RF システム（２）

小林 鉄也

高エネルギー加速器研究機構
加速器研究施設

2019 年 9 月 12 日

目次

1　はじめに

RF システム（高周波加速）に関する講義は、当然ながらすでに数多く行われ、偉大な先生方によって多くの立派なテキストが書かれている。それぞれのテキストではそれぞれの著者が詳細に式の導出から丁寧に説明している。詳しく勉強されたい方は、過去のテキストを参照して頂くことを強くお勧めする。私としては過去のレベルに匹敵するような内容は書けそうにないので（あるいは、ただの踏襲になるだけなので）、本テキストでは（厳密性を多少欠くかもしれないが）実際の運転で問題となるポイントや考え方を紹介することに重点を置く。これにより（自分にとっては安易な方法を選んだ言い訳であるが）初学者にとっては今後詳しく学ぶための足がかりとして参考になることを期待する。従って、ここでは式の導出などの詳しい説明は省き結果のみ紹介する形が多くなるので、どうしてそうなるの？と気になる方は、ぜひ下記に紹介する過去のテキストを参照して頂くようお願いしたい。

過去の OHO セミナーで、KEKB リングの RF システムに関しては、[1–7] などがあり、SuperKEKB になっても基本的な問題は変わらない。これら以外にも [8–10] など関連する素晴らしいテキストが多くある。

本講義では、RF 加速において SuperKEKB（大電流ビーム電子陽電子リング加速器）で問題となる主な課題につい取り扱う。RF システム（加速空洞）は加速器に必要不可欠な存在であるが、ビーム電流が大きいと、ビームとの相互作用により加速電圧が影響を受け、また加速システム自身がビームを不安定にしてしまう。そこで大きなビーム電流から加速空洞がどんな影響を受け、またどんな不安定を起こし、それに対して SuperKEKB ではどのように対処をするか、を紹介する。ただし、その前に、前提として必要となる RF システムの基本事項について説明を行なう。最後には、過去の OHO でもあまり扱われていない「バンチ・ギャップ・トランジェント」について紹介する。

この講義ではビーム加速における制御上の問題をテーマにするため、空洞本体のハードウェア製造に関する詳細は過去のテキスト等を参照するようお願いする。

ここで、用いる変数記号について注釈しておく。まず、虚数を表す記号は j を用いる。また、周波数を表す記号について、以下のようにお断りさせて頂く。ω で表す角周波数と f で表す周波数（$\omega = 2\pi f$）とがあるが、ω で表している場合でも、言葉の説明では単に「周波数」と記述する場合が多い。しかし ω の記号が使われてる場合は「角周波数（$2\pi f$）」のことであると判断して頂きたい。また逆も同様である。ただし、関係式によっては、どちらにとっても問題ない場合も多い。また、具体的な数値を扱う場合は通常の周波数 f（Hz）で示すことにご注意願いたい。

2　加速空洞システム概要

RF システムのメインとなるのは高周波加速空洞である。図 2.1 に加速空洞システムの概念図を示す。この図は 1 空洞（1 クライストロン）あたりの図を示している。本テキストもこの図に基づいて 1 空洞あたりについて説明する。SuperKEKB はリングに何台も加速空洞が並ぶが、ビームから見て全ての空洞位相が揃っていれば、基本的には 1 台の空洞について考えれば良い。ただし、SuperKEKB の HER（high energy ring：電子リング）では常伝導と超伝導の 2 種類の特性の異なる空洞が使われるため多少事情は異なる。一方、LER（low energy ring：陽電子リング）では常伝導空洞のみ使用され、全空洞ほぼ同じ条件で運転される。

また、図 2.1 や本講義の内容は、主に電子陽電子リング加速器（CW 運転）に関するものである（CW ＝連続波のこと。パルス運転と対になる）。従って線形加速器（パルス運転、進行波加速管、マルチセル空洞など）や陽子加速器等とは事情が異なる部分も多いことに注意願いたい。

加速空洞とは、図 2.1 のように、ビームパイプ中に挿入された円筒形の高周波共振器（＝ pillbox 型空洞という）である。クライストロンで増幅された大きな RF 電力を導波管により伝送し、入力結合器を介して共振器に投入することで高い加速電界（定在波）を得る。入力結合器は、共振器へと RF を投入させるとともに、大気と真空を仕切る、非常に重要な役割を担う。加速するビーム電流が大きいと投入する（通過する）RF 電力も大きく、大気と真空の境界となるセラミック窓などの（高電界、熱応力負荷に対する）耐久性設計が重要となる。そのため KEKB から SuperKEKB へアップグレードにおいても大きく増強改造されている [11]。

その他、図 2.1 では省かれているが、共振周波数を調整するチューナー機構、真空排気系、冷却システム（水冷配管系、および超伝導ではヘリウム冷凍機システム等）等が必要となる。真空を排気する真空ポート（孔）からは RF が逃げ出さない工夫が施される。

余談になるが「空洞（英語では cavity）」という言い方はビーム（内側）から見たイメージ（ビームダクト中に空いた空間）だと思われる。肉月の「空胴」が使われる場合もあるようだが、この場合はどちらかと言うと外側から見た形のイメージかと思われる。これは加速空洞（例えば J-PARC Linac の DTL 空洞）を「(DTL) タンク」と呼ぶ場合があることに相当するだろう、と個人的に勝手な解釈をしている。

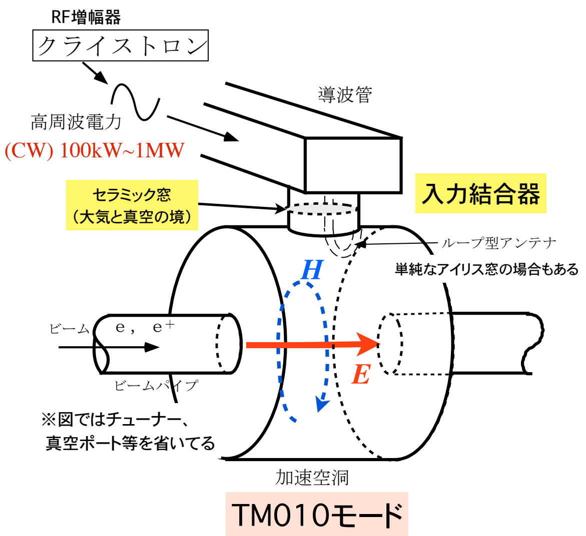

図 2.1　リング加速器における RF 加速空洞の概念図

3 RF 共振器の加速モード

この章では、円筒形共振モードと関連事項について説明しておく。ただし前置き的な内容なので、この章はスキップして第 4 章に進んでも良いかもしれない。

3.1 加速モード（TM010 mode）

ビーム加速に利用する共振モード（加速モード）は、当然、軸対称でビーム軸方向に一様な電界を持つものが良い。この加速モードは円筒形共振器の基底モードであり TM010 と呼ばれる（詳細は後述参照）。図 3.1 に TM010 の電磁場分布を示す（左が電場、右が磁場）。ただし電場、磁場それぞれが最大強度になるタイミングは 1/4 周期ずれていることに注意。図のようにビーム軸上の電界がもっとも強く、その周りに磁場が巻かれた（軸上に磁場がない）フィールド分布となり、ビーム加速に好都合である。

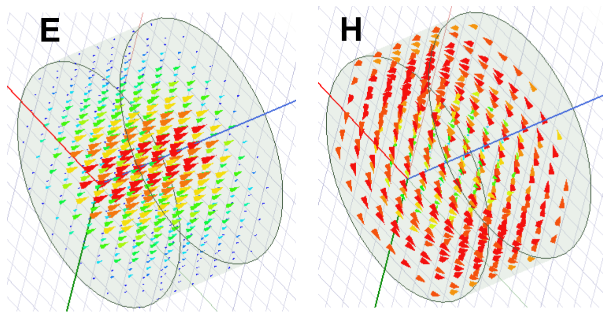

図 3.1　TM010 モードの電磁場分布。左が電場、右が磁場を示す。それぞれ最大強度になる位相は $\pi/2$ ずれていることに注意。

pillbox 型共振モードについて、より数式的な取扱をしてみる。図 3.2 に示すよう、電場・磁場 $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H})$ のヘルムホルツ方程式（波動方程式から伝導率 $\sigma = 0$, $\{E, H\} \propto e^{j\omega t}$ としたもの）を円筒座標系 (r, θ, z) で解いた固有モード解ということになる。その際、導体表面において電場は垂直成分のみ、磁場は接線成分のみとなる境界条件を課す。ここで $\omega (= 2\pi f)$ は RF 角周波数にあたる。

固有モードを得る際に、磁場の z 軸方向成分がない場合（$H_z = 0$）、電場の z 軸方向成分がない場合（$E_z = 0$）とで分けられ、それぞれ TM モード、TE モードと呼ぶ（"T"は Transverse）。各軸方向 (θ, r, z) それぞれの次数 m, n, l を用いて TM_{mnl} モード、TE_{mnl} モードと書かれる。次数 m, n, l は電磁場分布の節や折り返し点の数に関係する。例えば θ 方向について $m = 0$ は monopole（軸対称）モード、$m = 1$ は dipole モードである。

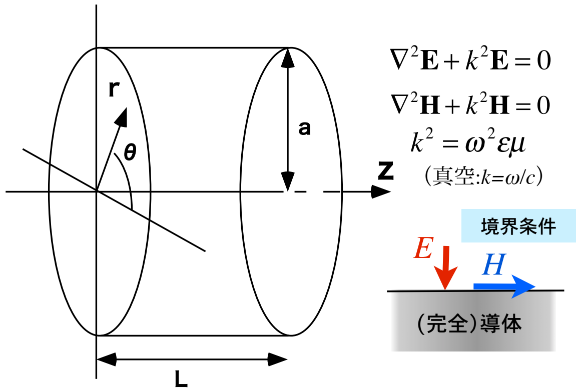

図 3.2　円筒座標系と共振モード

もう少し具体的に、例えば TM_{mnl} モード（円筒半径 a, 長さ L）の E_z 成分のみを書くと次のようになる。

$$E_z^{mnl}(r, \theta, z) = E_{z0}^{mnl} J_m(k_c^{mn} r) \cos(m\theta) \cos(k_z^l z) \tag{3.1a}$$

$$k_z = \frac{l}{L}\pi \tag{3.1b}$$

ここで、J_m は m 次のベッセル関数、k_c^{mn} は $J_m(ka) = 0$ の n 番目の解に対応する k の値である。例えば $m = 0$ についてベッセル関数と $k_c a (n = 1, 2)$ の関係を図 3.3 に示す。

ここで、共振周波数 ω_0 は次式の関係から得ることができる（c は光速度）。

$$\frac{\omega_0}{c} = k_c^2 + k_z^2 \tag{3.2}$$

これより TM010 モードは、$k_z = 0$ で、半径サイズ

だけ（図 3.3 より $k_c a = 2.405$）で共振周波数が決まる（z 軸に一様なので当然）。

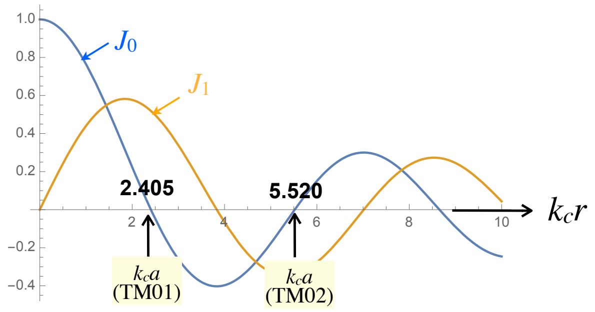

図 3.3　ベッセル関数（$m = 0$）と $k_c a(n = 1, 2)$ の関係（TM モード）

ここまでは、理想的な円筒形での話であるが、実際の空洞は単純な pillbox ではない。図 2.1 から分かるように、ビームが通過する構造があり、入力ポートやチューナー、真空ポートなどもついている。

例として実際の PF で使われてる空洞の例を図 3.4 に示す。ビームパイプがあるため（理想的な TM010 モードとは異なり）ビーム軸に一様な電場にはならず、図に示すような電場分布になる。また、放電や壁面損失などを低減するために適当に角を丸めたりする。加えて、常伝導空洞ではビームパイプとの結合部には nose cone と呼ばれる突起構造を作り、高い加速電圧を得られるような工夫をする場合がある（図 3.4 参照）。これらは摂動的な効果として取り扱い、基本は円筒形共振モードであることに変わりはない。ただ当然、実際の設計では、シミュレーションや測定で正確な特性を求めることが必要になる（共振周波数はチューナーで調整する）。

ちなみに、ビームパイプのカットオフ周波数より RF 周波数は低い（カットオフより低い周波数の電磁場は伝搬できない）ため、RF 電力（加速モード）はビームパイプへと逃げ出せない（空洞内に閉じ込められる）原理になっている。逆に不要な高次モード（Higher Order Modes = HOM）は積極的に外に逃がし吸収させる工夫を行なう（参考文献 [3] 等を参照）。

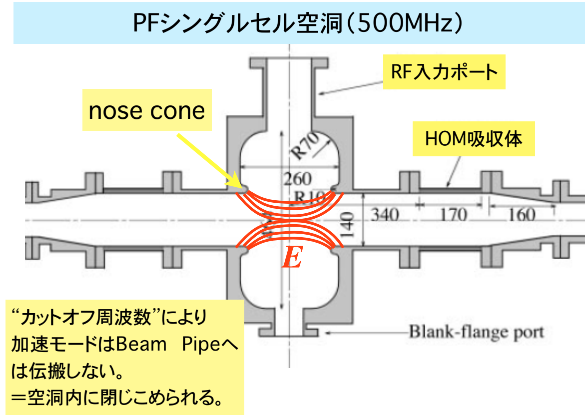

図 3.4　実際の空洞形状の例（PF 用シングルセル加速空洞）

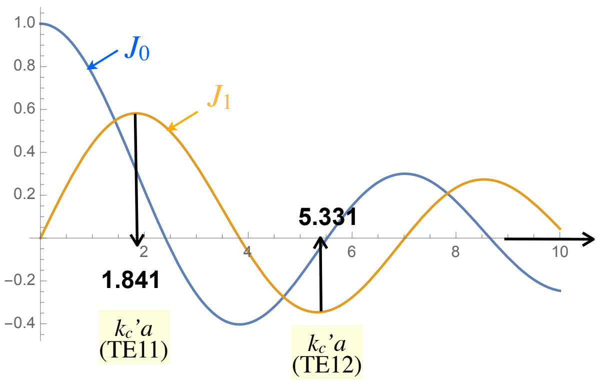

図 3.5　ベッセル関数（$m = 1$）と $k_c'a(n = 1, 2)$ の関係（TE モード）

さて、ここまで TM モードについて示したが、ついでに TE モードの例についても同様に示しておく。

式 (3.1a)(3.2) 同様に、TE_{mnl} モードの H_z 成分と共振周波数は

$$H_z(r, \theta, z) = H_{z0}^{mnl} J_m(k_c'^{mn} r) \cos(m\theta) \cos(k_z^l z) \tag{3.3a}$$

$$\frac{\omega_0}{c} = k_c'^2 + k_z^2 \tag{3.3b}$$

と書ける。ここで、$k_c'^{mn}$ は $J_m'(ka) = 0$ の n 番目の解に対応する k の値である。ただし $J_m'(x) = dJ_m(x)/dx$ である。図 3.5 に $m = 1$ についてベッセル関数と $k_c'a(n = 1, 2)$ の関係（TE モード）を示

す。

円筒形の TE モードで一番低いモード（TM010 の次）は TE111（dipolemode）である。図 3.6 に TE111 の電磁場分布を示す。図 3.1 同様、それぞれの最大強度になる位相は $\pi/2$ ずれることに注意。

TE111 の共振周波数は、図 3.5 より $k'_{\mathrm{c}}a = 1.841$、また $k_{\mathrm{z}} = \pi/L$ であり、式 (3.3a) から計算できる（他のモードについても同様に共振周波数は簡単に求められる）。

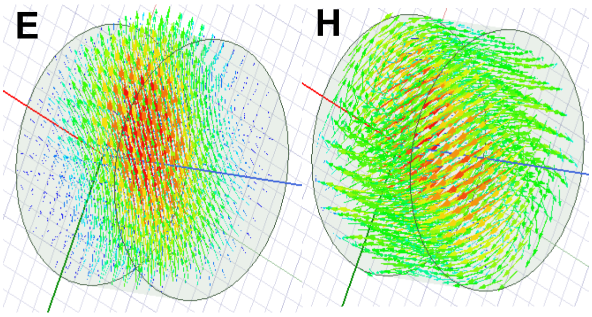

図 3.6　TE111 モードの電磁場分布。左が電場、右が磁場を示す。それぞれ最大強度になる位相は $\pi/2$ ずれていることに注意。

その他の高次モードについては参考文献 [3] 等に詳しく説明されている。また、普通にマイクロ波工学に関する教科書を参照して頂くのが良い（参考文献例 [12–16]。

3.2 Transit Time Factor

前置きの続きとして、空洞の加速電圧の定義について補足する。加速電圧は、ビーム軸に沿って空洞内（TM010 モード）の電界 $E_{\mathrm{z}}(z)$ を積分したものである。しかし高周波であるが故に、ビームが通過する間に電界の強さが時間的に（$j\omega_{\mathrm{rf}}t$ で）変化していることを考慮に入れる必要がある。

電界が最大点になる瞬間の電圧 V_0 は

$$V_0 = \int_{-g/2}^{g/2} E_{\mathrm{z0}}(z)dz \qquad (3.4)$$

である（$Ez0$ はピーク時の電界）。ここで空洞の長さを g としている。

次に、実効的な加速電圧 V_{c} として、ビームが通過する間の変化を考慮すると、ビーム速度が光速度の場合、

$$V_{\mathrm{c}} = \int_{-g/2}^{g/2} E_{\mathrm{z0}}(z)e^{jkz}dz = T_{\mathrm{t}} \cdot V_0 \qquad (3.5)$$
$$k = \omega_{\mathrm{rf}}/c$$

のように定義される。通常、上式の e^{jkz} は $\cos(kz)$ で計算する。

このように、高周波変化により実効的に電圧が下がる割合、すなわち式 (3.4) と (3.5) の比（$= T_{\mathrm{t}}$）を「通過時間因子（transit time factor）」と呼ぶ。

例えば、空洞長 g を RF の半波長（$g = \lambda_{\mathrm{rf}}/2 = \pi c/\omega_{\mathrm{rf}}$）とすると、理想的な TM010 の場合、通過時間因子は、

$$T_{\mathrm{t}} = \frac{E_0 \int_{-g/2}^{g/2} \cos(kz)dz}{gE_0} = \frac{\sin(kg/2)}{kg/2} \sim 0.64 \qquad (3.6)$$

となる。

以上のように、通常、加速電圧は通過時間因子を含んだ実効的な値（式 (3.5)）で空洞特性を表す。

3.3 Skin Depth と壁面損失

後述する通り、運転上、空洞内で消費される電力（P_{c}）を知る（測る）ことが重要となる。ここでは、その空洞内損失とは何かについて、簡単に前置きしておく。

空洞材質は完全導体ではない（有限の導電率 σ を持つ）ので電磁波が導体表面に僅かに入り込む（図 3.7 参照）。その結果流れる電流によりジュール損失が生まれる。ただし、電磁波は導体内部へは伝搬せ

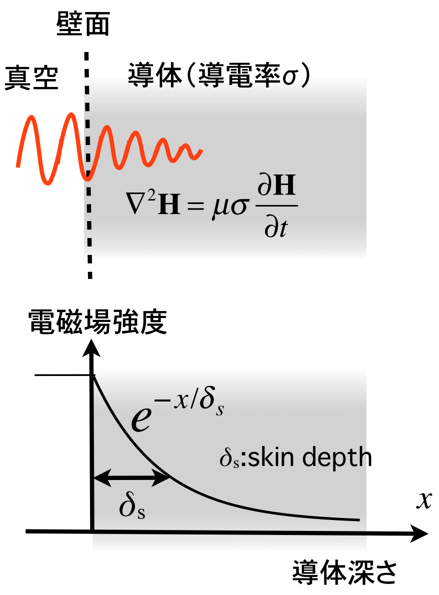

図 3.7　導体表面に入り込む電磁波と skin depth

ず、図 3.7 のように exp で減衰する。

図 3.7 で電磁波が導体表面に浸入する深さ（減衰率）δ_s を「skin depth」と呼び、波動方程式から、

$$\delta_\mathrm{s} = \sqrt{\frac{2}{\omega_\mathrm{rf}\sigma\mu}} \tag{3.7}$$

となる。ここで μ は透磁率である。たとえば銅（$\sigma \sim 6\times 10^7[\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}]$）の場合、RF 周波数を 500MHz とすると、$\delta_\mathrm{s} \sim 3[\mu\mathrm{m}]$ である。

壁面を流れる電流は境界面での磁場強度に比例するので、壁面の電力損失 P_wall（$= P_\mathrm{c}$）は、次式のように壁面全体 S で磁場強度を積分して得られる。

$$P_\mathrm{wall} = P_\mathrm{c} = R_\mathrm{s}\int_\mathrm{s} |\boldsymbol{H}|^2\, dS \tag{3.8}$$

ここで R_s は表面抵抗で、skin depth と

$$R_\mathrm{s} = \frac{1}{\delta_\mathrm{s}\sigma} = \sqrt{\frac{\omega_\mathrm{rf}\mu}{2\sigma}} \tag{3.9}$$

の関係にある。

式 (3.8) より、空洞内の損失は磁場分布と電磁場強度に依存する。従って当然、共振モードが異なれば壁面損失も異なる。すなわち、モード（電磁場分布）が決まり電磁場強度（$V_\mathrm{c} \propto E \propto H$） が決まれば、空洞内損失は決まるということである。逆に言うと、壁面損失の量で加速電圧が決まる（$V_\mathrm{c}^2 \propto P_\mathrm{c}$)。

超伝導空洞の場合、上記の skin depth とは若干事情は異なるが、表面上の僅かな抵抗によるジュール損失であることは同じで、これ以降の議論は基本的に常伝導空洞の場合と共通である（ただし桁違いに損失が小さいので運転状況は大きく変わる）[4]。

改めて繰り返すが、結局のところ、「壁面損失が決まれば加速電圧が決まる（$V_\mathrm{c}^2 \propto P_\mathrm{c}$)」ということが、この話の最も重要なポイントであり、ビーム加速してる場合でもこの関係は変わらない。

4　加速電圧と空洞特性パラメータ

ビーム運転では加速に必要な加速電界を、適切な位相で加速空洞に励起することが必要である。ではどうやって加速電圧を知り、どのように調整（制御）するのが良いのか、という話がこの章のテーマである。

空洞内の加速電圧は MV のオーダーになるが、この高い電界強度を直接測れるようなプローブがあるわけではない。大電力 RF のパワー（の一部を取り出した信号）を測り加速電圧を求める。そのために予め知っておくべき（空洞特性を評価する）何種類かのパラメータがある。それらのパラメータと測定される値との関係をまず説明する。

4.1　加速電圧／RF パワー／蓄積エネルギー

まず、ビームがない場合を考える。その場合の RF パワーの関係を図 4.1 に示す。

クライストロンで増幅された大電力 RF パワー P_k が、導波管を経て空洞へ投入され、加速電圧 V_c（加速モード）を励起する様子を表している。話を単純にするため導波管のロスは考えないものとする。P_k の一部 P_c が空洞内で消費され、残りのパワー（P_r）は反射波として戻る（ダミーロードで消費される）。反射するパワーの量は入力結合度 β に依存する（後述）。ここで空洞（加速モード）の共振周波数 ω_0 は RF 周波数と合っているとする（$\omega_0 = \omega_\mathrm{rf}$）。

第 3.3 節で説明したように壁面損失は、モードの電磁場分布および強度で決まるため、空洞内の消費電力 P_c と加速電圧 V_c は一定の関係にある。そこで、

$$R_\mathrm{sh} = \frac{|V_\mathrm{c}|^2}{P_\mathrm{c}} \tag{4.1}$$

と定義した時の R_sh をシャント・インピーダンスという。この R_sh を予め求めておくことで、空洞内消費電力を測定できれば V_c が分かる。

また、R_sh はビームが通過した際に励起される電圧を決める（ビームとの結合インピーダンスを表す）。

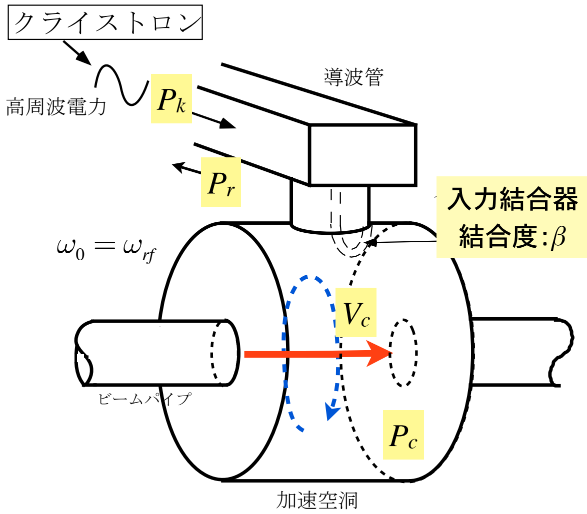

図 4.1　RF パワーと加速電圧（加速モード）の励起（ビームがない場合）

この式（4.1) は、単純な関係であるが、最も重要な空洞パラメータの一つで、ビーム加速していても（ビーム励起があっても）この関係は変わらない。つまり（ビームによる励起も含め）加速電圧 V_c を一定に保つことは、空洞内消費 P_c を一定に保つことを意味する。

では、どのように R_sh を得るか？であるが、基本的には測定して求める（シミュレーションでも求められる）。その測定方法については、ここでは詳細は省くが、J.C. Slater の摂動理論 [17] を用いビーム軸に沿って電場強度を測定する方法で「ビード測定法」と呼ばれる [18, 19]。

ビード測定法についてもう少し具体的に説明すると、図 4.2 のように微小導体球（＝ビード）を空洞内に置く（摂動を与える）ことで、電磁場分布が（導体表面に対し E は垂直、H は平行に）変化し共振周波数が変化する。その周波数の変化量 $\Delta\omega$ はビードが置かれた電磁場強度に依存し、

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -\pi r_0^3 \left(|E|^2 - \frac{|H|^2}{2} \right) \tag{4.2}$$

と求められる（摂動が半径 r_0 の球体の場合）。ただ

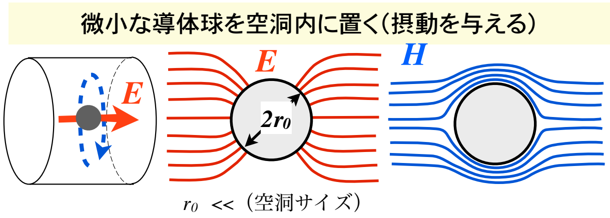

図 4.2　微小導体球（摂動）によるフィールド（共振周波数）の変化（ただし TM010 モードはビーム軸上で $H=0$）

し、ここで E, H は空洞体積全体 V で規格化された量である（$\int_V |\boldsymbol{E}|^2 d\boldsymbol{v} = \int_V |\boldsymbol{H}|^2 d\boldsymbol{v} = 1$）。

この共振周波数の変化を測定すれば式 (4.2) から電磁場強度を得られる。従って微小導体球（ビード）をビーム軸に沿って移動させて測定することで、軸上の電波分布を得ることができる（式 (4.2) で、TM010 のビーム軸上は $H=0$ とする）。得られた電場強度をビーム軸に沿って積分すれば空洞インピーダンスが得られる。

上記のように測定して得られたインピーダンスは、R_{sh} の値そのものではなく、式 (4.2) の定義からも分かるように、空洞全体の蓄積エネルギーで規格化された値になり

$$\frac{R_{\mathrm{sh}}}{Q_0} = \frac{\int e^{jkz} E_z(z) dz}{\omega_0 U} = \frac{|V_c|^2}{\omega_0 U} \tag{4.3}$$

となる（通過時間因子も含めて計算していることに注意）。ここで U は、空洞内の蓄積エネルギー（電磁場エネルギーの体積積分）

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V |\boldsymbol{E}|^2 d\boldsymbol{v} = \frac{\mu_0}{2}\int_V |\boldsymbol{H}|^2 d\boldsymbol{v} \tag{4.4}$$

である（電気エネルギーと磁気エネルギーの時間平均は等しく、1/4 周期に入れ替わる）。

式 (4.3) の $\frac{R_{\mathrm{sh}}}{Q_0}$ は、通常”R/Q”と書かれ、一つの空洞パラメータのように扱われる。そして、そのまま”R/Q”（アール・オーバー・キュー）と呼ばれる（[Ω] の次元を持つ）。

”R/Q”$=R_{\mathrm{sh}}/Q_0$ は空洞損失（常伝導、超伝導）に関係なく、形状デザインだけで決まる値で、空洞特性を表す最も基本的なパラメータと言える。

式 (4.1) と (4.3) から、次式で表される Q_0 を測定することで、ようやく R_{sh} が得られる。

$$Q_0 = \frac{\omega_0 U}{P_c} \tag{4.5}$$

この値は Q 値（あるはキュー・ゼロ）と呼ばれ、空洞特性を表す（損失に関係する）重要なパラメータのひとつ（無次元量）である。Q 値は RF 測定器（ネットワークアナライザ）で容易に測定できる（後述参照）。

ここで少し、具体的な数値で見てみる。通常 R_{sh}/Q_0 は 100〜200Ω、Q 値は常伝導空洞の場合 10^4 のオーダーなので、1MV の加速電圧を得るには、式 (4.1) より、500kW 程度の消費電力が必要になる。一方、超伝導空洞の場合、Q 値は 10^9 のオーダーになると、10W 程度の消費電力で済む。ただし、これは空洞内消費（P_c）だけの値なので、実際は（ビーム負荷も含め）より大きな投入パワーが必要となる（冷凍機の電力は考慮していない）。

Q 値について、もう少し補足しおく。式 (4.5) において、入力パワー（強制振動）がなく自由振動で減衰する場合を考える。その場合は消費電力 P_c は蓄積エネルギーの減少率に相当するので、

$$P_c = -\frac{dU}{dt} = \frac{\omega_0 U}{Q_0} \tag{4.6}$$

従って

$$\begin{gathered} U(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau_0}} \propto |V(t)|^2 \\ \tau_0 = Q_0/\omega_0 \end{gathered} \tag{4.7}$$

となり、Q 値は減衰時（あるいは立ち上がり）の時定

数 τ_0 に対応する値である（電圧 V は U の 1/2 乗に比例するので時定数は 2 倍)。

もう少し厳密に、共振器の微分方程式によると

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q_0}\frac{dV}{dt} + \omega_0^2 V = 0 \tag{4.8}$$

の解は

$$V(t) = \{A_0 \cos \omega t + B_0 \sin \omega t\} e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q_0}} \tag{4.9a}$$

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - 1/4Q_0^2} \tag{4.9b}$$

のように得られ、減衰時の周波数 ω は共振周波数 ω_0 よりずれる。

以上を簡単にまとめると、加速空洞の特性を表すパラメータ（シャント・インピーダンス、Q 値）は、加速電圧 V_c と消費電力 P_c と蓄積エネルギー U の関係を $(|V_c|^2 \propto P_c \propto U)$ を結びつける係数と言える。

4.2 入力結合度と反射パワー

これまでの話は、入力結合器（入力、反射電力など）を考慮していない。しかし実際は、図 4.1 のように入力結合器を考慮したパワー収支（空洞パラメータ）を考える必要がある。

まず最初は、再び前節のように入力パワーがなく $(P_k = 0)$ 自由振動で減衰する場合を考える。この時、図 4.3 に示すように、空洞内で消費する電力 P_c だけでなく、入力結合器から出て行くパワー P_{ext}（図 4.1 では P_r に相当）もあり、その分速く減衰する。従って式 (4.6) は

$$P_c + P_{ext} = -\frac{dU}{dt} = \frac{\omega_0 U}{Q_L} \tag{4.10}$$

となり、この時の減衰率 $\tau_e = Q_L/\omega_0$ に対応する Q 値 (Q_L) を負荷 Q 値（loaded Q-value）と呼ぶ。これに対して Q_0 のことを無負荷 Q 値（unloaded Q-value）という。

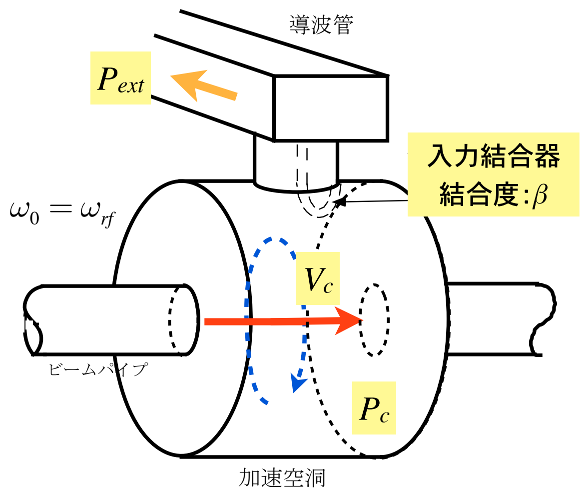

図 4.3　入力パワーがない場合の空洞内消費パワーと外部へ出て行くパワー

入力結合器は必ず付いているため、計測器で直接測定できる値はこの Q_L である。後述するように測定された Q_L から Q_0 を求める。減衰率についても入力結合器がある状態の値（Q_L に対応する値）である。また、ステップ関数的に入力があると、exp で立ち上がり、この時の時定数も減衰率と同じである。そのため、この時定数（Q_L/ω_0）は filling time とも呼ばれる。ただし、電圧は蓄積エネルギーの 1/2 乗に比例するので、電圧で示すと filling time はこの 2 倍、$2Q_L/\omega_0$ になる。どちらで示すかは状況によるが、空洞の時定数（減衰率、filling time）は電圧の時定数（$2Q_L/\omega_0$）で示すのが一般的である。

次に、ここで P_{ext} に対応する Q 値（Q_{ext}）

$$Q_{ext} = \frac{\omega_0 U}{P_{ext}} \tag{4.11}$$

を定義すると、式 (4.10)(4.5) から、

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{ext}} \tag{4.12}$$

となる関係式が書ける。この Q_{ext} を外部 Q 値（external Q-value）と呼ぶ。これに対応して Q_0 は内部 Q 値とも呼ばれる。

この外部 Q 値 Q_{ext} を使って、入力結合器の結合度 β が次のように定義される。

$$\beta = \frac{Q_0}{Q_{\mathrm{ext}}} = \frac{P_{\mathrm{ext}}}{P_{\mathrm{c}}} \tag{4.13}$$

この入力結合度も、後述するように、ビーム加速を考える上では非常に重要なパラメータである。ここで、Q_0 は式 (4.12) および式 (4.13) から、

$$Q_0 = (1+\beta)Q_{\mathrm{L}} \tag{4.14}$$

と表せる。

ここでまた、図 4.1 に戻り、入力パワー P_{k} が空洞に投入されてる場合を考える。この時、上で定義した入力結合度 β と空洞の反射率 Γ_{c} には次式の関係がある。

$$\Gamma_{\mathrm{c}} = \frac{\beta - 1}{\beta + 1} \tag{4.15}$$

この式から分かるように、$\beta = 1$ の時は反射は 0 で、入力パワー P_{k} がすべて空洞内で消費されることになる。反射率 Γ は RF 計測器で容易に測定できるので β は容易に分かり、容易に調整できる（ような構造が入力結合器には必要、ただし超伝導空洞は事情が異なる）。

$\beta = 1$ は式 (4.13) から、自由振動による減衰時（$P_{\mathrm{k}} = 0$）に空洞内損失と外部に出ていく電力が等しくなる結合度（$P_{\mathrm{ext}} = P_{\mathrm{c}}$）である。この場合に、入力されるパワーはすべて空洞内で消費できることになる。そうでない場合は反射して無駄なパワーが生まれる。ただし、ビーム加速運転では $\beta = 1$ でなく、1 より大きな値に設定する（後述参照）。

ちなみに、$\beta > 1$ の場合を「オーバーカップリング」、$\beta < 1$ の場合を「アンダーカップリング」という。

以上より、運転（V_{c} を知るために）に必要なパラメータを整理すると、まず反射率 Γ を測定し式 (4.15) から β を求める。また、スペクトル幅の測定（後述）から Q_{L} が分かり、Q_0 が求められる。こうして、別途ビード測定（式 (4.3)）により測定されている R_{sh}/Q_0 から R_{sh} が求まり、ようやく式 (4.1) により V_{c} が求まる。

例えば、反射率の関係から

$$P_{\mathrm{r}} = \left(\frac{\beta - 1}{\beta + 1}\right)^2 P_{\mathrm{k}} \tag{4.16a}$$

$$P_{\mathrm{c}} = P_{\mathrm{k}} - P_{\mathrm{r}} = \frac{4\beta}{(\beta+1)^2} P_{\mathrm{k}} \tag{4.16b}$$

なので、投入パワー P_{k} と V_{c} の関係は式 (4.1) から

$$V_{\mathrm{c}} = \frac{2\sqrt{\beta R_{\mathrm{sh}} P_{\mathrm{k}}}}{\beta + 1} \tag{4.17}$$

となる。

5　等価回路による加速空洞の特性

この章では、後にビーム加速による負荷を考える準備として、共振器のインピーダンス特性（位相／振幅の周波数依存性）について等価回路モデルを用いて説明する。

空洞の周波数特性（入力インピーダンス）は Maxwell 方程式等の電磁場解析から導き出されるが（過去の OHO テキスト参照）、実用上ほとんどの場合、等価回路による特徴を知っておくことが有用になる。

良く知られるように、共振器回路は、抵抗、キャパシタ、インダクタ（それぞれの定数を R, C, L）の並列回路で表せる。ただし、実際のシステムでは、図 4.1 のようにクライストロンからの電力は導波管伝送路を経由し入力結合器を介して接続される。空洞からの反射パワーはクライストロンには影響しないようになっている（サーキュレータによりダミーロードに吸収される）。このような場合、最終的に空洞の等価回路は図 5.1 のように表すことができる。ここで共振周波数は $\omega_0 = 1/\sqrt{CL}$ である。詳細は参考文献 [1,20,21] 等を参照して頂きたいが、このテキストではこの結果を利用して以下の話を進める。

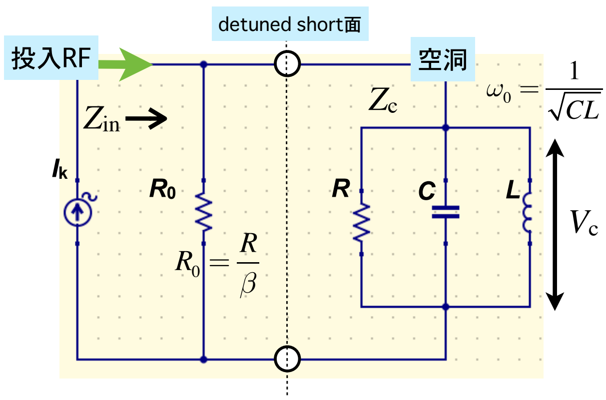

図 5.1　空洞共振器の等価回路

図 5.1 中の detuned short 面とは、共振器の基準面を定義するものである。これは共振周波数から完全にずれ全反射している場合、導波管内は定在波となり、その節（電場の short、磁場は open）となるヶ所を基準にすることを意味する。単に共振器の基準面の（等価回路上の）定義なので、運転上は実際のシステムでどこが detuned short 面か？と考える必要は通常ない。

このテキストでは省くが、別途、導波管伝送路（分布定数回路、立体回路）の理論についてもマイクロ波工学の教科書等（OHO テキストでは、文献 [22] など）で勉強して頂くことをお勧めする。

5.1　共振回路の入力インピーダンス

図 5.1 において、$I_{\rm k}$ は RF ソース（空洞への入力）を表し、それにより空洞電圧 $V_{\rm c}$ が励起されるとする。この場合、等価回路で入力側から見た空洞インピーダンス $Z_{\rm in}(\omega) = V_{\rm c}(\omega)/I_{\rm k}(\omega)$ は、普通に $R_0, R, 1/j\omega C, j\omega L$ の並列回路のインピーダンスを求めれば良い。

ここで、空洞パラメータと回路定数とには

$$R_{\rm sh} = 2R \tag{5.1a}$$

$$Q_0 = \omega_0 RC = R\sqrt{C/L} \tag{5.1b}$$

$$\beta = R/R_0 \tag{5.1c}$$

の関係があり、これらを用いると $Z_{\rm in}(\omega)$ は

$$\begin{aligned} Z_{\rm in}(\omega) &= \frac{R_{\rm sh}/2Q_0}{\dfrac{1}{Q_{\rm L}} + j\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)} \\ &= \frac{R_{\rm sh}/2(\beta+1)}{1 + jQ_{\rm L}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)} \end{aligned} \tag{5.2}$$

と表すことができる。また、detuned short 面から右側を見た共振器のインピーダンス $Z_{\rm c}(\omega)$ は、

$$Z_{\rm c}(\omega) = \frac{R_{\rm sh}/2}{1 + jQ_0\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)} \tag{5.3}$$

となる。

ここで、式 (5.1a)(5.1b)(5.1c) の関係について簡単に補足しておく。その場合、共鳴状態 $\omega = \omega_0$ を考える。

まず、共振器内で消費される電力 $V_c^2/2R$ と、式 (4.1) に示す R_{sh} の定義（空洞消費電力）から、式 (5.1a) の関係が分かる。

次に静電エネルギー $CV_c^2/2$ と、式 (4.5) に示す Q_0 の定義（蓄積エネルギーと消費電力の関係）から、式 (5.1b) の関係になる（微分方程式の関係から導いても良い）。

式 (5.1c) については、入力結合度 β が式 (4.13) より、入力がない時に P_{ext} と P_c の比（R_0 と R で消費される電力の比）であることから、この関係が分かる。また、後で説明するように反射係数との関係になる。

ではここで、式 (5.2) に従って、空洞インピーダンスの周波数特性の特徴を簡単に説明しておく。以下に述べる特徴は、後述するビーム負荷を理解する際に有用になる。

図 5.2 は、励起周波数 ω を横軸にして Z_{in} をプロットしたものである。図の上側が振幅 $|Z_{in}|$ のプロットで、下側のプロットが位相 $\psi = \arg(Z_{in}) = \arctan(\Im Z_{in}/\Re Z_{in})$ であり、tuning 位相（tuning 角）とも呼ばれる。

インピーダンスの大きさは、図 5.2 の上のように共振点（$\omega = \omega_0$）でピークを示す釣り鐘型の形になる。そして、ピークの $1/\sqrt{2}$（パワーで半分）となる周波数の幅（共振周波数から差）$\Delta\omega$ は Q 値に比例し、

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{2Q_L} \tag{5.4}$$

の関係がある。ただし、ここで Q 値は十分に高い（共振周波数に比べてピーク幅が十分に狭い）という条件（$\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$）のもと、

$$\frac{\omega + \Delta\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega + \Delta\omega} \sim \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} \tag{5.5}$$

と近似している。

次に位相 ψ（図 5.2 下）についてである。図のように共振点で 0 になる（純抵抗に見える）が、共振点からずれると、励起電圧の位相は入力位相に対し ψ ずれる。また、ψ について、式 (5.2) から

$$\begin{aligned} \tan\psi &= \tan(\Im Z_{in}/\Re Z_{in}) \\ &= -Q_L\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \end{aligned} \tag{5.6}$$

であることが分かる。従って、全周波数範囲で $\pi/2$

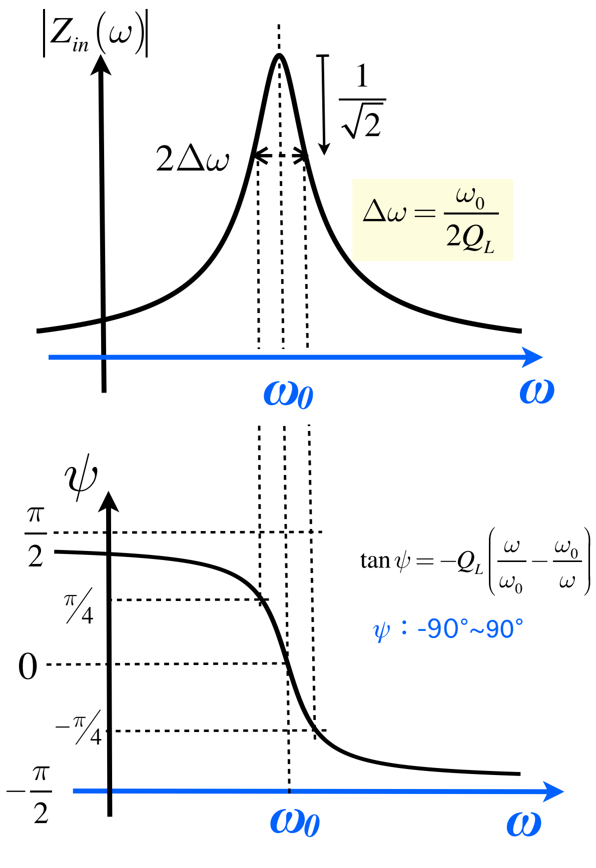

図 5.2　共振回路インピーダンスの周波数特性（振幅／位相）

から $-\pi/2$ の範囲で変化する。式 (5.6)(5.5) から、共振点（$\omega = \omega_0, \psi = 0$）の周りでは位相変化がほぼ直線で、その傾きは Q 値に比例すると言える。更に、図 5.2 下のように $\omega = \omega_0 \pm \Delta\omega$ において位相（tuning 角）は $\psi = \pm\pi/4$ となる。

ここで、式 (5.6) を用いて式 (5.2) を変形すると Z_{in} は、

$$Z_{\mathrm{in}}(\omega) = \frac{R_{\mathrm{sh}} \cos\psi}{2(\beta+1)} \cdot e^{j\psi} \tag{5.7a}$$

$$= \frac{R_{\mathrm{sh}}}{4(\beta+1)} \cdot (1 + e^{j\phi}) \tag{5.7b}$$

となる。ただし、ここで $\phi = 2\psi$ である。

上式より、ω を変化させた時の $Z_{\mathrm{in}}(\omega)$ の軌跡を複素平面にプロットすると、図 5.3 になる。これは図 5.2 の 2 つのプロットを、ω で parametric plot したものに相当する。このように周波数を 0 から ∞ まで変化した時に、Z_{in} は時計回りに、原点で Im 軸に接する円を描く。

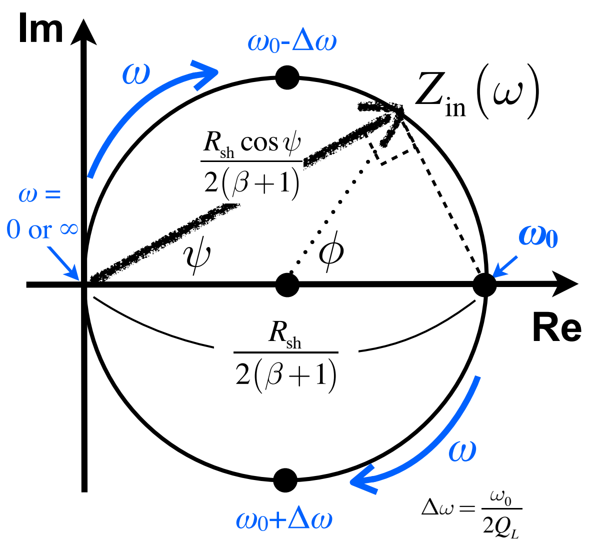

図 5.3　共振回路インピーダンスの複素平面での軌跡

図 5.3 あるいは式 (5.7a) から分かるように、共振点からずれると、tuning 位相 ψ に応じてインピーダンスの大きさ（すなわち励起電圧）は共振点のピークより $\cos\psi$ で小さくなることが分かる。そして、$\omega \to 0$（$\psi \to \pi/2$）あるいは $\omega \to \infty$（$\psi \to -\pi/2$）で 0 となる。

以上のように、共振点すなわち励起される電圧 V_{c} の位相が入力信号 I_{k} の位相と一致する（$\psi = 0$、すなわち純抵抗に見える）場合に最も効率良く電力が伝わる。また、共振点からずれた場合、V_{c} の位相は入力位相から ψ だけずれて（tuning 角を持ち）、その電圧はピークより $\cos\psi$ で小さくなる。これらの点は当たり前の話とも言えるが、後でビーム負荷を考える場合に重要なポイントになる。

5.2　共振回路の反射特性

ここで、共振回路の反射特性（周波数依存性）について説明する。この講義のテーマにおいては、実用上あまり必要になることはないが、反射特性に関する記述は他にあまり見ないので、蛇足ながら紹介しておく。

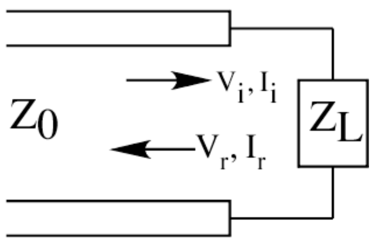

図 5.4　特性インピーダンス Z_0 の伝送線路を負荷インピーダンス Z_{L} で終端

まず一般論として、図 5.4 に示すように、伝送線路（特性インピーダンス Z_0）が、負荷インピーダンス Z_{L} で終端されている場合を考える。負荷への入射電圧、電流および反射電圧、電流をそれぞれ $V_{\mathrm{i}}, I_{\mathrm{i}}, V_{\mathrm{r}}, I_{\mathrm{r}}$ とすると、反射係数 $\Gamma = I_{\mathrm{i}}/I_{\mathrm{r}}$ は、

$$\Gamma = \frac{Z_{\mathrm{L}} - Z_0}{Z_{\mathrm{L}} + Z_0} \tag{5.8}$$

である。この式は、以下に示す特性インピーダンスの定義と、終端における電圧電流の関係から容易に出てくる。

$$V_\mathrm{i} = Z_0 I_\mathrm{i}$$
$$V_\mathrm{r} = Z_0 I_\mathrm{r} \tag{5.9}$$
$$V_\mathrm{i} + V\mathrm{r} = Z_\mathrm{L}(I_\mathrm{i} - I_\mathrm{r})$$

ここで、空洞の等価回路（図 5.1）から $Z_0 = R_0$, $Z_\mathrm{L} = Z_c$ として式 (5.8) に代入し、式 (5.3) から空洞の反射係数 $\Gamma_\mathrm{c}(\omega)$ を求めると、

$$\Gamma_\mathrm{c}(\omega) = \frac{Z_\mathrm{c} - R_0}{Z_\mathrm{c} + R_0} = \frac{-1}{\beta+1} + \frac{\beta}{\beta+1} \cdot e^{j\phi} \tag{5.10}$$

が得られる [23]。ここで式 (5.1a)(5.1b)(5.1c) の関係も当然利用している。式 (5.10) はわりとシンプルな形になっている。しかし、この形を導くのはそう単純ではないので結果のみを記している。
上記の式 (5.8)(5.10) において、共振点 $\omega = \omega_0$（$\phi = 0$）では、式 (4.15) に示す入力結合度 β と空洞反射の関係になることが分かる（そうなるように等価回路が定義されている）。

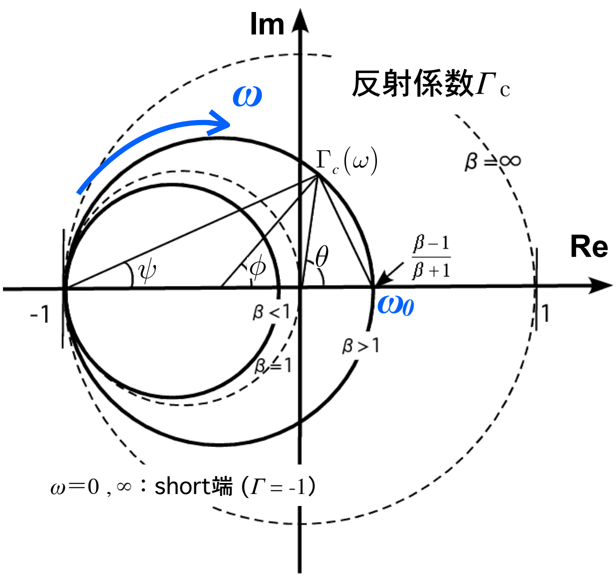

図 5.5　共振器の反射係数 $\Gamma_\mathrm{c}(\omega)$ の複素平面プロット（ω 変化による軌跡）

式 (5.10) より、複素平面に $\Gamma_\mathrm{c}(\omega)$（$\omega$ 変化による軌跡）をプロットすると、図 5.5 のように円を描く。原点からの距離が反射の大きさに相当する。この図からも共振点では反射が最少になることが分かる。$\beta = 1$ の場合共振点で反射 0 になるが、離調されると反射が起きる。$\omega \to 0$ または $\omega \to \infty$ では $\Gamma \to -1$、すなわち全反射で位相が逆なので short 端に相当する。また同様に、$\beta \to 0$ で short 端、$\beta \to \infty$ で open 端となる。図中の $\theta = \arg(\Gamma_\mathrm{c}(\omega))$ が（入力に対する）反射位相である。$\beta < 1$（アンダーカップリング）では反射位相が逆になる。

5.3　過渡的応答

これまでの話では、定常状態になった場合について説明している。ここでは、空洞（共振器）への投入パワーがパルス的に変化した場合の応答について簡単な例を（特に反射について）紹介する。

簡単のために共振周波数は投入 RF 周波数と一致している場合（$\omega_0 = \omega_\mathrm{rf}$）について示す。また、以下に示す図は、$Q_0 = 140000$ として、第 10 章で説明する過渡的応答の時間領域シミュレーションによる結果である。RF 周波数は 500MHz で、入力位相を 0 度としている。

まず、RF パワーが 0 の状態から、ステップ的に空洞入力が立ち上がった場合である。図 5.6 および図 5.7 は、投入 RF の振幅（電圧 V_k）が $t = 0$ で 0→1 と変化した場合について示している。それぞれ、オーバーカップリング（$\beta = 3$）、アンダーカップリン（$\beta = 0.8$）の場合を示す。横軸は時間で、空洞電圧 V_c と反射振幅 V_r（左縦軸）、および反射位相（右縦軸）の時間応答を示している。

ここで、振幅（左縦軸）は電力比に対する（パワーの root に対応する）振幅で、

$$V_\mathrm{k}^2 = V_\mathrm{c}^2 + V_\mathrm{r}^2 \tag{5.11}$$

となるように、シミュレーションで定義している。従って、他の節で用いる記号と定義が異なるこに注

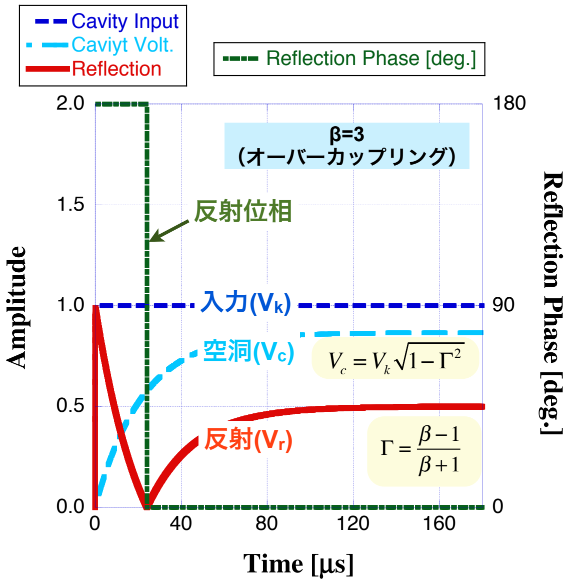

図 5.6　ステップ入力に対する空洞の応答（オーバーカップリングの場合）

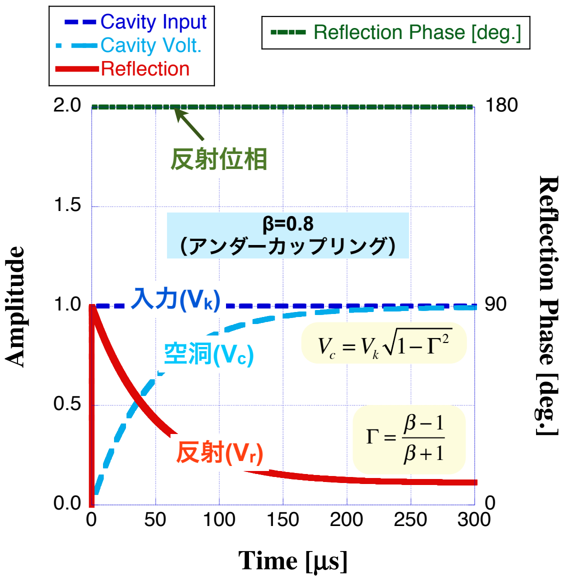

図 5.7　ステップ入力に対する空洞の応答（アンダーカップリングの場合）

意して頂きたい。

図 5.6 および図 5.7 を見ると、空洞電圧 V_c は $Q_L = Q_0/(\beta+1)$ に応じた時定数（filling time= $2Q_L/\omega_0$）で、exp で立ち上がることが分かる（第 9.2 節も参照）。

一方、反射については、瞬時には空洞にパワーは入らないので、まず全反射する。そこから徐々に（filling time に従って）反射が下がり（空洞内消費が増えて）、最終的には定常状態の反射係数（式 (4.15)）に落ち着く。ただし、オーバーカップリングの場合は、図 5.6 のように、定常状態になる前に反射が 0 になる瞬間がある。これは、最初は空洞内消費電力（P_c）が小さいためアンダーアップリングのようみ見えて、そこから $\beta = 1$ を通過して、定常状態（この例では $\beta = 3$）に移行するためである。そのため、反射が 0（$\beta = 1$）になる点で、反射位相が 180→0 と反転しているのが分かる（図 5.5 参照）。逆に、アンダーカップリングの場合は $\beta = 1$ を通過しないので、図 5.7 のように、反射が 0 にならずに定常状態（この例では $\beta = 0.8$）の反射係数に落ち着く。

次に、定常状態たから、RF 投入パワーが瞬時に切れた場合（入力 RF を off した瞬間）について示す。図 5.8 および図 5.9 は、$t = 800$μs で、V_k が 1→0 と変化した場合の立ち下がりの例である。立ち上がりの場合と同様に、それぞれ、オーバーカップリング（$\beta = 3$）、アンダーカップリン（$\beta = 0.8$）の場合について示している。

図から、空洞電圧 V_c は、立ち上がり同様、filling time に従って exp で減衰する。一方、反射については、投入 RF パワーが切れた（V_k が 0 になった）瞬間に跳ね上がっているのが分かる。これは、反射と言うより、空洞の蓄積エネルギー U の一部が結合度 β に応じた量で放出されたものである（残りは空洞内で消費される）。

では、この反射の跳ね上がり（蓄積エネルギーの放出量）はどのくらいになるか考える。第 4.2 節で説明したように、RF 入力がなくなって自由振動で減衰する時、空洞内の消費パワー（P_c）と入力結合器から出ていくパワー（$P_{ext} = P_{r\_off}$）の比が、入力結合度になる（$\beta = P_{ext}/P_c$）。ここで、投入 RF パワー P_k が 0(off) となる瞬間（直前）の P_c について考えると、式 (4.16b) より、

$$\frac{P_{r\_off}}{P_k} = \frac{P_{ext}}{P_k} = \frac{\beta P_c}{P_k} = \frac{4\beta^2}{(\beta+1)^2} \qquad (5.12)$$

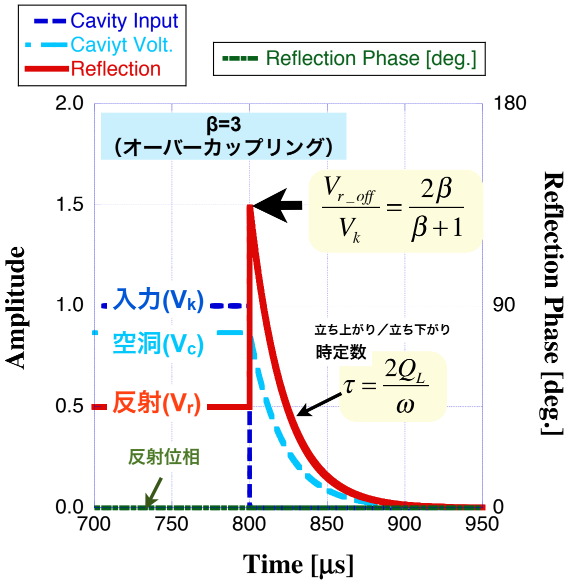

図 5.8　入力 RF が瞬間的に切れた時の空洞応答（オーバーカップリングの場合）

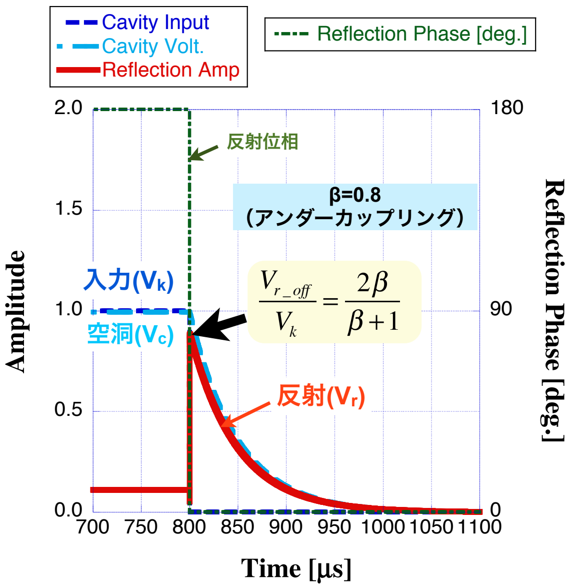

図 5.9　入力 RF が瞬間的に切れた時の空洞応答（アンダーカップリングの場合）

となる。従って、振幅比（反射係数）にすると、

$$\frac{V_{\mathrm{r\_off}}}{V_{\mathrm{k}}}=\frac{2\beta}{\beta+1} \tag{5.13}$$

である。これより、入力 RF が切れた瞬間の反射パワー（蓄積エネルギーの放出量）は、オーバーカップリングでは元の入力パワー（あるいは立ち上がり時の全反射）より高くなり、逆にアンダーカップリングでは低い。

RF 入力がなくなった後の減衰時の位相を見てみると、空洞から外に出るパワーの位相は（共振周波数が合っていれば）空洞内の振動位相と同じになる。そのため、アンダーカップリングの場合（図 5.9）では、定常状態の反射位相が 180 度なので、減衰時には 0 度に反転したように見える。

以上の通り、実際の大電力での RF 運転でも、ステップ的に入力 RF を立ち上げ／立ち下げた際の、反射パワーまた反射位相の振る舞い（過渡的応答）から、オーバーカップリングかアンダーカップリングかの判別ができる。また、この時の入力パワーとの比を具体的に測定することで、結合度 β も評価できる。もちろん、定常状態の反射係数からも β は評価できるが、立ち下がりの反射ピークを測るほうが精度は良い。

6 ビーム負荷に対する最適化

これまではビームがない状態について説明してきた。しかし、ビームにエネルギーを与えるのが本来の目的であるので、ビーム加速による負荷を考える必要がある。いわば、ここまでの話が前置き（準備）で、ここからが本講義のテーマと言える。

ビーム負荷とは、ビームに奪われるエネルギーの負担（補償）とも言えるが、ビーム自身による電磁場の励起で加速電圧が乱されることとも言える。粒子ひとつひとつが空洞に励起するエネルギーは、当然加速ゲインに比べて十分小さいが（第 7.3.2 節参照）、その粒子の数（例えば一つのバンチ内に 10^{10}〜10^{11} 個の粒子）、すなわちビーム電流が問題になる。SuperKEKB のような大電流ビームを加速する場合は、必要な加速電圧を得るための電力（すなわち空洞壁面で消費する電力）より、ビームによる励起の影響が大きくなり、このビーム負荷（beam loading）を考慮せずに運転はできない。

この章では、ビーム加速による空洞電圧への影響とビーム負荷への対応方法について説明する。まずそのために、等価回路モデル（インピーダンス）で、ビーム電流の周波数領域（ビームが空洞に励起する周波数成分と大きさ）を考える必要がある。

等価回路上でビーム電流は、RF と同じ周波数成分で、その大きさを平均電流の 2 倍とすれば良い（図 6.4 のようになる）ことを次節で示す。ただし、その結果だけ踏まえれば、次節はスキップして、第 6.2 節に進んでも問題ないかと思う。

6.1 ビームの周波数スペクトル

クライストロンからの RF パワーと異なり、ビームは図 6.1 のようにバンチ（パルス）列となって一定間隔で周期的に通過する。これを周波数領域に表すと図 6.2 のようになる [20, 21]。図 6.2 のスペクトルの周期的なピークは、幅を持たない線スペクトルで、全体として comb 関数的であることに注意。また、スペクトルの高さ（包絡線）は平均電流の 2 倍が最大で、高い周波数では Gaussin（バンチ長の周波数成分）に従って減衰する。

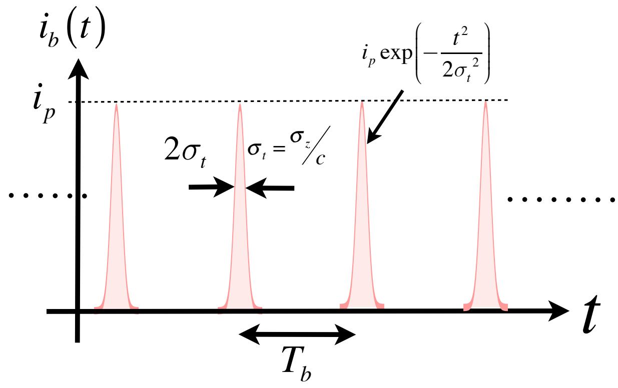

図 6.1　Gaussian バンチ・トレイン

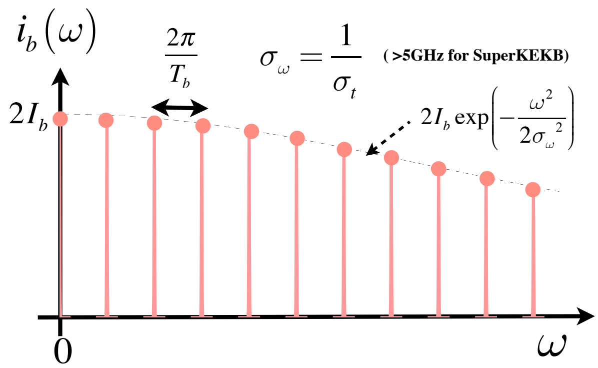

図 6.2　Gaussian バンチ・トレインの周波数スペクトル

図 6.1、図 6.2 ついて、もう少し詳しく説明しておく。バンチの形は Gaussian（幅 σ_t）を仮定し、それぞれのバンチに違いはないとすると、ビーム電流の時間変化 $i_\mathrm{b}(t)$ は

$$i_\mathrm{b}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i_\mathrm{p} \exp\left[-\frac{(t-nT_\mathrm{b})^2}{2\sigma_\mathrm{t}^2}\right] \quad (6.1a)$$

$$q = i_\mathrm{p}\pi\sigma_\mathrm{t}\sqrt{2} = I_\mathrm{b}T_\mathrm{b} \quad (6.1b)$$

と書ける。ここで、T_b はバンチの時間間隔、i_p はピーク電流、q はバンチの電荷量、I_b は平均電流（DC 成分）である。また、$i_\mathrm{b}(t) = i_\mathrm{b}(t+nT_\mathrm{b})$ である。このように周期的な信号は

$$i_\mathrm{b}(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} i_\mathrm{b}(\omega_\mathrm{n})e^{j\omega_\mathrm{n}t} \tag{6.2a}$$

$$i_\mathrm{b}(\omega_\mathrm{n}) = \frac{2}{T_\mathrm{b}}\int_{-T_\mathrm{b}/2}^{T_\mathrm{b}/2} i_\mathrm{b}(t)e^{-j\omega_\mathrm{n}t}dt \tag{6.2b}$$

$$\omega_\mathrm{n} = 2\pi n/T_\mathrm{b} \tag{6.2c}$$

のようにフーリエ展開で表せる。そこで式 (6.1a)(6.1b) と上式の関係から $i_\mathrm{b}(t)$ は

$$i_\mathrm{b}(t) = I_\mathrm{b} + \sum_{n=1}^{\infty} 2I_\mathrm{b}\exp\left(\frac{-\omega_\mathrm{n}^2\sigma_\mathrm{t}^2}{2}\right)\cos\omega_\mathrm{n}t \tag{6.3}$$

と表せる。ただし、ここで $i_\mathrm{b}(t)$ は実数関数であり、また偶関数として、正の周波数のみで展開している。また、式 (6.3)(6.2b) より、ビームの周波数スペクトル $i_\mathrm{b}(\omega_\mathrm{n})$ は

$$\begin{aligned} i_\mathrm{b}(\omega_\mathrm{n}) &= 2I_\mathrm{b}\exp\left(\frac{-\omega_\mathrm{n}^2\sigma_\mathrm{t}^2}{2}\right) \\ &= 2I_\mathrm{b}\exp\left(\frac{-\omega_\mathrm{n}^2}{2\sigma_\omega^2}\right) \\ \sigma_\omega &= 1/\sigma_\mathrm{t} \end{aligned} \tag{6.4}$$

となり、これを図にすると図 6.2 になる。

以上より、ビームの持つ周波数成分は、図 6.2 に示す通り $2\pi/T_\mathrm{b}$ 間隔の線スペクトル（櫛形スペクトル）で、その高さの包絡線は $2I_\mathrm{b}\exp(-\omega^2\sigma_\mathrm{t}^2/2)$ である。ちなみにバンチ間隔は必ず RF 周期の整数倍なので、$\omega_\mathrm{rf} = m\omega_\mathrm{m} = 2\pi m/T_\mathrm{b}$（$m$ は整数）と書ける。

ここで、ビームが空洞内に励起する周波数を考える。通常（電子陽電子蓄積リングの場合）空洞インピーダンスの幅は十分に狭い（Q 値は十分に高い）ので、加速周波数の周りだけを考えれば良い（ここで高次モードは考えない）。また、Gaussian バンチの持つ周波数成分は RF 周波数に比べて十分高い。これより、$\omega_\mathrm{rf}\sigma_\mathrm{t} \ll 1$ とすると、ビームが空洞内に励起する成分は、式 (6.4) より

$$\begin{aligned} i_\mathrm{b}(\omega_\mathrm{n} \sim \omega_\mathrm{rf}) &\sim 2I_\mathrm{b}\exp\left(\frac{-\omega_\mathrm{rf}^2\sigma_\mathrm{t}^2}{2}\right) \\ &\sim 2I_\mathrm{b} \end{aligned} \tag{6.5}$$

となる。この式 (6.5) がこの節の結論である。

以上、いろいろと記述したが、結局のところこの節で伝えたい内容はシンプルで次の通りある。

図 6.4 の等価回路モデルにおいて、ビーム電流は RF 信号と同じ周波数成分として扱い、その大きさ（振幅）は $2I_\mathrm{b}$（平均電流の 2 倍）とすれば良い。また、ビームの持つスペクトルは、幅のない線スペクトルで、バンチ間隔に従って周期的（櫛形スペクトル）になる。

ただし、バンチ・トレインが周期パルス的に空洞に励起するフィールドについては、より一般的な議論があり、詳細は参考文献 [1, 20, 21, 24] などを参照して頂きたい。

6.2 ビーム負荷と Optimum Tuning

まず、図 6.3 ように、synchronous 位相 ϕ_s で加速されているものとする。ここで空洞電圧 V_c の振幅と位相は変化せずに一定に保たれている（制御されている）とする。ちなみに蓄積リングの場合、ϕ_s は、ビームの一周における放射損失 U_0 と釣り合うように、自然に決まる電圧位相である。従って $U_0 = eV_\mathrm{c}\cos\phi_\mathrm{s}$ である。

ビームを加速している場合の等価回路モデルは図 6.4 のようになる。前節の結果より、励振するビーム電流の大きさは、平均電流 I_b の 2 倍である。ただし、加速するので加速電圧を打ち消す方向になる。こうして以降の話は、励振周波数は RF 周波数 $\omega = \omega_\mathrm{rf}$ として、励起される電圧は、ω_rf に対するインピーダンス応答の大きさ（≥ 0）と位相だけで（複素平面のベクトルとして）考えることができる。

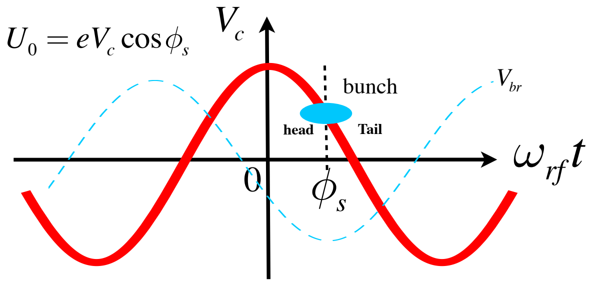

図 6.3　synchronous 位相 ϕ_s で加速電圧に乗るバンチビーム

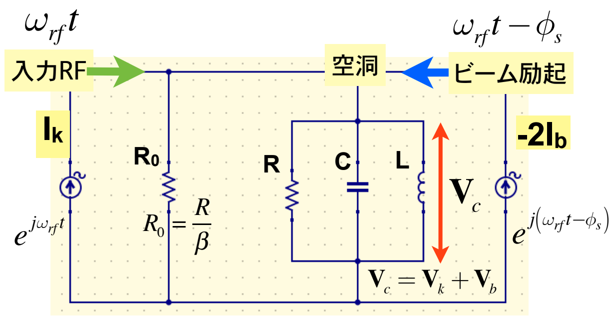

図 6.4　空洞共振器の等価回路モデル（ビーム加速の場合）

そうすると空洞電圧 $\boldsymbol{V}_\mathrm{c}$ は、クライストロンからの投入パワーによる電圧 $\boldsymbol{V}_\mathrm{k}$ と、ビームが励起する電圧 $\boldsymbol{V}_\mathrm{b}$ の和、すなわち、

$$\boldsymbol{V}_\mathrm{c} = \boldsymbol{V}_\mathrm{k} + \boldsymbol{V}_\mathrm{b} \tag{6.6}$$

である（それぞれの電圧は位相を含むベクトル量)。

ここでまず、共振周波数が RF 周波数に一致している場合（$\omega_0 = \omega_\mathrm{rf}$）を考える。この共振点（入力位相と同じ、すなわち $\psi = 0$ の場合）における $\boldsymbol{V}_\mathrm{k}$,$\boldsymbol{V}_\mathrm{b}$ をそれぞれ $\boldsymbol{V}_\mathrm{kr}$,$\boldsymbol{V}_\mathrm{br}$ とする。

この場合、クライストロンからの投入 RF が励起する電圧の大きさ V_kr は、空洞入力インピーダンス（式 (5.2)）の関係から、

$$V_\mathrm{kr} = \frac{R_\mathrm{sh} I_\mathrm{k}}{2(\beta + 1)} \tag{6.7}$$

である。これをベクトル図に表したのが図 6.5（ビームがない場合）である。ここで当然ビームがなければ $\boldsymbol{V}_\mathrm{c} = \boldsymbol{V}_\mathrm{kr}$ である。この時の $\boldsymbol{V}_\mathrm{c}$ を必要な定格電圧として、これを（位相も含め）$\boldsymbol{V}_\mathrm{ref}$ とする。

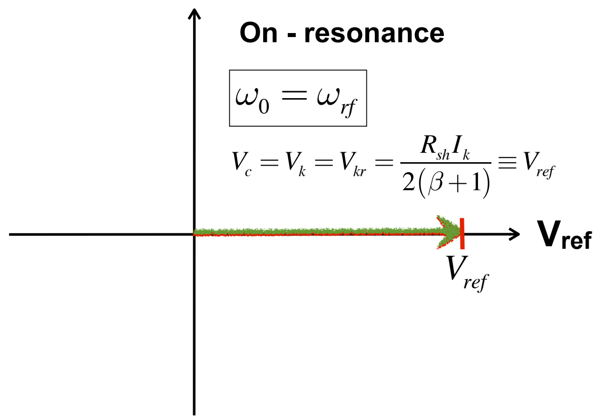

図 6.5　$\omega_0 = \omega_\mathrm{rf}$ においてビームがなく $\boldsymbol{V}_\mathrm{c} = \boldsymbol{V}_\mathrm{kr}$ の場合。これを加速に必要な定格電圧と位相（基準電圧 $\boldsymbol{V}_\mathrm{ref}$）とする。

ここで交流電流源から供給できる最大電力を考えると $P_\mathrm{k} = 1/8 \cdot RI_\mathrm{k}^2/\beta$ の関係にあり [20]、これと式 (6.7) から改めて式 (4.17) すなわち投入電力 P_k と励起電圧の関係が得られる。ここではビームがないので $V_\mathrm{c} = V_\mathrm{kr}$ として、改めて式 (4.17) の関係を書くと、

$$V_\mathrm{kr} = \frac{2\sqrt{\beta R_\mathrm{sh} P_\mathrm{k}}}{\beta + 1} \tag{6.8}$$

である。

次に、ビームが励起する電圧の大きさ V_br についても同様に、等価回路でビームから見たインピーダンスは Z_in と同じなので、式 (5.2) から、

$$V_\mathrm{br} = \frac{R_\mathrm{sh} I_\mathrm{b}}{\beta + 1} \tag{6.9}$$

となる。ただし、synchronous 位相 ϕ_s の分、V_kr と

は位相が異なる（図 6.3 参照）。ここで $\boldsymbol{I}_{\mathrm{k}}$ が一定（フィードバック制御なし）であれば、式 (6.6) の通り $\boldsymbol{V}_{\mathrm{kr}}$ との合計（ベクトル和）を考えると、$\boldsymbol{V}_{\mathrm{c}}$ は図 6.6 のようになる。結果 $\boldsymbol{V}_{\mathrm{c}} \neq \boldsymbol{V}_{\mathrm{ref}}$ であり、また V_{c} は定格電圧 V_{ref} より下がってしまう。ここで $\boldsymbol{V}_{\mathrm{kr}}$ と $\boldsymbol{V}_{\mathrm{c}}$ でなす角（α_{L}）を loading angle と言う。

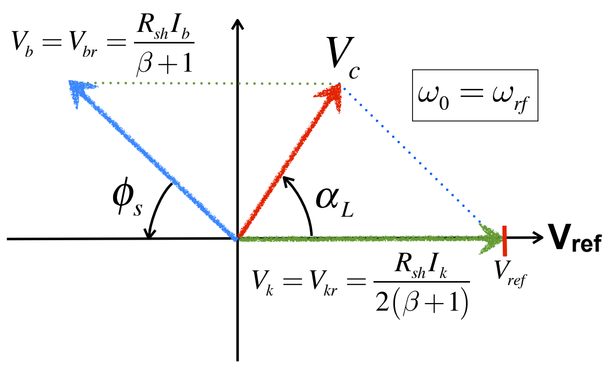

図 6.6　$\omega_0 = \omega_{\mathrm{rf}}$ において、RF 投入による電圧 $\boldsymbol{V}_{\mathrm{kr}}$ とビーム励起電圧 $\boldsymbol{V}_{\mathrm{br}}$ との合計。

このように、ビーム加速（ビーム負荷）により $\boldsymbol{V}_{\mathrm{c}}$ が変わってしまう（加速電圧が下がり、位相も変わってしまう）と、結果ビーム位相も変わり（図 6.6 は維持されず）ビーム蓄積ができなくなる（もしくは別の平衡状態になる）。それは非常に不都合であるため、通常フィードバック制御等により、$\boldsymbol{V}_{\mathrm{c}}$ を一定（$=\boldsymbol{V}_{\mathrm{ref}}$）に保つように $\boldsymbol{I}_{\mathrm{k}}$ を制御する。その結果は図 6.7 のようになる。この場合、当然、図 6.6 に比べて大きな V_{k}（I_{k}）となり、その分大きな電力が必要になる。

ちなみに、図 6.6 や図 6.7 のように、電圧の関係をベクトルで表したものを phasor diagram と呼んでいる。ただし、通常このような phasor diagram では、ビーム電流を基準軸（横軸）に描くのが一般的である。本テキストでは、あえて図のように定格電圧を基準に描いた phasor diagram で説明を試みる。

さてここで、図 6.7 の状態において RF 投入パワーを求めてみる。それぞれのベクトルの大きさについて、この図から、

$$V_{\mathrm{kr}} \cos \alpha_{\mathrm{L}} = V_{\mathrm{c}} + V_{\mathrm{br}} \cos \phi_{\mathrm{s}} \tag{6.10}$$

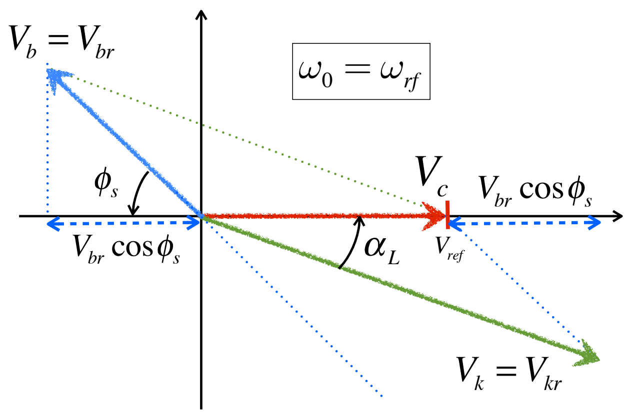

図 6.7　$\omega_0 = \omega_{\mathrm{rf}}$ において、ビームに対して $\boldsymbol{V}_{\mathrm{c}}$ を一定（$=\boldsymbol{V}_{\mathrm{ref}}$）に保つために $\boldsymbol{I}_{\mathrm{k}}$ を制御した場合。

であることが分かるので、これと式 (6.8) から

$$P_{\mathrm{k}} = \frac{(\beta+1)^2}{4\beta R_{\mathrm{sh}}} \left[\frac{V_{\mathrm{c}} + V_{\mathrm{br}} \cos \phi_{\mathrm{s}}}{\cos \alpha_{\mathrm{L}}} \right]^2 \tag{6.11}$$

となる。

この式を α_{L} について見ると、もし $\alpha_{\mathrm{L}} = 0$ であれば P_{k} が最少になる。この点について、等価回路インピーダンスの話（第 5.1 節）を踏まえると、次のようにも言える。RF 入力（$\boldsymbol{I}_{\mathrm{k}}$）から見ると励起電圧 $\boldsymbol{V}_{\mathrm{c}}$ が α_{L} だけ位相がずれている（$\omega_0 = \omega_{\mathrm{rf}}$ にもかかわらず共振点に見えない）ため、入力パワーが効率良く消費されずに無駄な電力が生じている（力率が低下している）。これはビーム電流（位相 ϕ_{s}）により無効成分が生まれていることになる。

これに対し効率化を図る（力率を改善する）ことが必要になる（大電流ビーム加速では高効率化は非常に重要である）。つまり $\alpha_{\mathrm{L}} = 0$ になるような条件にすることである。その方法は、結論から先に言えば、空洞の共振周波数を RF 周波数からずらす（detune する）ことである。では、どれだけ detune すれば良いか？を以降に示す。

ある最適な detune 量 $\Delta\omega_{\mathrm{opt}}$ で共振周波数を変えた（$\omega_0 = \omega_{\mathrm{rf}} + \Delta\omega_{\mathrm{opt}}$ とした）場合に、$\alpha_{\mathrm{L}} = 0$ かつ $\boldsymbol{V}_{\mathrm{c}} = \boldsymbol{V}_{\mathrm{ref}}$ になる条件が成立するとする。この場

合の phasor diagram は図 6.8 のよう描くことができる。ここで $V_{\rm kr}$ を図 6.7 と比較すると、必要な電力（$P_{\rm k} \propto V_{\rm kr}^2$）はかなり小さくなっていることが分かる（差は小さいように見えても電力の効果は大きい)。この時、$\omega_{\rm rf}$ で励振した場合の tuning 角 $\psi_{\rm opt}$ は、式 (5.6) から

$$\tan\psi_{\rm opt} = -Q_{\rm L}\left(\frac{\omega_{\rm rf}}{\omega_{\rm rf}+\Delta\omega_{\rm opt}} - \frac{\omega_{\rm rf}+\Delta\omega_{\rm opt}}{\omega_{\rm rf}}\right) \sim \frac{2Q_{\rm L}\Delta\omega_{\rm opt}}{\omega_{\rm rf}} \qquad (6.12)$$

である。ここで式 (5.5) と同様の近似を行なっている。ただし位相は反時計回りを正の方向とするので、この図 6.8 では、$\psi_{\rm opt}$ が負の方向になっていることに注意。

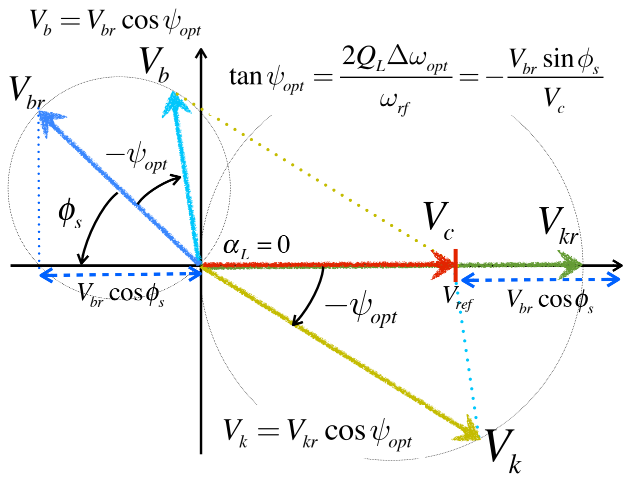

図 6.8　$\alpha_{\rm L} = 0$ になるように最適に detuning し、$\boldsymbol{V}_{\rm c} = \boldsymbol{V}_{\rm ref}$ となった場合。

ここで RF 入力およびビーム電流に対して励起される電圧（ベクトル $\boldsymbol{V}_{\rm k}, \boldsymbol{V}_{\rm b}$）は、それぞれ図 6.8 のように共振点の時（$\boldsymbol{V}_{\rm kr}, \boldsymbol{V}_{\rm br}$）から位相が $\psi_{\rm opt}$ ずれている（第 5.1 節参照)。また、大きさは共振点に対し $\cos\psi_{\rm opt}$ で小さくなるので、$V_{\rm k}$ 及び $V_{\rm b}$ は、それぞれ

$$V_{\rm k} = V_{\rm kr}\cos\psi_{\rm opt} \qquad (6.13a)$$

$$V_{\rm b} = V_{\rm br}\cos\psi_{\rm opt} \qquad (6.13b)$$

の関係にある（cos は偶関数なので $\psi_{\rm opt}$ の符号は気にしない)。また、$\boldsymbol{V}_{\rm c} = \boldsymbol{V}_{\rm k} + \boldsymbol{V}_{\rm b}$（$= \boldsymbol{V}_{\rm ref}$）なので、図 6.8 を見ると、ベクトル成分から、

$$V_{\rm c} = V_{\rm k}\cos(-\psi_{\rm opt}) - V_{\rm b}\cos(\phi_{\rm s} - \psi_{\rm opt}) \qquad (6.14a)$$

$$V_{\rm k}\sin(-\psi_{\rm opt}) = V_{\rm r}\sin(\phi_{\rm s} - \psi_{\rm opt}) \qquad (6.14b)$$

の関係が成り立つ。これらと式 (6.13a)(6.13b) から（三角関数の公式を使って)、

$$\tan\psi_{\rm opt} = -\frac{V_{\rm br}\sin\phi_{\rm s}}{V_{\rm c}} \qquad (6.15)$$

が得られる。これより最適な detune 量は、式 (6.12)(6.9)(4.14) より

$$\Delta\omega_{\rm opt} = -\frac{\omega_{\rm rf}V_{\rm br}\sin\phi_{\rm s}}{2Q_L V_{\rm c}} = -\frac{\omega_{\rm rf}I_{\rm b}}{2V_{\rm c}}\left(\frac{R_{\rm sh}}{Q_0}\right)\sin\phi_{\rm s} \qquad (6.16)$$

とすれば良いことになる。このように空洞 detuning により $\alpha_{\rm L} = 0$ にして無効成分をなくすことを、optimum (de)tuning と言う。

以上の説明では、答えを知っているので、簡単のため先に $\alpha_{\rm L} = 0$ の図を示して関係式を出したが、一般的には、$\alpha_{\rm L} \neq 0$ におけるベクトルの関係から方程式を立てて、$\alpha_{\rm L} = 0$ の条件から、式 (6.15) を出す。

式 (6.16) より最適な detune 量はビーム電流に比例し、（電子陽電子リングの場合）必ず $\omega_{\rm rf}$ より小さくなる方向である。また optimum tuning は、後述する結合バンチ不安定性（0 モード）を抑制する効果がある。

しかし実際の運転では、いちいち式 (6.16) を計算してチューナーを動かしているわけではない。チューナー制御は常に、空洞入力（$\boldsymbol{I}_{\rm k}$）と空洞ピックアッ

プ信号（$\boldsymbol{V}_\mathrm{c}$）の位相差を 0 に保つように自動制御（フィードバック制御）を行なっているため、ビーム電流に応じて自動的に $\alpha_\mathrm{L} = 0$ が満たされ、自然と optimum tuning が実現される（ただしビーム不安定性を考慮すると多少 $\alpha_\mathrm{L} < 0$ にオフセットしておくのが無難である [25, 26]）。従って、実際の運転中に optimum tuning を意識することは少ない。しかし、detuning 量がどのくらいになっているか定量的に知ることは必要である。

6.3　Optimum Coupling と RF パワー

効率化は、前節の optimum tuning だけでは不十分で、更にビーム電流に応じて入力結合度（β）を最適化する必要がある。この β の最適化について説明する。

第 4.1 節で述べたように、加速電圧 V_c を維持するために、最低限の電力 P_c が必要である。

またビームは $V_\mathrm{c}\cos\phi_\mathrm{s}$ の加速電圧を受けるので、ビーム（平均電流 I_b）に与えるパワー P_b は、

$$P_\mathrm{b} = V_\mathrm{c} I_\mathrm{b} \cos\phi_\mathrm{s} \tag{6.17}$$

である。ここで、空洞供給に必要な RF パワー P_k は

$$P_\mathrm{k} = P_\mathrm{c} + P_\mathrm{b} + P_\mathrm{r} \tag{6.18}$$

になる（図 6.9 参照）。この時、$P_\mathrm{r} = 0$ であれば、すなわち必要なパワーが $P_\mathrm{k} = P_\mathrm{c} + P_\mathrm{b}$ だけで済めば理想的である。

ところが、最初に $\beta = 1$（ビームなしの時に反射が 0）に合わせても、ビームを加速した際には反射が生じてしまう。なぜなら RF 入力側から見ると、ビーム負荷により Q_0 が下がった（P_c が P_b だけ増えた）ように見え、$\beta < 1$（アンダーカップリング）に相当する状態になるためである（β の定義式 (4.13) 参照）。その結果（V_c すなわち P_c を保つためには）式 (6.18) より多くの P_k が必要になる。

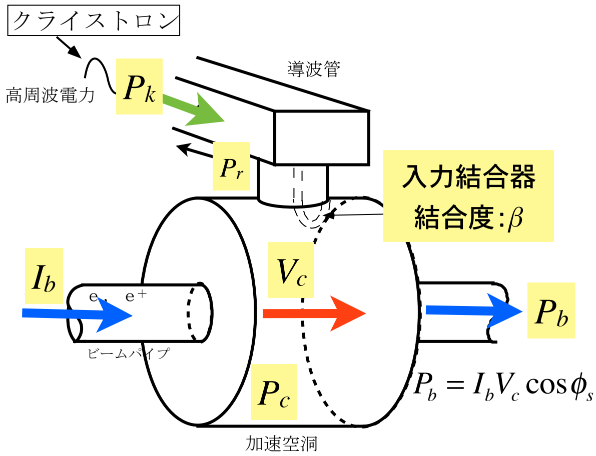

図 6.9　RF 入力パワーとビーム加速における消費パワーの関係。

上記のように、RF 入力から見て Q_0、及び β が、ビーム負荷により Q_0'、β' に変わったように見えるとすると、式 (4.5)(4.13) より、

$$Q_0' = \frac{\omega U}{P_\mathrm{c} + P_\mathrm{b}} = \frac{P_\mathrm{c} Q_0}{P_\mathrm{c} + P_\mathrm{b}}$$

$$\beta' = \frac{Q_0'}{Q_\mathrm{ext}} = \frac{\beta P_\mathrm{c}}{P_\mathrm{c} + P_\mathrm{b}}$$

と書ける。ここでビーム加速時にマッチングする条件、つまり $\beta' = 1$ になる β を β_opt とすると、上の式から

$$\beta_\mathrm{opt} = 1 + \frac{P_\mathrm{b}}{P_\mathrm{c}} \tag{6.19}$$

が得られる。これを optimum coupling という。この条件は、一般的には式 (6.11) から β をパラメータにして、RF 投入パワー P_k が最少になる条件

$$\frac{\partial P_\mathrm{k}}{\partial \beta} = 0 \tag{6.20}$$

より導かれる。

以上の通り、optimum tuning と optimum coupling の両方を行なうことで、式 (6.18) の最適条件

（反射 0）を満たすことができる。

しかし、空洞の入力カップリング β は通常、運転中リアルタイムで変更できるパラメータではない。一度調整したら、固定値のまま運転するのが一般的である。従って最初にデザイン電流値に合わせて固定しておく。

一方、ビーム電流（P_b）は 0 からデザイン電流値まで長い時間をかけて積み上げていく。また運転状況に応じて常に変化する。従って、デザイン電流までは optimum coupling が満たされない（反射がある）。それでも P_b が最大になる時に最適化しておくほうが都合が良い。

また、ビーム不安定性の議論からは、

$$\beta > \frac{P_b}{P_c} - 1 \tag{6.21}$$

に制限されることが知られている [21]。従って、β は大きめにしておくほうが良い。ちなみに、式 (6.19) の β_{opt} は常に式 (6.21) を満たす。

SuperKEKB の常伝導空洞では、加速電圧 0.5MV で $P_c = 150$kW であり、デザイン電流において、P_b=600kW 程度になるめ、$\beta_{opt} = 5$ となる。

一方、超伝導空洞の β に関しては注意が必要である。超伝導空洞の場合、1MV の加速電圧で P_c は 10W 程度である（例えば、$R_{sh}/Q_0 = 100, Q_0 = 10^9$ の場合）。それに対し P_b は、synchronous 位相 $\phi_s = 60°$ で 1A のビーム電流を 1MV で加速したとすると、P_b=500kW 程度である。この場合、optimum coupling は、

$$\beta_{opt} = 1 + \frac{P_b}{P_c} = 1 + \frac{500[\mathrm{kW}]}{10[\mathrm{W}]} \sim 5 \times 10^4$$

となり、非常に大きな結合度が必要になる。また、この場合 $\beta \gg 1$ なので、式 (4.13)(4.14) から、

$$Q_L = \frac{Q_0}{1+\beta} \sim \frac{Q_0}{\beta} = Q_{ext} \tag{6.22}$$

空洞パラメータ	常伝導空洞	超伝導空洞
R_{sh}/Q_0 [Ω]	15	93
Q_0	1.2×10^5	2×10^9
V_c [MV]	0.5	1.5
P_c [kW]	150	0.012
β	5	-
Q_L	2×10^4	6×10^4

表 6.1　SuperKEKB デザイン値における空洞パラメータ例

となる。

このように、超伝導の β は桁が非常に大きくなり扱いずらい（β の値をこの桁の精度で調整できるわけでもない）ので、結合度は β でなく、式 (6.22) の関係から Q_{ext}（$\sim Q_L$）で表現するのが一般的である。

ではここで、具体的に SuperKEKB の運転で必要な RF パワーを見てみる。表 6.1 に主な空洞パラメータを示す。これに対し、HER の運転における必要な RF パワーを図 6.10、図 6.11 にプロットしてみた。それぞれ常伝導空洞、超伝導空洞の場合で、optimum tuning、optimum coupling の条件で計算している。横軸がビーム電流で、P_k、P_b、$P_c + P_b$、P_r をそれぞ

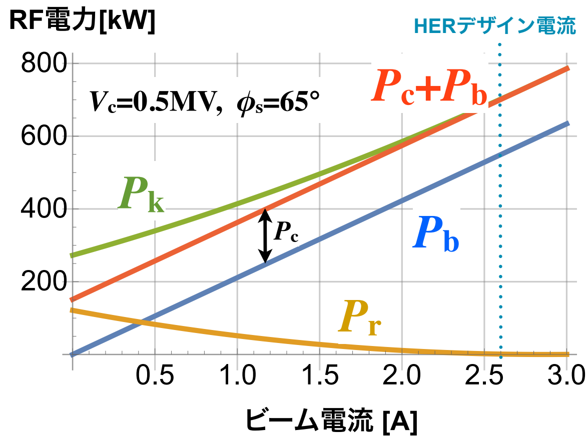

図 6.10　optimum tuning & optimum coupling 条件において常伝導空洞（$\phi_s = 65°$）で必要な RF パワー（SuperKEKB の HER 運転の例）

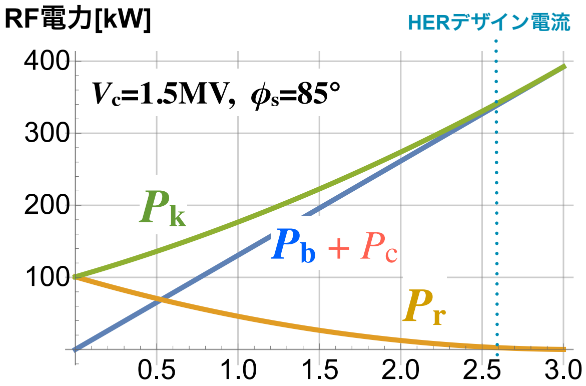

図 6.11　optimum tuning & optimum coupling 条件において超伝導空洞（$\phi_s = 85°$）で必要な RF パワー（SuperKEKB の HER 運転の例）。

れプロットした。ここで $P_k = P_c + P_b + P_r$ である。これまで述べたように V_c を一定にするために、P_c はビーム電流に関係なく一定である。SuperKEKB では、常伝導空洞と超伝導空洞で synchronous 位相に 20° の位相差がつくように運転する（そうする理由はハードウェアの都合上、超伝導空洞のビーム負荷を軽くし、常伝導空洞より投入パワーを低く抑えるためであり、運転・制御における本質的な理由ではない）。

図 6.10、6.11 を見て分かる通り、optimum coupling により、デザインビーム電流で反射 P_r がなくなる。また、投入パワーは理想的に $P_k = P_c + P_b$ に近づく。前節で述べたように optimum tuning は自動チューナー制御により常に満たされる。

このように SuperKEKB の常伝導空洞では、ビームパワー P_b は P_c の何倍にもなる。超伝導空洞の場合は、P_b に比べて P_c が桁違いに小さいので、ほとんどビームに供給するパワーとなる。

では最後に、比較のため optimum coupling を考えない場合を見てみる。ビーム不安定性は起きないと仮定して、常伝導空洞で $\beta = 1$ の場合を、図 6.12 にプロットした。図を見て分かるように、ビーム電流が 0 の時は反射が 0 であるが、デザイン電流に近づくにつれ反射が大きくなり, 結果大きな P_k が必要になり、図 6.10 と比べて非常に効率が悪いことが分かる。

また、投入パワー P_k は 1MW 以上必要になり、クライストロンの性能を考えても、このような運転はできない。

以上、大電流ビーム加速において、RF パワーの効率化は非常に重要で、また、後述するように、それがビームの安定性にも繋がる。

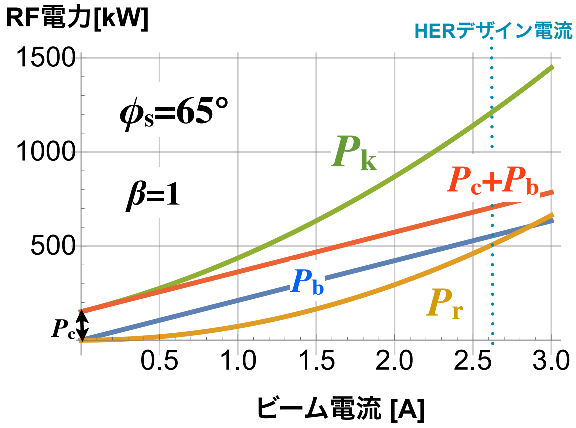

図 6.12　図 6.10 に対して optimum coupling でない（$\beta = 1$ の）場合。常伝導空洞で必要な RF パワー（$\phi_s = 65°$）。

7　結合バンチ不安定性

大電流ビーム蓄積リングの加速システムにおいて、必ず考慮しなければならない問題のひとつが結合バンチ不安定性（coupled bunch instability）である。この章では、この結合バンチ不安定について紹介する。特に、加速モードに起因する結合バンチ不安定性について取り扱う。

すでに述べているように、基本的には過去の OHO テキストで多くの偉大な先人たちが詳細を書かれているので、本テキストでは実用上、必要な情報を整理することを主な目的にする。式の導出や証明は、参考文献 [1,6,27,28] などを参照頂きたい。

7.1　Wakefield と結合バンチ不安定性

相対論的速度で自由空間を走る荷電粒子（点電荷）が作る電磁場は、図 7.1 のように進行方向に軸対称で前後の広がりが $1/\gamma$ に収縮され、光速度（図 7.1 右）の場合は進行方向に垂直な電磁場のみになる [27]。完全導体のパイプの中心を走る場合でも（導体中に鏡像電荷が走り）、同様に前後に電磁場を残さない（バンチ・ビームの場合の例を図 7.2 に示す）。

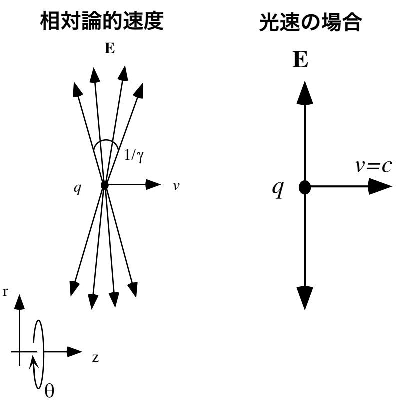

図 7.1　相対論的速度で自由空間を走る荷電粒子（点電荷 q）が作る電磁場。右は光速度の場合。

一方で、ビームパイプ中で大きな損失が起きる物質である場合、図 7.3 上のように、電荷が通過した後に電磁場が励起される。また、完全導体であっても、空洞のような構造体（不連続部分）があると同様に電

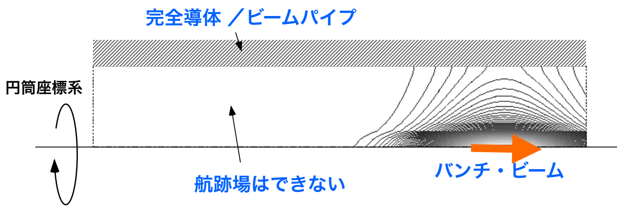

図 7.2　導体パイプ中を走るバンチ・ビームが作るフィールド

磁場が励起される。加速空洞にバンチ・ビームが励起する電磁場のイメージを図 7.3 下に示す。このように荷電粒子が通過する際に励起されるフィールドを航跡場（wakefield）と言う。

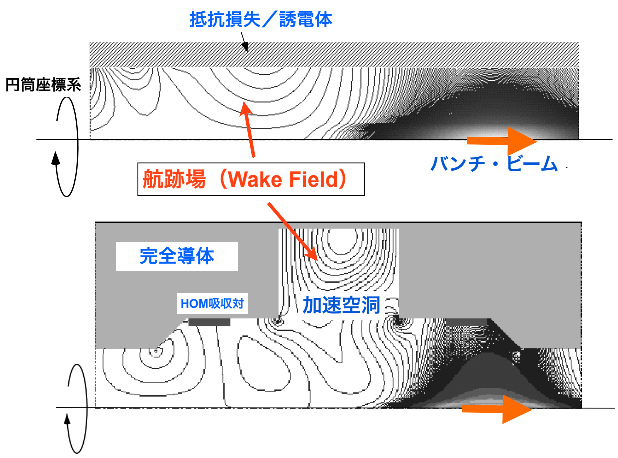

図 7.3　ビームが構造体に残す航跡場（wakefield）のイメージ

このように、バンチ・ビームが励起する wakefield により、連続で通過するバンチどうしが相互に影響しあい、ビーム振動を増大させてしまう現象を結合バンチ不安定性という。もちろん実際のビームパイプは完全導体ではないが、伝導率の高い導体を使用し、通常その寄与は十分に小さい。

加速空洞は Q 値が高く（損失が小さく航跡場が長く残り）インピーダンスが高いので、バンチ間の相互作用が最も大きい構造体と言える。従って加速空洞は必要不可欠な存在であると同時に、ビーム電流が大きくなると必ず、加速モードによる結合バンチ不安定性を起こす存在でもある。

一般的に wakefield の扱いは、ビームに対して、ビー

ム軸に平行な力を与える縦方向モード（longitudinal mode）とビーム軸に垂直な力を与える横方向モード（transverse mode）に分けられ、それぞれシンクロトロン振動、ベータトロン振動に影響を与える。加速空洞の加速モード（TM010 モードあるいは monopole モード）は縦方向だけの力を与えるので、加速モードによる結合バンチ不安定性はシンクロトロン振動の増大に繋がる。

バンチ・ビームは高い周波数成分を持っているため、加速モードだけでなく、空洞共振器の高次モード（HOM）も励起される。これらの高次モードは様々なモード（縦方向成分、横方向成分）があり、結合バンチ不安定性を起こすので、当然、対処する必要がある。通常、高次モードは加速に必要ないので、高次モードのみを空洞から外に逃がす構造を設けたり、吸収体を設置したりして（図 7.3 参照）、高次モードのビームへの影響を小さくする（Q 値、インピーダンスを下げる）。そのための機構を高次モード減衰器（HOM Damper）と称する。

一方、加速に必要な加速モードは減衰させるわけにはいかないので、不安定性を起こす成分のみをキャンセルさせる必要がある。これが本講義のテーマとなる。

7.2 結合バンチ不安定の評価

結合バンチ不安定性は定量的にどう評価されるか、について先に簡単に言っておく。上記の高次モード減衰器についても、十分な減衰量とはどう判断されるのか？である。それは不安定性が起きた時のビーム振動幅（振幅）の「成長の速さ」で評価される。

結合バンチ不安定性が起きると、振動の大きさは exp で増大する。その場合、振動幅（平衡位相からのズレ）の時間変化 $\hat{\tau}_{\mathrm{g}}(t)$ は、その時の振動の角周波数を $\tilde{\omega}_{\mathrm{s}}$ とすると、

$$\hat{\tau}_{\mathrm{g}}(t) \propto \exp\left(\frac{t}{\tau_{\mathrm{g}}}\right) \exp\left(-j\tilde{\omega}_{\mathrm{s}} t\right) \tag{7.1}$$

のような形で表せる。ここで、τ_{g} を growth time（成長時間）という。また、その逆数 τ_{g}^{-1} を growth rate（成長率）と言う。

一方、ビーム軌道が曲げられる際の放射光には、自然とビーム振動が減衰する効果がある。この放射光で振動が減衰する速さより、不安定性が成長する速さのほうが遅ければ良いことになる。すなわち、この放射光減衰率（radiation damping rate）を τ_{rd}^{-1} とした場合、

$$\tau_{\mathrm{g}}^{-1} < \tau_{\mathrm{rd}}^{-1} \tag{7.2}$$

であることが基本的な判断条件になる。τ_{rd}^{-1} は軌道光学系からデザイン値が求められる。

では、ビーム不安定性の成長率 τ_{g}^{-1} はどのように求められるかであるが、wakefield を起こす構造体（ここでは加速空洞）の「結合インピーダンス $Z(\omega)$」（周波数の関数）から評価される。非常に簡単に書くと、

$$\tau_{\mathrm{g}}^{-1} \propto \Re Z(\omega_{\mathrm{cbi}}) \tag{7.3}$$

のような関係にある。ここで ω_{cbi} はビームが持つ周波数成分で、不安定性の種類（モード）や振動周波数によって決まる。従って、ビームの持つ周波数成分が重要になる。詳細は第 7.5 節で説明する。

次節は、結合インピーダンスについて簡単に説明する。

7.3 結合インピーダンスと Wake Function

具体的な growth rate の評価の前に、wakefield と結合インピーダンスの関係について話しておく。

周波数成分 ω を持つビーム電流 $I(\omega)$ により、（空洞に限らず一般的に）ある構造体に wakefield が励起され、その時の励起電圧の ω 成分 $\boldsymbol{V}(\omega)$ について、

$$\boldsymbol{V}(\omega) = -I(\omega) \cdot \boldsymbol{Z}(\omega) \tag{7.4}$$

の関係で表せる場合、この $\boldsymbol{Z}(\omega)$ を、この構造体の結合インピーダンスと言う。

前節で述べたように、wakefield はビーム軸方向（縦方向）とそれに垂直な方向（横方向）の成分に分けられるので、電圧も縦方向成分 $V_{\|}(\omega)$ と横方向成分 $\boldsymbol{V}_{\perp}(\omega)$ とに分けられ、それぞれ対応する結合インピーダンス $Z_{\|}(\omega), \boldsymbol{Z}_{\perp}$ で次のように書かれる。

$$V_{\|}(\omega) = -I(\omega) \cdot Z_{\|}(\omega) \tag{7.5a}$$

$$\boldsymbol{V}_{\perp}(\omega) = -I(\omega) \cdot \boldsymbol{Z}_{\perp}(\omega) \tag{7.5b}$$

ここでは加速モードだけを対象としているので、縦方向だけ考えれば良い。

7.3.1 Wake Function

式 (7.4)(7.5a) において励起される wakefield とインピーダンスの関係（wakefield の扱い）について、よく知られた関係を以下に紹介しておく。

図 7.4 に示すように、先行する点電荷 q（= leading particle）がある構造体を通過した際の wakefield により、後続する点電荷 e が感じる力を考える。

ここで円筒座標系 (r, θ, z) を考え、ビームパイプの中心軸を z 軸とする。２つの点電荷は光速度 $v = c$ で z 軸に平行に走り、leading particle、test particle の横方向の位置をそれぞれ (r_1, θ_1)、(r_2, θ_2) とする。また test particle は、leading particle より z 方向の距離 s だけ後方に離れて（遅れて）いるとする。test particle が後方にある場合が $s > 0$ である。また、時刻 t における leading particle の z 方向の位置 z を $z = ct$ とする。この時、test particle が感じる力 $\boldsymbol{F}$ は、縦方向の成分 $F_{\|}$、横方向の成分 $\boldsymbol{F}_{\perp}$ に分けられ、それぞれ

$$F_{\|}(r_2, \theta_2, z, t) = eE_z \tag{7.6a}$$

$$\boldsymbol{F}_{\perp}(r_2, \theta_2, z, t) = e(\boldsymbol{E} + c\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{B}) \tag{7.6b}$$

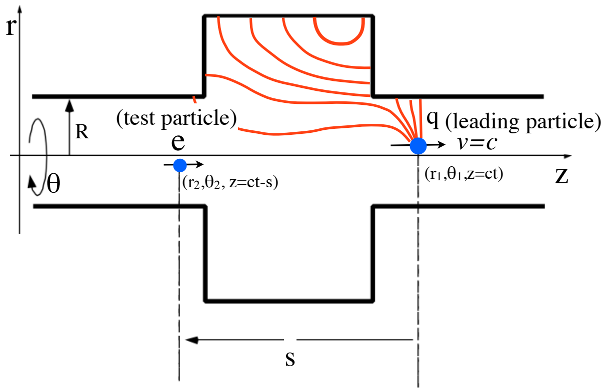

図 7.4　先行する点電荷（leading particle）が励起した wakefield を後ろの電荷（test particle）が感じる。

と書ける。ここで $\boldsymbol{e}_z$ は z 軸に沿った単位ベクトル、$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ はそれぞれ test particle の位置における電場と磁場（磁束密度）である。

この力を test particle の移動（z 軸）に沿って（時間の遅れも考慮し）積分すると、test particle のエネルギー変化量が得られる。それを電荷量 eq で割ったものを wake function として次のように定義される。従って縦方向、横方向それぞれの wake function $W_{\|}$、$\boldsymbol{W}_{\perp}$ は、

$$W_{\|}(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2, s) = -\frac{1}{eq}\int_{-\infty}^{\infty} F_{\|}\left(r_2, \theta_2, z, t = \frac{s+z}{c}\right) dz \tag{7.7a}$$

$$\boldsymbol{W}_{\perp}(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2, s) = \frac{1}{eq}\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{F}_{\perp}\left(r_2, \theta_2, z, t = \frac{s+z}{c}\right) dz \tag{7.7b}$$

となる。進行方向に対して後方に蹴られる場合（減速する方向）を正と定義される。式を見ての通り、

wake function は、電荷の通る位置と、前後に離れた２つの電荷の距離 s の関数になっている。因果関係を踏まえると $\boldsymbol{W}(s<0)=0$ である。後述するように、この wake function が結合インピーダンスと関係する。

ここで問題にしているのは加速モード（TM010 モード）なので、縦方向のみを考えれば良い。軸対称モード（monople）の wake function（力の積分）は r,θ に依存しないことが分かっている [27, 28]。従って縦方向の wake function $W_{\parallel}$ は任意の r において s だけの関数となり、

$$W_{\parallel}(s)=-\frac{1}{q}\int_{-\infty}^{\infty}E_z\left(z,t=\frac{s+z}{c}\right)dz \quad (7.8)$$

と書ける。

次に、leading particle が点電荷でなく、z 方向に電荷分布（線密度）$\lambda(s)$ で広がりを持つビームになった場合を考える（ビーム先頭の位置がが $s=0$）。ただし、総電荷量は q とする。電流は電荷密度に光速度を掛けたものになるので、このビームの電流（時間変化）を $i(\tau)$ とすると、

$$i(\tau=t-z/c)=c\lambda(s=c\tau) \quad (7.9a)$$

$$q=\int\lambda(s)ds=\int i(\tau)d\tau \quad (7.9b)$$

の関係になる。

ここで、この電流 $i(\tau)$ により励起される電圧 $v(\tau)$ は（加速の方向を正として）、

$$v(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}E_z\left(z,t=z/c+\tau\right)dz \quad (7.10)$$

であり、この右辺は、縦方向 wake function $W_{\parallel}$ と電荷線密度 $\lambda(s)$ のコンボリューションで表せるので、

$$\begin{aligned} v(\tau)= & \\ & -\int_{-\infty}^{\infty}W_{\parallel}[c(\tau-\tau')]\lambda(s=c\tau')c\cdot d\tau' \\ & =-\int_{-\infty}^{\infty}W_{\parallel}[c(\tau-\tau')]i(\tau')d\tau' \end{aligned} \quad (7.11)$$

となる。これをフーリエ変換してみると、

$$\begin{aligned} V(\omega)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v(\tau)e^{j\omega\tau}d\tau \\ &=-\int_{-\infty}^{\infty}W_{\parallel}[c(\tau'')]e^{j\omega\tau''}d\tau'' \\ &\quad\times\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}i(\tau')e^{j\omega\tau'}d\tau' \end{aligned} \quad (7.12)$$

となるので、電流 $i(\tau)$ のフーリエ変換が

$$I(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}i(\tau)e^{j\omega\tau}d\tau \quad (7.13)$$

であることを踏まえると、式 (7.5a) から、

$$\begin{aligned} Z_{\parallel}(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}W_{\parallel}[c(\tau'')]e^{j\omega\tau''}d\tau'' \\ &=\int_{-\infty}^{\infty}W_{\parallel}(s)e^{j\omega\frac{s}{c}}\frac{ds}{c} \end{aligned} \quad (7.14)$$

の関係が得られる。つまり、結合インピーダンスと wake function はフーリエ変換の関係にある。

以上は、縦方向（monopole）のみの簡単な場合について示したが、横方向についても同様に、

$$\boldsymbol{Z}_{\perp}(\omega)=-j\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{W}_{\perp}(s)e^{j\omega\frac{s}{c}}\frac{ds}{c} \quad (7.15)$$

の関係がある [27, 28]。

ここで、wake function は定義から実数であることと、$\boldsymbol{W}(s<0)=0$ であることを踏まえて、式 (7.14) および式 (7.15) を見ると、インピーダンスには

$$Z_{\parallel}(-\omega)=Z_{\parallel}^{*}(\omega) \tag{7.16a}$$

$$\boldsymbol{Z}_{\perp}(-\omega)=-\boldsymbol{Z}_{\perp}^{*}(\omega) \tag{7.16b}$$

という性質があることが分かる。

他にも、結合インピーダンス、wake function には、縦方向と横方向の関係など特徴的な性質を持っているが、本テキストでは省略する。詳細は上記に挙げた参考文献等を参照して頂きたい。

7.3.2 Loss Factor

もう一点、wake function に関連して、loss factor と呼ばれるパラメータがよく使われる。一般的に loss factor は k の文字で表される。ある構造体の wake function が $W(s)$ である場合、式 (7.9b) の電荷分布を持つバンチに対して、その構造体の loss factor を、

$$k=\frac{1}{q^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{s}W(s-s')\lambda(s)\lambda(s')ds'ds \tag{7.17}$$

のように定義する。この構造体をバンチが通過した際に失われるエネルギー ΔU_{b} は、loss factor を用いて、

$$\Delta U_{\mathrm{b}}=kq^2 \tag{7.18}$$

と求められる。また、式 (7.17) について、バンチを無限に短くした場合（点電荷にした場合）の loss facotor は、詳細は省くが、

$$k=\lim_{s\to+0}\frac{1}{2}W(s) \tag{7.19}$$

となる [1,28]。

ここで、点電荷 q が、loss factor k の加速空洞を通過した場合を考える。通過し瞬間、空洞に励起される電圧 V_{c} は（通過前は電磁場がないとして）、上式より $V_{\mathrm{c}}=qW(0)=2qk$ と書ける。この時、空洞に励起されるエネルギーと V_{c} の関係は、式 (4.1)(4.5) より、

$$U=\frac{V_{\mathrm{c}}^2}{\omega_0}\cdot\frac{Q_0}{R_{\mathrm{sh}}}=\frac{4k^2q^2}{\omega_0}\cdot\frac{Q_0}{R_{\mathrm{sh}}} \tag{7.20}$$

となる。これは電荷が失うエネルギー kq^2 に等しいので、加速空洞の loss factor は、

$$k=\frac{\omega_0}{4}\left(\frac{R_{\mathrm{sh}}}{Q_0}\right) \tag{7.21}$$

と表すことができる。以上より、電子（陽電子）一個（1.6×10^{-19}C）が空洞に励起する（空洞で失う）エネルギーは加速ゲイン（~MeV）に比べて無視できるくらい小さいことが分かる。

ちなみに、一般的な構造体の wake function と loss factor を知りたい場合、通常は有限差分時間領域法による計算（バンチが通過する際の電磁場の時間発展シミュレーション）によって求める。また、シミュレーションで得られた wake function をフーリエ変換することで、構造体の結合インピーダンス（周波数特性）を得ることができる。

7.4 振動するビームの周波数スペクトル

さて、上記でビームの不安定性はインピーダンス（周波数特性）で評価されると述べた。不安定性に影響するのはビームが持つ周波数成分だけなので、周回（周期的）ビームが周波数領域でどのような特徴を持っているか見ておく。

本講義では加速モードによる不安定性をテーマとするので、以降では縦方向の振動ついて扱う。第 6.1

節では、振動のない周期的な（まったく同じ）バンチが通過する場合の周波数成分について説明した。ここでは、ビーム粒子（ポイント・バンチ）がシンクロトロン振動している場合、個々の粒子がどのような周波数成分を持っているかを考える。

7.4.1　単バンチの場合

話を簡単にするために、ポイント・バンチは 1 つであるとする。従ってバンチが 1 点を通過する周期は、リングを周回（revolution）する周期 T_{rev} である。ポイント・バンチが角周波数 ω_{s} でシンクロトロン振動している場合、周回するビームの信号（図 7.5 参照）の時間変化 $i(t)$ は、

$$i(t) \propto \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[t - kT_{\mathrm{rev}} + \hat{\tau}\cos(\omega_{\mathrm{s}} kT_{\mathrm{rev}})] \tag{7.22}$$

と書ける。ここで δ はデルタ関数、$\hat{\tau}$ は微小な（時間の）振動振幅である。これをフーリエ変換すると

$$\begin{aligned} I(\omega) &\propto \int_{-\infty}^{\infty} i(t) e^{j\omega t} dt \\ &\propto \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\{j\omega[kT_{\mathrm{rev}} - \hat{\tau}\cos(\omega_{\mathrm{s}} kT_{\mathrm{rev}})]\} \end{aligned} \tag{7.23}$$

となる。ここで振動は十分微小（$\omega\hat{\tau} \ll 1$）であるとすると、式 (7.23) は、

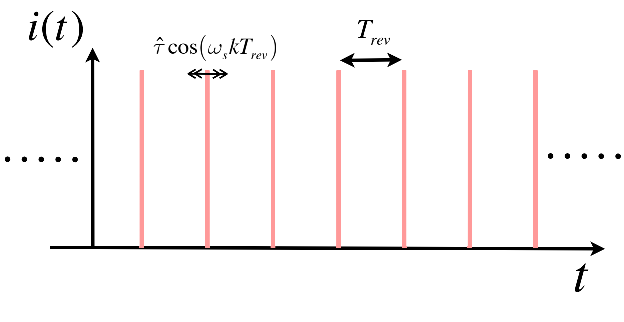

図 7.5　縦方向に微小振動するポイント・バンチ 1 つが周回してる場合のビーム信号（時間領域）

$$I(\omega) \propto \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\omega kT_{\mathrm{rev}}}[1 - j\omega\hat{\tau}\cos(\omega_{\mathrm{s}} kT_{\mathrm{rev}})] \tag{7.24}$$

と近似できる。この第 1 項目は、デルタ関数の逆フーリエ変換に相当するので、

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\omega kT_{\mathrm{rev}}} = \omega_{\mathrm{rev}} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - p\omega_{\mathrm{rev}}) \tag{7.25}$$

となる。ここで $\omega_{\mathrm{rev}} = 2\pi/T_{\mathrm{rev}}$ である。また、式 (7.24) の第 2 項目は、cos を exp で表すと同様にデルタ関数の逆フーリエ変換に相当する形になるので、

$$\begin{aligned} &-j\omega \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\tau}\cos(\omega_{\mathrm{s}} kT_{\mathrm{rev}}) e^{j\omega kT_{\mathrm{rev}}} \\ &= -\frac{j\hat{\tau}\omega_{\mathrm{rev}}}{2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} [(p\omega_{\mathrm{rev}} - \omega_{\mathrm{s}})\delta(\omega - p\omega_{\mathrm{rev}} + \omega_{\mathrm{s}}) \\ &\qquad + (p\omega_{\mathrm{rev}} + \omega_{\mathrm{s}})\delta(\omega - p\omega_{\mathrm{rev}} - \omega_{\mathrm{s}})] \end{aligned} \tag{7.26}$$

と変形できる。

式 (7.25)+ 式 (7.26)（の大きさ）から、周波数領域では、周回周波数 ω_{rev} ごとに周期的な線スペクトルを持ち、その線スペクトルすべての両側（$p\omega_{\mathrm{rev}} \pm \omega_{\mathrm{s}}$）にシンクロトロン振動のサイドバンドができる。もちろん実際は、ポイント・バンチ（デルタ関数）ではなく、実際の信号は強度に応じた高さを持ち、図 7.6 のようになる。ただし第 6.1 節でも示したように、バンチ幅（Gaussian）を考慮すると全体のスペクトルは一定にはならない。

ここでは、ビーム（ポイント・バンチ）がシンクロトロン振動していると、バンチ周期ハーモニクスの両側に ω_{s} のサイドバンドが立つということを簡単に示した。ここでは縦方向の振動のみを考えているが、

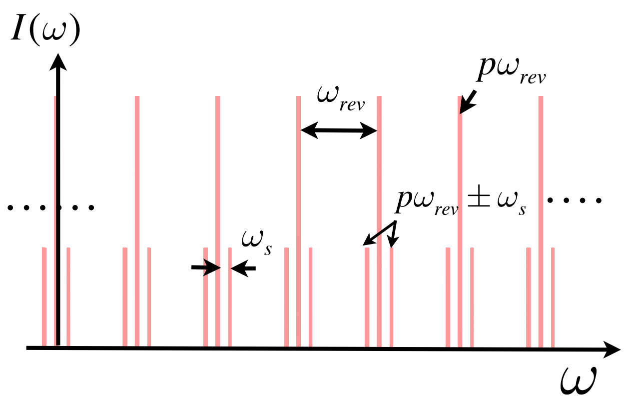

図 7.6　シンクロトロン振動周波数 ω_s で振動しているポイント・バンチが 1 つ周回している場合の周波数スペクトル

横方向の振動（ベータトロン振動）も同様にサイドバンドが出てくる。

一般的に、周回周波数に比べてシンクロトロン振動数はかなり小さく（$\omega_\mathrm{s} < \omega_\mathrm{rev}/10$）、1 回振動する間に何 10 周もする。SuperKEKB の例では、周回周波数が 100kHz で、シロトロン振動は 2~3kHz である。つまり 1 回の振動の間に約 30〜50 周する。

以上ではバンチ 1 つを仮定しているが、例えば m 個のバンチが等間隔に並び、それぞれ区別ができないとすれば、上記の話は $\omega_\mathrm{rev} \to m\omega_\mathrm{rev}$ と置き換えれば良い。ただし実際はバンチの個性もあり、必ず周回周波数（ω_rev）の周期性があるので、ω_rev 間隔でスペクトルが見える。また、以降に説明するように、バンチ間の振動モードを考慮すると、やはり ω_rev の整数倍の成分が出る。

7.4.2　複数バンチの振動モードと周波数成分

以降の話は、話を簡単にするために、すべての RF バケットにバンチがあるとする。言い換えると、リング中を周回しているバンチ数はハーモニックナンバー h と同じであるとする。この場合、当然バンチは等間隔になる。また、RF 周波数 ω_rf はビーム周回周波数 ω_rev の h 倍の関係（$\omega_\mathrm{rf} = h\omega_\mathrm{rev}$）にある。

実際には、SuperKEKB で全ての RF バケットにビームを（意図的に）詰めることはしないが、以下の話の内容（振動モードなど）は、実用上でも最大バンチ数 h を基準にするのが普通なので、すべてのバケットにビームがあると考えて差し支えない。あるいは意図的にバンチを入れないバケットでも実際には電荷が完全に 0 であるとは言えない、と考えても良い。

複数（等間隔で）並んで周回しているバンチどうしが wakefield で結合して振動している場合、「振動のモード」が結合バンチ不安定の扱う際の重要な鍵となる。振動モードは、バンチ内の粒子（あるいはポイント・バンチ）の振動が、隣り合うバンチとどれだけ位相がズレているか（バンチ間位相差）により定義される（トータル的にはモードの重ね合わせになる）（図 7.7 参照）。

例えば、$\omega_\mathrm{s}t$ でシンクロトロン振動している場合について考える。バンチ間位相差が $\Delta\theta_\mathrm{b}$ とし、バンチ番号を 0 から数えるとする。0 バンチ目を基準として、n 番目のバンチにおける振動位相は $\omega_\mathrm{s}t + n\Delta\theta_\mathrm{b}$ である（n は 0 から $h-1$ までの整数）。一周すると自分自身のバンチに戻るので（$n = h$ は 0 番目のバンチになる）ので、$h\Delta\theta_\mathrm{b} = 2\pi\mu$（$\mu$ は整数）の関係を持つ。この μ がモード番号に相当する。

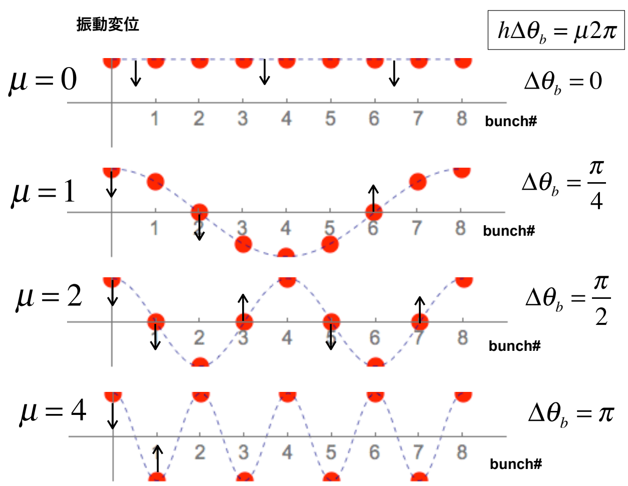

図 7.7　バンチ結合による振動モード（$h = 8, \mu = 0, 1, 2, 4$ の場合）。μ はモード番号。縦軸は振動の変位、横軸はバンチ番号を表す。8 番目は元のバンチ（0 番目）と同じ。

上記の説明を図で表したものが図 7.7 である。縦軸は振動の変位、横軸はバンチ番号を表す。$h = 8$ とし $\mu = 0, 1, 2, 4$ について、ある瞬間（$t = 0$）のバンチ間の位相関係を示している。8 番目は元のバンチつまり 0 番目と同じになる。

図 7.7 から、一周で μ 回のバンチのうねりがあるのが分かる。ここで p を整数とすると、モード μ は $(ph+\mu)$ の場合と振動の区別はつかないので、モード番号は $0 \leq \mu \leq h-1$ の整数だけに限って良い。ただし便宜上、μ は負の場合も含め、$-(h-1) \leq \mu \leq h-1$ の範囲の値を取るものとする。この場合、$\mu = h-m$ と $\mu = -m$ のモードは同じであることに注意（m は $0 \leq m \leq h-1$ の整数）。

また、図 7.7 のように $\mu/h = 0, 1/4, 1/2$ の場合、位相差 $\Delta\theta_{\mathrm{b}}$ に対応させて、それぞれお 0 モード、$\pi/2$ モード、π モードのように呼ばれる場合もある。

図 7.7 をリング上に示したものが図 7.8 である。$\mu = 1, 4$ の場合について、図 7.7 と同様に、ある瞬間の位相関係を示している。、図 7.7 および図 7.8 は、分かりやすいように横に変位してるようなイメージで表現しているが、シンクロトロン振動の場合は縦方向（進行方向）の振動なので、疎密波のようなイメージになる。また図では、静止した状態でしか表せないが、ビームは振動しながら（バンチ間位相差は変わらず）周回する。

では、このモードも含めて周波数成分を考える。

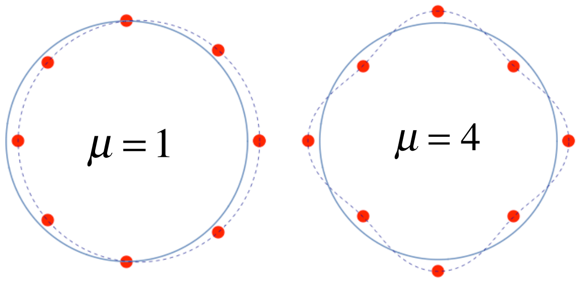

図 7.8　図 7.7 をリング上に示したもの（$h = 8, \mu = 1, 4$ の場合）。図では、分かり易くするために横方向の変位で表している。

先に述べたように、一周で μ 回のバンチのうねりがあるり、これが周回周波数 ω_{rev} で回転するので、単バンチの場合に、$\mu\omega_{\mathrm{rev}}$ の周波数成分が追加されることは類推できるだろう。これについて、単バンチの場合から対応させて書いてみる。モード μ に対して、式 (7.22) に対応する時間領域でのビーム電流、

$$i_\mu(t) \propto \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{h-1} \delta \left[t - kT_{\mathrm{rev}} + \frac{nT_{\mathrm{rev}}}{h} + \hat{\tau} \cos \left\{ \omega_{\mathrm{s}} T_{\mathrm{rev}} \left(k - \frac{n}{h} \right) - \frac{2\pi\mu n}{h} \right\} \right] \tag{7.27}$$

と書くことができる。n はバンチナンバー、k は周回数である。このフーリエ変換は、式 (7.24) に対応させて書くと、

$$I_\mu(\omega) \propto \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{h-1} \exp \left[j\omega T_{\mathrm{rev}} \left(k - \frac{n}{h} \right) \right] \times \left[1 - j\omega\hat{\tau} \cos \left\{ \omega_{\mathrm{s}} T_{\mathrm{rev}} \left(k - \frac{n}{h} \right) - \frac{2\pi\mu n}{h} \right\} \right] \tag{7.28}$$

となる。ここでまた式 (7.26) と同様にサイドバンドの項について見ると、

$$\begin{aligned} -j\omega\hat{\tau} & \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{h-1} \exp \left[j\omega T_{\mathrm{rev}} \left(k - \frac{n}{h} \right) \right] \times \cos \left\{ \omega_{\mathrm{s}} T_{\mathrm{rev}} \left(k - \frac{n}{h} \right) - \frac{2\pi\mu n}{h} \right\} \\ & \propto \sum_{p=-\infty}^{\infty} [\omega_p^{(+)} \delta(\omega - \omega_p^{(+)}) + \omega_p^{(-)} \delta(\omega - \omega_p^{(-)})] \end{aligned} \tag{7.29}$$

となる。ここで、

$$
\begin{aligned}
\omega_p^{(+)} &= ph\omega_{\rm rev} + \mu\omega_{\rm rev} + \omega_{\rm s} \\
\omega_p^{(-)} &= ph\omega_{\rm rev} - \mu\omega_{\rm rev} - \omega_{\rm s}
\end{aligned}
\tag{7.30}
$$

である。この結果は、図にするとやはり図 7.6 と同じになるが、$ph\omega_{\rm rev}$ から数えて $\omega_{\rm rev}$ の μ 倍の周波数がモード μ の振動に対応する。

また $h\omega_{\rm rev} = \omega_{\rm rf}$ であることを考えると、RF 周波数の整数倍（$p\omega_{\rm rf}$）の周りに、モード振動のサイドバンド（$\pm\mu\omega_{\rm rev}$）が並び、またそれらの両サイドにシンクトロン振動のサイドバンド（$\pm\omega_{\rm s}$）があるとも言える（あるモードについて対応する $\omega_{\rm s}$ のサイドバンドは、$p\omega_{\rm rf}$ を挟んで対称の位置にある）。

このように、ビーム信号は強い周期性を持つため、周波数領域では跳び跳びの周期的な線スペクトルとなる。この跳び跳びにある周波数成分のみが結合バンチ不安定性に対して意味を持つ。不安定性の growth rate を評価する場合、モード毎に対応するの周波数成分（インピーダンス）が重要となる。

7.5 結合バンチ不安定性の Growth Rate

第 7.2 節で簡単に触れたように、結合バンチ不安定性を定量的に扱うためには、振動の大きさの成長の速さ（growth rate) を結合インピーダンスを使って評価する。本節では、不安定性の具体的な評価方法（定量的な扱い）について紹介する。

前節で前置きしたように、簡単のために、すべての RF バケットにバンチがある（バンチの数は h）とする（以降の節でも同様)。

n 番目のバンチ粒子（ポイント・バンチ）について、微小な縦振動の時間的変位量（理想位置からの遅れ時間）$\hat{\tau}_n$ を、

$$
\hat{\tau}_n(s) = \tilde{\tau}_n \exp\left(-j\Omega s/c\right) \tag{7.31}
$$

と表すとする。ここで s は軌道座標系におけるバンチ（振動中心）の位置である。Ω は一般的に複素数で、Ω の実部は振動周波数、虚部が振幅の増大率（τ_g^{-1}）を与える。

この場合、振動モード μ の Ω（$= \Omega_\mu$）とシンクロトロン振動数 $\omega_{\rm s}$ との関係について、縦方向結合インピーダンス $Z_\parallel(\omega)$ を用いて表すことができる。先に結果を示すと、

$$
\begin{aligned}
\Omega_\mu^2 - \omega_{\rm s}^2 &= \frac{je^2hN_{\rm b}\alpha_{\rm p}}{E_0T_{\rm rev}^2} \\
&\times\left[\sum_{p=-\infty}^{\infty}\omega_p^{(\mu)}Z_\parallel(\omega_p) - \sum_{p=-\infty}^{\infty}hp\omega_{\rm rev}Z_\parallel(hp\omega_{\rm rev})\right]
\end{aligned}
\tag{7.32}
$$

となる（ [1,27,28] など)。ただし、

$$
\omega_p^{(\mu)} = (hp+\mu)\omega_{\rm rev} + \Omega_\mu \tag{7.33}
$$

である。ここで、すべてのポイント・バンチが等しく $eN_{\rm b}$ の電荷量を持つとしている（e は電荷素量)。また、$\alpha_{\rm p}$ は momentum compaction factor、E_0 はビームエネルギーである。

式 (7.32) を導くために真面目に説明すると非常に骨が折れるので、詳細は他の文献を参照して頂きたい。ここでは一応、導出の流れだけを簡単に示しておく。ただし実用上は、この結果だけを用いれば良い。

ビームのエネルギー変動と到達時間の関係、および wakefield によるエネルギー収支（wake function $W_\parallel(s)$）を考慮すると、$\hat{\tau}_n(s)$ に関する運動方程式は

$$
\begin{aligned}
\frac{{\rm d}^2\hat{\tau}_n(s)}{{\rm d}s^2} + \left(\frac{\omega_{\rm s0}}{c}\right)^2\hat{\tau}_n(s) &= -\frac{e^2N_{\rm b}\alpha_{\rm p}}{E_0c^2T_{\rm rev}} \\
&\times\sum_k\sum_{n'=0}^{h-1}W_\parallel\left[c\{\hat{\tau}_n(s) - \hat{\tau}_{k,n'-n}\}\right]
\end{aligned}
\tag{7.34}
$$

と書くことができる。ここで、

$$\hat{\tau}_{k,n'-n} = \hat{\tau}_{n'}\left(s - ckT_{\mathrm{rev}} - \frac{c(n'-n)T_{\mathrm{rev}}}{h}\right)$$
$$-ckT_{\mathrm{rev}} - \frac{c(n'-n)T_{\mathrm{rev}}}{h} \tag{7.35}$$

である。また ω_{s0} は、摂動のない（wakefield の影響がない）場合のシンクロトロン周波数である。式 (7.34) において $W_{\parallel}$ はリング一周の縦方向 wake function で、k についての和は周回ごとの wakefield の積算を意味する。

ここで振動が微小（wakefield の変動周期に比べて $\hat{\tau}_n - \hat{\tau}_{n'}$ が十分小さい）として、$W_{\parallel}$ を $ckT_{\mathrm{rev}} + c(n'-n)T_{\mathrm{rev}}/h$ の周りで展開すると、

$$W_{\parallel}[c(\hat{\tau}_n(s) - \hat{\tau}_{k,n'-n})] \simeq$$
$$W_{\parallel}\left[ckT_{\mathrm{rev}} + \frac{c(n'-n)T_{\mathrm{rev}}}{h}\right] +$$
$$\left[\hat{\tau}_n(s) - \hat{\tau}_{n'}\left(s - ckT_{\mathrm{rev}} - \frac{c(n'-n)T_{\mathrm{rev}}}{h}\right)\right]$$
$$\times W'_{\parallel}\left[ckT_{\mathrm{rev}} + \frac{c(n'-n)T_{\mathrm{rev}}}{h}\right] \tag{7.36}$$

と近似できる。ここで、$W'_{\parallel}(s) = \mathrm{d}W_{\parallel}(s)/\mathrm{d}s$ である。次に、式 (7.31) に従ってバンチが振動してるとし、wake function とインピーダンスの関係（式 (7.14)）を利用すると、 式 (7.34) の運動方程式（式 (7.36) の近似を適用）から、

$$(\Omega^2 - \omega_{\mathrm{s}}^2)\tilde{\tau}_n = -\frac{je^2N_{\mathrm{b}}\alpha_{\mathrm{p}}}{E_0T_{\mathrm{rev}}^2}$$
$$\times \sum_{n'=0}^{h-1}\left[\tilde{\tau}_n \sum_{p=-\infty}^{\infty} p\omega_{\mathrm{rev}}Z_{\parallel}(p\omega_{\mathrm{rev}})\right.$$
$$\left. -\tilde{\tau}_{n'}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\omega_p Z_{\parallel}(p\omega_p)\exp\left(\frac{j2\pi p(n-n')}{h}\right)\right] \tag{7.37a}$$

$$\omega_p = p\omega_{\mathrm{rev}} + \Omega \tag{7.37b}$$

が得られる（これを導く際、Poisson の和公式が利用される）。これは固有値問題に帰着される。詳細は省くが、モード μ の振動 Ω_μ について、解として

$$\tilde{\tau}_n^{(\mu)} = \hat{\tau}^{(\mu)}\exp\left(\frac{j2\pi\mu n}{h}\right) \tag{7.38}$$

を仮定する（隣り合うバンチの振動位相さが $2\pi\mu/h$ である）と、μ 番目の固有解として式 (7.32) が得られる。

さて、この結果から、具体的に growth rate を計算する式が次のように得られる。

式 (7.32) において、Ω_μ と ω_{s} の差が小さいとすると、

$$\Omega_\mu^2 - \omega_{\mathrm{s}}^2 = (\Omega_\mu - \omega_{\mathrm{s}})(\Omega_\mu + \omega_{\mathrm{s}})$$
$$\simeq 2\omega_{\mathrm{s}}(\Omega_\mu - \omega_{\mathrm{s}}) \tag{7.39}$$

と近似できる。growth rate は Ω_μ の虚部に相当するので、モード μ に対する growth rate を τ_μ^{-1} とすると、式 (7.32)(7.39) から、

$$\tau_\mu^{-1} = \Im\Omega_\mu = \Im\left(\frac{\Omega_\mu^2 - \omega_{\mathrm{s}}^2}{2\omega_{\mathrm{s}}}\right)$$
$$= \frac{eI_{\mathrm{b}}\alpha_{\mathrm{p}}}{2E_0T_{\mathrm{rev}}\omega_{\mathrm{s}}} \times$$
$$\Re\left[\sum_{p=-\infty}^{\infty}\omega_p^{(\mu)}Z_{\parallel}(\omega_p) - \sum_{p=-\infty}^{\infty}hp\omega_{\mathrm{rev}}Z_{\parallel}(hp\omega_{\mathrm{rev}})\right] \tag{7.40}$$

が得られる。ここで $I_{\mathrm{b}} = ehN_{\mathrm{b}}/T\mathrm{rev}$ と置き換えている。

更に、インピーダンスについて、$Z_{\parallel}(-\omega) = Z_{\parallel}^*(\omega)$ である性質を利用すると、式 (7.40) の第 2 項の実部はキャンセルされ、第 1 項は

$$\tau_\mu^{-1} = \frac{eI_\mathrm{b}\alpha_\mathrm{p}}{2E_0T_\mathrm{rev}\omega_\mathrm{s}} \times \sum_{p=0}^{\infty}\left[\omega_p^{(\mu+)}\Re Z_\parallel(\omega_p^{(\mu+)}) - \omega_p^{(\mu-)}\Re Z_\parallel(\omega_p^{(\mu-)})\right] \tag{7.41}$$

と変形できる（p は 0 から数えられてることに注意)。ここで、

$$\begin{aligned}\omega_p^{(\mu+)} &= ph\omega_\mathrm{rev} + \mu\omega_\mathrm{rev} + \omega_\mathrm{s} \\ \omega_p^{(\mu-)} &= (p+1)h\omega_\mathrm{rev} - \mu\omega_\mathrm{rev} - \omega_\mathrm{s}\end{aligned} \tag{7.42}$$

である。ただし、ここでは $\Omega_\mu \approx \omega_\mathrm{s}$ とみなしているので、式 (7.33) において $\Omega_\mu = \omega_\mathrm{s}$ としている。またモード番号 μ は $0 \le \mu < h-1$ である。

以上より、ビームパイプ中の構造体の結合インピーダンス（周波数特性）が具体的に分かれば、結合バンチ不安定性の growth rate が計算できる。ここでは縦方向に関してのみ示しているが、横方向振動の growth rate についても横方向のインピーダンス $Z_\perp(\omega)$ を用いて類似した関係式になる。

式 (7.41) から分かるように、とびとびの周波数成分（式 (7.42)）に当たるインピーダンスにより、growth rate が与えられる。また、この式 (7.41) を見ると、第 1 項が不安定性を励起（excite）する効果に相当し、第 2 項は逆に不安定性を抑える (damp させる) 効果があることが分かる。

各振動モード μ とインピーダンス（exicte, damp）の関係を図にしたのが、図 7.9 である。例として $h = 4$ の場合である。式 (7.42) で $p = 1$ の周りについて示している。各モードの excite と damp が $ph\omega_\mathrm{rev}$（$= p\omega_\mathrm{rf}$）の周りで対称的な位置になり、また、$h\omega_\mathrm{rev}$ ごとに、その位置が繰り返される（効果はインピーダンスに従う)。

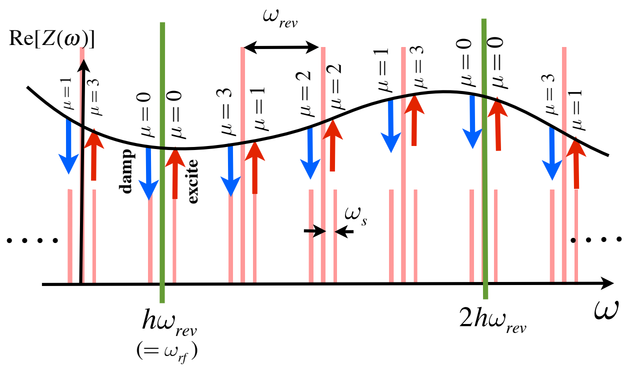

図 7.9　各振動モード μ とインピーダンス（exicte, damp）の関係。$h = 4$ の場合の例。式 (7.42) で $p = 1$ の周りを示している。矢印の上向きが exite、下向きが damp を表す。

式 (7.41)(7.42) により不安定性を励起させる周波数成分は決まるので、そこのインピーダンスをいかに小さくできるかが鍵となる。逆に、不安定性を抑える周波数成分は利用できるなら利用したほうが良い。

以上から、結合バンチ不安定性を考える場合、式 (7.41)(7.42) が実用的であり、最も重要な関係式と言える。別の言い方をすれば、これまでの話は気にせず、この関係式だけを知っていれば実用上ほとんど困らない。

次に、Ω_μ の実部について触れておく。上述したように Ω_μ の実部は振動周波数を与える。再度、式 (7.39) の近似式を利用すると、式 (7.32) から、

$$\Delta\omega_\mathrm{s}^{(\mu)} = \Re\Omega_\mu - \omega_\mathrm{s} = \Re\left(\frac{\Omega_\mu^2 - \omega_\mathrm{s}^2}{2\omega_\mathrm{s}}\right) = \frac{eI_\mathrm{b}\alpha_\mathrm{p}}{2E_0T_\mathrm{rev}\omega_\mathrm{s}} \times \sum_{p=0}^{\infty}\left[\omega_p^{(\mu+)}\Im Z_\parallel(\omega_p^{(\mu+)}) + \omega_p^{(\mu-)}\Im Z_\parallel(\omega_p^{(\mu-)})\right] \tag{7.43}$$

が得られる。これよりバンチ間結合による振動周波数の変化量 $\Delta\omega_\mathrm{s}^{(\mu)}$ が求められる。

7.6　加速モードに起因する不安定性の評価

本講義のテーマでは、加速モードに起因する不安定性を問題にしているので、今までの式に加速空洞のインピーダンスを適用する。

7.6.1　空洞インピーダンスによる Growth Rate

ここで、加速空洞（加速モード）の結合インピーダンスを $Z_{\mathrm{a}}(\omega)$ とする。詳しい導出は省くが、バンチが通過した際に空洞に励起する電磁場を考え、wake function の定義に従って求めると、$Z_{\parallel}(\omega) = Z_{\mathrm{a}}(\omega) = Z^*_{\mathrm{in}}(\omega)$ の関係が得られる（詳細は [1,27,28] 等を参照）。$Z_{\mathrm{in}}(\omega)$ は、等価回路モデル（図 6.4）のインピーダンス（式 (5.2)）である。従って、

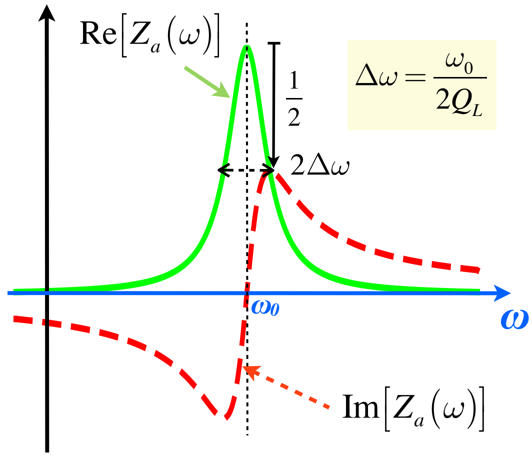

図 7.10　空洞（共振器）インピーダンスの実部（実線）と虚部（破線）をそれぞれプロット

$$Z_{\mathrm{a}}(\omega) = Z^*_{\mathrm{in}}(\omega) = \frac{R_{\mathrm{sh}}/2(\beta+1)}{1 - jQ_{\mathrm{L}}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{R_{\mathrm{sh}}/2(\beta+1)}{1 + jQ_{\mathrm{L}}\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)} \tag{7.44}$$

である。これは共振器回路は、wakefield によるビーム間の結合では位相回転が逆に見えると解釈できるだろう。

先に述べたように、インピーダンスの実部が不安定性の growth rate、虚部がシンクロトロン振動の周波数シフト（tune shift）に関係する。図 7.10 に、$Z_{\mathrm{a}}(\omega)$ の実部と虚部のプロットを示す。第 5.1 節の共振器のインピーダンスを複素平面にプロットした円（図 5.3）を見ると分かるように、$\psi = 45°$ となる周波数、すなわちピークの 1/2 で実部と虚部が同じ値になる（交差する）ところが $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ にあたる。ここで $\Delta\omega = \omega_0/2Q_{\mathrm{L}}$ である。

図 7.10 を見ると分かる通り、空洞のインピーダンスは共振周波数（$\approx \omega_{\mathrm{rf}}$）で高いピークを持つため、RF 周波数の周りだけ考えれば良い。従って、式 (7.41) において $p = 0, 1$ だけになる。結果として、式 (7.41) は、$h\omega_{\mathrm{rev}} = \omega_{\mathrm{rf}}$ なので、

$$\tau_\mu^{-1} = \frac{eI_{\mathrm{b}}\alpha_{\mathrm{p}}}{2E_0 T_{\mathrm{rev}}\omega_{\mathrm{s}}} \times \left[(\omega_{\mathrm{rf}} + \mu\omega_{\mathrm{rev}} + \omega_{\mathrm{s}})\Re Z_{\mathrm{a}}(\omega_{\mathrm{rf}} + \mu\omega_{\mathrm{rev}} + \omega_{\mathrm{s}}) - (\omega_{\mathrm{rf}} - \mu\omega_{\mathrm{rev}} - \omega_{\mathrm{s}})\Re Z_{\mathrm{a}}(\omega_{\mathrm{rf}} - \mu\omega_{\mathrm{rev}} - \omega_{\mathrm{s}})\right] \tag{7.45}$$

となる。この式により加速モードに起因する結合バンチ不安定性（growth rate）が評価される。モード μ ごとに、それぞれの growth rate を求めることに注意。

ここで、μ について $-(h-1) \le \mu \le h-1$ の範囲で、RF 周波数を中心にその前後だけ考慮する。ただし、図 7.9 からも分かるように、$\mu = -m$ と $\mu = h - m$ は同じモードである（m は 0 から $h-1$ の整数）。この場合、インピーダンスと振動モード μ（excite,damp）の関係は図 7.11 及び図 7.12 のようになる。ここで、第 6.2 節で説明したよう、ビーム加速する空洞は optimum tuning のため、共振周波数は RF 周波数より引く周波数へ detuning される。図 7.11 および図 7.12 はそれぞれ $\mu = 0, +1, +2$ の場合、$\mu = -1, -2, -3$（$\mu = h-1, h-2, -3$）の場合を示す。

図 7.11 を見ると分かるように、空洞が負の方向

($\omega_0 < \omega_{\rm rf}$)に detuning されてれる場合、インピーダンスは共振点で対称なので、$\mu = 0$ モードおよび μ が正のモードに関しては、damp の効果が excite より大きくなる($\omega_{\rm rf}$ の周りでインピーダンスにかる係数はほぼ同じとして)。すなわち、これらのモードについては安定な条件にある。逆に、正の方向への detuning は不安定領域になる。ここが重要なポイントで、最もインピーダンスが大きい 0 モードについて、optimum tuning は単に電力の効率化だけでなく、同時に結合バンチ不安定性を抑えるという重要な役割を果たしている。この条件を最初に示したの Robinson で [29]、Robinson criterion などと言われる。ただし、最初に Robinson が示したものはバンチ 1 つの場合で、導出の仕方もこれとは異なる(厳密には多バンチの 0 モードとは異なるかもしれないが、growth rate に関しては 0 モードの場合と同じである)。

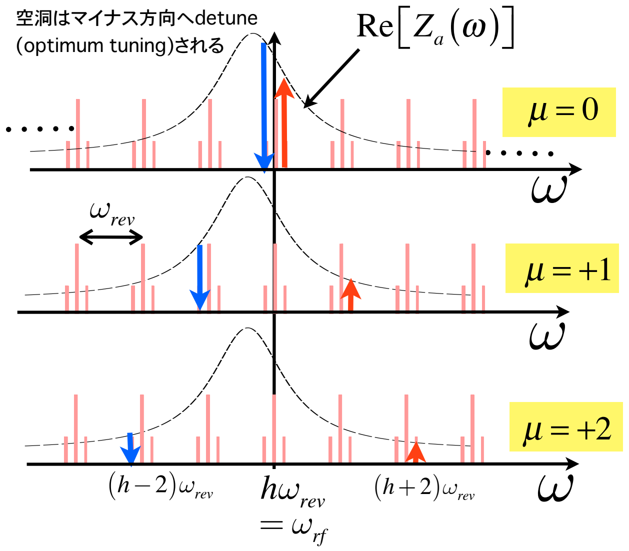

図 7.11　空洞インピーダンス(optimum tuning 時)とモード μ(excite, damp)の関係。$\mu = 0, +1, +2$ の場合を示す。

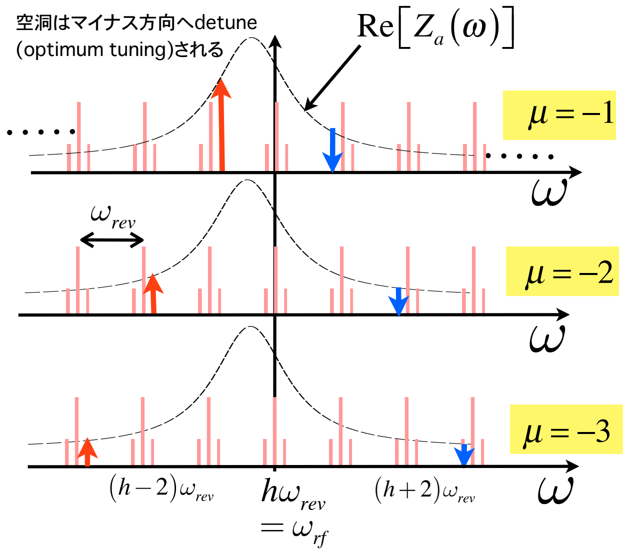

図 7.12　空洞インピーダンス(optimum tuning 時)とモード μ(excite, damp)の関係。$\mu = -1, -2, -3$ の場合を示す。

一方、$\mu < 0$ の場合、図 7.12 に示すように、インピーダンスは excite の効果が大きくなる。従って detuning 量(ビーム電流)が大きくなるほど、結合バンチ不安定性(特に $\mu = -1$ モード)が励起されやすくなる。上記の 0 モードの安定性も含め optimum tuning は必須であるので、この問題は避けられない。特に、ビーム電流が増えるにつれて、detuning ($|\Delta\omega_{\rm opt}|$)が周回周波数 $\omega_{\rm rev}$ と同程度になる(あるいは超えてしまう)と、growth rate は桁違いに大きくなり(成長が非常に速くなり)結合バンチ不安定性を抑えるのは困難になってくる。そのため、この問題を克服するために、まず、optimum tuning による空洞 detuning$|\Delta\omega_{\rm opt}|$ が出来るだけ小さくなるように空洞を設計することである。

optimum tuning に対して、空洞 detuning を小さくすることを考える場合、$\Delta\omega_{\rm opt}$ を与える式 (6.16) を見ると、Q_0 が高いほうが良いことが分かる。式 (6.16) からは、加速電圧 $V_{\rm c}$ を高くしたり、シャントインピーダンス $R_{\rm sh}$ を下げても、$|\Delta\omega_{\rm opt}|$ は小さくなるが、効果があるほど $V_{\rm c}, R_{\rm sh}$ を変えると供給電力効率など別の問題が起き、現実的な解でなくなる。やはり Q_0 を高くするのが望ましい。

そのために Q 値が非常に高い超伝導を用いるのは理に適っている。しかし $Q_{\rm L}$ が高すぎたり加速電圧が高いと、異なるビーム不安定性の問題(後述)等があり、超伝導だけで運転するのはリスクがある。そのため KEKB 加速器(SuperKEKB)では常伝導空洞も併用される。ところが通常の常伝導空洞($Q_0 = 10000 \sim 20000$)では、空洞 detuning 量が数 100 kHz になってしまう。KEKB (SuperKEKB) の

周回周波数は 100kHz なので、$\mu = -1, -2$ モードを跨ぐことになり、そのままでは結合バンチ不安定性が致命的な問題になりうる。

そこで KEKB 加速器で考案されたのが「ARES 空洞」である [6, 30–32]。ARES 空洞は、RF 蓄積エネルギーを大きくした「貯蔵空洞」を加速空洞に結合させせることにより、実効的に Q_0 を高くしている（図 9.6 参照）。その結果、$|\Delta\omega_{\rm opt}|$ を 1/10 に抑えることができる（参考文献、もしくは第 9.3.2 節参照）。SuperKEKB のデザイン電流では、detunig は約-30kHz になる。これは超伝導空洞と同程度の detunig 量である。表 6.1 における常伝導空洞のパラメータは ARES 空洞の値である。ARES 空洞に関して詳細は参考文献を参照して頂きたい。

このように超伝導空洞と ARES 空洞により、detunig 量はかなり小さく抑えることができるが、それでも以下に示すように SuperKEKB の場合では結合バンチ不安定性を完全に抑えることができない。

式 (7.45) を使って具体的に growth rate を計算した結果を図 7.13、7.14 に示す [33, 34]。SuperKEKB のデザインに対する評価である。図 7.13 が HER、図 7.14 が LER について示している。全加速空洞（リング一周分）のインピーダンスを合計して growth rate を求めている。水平な直線が radiation damping rate を示す。この radiation damping rate が不安定が起きる閾値に相当する。破線は、空洞 1 台（LER は ARES 空洞、HER は超伝導空洞）が休止（スタンバイ）状態にある場合の growth rate を示す。休止（スタンバイ）状態というのは、RF システムにトラブルが起き、空洞に RF パワーを供給できない場合に、休止させておく状態である。休止させる場合、ビームに直接影響しないよう、空洞の共振周波数は RF 周波数より-150kHz（$\mu = -1$ と -2 の間）に detuning させておく。2 台休止させる場合は、それぞれ-150kHz と +150kHz に detune させ、結合バンチ不安定性を正負のモードでキャンセルさせる（図 7.11、7.12 参照）。

図 7.13、7.14 から分かるように、SuperKEKB では

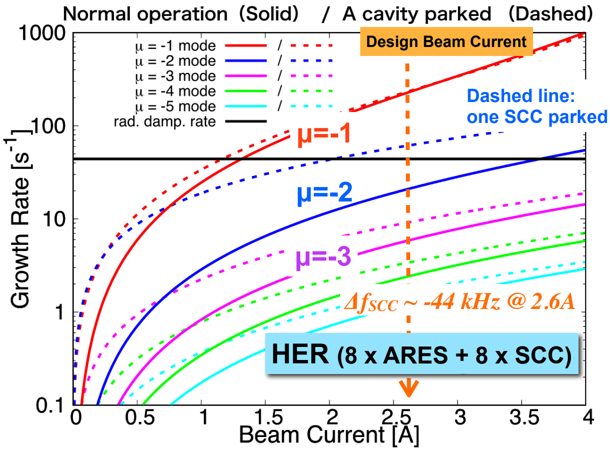

図 7.13　加速モードに起因する結合バンチ不安定性の growth rate の計算値（HER）

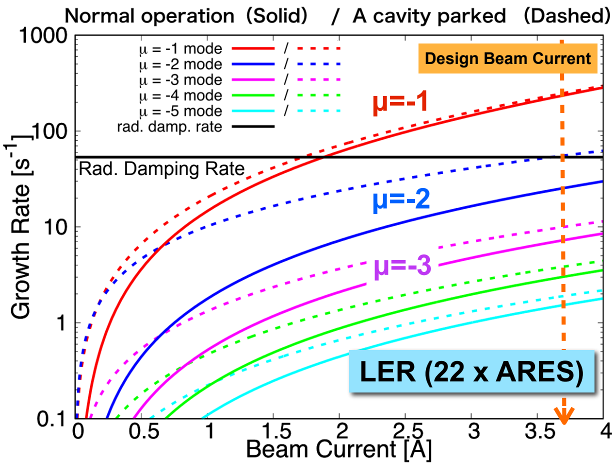

図 7.14　LER について加速モードに起因する結合バンチ不安定性の growth rate の計算値（LER）

デザイン電流までに growth rate が閾値（radiation damping rate）を超え、$\mu = -1$ と -2 モードの結合バンチ不安定性が起こると予想させる。また、$\mu = -3$ モードも条件によっては起こることが心配される。従って、フィードバック制御等で強制的に不安定性を抑える（不安定性モードに対応する周波数成分のインピーダンスを実効的に下げる）ことが必要になる。その対処方法の詳細については第 8 章で紹介する。

7.6.2　シンクロトロン振動数の変化

ここで、改めて Ω_μ の実部（式 (7.43)）について考える。加速モードのインピーダンス（RF 周波数の周

り）だけを考慮すると式 (7.43) は、式 (7.45) と同様に

$$\Delta\omega_{\rm s}^{(\mu)} = \frac{eI_{\rm b}\alpha_{\rm p}}{2E_0T_{\rm rev}\omega_{\rm s}} \times$$
$$[(\omega_{\rm rf}+\mu\omega_{\rm rev}+\omega_{\rm s})\Im Z_{\rm a}(\omega_{\rm rf}+\mu\omega_{\rm rev}+\omega_{\rm s})$$
$$+(\omega_{\rm rf}-\mu\omega_{\rm rev}-\omega_{\rm s})\Im Z_{\rm a}(\omega_{\rm rf}-\mu\omega_{\rm rev}-\omega_{\rm s})] \tag{7.46}$$

となる。これは、バンチ間結合によるシンクロトロン振動の周波数変化（tune shift）を表す。

空洞インピーダンスの虚部（図 7.10 を参照）の特徴を考慮すると、optimum tuning（$\omega_0 < \omega_{\rm rf}$）の場合、式 (7.46) に従う周波数変化（$\Delta\omega_{\rm s}^{(\mu)}$）は、$\mu = 0$ モードでは必ず正になる。つまり ω_s が高くなる方向に変化する。

一方、他のモードについては、空洞インピーダンスの幅 $\Delta\omega$ と周回周波数 $\omega_{\rm rev}$ の大きさ、および空洞 detuning 量に依存する。SuperKEKB の場合（$\Delta\omega \sim \omega_{\rm rev}/10$）における運転の範囲では、下がる方向に変化する。

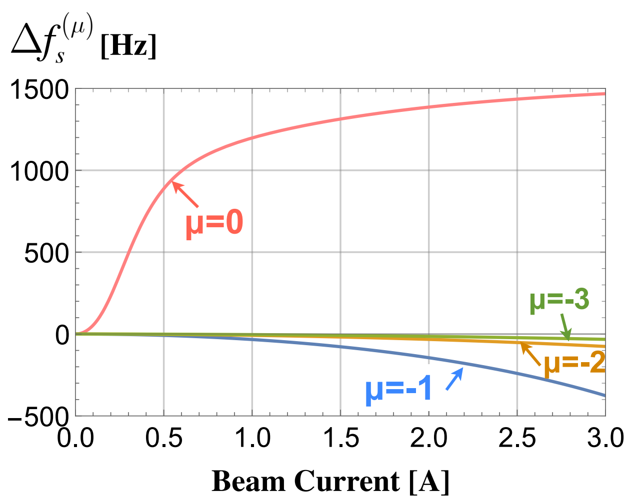

図 7.15　バンチ間結合に起因するシンクロトロン振動の周波数変化（tune shift）。SuperKEKB の HER デザインにおける計算値

今のところ SuperKEKB で、この周波数変化が問題になることはないと考えられている。一応、例として SuperKEKB の HER について、バンチ間結合に起因するシンクロトロン振動の周波数変化を図 7.15 にプロットした。図の縦軸は振動周波数の変化量（$\Delta f_{\rm s}^{(\mu)} = \Delta\omega_{\rm s}^{(\mu)}/2\pi,\ \mu = 0, -1, -2, -3$ ）、横軸はビーム電流である。式 (7.46) に従って、デザイン電流における運転条件（optimum tuning 込）で、超伝導空洞 8 台＋ ARES 空洞 8 台のインピーダンスについて計算している。$\mu = -1, -2, -3$ モードについては、ビーム電流が増えるに従って周波数が下がるのが分かる。より詳細な評価について参考文献 [35] を参照して頂きたい。

一方、$\mu = 0$ については、1kHz 以上高くなる計算結果となっている。（摂動のない時は $f_{\rm s}$ ~2.7kHz)。ただし、実際にはこのような周波数の上昇は観測されていない。これは $\mu = 0$ モードは (マイナスの detuning により）十分に減衰しているとも考えられるが、後述するコヒーレント振動の効果（周波数を下げる）や、RF フィードバック制御の効果など様々な要因が絡むので、実際の観測結果を定量的に評価するには様々な条件を考慮する必要がある。

いずれにしても、今のところは、Ω_μ 実部（$\omega_{\rm s}$ の周波数シフト）の寄与でビーム電流が制限されることはなさそうである。

7.7　Static Robinson 不安定性

もうひとつ、これまでの結合バンチ不安定性とは少し異なる別の不安定性について紹介しておく。これも SuperKEKB（大電流ビーム負荷）で大きな問題になりうる不安定性のひとつである。

シンクロトロン振動は、加速電圧の時間的変化（$V_{\rm c}(t)$ の傾き）が復元力となり、位相安定性の原理に従って、安定にバンチ（RF バケット）内を振動することができる。その加速電圧 $\boldsymbol{V}_{\rm c}$ は、式 (6.6) に示すように、クライストロンからの投入パワーによる電圧 $\boldsymbol{V}_{\rm k}$ とビーム電流自身が励起する電圧 $\boldsymbol{V}_{\rm b}$ のベクトル合成である。

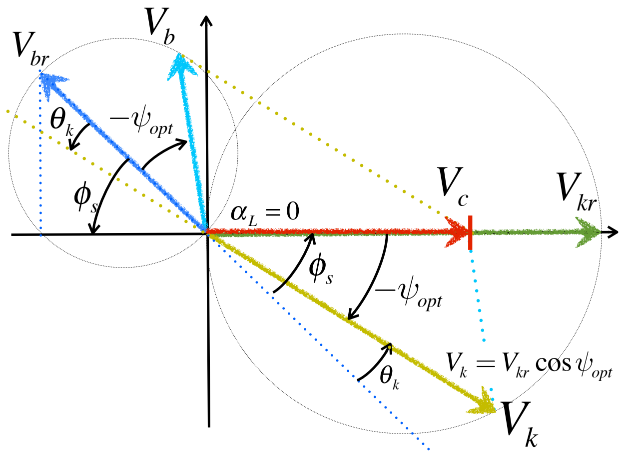

図 7.16　$\boldsymbol{V}_\mathrm{k}$ だけがシンクロトロン振動の復元力として寄与する場合、θ_k が実効的な synchronous 位相と見做す。

すべてのビーム粒子が同じ位相で揃った（コヒーレントな）振動をしている（バンチ重心が 0 モードで振動する）場合、$\boldsymbol{V}_\mathrm{b}$ がビームと同期して変動することになり、ビームから見ると加速電圧 V_c の時間的変化（傾きが）が小さくなったように見える。すなわち $\boldsymbol{V}_\mathrm{c}$ のうち $\boldsymbol{V}_\mathrm{b}$ は復元力として寄与しなくなる。蓄積電流が増大し振動の復元力が小さくなると、振動が止まり不安定になってしまう（位相安定性の原理が働かなくなる）。これを static Robinson 不安定性という。

この場合、どのくらいシンクロトロン振動の周波数が小さくなるか考える。optimum tuning の条件は満たされているとして、図 6.8 の phasor diagram を改めて図 7.16 に示す。ここで、上記のようにビームのコヒーレント振動により、$\boldsymbol{V}_\mathrm{b}$ が復元力として寄与しなくなると、$\boldsymbol{V}_\mathrm{k}$ だけが実質的なシンクロトロン振動の復元力となる。この場合、図 7.16 において、θ_k が実効的な synchronous 位相と見做すことができる。また図から、$\theta_\mathrm{k} = \phi_\mathrm{s} - (-\psi_\mathrm{opt}) = \phi_\mathrm{s} + \psi_\mathrm{opt}$ である。

シンクロトロン振動の周波数 ω_s が、元々 $\boldsymbol{V}_\mathrm{c}$ が復元力であった場合から、$\boldsymbol{V}_\mathrm{k}$ だけの寄与になり ω'_s へと周波数が変わったとする。この場合、これらの関係は、

$$\begin{aligned}\left(\frac{\omega'_\mathrm{s}}{\omega_\mathrm{s}}\right)^2 &= \frac{V_\mathrm{k}\sin\theta_\mathrm{k}}{V_\mathrm{c}\sin\phi_\mathrm{s}} \\ &= \frac{V_\mathrm{kr}\cos\psi_\mathrm{opt}\sin(\phi_\mathrm{s}+\psi_\mathrm{opt})}{V_\mathrm{c}\sin\phi_\mathrm{s}}\end{aligned} \tag{7.47}$$

と書ける。この式は、シンクロトロン振動数は $\sqrt{V_\mathrm{c}\sin\phi_\mathrm{s}}$ に比例することを利用している。更に、optimum tuning の条件を考慮し、式 (6.15)(6.13a)(6.13b) 等の関係を利用すると、式 (7.47) は、

$$\left(\frac{\omega'_\mathrm{s}}{\omega_\mathrm{s}}\right)^2 = \frac{1-[(V_\mathrm{br}/V_\mathrm{c})\cos\phi_\mathrm{s}]^2}{1+[(V_\mathrm{br}/V_\mathrm{c})\sin\phi_\mathrm{s}]^2} \tag{7.48}$$

と、わりとすっきりした形に変形できる [36,37]。シンクロトロン振動が安定であるためには $\omega'_\mathrm{s} > 0$ である必要があるので、これより

$$V_\mathrm{br}\cos\phi_\mathrm{s} < V_\mathrm{c} \tag{7.49}$$

という安定条件が得られる。

一般的には、この条件は、図 6.3 に示すように（transition energy より高い場合は）加速電圧の右肩下がりにバンチが乗っていると安定である、という条件から得られる。つまり、復元力が $\boldsymbol{V}_\mathrm{k}$ だけ（synchronous 位相が θ_k に相当）となった場合、

$$\frac{\mathrm{d}tV_\mathrm{k}\cos\theta_\mathrm{k}}{\mathrm{d}t} = -\omega_\mathrm{rf}V_\mathrm{k}\sin\theta_\mathrm{k} < 0 \tag{7.50}$$

の条件から、同様に式 (7.49) を得ることができる。

また更にここで、式 (6.9)(6.17)(4.1) 等の関係を利用すると、式 (7.49) の安定条件は、

$$\frac{P_\mathrm{b}}{P_\mathrm{c}} < \beta + 1 \tag{7.51}$$

と変形でき、すでに述べた式 (6.21) の入力結合度 β に関する条件が得られる。optimum カップリングであれば、必ず上式の条件は満たされる。

これらの条件は、単純な式による最低限必要な条件であり、十分条件とは言えない。実際にはこれより十分に離れた安定条件で運転する必要がある。また、上記の説明は、加速電圧の RF フィードバック制御等、安定化（不安定性抑制）システムがまったくない場合についていである。実際はダイレクト RF フィードバック制御（図 8.1 参照：変動を逆位相でダイレクトに戻しキャンセルさせる制御 [8, 38, 39]）や、強制的に不安定性を抑える抑制システムなどを適用することで、コヒーレントなビーム振動の影響を小さくする（安定領域を広くする）ことができる。

では具体的に SuperKEKB の場合について、フィードバック制御（不安定性の抑制制御）等がないとして、コヒーレント振動による影響がどの程度か、式 (7.48) を使って評価してみると、図 7.17 のようになる。横軸がビーム電流、縦軸がシンクロトロン振動の周波数（コヒーレント振動による f_{s} の減衰）$f_{\mathrm{s}}^{(coherent)} = \omega_{\mathrm{s}}'/2\pi$ である。HER の運転条件について計算している。HER は超伝導空洞、ARES 空洞それぞれ 8 台づつで運転される。従って、式 (7.48) を

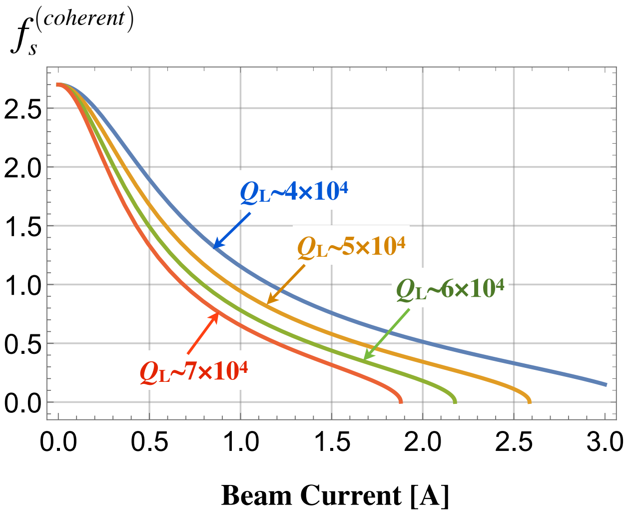

図 7.17　復元力が V_{k} だけの場合に、シンクロトロン振動周波数が下がる効果を評価（HER の例）。

適用するにあたり、平均的な（合計された）空洞が 1 台あると仮定した単純な評価である。図では、比較のため異なる 4 種類の超伝導空洞の Q_{L} についてプロットしている。実際の空洞では、$Q_{\mathrm{L}} = 50000 \sim 60000$ である。

図 7.17 を見て分かるように、Q 値が高いほど影響が大きい。また、数 100mA のビーム電流でもコヒーレント振動が大きな影響することが分かる。実際にこのようなシンクロトロン振動数の低下が観測されている。従って十分な対策がないとデザイン・ビーム電流（2.6A）では static Robinson 不安定性が起きる可能性が大きい。従って、コヒーレント振動の影響を抑えるダイレクト RF フィードバック制御、あるいは帯域の広い（速い）フィードバック制御システムが必要である。

8　結合バンチ不安定性の抑制システム

避けられない結合バンチ不安定（coupled bunch instability, CBI）は、強制的に押さえ込むしかない。この節では、フィードバック（以降”FB”と記す）制御において、加速空洞に起因する CBI を具体的にどのように抑制するか、実際の抑制システム（CBI ダンパーシステム）について説明する。

本来であれば、FB 制御の解析的手法（不安定性の抑制効果や FB ループ安定性の定量的評価など）について扱うべきかもしれないが、それらに関しては、多くの文献や論文（例えば [35, 40, 41] など）があるので他に譲るとする。

一方、KEKB／SuperKEKB で使われている CBI ダンパーについては、ハード・ウゥエアの詳細を説明している文献があまりないので、本講義では主に CBI ダンパー構成機器の原理について詳しく紹介する。

図 7.13、7.14 で示したように、SuperKEKB では $\mu = -1, -2, -3$ モードの不安定性が心配されるため、これらのモードを主な対象とする。また、KEKB、SuperKEKB の CBI ダンパーに関する他の文献としては、それぞれ [2, 42–44]、[33–35] を参照して頂くのも良い。

8.1　CBI ダンパーシステム概要

改めて、式 (7.45) や図 7.11 の話に戻る。加速モード自体は加速のために必要なので、ω_{rf} に影響を与えずに、結合バンチ不安定性を起こす（excite する）周波数だけをいかに抑えるか、がポイントになる。先に述べたように、各モードについて excite する周波数成分は分かるので、ビーム信号からその周波数成分だけをキャンセルする（インピーダンスを下げる）ようにフィードバック（FB）すれば良い。

図 8.1 に、結合バンチ不安定性を抑えるための FB ループ（CBI ダンパーシステム）の基本ブロック図を示す。まず、RF 基準信号（マスターオシレータ）

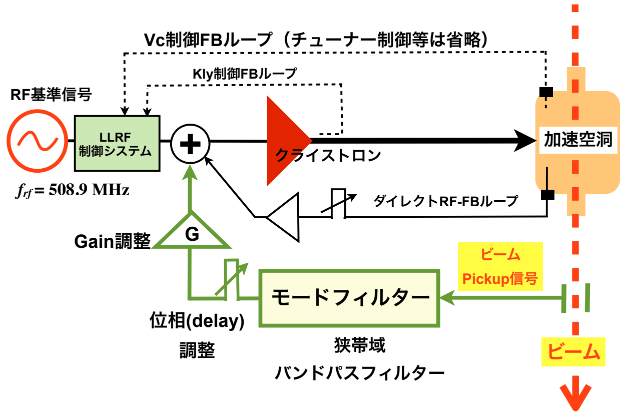

図 8.1　結合バンチ不安定性を抑える FB ループ（CBI ダンパーシステム）の基本構成ブロック図

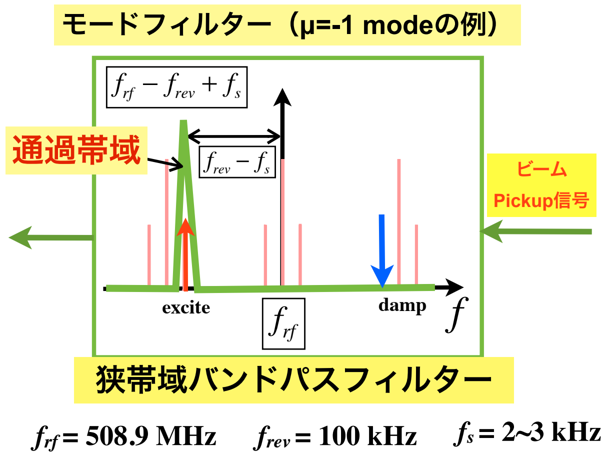

図 8.2　結合バンチ不安定性モードを通過させる狭帯域バンドパスフィルター：CBI ダンパー

からの信号が Low Level RF（LLRF）制御システムを経て、クライストロンで増幅され、空洞に RF パワーが投入される。LLRF 制御システムは、空洞の pickup 信号を見て加速電圧 $\boldsymbol{V}_{\mathrm{c}}$ を一定に保つための FB 制御ループ（Vc-Loop）を担う（図では省いているが、他にもチューナー制御等、多くの運転に必要な制御を担っている）。

一方、CBI ダンパーシステムについては、図 8.1 のように、ビーム pickup 信号を、Vc-Loop の信号と合成させて空洞に投入する（FB する）。その際、ビーム pickup 信号はモード・フィルターを通し、結合バンチ不安定に対応する特定の周波数のみを通過させ、また、結合バンチ不安定を抑えるように FB 信号のゲイン、位相 が調整される。同時に、Vc-Loop が CBI

ダンパーに影響しないよう（あるいは制御が不安定にならないよう）、Vc-Loop の帯域／ゲインなどに注意する必要がある。

図 8.2 にモード・フィルターの通過特性について示す（$\mu = -1$ の例について示している）。特定のモードの周波数のみを通過させるこのバンドパスフィルターが、CBI ダンパーシステムにとって最も重要な役割を担う。そのため CBI ダンパーとは、このモード・フィルターを指す場合が多い。そして、図 8.2 に示すような非常に狭帯域な通過特性をどのように実現するかが、このシステムの最も重要なノウハウであり、この章のテーマである。

次節以降、周波数に関して具体的な数値も示して説明するので、、周波数の記号は角周波数 ω より主に f を使って表す。

8.2 CBI モード・フィルター

この節では、KEKB ／ SuperKEKB で採用されている CBI モード・フィルターについて構成機器の詳細を説明する。

図 7.11 に示すように、結合バンチ不安定性の各モードには excite させる周波数成分と、damp させる周波数成分がある。$\mu = -1$ モードを例にすると、excite させる周波数は $f_{\mathrm{rf}} - f_{\mathrm{rev}} + f_{\mathrm{s}}$（それぞれ RF 周波数、周回周波数、シンクロトロン周波数）である。この excite させる周波数成分だけ FB させてキャンセルさせる。また damp させる効果の周波数成分（$f > f_{\mathrm{rf}}$ 側のサイド）は残したほうが良い。

そこで、CBI モードフィルタは、図 8.2 のようなバンドパスフィルター（BPF）になる。この図は $\mu = -1$ モードの場合を示しているが、これをモード毎に並列に組み合わせる。一般的には（後述するように）複数のモードを一斉にフィルターする櫛形フィルター（間隔が f_{rev}）を用いるが、モード毎に独立にゲイン調整や位相調整できるほうが柔軟に対応できる。特に SuperKEKB ではクライストロン帯域が 100kHz 程度（$\sim f_{\mathrm{rev}}$）で、かなり狭く、複数のモード（μf_{rev}）に対してゲイン・位相が大きく変わるため（図 10.2 参照）、モード毎に独立した調整が不可欠になる。そのため、図 8.2 をモード別に並列に組み和せる構成（parallel comb filter 方式）になる。クライストロン特性は予め測定して分かっていれば、それに対し補正することも可能であるが、通常クライストロンごとに個体差が大きく、また運転条件（カソード電圧など）によっても大きく変わる（帯域が狭いと特に変化が大きい）。

ところで、f_{s} が数 kHz であることを考えると、他の振動（周波数成分）に影響を与えないようにするは、この BPF の帯域は（モード毎に）1kHz 程度が要求される。RF 周波数が 500MHz に対してバンド幅が 1kHz の BPF というのは極端に狭いと言える（Q 値 $\sim 10^6$ 程度の超伝導空洞に相当）。また、BPF の中心周波数を 1kHz に対して十分な精度で任意に調整できる必要がある。普通のアナログ回路や共振器等で直接このバンド幅と中心周波数の精度を実現するには非常に困難である（仮にできたとしても不安定で調整が難しく使い物にならいであろう）。以上より、このモード・フィルターには少し工夫した構成が必要になる。

では、具体的にどのような方法で、図 8.2 のような透過特性を実現するかを、以下に説明する。

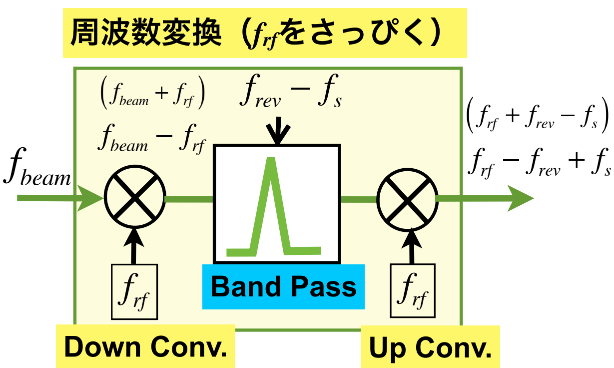

図 8.3　特定の周波数を通す狭帯域 BPF の基本的な考え方。RF 周波数の差分（$f_{\mathrm{beam}} - f_{\mathrm{rf}}$）に周波数を変換（down-convert）して BPF を通した後に RF 周波数を加えて戻す。ただし、これだけでは不十分。

まず、基本的な考え方を図 8.3 に示す（信号の流れの向きは左から右であることに注意。以降も同じ）。図のように、ビーム pickup 信号の周波数（f_{beam}）を、ミキサー（信号の掛け算→周波数の引き算、足し算）を用いて低い周波数に変換（down-convert）する。この場合は、f_{rf} を引き算して、f_{rf} のサイドバンドのみを残す。このように周波数変換された信号（$f_{\mathrm{beam}} - f_{\mathrm{rf}}$）に対して BPF を適用する。この BPF の中心周波数を $f_{\mathrm{ref}} - f_{\mathrm{s}}$（$\mu = -1$ の場合）とする。そして、また逆に f_{rf} を足し算して高い周波数に戻す（up-convert する）ことで元の周波数帯に戻る。このようにして、特定の狭い帯域の BPF を実現することができる。SuperKEKB では、$\mu = -1, -2, -3$ モード（$\sim -3f_{\mathrm{rev}}$）を考えているので、$f_{\mathrm{beam}} - f_{\mathrm{rf}}$ は 0～500kHz 程度の範囲で考えれば良い。

しかし、これだけでは、f_{rf} のサイドバンドの両側（f_{rf} より高いか低いか）が区別されず、up-convet で元の信号が正しく復元されない（不要な成分が出てくる）。また、三角関数の公式を考えれば分かるように、正弦波信号の積は周波数の足し算と引き算の両方が出てくるため、これらが混在してしまう（図 8.2 のような特性にはならない）。従って、もう一工夫必要である。

実際に使用されている CBI モード・フィルターの構成ブロック図を図 8.4 に示す。図の破線で囲まれた部分は、sinle sideband filter (SSBF）と呼ばれるフィルター特性になり、図 8.5 に示すような透過特性を持つ（詳細は後述する）。SSBF は図のように、f_{rf} より高い周波数を阻止し、f_{rf} より低い周波数だけを通過する特性を示す。SSBF では、f_{rf} において ステップ関数的な特性を示す必要がある。

SSBF の機能が、同時に down-converter と up-converter（図 8.3）の役割をする。SSBF の間に各モードに対応する BPF が並列に接続され、挟まれている形になっている。この BPF は後述する通りデジタル・フィルターを用い、各不安定性モードの excite に対応する周波数のみを通過させる。

実際の CBI モード・フィルターの透過特性を測

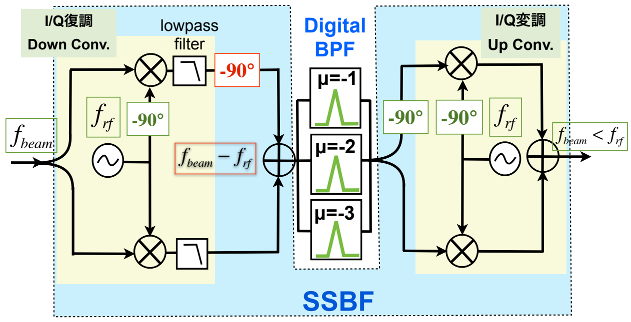

図 8.4　実際の CBI モード・フィルターの構成ブロック図

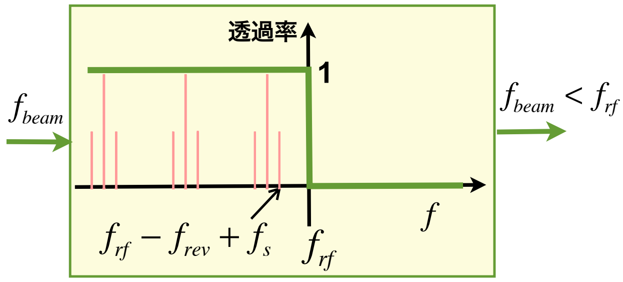

図 8.5　Single Sideband Filter の透過特性：RF 周波数より低い周波数だけを通過し、RF 周波数より高い成分は阻止する。

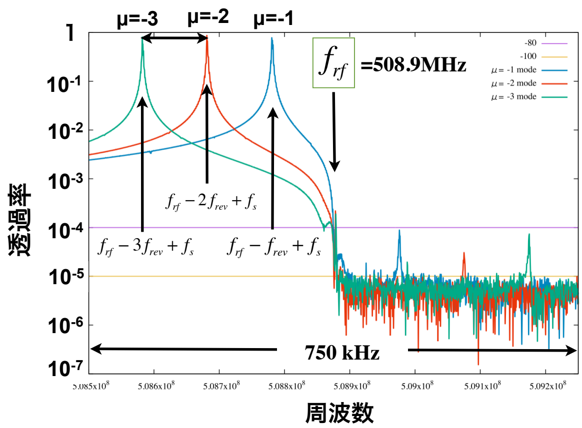

図 8.6　実際の CBI モード・フィルターの透過特性（測定結果）

定した結果を図 8.6 に示す。横軸が周波数（中心がRF 周波数）で、縦軸が透過率である。縦軸は log スケールであることに注意。この測定の時は、デジタル BPF がひとつで、モードを変えて測定したものを重ねている。このように、RF 周波数より高い成分は完全に遮断され、$\mu = -1, -2, -3$ モードに対応した周波数成分だけ通過しているのが分かる。図 8.1 に示すように、ビーム pickup 信号は、このフィルターにより CBI モードに対応する周波数成分だけ残され、空洞にフィードバックさせる。

では何故、図 8.4 に示すブロック図から、図 8.5 に示す（ステップ関数的な）SSBF の透過特性が得られるのか、この動作原理については後で詳しく説明する。

8.3 CBI ダンパーの適用例

モード・フィルターの詳細を説明する前に、SuperKEKB 用に新たに開発された CBI ダンパーを実際に適用してみた結果を紹介する。

まず、テストベンチにおける CBI ダンパーの性能評価試験結果を示す。図 8.7 が評価試験のセットアップ、図 8.8 がネットワークアナライザによる測定結果である [33]。図 8.7 に示すように、模擬空洞（$Q \sim 9000$）を用いて FB ループを組んでいる。CBI モード・フィルターは、SSBF において 3 つのデジタル BPF（DF）を並列に接続し、それぞれ $\mu = -1, -2, -3$ に対応するを周波数を並列にフィルターする。この結果、図 8.8 に示すように、$\mu = -1, -2, -3$ モードについて期待通り模擬空洞のインピーダンスが下がる（空洞励振が FB ループによりキャンセルされる）ことが確認できた。図の横軸は周波数（中心が RF 周波数）、縦軸がゲイン（空洞入力に対してに励起されるパワーの比）を表す。縦軸の単位は [dB]（log スケール）である。[dB] 単位は 10 ごとに一桁パワーが異なる。

次に、実際にビーム運転で、結合バンチ不安定性を抑制した結果を紹介する [45]。SuperKEKB のビーム運転で、HER において 700mA 程度のビーム電流を蓄積した状態で、CBI ダンパーを適用し、$\mu = -2$ モードを抑制する試験を行なった。この電流では通常 $\mu = -2$ モードの不安定性は起きないため、超伝導空洞の共振周波数を-200kHz ずらして、意図的に $\mu = -2$ モードを励起させた。

$\mu = -2$ モードの結合バンチ不安定性を CBI ダンパーにより抑制した結果を図 8.9 に示す。この図は、ビーム pickup 信号をスペクトル・アナライザ

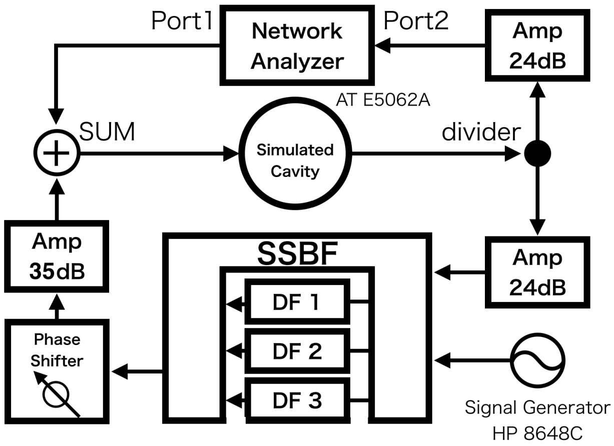

図 8.7　SuperKEKB 用 CBI ダンパーの性能評価試験のセットアップ。模擬空洞（$Q \sim 9000$）を用い、$\mu = -1, -2, -3$ モードの周波数について並列にフィルターして FB ループを構成。

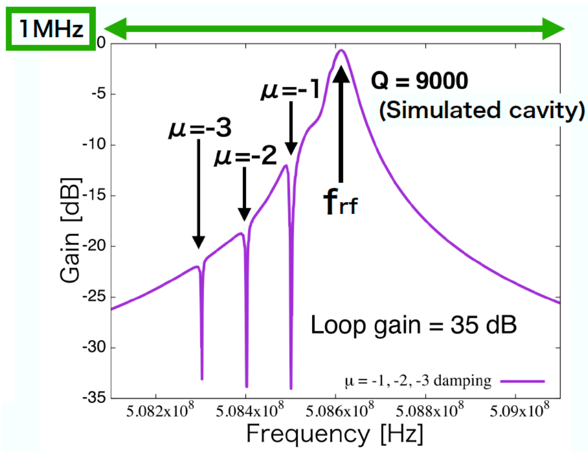

図 8.8　SuperKEKB 用 CBI ダンパーの特性評価結果（ネットワークアナライザによる測定結果）。$\mu = -1, -2, -3$ モードについて期待通り模擬空洞のインピーダンスが下がっている（励振が FB でキャンセルされる）。

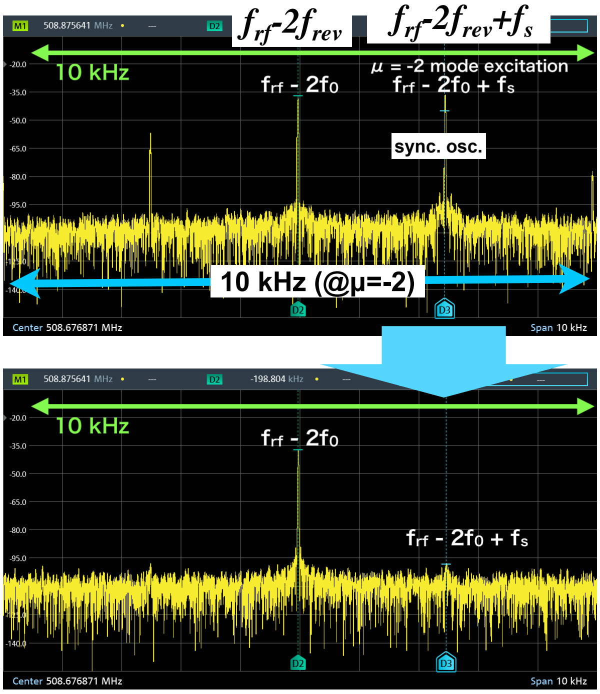

図 8.9　SuperKEKB 用 CBI ダンパーの特性評価結果（ネットワークアナライザによる測定結果）。$\mu = -1, -2, -3$ モードについて期待通り模擬空洞のインピーダンスが下がっている（励振が FB でキャンセルされる）。

（周波数成分分析器）で測定したものである。横軸が周波数で、縦軸はビーム pickup 信号の周波数成分（その周波数の信号パワー）を log スケールで表している。上の図が結合バンチ不安定性が励起されている様子を示す。下の図が CBI ダンパー適用により不安定性が抑制された様子を示す。図の中心周波数が $f_{\rm rf} - 2f_{\rm rev}$、その右側にあるサイドバンドが $f_{\rm rf} - 2f_{\rm rev} + f_{\rm s}$ で、$\mu = -2$ モードの excite 効果に当たるシンクロトロン振動の周波数である（この時、$f_{\rm rf} = 508.9$MHz, $f{\rm rev} = 100$kHZ, $f_{\rm s} = 2.5$kHz）。

図 8.9 の上で、励起された $\mu = -2$ モード（$f_{\rm rf} - 2f_{\rm rev} + f_{\rm s}$）が、CBI ダンパーを適用した結果、下の図ではほとんどサイドバンドが見えなくなっているのが分かる。

$\mu = -2$ モードの例を示したが、$\mu = -1$ モード（$f_{\rm rf} - f_{\rm rev} + f_{\rm s}$）についても、同様に抑制されることが確認できている。以上により、SuperKEKB 用に新たに開発された CBI ダンパーが正常に機能することが確認できた。

HER では、蓄積電流 700mA 以上で $\mu = -1$ モードの結合バンチ不安定性が起きるので、すでにこの CBI ダンパーは不安定性を抑えるために実用している。CBI ダンパーがないと結合バンチ不安定性によりビーム電流が制限されるため必要不可欠なものとなっている。

CBI ダンパーの適用で実際に行なっていることは、図 8.1 に示すように FB ループを構成し、モード・フィルター（DBPF）の中心周波数を $f_{\rm rf} - 2f_{\rm rev} + f_{\rm s}$ に設定する。そしてゲインと位相をスキャンして、図 8.9 の下のようにサイドバンドが小さくなるところを探す。あるいは、不安定性が起きる前に CDBI ダンパーを適用する場合は、不安定性を励起させるゲイン、位相を探して、位相を 180 度反転させるという方法もある。

よりシステマティックに調整する場合は、予めオープン・ループの特性を評価しおく必要がある。例えば、CBI ダンパー側から強制的に信号を出し（ビーム振動を励起し）、ビーム pickup 信号がどう見えるか、周波数をスキャンしながら応答の特性を測定（ネットワーク・アナライザ測定）する。その結果から、システムの特性（抑制効果、安定性）を評価するとともに最適なゲインと位相も求める。これを行なう場合は、そのための測定機能をシステムに組み込み、ビーム運転によるスタディを要する。

ここで一つ補足しておくと、上記の適用例では、一つの空洞（片リング 15 程あるクライストロンの 1 ヶ所）だけに適用している。しかし、SuperKEKB のデザイン電流では、図 7.13、7.14 で示したように、$\mu = -1$ モードの growth rate は（KEKB に比べて）非常に大きくなる。そのため、1 空洞だけでは抑制するゲインが足りない可能性も指摘されている [35,46]。そのため、複数の空洞（クライストロン）に対して本 CBI ダンパーを適用する必要があると考えている。

8.4 Single Sideband Filter

ここでまた図 8.4 に戻る。このブロック図から、図 8.6 に示すモード・フィルターの特性が得られる理由について、詳細を以下で説明する。まず、Single Sidband Filter（SSBF）についてである。

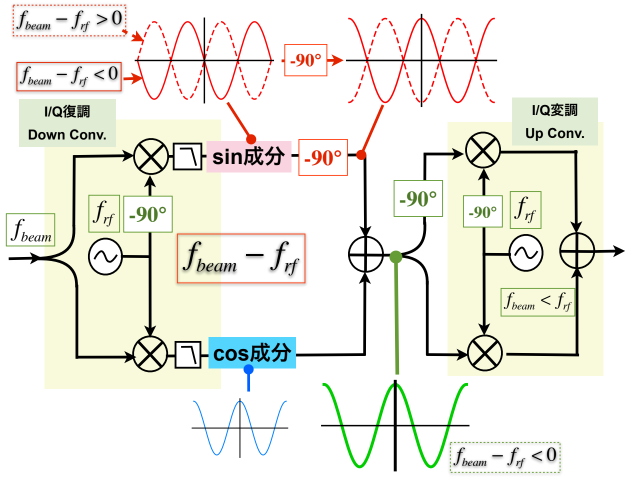

図 8.10　Single sideband filter の原理

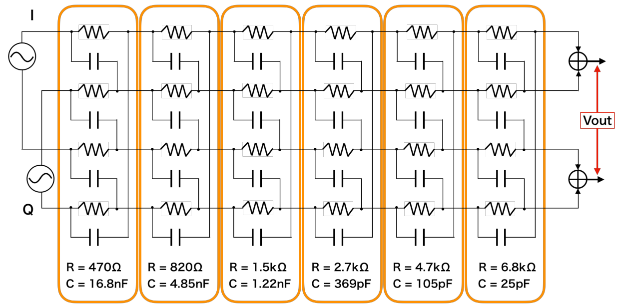

図 8.11　90° polyphase filter の回路図（6 段の例）

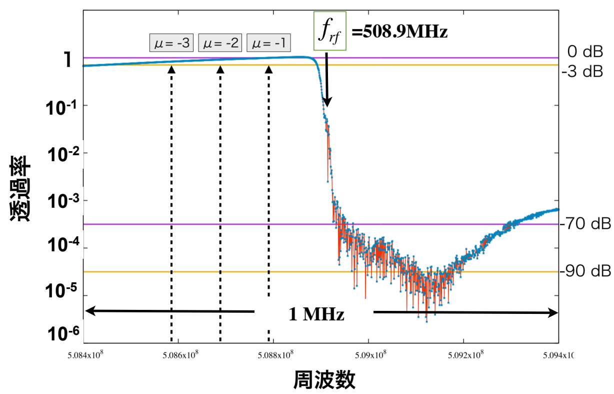

図 8.12　SSBF 単体の透過特性（測定結果）

SSBF の原理を簡単に示したものが、図 8.10 である。まず入力信号を 2 つに分け、それぞれ $f_{\rm rf}$ で down-convert する際に、互いに 90 度ずれた成分（sin 成分と cos 成分）に変換する。このように、ある周波数（この場合 $f_{\rm rf}$）をベースにして sin 成分と cos 成分のベースバンドに落とすことを I/Q 復調という（I: inphase, Q: quadrature）。

sin 成分と cos 成分（それぞれ I 成分、Q 成分とも言う）を得ることで、$f_{\rm rf}$ より高い周波数成分と低い周波数成分に分離できる。言い換えると、$f_{\rm rf}$ に対して位相が左回転に見える成分と、右回転に見える成分とが得られる。逆に言うと、このように直交 2 成分に分離しないと、正負の周波数が分離されず、正しい up/down-convert にならない。

そして次に、sin 成分のほうの位相を-90 度シフトさせると、ベースより高い周波数成分については、cos 成分と比べて 180 度ずれて、逆に低い周波数成分については cos 成分と同じ位相に揃う。従って、この 2 つを合成すると、高い周波数成分はキャンセルし、低い周波数成分は 2 倍となる。

これをまた逆に sin 成分と cos 成分に分け、それぞれを up-convert（I/Q 変調）すれば、高い周波数成分がなくなった元の周波数帯が得られる。このようにして、図 8.5 の透過特性が得られる。逆に、高い周波数成分を通過させたい（低いほうを阻止したい）場合は、sin 成分／ cos 成分を逆にすれば良い。

ここで、sin 成分について「-90 度シフトする」ことが重要であるが、$f_{\rm rev}-f_{\rm rf}$ のすべての周波数について（周波数に関係なく）90 度シフトする必要がある（最低でも、ここで考えている 0~500kHz の帯域でフラットな特性が必要）。そのような特性を passive な回路で実現する場合、図 8.11 に示すように、抵抗 R とキャパシタ C の並列回路の組み合わせで実現する [34, 47, 48]。このような回路を 90° polyphase filter と言う。

図 8.11 は SuperKEKB 用の CBI ダンパー

(SSBF）に使用されてる回路と回路パラメータ（R, C）を示している。図のように RC 並列回路を 6 段組み合わせている。それぞれの段で、$\omega = 1/RC$ の周波数において pole を持ち 90 度位相が回る。多段であるほど広い帯域でフラットな特性が得られる。R, C のパラメータの最適化は回路シミュレータを用いて行なっている [49]。SSBF 単体の透過特性（測定結果）を図 8.12 に示す。縦軸が周波数（中心が RF 周波数）、横軸が透過率（log スケール）である。図のように非常に良好な特性（通過帯域、阻止帯域それぞれのフラット性）が得られている。f_{rf} で完全にステップ関数的な特性ではないが、各モードの BPF でフィルターされるので、実用上は問題ない。

ちなみに I/Q 変調、I/Q 復調について、図 8.10 のブロック図は原理的な説明にすぎない。図のように普通にミキサーを使った単純な回路では、なかなか理想的な特性は得られない（振幅・位相の依存性が大きい）。これらの特性は SSBF の透過（片側阻止）特性に大きく影響する。幸いなことに、I/Q 変調器、復調器は現代の通信機器（伝送情報の多重化等）でも重要で欠かせない技術であり、市販品として非常に優れた特性のデバイスが容易に入手できる。そこで SuperKEKB 用の SSBF でも市販の I/Q 変調器、I/Q 復調器を使用している。

8.5 Digital Bandpass Filter

では次に、デジタル bandpass フィルタ（DPBF）について説明する。DPBF は、図 8.4 に示すように、down-convert された信号に対して各モードの周波数（$-\mu f_{\mathrm{rev}} - f_{\mathrm{s}}$, $\mu = -1, -2, -3$）のみを通す BPF である。

低い周波数に down-convert されたとはいえ、帯域 1kHz はかなり狭帯域の BPF と言える。また、不安定性モードに対し、周波数および位相を精度良く調整する必要があり、かつ遠隔操作（状況に合わせていつでも変更）が要求されるパラメータであるため、ここではデジタルフィルターを用いている。デジタルフィルターは FPGA（field programmable gate array）を用いて構成する。FPGA は現代のデジタル・デバイスでは当たり前のように使われているもので、ロジック回路をソフトウェアのようにプログラム可能（書き換え自由）で、ハードウェアと同等に高速動作を可能にするものである。

8.5.1 DBPF 概要

本 CBI ダンパーで使用している DBPF のブロック図を図 8.13 に示す。この透過特性を図 8.14 に示す。モード $\mu = -1, -2, -3$ の場合の例を示している。この BPF は、図 8.4 に示すように、I/Q 復調された信号（$f_{\mathrm{beam}} - f_{\mathrm{rf}}$）に対し、CBI モードに対応した周波数 $-\mu f_{\mathrm{rf}} - f_{\mathrm{s}}$ のみ通過させる機能を担う。図 8.13 の機能について詳細を以下に説明する。

AD 変換された信号（デジタルデータ）は、sin 成分、cos 成分に変換（down-covert、I/Q 復調）される。ここは SSBF と似ているが、$-\mu f_{\mathrm{rf}} - f_{\mathrm{s}}$ の周波数をベースに down-covert される。また、down-covert はデジタル演算（信号データを正弦波のデータと掛け算）で行われる。図中の NCO（numerical controlled oscillator の略）が、$-\mu f_{\mathrm{rf}} - f_{\mathrm{s}}$ の信号を生成するも

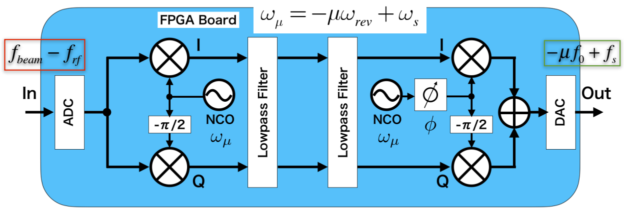

図 8.13　CBI ダンパーで使われているデジタル BPF の機能的ブロック図

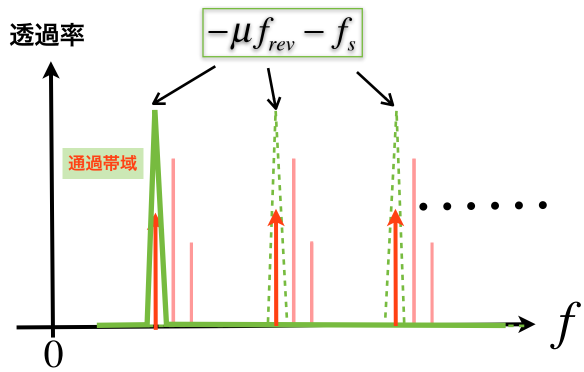

図 8.14　デジタル BPF の透過特性（$\mu = -1, -2, -3$ の例）

ので、動作クロックおきに正弦波データを出力する。down-covert は、この NCO 周波数成分を取り出すイメージである。

互いに位相を 90 度ずらした 2 つの NCO データにより、信号データを sin 成分、cos 成分に変換できる。この 2 つの成分に対して（デジタルの）ローパス・フィルター（LPF）で高い成分を落とす。これらを合成し、再び NCO で up-convert（I/Q 変調)、そして DA 変換出力することで、BPF の機能が実現される。BPF の帯域は LPF の通過帯域（詳細は後述）に相当する。up-convert の際、NCO の位相を down-covert 側と変えることで、FB ループ位相の変更が各モード独立に簡単に実現できる（図 8.13 参照)。また、図では省いているが、AD 変換後もしくは DAC 出力前において係数を掛けることによりゲイン調整も可能となっている。

sin 成分と cos 成分に分ける理由は、SSBF と同様に、ベース周波数より高い周波数成分と低い周波数成分（位相の左周りと右回り）に分離するためである。このように直交 2 成分に分離しないと正しい BPF にはならない（理由を考えてみると良い)。

8.5.2 Numerical Controlled Oscillator (NCO)

NCO は信号発振器のように、正弦波データ（毎クロックが位相の進みに相当）を出力し続ける機能である。これを DA 出力すると、Direct Digital Synthesizer（DDS）になる。通常、NCO の正弦波データは、三角関数の lookup table（LUT）を用いて作られる。LUT（配列）の参照アドレスが位相に対応する。本システムの NCO では LUT に加え、直線補間（線形内挿）を行なって三角関数の精度を上げている。近年では三角関数を扱う FPGA 用パッケージ（CORDIC と呼ばれる関数的機能）も利用できる。CORDIC のほうが精度は良くなるが、演算処理に時間が必要なので、NCO 周波数と動作クロック（速さ）に依存する。この NCO により、任意の周波数の正弦波データが作れる。ただし、動作クロックは NCO 周波数より十分に高い（エイリアスや高調波成分に注意する）必要がある。本システムでは RF 信号を 5 分周した信号（$f_{\mathrm{rf}}/5$ ~100MHz）をクロック信号として用いている。また、ADC および DAC は 16-bit（内部処理は 24-bit 以上）である。

ここで補足しておくが、NCO で down-covert せずに（LPF ではなく)、ダイレクトに BPF 特性を実現するデジタル・フィルターも当然可能である。この場合は 2 成分に分離する必要はない。しかし、NCO を用いたほうが、BPF の中心周波数が高い精度で容易に設定可能である。また、上述のように、NCO の位相変更により、容易に FB 位相の調整が各モード独立にできることも、この方式の大きな利点のひとつである。帯域幅もこの方式のほうが容易にパラメータひとつで設定できる。精度はクロック周波数と扱う bit 数にも依存するが、本システムは、周波数の分解能が約 10Hz、位相は約 0.5 度程度である（実用上、位相 1 度の精度があれば十分である)。

8.5.3 Digital Lowpass Filter (DLPF)

次に、図 8.13 にあるローパス・フィルター（LPF）について説明する。本システムで行なっているデジタル LPF のブロック図を図 8.15 に示す。これは IIR（infinite impulse response）フィルターの 1 種で、 1 次遅れの（図 8.16 の回路と同等の）最も基本的な LPF である。n 番目の入力データ x_n に対する出力が y_n である。W_{L} が LPF の帯域を設定するパラメータである。z^{-1} はひとつ過去（ここでは $n-1$ 番目）のデータを参照する（保持する）ことを意味する（後述参照)。本システムは、これを 2 段にして、より帯域を狭くしている。

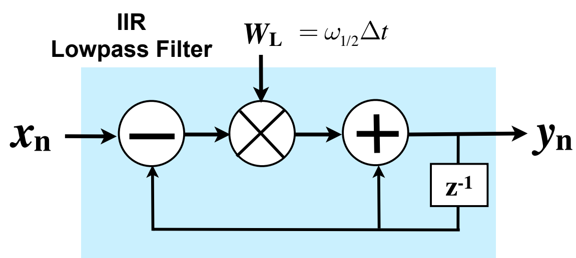

図 8.15 デジタル LPF のブロック図。もっとも基本的な LPF。

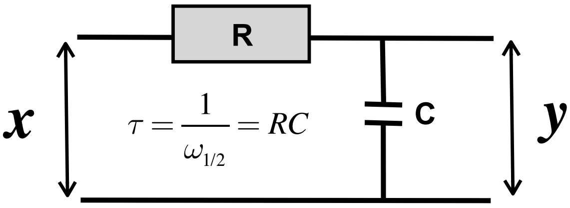

図 8.16　抵抗とコンデンサによる最も基本的なローパス・フィルターの回路

一般的に、デジタル・フィルターの設計は z 変換（離散化データを扱う伝達関数）なるものを考えるが、図 8.16 に示す単純な LPF では RC 回路の微分方程式を考えれば容易にフィルター処理（離散化）の計算式を得られる。あるいは、この回路の伝達関数 $H(s)$

$$H(s) = \frac{1}{1 + s/\omega_{1/2}} = \frac{1}{1 + \tau s} \tag{8.1}$$

から $s = \mathrm{d}/\mathrm{d}t$ と置き換えても（ラプラス変換から考えても）同じである。ここで $\omega_{1/2}$ は、LPF の帯域（電力で半分になる周波数）で、$\omega_{1/2} = 1/\tau = 1/RC$ である。

そうすると、入力 x に対して出力 y は、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \omega_{1/2} y = \omega_{1/2} x \tag{8.2}$$

という関係になるので、離散化データを扱うために差分式にすると、

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta t} + \omega_{1/2} \cdot y_{n-1} = \omega_{1/2} \cdot x_n \tag{8.3}$$

となる。ここで Δt は離散化のサンプル時間間隔である。ここで n の定義（数え方）によっては（ x_n, y_n とするか x_{n-1}, y_{n-1} とするか）で若干異なる式になるが、通常デジタル LPF では、上記のようにする（Δt が十分小さければ、どちらでも近似的に同じ）。これより、

$$y_n = y_{n-1} + \omega_{1/2}\Delta t (x_n - y_{n-1}) \tag{8.4}$$

と、計算すべき漸化式が得られる。これをブロック図にしたものが図 8.15 である（ただし、一般的には図 8.17 のように書かれる）。ここで、LPF の帯域設定は、$W_L = \omega_{1/2}\Delta t$ とパラメータを与えれば良い。

このような単純なフィルターであれば、演算処理は（ADC 変換の値に対して）整数で処理することになる（これだけなら浮動小数点演算をするまでもない）。従って W_L についても整数（固定小数点）として扱うので、bit 長と小数点（桁）の関係に注意が必要である。また、サンプル間隔に比べて帯域幅を非常に狭くする（Δt も $\omega_{1/2}$ も非常に小さい）と、W_L が小さくなりすぎて精度がなくなる。従って、欲しい（狭い）帯域幅に対してはサンプル間隔（クロック周波数）を適切に選ぶか、bit 長を十分大きくすることが必要である。

ここで少し補足しておくと、図 8.15 に示した LPF のブロック図は、一般的には図 8.17 のように書かれる。この図に合わせると、式 (8.4) は、

$$y_n = \omega_{1/2}\Delta t \cdot x_n + (1 - \omega_{1/2}\Delta) y_{n-1} \tag{8.5}$$

と書かれることになる。もちろん式の上では、式 (8.4) と (8.5) はまったく同じである。しかし、上で述べたように、整数演算する場合、精度が問題になる。帯域を狭くして W_L が小さくなる場合は、先に示した図 8.15 のほうが精度が保てるので、実用的には図 8.15 のように処理するのが良い [50]。

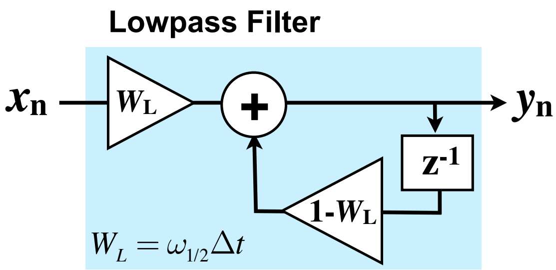

図 8.17　基本的なデジタル LPF のブロック図

8.6 Digital Filter と z 変換

少し話が逸れるが、ついでにデジタル・フィルターと z 変換について簡単に説明しておく。この後に説明する comb フィルターにも関係する。また、別の章で扱う時間領域シミュレーションにも関係する。

デジタル・フィルター（あるいは数値シミュレーション）は、基本的に線形システムであれば、離散化されたデータ（過去に処理したデータを含む）に対して順次、係数を掛けて足し引きするしかない。その演算処理をブロック図にすると図 8.18 のように表せる。ここで、図 8.13 同様に、n 番目の入力データ x_n に対する出力が y_n である。n はデータ羅列の順番を表すもので、クロックの（時間的な）同期タイミングを意味するものではないことに注意。z^{-m} は m 個過去のデータ（m 回保持したデータ）を参照することを意味する。

図 8.18 を式で表すと、

$$y_n = \sum_{k=1}^{N} a_k y_{n-k} + \sum_{r=0}^{M} b_r x_{n-r} \qquad (8.6)$$

となる。デジタル・フィルター（あるいは時間領域の数値シミュレーション）で具体的に処理するのは、このように次のステップの値を得るための漸化式の形である。従ってデジタル・フィルターの設計というのは、必要なフィルター特性が得られるように、式 (8.6) の係数 a_k, b_r を求める、ということになる。ちなみに、$a_k = 0$ の場合は FIR（finite impulse response）フィルターとなる。

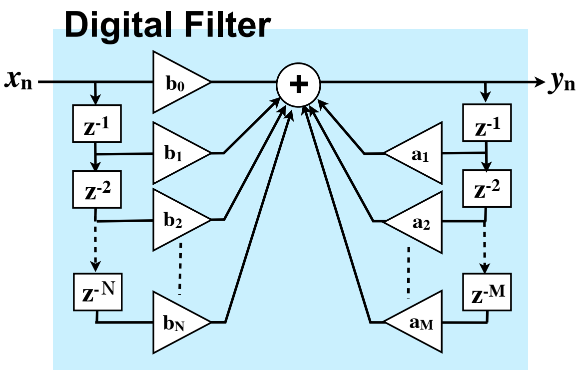

図 8.18　デジタル・フィルターの一般的な処理を示すブロック図

ここで、z 変換という離散化データの（サンプル間隔を基準にした）周波数領域のようなもの（z 領域）が利用される。

z 変換による定義においては、$x_{n-r} = z^{-r}x_n$、$y_{n-k} = z^{-k}y_n$ と書くことができる（k, r は 0 以上の整数)。つまり z^{-n} は、n サンプル過去のデータを参照するための演算子の役割をする。そうすると、式 (8.6) から（z 領域における）伝達関数 $H(z)$ は、

$$\frac{y_n}{x_n} = H(z) = \frac{\displaystyle\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \qquad (8.7)$$

と表すことができる [51]。

もう少し、z 変換とその伝達関数について補足すると、それぞれの定義は、フーリエ変換などに類似して、

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} \qquad (8.8a)$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n z^{-n} \qquad (8.8b)$$

である。ここで h_n は系のインパルス応答（$n = 0$ の時 1 回だけ"1"が入ったときの出力）である。

式 (8.8a) で、$z = e^{j\omega}$ と置くと、離散化データ x_n に対するフーリエ変換になることが分かる。これより、伝達関数 $H(z)$ において、$z = e^{j\omega}$ を代入することで、デジタル・フィルターの周波数特性が得られる（ただし、サンプリング周波数 $1/\Delta t$ が 1Hz に相当する)。

また、$n \geq 0$（$t \geq 0$）だけで定義し（$n < 0$ で $x_n = 0$ として)、$z = e^{s\Delta t}$ と置けば、同様に x_n の

ラプラス変換に対応する（Δt は離散化のサンプル時間間隔)。ちなみに、$e^{s\Delta t}$ は連続系（s 領域）における遅延時間 Δt の伝達関数に相当する。

さて、前節の LPF（式 (8.4)）について、式 (8.6)(8.7) の関係に従って z 変換の伝達関数で表すと、

$$H_{\mathrm{DLPF}}(z) = \frac{W_{\mathrm{L}}}{1-(1-W_{\mathrm{L}})z^{-1}} \tag{8.9}$$

となる。

他に簡単な例として、N 回の移動平均を考える。基本的な移動平均の演算処理は

$$y_n = \frac{x_n + x_{n-1} + \ldots + x_{n-(N-1)}}{N} \tag{8.10}$$

である。また移動平均（式 (8.10)）は、

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{Ny_{n-1} - x_{n-N} + x_n}{N} \\ &= y_{n-1} + \frac{x_n - x_{n-N}}{N} \end{aligned} \tag{8.11}$$

と処理（変換）することもできる。ここで $x_{n-m} = z^{-m}x_n$ と書けることを踏まえると、移動平均の伝達関数 $H_{\mathrm{MA}}(z)$ は、

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{MA}}(z) &= \frac{y_n}{x_n} \\ &= \frac{1}{N}\left[1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots + z^{-(N-1)}\right] \qquad (8.12a) \\ &= \frac{1}{N}\cdot\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} \qquad (8.12b) \end{aligned}$$

となる。上の式 (8.12a) と式 (8.12b) は恒等変換であり、前者は式 (8.10) の処理に相当し、後者は式 (8.11) に相当する。このように、どちらの場合も z 変換から得られるのが興味深い。式 (8.12b) の形を見ると IIR フィルターのようにも見えるが、移動平均は当然（式 (8.12a) からも）FIR フィルターの一種である（この周波数特性がどうなるかプロットしみるのも良い)。

デジタル・フィルターの設計では、欲しいフィルター特性を持つ伝達関数 $H(z)$ を求めることができれば、式 (8.7) と式 (8.6) の関係から、具体的に処理する演算式（式 (8.6) の係数）を求めることができる。しかし、普通は求める周波数特性からダイレクトに $H(z)$ が分かるわけではないので、アナログ回路（連続系）の伝達関数 $H(s)$（s 領域）から $H(z)$（z 領域）に変換対応させるのが素直な方法である。

s 領域と z 領域は、

$$z = e^{s\Delta t}, s = \frac{\ln(z)}{\Delta t} \tag{8.13}$$

という関係にある（Δt はサンプリング間隔)。これより、$\ln(z)$ を近似した形（オイラー展開）を利用する。

$$\ln(z) = (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \ldots \tag{8.14}$$

なので、一次の項だけ考えると、

$$s \approx \frac{z-1}{\Delta t} \tag{8.15}$$

と近似できる。これは前進差分近似と言われる。通常は、次の後退差分近似（z^{-1} を掛けて 1 つ後ろにずらした形）が用いられる。

$$s \approx \frac{1-z^{-1}}{\Delta t} \tag{8.16}$$

この後退差分近似は、他にも 1 次ホールド法や三角近似などの呼び方がある。

別の近似方法として、

$$\ln(z) = 2\tanh^{-1}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$$
$$= 2\left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + ...\right] \tag{8.17}$$

という展開式から、

$$s \approx \frac{2}{\Delta t}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \tag{8.18}$$

と、近似する方法がある。これは、双一次変換あるいは Tustin 変換と呼ばれる。

後退差分近似は、$y = sx = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ について、

$$y_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t} = \frac{(1-z^{-1})x_n}{\Delta t} \tag{8.19}$$

と離散化すると、式 (8.16) の関係が得られる。一方、双一次変換は、同様に $y = sx = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ について、

$$\frac{y_n + y_{n-1}}{2} = \frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t}$$
$$\rightarrow \frac{(1+z^{-1})y_n}{2} = \frac{(1-z^{-1})x_n}{\Delta t} \tag{8.20}$$

と離散化すると、式 (8.18) の関係が得られる。こう見ると、双一次変換は中央差分近似と言っても良さそうである（が、そういう記述は他に見られない）。

いずれにせよ、これらは近似なので条件によって期待する特性が得られない場合もある。精密なフィルター設計をしたい場合は、結局 MATLAB 等のシミュレータや専用計算機ソフトに頼ることになるであろう。

ちなみに、前節の LPF の伝達関数 $Z(s)$（式 (8.1)）について、後退差分近似で z 領域に変換すると、

$$H_{\mathrm{LPF2z}}(z) = \frac{\dfrac{W_{\mathrm{L}}}{1+W_{\mathrm{L}}}}{1 - \dfrac{z^{-1}}{1+W_{\mathrm{L}}}} \tag{8.21}$$

となる。ここで $W_{\mathrm{L}} \ll 1$ として近似すると、式 (8.9) になる。

ついでに、ここでデジタル・フィルター（z 変換）によるバンドパス・フィルター（BPF）を考えてみる。BPF の特性を実現する形はいくつか（ハイパスとローパスの組み合わせなど）種類はあるが、鋭いピークを持つ 1 例として共振器のような特性を考えると、BFP の伝達関数（s 領域）は、

$$H_{\mathrm{BPF}}(s) = \frac{\omega_{1/2}s}{s^2 + \omega_{1/2}s + \omega_0^2} \tag{8.22}$$

と表せる。ここで ω_0 は BPF の中心周波数（共振周波数）、$\omega_{1/2}$ は帯域幅である。これに対して双一次変換を利用して z 領域への変換を行なうと、

$$H_{\mathrm{BPF}}(z) = \frac{b_0 - b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \tag{8.23}$$

の形が得られる。ここで、各係数は、

$$a_1 = \frac{1-A^2}{1+B+A^2} \tag{8.24a}$$

$$a_2 = \frac{1-B+A^2}{1+B+A^2} \tag{8.24b}$$

$$b_0 = b_2 = \frac{B}{1+B+A^2} \tag{8.24c}$$

となる。ただし、$A = \omega_0\Delta t/2,\ B = \omega_{1/2}\Delta t/2$ である。これより、式 (8.23) と式 (8.7) を対応をさせると、式 (8.6) によりフィルター計算式を得ることができる。

しかし、式 (8.23) に従って得られた BPF の特性を計算してみると、中心周波数が ω_0 からずれることが分かる。サンプル間隔を十分小さくすれば一致してくるが、その場合、上述したように帯域幅によっては bit 長の精度が足りなくなる。このような場合、適当なサンプル間隔で、特定の周波数（ここでは ω_0）において整合性を良くするには、

$$s \approx \frac{\omega_0}{\tan(\omega_0 \Delta t/2)} \frac{z-1}{z+1} \tag{8.25}$$

という近似を用いると、うまく合わせることができる [52]。

以上のように、デジタル・フィルターで直接 BPF の特性を作ることも十分可能であるが、求めるパラメータ（係数）も単純ではなく、また中心周波数を精度良く合わせるためには注意が必要となる。中心周波数、帯域幅、位相について、それぞれ独立に精度良く調整することを考えると、やはり NCO と LPF の組み合わせ方式のほうがパラメータ（係数）も少なくすっきりして簡単である。

以上、デジタル・フィルターに関して（主に IIR について）紹介したが、これはほんの 1 部にすぎない。ヒルベルト変換や CIC（cascaded integration-comb）フィルターなど、FIR にも重要な役割を果たすフィルターが多くある。IIR にしろ FIR にしろ、まだまだ奥が深くておもしろいので，別途、勉強して頂くことをお勧めする。

8.7 櫛形 CBI モード・フィルター

これまで SuperKEKB の CBI ダンパーシステム（parallel comb filter）について紹介したが、どちらかというと、これらは特殊なフィルター方式である。

歴史的には、図 8.19、8.20 に示すように、普通の（直接的な）櫛形フィルター（comb filter）を用いるのが一般的である。通常、comb filter と”1-turn-delay”方式（後述）を組み合わせて、FB 制御ループを構成する [41, 53–56]。その際、文献にあるように、ビーム pickup 信号ではなく、加速空洞の pickup 信号を使用して（ダイレクト RF-FB ループと併用して）FB するのが一般的である（本質的にはどちらでも良い)。これらの方式は、主に CERN の SPS や SLAC の PEP-II 加速器などで発展し、現在の LHC の運転でも用いられている [57, 58]。

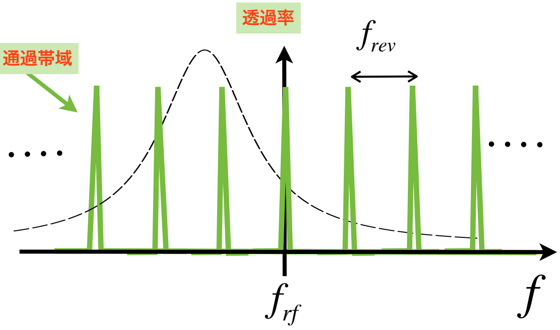

図 8.19　CBI ダンパー用 FB ループにおける櫛形フィルターの透過特性

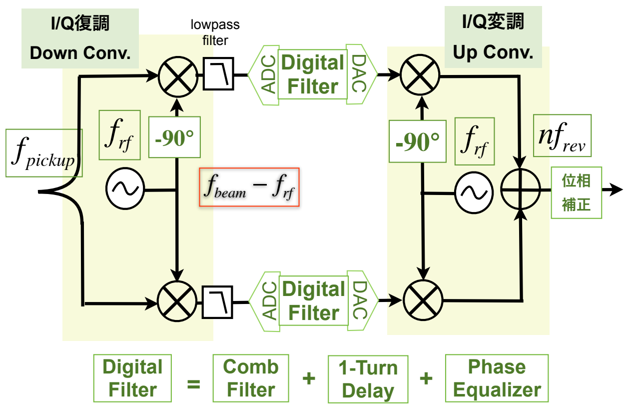

図 8.20　一般的な CBI ダンパーのフィルター構成

図 8.19 の comb filter 特性を得るための基本的な構成ブロック図を、図 8.20 に示す。第 8.4 節での SSBF と同様に、RF 周波数をベースに周波数を down-conver し、その際 sin 成分と cos 成分を得る（I/Q 復調する)。その 2 成分に対して comb filter を適用し、再び up-convert（I/Q 復調）して周波数帯を戻す。この comb filter もデジタル・フィルターにより実現する（後述参照)。デジタル・フィルターは、1-turn delay 機能と位相補償機能が含まれる。

図 8.19 を見ての通り、この方式は、周回周波数（$f_{\rm rev}$）の整数倍の成分（各モード、シンクロトロン振

動のサイドバンド $\mu f_{\rm rev} \pm f_{\rm s}$ を含む範囲）すべてに対してフィードバックする形となる。このような FB ループは、$f_{\rm rev}$ が低い（モードの間隔が狭い）場合や、$f_{\rm rev}$ に比べて空洞 detuning（optimum tuning）が大きい場合など、広い範囲のモードを一斉に抑えたい場合に効果的である。ただし、この場合、不安定性を damp させる効果まで抑制してしまう。また、モード毎に独立なゲイン・位相調整が難しいため、RF システム（クライストロンなど）は広い帯域（広い周波数範囲で振幅・位相特性がフラットであること）が好ましい。それでもクライストロン特性（位相変化等）が影響してしまう場合は、予めクライストロン等の振幅・位相特性（open loop 特性）を評価しておき、それを周波数に対して補正する機能を挿入する（先に述べたように SuperKEKB の場合はクライストロン帯域がかなり狭いので補正が難しい）。クライストロン等の位相補償機能（phase equalizer 等）については、個々のシステムに依存するフィルター設計の話になるので、本テキストでは割愛する。

ここで補足すると、本来 FB したい周波数は、$\mu f_{\rm rev}$ ではなく、シンクロトロン振動の周波数成分（$\mu f_{\rm rev} \pm f_{\rm s}$）である。従って、図 8.19 のような単純な（$\mu f_{\rm rev}$ の）櫛形ではく、$\mu f_{\rm rev}$ の両サイドに $f_{\rm s}$ に対応する 2 つのピークを持つ comb filter（double peak comb filter、図 8.29 参照）にする場合もある [41, 55]。詳細は後述する。

8.8 1-Turn Delay Feedback

CBI ダンパーの FB ループに対おいて、ループ遅延をビームの周回周期（$T_{\rm rev} = 1/f_{\rm rev}$）に合わせておくことを 1-turn delay feedback と言う [2, 41, 53]。

例えば、あるモード μf_{rev} におけるループ遅延を $t_{\rm d}$ とした場合、隣のモード（$(\mu \pm 1) f_{rev}$ との周波数差は $\pm f_{\rm rev}$ なので、FB ループの位相差 $\Delta\theta_{\mu\pm}$ は、

$$\Delta\theta_{\mu\pm} = \pm 2\pi f_{\rm rev} t_{\rm d} \tag{8.26}$$

である。従って、$t_{\rm d} = T_{\rm rev}$ として置けば、必ず隣り合うモードの位相は 2π だけずれる、すなわち同じ位相に揃うことになる。従って、FB ループ遅延を $T_{\rm rev}$ として、あるモードで位相調整しておけば、どのモードに対しても、同じ位相で FB されることになる。ただし、上記のようにクライストロンを含む FB システム全体の位相特性が、広い周波数帯域で補償されていることが前提である。

このように、comb filter による CBI ダンパーでは、1-turn delay FB を行なうのが一般的である。遅延機能は、基本的に遅延できればどんな方法でも良いが、通常はデジタル・フィルターの中に組み込む。データを遅延させるということは、遅延分だけデータを保持することになるので、遅延時間÷サンプル間隔（$t_{\rm d}/\Delta t$）の数のメモリが必要になる。サンプル間隔を短くすれば、遅延時間の調整分解能は良くなるが、それだけ大きなメモリが必要になる。

これより、1-turn delay を含めた FB ループの伝達関数は、s 領域では $e^{-sT_{\rm rev}}$ 、z 領域では $z^{-T_{\rm rev}/\Delta t}$ を掛けたものとなる。

SuperKEKB のように、モード毎に独立に位相（delay）を調整できる場合は（parallel comb filter では）、1-turn delay 方式は重要ではない。

8.9 Digital Comb Filter

一般に櫛形フィルター（comb filer）は、デジタル・フィルターで作るのが容易な方法である。この節では、デジタル・フィルターで、どのようにして櫛形のフィルター特性を得るかを説明する。また、先に述べた double peak comb filter を作る方法も紹介する。ここでまた第 8.6 節で説明した z 変換が登場する。特に図 8.18 と式 (8.6)(8.7) の関係が重要である。

以下の説明は、すでに離散化（AD 変換）されたデータについて扱うものである。また、周波数特性を示す場合は AD/DA 変換された場合の入出力特性を表す。

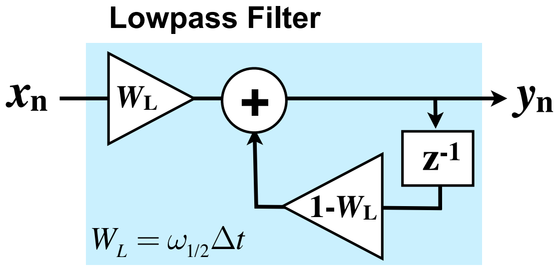

図 8.21　基本的なデジタル LPF のブロック図

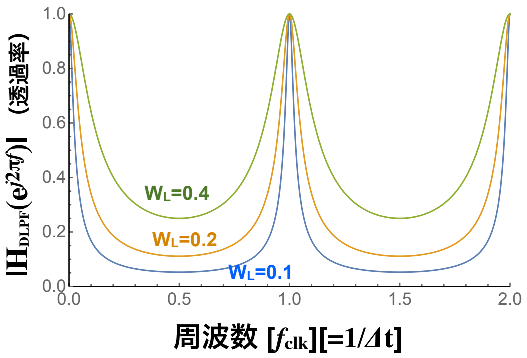

図 8.22　デジタル LPF の周波数特性（伝達関数 $\left|H_{\mathrm{DLPF}}(e^{j\omega})\right|$）のプロット（$W_{\mathrm{L}} = 0.1, 0.2, 0.4$ の例）

まずは基本として、lowpass filter（LPF）の話に戻る。改めて、デジタル・フィルターにおける LPF の演算処理（ブロック図）を図 8.21 にを示す。また z 領域の伝達関数を改めて書くと、

$$H_{\mathrm{DLPF}}(z) = \frac{W_{\mathrm{L}}}{1-(1-W_{\mathrm{L}})z^{-1}} \qquad (8.27)$$

である。$z = e^{j\omega}$ と置き変えることで周波数特性（ただし 1Hz がサンプル周波数に相当）が得られるので、$\left|H_{\mathrm{DLPF}}(e^{j\omega})\right|$ をプロットすると、図 8.22 のようになる。図は、$W_{\mathrm{L}} = 0.1, 0.2, 0.4$ の場合について重ねてプロットしている。その位相特性を図 8.23 に示す。横軸はサンプル周波数（$1/\Delta t = f_{\mathrm{clk}}$）が 1 単位となる。通常は、この図の 0.5（$f_{\mathrm{clk}}/2$）より低い周波数）に対して LPF として使う（それより高い周波数はその前に落とされているものとする）。

このように、LPF に限らず、$f_{\mathrm{clk}}/2$ より高い成分は nf_{clk}（n は整数）の差分の周波数として見えるため、f_{clk} ごとに周期的な特性になる。また、サンプル周波数 f_{clk} の整数倍の周波数成分は DC 成分と同じに見える。LPF の場合、図 8.21 からも DC 成分（変化のないデータ）はそのまま出力されることが分かる。このように f_{clk} ごとに周期的な特性になってしまうため、通常は、$f_{\mathrm{clk}}/2$ 以上の不要な高調波成分（エイリアス）が含まれないよう予め落としておく。その場合、AD 変換前に（アナログ回路）で不要な成分を落とす場合と、AD 変換後にデジタル的に処理する場合がある。デジタル的に処理する場合は、サンプル周期の変換が必要になるので、データを間引いてから再び補間して戻す方法（CIC フィルター）などがある。

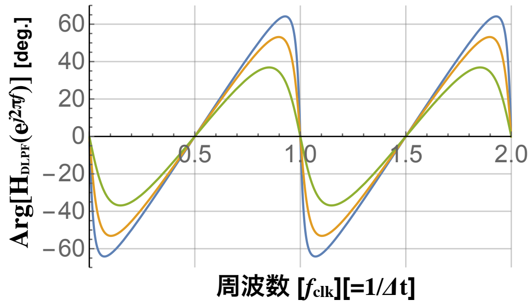

図 8.23　図 8.22 における伝達関数の位相特性

一方、この周期性を利用するのが、comb filter である。LPF では 1 つ過去のデータ z^{-1} を保持しているが、これを N サンプル過去のデータ z^{-N} に変える。つまり図 8.24 のようにする。こうすることで、comb filter が得られる（周期性が N 倍になる）。この場合の伝達関数は、

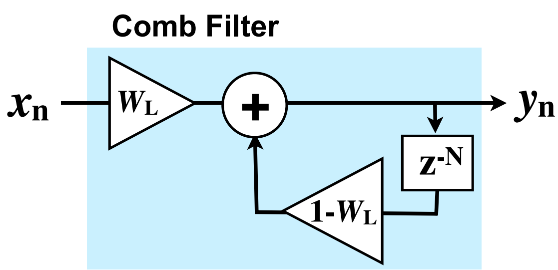

図 8.24　基本的なデジタル comb filter のブロック図

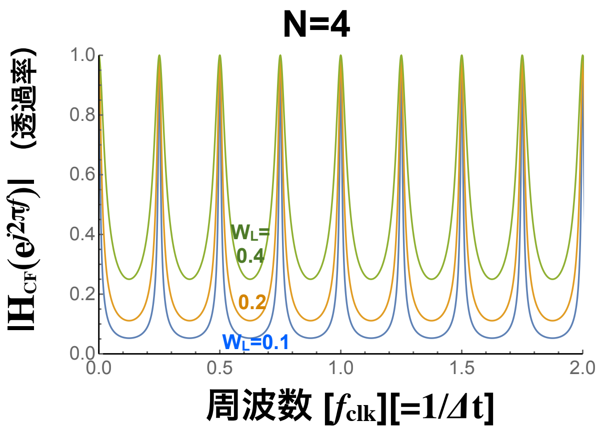

図 8.25　デジタル comb filter の周波数特性（伝達関数 $|H_{\mathrm{CF}}(e^{j\omega})|$）のプロット（$N=4, W_{\mathrm{L}}=0.1, 0.2, 0.4$ の例）

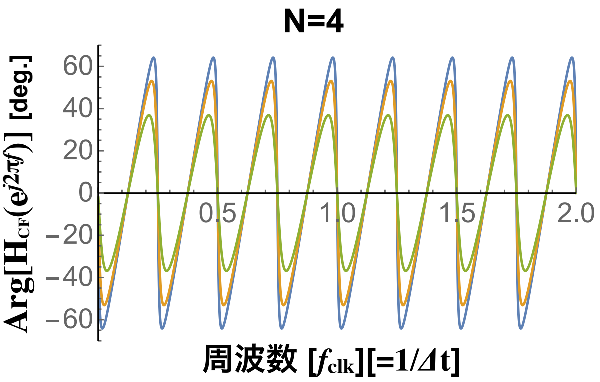

図 8.26　図 8.25 における伝達関数の位相特性

$$H_{\mathrm{CF}}(z) = \frac{W_{\mathrm{L}}}{1-(1-W_{\mathrm{L}})z^{-N}} \tag{8.28}$$

である。これにおいて、$N=4$ の場合について周波数特性をプロットすると、図 8.25 のようになる（$W_{\mathrm{L}} = 0.1, 0.2, 04$ の例を重ねてプロット）。その位相特性を図 8.26 に示す。図を見て分かるように、サンプル周波数の間に N 回の周期性が得られる。このようにデジタル・フィルターでは、comb filter の特性が容易に得られる。

以上より、comb filter のピーク周波数は、サンプル周波数と何回データを遅延させるか、で決まる。

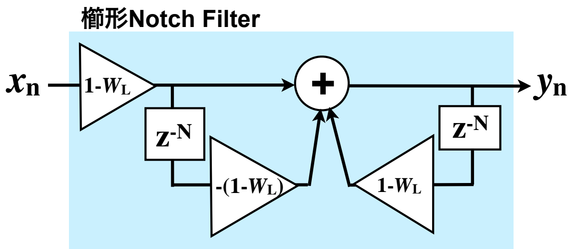

図 8.27　comb filter を逆特性にした櫛形 notch filter のブロック図

例えば、10MHz のサンプル周波数で、N=100 とすると、100kHz 間隔の comb filter になる。ちなみに、遅延回数 N だけデータを保持するメモリの数が必要なになる。

では、これを応用して、櫛形の notch filter を考える。comb filter の通過と阻止を逆にすれば良いので、櫛形 notch filter の伝達関数は、

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{NF}}(z) &= 1 - H_{\mathrm{CF}}(z) \\ &= \frac{(1-W_{\mathrm{L}})(1-z^{-N})}{1-(1-W_{\mathrm{L}})z^{-N}} \end{aligned} \tag{8.29}$$

のように得られる。これをブロック図にすると図 8.27 になる。また、同様に周波数特性をプロットすると、図 8.28 のようになる（$N=4, W_{\mathrm{L}}=0.2$ の場合）。

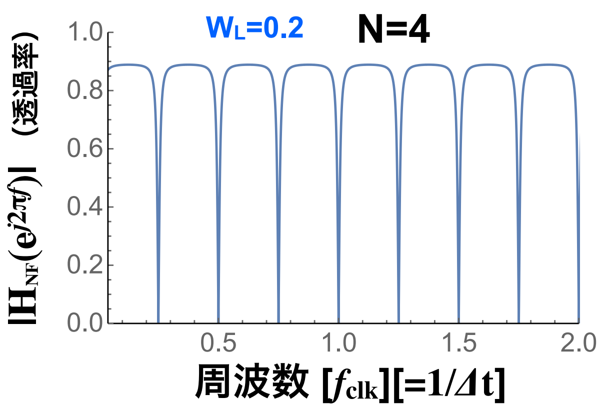

図 8.28　櫛形 notch filter の周波数特性（伝達関数 $|H_{\mathrm{NF}}(e^{j\omega})|$）のプロット（$N=4, W_{\mathrm{L}}=0.2$ の例）

この comb filter と notch filter を組み合わせると、上記に述べた double peak comb filter を得ることができる。その周波数特性の例を図 8.29 に示す。同様にその位相特性を図 8.30 に示す。comb filter 側の幅を広めにして、それより狭い notch filter を組み合わせると、このように comb filter の中心に notch filter で阻止帯域ができ、comb filer のピークの両側に double peak が作られる。

double peak comb filter の伝達関数 $H_{\mathrm{DPCF}}(z)$ は、comb filter と notch filter の伝達関数の掛け算（$H_{\mathrm{CF}} \cdot H_{\mathrm{NF}}$）になるので、それぞれのピーク帯域幅のパラメータを $W_{\mathrm{C}}, W_{\mathrm{N}}$ とすると、

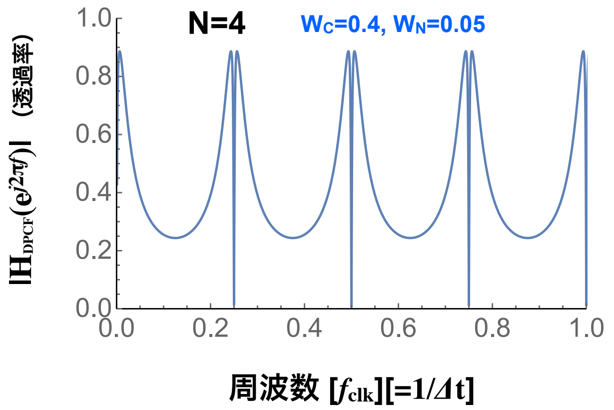

図 8.29　double peak comb filter の周波数特性（伝達関数 $|H_{\mathrm{NF}}(e^{j\omega})|$）のプロット（$N=4, W_{\mathrm{C}}=0.4, W_{\mathrm{N}}=0.05$ の例）

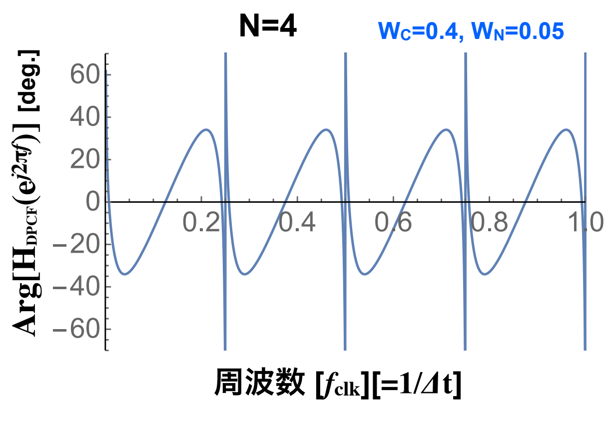

図 8.30　図 8.29 における伝達関数の位相特性

$$
\begin{aligned}
H_{\mathrm{DPCF}}(z) &= H_{\mathrm{CF}}(z) \cdot H_{\mathrm{NF}}(z) \\
&= \frac{W_{\mathrm{C}}(1-W_{\mathrm{N}})(1-z^{-N})}{[1-(1-W_{\mathrm{C}})z^{-N}][1-(1-W_{\mathrm{N}})z^{-N}]}
\end{aligned} \tag{8.30}
$$

となる。この分母を展開した式にすれば、式 (8.6)(8.7) に従ってフィルター処理における計算式（漸化式の係数）が得られる。

このように得られた double peak comb filter を CBI ダンパー（FB ループ）のモード・フィルターに適用する。その場合、comb filter および notch フィルターの各ピークが f_{rev} の整数倍（$f_{\mathrm{rev}} = f_{\mathrm{clk}}/N$）になるように f_{clk} と遅延回数 N を選ぶ。また comb filter と notch filter の帯域幅について、シンクロトロン振動のサイドバンド $\pm f_{\mathrm{s}}$ に相当する double peak が得られるようにパラメータを決める。ただし、先に述べたように、このようなモード・フィルターの場合、不安定性を damp させる周波数成分も抑制してしまう。

comb filter のピーク周波数はサンプル周期に依存するので、parallel comb filter に比べて、ピーク周波数を精度良く調整することは難しい。といっても、最近のデジタル技術の発展は目覚ましく、かなり複雑なことが FPGA で実現できるようになってる。より進んで柔軟に高精度な調整できるシステムも考えられている [59–61]。

9　Bunch Gap Transient

この章では、RF システム（加速電圧）の安定性に係わる問題の一つとして、bunch (train) gap transient（BGT）について紹介する。

これまでの話では、どちらかというと周波数領域（インピーダンス）で考えるものが多かったが、BGT は transient と言う通り、主に時間領域で取り扱われる問題で、一般的には過渡的なビーム負荷（transient beam loading）と呼ばれる。

BGT は、SuperKEKB のように大強度ルミノシティを目指す衝突型加速器にとって無視できない現象である。今のところ致命的とまでは言えないが、ルミノシティ低下を招く問題として、注意すべき大きな課題のひとつと言える。

9.1　Bunch Gap Transient の概要

ビームのバンチは、リング一周に渡り均等に入れるのが基本である（等間隔のバンチ・トレインにする）が、通常、図 9.1 の右下のように、一部の領域（一周の数 %～10%）にバンチがない（トレインが途切れる）区間（バンチ・ギャップ）を作る。この図は、バンチ毎の電流を表示しているモニターパネルである。h=5120 なので、バンチ No.0 ～ 5119 について、640 ずつ 8 段に分けて、各バンチの電流値を表示している。この図ではバンチ No.4840 ～ 5119 あたり（右下）がバンチ・ギャップになっている。

このバンチ・ギャップは、アボート・ギャップと呼ばれ、アボート・キッカー電磁石を立ち上げるための猶予を与える隙間である。ビーム・アボートとは異常時に大電流から装置を保護するためにビームを外に蹴り出し安全に捨てることである。ビーム・アボートさせる時に、アボート・ギャップ（ビームがない隙間）のタイミングに合わせてキッカー電磁石を立ち上げ、立ち上げ途中でビームを蹴ってしまわないようにする [62]。

また、ビームが一様に入っていると、真空中のイオンによってビーム不安定性が起こりやすいことも知られている [63]。バンチ・ギャップはイオン除去の効果があり、イオン不安定性を抑える役割も果たす。

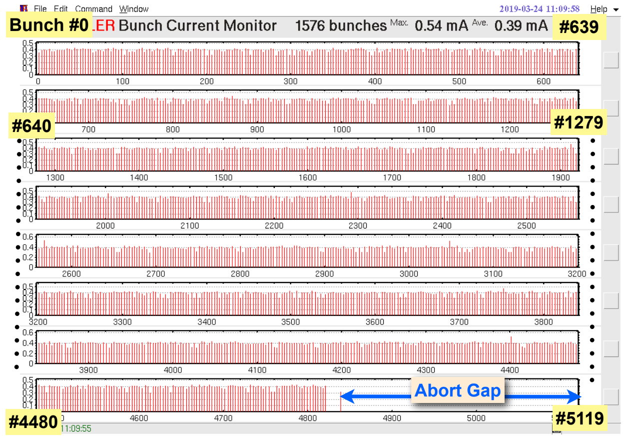

図 9.1　Bunch 電流モニターパネル：全バケット（#0 ～ 5119）のバンチ電流を表示している。バンチ #4840 ～ 5119 あたりがアボート・ギャップ

このように、一般的にバンチ・ギャップはリング加速器にとって必要とされるものであるが、加速空洞にとっては加速電圧を変動させる要因となる。通常のバンチ間隔は、空洞の時定数（filling time $\propto Q_{\mathrm{L}}$）に比べて十分に狭いので、一定電流と見做せるが、アボート・ギャップのように、バンチ電流が大きく（速く）変わるところがあると、空洞の加速電圧に変調がかかる。これを transient beam loading と呼ぶ。

アボート・ギャップにより加速電圧が変動する様子を図 9.2 に示す。横軸時間で、上側がビーム電流（バンチ・トレイン）下側が加速電圧（振幅、位相）を表している。図のように、バンチ・ギャップがあると、加速電圧が周回周期で変調され、加速電圧の振幅・位相がバンチ・トレインに沿って変化する。これが bunch gap trainsient（BGT）効果である。

SuperKEKB の周回周期 $T_{\mathrm{rev}} = 1/f_{\mathrm{rev}}$ は約 10μs である。ギャップ幅は、デザイン値は 2% であるので、時間にして $\Delta t_{\mathrm{g}} = 200$ns になる。空洞の時定数（filling time, T_{f}）は常伝導空洞（ARES 空洞）の場合（入力結合度にもよるが短いもので）$T_{\mathrm{f}} = 2Q_{\mathrm{L}}/\omega_{\mathrm{rf}} \sim 14$μs程度であり、それに対してギャップ

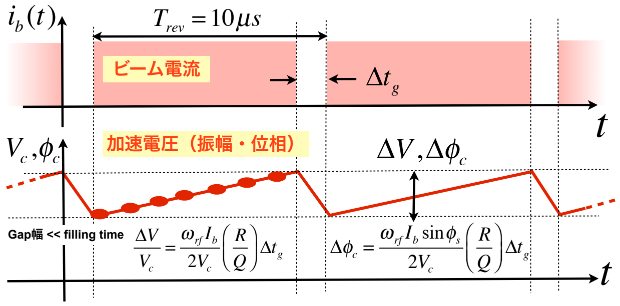

図 9.2　Bunch gap transient の様子。バンチ・ギャップがあることにより、加速電圧（振幅・位相が周回周期で変調される。

幅がたった 200ns と言えど、バンチ電流が急激に 0 になり元に戻るので、BGT 効果の影響は小さくない（定量的な評価は後述する）。

この加速電圧の変動が問題になるのは、衝突点においてである。加速位相が変わるということはビームのシンクロトロン振動の中心位置（縦方向の位置）が変わることになるので、衝突点において、ビーム軸方向の位置がずれることになる。SuperKEKB は衝突点で交差角があるので、相対的に相手のビーム衝突点の位置がずれるとルミノシティが低下することになる。

BGT の影響が両リング（HER と LER）まったく同じで位相変化もまったく同じであれば、衝突でのズレは起こらず問題にならない。しかし、HER と LER とでは、RF システムの構成（空洞の種類と数）や運転条件がまったく異なり、非対称である。特に ARES 空洞は特殊な構造を持っているため、BGT の影響が大きい（詳細は後述する）。従って、BGT 効果がルミノシティを低下させる可能性が大きい。SuperKEKB の前身である KEKB 加速器では、幸い BGT のルミノシティへの影響は見られなかったが、SuperKEKB は衝突方式が KEKB とまったく異なることと、ビーム電流が KEKB の約 2 倍になることを踏まえれば、まったく安心はできず、BGT 効果の影響を正確に評価する必要がある。

ちなみに、J-PARC リニアックでも”chopped ビーム”により加速電圧が変調されてしまう問題がある。これは、加速電圧の変調という現象においては、BGT と同じと言って良い [64]。J-PARC リニアックの場合は、RF 周波数が 324MHz と 972MHz（バンチ間隔は 324MHz の周期）で、ビームパルス幅 500μs の中に約 1μs 周期でバンチ・ギャップを持つ（chopped された）ビームを加速する。ギャップ幅は約 500ns なので、定量的な評価は SuperKEKB と似たような条件になる。

BGT 効果による加速電圧（振幅、位相）の変化量（$\Delta V/V_c, \Delta\phi_c$）を定量的に求める場合、解析的な式では、

$$\frac{\Delta V}{V_c} = \frac{\omega_{rf} I_b}{2V_c}\left(\frac{R_{sh}}{Q_0}\right)\Delta t_g \tag{9.1a}$$

$$\Delta\phi_c = \frac{\omega_{rf} I_b \sin\phi_s}{2V_c}\left(\frac{R_{sh}}{Q_0}\right)\Delta t_g \tag{9.1b}$$

から得られる [65, 66]。ただし、ギャップが空洞の filling time に比べて十分短いこと（$\Delta t_g \ll /T_f$）が前提である。これより、加速電圧の変動量はギャップ幅とビーム電流に比例することが分かる。

実際、これまでの測定においても、上記の式から得られる値と大きく違いはない。しかし、後述するが、ARES 空洞の場合は更に上記の式だけでは評価できない特殊な変動がある。そのため、SuperKEKB の条件において、より正確に BGT 効果の影響を評価する手段が必要になる。

ところで、もし変動量が前もって分かるなら、一定になるように RF 入力を変えて補正（フィード・フォワード制御：FF 制御）すれば良い、と考えられる。たしかにその通りである。しかし残念ながら、SuperKEKB の場合はクライストロンの性能（帯域）で制限されて、FF 制御による補償は非常に困難と言える。その理由を簡単に言うと、ある変動を補償する（キャンセルさせる）FF 制御は、基本的にその変動の要因である変化と同等の応答の速さが必要ということである。つまり、ギャップ幅 $\Delta t_g = 200$ns でステップ関数的に上下する変動に対応するには、最低でも $1/\Delta t_g$ =5MHz（ステップなのでこの数倍）の

帯域が必要ということである。これに対しクライストロンの帯域は、すでに述べたように約 100kHz である。また、大電流ビームに対して補償する（ギャップを埋める）には、それだけ出力パワーが必要になる。定常状態でさえ大電流ビーム負荷を補償するために、クラストロンはほぼ最大出力で運転するので、パワーに関しても無理がある。また空洞の入力結合器が耐えられない可能性も高い。以上より、SuperKEKB において BGT が問題になる場合は、FF 制御による補償は現実的とは言えず、他の方法で対策する必要がある。

また同様に、FB 制御ではバンチ・ギャップに応答できない（FF 制御で対応できないものを FB 制御ができるわけがない）ので、バンチ・ギャップに対して FB 制御は平衡状態の平均的な V_{c} を一定に保つことになる。

その他、バンチ・トレインに沿ったビーム電流密度（fill パターン）を変えて補正する方法もある [67,68]。この方法も、バンチ・トレインの中で大きな電流密度変化を与える必要があり、極限のルミノシティを目指す SuperKEKB にとってビーム電流密度は無駄にできないので、現実的な対策にならないと思われる。

9.2 BGT 効果による加速電圧変化

具体的な話の前に、式 (9.1a)(9.1b) の導出について簡単に説明しておく。

ここでは、振幅・位相の時間的変化（変調）を問題にするので、空洞電圧のエンベロープ（ベースバンド）の時間変化を扱う。そこで、空洞電圧は RF 周波数 ω_{rf} で振動しているとして、次のように変数分離されているとする。

$$\tilde{V}_{\mathrm{g}}(t) = V_{\mathrm{g}}(t)e^{j\omega_{\mathrm{rf}}} \tag{9.2}$$

ここで、g はこれまで空洞電圧で用いた添字 k, b, c のいずれかを意味し、それぞれ投入 RF による電圧、ビーム励起電圧、加速電圧を表す。このように、$V_{\mathrm{k}}(t), V_{\mathrm{b}}(t)$ は複素数で、それぞれの振幅・位相の時間変化を表ものとする。また、$V_{\mathrm{c}}(t) = V_{\mathrm{k}}(t) + V_{\mathrm{b}}(t)$ である。

そこでまず、加速空洞（共振器）の過渡的応答について考える。$t < 0$ で空洞電圧が定常状態にあり、$t = 0$ でステップ関数的に入力追加（あるいは減衰）が起きた場合、V_{g} の応答は、

$$V_{\mathrm{g}}(t) = V_{\mathrm{g}}(0) + \\ [V_{\mathrm{g}}(\infty) - V_{\mathrm{g}}(0)]\left[1 - e^{-t/T_{\mathrm{f}}(1-j\tan\psi)}\right] \tag{9.3}$$

と表せる [65]。ここで $V_{\mathrm{g}}(\infty)$ は十分時間が経過し定常状態になった電圧を表す。空洞の時定数（filling time）T_{f} に従って exp で応答し、また、空洞の tuning 位相 ψ により位相が時間的に変化することになる。

まず、ここでは、投入 RF パワー $V_{\mathrm{k}}(t)$ は常に一定（FB 制御にはバンチ・ギャップに応答できる帯域がない）とする。

ビームがない状態（$t < 0$）から、$t = 0$ でビーム電流がステップ関数的に空洞を励起したとすると、V_{b} の時間変化は、$V_{\mathrm{b}} = 0$ として、

$$V_{\mathrm{b}}(t) = V_{\mathrm{b}}(\infty)\left[1 - e^{-t/T_{\mathrm{f}}(1-j\tan\psi)}\right] \tag{9.4}$$

となる。ここで $V_{\mathrm{b}}(\infty)$ は定常状態の電圧（一定ビーム電流が励起する電圧）なので、第 6.2 節の話から、

$$V_{\mathrm{b}}(\infty) = V_{\mathrm{br}}e^{j\psi}\cos\psi \tag{9.5}$$

である。

次に、このビーム電流のステップ立ち上がり直後（ΔT 後）について電圧の変化 ΔV_{b} を考える。ΔT が空洞 filling time に比べて十分短い（$\Delta T/T_{\mathrm{f}} \ll 1$）として、式 (9.4) の exp を 1 次の項で近似すると、$\Delta V_{\mathrm{b}} = V_{\mathrm{b}}(\Delta T)$ は、

$$\Delta V_{\mathrm{b}} = V_{\mathrm{b}}(\Delta T) - V_{\mathrm{b}}(0) =$$

$$V_{\mathrm{b}}(\Delta T) = V_{\mathrm{b}}(\infty) \cdot \frac{\Delta T}{T_{\mathrm{f}}}(1 - j \tan \psi) \tag{9.6}$$

となる。$1 - j \tan \psi = e^{-j\psi} / \cos \psi$ なので、これと式 (9.5) とで、

$$\begin{aligned} \Delta V_{\mathrm{b}} &= V_{\mathrm{b}}(\Delta T) \\ &= V_{\mathrm{br}} e^{j\psi} \cos \psi \cdot \frac{\Delta T}{T_{\mathrm{f}}} \frac{e^{-j\psi}}{\cos \psi} \\ &= V_{\mathrm{br}} \frac{\Delta T}{T_{\mathrm{f}}} \end{aligned} \tag{9.7}$$

が得られる。これよりパルス立ち上がり（立ち下がり）直後は、tuning 位相（detuning）は影響しないことが分かる。

では次に、このビーム電流が周期的なパルス波形である場合を考える。このパルス周期は、バンチ・ギャップの問題においてはリングの周回周期 T_{rev} である。T_{rev} が空洞 filling time に比べて小さい場合（$T_{\mathrm{rev}} < T_{\mathrm{f}}$）は、図 9.2 に示すように、電圧は周期的な上下変動で定常状態になる、すなわちパルス先頭や後尾でそれぞれ同じ振幅・位相に戻り、それが繰り返されるはずである。

この場合、ビームがないバンチ・ギャップにおいては、パルス・ステップ同様に（ギャップ先頭を $t = 0$ と考えれば）、電圧変化は、式 (9.3) に従うことになる。ただし、変化の方向は逆である。そうすると、ギャップ幅 Δt_{g} が十分短い（$\Delta t_{\mathrm{g}} << T_{\mathrm{f}}$）場合、電圧の変化量は式 (9.6) と同じことになる。従って、周期的なパルス・ビーム電流による電圧変動幅は、

$$\Delta V_{\mathrm{b}} = V_{\mathrm{br}} \frac{\Delta t_{\mathrm{g}}}{T_{\mathrm{f}}} \tag{9.8}$$

となる。ここで V_{k} は一定であるので、上述のように

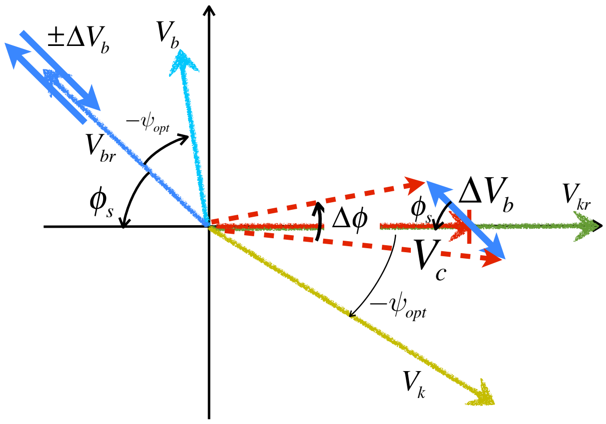

図 9.3　バンチ・ギャップによる電圧変化 ΔV_{b} と加速電圧の位相変化 $\Delta\phi$

tuning 角の影響がないとすると、図 9.3 のように、この ΔV_{b} がそのまま V_{c} の変動となる。このように、定常状態の平均的な V_{br} から $\pm\Delta V_{\mathrm{b}}/2$ の上下変動になる。この図は optimum tuning の場合を描いている（分かりやすく先に使われた図を使用している）が、ここでの話は optimum tuning である必要はない。

位相変化に関しては、加速電圧の大きさ V_{c} に比べて ΔV_{b} が微小である（バンチ・ギャップが十分短い）とすれば、

$$V_{\mathrm{c}} \Delta\phi \approx \Delta V_{\mathrm{b}} \sin \phi_{\mathrm{s}} \tag{9.9}$$

であるので（図 9.3 参照）、

$$\Delta\phi \approx \frac{V_{\mathrm{br}} \sin \phi_{\mathrm{s}}}{V_{\mathrm{c}}} \frac{\Delta t_{\mathrm{g}}}{T_{\mathrm{f}}} \tag{9.10}$$

となる。

以上より、式 (9.8)(9.10) について、

$$V_{\rm br} = \frac{R_{\rm sh} I_{\rm b}}{1+\beta} \tag{9.11a}$$

$$T_{\rm f} = \frac{2Q_{\rm L}}{\omega_{\rm rf}} \tag{9.11b}$$

$$Q_0 = (1+\beta) Q_{\rm L} \tag{9.11c}$$

の関係式を用いると、式 (9.1a)(9.1b) が得られる。

9.3　ARES 空洞における BGT

9.3.1　KEKB 運転における実例

ここで、BGT 効果による加速電圧の変化について、KEKB/SuperKEKB の運転における実例を紹介する。

KEKB の運転において観測された BGT によるビーム位相変化が文献 [69–72] などに報告されている。そのうちの例を図 9.4 と 9.5 に示す。それぞれ HER と LER の場合である。横軸がバケット ID で、縦軸は”Bunch-by-Bunch Gated Beam Monitor（上記文献を参照）”による各バケットの（バンチ・トレインに沿った）ビーム位相である。バケット ID は 0~5000 までプロットしている。実線はシミュレーションによる計算値である。

ID 番号 0 がバンチ・トレインの先頭にあたり、トレイン後尾にギャップがある。この時はバンチ・ギャップが 10% であり、後ろ側の約 510 バケットがギャップになっている。

図 9.4、9.5 が示す通り、BGT による加速電圧の位相変調が原因で、このようにトレインに沿ったビーム位相の変化が見られる。しかし、この図では更に、バンチ・トレインの先頭にステップのように速い変化が見られる。特に LER で顕著である。通常の BGT 効果では、このような変化は起きない（図 9.2 参照）。ただし、この速い変化を除き、直線的に変化している部分に関しては、式 (9.1b) による評価に従い、またシミュレーションとも良く一致している。

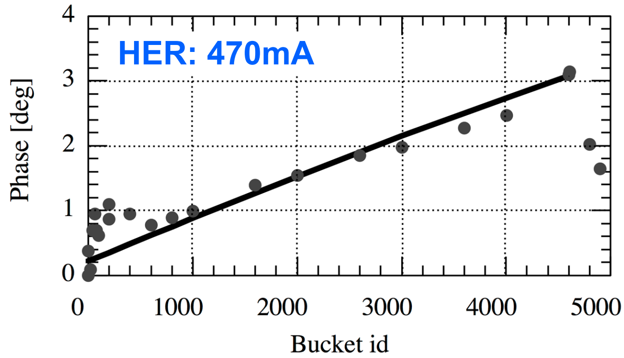

図 9.4　KEB 運転におけるバンチ毎のビーム位相の測定例（HER）

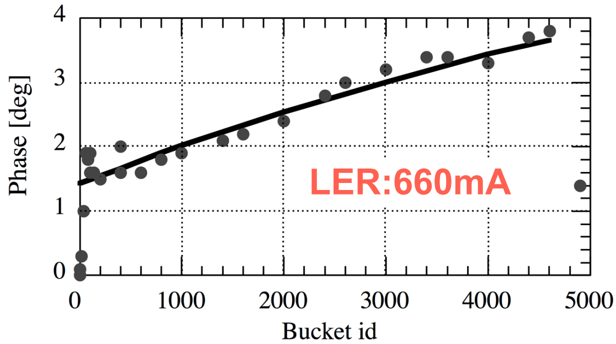

図 9.5　KEB 運転におけるバンチ毎のビーム位相の測定例（LER）

図 9.4、9.5 におけるバンチ・トレイン先頭の速い位相変化は、ARES 空洞に起因していることが分かっている。それは後で説明するように、ARES 空洞の特徴を考慮したシミュレーションによって明らかになった。では、何故 ARES 空洞が、このような位相変化を作るかを説明する。

9.3.2　ARES 空洞の特徴と BGT

第 7.6.1 節でも述べたように、結合バンチ不安定性の対策として、空洞 detuning を小さく抑える（Q_0 を高くする）ために、ARES 空洞は図 9.6 に示すような構造となっている [6, 30–32]。このように、RF 蓄積エネルギーを大きくした「貯蔵空洞」を加速空洞に結合させることにより、実効的に Q_0 を高くしている。また、加速空洞と貯蔵空洞の間は「結合空洞」によって結合されている。それぞれ大きさが異なるが、共振周波数はいずれも同じである。入力結合器は貯蔵空洞にあり、RF パワーは貯蔵空洞から投入さ

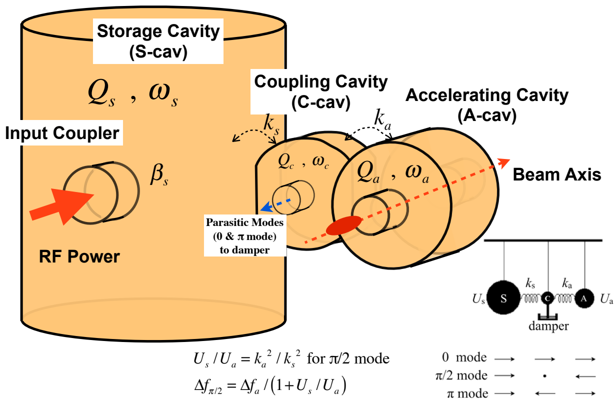

図 9.6　ARES 空洞の構成図

ARES 空洞パラメータ	
Q-value of A-Cav (Q_a)	26000
Q-value of A-Cav (Q_c)	100
Q-value of A-Cav (Q_s)	180000
A-C coupling factor (k_a)	5%
S-C coupling factor (k_s)	1.6%

表 9.1　ARES 空洞パラメータ例

れる。表 9.1 に ARES 空の各空洞パラメータの例を示す。

このように共振器を複数結合させると、全体で一つの共振器として振る舞い、結合されてる共振器の数だけ共振モードが存在できる。ARES 空洞のように 3 空洞が結合された場合のモードは、0 モード、$\pi/2$ モード、π モードの 3 つとなる。このモードは、結合バンチ不安定性に類似していて、隣合う共振器の位相差に相当する。また、それぞれのモードは共振周波数が異なる。

ARES 空洞は $\pi/2$ モードを使用する（理由は参考文献を参照）。言い換えると $\pi/2$ モードの共振周波数 $f_{\pi/2}$ が RF 周波数 $f_{\rm rf}$ と一致するよう、設計されている。そして、加速空洞の detuning 量 $\Delta f_{\rm a}$ に対して、ARES 空洞全体（$\pi/2$ モード）としての detuning 量 $\Delta f_{\pi/2}$ は、

$$\Delta f_{\pi/2} = \Delta f_{\rm a}\frac{U_{\rm a}}{U_{\rm tot}} \tag{9.12}$$

に従って軽減される [30]。ここで $U_{\rm tot}$ は ARES 全体（$\pi/2$ モード）の蓄積エネルギー、$U_{\rm a}$ は加速空洞の蓄積エネルギーである。$\pi/2$ モードでは、C 空洞にフィールドがほとんどないため、C 空洞の蓄積エネルギーは小さい。そのため、$U_{\rm s}$ を貯蔵空洞の蓄積エネルギーとすると、$U_{\rm tot} \sim U_{\rm a} + U_{\rm s}$ であり、

$$\begin{aligned}\frac{U_{\rm a}}{U_{\rm tot}} \approx \frac{U_{\rm a}}{U_{\rm a}+U_{\rm s}} &= \frac{1}{1+U_{\rm s}/U_{\rm a}} \\ &= \frac{1}{1+(k_{\rm a}/k_{\rm s})^2}\end{aligned} \tag{9.13}$$

となる。ここで $k_{\rm a}, k_{\rm s}$ は、それぞれ加速空洞と結合空洞の間の結合度、貯蔵空洞と結合空洞の間の結合度である。（図 9.6 参照）。ここで $U_{\rm s}/U_{\rm a} = (k_{\rm a}/k_{\rm s})^2 \sim 9$ となるように設計されている。これにより optimum tuning での空洞 detuning が $\Delta f_{\pi/2} = \Delta f_{\rm a}/10$ に抑えられる。こうして結合バンチ不安定性が励起されにくい仕組みとなっている。

ちなみに、第 7.6.1 節で、ARES 空洞はデザイン電流において約-30kHz の detuning（optimum tuning）になると述べたが、これは $\Delta f_{\pi/2}$ のことである。つまり、ビーム負荷に対する detuning なので、これは加速空洞の detuning を $\Delta f_{\rm a} \sim -300kHz$ にすることを意味する。

一方、0 モード、π モードの共振周波数については、ARES 空洞の場合それぞれ、$\pi/2$ モードから約 ±4MHz 離れている。従って、結合バンチ不安定性の振動モードを除けば、基本的にこれらのモードを励起するものはない。しかし、過渡的なビーム電流（過渡的な周波数成分）は、この 0 モード、π モードを大きく励起させることになる。

それでも励起された 0, π モードは、結合空洞から外に取り出しダンプさせる構造（結合空洞減衰器）があるので、長く 0, π モードの励振が続くことはない。もう少し正しく言うと、結合空洞に励起される電磁場は、すべて結合空洞減衰器によってダンプされる。そのため結合空洞の Q 値は 100 程度（$Q_{\rm c} \sim 100$）で

ある。しかし、$\pi/2$ モードは結合空洞（中央の空洞）には電磁場がほとんど立たないモードなので、ダンプされることはない。こうして $\pi/2$ モードだけが励振される仕組みになっている。この点も $\pi/2$ モード使う理由のひとつである（ただし主な理由ではない）。

以上から、BGT により、ARES 空洞に 0 モード、π モードが励起されることで、加速空洞が大きく変動することになる。しかし、結合空洞減衰器により、0 モード、π は減衰するので長くは続かない（時定数 $2Q_{\rm c}/\omega_{\rm rf} \sim 60$ns で減衰する）。これがバンチ・トレイン先頭における速い位相変化の原因となっている。従って、超伝導空洞（単セル空洞）では、このような位相変化は起きない。LER は ARES 空洞だけで運転しているので、図 9.5 のように、バンチ・トレイン先頭で速い変化が顕著に表れる。一方、HER は超伝導空洞と ARES 空洞を併用しており、超伝導空洞のほうが電圧が高く影響が大きいため、ARES 空洞の速い位相変化はビーム位相に大きく影響しない。

ちなみに、0 モード、π モードに起因する結合バンチ不安定性については、$\pi/2$ モード（RF 周波数）を挟んで 0 モード、π モードのインピーダンスはほぼ対称的な形をしているので、結合バンチ不安定性を互いにキャンセル方向に働き、大きな問題にならない [6,73]。

9.3.3 SuperKEKB における実例

次に、SuperKEKB の運転における BGT 効果の例を示す。

KEKB 時代には、過渡的な（速い変化の）RF 位相を直接は正確に測られていないようなので、上記ではバンチ位相をバンチ毎に測定した例を示した。一方、SuperKEKB 用に開発された高速デジタル RF 制御システム [74] では、位相の速い変化を直接、しかも 0.1 度の精度で容易に測定可能となっている。そのため、ARES 空洞の pickup 信号から、BGT 効果による位相変化が直接観測できる。その 1 例を図 9.7 に示す。

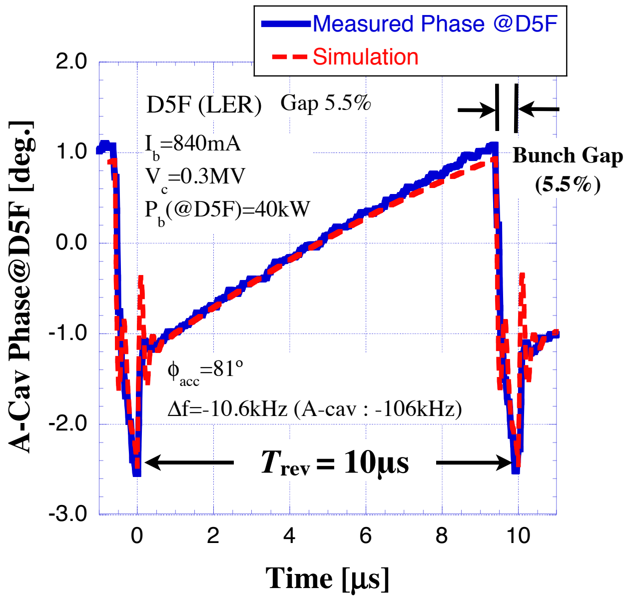

図 9.7　SuperKEKB のデジタル RF 制御システムで観測された ARES 空洞の RF 位相変化。実線が測定値で、破線がシミュレーション結果。

図 9.7 の横軸は時間で周回周期（$T_{\rm rev}$）の 1 周期をプロットしている。縦軸は、ある ARES 空洞 pickup 信号の位相である。バンチ・ギャップの幅は 5.5%（約 550ns）である。バンチ・トレインにそって約 2 度の位相変化が見られる。またトレインの先頭では、1.5 度くらいの速い変化が見られる。これが上記の ARES 空洞の 0 モード、π モードに起因する位相変化である。バンチ位相の測定では分からなかった、ギャップ内の位相変化もしっかり測定されているのが分かる。

図 9.7 の破線は、この時の条件に合わせたシミュレーション結果を示している。このシミュレーションは、ARES 空洞の 3 連空洞の特徴を考慮に入れたものである。その結果、シミュレーションにより測定結果（速い位相変化）を良く再現することができた。バンチ・ギャップ内の位相変化も測定とシミュレーションがよく合っている。これにより、バンチ・トレイン先頭の速い位相変化は ARES 空洞の 0 モード、π モードに起因していることが明確になった。

ただ、図 9.7 で、シミュレーション結果（破線）には、バンチ・トレイン先頭に速い位相振動が見られ

るが、これは測定結果（実線）には見られていない。このトレイン先頭の速い振動の振る舞いは、結合の空洞の Q 値（Q_{c}）に強く依存する。この Q_{c} が実際の空洞と合っていない可能性がある。もしくは測定系の問題（帯域特性）で、この速い変化を捉えきれていない可能性もある。

次の章では、BGT による加速電圧の変調を、時間領域でシミュレーションする手法について紹介する。特に、図 9.7 に示した ARES 空洞（3 連空洞）の場合について、具体的な計算方法を説明する。

10 Transient Beam Loading Simulation

過渡的なビーム負荷（transient beam loading）を定量的に評価する場合、システムの伝達関数（周波数応答）からラプラス変換する方法（ [67,75,76] など）もあるが、ここでは、ARES 空洞のような特殊な例を評価するために、時間領域でのシミュレーション方法について説明する。また、様々なバンチ・トレインの形（電流密度変化、fill pattern）に柔軟に対応する場合も有効である。Simulink 等の汎用シミュレーション・ソフトを利用できる場合も多いと思うが、ここでは、直接シミュレーション・コードを書く場合について基本的な手法について紹介する。

10.1 単セル空洞／単一モードの場合

まず、空洞の応答について、通常の単セル空洞の場合、あるいは多セルでも単一モードだけ扱う（ひとつの共振器と見做す）場合を考える。

図 6.4 示すような共振器回路について、入力電流 $\boldsymbol{I}$ に対する電圧 $\boldsymbol{V}$ の応答を、微分方程式で表すと、

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{V}(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\omega_0}{Q_{\mathrm{L}}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}(t)}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2\boldsymbol{V}(t)=\frac{\omega_0 R}{Q_0}\boldsymbol{I}(t) \tag{10.1}$$

のように書ける。ここで、R は回路定数（$R=R_{\mathrm{sh}}/2$）であることに注意が必要である。また、$\omega_0=1/\sqrt{CL}$ である。

次に、$\boldsymbol{V}(t),\boldsymbol{V}(t)$ について以下のように変数分離する。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}(t)&=[V_r(t)+jV_j(t)]\cdot e^{j\omega t}\\ \boldsymbol{I}(t)&=[I_r(t)+jI_j(t)]\cdot e^{j\omega t}\end{aligned} \tag{10.2}$$

ここで、変数の添字 r と j はそれぞれ実部と虚部を表すものとする（以降も同じ）。これを式 (10.1) に代入し、2 階微分を落とす（$\mathrm{d}^2/\mathrm{d}t^2=$）などして、1 次の項だけ残すと、

$$\frac{\mathrm{d}V_r(t)}{\mathrm{d}t} + \gamma\omega_{1/2}V_r(t) + \Delta\omega V_j(t) = \omega_{1/2}RI_r(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}V_j(t)}{\mathrm{d}t} + \gamma\omega_{1/2}V_j(t) - \Delta\omega V_r(t) = \omega_{1/2}RI_j(t) \tag{10.3}$$

のように、$V_r(t), V_j(t)$ に関して連立方程式が得られる [77]。ここで、

$$\omega_{1/2} = \frac{\omega_0}{2Q_0} \tag{10.4a}$$

$$\Delta\omega = \omega_0 - \omega_{\mathrm{rf}} \tag{10.4b}$$

$$\gamma = 1 + \beta \tag{10.4c}$$

と置いている。ここでは $\omega_{1/2}$ を Q_0 で定義していることに注意されたい（通常は Q_{L} で定義される）。このように定義しているのは、後の ARES 空洞を扱う場合のためである。また、式 (5.5) と同様の近似を用いている。他にも、式 (10.3) を得る際には、$1/Q_{\mathrm{L}}^2 \approx 0$ など、かなり近似を行なっていため（詳細は [77] を参照）注意が必要である。例えば、式 (10.3) 利用する場合、Q 値がある低度大きく（$Q_{\mathrm{L}} > 1000$）、detuning は小さい場合（$\Delta\omega \ll \omega_0$）に限られる。

式 (10.3) の、左辺の第 3 項を見ると、虚部と実部が結合している（入れ替わっている）。この係数（$\Delta\omega$）すなわち detuning が位相変化に相当することが、この式からも分かる（$\Delta\omega = 0$ なら虚部と実部の結合がない）。

ちなみに、式 (10.3) のような形は状態方程式と呼ばれている。

以降、実部と虚部を合わせたベクトル、あるいはエンベロープ（振幅・位相）を表す複素数を、イタリックの bold 体の変数で表す。例えば、$\boldsymbol{X} = (X_r, X_j)$ 又は $\boldsymbol{X} = X_r + jX_j$ である。X_r, X_j はそれぞれ $\boldsymbol{X}$ の I 成分、Q 成分と言っても良い。

式 (10.3) の右辺（励起項）における電流 $\boldsymbol{I}$ は、クライストロンからの投入 RF パワーに相当する電流 $\boldsymbol{I}_{\mathrm{k}}$ と、ビーム電流 $\boldsymbol{I}_{\mathrm{b}}$ がある。ビーム電流が加速位相にある場合、$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_{\mathrm{k}} - \boldsymbol{I}_{\mathrm{b}}$ とする。投入 RF パワーは $P_{\mathrm{k}} = 1/8 \cdot RI_k^2/\beta$ の関係にあるので [20]、これより投入パワーから I_{k} に換算できる。

これより、式 (10.3) を用いてシミュレーションすることになる。この式は、主にパルス運転する線形加速器の RF 制御の評価で（特に超伝導空洞制御に対して）使われている。

式 (10.3) から（デジタル LPF と同様に）数値演算できる形（差分式）にすると、

$$\begin{bmatrix} V_r^{n+1} \\ V_j^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\gamma W_{\mathrm{L}} & -D_{\mathrm{L}} \\ D_{\mathrm{L}} & 1-\gamma W_{\mathrm{L}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r^n \\ V_j^n \end{bmatrix} + 2W_{\mathrm{L}}\sqrt{\beta} \begin{bmatrix} V_{\mathrm{F}r}^n \\ V_{\mathrm{F}j}^n \end{bmatrix} - \gamma W_{\mathrm{L}} \begin{bmatrix} V_{\mathrm{b}r}^n \\ V_{\mathrm{b}j}^n \end{bmatrix} \tag{10.5}$$

と書くことができる。ここで、

$$W_{\mathrm{L}} = \omega_{1/2}\Delta t, \quad D_{\mathrm{L}} = \Delta\omega\Delta t \tag{10.6}$$

と置いている。また、$\gamma = 1 + \beta$ である。n は計算のステップ index を表す。

式 (10.5) の励起項に相当する部分について、$\boldsymbol{V}_{\mathrm{F}}$ は投入 RF パワーに相当する（いわば伝送路の）電圧である。シミュレーションで扱う数値は任意単位のほうが都合が良い（空洞電圧にスケールを合わせるほうが良い）ので、$P_{\mathrm{k}} = 1/2 \cdot V_{\mathrm{F}}^2/R$ として、

$$R\boldsymbol{I}_{\mathbf{k}} = 2\sqrt{\beta}\boldsymbol{V}_{\mathrm{F}} \tag{10.7}$$

のように、励起項を投入電圧 $\boldsymbol{V}_{\mathrm{F}}$ に置き換えている（先に出ている $\boldsymbol{V}_{\mathrm{k}}$ とは異なることに注意）。

一方、式 (10.5) の $\boldsymbol{V}_\mathrm{b}$ は、ビーム電流による励起電圧（今までの話では $\boldsymbol{V}_\mathrm{br}$）に相当する。従って、これまでの $\boldsymbol{V}_\mathrm{b}$ とは異なることに注意。シミュレーションでは $\boldsymbol{V}_\mathrm{b}$ は、加速電圧 V_c で規格化した値になるようにして、

$$
\begin{aligned}
R\,|\boldsymbol{I}_\mathbf{b}| = |\boldsymbol{V}_\mathrm{b}| &= \frac{R_\mathrm{sh}I_\mathrm{b}}{V_\mathrm{c}(1+\beta)} \\
&= \frac{I_\mathrm{b}Q_\mathrm{L}}{V_\mathrm{c}}\left(\frac{R_\mathrm{sh}}{Q_0}\right) = \frac{1}{1+\beta}\cdot\left.\frac{P_\mathrm{b}}{P_\mathrm{b}}\right|_{\phi_\mathrm{s}=0}
\end{aligned}
\tag{10.8}
$$

と与える。このように、加速電圧に対するビーム負荷の比率でパラメータを与えることで、具体的な RF パワーは気にせず、任意単位の数値で演算処理することができる。ただし、後で少し触れるが、空洞電圧 V_c はシミュレーション上でも FB 制御の効果を入れて（平均的に）一定であるとする。それに対して、ϕ_s の位相差をつけて $\boldsymbol{V}_\mathrm{b}$ を与える。あるいは逆に $\boldsymbol{V}_\mathrm{b}$ と $-\phi_\mathrm{s}$ の位相差がつくように、V_c を（平均的に）一定になるようにする。

以上より、式 10.5 でバンチ・ギャップに対応するよう、$\boldsymbol{V}_\mathrm{b}^n$ をステップ的にに変化させる（ギャップのところは $\boldsymbol{V}_\mathrm{b}^n = 0$ とする)。こうしてギャップに対する加速空洞の応答をシミュレーションできる。

また、反射電圧を $\boldsymbol{V}_\mathrm{R}$ とすると、伝送路終端（終端負荷＝空洞）で $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_\mathrm{F} + \boldsymbol{V}_\mathrm{R}$ であるので、次のように反射信号もシミュレーションで得られる。

$$
\boldsymbol{V}_\mathrm{R}^n = \boldsymbol{V}^n\sqrt{\beta} - \boldsymbol{V}_\mathrm{F}^n \tag{10.9}
$$

ここでは、$\boldsymbol{V}_\mathrm{F}$ に対して電力比で整合性が取れるように $\boldsymbol{V}$ に $\sqrt{\beta} = \sqrt{R/R_0}$ がかかっている。

以上の話は、先に述べたように、J-PARC リニアックの chopped ビームに対しても同様にシミュレートできる。

ところで、時間領域の話から逸れるが、式 (10.3) についてラプラス変換（$s = \mathrm{d}/\mathrm{d}t$ の置き換え）を考えると、

$$
s\cdot\boldsymbol{y} = \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{y} + \mathbf{B}\cdot\boldsymbol{x} \tag{10.10}
$$

と書きかえられる。ここで、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y} &= \begin{bmatrix} V_r(s) \\ V_j(s) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} RI_r(s) \\ RI_j(s) \end{bmatrix} \\
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -\gamma\omega_{1/2} & -\Delta\omega \\ \Delta\omega & -\gamma\omega_{1/2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \omega_{1/2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{10.11}
$$

である。これより、

$$
\boldsymbol{y}(s) = \mathbf{H}_\mathrm{cav}(s)\cdot\boldsymbol{x}(s) \tag{10.12}
$$

の形にすると、空洞の伝達関数 $\mathbf{H}_\mathrm{cav}(s)$ が、

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{H}_\mathrm{cav}(s) = \\
&\frac{\gamma\omega_{1/2}}{\Delta\omega^2 + (s+\gamma\omega_{1/2})^2}\begin{bmatrix} s+\gamma\omega_{1/2} & -\Delta\omega \\ \Delta\omega & s+\gamma\omega_{1/2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{10.13}
$$

と得られる。この $\mathbf{H}_\mathrm{cav}(s)$ を使って、空洞を含むシステムの周波数特性や FB ループの安定性などを評価することができる。

ここでも $\Delta\omega = 0$ とすると、実部、虚部（I,Q 成分）の結合がなくなり、ローパス・フィルターと同じ伝達関数

$$
\mathbf{H}_\mathrm{cav}(s) = \frac{1}{1+s/\gamma\omega_{1/2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10.14}
$$

となることが分かる。

10.2 ARES 空洞（3 連空洞）の場合

では、次にこれまでの話を ARES 空洞（3 連空洞）の場合に拡張させる。

ARES 空洞は図 9.6 に示すように、加速空洞（accelerating cavity）に結合空洞（coupling cavity）を介して貯蔵空洞（storage cavity）が結合されている。以降では、それぞれの空洞を A 空洞、C 空洞、S 空洞とする。また、それぞれの空洞に関する変数記号には a,c,s の添字を付けて、これまでの式（記号）に対応させるものとする。

ここで、式 (10.1) に対応する微分方程式は、ARES 空洞の場合、各空洞電圧を $\boldsymbol{V}_{\mathrm{a}}, \boldsymbol{V}_{\mathrm{c}}, \boldsymbol{V}_{\mathrm{s}}$ とすると、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{V}_{\mathrm{a}}(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\omega_a}{Q_{\mathrm{a}}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}_{\mathrm{a}}(t)}{\mathrm{d}t}+\omega_a^2\boldsymbol{V}_{\mathrm{a}}(t)\\=-\frac{k_{\mathrm{a}}}{2}\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{V}_{\mathrm{c}}(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\omega_aR_{\mathrm{a}}}{Q_a}\boldsymbol{I}_{\mathrm{b}}(t)\end{aligned} \tag{10.15a}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{V}_{\mathrm{c}}(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\omega_c}{Q_{\mathrm{c}}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}_{\mathrm{c}}(t)}{\mathrm{d}t}+\omega_c^2\boldsymbol{V}_{\mathrm{c}}(t)\\=-\frac{k_{\mathrm{a}}}{2}\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{V}_{\mathrm{a}}(t)}{\mathrm{d}t^2}-\frac{k_{\mathrm{s}}}{2}\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{V}_{\mathrm{s}}(t)}{\mathrm{d}t^2}\end{aligned} \tag{10.15b}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{V}_{\mathrm{s}}(t)}{\mathrm{d}t^2}+(1+\beta_{\mathrm{s}})\frac{\omega_s}{Q_{\mathrm{s}}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}_{\mathrm{s}}(t)}{\mathrm{d}t}+\omega_s^2\boldsymbol{V}_{\mathrm{s}}(t)\\=-\frac{k_{\mathrm{s}}}{2}\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{V}_{\mathrm{c}}(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\omega_sR_{\mathrm{s}}}{Q_s}\boldsymbol{I}_{\mathrm{F}}(t)\end{aligned} \tag{10.15c}$$

となる。上からそれぞれ A 空洞、C 空洞、S 空洞に対応する微分方程式である。ここで、ω_μ、Q_μ、R_μ（μ は a, s, c を表す）は、それぞれ各空洞に対応する共振周波数、Q 値（Q_0 に相当）、等価回路上の抵抗である。また、$k_{\mathrm{a}}, k_{\mathrm{s}}$ は、それぞれ A-C 空洞間、S-C 空洞間の結合度である。この結合度を介して、上記の 3 つの式が結合されている。ビームは A 空洞を通過するので、A 空洞の励起項として $\boldsymbol{I}_{\mathrm{b}}$ がある。また RF パワーは貯蔵空洞から投入される（入力結合器は貯蔵空洞にある）ので、S 空洞の励起項として $\boldsymbol{I}_{\mathrm{F}}$ がある。

ここで、前節に従うと、式 (10.2) により変数分離させて、式 (10.3) のような実部、虚部に関して 1 次の連立方程式を得たいわけであるが、これを上記の 3 つの式に適用させて真面目に計算すると、6 つの式が絡むのでかなり複雑になる。そこで式 (10.5) に類似したシンプルな形になるように項を残すと、

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}V_{ar}^{n+1}\\V_{aj}^{n+1}\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}W_{\mathrm{a}}&-D_{\mathrm{a}}\\D_{\mathrm{a}}&W_{\mathrm{a}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_{ar}^{n}\\V_{aj}^{n}\end{bmatrix}\\&+\begin{bmatrix}0&K_{\mathrm{aa}}\\-K_{\mathrm{aa}}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_{cr}^{n}\\V_{cj}^{n}\end{bmatrix}-B\begin{bmatrix}V_{\mathrm{b}r}^{n}\\V_{\mathrm{b}j}^{n}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{10.16a}$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}V_{cr}^{n+1}\\V_{cj}^{n+1}\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}W_{\mathrm{c}}&-D_{\mathrm{c}}\\D_{\mathrm{c}}&W_{\mathrm{c}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_{cr}^{n}\\V_{cj}^{n}\end{bmatrix}\\&+\begin{bmatrix}0&K_{\mathrm{ac}}\\-K_{\mathrm{ac}}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_{ar}^{n}\\V_{aj}^{n}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&K_{\mathrm{sa}}\\-K_{\mathrm{sa}}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_{sr}^{n}\\V_{sj}^{n}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{10.16b}$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}V_{sr}^{n+1}\\V_{sj}^{n+1}\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}W_{\mathrm{s}}&-D_{\mathrm{s}}\\D_{\mathrm{s}}&W_{\mathrm{s}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_{sr}^{n}\\V_{sj}^{n}\end{bmatrix}\\&+\begin{bmatrix}0&K_{\mathrm{ss}}\\-K_{\mathrm{ss}}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_{cr}^{n}\\V_{cj}^{n}\end{bmatrix}+F\begin{bmatrix}V_{\mathrm{F}r}^{n}\\V_{\mathrm{F}j}^{n}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{10.16c}$$

が得られる。このように、各空洞（上から A 空洞、C 空洞、S 空洞）について、それぞれ式 (10.5) に対応する式であり、また、それぞれ結合項で隣の空洞と結合している。この時、実部と虚部を逆にして（$-j$ で）結合している。ここで各係数は、

$$\begin{aligned}&\Delta\omega_\mu=\omega_\mu-\omega_{\mathrm{rf}}, \qquad \omega_{\mu/2}=\frac{\omega_\mu}{2Q_\mu},\\&F=2\omega_{\mathrm{s}/2}\Delta t\sqrt{\beta_{\mathrm{s}}}, \qquad B=\omega_{\mathrm{a}/2}\Delta t,\\&W_{\mathrm{a}}=1-\omega_{\mathrm{a}/2}\Delta t, \qquad W_{\mathrm{c}}=1-\omega_{\mathrm{c}/2}\Delta t,\\&W_{\mathrm{s}}=1-(1+\beta_{\mathrm{s}})\omega_{\mathrm{s}/2}\Delta t, \qquad D_\mu=\Delta t\Delta\omega_\mu,\\&K_{\mu\nu}=\frac{k_\mu Q_\nu\omega_{\nu/2}\Delta t}{2}=\frac{k_\mu\omega_\mu\Delta t}{4}\\&\mu,\nu:\mathrm{a,c,s}\end{aligned} \tag{10.17}$$

である。ここで、β_{s} は、入力結合器の結合度である。ただし、S 空洞における結合度である。従って ARES 空洞全体を 1 つの共振器とした場合（$\pi/2$ モード）の結合度 $\beta_{\pi/2}$ とは異なる。これらは、

$$\beta_{\rm s} = \frac{Q_{\rm s}}{Q_{\rm ext}}$$

$$\beta_{\pi/2} = \beta_{\rm s} \cdot \frac{Q_{\rm tot}}{Q_{\rm s}} \tag{10.18}$$

の関係にある [30]。ここで $Q_{\rm ext}, Q_{\rm tot}$ はそれぞれ入力結合器の外部 Q 値、ARES 全体（$\pi/2$ モード）の無負荷 Q 値（Q_0 に相当）である。ARES 空洞の場合、$Q_{\rm tot}/Q_{\rm s} \sim 0.7$ である。シミュレーションでは、これに従って $\beta_{\rm s}$ を設定する。例えば optimum coupling はデザイン電流で $\beta_{\rm opt} = 5 = \beta_{\pi/2}$ なので、シミュレーションのパラメータを $\beta_{\rm s} = 5/0.7$ とする。

式 (10.16a) の、A 空洞におけるビームの励起電圧（$\boldsymbol{V}_{\rm b}$）は、ARES 空洞の場合、

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{V}_{\rm b}| &= \frac{I_{\rm b} Q_{\rm a}}{V_{\rm c}} \left(\frac{R}{Q}\right)_{\rm a} \\ &= \frac{I_{\rm b} Q_{\rm a}}{V_{\rm c}} \left(\frac{R_{\rm sh}}{Q_0}\right) \frac{U_{\rm tot}}{U_{\rm a}} \end{aligned} \tag{10.19}$$

で与えられる。ここで、$(R/Q)_{\rm a}$ は、A 空洞単体の"R/Q"である。$R_{\rm sh}/Q_0$ は ARES 空洞全体の"R/Q"である。また、先に述べたように $U_{\rm tot}/U_{\rm a} \approx 10$ である（式 (9.13) 参照）。このように、式 (10.8) 同様、$V_{\rm c}$ で規格化するように $\boldsymbol{V}_{\rm b}$ を与える。

そして先に述べたように、$\boldsymbol{V}_{\rm b}^n$ をバンチ・ギャップに応じてステップ的にに変化させて（ギャップのところは $\boldsymbol{V}_{\rm b}^n = 0$ として）空洞の応答をシミュレートする。

ここで更に、式 (10.16a)(10.16b)(10.16c) をまとめて、一つにすると、

$$\begin{bmatrix} V_{{\rm a}r}^{n+1} \\ V_{{\rm a}j}^{n+1} \\ V_{{\rm c}r}^{n+1} \\ V_{{\rm c}j}^{n+1} \\ V_{{\rm s}r}^{n+1} \\ V_{{\rm s}j}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{\rm a} & -D_{\rm a} & 0 & K_{\rm aa} & 0 & 0 \\ D_{\rm a} & W_{\rm a} & -K_{\rm aa} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{\rm ac} & W_{\rm c} & -D_{\rm c} & 0 & K_{\rm sc} \\ -K_{\rm ac} & 0 & D_{\rm c} & W_{\rm c} & -K_{\rm sa} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{\rm ss} & W_{\rm s} & -D_{\rm s} \\ 0 & 0 & -K_{\rm ss} & 0 & D_{\rm s} & W_{\rm s} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_{{\rm a}r}^{n} \\ V_{{\rm a}j}^{n} \\ V_{{\rm c}r}^{n} \\ V_{{\rm c}j}^{n} \\ V_{{\rm s}r}^{n} \\ V_{{\rm s}j}^{n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -B \cdot V_{{\rm b}r}^{n} \\ -B \cdot V_{{\rm b}j}^{n} \\ 0 \\ 0 \\ F \cdot V_{{\rm F}r}^{n} \\ F \cdot V_{{\rm F}j}^{n} \end{bmatrix} \tag{10.20}$$

と書くことができる。これを用いて ARES 空洞の応答を時間領域でシミュレートする。

以上の計算式は、かなり近似されたものなので、計算条件には注意が必要である。先に述べたように、detunig 量は RF 周波数（共振周波数）に比べて十分小さい必要がある（$\Delta f_{\pi/2} \ll f_{\pi/2} \sim f_{\rm rf}$）。また、トータルの Q 値（$Q_{\rm tot}$）はある程度大きい必要がある。一方、実際の C 空洞の Q 値は 100 程度であるが、これを他の空洞と同程度（例えば 10000）にすると、計算が不安定になりやすい（Δt にもよる）。実は、上記の近似モデルでは、0 モード、π モードが C 空洞で減衰される（単一モードになる）ことで計算が安定になる。ただ、その減衰されるまでの 0 モード、π モードが BGT の効果として影響することになる。

また、空洞間の結合度 $k_{\rm a}, k_{\rm s}$ を大きくすると計算が不安定なる。これは Δt（ステップ時間間隔）に依存し、Δt を十分小さくすると安定になる（ただし、より計算時間が必要になる）。これは、各空洞間を移動するエネルギーの速度（群速度）が関係していると思われる。群速度 $V_{\rm g}$ は、モードの分散関数を微分した傾きに相当し、空洞間の結合度に依存する。ARES 空洞の 3 つのモードに関して分散関数は、

$$\omega_\phi = \omega_{\pi/2}\left(1+\frac{\sqrt{k_\mathrm{a}^2+k_\mathrm{s}^2}}{2}\cos\phi\right)^{1/2} \tag{10.21}$$

と表せる [30]。ここで ϕ は各モード位相（$\phi = 0, \pi/2, \pi$）を表す。また、この場合、$\omega_{\pi/2} = \omega_\mathrm{rf}$ である。これより $\pi/2$ モードの群速度 V_g は、

$$v_\mathrm{g} = \left.\frac{\mathrm{d}\omega_\phi}{\mathrm{d}\phi}\right|_{\phi=\pi/2} = \frac{\omega_{\pi/2}\sqrt{k_\mathrm{a}^2+k_\mathrm{s}^2}}{4} \tag{10.22}$$

と得られる。これに対して、

$$v_\mathrm{g}\Delta t > 1 \tag{10.23}$$

の場合は、計算が不安定になるようである。定性的かつ経験則に基づく話であるが、これより、$k_\mathrm{a}, k_\mathrm{s}$ が大きい場合は、Δt を小さくする必要があると言える。

以上で述べた計算方式は、空洞 1 台における加速電圧のシミュレーション方法である。実際のリングは多くの空洞があり、その合成としてビーム位相の変化が決まる。ただし、すべての空洞が同じ条件、つまり同じ加速電圧で、ビームの加速位相（ϕ_s）が同じであるとすれば 1 台分の計算で良い。しかし、HER は超伝導空洞と ARES 空洞の 2 種類の空洞（異なる運転条件）があるので、それぞれについて計算し、合成させる必要がある。超伝導空洞は単セル空洞なので、式 (10.5) を使用してシミュレートする。

10.3 FB 制御ループとチューナー制御

実際の運転条件に合わせるためには、空洞の応答に加え、クライストロン特性を含む空洞 FB 制御ループの効果も入れる必要がある。また、optimum tuning のため、チューナー（detunig）制御も必要である。

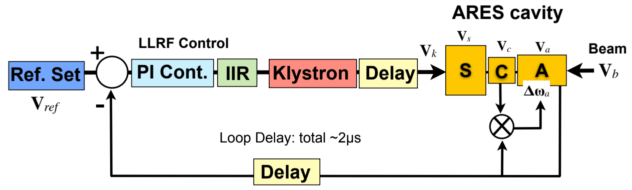

図 10.1　ARES 空洞における FB 制御とチューナー制御のブロック図

図 10.1 に、ARES 空洞の場合について、FB 制御ループとチューナー制御を表すブロック図を示す。図中の”PI Cont”は比例（P）制御と積分（I）制御を合わせた FB 制御を表す。A 空洞の電圧を Ref 設定（$\boldsymbol{V}_\mathrm{ref}$）と比較し、その差分（エラー）を PI 制御で補正する。PI 制御を式にすると、

$$\text{PI-control out} = P_\mathrm{gain}\left(\boldsymbol{V}_\mathrm{ref}^n - \boldsymbol{V}_\mathrm{a}^n\right) + I_\mathrm{gain}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\boldsymbol{V}_\mathrm{ref}^{n-k} - \boldsymbol{V}_\mathrm{a}^{n-k}\right) \tag{10.24}$$

と表せる。$P_\mathrm{gain}, I_\mathrm{gain}$ はそれぞれ P 制御、I 制御のゲインである。I 制御は過去すべての積分になるが、実際には単純に accumulate すれば良いだけである。これは実際のデジタル FB 制御システムでも行なっている計算である。

一般的に P 制御は Ref 設定に対して $1/P_\mathrm{gain}$ のエラーが必ず残る。I 制御は過去のエラーを積分するので、P 制御で残ったエラーも I 制御で補正される。

図 10.1 の”IIR”はループ帯域を決めるデジタル LPF を示している。基本的に空洞自身が LPF の役割をしてるため、ここでループ帯域を制限しなくても FB 制御自体は安定である [78]。ただ、大電力 RF から装置を保護するため帯域を制限して運転する場合がある。

SuperKEKB のデジタル RF 制御は、RF 信号を I 成分（実部）と Q 成分（虚部）の直交 2 成分に分けた制御を行なうので [74]、前節で示したシミュレーション方式（実部と虚部に分けた差分式）は、このデ

ジタル RF 制御を模擬するのに相性が良い。シミュレーションでも実際と同じ計算式（式 (10.24)）を同じ FB ゲインを与えて計算することになる。デジタル RF 制御（I/Q 成分の扱い）についての詳細は文献 [79–81] 等を参照して頂くと良い。

FB 制御のシミュレートでは、ループ遅延 T_{d} も考慮する必要がある。これは単純にデータをシフトさせれば良いが、$T_{\mathrm{d}}/\Delta t$ の数のメモリ確保が必要になる。

こうして、シミュレーションでも $\boldsymbol{V}_{\mathrm{c}}$ が（平均的に）一定になるようにして、$\boldsymbol{V}_{\mathrm{b}}$ と相対的に ϕ_{s} の位相差がつくようにする。

この FB 制御のシミュレートにおいて、クライストロン特性も考慮に入れる。その方法は、第 8.6 節で述べたように、デジタル・フィルターを設計する要領で、クライストロンの周波数特性（伝達関数）から演算処理の差分式を求める。

図 10.2 にクライストロン応答特性の測定例を示す。図は、変調信号（入力の振幅・位相変化）に対するクライストロンの応答特性（周波数特性：伝達関数）を示す。上が振幅特性（縦軸の単位は dB = 電力ゲインの log スケール）、下が位相特性である。この通り、クライストロンのフラットな帯域幅は約 100kHz である。

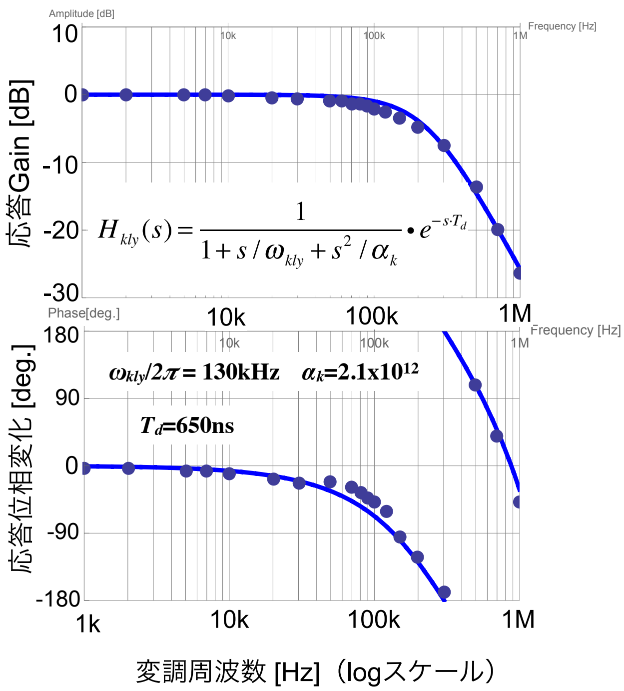

図 10.2　クライストロンの変調信号に対する周波数特性（伝達関数）。上が振幅特性、下が位相特性。

このデータをフィットしてクライストロンの伝達関数が得られる。例えば、この図では、丸い点が測定データで、2 次特性を持っているので、クライストロンの伝達関数 $H_{\mathrm{kly}}(s)$ として、

$$H_{\mathrm{kly}}(s) = \frac{e^{-s \cdot T_{\mathrm{d}}}}{1 + s/\omega_{\mathrm{kly}} + s^2/\alpha_{\mathrm{k}}} \tag{10.25}$$

の形を仮定して、フィットした結果を実線で示している。これより $\omega_{\mathrm{kly}}/2\pi \sim 130\mathrm{Hz}$、$\alpha_{\mathrm{k}} \sim 2.1 \times 10^{12}$ である。これに対して、第 8.6 節で説明したように、s 領域から z 領域の変換を行なえば時間領域のシミュレーション計算式（漸化式）が得られる。ちなみに、$e^{-sT_{\mathrm{d}}}$ は遅延を表す伝達関数で、z 領域では $z^{-T_{\mathrm{d}}/\Delta t}$ であるので、$T_{\mathrm{d}}/\Delta t$ だけデータをシフトさせれば良い。

その他の機器に関しては、クライストロンに比べて十分広い帯域幅（フラットな特性）を持っているため、それほど考慮する必要はなく、ループ遅延の一部となるだけである。

次に、再び図 10.1 に戻って、チューナー制御について説明する。

ARES 空洞では S 空洞と、A 空洞にチューナーがあり、それぞれ独立に制御される。C 空洞はチューナーがなく RF 周波数（$\omega_{\mathrm{c}} = \omega_{\mathrm{rf}}$）で固定されている（Q 値が低いので誤差は無視できる）。S 空洞の チューナーの制御は、入力 RF と S 空洞の pickup 信号の位相差で共振点に合わせる。こうして S 空洞の共振周波数は常に RF 周波数に合わせられる。一方、A 空洞のチューナー制御は、C 空洞の pickup 信号と、A 空洞の pickup 信号の位相差で共振点を得る（図 10.1 参照）。従ってビーム負荷による detuning (optimum tuning) は A 空洞の detuning となる。ただし、ARES 全体（$\pi/2$ モード）の detuning 量は式 (9.12) に従って A 空洞の 1/10 程度になる。

本シミュレーションにおいては、S 空洞と C 空洞の共振周波数は RF 周波数に固定し（$\Delta\omega_s = \Delta\omega_c = 0$）、A 空洞のビーム負荷に対するチューナー制御（optimum tuning）を模擬する。つまり、C 空洞と A 空洞の位相差が一定になるように $\Delta\omega_a$ を変える。実際のチューナーがバンチ・ギャップの変化に応答できるほど速く動くわけではないので、それを考慮して反応を十分遅くする。あるいは実際の運転でも行なっているように位相差が一定量を超えない場合は制御しない。こうして、平均的なビーム負荷に対するチューナー制御（通常の optimum tuning）となる。

ここでは、1 台の空洞を FB 制御する例を示したが、クライストロン 1 台で 2 空洞（以上）を駆動する場合もある。このような場合でも、上記の方法を容易に拡張してシミュレートできる。通常、2 台以上の空洞を 1 つの FB ループ（1 クライストロン）で FB 制御する場合は、各空洞の pickup 信号を合成（vector sum）した値で FB 制御（PI 制御）する。従って、式 (10.24) の $\boldsymbol{V}_a$ を vector sum した値にすれば良い。また、空洞電圧 $\boldsymbol{V}_F$ を各空洞に与える。その際、空洞ごとに振幅の比率を変えたり、位相に差違をつける場合も容易にシミュレートできる。ビームの加速位相に差違がある場合も同様である。

10.4 BGT 効果の影響と補償対策

ここで、上記で説明したシミュレーション方式により、BGT 効果を評価した例を紹介する [82]。SuperKEKB のデザイン電流における計算結果を示す。計算条件として RF に関する主な運転パラメータを表 10.1 に示す。バンチ・ギャップ幅は 2% である。ARES 空洞に関しては、表 9.1 も参照のこと。

ここで一つ注釈しておく。表 9.1 にある通り、実際の周回周波数 $f_{rev} = f_{rf}/h$ は 99.4kHz なので、この周期は $T_{rev} = 1/f_{rev} \sim 10.06\mu s$ である。これに

Paramter	LER	HER
Beam energy [GeV]	4.0	7.0
Beam current [A] (I_b)	3.6	2.6
Bunch gap length [%]	2	2
Bunch length [mm]	6	5
RF freq. [MHz] (f_{rf})	508.876	
Harmonic number (h)	5120	
Revolution freq. [kHz] (f_{rev})	99.4	
Cavity type	ARES	SCC/ARES
R_{sh}/Q_0 [Ω]	15	93
Loaded Q [10^4] (Q_L)	2.4	7.0/2.0
Coupling factor (β)	4.3	-/5
Number of cavities	22	8/8
Total RF Volt. [MV]	10∼11	15∼16
RF volt./cav. [MV] (V_c)	0.5	1.5/0.5
Wall loss/cav. [kW] (P_c)	150	-/150
Beam power/cav. [kW]	460	400/600
Cav. detuning [kHz] (Δf)	-28	44/18
Number of kly.	18	8/8
Kly. power/cav. [kW]	∼600	∼450/∼800

表 10.1　RF に関する運転パラメータ

対し、以降で示す結果は、簡単のために、ちょうど $T_{rev} = 10\mu$（f_{rev} =100kHz）としてシミュレーションしたものである。

10.4.1 BGT 効果のシミュレーション結果

SuperKEKB のデザイン電流の運転条件について、BGT 効果をシミュレートした結果を紹介していく。

まず、LER の例を示す。LER はすべて ARES 空洞で、全空洞が同じ条件で運転されてるものとする。

図 10.3 と図 10.4 に BGT のシミュレーション結果を示す。それぞれ振幅変調と位相変調を示している。横軸は時間で、1 つの周回周期（$T_{rev} = 10\mu s$）分をプロットしている。横軸 $t = 0$ のところがバンチ・トレインの先頭にあたる。また、バンチ・ギャップ 2% なので、バンチ・トレイン後尾 200ns 間（横軸 $t = 9.8 \sim 10$）がバンチ・ギャップに相当する。以降も同じである。

位相変調については、振幅変化（$\Delta V/V$）の影響も

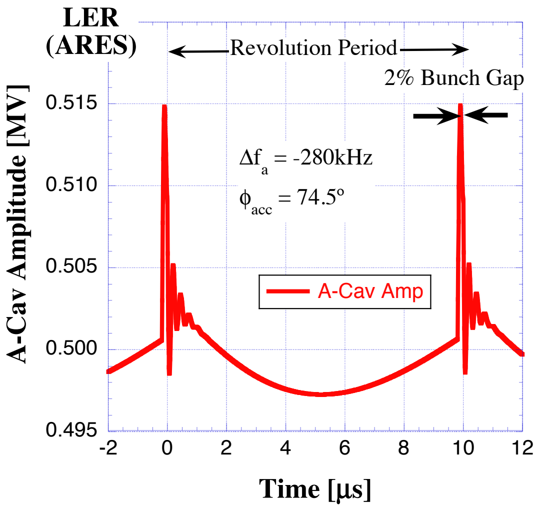

図 10.3　LER の ARES 空洞における BGT による振幅変調

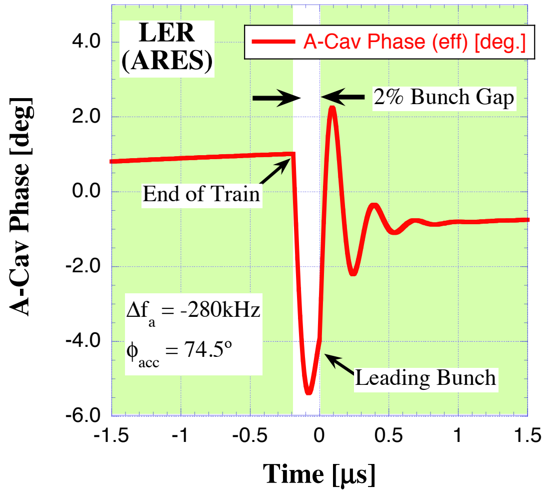

図 10.5　LER の ARES 空洞における BGT による位相変調（ギャップ前後を拡大）

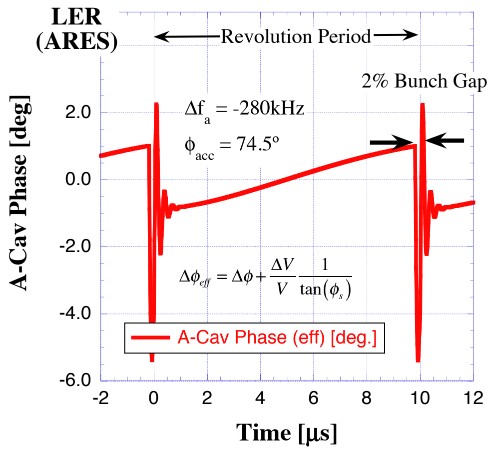

図 10.4　LER の ARES 空洞における BGT による位相変調

含め、次のように実効的な位相変化（$\Delta\phi_{\mathrm{eff}}$）にしている。

$$\Delta\phi_{\mathrm{eff}} = \Delta\phi + \frac{\Delta V}{V} \cdot \frac{1}{\tan\phi_s} \qquad (10.26)$$

ちなみに、図中の ϕ_{acc} は ϕ_{s} のことである。加速空洞の位相を 0 度とし、ビームが ϕ_{acc} の位相で加速されているとしている。

図を見て分かる通り、振幅、位相ともにバンチ・ギャップのところで大きな変化がある。これは ARES 空洞の 0 モード、π モードに起因する振動である。一方、バンチ・トレインに沿った緩やかな変化が通常の BGT 効果による変調である。この位相シフトは ±1 度 程度で、式 (9.1b) による評価と合う。KEKB と比べてビーム電流は 2 倍程度になるが、ギャップ幅を 2% に小さくしてるため、それほど大きな位相変化にはなっていない。

問題となるのは、バンチ・トレインの先頭部分の位相のズレである。図 10.4 のギャップ前後を拡大したものを図 10.5 に示す。この図を見ると、バンチ・トレインの先頭では 4 度のズレが生じている。その直後の振動を含めると pk-pk で 6 度の変動幅となり、大きな問題となる可能性がある。

一方、HER の超伝導空洞の場合を図 10.6 と図 10.7 に示す。LER と同様に、それぞれ振幅変調と位相変調を示している。この図のように、超伝導空洞は単セル空洞なので、バンチ・トレインの先頭で速い位相変化は見られない。

HER には ARES 空洞もあるため、ビーム位相は両者の vector sum になる。HER について、超伝導空洞と ARES 空洞の BGT 効果を vectro sum した場合の位相変化を、図 10.8 に示す（HER の ARES 空洞単体の結果は省略する）。ここで、HER に複数ある ARES 空洞、超伝導空洞について、それぞれ同じ種類の空洞は同じ条件で運転されていると仮定している。このように、HER では超伝導空洞の電圧が

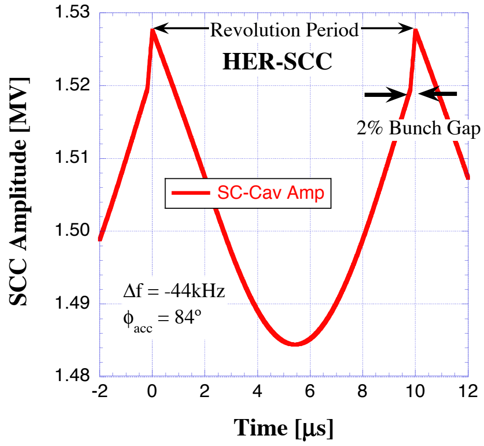

図 10.6　HER の超伝導空洞における BGT による振幅変調

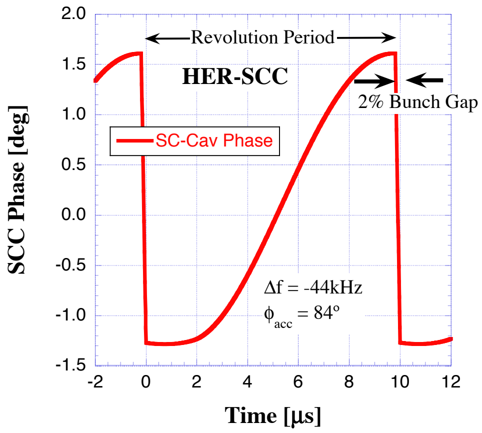

図 10.7　HER の超伝導空洞における BGT による位相変調

高く、ARES 空洞の 0、π モードの影響が小さいことが分かる。しかし、これにより LER と差が生まれることになる。

ルミノティシに影響するのは 2 つのリングの相対的な位相差でる。HER と LER の位相変化の相対的な差違（$\Delta\phi_{\mathrm{HER}} - \Delta\phi_{\mathrm{LER}}$）をプロットしたものを、図 10.9 に示す。図の実線が相対的な位相差である。また、バンチ・ギャップ前後を拡大したプロットを図 10.10 に示す。図 10.9 を見ると、バンチ・トレインに沿った位相のズレは ±0.5 度程度で比較的小さい。一方、図 10.10 を見ると、トレインの先頭では、pk-pk で約 5.5 度の位相差が生じることが分かる。これはバンチ長の半分程度、衝突点の位置がズレることになる。

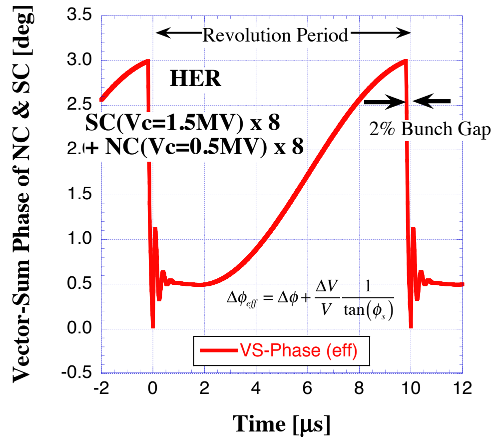

図 10.8　HER トータルの BGT 効果による位相変調（超伝導空洞と ARES 空洞の vector sum）

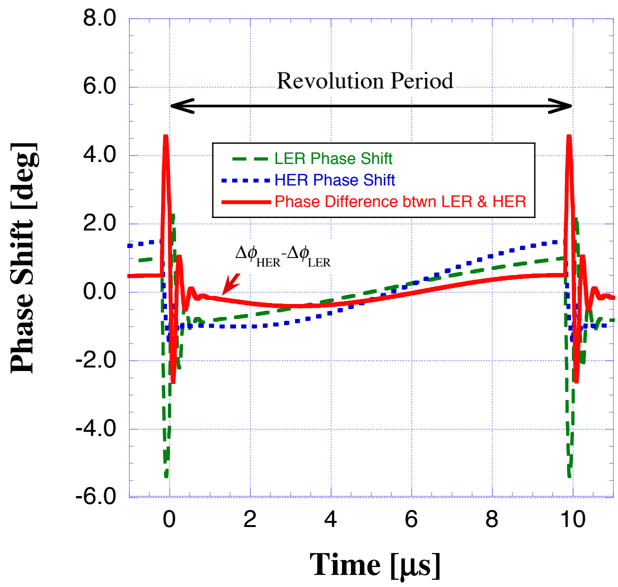

図 10.9　HER と LER の位相変化の相対的なズレ（$\Delta\phi_{\mathrm{HER}} - \Delta\phi_{\mathrm{LER}}$）

このように、ビーム位相の相対的な位相差（衝突位置のズレ）が、未踏のルミノシティを目標とする SuperKEKB にとって障壁となる可能性がある。単純な位相のずれの効果（ルミノシティの低下）だけでなく、ビーム交差位置のずれにより、ビーム間の相互作用で後続ビームを不安定性にする可能性も考えられる。具体的に位相差がどうルミノティシに影響するかはビーム・ダイナミクス専門の方に任せるとして、RF システムとしてできる対策を検討する必要がある。

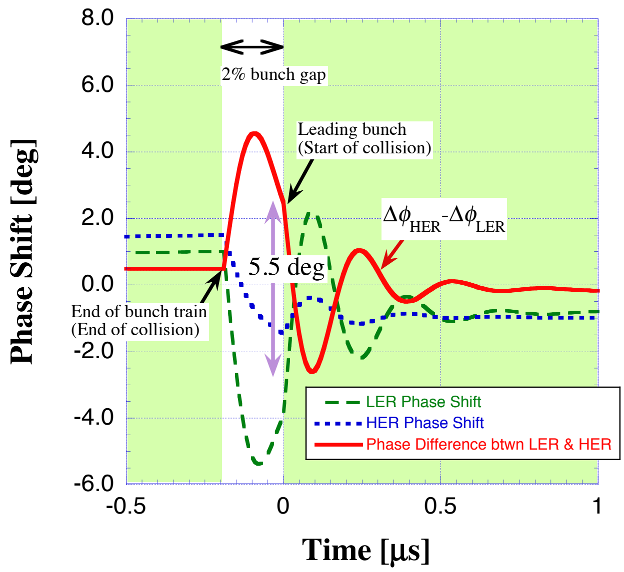

図 10.10　HER と LER の位相変化の相対的なズレ（$\Delta\phi_{\mathrm{HER}} - \Delta\phi_{\mathrm{LER}}$）。バンチ・ギャップ前後を拡大。

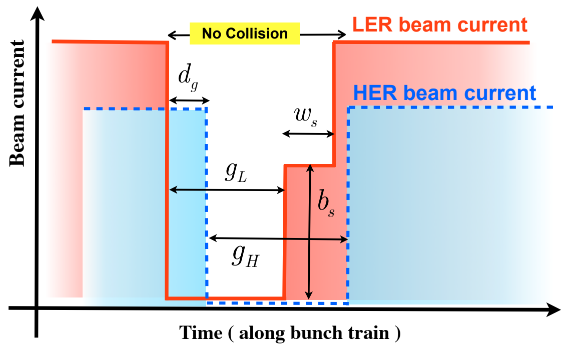

図 10.11　衝突点で BGT 効果の影響を避けるための対策案（HER ギャップの遅延と LER の立ち上げ形状の最適化）

10.4.2　BGT 効果の軽減対策

BGT による位相変化を補償する場合、RF のフィード・フォワード（FF）制御でキャンセルさせる方法がある。しかし、先に述べたように、SuperKEKB の場合はビーム電流が非常に大きいこともあり、クライストロン特性を考えると、FF 制御は現実的な対策にはならない。そのため、別の方法として、バンチ・トレイン先頭の大きな位相変化を避ける対策案を示す。

ARES 空洞（LER）の 0 モード、π モードにより、バンチ・トレインの先頭に速く大きな位相変化が生じる。そこで、トレイン先頭部分での衝突を避けるために、図 10.11 に示す方法を考える。図のように、バンチ・ギャップのタイミングを HER と LER でずらす。この場合、HER のギャップを LER より遅延させるとする。それに加えて、バンチ・トレインの立ち上がりのビーム電流の形（バンチの fill パターン）を変えて、トレイン先頭の位相変化を軽減させる。トレインの立ち上がりは、実現できそうな案として、図のように単純な 2 回ステップの fill パターンを考える。

もちろん上記の方法は、衝突点においてギャップ幅が広くなる（衝突しない時間が増える）ことを意味するので、その分（数 %）、ルミノシティの低下に繋がる。それでも致命的な不安定性がおきる場合は、この方法で、避けることができる。

この場合、調整できるパラメータは、図 10.11 に示す通り、HER ギャップの遅延時間（d_{g}）、HER,LER のギャップ幅（$g_{\mathrm{H}}, g_{\mathrm{L}}$）、トレイン立ち上がりのステップ高さ（$b_{\mathrm{s}}$）と幅（$w_{\mathrm{s}}$）の 5 つが考えられる。これら全てについて最適化するのは困難なので、簡単のため、立ち上がりステップは半分ずつ（b_{s} はピーク電流の半分）とする。また、ギャップ幅は可能である最短の 2%（$g_{\mathrm{H}} = g_{\mathrm{L}} = 200$ns）で考える。

以上のように、ギャップ遅延 d_{g} の変更と、トレインの立ち上がりステップ幅 w_{s} の調整は、大電流ビームでも、実際の運転において十分可能な対策と思われる。

シミュレーション上で、d_{g} と w_{s} を最適化した結果の例を、図 10.12 に示す。図は、d_{g}=160ns、w_{s}=140ns とした場合である。また、バンチ・ギャップの前後をプロットしている。太い実線が両リング間の相対的な位相差（$\Delta\phi_{\mathrm{HER}} - \Delta\phi_{\mathrm{LER}}$）である。階段状の実線が LER のビーム電流を表している。この結果、ギャップの中（衝突していないところ）では位相変化が大きが、衝突の開始の部分（HER のバンント・トレイン先頭）で位相差が十分小さく（約 0 .4 度に）抑え

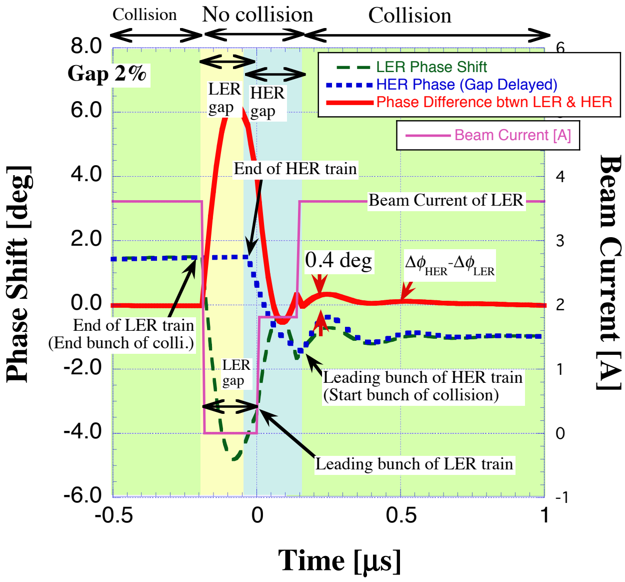

図 10.12　d_g と w_s を最適化した結果（ギャップ前後を拡大）：d_g=160ns、w_s=140ns

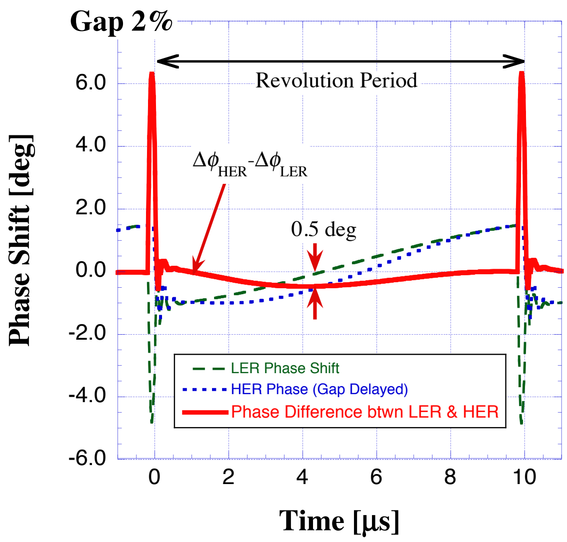

図 10.13　d_g と w_s を最適化した結果（バンチ・トレイン全体）：d_g=160ns、w_s=140ns

られている。

この時のバンチ・トレイン全体の位相変化を図 10.13 に示す。このように、トレインに沿った全体の位相変化も十分小さく（pk-pk で約 0.5 度に）抑えられていることが分かる。この場合の例では、ルミノシティの低下（ギャップ遅延による損失割合）は 1.6% に相当する。

以上、時間領域のシミュレーションにより、SuperKEKB デザイン電流における BGT 効果の影響を評価し、バンチ・トレイン先頭で ARES 空洞の 0 モード、π モードの影響が大きいことを示した。また、バンチ・ギャップの遅延と fill パターンの調整により、この大きな位相変化を十分に軽減できる可能性を示した。ただし、シミュレーションはある条件を仮定したものに過ぎない。もし BGT が問題になった際には、実際の運転条件に合わせて、図 10.11 に示すようなパラメータを調整する必要がある。

先に述べたように、他の加速器では、バンチ・トレイン全体の電流密度（fill パターン）を変えて補正する方法も行なわれている [67, 68]。この場合、fill パターン全体に変調をかけたり、バンチ・トレインの後尾で高いバンチ・カレントにする方法がある。BGT を補正するには fill パターン全体に大きな変調が必要になる。SuperKEKB は可能な限りのビーム電流を蓄積しないと目標のルミノシティを達成できないため、fill パターン全体を大きく変調できるほどの余裕はまったくない。

10.4.3　FF 制御による BGT 効果の補償

最後に、参考として、フィード・フォワード制御（FF 制御）により Transient Beam Loading を補償する場合のシミュレーション例を示す。

何度か述べてるように、SuperKEKB ではクライストロンの帯域が 100kHz 程度なので、BGT を FF 制御で補償することはできない。このクライストロン帯域を 100kHz に制限してシミュレーションすると、まったく補償できないことが分かる。前節で示したシミュレーション結果と違いがほとんど見られないので、それを示すのは省略する。

では、クライストロンの特性は無視して、理想的に空洞入力パワーを制御できると仮定した場合のシミュレーション結果を示す。

SuperKEKB のデザイン電流における LER の ARES 空洞の場合（図 10.4）に対して、FF 制御で補

償した場合を図 10.14 に示す。ビーム電流と加速位相（ϕ_s）から、逆にそれらをキャンセルする FF 制御の振幅と位相は決まる。この時の空洞入力パワーと位相を図 10.15 に示す。

この結果を図 10.4 と比べると、バンチ・トレインに沿った全体はフラットになっていることが分かる。しかし、逆に、トレイン先頭（ギャップ直後）の速い変化（振動）は大きくなっている。これは、RF パワーは貯蔵空洞（S 空洞）から投入されるため、ビーム負荷を受ける加速空洞（A 空洞）への補償が直接伝わらない（Q 値の大きい S 空洞と結合空洞が間にある）ためと思われる。あるいは、ビーム負荷による 0 モード、π モードの励起と、RF 投入による励起とでは異なるため A 空洞でキャンセルできないと考えられる。FF 制御の振幅と位相によっては、このバンチ・トレイン先頭の振動をキャンセルできる条件があると思われるが、その場合は逆に、トレイン全体の変調が大きくなるであろう。

これをバンチ・トレインの fill pattern 変調により補償を行なったとしても同様の問題になる。この場合、速く大きな fill pattern 変調が必要になり、バンチ・トレイン全体（中央）は平坦にできたとしても、変調する時の速い変化が 0 モード、π モードを励起することになり、結局その部分の（局所的な）速い位相変化を避けることができない。

もう一点、図 10.15 に示す、FF 制御における空洞入力パワーと位相についていである。実線が空洞入力パワー（縦軸左）で、破線がその位相（縦軸右）である。バンチ・ギャップに合わせて急激にパワーと位相を変化させていることが分かる。また、必要な入力パワーは約 3MW となる。500MHz-CW 運転のクライストロンで 3MW 出力（かつこの応答速度）は、現状では非現実的と言える。

仮に、上記の FF 制御が可能だとした場合、実際の運転では個々の RF システム（クライストロン等）に個性があるため、空洞ごとに FF 制御の振幅・位相の最適化（ある程度スキャンして探す、あるいは反復学習による自動化等）が必要になるだろう。また、

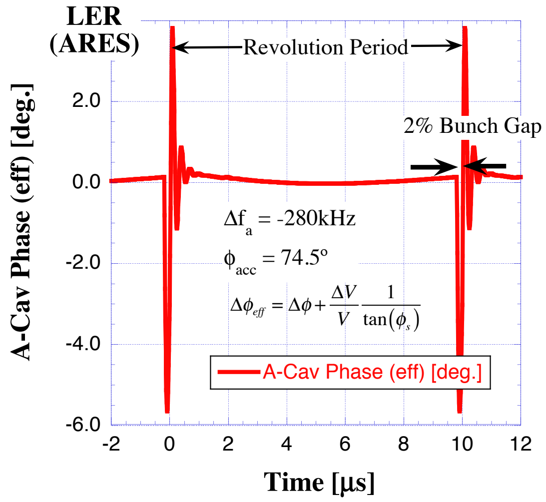

図 10.14　LER の ARES 空洞場合（図 10.4）において FF 制御により BGT を補償した場合

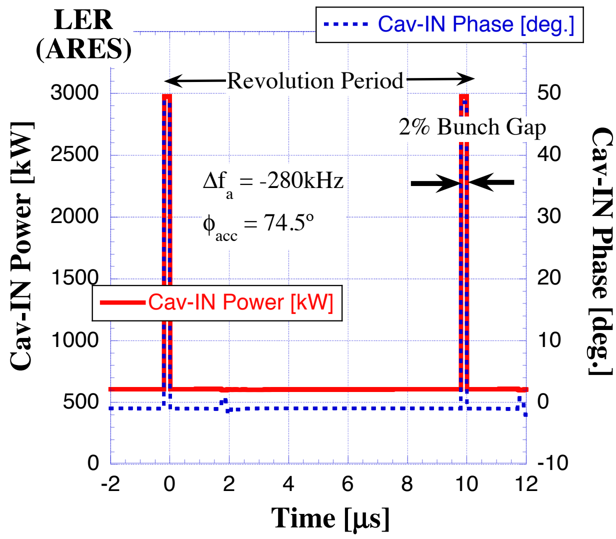

図 10.15　FF 制御により BGT を補償する場合（図 10.14）の空洞入力パワー（縦軸左）と位相（縦軸右）

FF 制御の delay も空洞ごとに厳密に調整する（最適な delay をスキャンして探す）必要がある。

ちなみに、ビームがない時の必要な RF パワー（FF 制御出力）は、当然だが optimum tuning でない場合のほうが小さく済む。そのため、バンチ・ギャップが長い場合は、敢て optimum tuning にせず、平均的なパワーが小さくなるように空洞を detuning する場合もある [83]。SuperKEKB ではギャップは短く、大きなビーム負荷を補償する必要がある（クライ

ストロン出力は最大に近い）ので、この方式は採用できない。

以上、SuperKEKB における BGT 効果は、通常の位相変調に加え、ARES 空洞の 0 モード、π モードに起因する速い位相変化があり、特殊な状況にある。これを FF 制御、あるいは fill pattern 変調により補償するのは非常に困難であると言える。従って、前述したようなバンチ・ギャップの delay 調整等で、速く大きな位相変化を避ける対策が必要である。

11　おわりに

SuperKEKB は未踏のルミノシティ達成を目指す、衝突型リング加速加速器で、その蓄積ビーム電流は非常に大きなものとなる。この大きなビーム電流を加速する RF システムにとって、ビーム負荷の問題は避けられない。

懸念される主な問題のうち、ここでは、結合バンチ不安定性（CBI）と Bunch Gap Transient（BGT）効果について紹介させて頂いた。

まず前半のビーム負荷に対する最適化と、結合バンチ不安定性については、これまでも多くのテキストで書かれている。参考文献の年代を見ると、その歴史はかなり古いが、今もなお RF 運転に必要な基本的な事項である。これからの大強度加速にとっても更に重要性が増すのではないだろうか。本稿でも、これらについて、できるだけ他の踏襲にならないよう自分なりの説明を試みたが、説明の流れをどうするか苦労し、結局これが適切かどうかは自信がない。却って分かりにくい部分も多いのではないかと心配である。やはり過去のテキストや論文と合わせて見て頂くのが良いであろう。

一方、KEKB の CBI ダンパーと BGT については、過去に詳細が書かれテキストはないかと思うので、良い機会だと思い詳しい説明を試みた。その結果、言いたいことを言いたいがために、冗長だったり厳密性に欠けたりで、ただの自己満足になっている可能性が大きい。また、SuperKEKB の特殊な例（自分の分かる範囲）が中心で、デジタル・フィルター以外は一般性も少し欠けると思われる。そのため、紹介している論文等を見て頂いて、ここから更に広い認識を持って頂くようお願いする。

最後に、これを機に少しでも RF システムあるいはビーム不安定性に関する多くの課題に興味を持ってもらい、SuperKEKB そして将来の大強度加速器に係わる人が増え、その成功に繋がれば幸いである。

参考文献

[1] 赤井和憲, “RF システム,” *OHO’94* テキスト, no. II, 1994.

[2] 絵面栄二, “RF フィードバック,” *OHO’94* テキスト, no. VI, 1994.

[3] 影山達也, “高次モード減衰型空洞,” *OHO’94* テキスト, no. V, 1994.

[4] 古屋貴章, “超伝導空洞,” *OHO’94* テキスト, no. VII, 1994.

[5] 森田欣之, “高周波加速２,” *OHO’09* テキスト, no. 4, 2009.

[6] 阿部哲郎, “高周波加速入門,” *OHO’04* テキスト, no. 2, 2004.

[7] 山崎良成, “高周波加速装置,” *OHO’84* テキスト, no. IV, 1984.

[8] 絵面栄二, “高周波加速入門,” *OHO’03* テキスト, no. 1, 2003.

[9] 高田耕治, “高周波加速,” *OHO’97* テキスト, no. V, 1997.

[10] S. Sakanaka, “Normal-Conducting Cavities for Electron Rings,” *Lecture in Joint-US-CERN-Japan-Russia Int. Acc. School*, 2017.

[11] T. Kageyama *et al.*, “Input Coupler for the ARES Cavity in SuperKEKB,” in *Proc. of PASJ2014*, pp. 590–594, 2014.

[12] 倉石源三郎, マイクロ波回路. 東京電機大学出版局, 1983.

[13] 小西良弘, マイクロ波技術講座　ー理論と実際ー. 日刊工業新聞社, 2001.

[14] 阿部英太郎, マイクロ波技術. 東京大学出版会, 1979.

[15] 中島将光, マイクロ波工学. 森北出版, 1975.

[16] 牧本利夫 and 松尾幸人, マイクロ波工学の基礎. 廣川書店, 1964.

[17] J. C. Slater, *Microwave Electronics*. D. VAN MOSTRAND COMPANY, 1950.

[18] J. I. C. Maier and J. C. Slater, “Field Strength Measurements in Resonant Cavities,” *Jounarl of Applied Physics*, vol. 23, no. 1, 1952.

[19] 小林鉄也, “KEKB 加速器用高次モード減衰器型空洞のためのビームパイプ減衰器の研究,” Master’s thesis, 筑波大学, 1996.

[20] P. B. Wilson, “High Energy Electron Linac: Application to Storage Ring RF System and Linear Colliders,” *SLAC-PUB-2884*, 1991.

[21] P. B. Wilson, “KEK Lecture on Beam Loading and Impedance Problems in e+e- Storage Rings,” *KEK-Accelerator-79-7*, 1980.

[22] 竹内保直, “高周波窓などを例としたマイクロ波回路の設計,” *OHO’17* テキスト, no. 9, 2017.

[23] 山崎良成, “高周波加速装置,” 総研大講義ノート, 1994.

[24] P. B. Wilson, “Transient Beam Loading in Electron-Positron Storage Rings,” *PEP Note-276*, 1978.

[25] F. Pedersen, “A Novel RF Cavity Tuning Feedback Scheme for Heavy Beam Loading,” *IEEE Transactions on Nuclear Science*, vol. NS-32, no. 5, 1985.

[26] F. Pedersen, “Beam Loading Effects in the CERN PS Booster,” *IEEE Transactions on Nuclear Science*, vol. NS-22, no. 3, 1975.

[27] A. W. Chao, *Physics of Collective Beam instabilities in High Energy Accelerators*. John Wiley & Sons, Inc., 1993.

[28] 久保浄, “ビーム不安定性,” *OHO’91* テキスト, no. III, 1991.

[29] K. W. Robinson, “Stability of Beam in Radiofrequency System,” *CEAL-1010*, 1964.

[30] Y. Yoshishige and T. Kageyama, “A Three-Cavity System which Suppresses the Coupled-Bunch Instability Associated with the Accelerating Mode,” *Particle Accelerator*, vol. 44, no. 107, 1974.

[31] T. Kageyama *et al.*, “The ARES Cavity for KEKB,” *Proc. of APAC98*, pp. 773–775, 1998.

[32] T. Kageyama *et al.*, “ARES Cavity System for SuperKEKB,” *Proc. of the 8th annual meeting of Particle Accelerator Society of Japan*, vol. 1245-1249, 2011.

[33] K. Hirosawa *et al.*, “A New Damper for Coupled-Bunch Instabilities caused by the accelerating mode at SuperKEKB,” *Proc. of*

LLRF2017, arXiv:1803.10886, 2017.

[34] 廣澤航輝, "SuperKEKB における加速モードに起因する結合バンチ不安定性抑制システムの開発研究," Master's thesis, 総合研究大学院大学, 2017.

[35] E. Ezura *et al.*, "Londitudinal Coupled-Bunch Instability due to Accelerating Mode of RF Cavities in SuperKEKB," KEK Internal 2018-5, KEK, 2018.

[36] P. B. Wilson, "Beam Loading in High-Energy Storage Rings," *Proc. of 9th Int. Conf. on High Energy Accelerators*, pp. 57–62, 1974.

[37] K. Akai, "RF System for Electron Storage Rings," *Proc. of the Asian Accelerator School*, pp. 118–149, 1999.

[38] K. Akai *et al.*, "RF systems for the KEK B-Factory," *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research*, vol. A, no. 499, pp. 45–65, 2003.

[39] K. Akai, E. Ezura, and S. ichiro Yoshimoto, "Beam Test of a Direct RF Freedbackfor KEKB," *Proc. of the 11 th Symposium on Accelerator Technology and Science*, 1997.

[40] D. Teytelman, *Architectures and Algorithms for Control and Diagnostics of Coupled-Bunch Instabilities in Circular Accelerators.* PhD thesis, Stanford University, 2003.

[41] F. Pedersen, "RF Cavity Feedback," *CERN/PS 92-59*, 1992.

[42] E. Ezura, S. ichiro Yoshimoto, and K. Akai, "RF Feedback for KEKB," *Proc. of International Workshop on Collective Effects and Impedance for B-Factories*, pp. 437–444, 1995.

[43] S. ichiro Yoshimoto, K. Akai, and E. Ezura, "The -1 Mode Damping System for KEKB," *Proc. of the 14th Symposium on Accelerator Science and Technology*, p. 323, 2003.

[44] S. ichiro Yosimoto, "KEKB の加速モードに起因する結合バンチ不安定を抑制するフィードバックシステム," *KEK Internal 2013-2*, pp. 1–6, 2013.

[45] K. Hirosawa *et al.*, "Advanced damper System with Flexible and Fine Tunable Filter for Longitudinal Coupled-Bunch Instabilities Caused by the Accelerating Mode in SuperKEKB," *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, to be published*, 2019.

[46] K. Hirosawa *et al.*, "New RF Feedback System and Simulations for Suppression of Coupled-Bunch Instabilities at SuperKEKB," *Proc. of IBIC2017*, pp. 292–294, 2017.

[47] A. E. E. Rogers, "Broad-Band Passive 90-degree RC Hybrid with Low Component Sensitivity for Use in the Video Range of Frequencies," *Proc. of the IEEE*, vol. 59, pp. 1617–1618, 1971.

[48] M. J. Gingell, *The Synthesis and Application of Polyphase Filters With Sequence Asymmetric Properties.* PhD thesis, University of London Faculty of Engineering, 1975.

[49] （株）三光社, "SSB フィルター." http://sanko-sha.net/, 2016.

[50] F. Qiu *et al.*, "Progress in the Work on the Tuner Control System of the cERL at KEK," *Proc. of IPAC2016*, pp. 2742–2745, 2016.

[51] 谷口慶治, 村上秀男, *et al.*, **信号処理の基礎**. 共立出版株式会社, 2001.

[52] The MathWorks, Inc., "連続/離散の変換方法." https://jp.mathworks.com/help/control/ug/continuous-discrete-conversion-methods.html.

[53] D. Boussard, "Control of Cavities with High Beam Loading," *IEEE Transactions on Nuclear Science*, vol. NS-32, no. 5, 1985.

[54] F. Blas and R. Garoby, "Design and Operational Results of a "One-turn-delay Feedback" for Beam Loading Compensation of the CERN PS Ferrite Cavities," *Proc. of PAC91*, pp. 1398–1400, 1991.

[55] P. Corredoura *et al.*, "RF Feedback Development for the PEP-II B Factory," *Proc. of EPAC94*, pp. 1954–1956, 1994.

[56] D. Teytelman, "A Non-Invasive Technique for Configuring Low Level RF Feedback Loops

in PEP-II," *Proc. of PAC05*, pp. 2863–2865, 2005.

[57] P. Baudrenghien, "The LHC Low Level RF," *Proc. of EPAC06*, pp. 1471–1473, 2006.

[58] D. Heiko and L. Ventura, "Longitudinal Coupled-Bunch Instability Studies in the PS," *Proc. of the Injector MD Days 2017*, pp. 59–62, 2017.

[59] G. Hagmann *et al.*, "The CENR SPS Low Level RF Upgrade Project," *Proc. of IPAC2019*, pp. 4005–4008, 2019.

[60] L. Schmid, P. Baudrenghien, and G. Hagmann, "One-Turn Delay Feedback with a Fractional Delay Filter." Poster Presentation in LLRF2017, P-77, https://public.cells.es/workshops/www.llrf2017.org/pdf/Posters/P-77.pdf, 2017.

[61] F. J. G. Guarch *et al.*, "Compensation of Transient Beam Loading in Ramping Synchrotrons Using a Fixed Frequency Processing Clock," *Proc. of IPAC2018*, pp. 4957–4960, 2018.

[62] T. Mimashi *et al.*, "SuperKEKB Beam Abort System," *Proc. of IPAC2014*, pp. 116–118, 2014.

[63] 大見和史, "ビーム不安定性ー電子雲、イオン、CSR," *OHO'11* テキスト, no. 4, 2011.

[64] T. Kobayashi and I. Masanori, "Beam Test of Chopped Beam Loading Compensation for the J-PARC Linac 400-MeV Upgrade," *Proc. of LINAC2010*, pp. 256–258, 2010.

[65] P. B. Wilson, "Beam Loading in High Energy Storage Rings," *PEP-Note 37, SPEAR-163*, 1973.

[66] D. Boussard, "RF Power Requirements for High Intensity Proton Collider," *Proc. of PAC91*, pp. 2447–2449, 1991.

[67] D. Teytelman, "Transient Beam Loading." FCC Week 2017, 3WE16C, 2017.

[68] H. Wang *et al.*, "Transient Beam Loading Due to the Bunch Train Gap and Its Compensation Experiments at BEPC-II and ALS," *Proc. of IPAC2018*, pp. 390–393, 2018.

[69] K. Akai *et al.*, "Bunch-by-Bunch Phase Measurement at KEKB," *PAC2001*, pp. 2432–2434, 2001.

[70] T. Ieiri *et al.*, "Bunch-by-Bunch Measurements of the Betatron Tune and the Synchronous Phase and Their Aapplications to Beam Dynamics at KEKB," *Physical Review Special Topic -Accelerator*, vol. 5, no. 094402, 2002.

[71] T. Ieiri *et al.*, "Beam Dynamics Measurements Using a Gated Beam-Position Monitor at KEKB," *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research*, vol. A, no. 606, pp. 248–265, 2009.

[72] H. Kichimi, "KEKB Beam Collision Stability at the Picosecond Timing and Micro Position Resolution as observed with the Bell Detector," *JINST*, vol. 5, no. P03011, 2010.

[73] T. Kageyama, "ARES Upgrade for SuperKEKB." Presented in the 9th KEKB Accelerator Review Committee, 2004.

[74] T. Kobayashi *et al.*, "Development and Construction Status of New LLRF Control System for SuperKEKB," *Proc. of IPAC2014*, pp. 2444–2446, 2014.

[75] A. Butterworth *et al.*, "Beam Loading and LLRF consideration for FCC-ee." Poster Presentation in LLRF2017, P-30, https://public.cells.es/workshops/www.llrf2017.org/pdf/Posters/P-30.pdf, 2017.

[76] D. J. Gong *et al.*, "Cavity Fundamental Mode and Beam Interaction in CEPC Main Ring," *Proc. of SRF2017*, no. 825-827, 2017.

[77] T. Schilcher, *Vector Sum Control of Pulsed Accelerating Fields in Lorenz Force Detuned Superconducting Cavities.* PhD thesis, Hamburg University, 1998.

[78] T. Kobayashi *et al.*, "Progress in Development of New LLRF Control System for SuperKEKB," *Proc. of IPAC2014*, pp. 2444–

2446, 2014.

[79] 松本利広, “高周波電力制御の設計,” *OHO’06* テキスト, no. 10, 2006.

[80] 松本利広, “ILC の高周波源ー低電力高周波制御・立体回路ー,” *OHO’14* テキスト, no. 8, 2014.

[81] 三浦孝子, “マイクロ波ローレベル制御,” *OHO’17* テキスト, no. 8, 2017.

[82] T. Kobayshi and K. Akai, “Advanced simulation study on bunch gap transient effect,” *Physical Review Accelerator and Beams*, vol. 19, no. 062001, 2016.

[83] P. Baudrenghien and T. Mastoridis, “Performance and Future Plan of the LHC RF,” *Proc. of HB2012*, pp. 565–569, 2012.