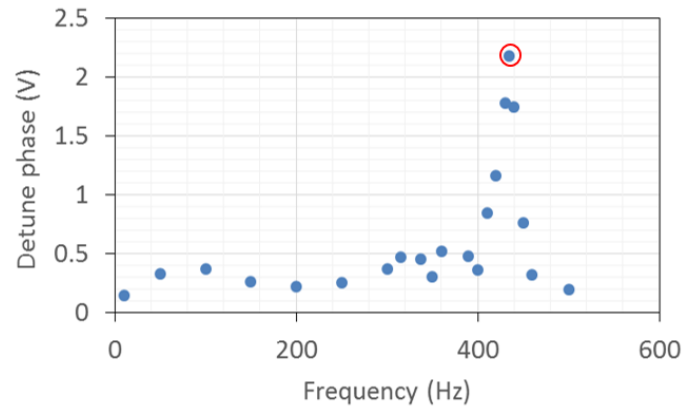


図 45 cERL 入射空洞に対する機械振動の共振周波数 [14]

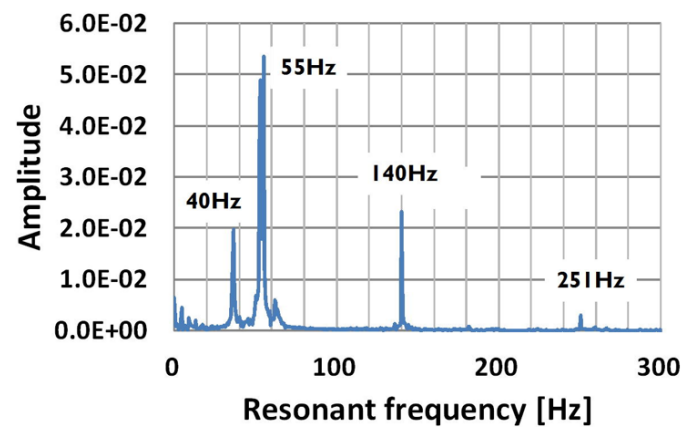


図 46 cERL 主空洞に対する機械振動の共振周波数 [15]

は、影響が大きいと考えられる。図 47 の (b) は、スクロールポンプの下に防振用としてゴムシートを敷いて、床からの振動が空洞に伝わらないように対策した後の結果である。対策によって、電場の揺らぎが小さくなった。文献 [16] では、主空洞の機械振動の共振周波数の測定や、床の振動測定を行い、マイクロフォニクスについて報告されているため、詳しくはそちらを参考してほしい。参考までに、図 48 に床の振動測定の結果を示す。50Hz 以外にも強度の大きい振動成分があるが、機械振動の共振周波数と一致した 50Hz が大きく空洞に影響したものと考えられる。ポンプをオフすると、50Hz の床の振動が大きく減るため、ポンプの振動対策が重要であることがわかる。

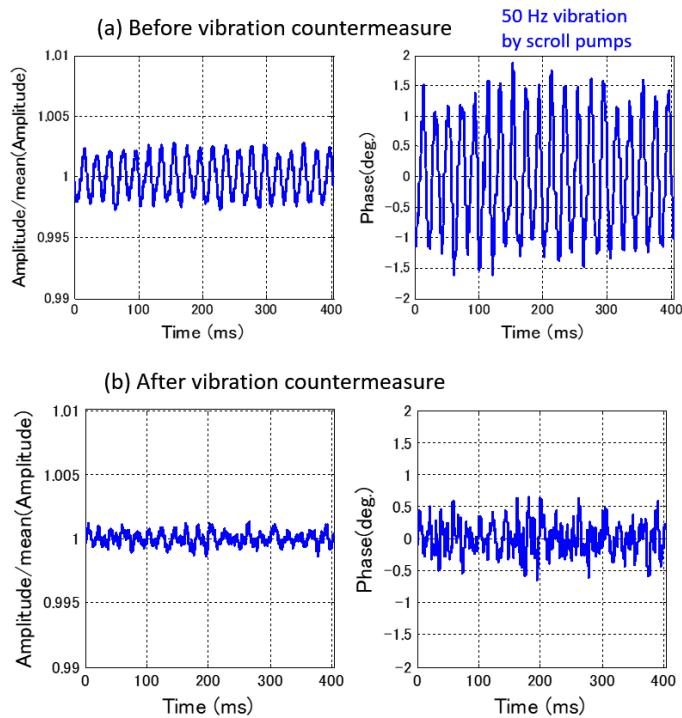


図 47 cERL の主空洞におけるマイクロフォニクスの影響 (RF フィードバック OFF). (a) 真空ポンプの振動対策前の加速電場の振幅・位相, (b) は対策後の結果

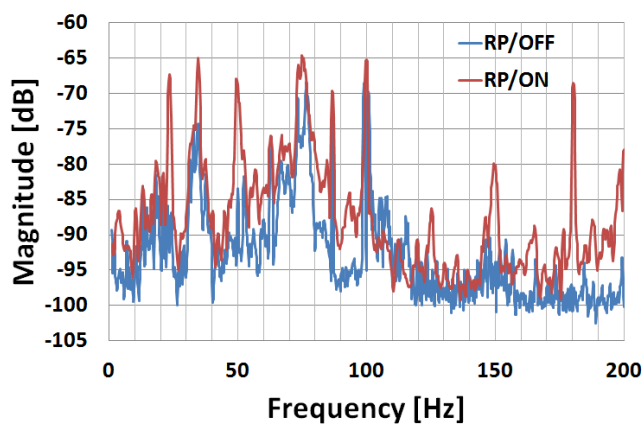


図 48 cERL 主空洞付近の床の振動測定結果 [16] (RP:ロータリーポンプ)

6.2 cERL のチューナー制御システム

ここでは, cERL のチューナー制御システムについて紹介する. 図 49 にチューナー制御を含めた全体システム構成を示す. 空洞の共振周波数フィードバックのためのチューナー制御には, 同じデジタルフィードバックボードを使用し, FPGA 内部のロジックをチューナー制御用に書き換えている. デジタルボードの DAC 出力をピエゾ制御用に, デジタル I/O 出力をステップモーターの制御に適用している

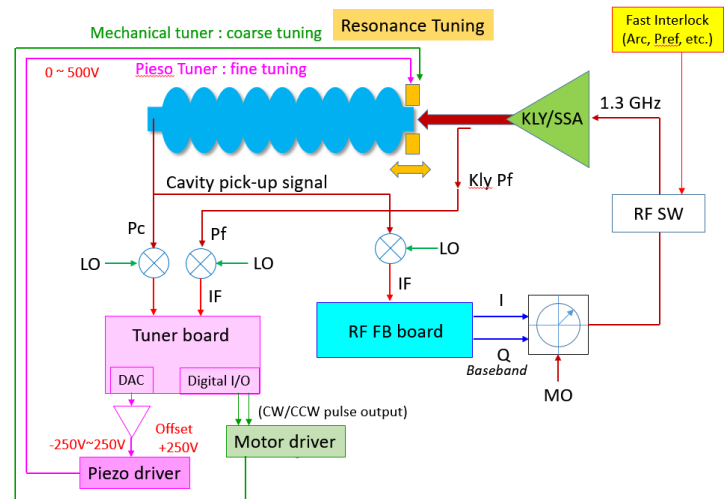


図 49 cERL の LLRF システム

6.2.1 チューナーシステム

超伝導空洞の共振周波数制御には, 図 50 に示すようなステップモーターで駆動されるスライドジャッキ型のメカニカルチューナーや高速応答可能なピエゾチューナーが用いられている. チューナーのハードウェアについて, 詳しくは文献 [18, 17] を参考にしてほしい.

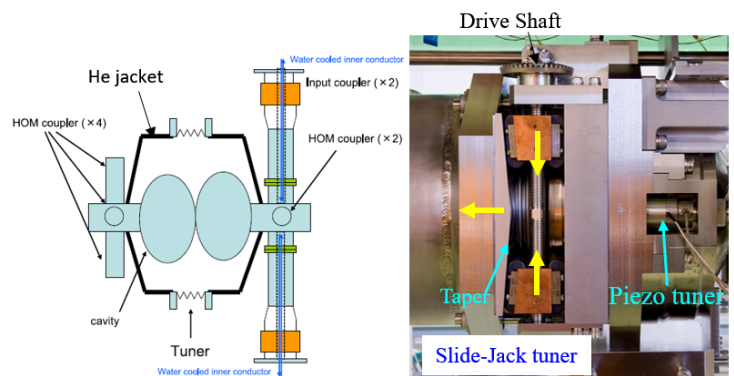


図 50 cERL 入射空洞のスライドジャッキ型メカニカルチューナーとピエゾチューナー

メカニカルチューナーは, 粗調整やパワーが入らないように大きく離調させたい場合に用いる. チューナーボードのデジタル I/O 出力から CW (Clock Wise), CCW (Counter Clock Wise) 用パルスを出力してパルスモーターの回転を制御し, 空洞を伸ばしたり縮めたりする制御をしている.

ピエゾは, 圧電素子を積層したもので, 電圧をかけることにより変位を生じさせることができるアクチュエータである. また, 力が加わり素子にひずみが生じることで電圧も発生することができるので微小変位のモニターとしても用いられる. ピエゾアクチュエータは, 微調整用に用いられ, cERL で使用されているものは, 0-500V に対し室温では $40\mu\text{m}$, 2K の温度下では $4\mu\text{m}$

の変位量をもつ。0-500V の制御範囲で、入射空洞では 2 kHz, 主空洞では 1.2kHz 共振周波数を動かすことができる。入射空洞では、ほぼ空洞帯域と同程度であり、主空洞は、空洞の帯域幅が 130 Hz なので十分な駆動幅となっている。cERL の超伝導加速空洞に対し、運転時の離調制御は、 Piezo チューナーだけで行われている。一方、常伝導のバンチャー空洞では、モーター駆動のメカニカルチューナーのみが使用されている。

6.2.2 共振周波数フィードバック制御

図 51 にはチューナー制御による共振周波数フィードバック制御のブロック図を示す。

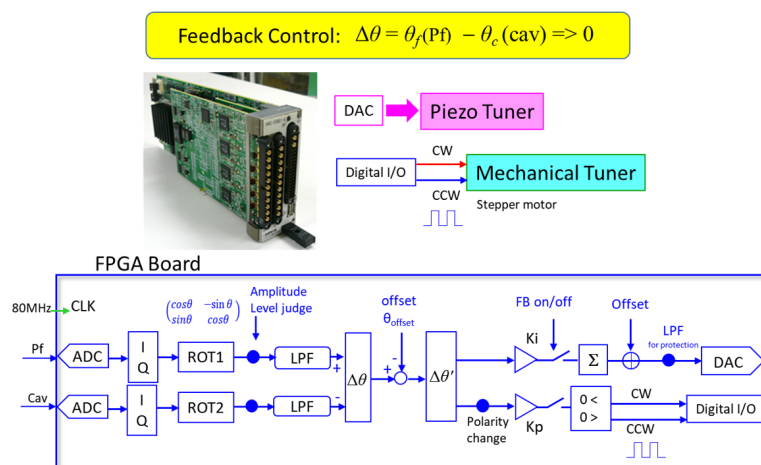


図 51 チューナー制御ボードとブロック図

空洞入力 (V_f) と空洞のピックアップ信号 (V_c) を I/Q 変換し、 V_f と V_c の位相差 ($\Delta\theta$: 離調角度) が 0 になるようにチューナーを制御する。位相オフセットを付けたい場合は、オフセット分を差し引いたものが 0 になるように制御される。

位相補正 (ROT) は、1.3 GHz の共振時に位相が 0 になるように校正されている。ここで注意したいのは、Piezo のドライブ電圧でスキャンする場合、Piezo アクチュエータはヒステリシスがあるため同じ電圧をセットしても元の状態に戻らない。図 52 に主空洞で観測したヒステリシスループを示す。空洞の共振帯域が狭いため、ヒステリシスによって位相差の結果が大きく異なることがわかる。1 ループ回して元値にするか、振幅がピーク値を再現するように再度調整してから位相のキャリブレーションを行う。

また、位相キャリブレーションが適切に行われたかどうかについては、フィードバックをかけながら位相差のオフセット位相を変えていき、空洞電圧の振幅をプロットすることで確認が可能である。図 53 の場合、数 deg

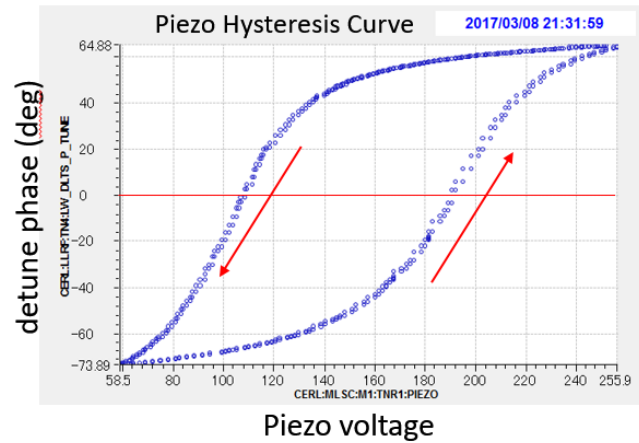


図 52 cERL 主空洞で観測した Piezo チューナーのヒステリシスループ

程度キャリブレーションがずれていることがわかる。

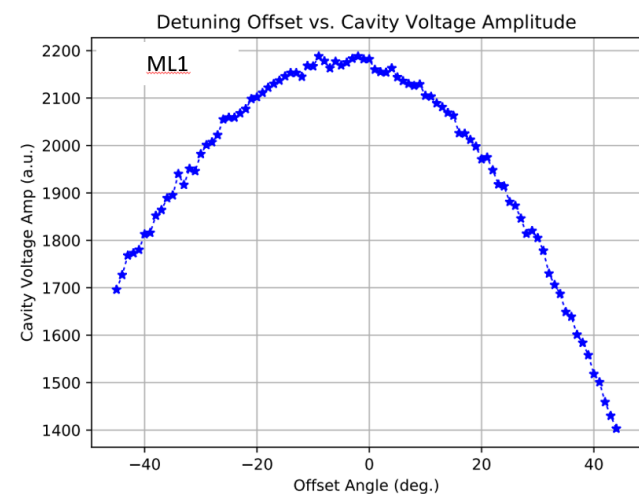


図 53 オフセット位相に対する空洞電圧のスキャン結果の例。数 deg 位相校正にずれが見られる。

位相回転補正の後、振幅レベルがチェックされ、閾値以上の時だけフィードバック制御が可能となる。

離調フィードバック制御の帯域は、主空洞は 40 Hz 付近から機械共振が現れるため、機械共振周波数より下になるように制御帯域幅を狭めている。(現状では 20 Hz となっている。)

FPGA 内部では、Piezo 側は積分演算、モーター側は比例演算を行っているが、実際はモーターの駆動はパルスが積算されていくので共に積分制御となっている。超伝導空洞は、Piezo 側のフィードバックのみを ON にし、バンチャー空洞は、モーター駆動側のフィードバックのみを ON にして使用している。

DAC 出力は ± 2.5 V に変換され、 $+2.5$ V のオフセット電圧を足されて 0 V - 5 V に変換される。これを Piezo 駆動電源に入力して 10 倍に増幅し、0 V - 500 V で Piezo が駆動されている。

cERL の離調位相のトレンドグラフを図 54 と図 55 に示す。cERL では、約 15 分間隔で液体窒素のバルブ調整が行われ、それによる離調が図 54 のように観測されていたが、チューナー制御のフィードバックゲインを適切に調整することで、図 55 に示すようにほぼ 0.1° rms から 0.15° rms の範囲に収まった。離調周波数に直すと、主空洞に対し、 0.2 Hz rms に収まっていることになる。

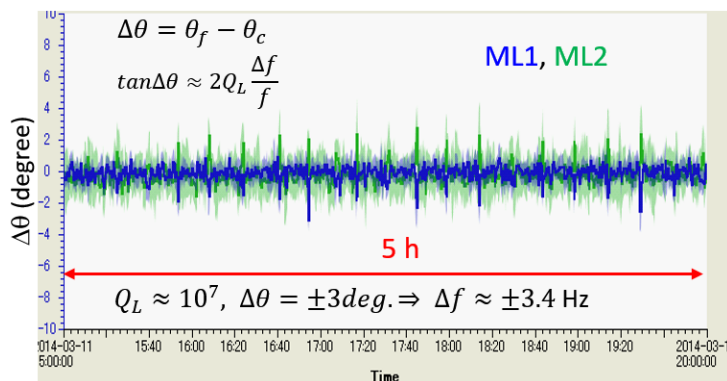


図 54 cERL の主空洞に対する離調位相の 5 時間分のトレンドグラフ。液体窒素のバルブ調整により、およそ 15 分間隔で離調が見られた。

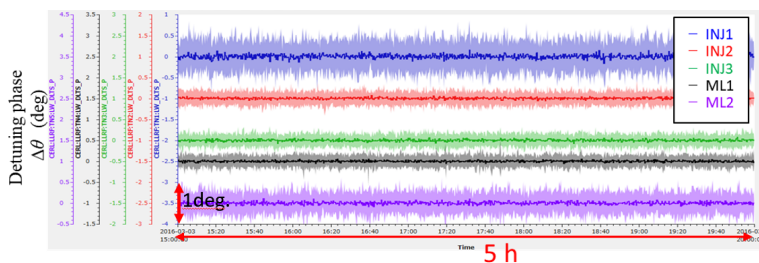


図 55 cERL の超伝導加速空洞に対する離調位相の 5 時間分のトレンドグラフ。 0.1° rms から 0.15° rms の範囲に収まっており、主空洞に対しては 0.2 Hz rms に収まっている。

制御ボードの運用方法について、最初はフィードフォワードで RF を出力させ、チューナーボードの RF 振幅閾値を超えた後に、離調フィードバック制御を ON とする。離調フィードバック制御がなされてから RF パワーを上げていくことで、Lorentz force detuning を補償しながら電場を上げていくことができる。

7 おわりに

超伝導空洞を使った線形加速器に対するデジタル LLRF 制御をメインに説明を行ってきた。蓄積リングに対する RF 制御については、他の講義を参考にしてほしい。

本テキストでは、空洞の等価回路、制御理論の基礎、デジタル I/Q 制御について紹介し、パルス運転の STF と CW 運転の cERL を例に、RF フィードバック制御やチューナーによる共振周波数フィードバック制御についての説明を行った。

マイクロ波ローレベル制御に対する理解の一助となれば幸いである。

参考文献

- [1] T. Schilcher, “Vector Sum Control of Pulsed Accelerating Fields in Lorentz Force Detuned Superconducting Cavities”, TESLA 98-20 Aug. 1998.
- [2] 絵面栄二, “RF フィードバック高エネルギー加速器セミナー OHO’ 94(1994)”
- [3] S.N.Simrock, “Measurements for low level RF control Systems”, Meas. Sci. Technol. Vol.18 (2007) 2320-2327.
- [4] Z. Geng et al, “Evaluation of Fast ADCs for Direct Sampling RF Field Detection for the European XFEL and ILC”, LINAC08, THP102.
- [5] 加古永治, RF フィードバック高エネルギー加速器セミナー OHO’ 94(1994)
- [6] 樋口龍雄 著 “自動制御理論” 森北出版
- [7] 井上和夫 監修 “MATLAB/Simulink によるわかりやすい制御工学” 森北出版
- [8] M.Liepe et al., “Dynamic Lorentz Force Compensation with a Fast Piezoelectric Tuner”, PAC2001 (2001)
- [9] S.N.Simrock, “Lorentz Force Compensation of Pulsed SRF Cavities”, LINAC2002, (2002) p554-558
- [10] A. Brandt, “Development of a Finite State Machine for the Automated Operation of the LLRF Control at FLASH”, desy-thesis-07-024, 2007
- [11] N. Ouchi et al, “Pulsed SC Proton Linac”, LINAC2000, (2000) WE205

- [12] R. Paparella et al., "Tuner Performance in the S1-GLOBAL Cryomodule", IPAC2011,
- [13] Y. Yamamoto et. al., "Observation and Numerical Calculation of Lorentz Detuning for the Cryomodule Test of STF Baseline Cavities at KEK-STF", PAC2009 (2009)
- [14] E. Kako, private communication
- [15] 江木昌史 他, "cERL 主空洞の機械的振動測定", PASJ2013 (2013) SUP047
- [16] 江木昌史 他, "cERL9 セル空洞のマイクロフォニクス原因調査", PASJ2016 (2016) MOP025
- [17] K. Enami et al., "Performance evaluation of ERL main LINAC Tuner", Proceedings of IPAC2014, Dresden, Germany, 2014, pp25342536.
- [18] 加古永治, "ILC 用超伝導空洞の開発", 低温工学 48 卷 8 号, 2013, pp.415425.