

# 1 SuperKEKB の設計経緯

ゼロからの一般的な加速器設計では、初めに各種の基本的な性能指標を評価する解析的な公式や簡易的な評価ツールを用いて、目的に応じた加速器パラメータ(マシンパラメータ)が選定される。続いて、選定されたマシンパラメータを実現するのに適した光学系の基本構造(電磁石・高周波空洞の配置)が選択される。光学系の基本構造が決まった後は、所望のマシンパラメータを実現する光学関数を得るための機器配置・機器パラメータの最適化を行い、機器配置案に基づく機器設計と設計された磁場分布等の光学モデルへのフィードバック、光学モデルによるビーム寿命や Luminosity 等の性能評価や安定性の検証等が行なわれ、性能や機器配置の改善やコスト削減のための再設計が時間の許す限り行なわれる。

しかし、現行の SuperKEKB 加速器の設計は様々な外的要因からこうした標準的な設計フローと異なる経緯を辿っている。SuperKEKB 加速器の当初案は現行のものとは大きく異なり、2004 年にまとめられた“Letter of Intent for KEKB Super B Factory”[1] に有るよう当時稼働中だった KEKB B-Factory 加速器の設計をもとに、バンチ長  $\sigma_z^*$  と衝突点垂直ベータ関数  $\beta_y^*$  を半分に縮小しつつ、クラブ交差方式を用いてビームビームパラメータをおおよそ 2 倍の  $\xi_y \sim 0.2$  程度まで高め、蓄積電流を 4 倍にすることで、シミュレーション条件にもよるが  $2.5 \sim 5.0 \times 10^{35} \text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$  程度のルミノシティ<sup>1</sup>を実現するというコンセプトであった。実装計画は、衝突点部の改装と真空チェンバー及び高周波空洞の大電流化対応を行なうというもので、衝突点光学系の構造は KEKB B-Factory 加速器の構造を踏襲し低  $\beta_y^*$  化に対応するために、水平面内の交差角度を 22mrad から 30mrad に広げ、電子・陽電子ビームライン共通の超伝導四重極電磁石(QCS)の設置位置を衝突点に向けて 40% ほど前進させるというものであった。光学系のパラメータとしては堅実な設定であったが、この時点ではまだ最終収束系で発生するシンクロトロン放射光の処理に関して、真空容器と光学系の整合の取れた設計が完成していなかった。また、高周波系だけで概算 73MW もの電力を要求するという力技な設計のため、大電流・短バンチ運転対応の高周波機器・真空機器の開発難度が高く、つくばキャンパスの受電容量(125MW)からの運転電力確保や運転経費の肥大化が

問題とされていた。設計検討の進行に伴いコヒーレントシンクロトロン放射(CSR)が短バンチ化の障害となることが判明したことや、2006 年の KEKB B-Factory 加速器の Crab Crossing 化改装とそれによる実証で得られた Crab Crossing でのビームビームパラメータが  $\xi_y \sim 0.13$  程度と事前のビームビームシミュレーションから予測される値 0.2 に比べて低いことから当該設計案で  $2 \times 10^{35} \text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$  を越えるルミノシティの実現は難しいと見方が強まっていた。さらに、イタリアを中心としたグループから Large Piwinski Angle な衝突点設計による設計ルミノシティ  $10^{36} \text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$  の実現を謳った SuperB 計画が提案されたことをうけて、物理実験を担当する Belle グループからは実験計画に参加する物理学者募集競争に負けられないためにイタリアの SuperB 計画とほぼ同等の設計ルミノシティを実現することを強く要請される状況となった。こうした状況の中、“KEKB Accelerator Review Committee”からも Large Piwinski Angle を用いた設計案を検討すべしとの答申があり、2007 年前後から検討が始まり、2009 年初頭に KEKB トンネルへの実装を前提とした設計作業が本格化した。設計に際しては、競合する SuperB 計画との競争や予算獲得の観点から、建設工期圧縮と建設費削減のために KEKB B-Factory 加速器からのトンネル流用と可能な限りそのままビームラインを再利用する<sup>2</sup>ことが求められた。

最初期の設計試案は SuperB の設計を参考に、8GeV 高エネルギー電子リング(HER)アークセルの短セル化と 3.5GeV 低エネルギー陽電子リング(LER)主偏向電磁石長の延長による低エミッタンス化により平衡エミッタンスを 1nmrad 程度まで低エミッタンス化し、交差角 60mrad の衝突点に HER/LER 共通の超伝導四重極電磁石を先頭にした最終収束系とイタリア型の色収差補正部を導入するというものであった。この試案の評価結果からは以下の知見が得られた。HER/LER 共通の超伝導四重極電磁石を用いた設計では、軸外を通るビームの軌道偏向角が大きすぎ既設のトンネル境界に収まるように偏向させると、それに伴う分散関数の発生と平衡エミッタンスの生成で設計コンセプトが破綻する。イタリア型のアークセルをベースにした色収差補正部は、現実的な磁場設定で補正に必要な分散関数を確保するには曲率半径が大きすぎて、既設のトンネル境界に収まらない。KEKB B-Factory 加速器の HER アークセルでは平衡エミッタンス 5nmrad 程度が

<sup>1</sup>KEKB B-Factory 加速器の最終性能のおおよそ 16 倍 (16 ~  $2 \times 2 \times 4$ )

<sup>2</sup>個別の機器を再利用しても、再配置するには相応の工期と人件費が必要となる

下限で、1nmrad 台を実現するにはセル長を 3/5 に縮小する必要が有る。LER アークセルの主偏向電磁石を可能な限り長くして平衡エミッタンス 1nmrad 程度に設計しても、バンチ内ビーム散乱 (intra-beam scattering) 効果を考慮すると 3.5GeV では 3nmrad 近くまで劣化してしまう。

こうした知見を踏まえ以下のように設計方針の修正が図られた。LER の intra-beam scattering 対策として、エネルギーの非対称度を 3.5GeV×8GeV から 4GeV×7GeV(LER/HER) へ減らして intra-beam scattering を緩和するとともに、平衡エミッタンスの設計目標を 3/5nmrad(LER/HER) 程度まで緩め、HER に関しては既設のアーク部をそのまま再利用し、LER に関しては主偏向電磁石を 4m 級のものに交換した上でビームパイプを電子雲対策のためアンテチェンバー型のものに換装<sup>3</sup>を行なう。色収差補正部は、平衡エミッタンスの設計値に若干の余裕ができたので、KEKB B-Factory 加速器と同様のシケイン型を採用し、両リングに水平・垂直方向の色収差補正を導入する。最終収束系の超伝導四重極電磁石はビームライン毎に独立させ、最前方に設置する LER 用超伝導四重極電磁石 (QC1P) と HER ビームパイプ間のクリアランスを確保するために、交差角を 83mrad に増やした上で QC1P の磁気シールドを削除する。この設計変更により、QC1P から HER ビームラインへの漏洩磁場による影響が残ることになったが、四重極成分までは軌道・光学系設計の一部として取り込み、光学性能上有害な高次多重極成分に関しては HER ビームパイプ上に相殺用の超伝導コイルを追加<sup>4</sup>する。途中、衝突点への四重極永久磁石導入などの派生型の比較検討を行ないつつ、2010 年春頃には現行 SuperKEKB 加速器の衝突点設計案 [2] の原型が形となり、2010 年後半には超伝導電磁石の設計計算からフィードバックされた磁場分布を取り入れた加速器モデリングの構築と性能評価が始まっている。

磁場計算を反映した加速器モデルの性能評価は、磁場計算モデルの改良や加速器モデリングパラメータの抽出技法の改良と平行して行なわれ、垂直方向の平衡エミッタンスの生成原因となるソレノイド軸とビーム軌道のアライメントの見直しや補償ソレノイド磁場分布の最適化、超伝導四重極電磁石のフリンジや本体に寄生する力学口径に対して有害な多重極磁場を低減するためのコイル形状最適化や多重極補正コイルの

追加が行なわれた。結果、最終収束系の超伝導電磁石システムは補償ソレノイドを合わせて 45 個の超伝導コイルを含む複雑なものになっている。また、機器製作の開始後には、製作工程で誤作が発生した際に再製作に伴う納期遅延を避けるため、そのまま設計に取り込む等の変更も加えられ、2018 年 3 月の SuperKEKB Phase-II コミッショニングで就役した。

## 2 SuperKEKB のマシンパラメータと衝突点光学系

ガウス分布するビーム同士の衝突による Luminosity 性能は、ビームの周回周波数  $f_{rev}$ 、バンチ数  $n_b$ 、バンチ内の粒子数  $N_+$ ,  $N_-$  と衝突点でのビームの広がり標準偏差  $\sigma_x^*$ ,  $\sigma_y^*$  を用いて以下のように表現される。

$$L \equiv \frac{N_+ N_- n_b f_{rev}}{4\pi\sigma_x^* \sigma_y^*} \quad (1)$$

ここで、周回周波数  $f_{rev}$  は軌道長 (～トンネル周長) とビームの飛行速度 (～光速) で決まるため、トンネルの再利用が前提とする SuperKEKB 加速器ではほぼ定数である。また、バンチ数  $n_b$  は、高周波加速空洞の周波数と周回周波数  $f_{rev}$  の比が上限で、KEKB B-Factory 加速器の高周波系を再利用する SuperKEKB 加速器では上限 5200 バンチ、ビーム不安定性等からの運用安定性を考慮した実用上限は 2500 バンチ程度と想定されている。残る設計上変更可能なパラメータはビーム電流 ( $I_{\pm} = eN_{\pm}n_b f_{rev}$ ) と相関する  $N_{\pm}$  と衝突断面積を決めるビームサイズ  $\sigma_{x,y}^*$  のみである。また、異種電荷同士で反航衝突するビームでは、相手ビームの電荷と電流から生じる電磁場による収束力を受け、 $\beta$  関数やエミッタンス  $\epsilon$  が変化する。その影響をベータatron チューンの変化量で表現したビームビームパラメータ  $\xi$  は、線形近似の範囲で以下のように近似される。

$$\xi_{x,y\pm} \sim \frac{r_e N_{\mp}}{2\pi\gamma_{\pm}} \frac{\beta_{x,y}^*}{\sigma_{x,y}^* (\sigma_x^* + \sigma_y^*)} \quad (2)$$

$$= \frac{r_e N_{\mp}}{2\pi\gamma_{\pm} (\sigma_x^* + \sigma_y^*)} \sqrt{\frac{\beta_{x,y}^*}{\epsilon_{x,y}}} \quad (3)$$

ここで、 $r_e$  は荷電粒子の古典半径、 $\gamma_{\pm}$  は相対論パラメータ、 $\beta_{x,y}^*$  は衝突点  $\beta$  関数、 $\epsilon_{x,y}$  はビームエミッタンスである。経験的に、ビームビームパラメータ  $\xi$  を大きくしようとすると非線形なビームビーム相互作用の結果ビームサイズが肥大化し  $\xi$  が制限される現象が

<sup>3</sup>ビームパイプの遮断周波数が変わるため、ビーム位置モニター (BPM) の信号処理系の再開発が必要になった

<sup>4</sup>この磁気シールドの削減は、後に超伝導電磁石システムの設計を複雑化させる要因の一つとなっている

表 1: KEKB B-Factory 加速器と SuperKEKB 加速器の主要なマシンパラメータ

Parameter	KEKB B-Factory		SuperKEKB (2004)		SuperKEKB	
	LER	HER	LER	HER	LER	HER
E[GeV]	3.5	8.0	3.5	8.0	4.000	7.007
I[A]	1.64	1.19	9.4	4.1	3.6	2.6
Radiation Loss[MeV/turn]	1.6	3.5	1.23	3.48	1.76	2.43
$n_b$	1585		5018		2500	
Corssing Angle[mrad]	22 / 0(crab)		30 / 0(crab)		83(nano-beam)	
$\epsilon_x$ [nmrad]	18	24	24	24	3.2	4.6
$\epsilon_y$ [pmrad]	150	150	240	240	8.64	12.9
$\beta_x^*$ [mm]	1200	1200	200	200	32	25
$\beta_y^*$ [ $\mu\text{m}$ ]	5900	5900	3000	3000	270	300
$\sigma_z$ [mm]	7	7	3	3	6	5
$\xi_x$	0.127	0.102	0.79	0.137	0.0028	0.0012
$\xi_y$	0.129	0.090	0.051	0.218	0.0881	0.0807
Luminosity[ $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ ]	$2.108 \times 10^{34}$		$2.5 \sim 5.0 \times 10^{35}$		$8 \times 10^{35}$	

知られており、典型的な限界値は 0.1 ~ 0.2 付近とされている。

扁平な電子・陽電子ビーム衝突 ( $\sigma_y^* \ll \sigma_x^*$ ) の場合、ビームビームパラメータを用いて式 1 を書き直すと次式が得られる。

$$L \sim \frac{\gamma_{\pm}}{2er_e} \left( 1 + \frac{\sigma_y^*}{\sigma_x^*} \right) \frac{I_{\pm} \xi_{y\pm}}{\beta_y^*} \quad (4)$$

ビームビームパラメータ  $\xi_y$  の上限値の存在を前提とすると、Luminosity を高めるには  $\xi_y$  一定となる条件を満たしながら  $I_{\pm}/\beta_y^*$  比を大きくすることになる。式 3 に電流 ( $N_{\mp}$ ) が含まれることを考慮すると、上記の方針は  $\epsilon_y/\beta_y^*$  比を一定に保ちながら  $\beta_y^*$  を絞ることに相当する。ここまでの議論では、衝突点近傍で進行方向に均質なビーム構造を仮定しているが、 $\beta_y^*$  が十分に小さい状況ではこの仮定が成立しない。自由空間となっている衝突点近傍の  $\beta$  関数は、衝突点からの距離  $s$  に対し次式のような依存性を示す。

$$\beta(s) = \beta^* \left( 1 + \left( \frac{s}{\beta^*} \right)^2 \right) \quad (5)$$

従って、バンチ長  $\sigma_z$  に対して衝突点  $\beta$  関数  $\beta_y^*$  が小さな領域では、砂時計のようにバンチの先頭と末尾が膨らんだ形状で衝突することになる。この結果、バンチ長全体が相互作用する衝突では  $\beta_y^* < \sigma_z$  な領域での平均衝突断面積は衝突点での幾何学的な面積より広くなり Luminosity が低下すると共に、ビームによる収束

力のバンチ内位置依存性を通じてビームビーム相互作用の非線形性が増すことでビーム不安定性の悪化要因にもなる。この効果は、砂時計効果 (hourglass effect) と呼ばれている。

## 2.1 マシンパラメータのコンセプト

表 1 にまとめたのは、KEKB B-Factory 加速器と SuperKEKB 加速器の主要なマシンパラメータである。2004 年にまとめられた旧設計案では、砂時計効果を避けるためバンチ長と衝突点  $\beta$  関数の比率を維持し、短バンチ化における技術的制約から  $\beta$  関数の圧縮率は控えめに設定し、 $\beta_y^*$  による Luminosity の増強は約 2 倍で、残りは主に電流 (約 4 倍) とビームビームパラメータ (約 2 倍) でまかなう構成である。一方、現行 SuperKEKB 加速器の設計案では、バンチ長を改造前の KEKB B-Factory 加速器と同等に設定する一方で、 $\beta$  関数は 20 分の 1 に設定し、Luminosity 増強の大半を  $\beta_y^*$  で稼ぐ構成<sup>5</sup>である。この設定のみでは砂時計効果の発生を避けられないので、Large Piwinski Angle 衝突と呼ばれる手法で回避している。砂時計効果による問題の本質は、不適切なビームサイズのビームが衝突することであり、本方式では水平方向に細いビームと大きな交差角を組み合わせることでビーム進行方向の衝突領域を  $\beta_y^*$  スケールまで圧縮することで砂時計効

<sup>5</sup> ビームビームパラメータ  $\xi_y$  は据え置き、電流増強は 2 倍程度に抑えている

果を回避している。言い換えれば、幅広のビームを正面衝突させる代わりに、水平面内への投影断面積が等しい傾斜した針金のようなビーム同士を衝突させることで、実効的なバンチ長を圧縮し、 $\beta_y^*$  の縮小を可能にしている。欠点としては、水平方向のビームサイズの圧縮が直接には Luminosity 性能に寄与しない点と両ビームの焦点が揃うのは中心軸上のみで水平方向の振幅に従って焦点位置がずれることである。SuperKEKB 加速器では、この衝突方式を設計上の鉛直方向ビームサイズが nm スケール<sup>6</sup> となることから “nano-beam 方式” と呼んでいる。これを成立させるために、衝突点水平ビームサイズ  $\sigma_x^* \sim \sqrt{\epsilon_x \beta_x^*}$  も 1  $\mu\text{m}$  以上絞っているため、衝突点部での水平方向の色収差補正も必要になり衝突点光学系が複雑化している。

## 2.2 衝突点光学系のコンセプト

衝突点を取り囲む検出器ソレノイド磁場による垂直エミッタンスへの影響を最小化するために、電子・陽電子ビームラインは検出器ソレノイド軸に対して 41.5mrad の交差角で設置される。また、検出器ソレノイド磁場によるビームへの影響を補償するための補償ソレノイドを両ビームラインに被うように設置している。水平・垂直方向の衝突点  $\beta$  関数を絞るための最終収束系は、ビームライン毎に独立した超伝導四重極電磁石ダブレットを両ビームライン間の干渉を避けるよう衝突点から LER 垂直方向収束電磁石 (QC1P)、HER 垂直方向収束電磁石 (QC1E)、LER 水平方向収束電磁石 (QC2P)、HER 水平方向収束電磁石 (QC2E) の順に互い違いに配置し、反対側のビームラインへの磁場の漏洩を避けるため QC1P 以外には磁気シールドが装備されている。QC1P に関しては、セパレーション不足により磁気シールドの代わりに HER ビームライン上に六重極以上の多重極磁場を相殺する超伝導漏れ磁場キャンセラーコイルが用意されている。HER の QC1P 漏れ磁場キャンセラーは、力学口径に有害な六重極から 12 重極までの計 4 種の多重極キャンセラーコイルを集積したもので、それぞれの多重極キャンセラーコイルはビーム交差角と QC1P の回転及び鉛直アライメントオフセットによって強度と向きが軸方向に変化する漏れ磁場に対応し、軸方向にコイル密度や向きが変化するよう設計されている。<sup>7</sup>補正コイルとして、四重

極磁場のアライメント補正用の水平・垂直ステアリングコイルと skew 四重極コイルを標準装備するほかに、位相空間を歪めて QC2 での物理口径制限を緩和する八重極コイルや力学口径に有害な六重極モードを補正する normal 及び skew 六重極コイルなどが導入されている。

補償ソレノイドにより検出器ソレノイド磁場の大域的な影響は補償されているが、ソレノイド磁場による局所的な軌道面の回転に対応するために、LER 側の超伝導四重極電磁石には 10mrad オーダーの回転角が設定されている。ビーム軌道が最終収束系を構成する超伝導四重極電磁石の中心付近を通るように、検出器ソレノイドと補償ソレノイドによって垂直方向の軌道が大きく蛇行する LER では、衝突点を通る軌道の接線に対して QC1P 及び QC2P に 1mm オーダーの垂直アライメントが設定され、QC1P からの漏れ磁場で水平方向の軌道変更を受ける HER では、衝突点を通る軌道の接線に対して QC1E 及び QC2E に  $\pm 700\mu\text{m}$  の水平アライメントが設定されている。これらの超伝導四重極電磁石群は断熱真空容器内にまとめて装着され、組立て後にメカニカルアライメントを個別調整することが出来ないため、組み込まれるステアリングコイルの定格は少なくとも  $\pm 500\mu\text{m}$  相当のアライメント補正が可能となるように設計された<sup>8</sup>。

最終収束系で生じる極めて大きな色収差を補正するため、衝突点を挟む最終収束系の外側には水平・垂直方向の色収差補正部を設置している。色収差補正部では、補正に必要な大きな分散関数を得るためのシケイン内に  $-I'$  転送行列で結ばれた六重極電磁石ペアを設置し、それぞれの補正対象の QC1・QC2 にベータトロロン位相を合わせている。

## 3 衝突点光学系のモデリング

SuperKEKB 加速器の設計では、力学口径(ビーム寿命)や垂直エミッタンスに対する最終収束系の磁場分布の影響が極めて大きくなるため、加速器モデルによる性能評価には精密な磁場モデリング [3] が必要とされる。SuperKEKB 加速器の最終収束系は、超伝導ソレノイドとアライメントオフセット付きの超伝導多重極電磁石群に磁気シールドを組み合わせたもので、磁気シールドやリターンヨーク等の構造物が超伝導電磁石と異なる対称性を持つためにシステム全体としての

<sup>6</sup>正確には数十 nm スケール

<sup>7</sup>製作時の連絡の不備から、鏡対称に加工されていることが、インストール直前に判明しており、skew 磁場は補正出来ない状態になっている

<sup>8</sup>組立て・設置精度が  $500\mu\text{m}$  を大きく越える場合は、分解しての調整・再組立てを想定している

対称性は失われている。高精度な加速器モデル作成には、磁気シールドやリターンヨーク等の磁性材料の配置を取り込んだ3次元静磁場計算の結果を用いている。

### 3.1 磁場の基底展開と形状因子

静磁場をビーム軸を中心軸とした円柱座標系でモデリングするとき、軸近傍に電荷・電流は存在しないので、磁気スカラーポテンシャルは軸上で滑らかな Poisson 方程式の解である。特に、軸方向の並進対称性が存在する場合、2次元 Poisson 方程式に還元され、極座標表示  $(r, \theta)$  の中心で滑らかな解  $\phi(r, \theta)$  は、次のように一般化されることがよく知られている。

$$\phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n r^n \sin(n\theta + \chi_n) \quad (6)$$

ここで、 $d_n$  及び  $\chi_n$  は  $2n$  重極モードの振幅と位相である。同様に、軸方向の分布が存在する場合には、式6に  $r$  依存性の修正が加わった以下の基底展開が成立する。

$$\phi(r, \theta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin(n\theta + \chi_n) \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m n! r^{2m}}{4^m m! (n+m)!} \frac{d^{2m} d_n(z)}{dz^{2m}} \right) \quad (7)$$

静磁場を磁気スカラーポテンシャルから  $\mathbf{B} = \nabla\phi$  で与えた場合、円柱座標系での成分表示は以下で与えられる。

$$B_r = \frac{\partial\phi}{\partial r}, \quad B_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta}, \quad B_z = \frac{\partial\phi}{\partial z} \quad (8)$$

磁場の  $2n$  重極成分は、磁場分布から  $\theta$  方向の Fourier により次のように抽出できる。

$$\hat{B} \cdot (n) \equiv \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B \cdot d\theta & n = 0 \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} B \cdot e^{-in\theta} d\theta & n \neq 0 \end{cases} \quad (9)$$

ここで、 $\cdot$  は  $r, \theta, z$  を代表している。複素化した形状因子  $d_n^\dagger(z) \equiv (\sin \chi_n + i \cos \chi_n) d_n(z)$  を導入すると式7より次の一般解が得られる。

$$\frac{\hat{B}_r(n)}{r^{n-1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m n! (n+2m) r^{2m}}{4^m m! (n+m)!} \frac{d^{2m} d_n^\dagger(z)}{dz^{2m}} \quad (10)$$

$$\frac{\hat{B}_\theta(n)}{r^{n-1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m n! n r^{2m}}{4^m m! (n+m)!} (-i) \frac{d^{2m} d_n^\dagger(z)}{dz^{2m}} \quad (11)$$

$$\frac{\hat{B}_z(n)}{r^{n-1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m n! r^{2m+1}}{4^m m! (n+m)!} \frac{d^{2m+1} d_n^\dagger(z)}{dz^{2m+1}} \quad (12)$$

形状因子  $d_n^\dagger(z)$  の実部と虚部は、磁場の skew モードと normal モードに対応している。さらに、 $z$  方向の Fourier 変換を適用すると、形状因子の  $z$  微分は波数  $k_z$  を用いて以下のように書き直せる。

$$\frac{\tilde{B}_r(n, k_z)}{r^{n-1}} = \tilde{d}_n(k_z) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n!(n+2m)}{(n+m)!} \frac{(k_z r)^{2m}}{4^m m!} \quad (13)$$

$$i \frac{\tilde{B}_\theta(n, k_z)}{r^{n-1}} = \tilde{d}_n(k_z) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n! n}{(n+m)!} \frac{(k_z r)^{2m}}{4^m m!} \quad (14)$$

$$-i \frac{\tilde{B}_z(n, k_z)}{k_z r^n} = \tilde{d}_n(k_z) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+m)!} \frac{(k_z r)^{2m}}{4^m m!} \quad (15)$$

ここで、 $\tilde{d}_n(k_z)$  は複素形状因子の Fourier 変換  $\int_{-\infty}^{\infty} d_n^\dagger(z) e^{-ik_z z} dz$  である。式13-15の左辺は円柱座標系での磁場分布の Fourier 変換であり、右辺の  $\sum_{m=0}^{\infty}$  項は  $k_z r$  のみの関数である。従って、Fourier 変換を通じて波数領域で微分演算子による畳み込みを解くことで、磁場分布から形状因子のスペクトル表示  $\tilde{d}_n(k_z)$  を得ることができる。

SuperKEKB 加速器の設計に使用する加速器コード SAD [4] の多重極磁場のモデリングパラメータは、デバイスが存在する区間  $(z_0, z_1)$  上の磁場の積分を用いて以下のように定義されている。

$$K_n \equiv \frac{1}{B\rho} \int_{z_0}^{z_1} \frac{\partial^n B_y}{\partial x^n} \Big|_{x=y=0} dz \quad (16)$$

$$SK_n \equiv \frac{1}{B\rho} \int_{z_0}^{z_1} \frac{\partial^n B_x}{\partial x^n} \Big|_{x=y=0} dz \quad (17)$$

ここで、 $K_n$  及び  $SK_n$  は  $2(n+1)$  重極磁場の normal モードと skew モードのモデリングパラメータで、 $B\rho$  はビームの magnetic rigidity である。したがって、複素形状因子  $d_n^\dagger(z)$  を用いて式16-17は以下のように書き直せる。

$$SK_n + iK_n = \frac{(n+1)!}{B\rho} \int_{z_0}^{z_1} d_{n+1}^\dagger(z) dz \quad (18)$$

同様に、デバイス区間  $(z_0, z_1)$  での進行方向磁場の平均値で定義される SAD のソレノイドモデリングパラメータ  $BZ$  は、複素形状因子  $d_0^\dagger(z)$  から次のように与えられる。

$$BZ \equiv \frac{1}{z_1 - z_0} \int_{z_0}^{z_1} B_z(z) dz = \left[ \frac{d_0^\dagger(z)}{z_1 - z_0} \right]_{z_0}^{z_1} \quad (19)$$

式13-15による複素形状因子の抽出では、真空中の Maxwell 方程式を満足する無限精度かつ連続な磁場分

布が手に入る場合は、 $n > 0$  では3式とも同一の複素形状因子  $\tilde{d}_n(k_z)$  を与える。ソレノイドモード ( $n = 0$ ) に関しては、対称性から式14は感度を持たない。一方、3次元磁場計算から得られる磁場分布の格子間隔が有限であることから  $z$  微分の少ない方が精度良く、ソレノイドモード ( $n = 0$ ) については式15が、一般の多重極モード ( $n > 0$ ) については式13と式14を用いることが望ましい。また、計算結果の有効数字が有限であるため、主モード以外の寄生モードの形状因子は桁落ち等で有効数字が少なくなる。このため、モデリングパラメータとして採用する際はモード展開次数の打ち切り等を検討する必要がある。また、有限要素法などによる3次元磁場計算では、計算結果が磁性体・コイル形状の対称性を厳密に満足しないことや、メッシュ構造の不均質な領域で磁場分布が Maxwell 方程式を満足しないことが有るので形状因子の抽出前に磁場分布の健全性を確認する必要がある<sup>9</sup>。

### 3.2 衝突点デバイスモデリングとその合成

衝突点デバイスモデリングでは、進行方向の分布を取り込むためモデリング軸方向にある程度の幅でデバイスを輪切り(スライス)にして、スライス毎にモデリングパラメータを割り付ける。SuperKEKB 加速器の衝突点では、 $\pm 4\text{m}$  の区間を  $10\text{mm}$  刻みでスライスしている。加速器モデリングコードでは、磁場のブロックをモデリングした際に境界で生じるフリッジ効果を取り込むために、線形フリッジをモデリングするパラメータを設けているものが多く、スライスモデリングにおいては線形フリッジの長さ<sup>10</sup>をスライス長に設定することで、進行方向の分布を折れ線近似する。モデリングパラメータの抽出に必要な3次元静磁場分布は、ソレノイド磁場に関しては衝突点でのビーム接ベクトルを軸とした円柱座標系、多重極コイルに関してはコイル軸を中心とした円柱座標系の格子点上の静磁場を3次元磁場計算コードからの出力として受け取る。3次元磁場分布からモデリングパラメータとして、ソレノイド磁場に関しては仮想的なビーム軸<sup>11</sup>上の  $BZ$  及び水平面内のソレノイド磁場の傾斜による射影成分  $SK_0$  及びソレノイド磁場のフリッジで生じる  $SK_n (n > 0)$  であり、多重極コイルに関してはコイル軸を中心とした多重極展開パラメータ  $K_n, SK_n$  が得られる。加速

器モデルへの実装に際して加速器コードが磁場の重ね合わせをサポートしない場合<sup>12</sup>、合成したモデリングパラメータを用意する必要がある。特に、SuperKEKB 加速器の最終収束系では四重極電磁石が軸外に置かれており、設計の際にはマッチング変数にする必要もあることから、四重極電磁石のスライスにオフセットを付けて軸外に設置し、領域が重なるソレノイド磁場等の多重極成分は thin レンズとして四重極電磁石のスライス前後に貼り付けてモデリングしている。

軌道及び光学関数の応答は磁場の重ね合わせに対して線形なので、thin レンズを組み合わせた近似はスライスが十分薄い領域では上手く行く。一方、エミッタンス評価に寄与する放射積分は磁場に対して非線形な項を含むために、重なり合った磁場を軸方向に分離して表現する近似では正確さを損なうことになる。SuperKEKB 加速器の衝突点では、上記のモデリング手法で thin レンズ化されたソレノイド磁場の射影成分  $SK_0$  が垂直エミッタンスの評価から漏れ過小評価となるため、thin レンズ上の  $K_0$  及び  $SK_0$  成分をオフセットした四重極電磁石スライスに移し替えている。この際、四重極電磁石が回転している際には、回転角に応じて  $(K_0, SK_0)$  ベクトルを回転する処理も必要である。放射積分の評価に関しては、二重極磁場成分  $(K_0, SK_0)$  のフリッジ同士の張り合わせに際して、同符号の張り合わせでは過小評価、異符号では過大評価が発生する。正しい評価を得るには、加速器コード側で処理内容に応じてフリッジパラメータの取扱いを変更するもしくは、ハードエッジモデルに thin レンズで光学関数へのフリッジ効果を追加する等の処置が必要となる。また、四重極磁場やさらに高次の多重極磁場による放射光の寄与が無視できない場合、放射積分の取扱いについて一般の  $K_n, SK_n$  に関して同様の問題が発生する。モデリングパラメータの合成時に一般の多重極成分の並進変換を取り扱うのは極めて煩雑なので、こうした場合には加速器コード側で磁場合成の直接的なサポートを行なうことが望ましい。

### 参考文献

- [1] “Letter of Intent for KEK Super B Factory”, SuperKEKB Task Force, KEK Report 2004-4, Jun 2004

<sup>9</sup>内部的に磁気スカラーポテンシャルを使っているコードの場合は、孤立電荷が生じる以外の問題は起こりにくい。

<sup>10</sup>SAD では  $F1$  パラメータが相当する

<sup>11</sup>衝突点軌道の接線

<sup>12</sup>SAD も含め、普通はそんな面倒な機能はサポートされない

- [2] Y. Ohnishi, “Accelerator design at SuperKEKB”,  
Prog. Theor. Exp. Phys. (2013) 03A011,  
10.1093/ptep/pts083, March 2013
- [3] “SuperKEKB Interaction Region Modeling”,  
A. Morita, Proc. of IPAC2011, San Sebastián, Spain,  
September 2011, THPZ006, p. 3690 (2011)
- [4] K. Oide, Nucl. Inst. Meth. **A276**, 427(1989),  
<http://acc-physics.kek.jp/SAD/>