

ILC 加速器

1. はじめに

この講義では、ILC 加速器の設計の概略を理解してもらうことを目的とする。超伝導加速システム、電子・陽電子源、ビームダンプ、施設などについてのより詳しい説明は他の方の講義があるので概略のみとする。また、ビーム力学に関する内容も「ナノビーム」の講義でより詳しく解説されるはずである。他の講義では触れられないと思われる部分については、その仕組みとそこでのビームの振る舞いについて少し詳しく説明する。後半では、ILC のビームパラメータの特徴について、「なぜそうなっているか？」をルミノシティ（衝突点でのビームパラメータ）とエネルギー効率（超伝導空洞による加速）の観点から説明することを試みる。

2. ILC 加速器の構成

この節では、ILC の加速器の設計が「どのようになっているか」を述べ、「なぜそうなっているのか」については次節以降で説明を試みる。

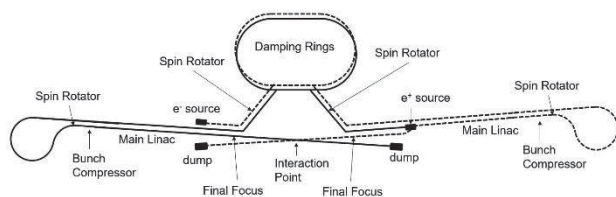


Fig. 1 ILC Layout 概念図。実線は陽電子の、点線は電子のビームライン [1]

Fig. 1 に ILC 加速器の概念図を、主なビームパラメータを Table 1 に示す。

以下、上流から各コンポーネントの役割やビームの状況について簡単に説明する。ただし、エネルギー圧縮、バンチ長圧縮、スピンの操作などについては順番を変えて後で説明する。

Table 1 Beam Parameters (250 GeV ECM)

Particles/bunch	2×10^{10}
Bunches/pulse	1312
Bunch Length	6 mm (damping ring) 0.3 mm (after bunch compressor)
Bunch spacing	554 ns (linac, etc.) 6.15 ns (damping ring)
Repetition rate	5 Hz
Normalized emittance x/y	$4\mu\text{m}/20\text{nm}$ (damping ring) $5\mu\text{m}/35\text{nm}$ (BDS)
Beam Energy	5 GeV (damping ring) 15 GeV (after 2 nd bunch compressor) 125 GeV (final energy)
Beam size at collision point	x : 520 nm y : 7.7 nm

2.1. 電子入射器

電子源で縦偏極した電子ビームが生成される。レーザー光を陰極 (photo-cathode) に当て光電効果で出てくる電子を加速してビームとする。偏極した多バンチの大強度のビームを作るために photo-cathode の量子効率と偏極度、大強度のレーザーの技術が重要である。photo-cathode は、電子のスピンの向きによってエネルギー準位の異なる特殊な結晶構造を持った物質で、エネルギー幅の狭いレーザー光を当てることによって決まったスピンの電子のみを取り出すことができる。

125MeV までは常伝導の加速空洞により、125MeV から 5GeV までは主線形加速器と同じ方式の超伝導加速空洞で加速され、ビームの時間構造は主線形加速器部分と同じである。

5GeV まで加速された後、エネルギー圧縮を経て、偏極の向きを垂直方向に回転されてダンピングリングに入射される。

2.2. 陽電子入射器

基本設計の陽電子源は「アンジュレーター方式」と呼ばれる。主線形加速器で加速され、衝突実験に使用される前の高エネルギーの電子をヘリカルアンジュレーターに通す。発生する光子を標的に当てることで生成される陽電子を集めてビームとする。光子が偏極しているので前方に生成される陽電子ビームも偏極する。

陽電子源では、標的の破損（瞬間的な熱による機械的な衝撃、熱の蓄積による溶解、等）を防ぎながら要求される量の陽電子を集めてビームとすることが重要である。

その後は電子ビームと同様に、数 100MeV までは常伝導の加速空洞で、その後は主線形加速器と同じ方式で 5GeV まで加速 (Booster Linac) された後、エネルギー圧縮を経て、偏極の向きを垂直方向に回転されてダンピングリングに入射される。その生成方式から、ビームの時間構造は主線形加速器部分と同じでなければならない。

別の選択肢として、陽電子発生用の独立した電子線形加速器（常伝導）を用意する「電子駆動方式」がある。エネルギー約 4 GeV の電子ビームを標的に当てることにより生成される陽電子を集めてビームとする。ダンピングリングのエネルギー 5 GeV までの加速にも常伝導の線形加速器を用いる。ビームの時間構造は主線形加速器部分とは異なる。

2.3. ダンピングリング (damping ring)

後で述べるように、ルミノシティを大きくするためには低エミッタンスのビームが必要であり、そのためにはダンピングリングは必須である。ダンピングリングを周回する間に放射減衰によってビームのエミッタンスは低下する。入射ビームと取り出されるビームの規格化エミッタンスを Table 2 に示す。

ダンピングリングによってエミッタンスは桁違いに小さくなる、特に陽電子の垂直方向のエミッタンスは約 1/50000 になる。また、入射される粒子のエネルギーのずれの許容値は約 0.75% であるのに対して、取り出されるビームのエネルギー

の広がり (energy spread) は 約 0.1% まで減少する。(陽) 電子円形加速器では、シンクロトロン放射の影響 (放射減衰と放射励起) により時間とともに、ビームの形がきれいな正規分布に近づいていき、軌道やエネルギーも安定になっていく。

ILC は 5Hz で運転されるので、ビームがダンピングリングに滞在できる時間は 0.2 秒未満であり、この間に十分減衰させる必要がある (damping time が 0.2 秒に比べて十分短い必要がある。Appendix 式(6-49)参照)。ILC のダンピングリングの周長は長く、曲線部分での曲率が小さいので、damping time を小さくするために wiggler を直線部に挿入する。これにより damping time は横方向 25ms, 縦方向 12ms 程度になるが、Wiggler 強度の変更によってある程度の調整が可能になっている。放射によるエネルギー損失は曲線部よりも wiggler 部分の方が大きい。曲線部の曲がりが緩やかで、直線部に wiggler があることは水平方向のエミッタンスを小さくすることにも役立っている。

Table 2, Normalized emittance in Damping Ring. (unit: rad-m)

		入射	取出し
Electron	Horizontal	7×10^{-5}	4×10^{-6}
	Vertical		2×10^{-8}
Positron	Horizontal	$\sim 1 \times 10^{-3}$	4×10^{-6}
	Vertical		2×10^{-8}

ILC のビームの 1 パルスは約 1300 個のバンチからなり間隔は約 500ns であり、全体で約 0.65 ms である。この構造のままのビームをダンピングリングに蓄積しようとするとき周長約 200 km が必要となり、非現実的である。実際のダンピングリングの周長の設計値は約 3km で、バンチ間隔は約 6.15 ns (0.65 GHz の RF の 4 周期) と短い。リング内でバンチ間隔を小さくするためにはバンチ 1 個ずつを高速のキッカーで入射・出射する必要がある (Fig. 2)。リング内にあるバンチの軌道に影響を与えないため、キッカーの立ち上がり・立下り時間はバンチ間隔よりも短くなくてはならない。

(電子駆動方式の陽電子源の場合は入射ビームの時間構造が異なり、キッカーに要求される性能もこれとは異なる)

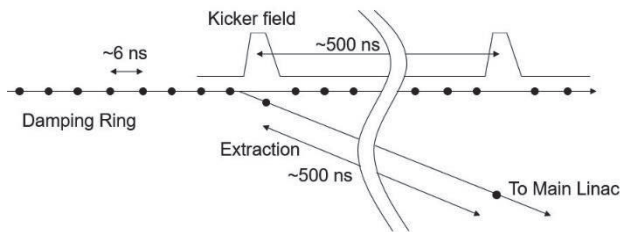


Fig. 2 DR からの Extraction. DR 内と線形加速器ではバンチの時間構造が異なる。高速キッカーによりバンチ 1 個ずつ入射・取り出しを行う

Fig. 3 にダンピングリングのレイアウトを示す。一方の直線部に入射・取り出しのための領域と周長調整用のシケインがあり、もう一方の直線部には wiggler, RF 空洞, チューン調整用の phase trombone がある。図は陽電子リングを上から見たもので、電子リングはこれを左右反転したものになる。陽電子と電子のダンピングリングは同じトンネルに 2 階建てで設置されるので、RF 空洞などの背の高い構造物が重ならないようになっている。

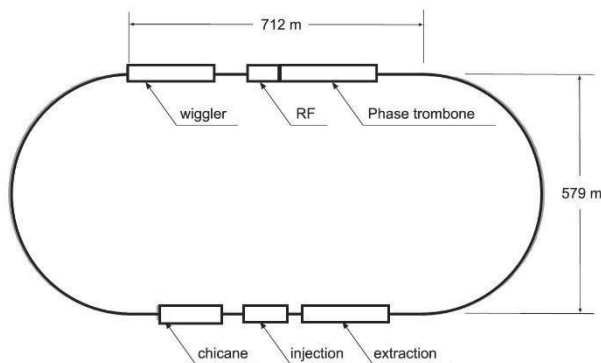


Fig. 3 Damping ring layout. Chicane は周長の調整のため、phase trombone はチューン調整のための領域。図は陽電子リングで、電子リングは左右反転された形。[1]

ILC は当初はパルス当たり約 1300 バンチでスタートするが、将来バンチ数を 2 倍に増強することを想定して設計される。ビーム電流が 2 倍になると、陽電子ダンピングリングで電子雲による不安定性 (electron cloud instability) が問題になる可能性がある。そのため、トンネルはリングを 3 階

建てにしてもう一個陽電子リングを追加できるように設計される (従って、始めは 1 階が陽電子、2 階が電子のリングである)。

2.4. Return Line と turnaround

リングから取り出された低エミッタンスのビームは、主線形加速器と同じトンネル内を通過して加速器の端まで輸送される。この部分は基本的に 4 極磁石とドリフト空間からなる単純な FODO (Focus-Open space-Defocus-Open space ?) の繰り返しである。4 極磁石の設置誤差・位置の変動はエミッタンス増大を引き起こすが、その影響は磁場が強いほど大きい。誤差に対する要求を緩和するため、この部分では磁場の弱いビーム光学設計を採用している (収束・発散力が小さく、ベータ関数が大きい)。また、主線形加速器の加速空洞を水平 (重力の向きに垂直) に置くために、この部分のビームラインは地球の曲率に沿って曲がっている。

ビームは加速器の両端の turnaround で折り返されるが、ここでのシンクロトロン放射によるエミッタンス増大は無視できない (放射励起)。エミッタンス増大を抑えるため、turnaround の曲率はあまり大きくできず、また、収束力のある程度大きくしておく必要がある (低エミッタンスのストレージリングと同様に、4 極磁石を強くし間隔を短くするようなビーム光学設計が必要)。従ってこの部分では長い Return Line と事情が異なり、エミッタンス増大を抑えるためには 4 極磁石の位置やビーム軌道の精度が要求される。

Return Line, Turnaround では 4 極磁石の設置誤差は 0.15mm とされている[1] (ただし Return Line での実際の許容値はこれより緩いと思われる)。この程度の誤差の中でエミッタンス増大を小さくするため、"kick minimization" と呼ばれる軌道補正の方法が適用される。このため、ほぼ全ての 4 極磁石の直近に軌道補正用 2 極磁石とビーム位置モニターが取り付けられ、誤差によるビームの蹴り角を全体として小さくするように (軌道が滑らかになるように) 調整が行われる。

(Appendix 参照)

設置誤差などの時間的に変化しない誤差に加えて、変動する誤差もある。ダンピングリングからの取り出しキッカーの強度の変動や長い Return Line での磁場の変動（4 極磁石の振動、何らかの変動する漏れ磁場など）による軌道変動は turnaround での feedforward により各バンチ毎に補正され、下流には影響を与えない。しかし、軌道の変動が大きいと turnaround の部分でのエミッタンス増大につながるの、上流での変動もある程度抑えておく必要がある。

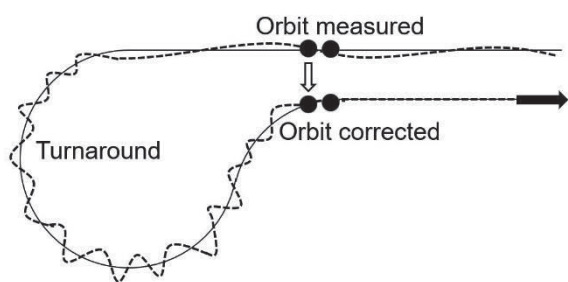


Fig. 4 Turnaround でのバンチ毎の orbit feedforward

2.5. 主線形加速器 (Main Linac)

Return line, スピン回転とバンチ長圧縮を経たビームは、主線形加速器で最終的なエネルギーまで加速される。

長い距離にわたって超伝導空洞に液体ヘリウムを供給するための技術的な理由から、主線形加速器のクライオモジュール（に沿ったヘリウム供給ライン）は、水平（重力に垂直）に設置される。つまり、主線形加速器は地球の表面に沿った曲線になる。この曲がり滑らかで緩やかなので、ビームダイナミクスの観点からは問題にならないと考えられる。

主線形加速器のビーム光学設計は、単純な FODO であり、4 極磁石間の距離は約 39 m (FODO セル長 78 m), FODO セル当たりの位相の進みは水平方向 75 度、垂直方向 65 度で、主線形加速器全体にわたってほぼ一定である（したがって、4 極磁石の強度はビームエネルギーに比例して下流ほど強くなっていく）。

電子主線形加速器は長さ 5.49 km, 陽電子主線形加速器は 5.37 km で、其々 3666 台と 3588 台の空洞がある。電子ビームは加速の後、陽電子生成のためのアンジュレータを通過してエネルギーが下がるのでその分長い。空洞全てが設計電場 (31.5 MV/m) で運転できればビームエネルギーは設計値 125 GeV を越える。また、電子・陽電子主線形加速器其々の最上流部に約 300 m の予備のスペースがあり、ここに加速空洞を追加設置することにより、ある程度のエネルギーの増強が可能である。

加速空洞は 9 台又は 8 台が 1 台のクライオスタット（クライオモジュール）に組み込まれる。空洞 8 台が組み込まれるクライオモジュールには 4 極磁石、軌道補正のための 2 極磁石、ビーム位置モニターなどが組み込まれる。ビーム光学的には 4 極磁石 1 台、空洞 26 台からなる 3 台のクライオモジュールが 1/2 FODO セルを作る単位となる。一方、高周波の供給・制御では、1 台のクライストロンから高周波が供給される 39 台の空洞 (9/2 クライオモジュール) が 1 単位 (RF unit) となる。(4 RF unit が 3 FODO セルに対応する)

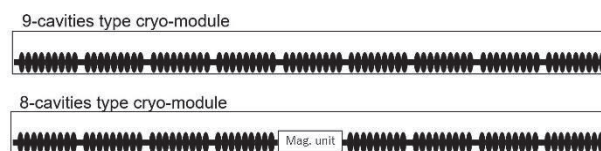


Fig. 5 クライオモジュール。下図は 8 空洞タイプのモジュールで、中央に 4 極磁石などが組み込まれる。上図の 9 空洞タイプでは中央にも空洞がある。

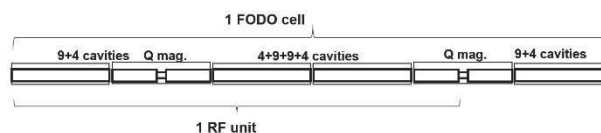


Fig. 6 主線形加速器の 1 FODO セル。

加速空洞内の電場は、供給される高周波による電場とビーム自身が作る電場 (wakefield) の和である。バンチの後方の粒子はバンチ前方の粒子による（短距離の）wakefield の影響を受けてエネルギーが低下する。エネルギーの拡がりをなるべく

小さくするため、バンチの中心が高周波の加速のピークから 5 度程度位相のずれたところに来るようにする。結果としてエネルギーの広がり、絶対値は主線形加速器の中ではあまり増加しない。加速があるために相対的なエネルギーの広がり、減少する。

Fig. 7 に加速電場と wakefield による減速電場、合計の電場を示した。Wakefield の傾き (dW/ds) はほぼバンチの線電荷密度に比例するので、これを打ち消すための RF のピークからの位相のずれ (off-crest phase) は大雑把にはバンチ電荷に比例しバンチ長に反比例する。この位相が大きくなると、ピーク電圧に対して実際の加速電圧が低くなり、より多くの空洞が必要になり、コストの増大につながる。

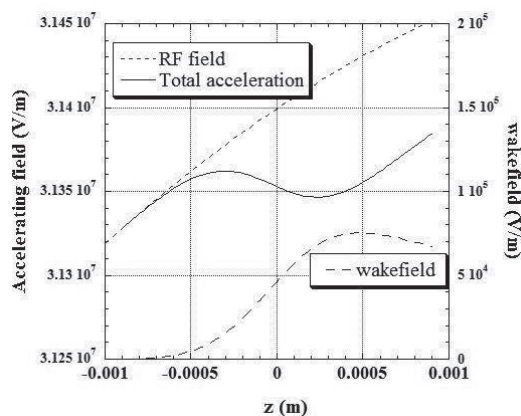


Fig. 7 Energy gain from RF field, energy loss due to wakefield and total energy gain per unit length.

主線形加速器でビームの低エミッタンスを保つことは重要である。垂直方向のエミッタンスは水平方向のエミッタンスの 1/100 よりも小さいので、垂直方向の低エミッタンスを保存することが特に問題となる。ビームの横方向のエミッタンスを増大させてしまう要因には

- エネルギーに依存した軌道のずれ (dispersive effect)
- 横方向の wakefield

がある。(詳しい議論は参考文献[3]を参照)

4 極磁石の設置誤差や加速空洞の傾きなどがあると、その場所でビームが蹴られて軌道角度が変化する。ビームの中心軌道は最後に補正することが

できる。しかし、ビームにはエネルギーの広がりがあるのでその角度変化は同じではない。局所的には角度変化は単純にエネルギーにほぼ反比例するが、その下流の 4 極磁石全てでビームの位置がエネルギーに依存することになる。その結果、下流の 4 極磁石での角度変化はエネルギーに非線形の依存性を持ち、これは最後に補正することが極めて困難である (できない)。これが dispersive effect によるエミッタンスの増大となる。これを小さく抑えるには、主線形加速器のビームラインのあらゆる場所で誤差による軌道の角度変化を小さくしておく必要がある (全体にわたってビーム軌道をなめらかにする)。これは、dispersion (軌道のエネルギー依存の一次の係数) を全ての 4 極磁石の位置で直接測定 (上流の RF を変更してビームエネルギーを変化させ、4 極磁石とセットになっているビーム位置モニターにより測定) して、dispersion が小さくなるように (設計値に近くなるように) 軌道を補正 (4 極磁石の隣の軌道補正用の 2 極磁石を使用) することで可能になる。主線系加速器での wakefield はほとんどが加速空洞による。荷電粒子が空洞 (ほぼ軸対象の構造物) の中心からずれた位置を通ると、ずれた方向に後続の粒子を蹴るような電磁場が励起される。このため、バンチの後方の粒子の軌道が変化してエミッタンスが増大する (その後の軌道が、ビーム軸方向の相対的な位置に依存する)。これを抑えるにはビームが加速空洞の中心を通るようにすればよいが、そのためには精度よく空洞と 4 極磁石を設計通りの位置に設置しておく必要がある。(ビームの軌道は 4 極磁石の設置位置に依存するので、空洞と 4 極磁石の両方が設計通りに置かれる必要がある。)

Dispersive effect, wakefield effect 両方を計算に入れた検討により、主線形加速器での許容設置誤差 (標準偏差) は約 0.3mm とされている (詳しい許容値の定義と数値については参考文献[1]を参照)。

加速空洞には加速 RF より高い周波数の高次の共振モード (HOM, Higher Order Mode) があり、

バンチの通過によって励起されて後続のバンチに影響を与える。この効果を抑えるためには

- 重要な HOM の周波数が空洞毎にばらつく
- 重要な HOM の減衰が速い (Q 値が小さい) ことが必要である

周波数がばらつくことによって空洞毎に後続バンチを蹴る方向が変わり、相殺されることが期待できる。必要な周波数のばらつき幅はバンチ間隔の逆数程度であるが、これは空洞毎の形状の微妙な差によって自然に生じると考えられている。空洞は超伝導なので HOM も空洞壁ではほとんど損失が無く、何もしなければ減衰は非常に遅い。HOM を早く減衰させるため、各空洞直近のビームパイプに HOM coupler と呼ばれる HOM の電磁場を外に取り出すための構造が取り付けられる。ここから加速モードの電磁場が抜けて行ってしまうので加速周波数は通過させないようなフィルターになっている。また、励起される重要な HOM 全てを取り出すため、各空洞の前後に角度を変えて2個取り付けられる。

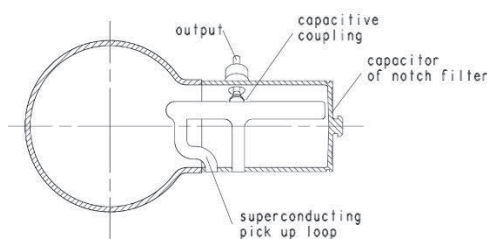


Fig. 8 HOM coupler [1]

以上では、時間的に変化しないような誤差による影響について述べたが、ビームの軌道が変動することでも問題が生じる可能性がある。先に、turnaround での feedforward によってその上流に起因する軌道変動を抑制すると述べたが、主線形加速器内での原因によっても軌道の変動が起きる。軌道変化は粒子を横方向（水平・垂直方向）に蹴る電磁場の変化によって起こるが、その主な原因は、

- 4 極磁石の機械的な振動（横方向の位置の変動）
 - 4 極磁石と軌道補正磁石の磁場変動
 - 加速空洞の機械的な振動（傾きの変化）
 - 加速電場の変動（傾いた空洞の）
- である。

4 極磁石での軌道角度変化は磁場中心と軌道のずれに比例するので、4 極磁石の位置変動は軌道変動を引き起こす。軌道は補正後にも完璧に 4 極磁石の中心を通っているわけではなく、ある程度のずれがあるので、4 極磁石の強度が変動すれば軌道が変動する。加速空洞の傾きがあれば横方向に粒子を蹴るので、傾きが変動すれば軌道も変動する。また、傾きのある空洞の電場が変化すれば、やはり軌道も変化する。

Table 3 Tolerances of dynamic errors in Main Linac (in vertical direction, root mean square)

4 極磁石振動（位置変動）	~100 nm
4 極・軌道補正磁石強度変動	0.01%
空洞の傾きの変動	3 μ rad
空洞電場の変動 (空洞の設置誤差 0.3 mrad)	1%

其々の許容誤差を Table 3 に示す。

ここで、空洞電場の変動の許容値は、空洞毎の変動に対するものであることを注意しておく。空洞の加速電場は入力 RF をコントロールすることで調整できる。先に述べたように、1 台の RF 源からは 39 台の空洞に RF が供給されるので、エネルギーを安定させるだけならば、39 台の空洞の電場の合計を一定にするように調整すればよい。

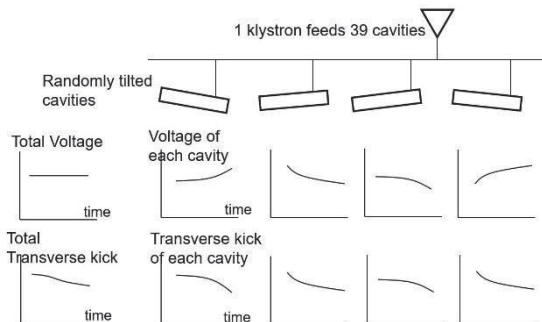


Fig. 9 加速空洞の傾きと電圧変動による横方向の軌道変化（複数の空洞の電圧の和のみを一定にする場合）。これを抑えるため、個々の空洞の電圧を調整する必要がある。

しかし、上に述べたような横方向の軌道を安定させるためには、空洞毎に電場を一定にするように調整する必要がある。設置誤差による傾きが空洞

毎にバラバラであるために合計の電場が一定でも横方向の蹴り角は変動してしまうからである。運転時の加速電場は空洞性能によって異なるため、各空洞の電場をビームパルス全体で一定にするためには、入力 RF をコントロールするだけでなく、入力カプラーの結合度 (Q_L , Loaded Q) を空洞毎にあらかじめ調整しておく、といったやや複雑な調整が必要になる。[4]

これらの変動要因によって、主線形加速器の終端での垂直方向のビーム軌道の変動はビームサイズの 2 倍程度になると予測されるが、この変動による主線形加速器内でのエミッタンスの増大は小さい（ビーム光学上、収束力が小さいことによる）。ただし、この軌道変動が最終収束系にまで持ち込まれるとエミッタンスが増大してしまう（収束が極めて強いところがあるので）。そのため、主線形加速器の直後にはバンチ毎に軌道補正を行う高速の feedback が必要である。軌道の変動はバンチ間隔（～500ns）の間では極めて小さいと考えられるので、前のバンチの軌道の情報から後続のバンチを補正することで軌道の安定化が可能である。

2.6. 陽電子源のためのアンジュレーター

主線形加速器で加速された電子ビームは、陽電子源のための光子を発生させるヘリカルアンジュレーターを通る。ヘリカルアンジュレーターはビームパイプに沿って螺旋状に巻かれた 2 本の超伝導のコイルからなる。ここで電子が螺旋運動することで放出された光子が陽電子生成に使われる。前方に出た光子は偏向するので、これによって生成される陽電子も偏極を持つ。

光子の放出により電子ビームはエネルギーが低下する（3GeV 程度）ので、電子の主線形加速器は陽電子側より長く、加速空洞が多い。エネルギーの拡がりも増加するのでビームの質がやや劣化することは避けられない。しかし、軌道の調整により横方向のエミッタンス増大はほとんどなくすることができる。

陽電子源については他の講義で説明されるのでこれ以上の内容は省略する。

2.7. BDS (Beam Delivery System)

2.7.1. コリメーターシステム

加速されたビームは最終収束系に入る前にコリメーターシステムを通りビームの中心から遠く離れた粒子 (halo) が取り除かれる。halo は、ビーム粒子がビームパイプ内の残留ガスによって散乱されることなどで生じるが、その正確な量や分布を予測することは難しい。最終収束ビームラインにビーム halo が残っていると、(1) halo 粒子がビームパイプ・磁石などに当たることによって 2 次粒子が発生し、(2) halo 粒子が 4 極磁石（特に衝突点前の最後の 2 台）の磁場で曲げられることによりシンクロトロン放射が発生する。これらの粒子は検出器に入って物理実験の邪魔をするので取り除く必要がある。

主線形加速器の後の通常のビームラインではビームの大きさは非常に小さい（1～10 μm 程度）ので、コリメータは特別にビームサイズを大きくした場所を作って設置する。

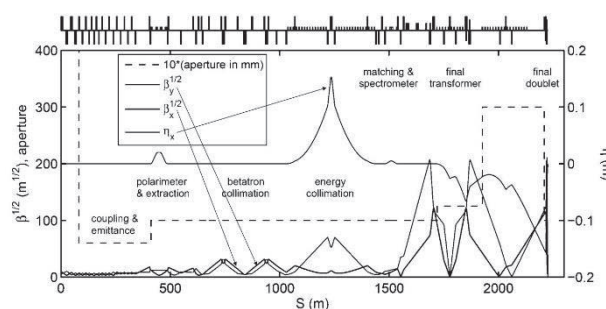


Fig. 10 BDS optics from ILC-TDR [1]

Fig. 10 に ILC-TDR に載っている BDS の光学設計が示されているが、「betatron collimation」と記されているベータ関数が多い（従ってビームサイズが大きい）場所に横方向のずれ (betatron 振動) が大きい粒子を取り除くコリメータが置かれる。これらは、垂直方向・水平方向のそれぞれについて振動の位相が 90° 異なる場所に 2 か所ずつ設けられる（従って、残った粒子の $(x-x')$ 位相空間と $(y-y')$ 位相空間上での分布は長方

形となる)。「energy collimation」と記された、水平方向の dispersion の大きな場所には、エネルギーのずれた粒子を取り除くためのコリメータが置かれる。

コリメータには加速器を保護する役割もある。BDS は最高ビームエネルギー500GeV にまで対応できるように設計されているが、このビームエネルギーでの1バンチ (2×10^{10} 個の電子・陽電子) は約1600 Jのエネルギーを持つ。従って、ビームの中心の軌道や中心のエネルギーが何らかの原因でずれると、加速器を構成する機器に当たって壊してしまう可能性がある。そのようなビームをコリメータで止めるわけだが、コリメータ自身も熱で融けたり、機械的な衝撃で破壊されたりする心配がある。これを防ぐために、其々のコリメータの場所ではビームサイズを水平方向(ベータ関数または dispersion)と垂直方向(ベータ関数)の両方とも大きくするようにしている。さらに、各コリメータは薄い spoiler とその下流の厚い absorber の組になっている (Fig. 11)。

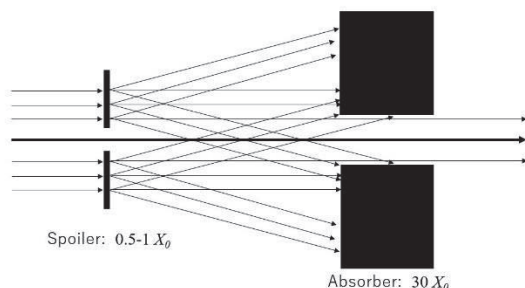


Fig. 11 コリメータは spoiler と absorber の組になっている。

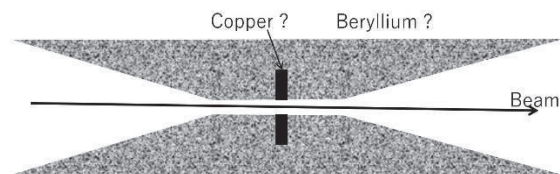


Fig. 12 Spoiler の概念図。中心に重い金属の spoiler (銅?) があり、前後は軽い導体 (ベリリウム?) の長いテーパになっている。

Spoiler を薄くすることで、ビームのコアが直接当たっても大部分のエネルギーは電磁シャワーで発生する2次粒子として下流に抜け、spoiler が破壊されることを防ぐ。これらの粒子は absorber で

受け止められるが、spoiler での散乱により粒子が広がってエネルギーの密度は小さく、absorber の破壊も防ぐことができる。

ビームの軌道やエネルギーは常に BDS の入り口でモニターされ、異常がある場合には (1) ダンピングリングからのビーム取り出しが止められ、(2) 既にダンピングリングから取り出されたビームは bunch compressor 出口及び BDS 入り口の高速キッカー電磁石によってビームダンプに捨てられる。コリメータは2バンチ分のビームが全て当たっても耐えられるように設計される。

コリメータ部分は開口部が狭くなっている (1~2 mm) が、開口部が急激に変化するとビームによる電磁場 (wakefield) が励起されて軌道変動の増大、エミッタンスの増大を引き起こす。そのため、spoiler と absorber の前後は長いテーパ構造になっている。

2.7.2. 最終収束

コリメータ領域を通過したビームは、最終収束系 (Final Focus System) で極小サイズ (水平方向 500nm, 垂直方向 8nm) に収束される。収束は、基本的には衝突点直前の2台の強力な4極磁石によるが、ここで「色収差」が問題になる。光をレンズで収束させる場合に波長の違いによって焦点距離がずれるのが色収差だが、加速器のビームの場合もビーム内の粒子の間のエネルギーの違いによって焦点の位置がずれることを「色収差」(chromatic aberration)と呼んでいる。この収差は、横方向の振動(ベータatron振動)の位相の進みがエネルギーに依存するため(chromaticity)とみることもできる。この収差を補正しないと衝突点でのビームサイズは設計値の10倍ほどになってしまう。円形加速器での chromaticity 補正と同様に、リニアコライダーの最終収束でも6極磁石を水平方向の dispersion のある所に置くことで補正される (Appendix)。このため、最終収束ビームラインでは偏向磁石によって軌道を曲げて dispersion を作る。

Chromatic aberration の補正は、最終収束ビームライン全体にわたって各ビーム粒子のエネルギー

ーが（ほとんど）変わらない場合にのみ有効であり、途中で強い磁場を通過するとシンクロトン放射によって各粒子のエネルギーが乱雑に変化してしまい、補正できなくなってしまう。そのため、最終収束ビームラインの偏向磁石の磁場は弱く、軌道を緩やかに曲げるために長い距離が必要になっている。さらに、この間のビームパイプの内面の電気抵抗（resistive wall impedance）が大きいと wakefield によりエネルギー損失が起こり（ビームバンチの前方と後方でエネルギー変化が異なる）、やはり色収差の補正がうまくいかなくなる。そのためビームパイプは（ステンレスなどではなく）アルミ製又はステンレスに銅をコーティングしたものが使われる。

なお、ILC では「local chromaticity correction」と呼ばれる色収差補正方法（衝突点直前の 2 台の強力な 4 極磁石の其々の位置に 6 極磁石を置く方法）が採用されているが、収束に関するより詳しい内容は「ナノビーム」の講義で説明されるはずなのでここでは説明を省略する。

衝突点で電子ビームと陽電子ビームの設計軌道は水平面上にあるが、14 mrad の角度（交差角, crossing angle）を持っている。完全に正面衝突でなく角度を持たせるのは、交差後のビームを安全に捨てる（検出器の余計な信号を減らす）ためである。

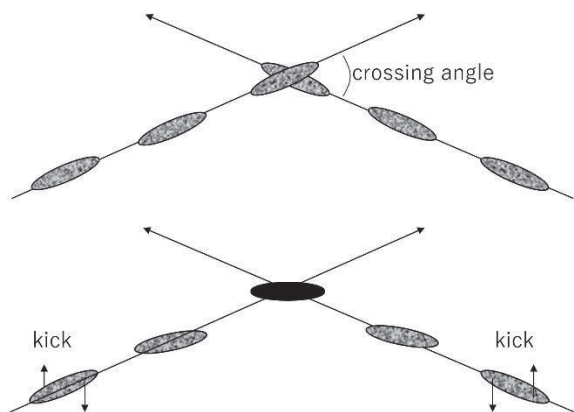


Fig. 13 (上) 交差角のためにそのままではルミノシティが低下する。(下) crab crossing によるルミノシティ回復

しかし、そのままでは、バンチ全体が重ならないためにルミノシティが減少してしまう（単純な見

積もりとして、交差角(θ)、バンチ長(σ_z)、バンチサイズ(σ_x^*) の間に $\theta\sigma_z \ll \sigma_x^*$ の関係がなければルミノシティは低下するが、実際には両辺は同程度である)。そこで、crab crossing という方法が採られる。Fig. 13 のように、衝突点の前でバンチの前方と後方を逆方向に蹴ることにより衝突点で（重心系で見て）正面衝突させることができる。バンチの前後を逆方向に蹴るために、2.6GHz（主線形加速器の 2 倍の周波数）の横方向の共振モード（dipole mode）を持つ超伝導の「クラブ空洞（crab cavity）」が使われる。

2.7.3. 軌道的高速フィードバック

衝突点でのビームは極めて小さいので、少しビーム軌道がずれただけでルミノシティが低下してしまう。特に垂直方向には 2 つのビームの位置を 2nm 程度の精度で合わせなければならない。ビームライン各所でフィードバックによる軌道の補正が行われるが、最終的に衝突点での高速のフィードバックによってビーム位置の安定化が行われる。ビーム軌道の変動のほとんどはビームライン上の磁石（その中でも最後の 2 台の 4 極磁石の影響が大きい）の位置の変動（地面の揺れ、機器の振動等）や電氣的な変動によるものだが、これはバンチの間隔（約 500ns）に比べるとゆっくりと変動する。つまり、あるバンチと次に来るバンチの軌道はほぼ同じと考えてよく、前のバンチの軌道を測定してずれの分を次のバンチで補正することによって位置を安定化できる。バンチ間隔が、(1) 軌道変動に対しては短い (2) フィードバックのための信号処理に要する時間よりも長いということが重要である。単純に考えると、衝突点での位置変動を 2nm 以内にするためには 2nm の分解能を持つビーム位置モニターが必要になる（非常に難しい）。しかし、衝突点での高速のフィードバックでは、バンチの位置を直接測定するのではなく、交差後の相手のバンチの位置を測定する。バンチが交差するとき、相手のビームが作る電磁場の力（beam-beam force）によって各粒子が蹴られるが、バンチ位置にずれがあると、そのずれの大きさに依存してバンチの重心の軌道

角度が変化する。従って、交差後の相手のバンチの重心位置を測定することで2つのバンチの相対的な位置のずれが分かる。その情報をもとに次のバンチの軌道を補正する。交差するバンチが垂直方向に 1nm 程度ずれた場合の角度変化は 10 μrad 程度になり、衝突点から数mの場所にビーム位置モニターを置くとすると、要求される分解能は数十 μm 程度になる(全く問題ないと思われる)。

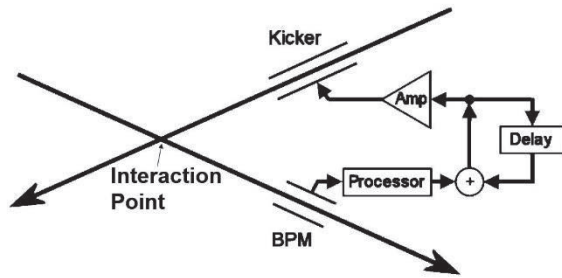


Fig. 14 Schematic of IP intra-train feedback system. The deflection of the outgoing beam is registered in a BPM and a correcting kick applied to the incoming other beam. [1]

2.8. ビームダンプ

ほとんどのビーム粒子は興味のある反応を起こさず、衝突点を通り抜けていく。相手のビームが作る電磁場の力 (beam-beam force) によってエネルギーや角度の広がりが大きくなる。粒子が衝突点付近のビームパイプ等に当たってしまうと測定器に余計な信号を生じてしまうので、広がったビームをうまく輸送してビームダンプに捨てなくてはならない。捨てられるビームのパワーは非常に大きいので、ビームダンプには特殊な設計が必要になる。ビームダンプについては他の講義で説明されるのでここでは省略する。

2.9. バンチ長圧縮 (Bunch Compressor)

ダンピングリングでは、バンチ長は 6 mm (σ) である。バンチ長が線形加速器の RF 波長に比べて十分短くないと位置に依存して加速電圧に差ができてしまう。また、後で議論するように、ルミノシティを大きくするためには衝突点でのバンチ長は短い方が良い。そのため、主線形加速器に入射する前に、バンチ長を 0.3mm まで縮める。

バンチは Fig. 15 のように、加速空洞とその下流のシケインを使って圧縮される。

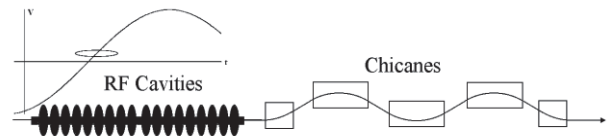


Fig. 15 Bunch Compressor の構成。加速空洞とシケイン。

すなわち、

- バンチ中心と電圧ピークの位相をずらした加速空洞を通過させ、ビーム軸方向の位置に依存したエネルギーの勾配を作る (バンチ前方よりも後方のエネルギーを高くする)
- シケインを通過させ、ビーム軌道長がエネルギーに依存する (高エネルギーの粒子ほど軌道長が短くなる) ようにする。

これを $z - \delta_E$ 面 (z はビーム軸方向の位置, δ_E はエネルギーの相対的な差) で模式的に表したのが Fig. 16 である。 $z - \delta_E$ の広がりを楕円で表している。バンチ長圧縮によりバンチ長は短くなるがエネルギーの広がりは大きくなり、この過程で楕円の面積は変化しない。

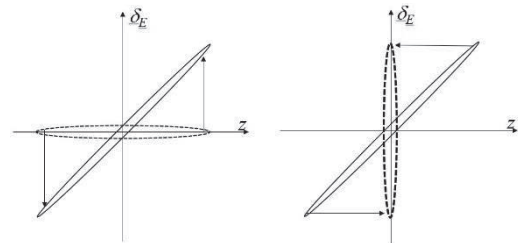


Fig. 16 Bunch Compressor の原理。バンチ内でビーム軸方向の位置に依存したエネルギーの勾配を作り (左)、下流でエネルギーに依存した軌道長の差を作る (右) ことにより、バンチ長を短縮させる。

ILC の基本パラメータでは、バンチ長はダンピングリングの 6 mm から主線形加速器での 0.3 mm まで圧縮させる必要がある。ダンピングリングからのビームはエネルギー 5GeV でエネルギーの広がりが約 0.1% (5MeV, 標準偏差) だが、バンチ長を 1/20 にするためには単純な計算でエネルギーの広がりは 100MeV となり 2% (100MeV/5GeV)

の相対的なエネルギーの広がりとなる。しかし、そのような大きなエネルギーの広がりにはビームのコントロールを難しくする。そのため ILC の Bunch Compressor は 2 段階になっていて、第一段階で 0.9 mm 程度まで圧縮し、第 2 段階ではビームを 5GeV から 15GeV まで加速することと合わせてバンチを目標値まで圧縮する。エネルギーを 3 倍にすることで、相対的なエネルギーの広がりを 1/3 にしてコントロールを容易にすることができる。2 段階になっているため、バンチ長の圧縮にはある程度自由度があり、基本パラメータとは異なるバンチ長にも対応できる。例えば、バンチ長を半分の 0.15 mm にすることも可能である。(ただし、ビーム不安定性を抑えるためなどの理由で、その場合にはバンチ電荷を減らす必要がある。)

$z-\delta_E$ 分布の変化の様子を Fig. 17 に示す。非線形の効果もあり、単純な楕円形にはならない。

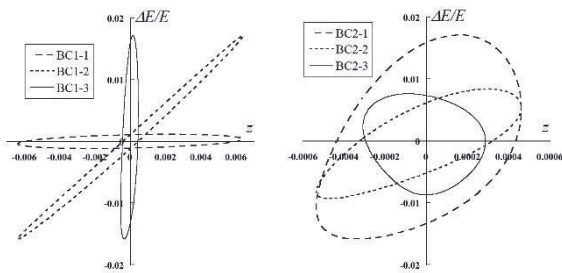


Fig. 17 Bunch Compressor 第 1 段 (左) と第 2 段 (右) での $z-E$ 分布の変化の例。鎖線：入口、点線：加速空洞の後、実線：出口。

2.10. エネルギー圧縮 (Energy Compressor)

ダンピングリングの縦方向 (エネルギーとビーム軸方向の位置) の acceptance は $(\pm 3.75 \text{ MeV}) \times (\pm 3.5 \text{ cm})$ とされているが [1]、これを Booster Linac から出てくるビームパラメータと比べると、エネルギーの広がりに対しては厳しく (特に陽電子のエネルギー幅が大きい)、バンチ長に対してはかなり緩い。そのため Booster Linac の後に Energy Compressor を設置する。これは Bunch Compressor とは逆に、バンチ長を長くしてエネルギーの幅を圧縮するものである。

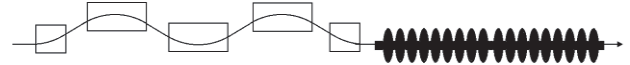


Fig. 18 Energy Compressor の構成

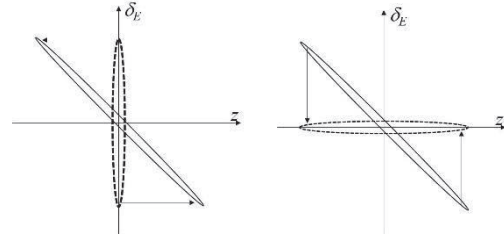


Fig. 19 Energy Compress の原理

Bunch Compressor と同様に加速空洞とシケインで構成されるが、順番が逆で、まずシケインによってエネルギーに依存して粒子の位置を変化させ (エネルギーの高い粒子を進ませてエネルギーの低い粒子を遅らせる) その下流の加速空洞での位相を調整することによりバンチ前方を減速しバンチ後方を加速する。

2.11. スピン (偏極) の操作

縦偏極したビームを衝突させることができるのは円形コライダーと比べた場合のリニアコライダーの重要な利点の一つである。

粒子源でのビームは縦方向に偏極しており (ただし電子駆動方式の陽電子源では偏極はない)、最終的に衝突点では (基本的に) 縦方向に偏極したビームを衝突させるが、ビームライン全体で縦偏極しているというわけではなく、横方向の偏極ビームの区間がある。

Appendix にあるように、ビーム軌道が角度 θ 曲げられると偏極の向きが $G\gamma\theta$ 回転する (G は電子の異常磁気モーメント, γ はローレンツファクター)。この回転角度はエネルギーに比例していてビームにはエネルギーの広がりがあるので、ダンピングリングでは水平面 (軌道面) 内の偏極の向きは周回中にバラバラになってしまう。すなわち、偏極度を保持するには、偏極の向きはリング内では垂直方向でなければならない。そのため、ダンピングリングの上流と下流に其々 Spin Rotator が置かれ、スピンの向きをコントロールする。

2.11.1. リングの上流の Spin Rotator

縦方向の偏極から垂直方向の偏極への変換は以下のような 2 段階で行う。(Appendix 参照)

- ビーム軌道を 23.7° 曲げることで偏極の向きを 270° 回転させ水平方向（横方向）にする
- ソレノイド磁場を通過させ水平方向から垂直方向に 90° 回転させる

23.7° という角度は 5 GeV の電子・陽電子のスピンを 270° 回転させる軌道の角度変化(θ)で、

$$G\gamma\theta = 270^\circ \quad (2-1)$$

から決まる（もちろん軌道を 7.9° 曲げて偏極の向きを 90° 回転させてもよいのだが、Booster Linac からダンピングリングの間のビームラインの角度を考慮すると 23.7° の方が都合が良い。なお、必要な軌道角変化はエネルギーに反比例する）。

ソレノイド磁場（ビーム軸方向の磁場）で 5 GeV のビームの偏極を水平方向から 90° 回転させて垂直方向にするためには、

$$\Delta\phi = \frac{\pi}{2} = \frac{e}{p}(1+G) \int B_{\parallel} ds \quad (2-2)$$

から (Appendix 参照)、磁場の積分 $26.2 \text{ T}\cdot\text{m}$ が必要になる（この値はビームエネルギーに比例する）。ILC では、磁場強度 3.2 T、長さ 8.32 m の超伝導ソレノイドを使用することになっている。

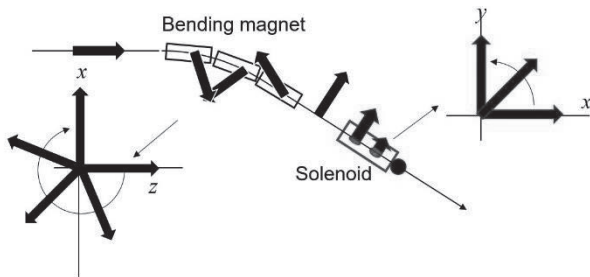


Fig. 20 ダンピングリングの上流の Spin Rotator の構成。縦偏極ビームを垂直方向に偏極したビームにする。偏向磁石で垂直方向を軸として 270° 回転させた後、ソレノイド磁石でビーム方向を軸として 90° 回転させる。

2.11.2. リングの下流の Spin Rotator

横方向の偏極から縦方向の偏極への変換は、基本的に、上流の Spin Rotator と逆の solenoid – bend の 2 段階で行うことができる。

必要なソレノイドの 磁場×長さ がビームエネルギーに比例するので、Spin Rotator はダンピングリングのエネルギーと同じ 5 GeV の段階で行う。また、Spin Rotator の下流でビームの進行方向が変化するとスピンの方向も変化する（変化の方向がエネルギーに依存する）ので、Spin Rotator の出口でのビームの方向は衝突点での方向になるべく近いことが望ましい。従って、リングの下流の Spin Rotator は Turnaround の直後に設置される。

ダンピングリングの下流の Spin Rotator は単に順番が逆というだけでなく、以下の 2 つの点でダンピングリングの上流の Spin Rotator と異なっている。

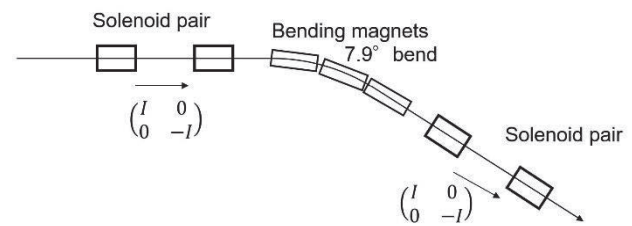


Fig. 21 ダンピングの下流の Spin Rotator の構成

ダンピングリング下流のビームは低エミッタンスであり、特に垂直方向のエミッタンスが水平方向の $1/200$ 程度になっている。ソレノイド磁場中をビームが通過すると水平方向(x)と垂直方向(y)の運動の間のカップリングが生じ、垂直方向のエミッタンスが増大してしまうので、何らかの対策が必要である。カップリングを消すために、同じ強さと長さのソレノイドが 2 台組で設置され、その間にビーム光学が x 方向は I 、 y 方向は $-I$ になるようなビームラインを挿入する (Appendix 参照)。

さらに、ダンピングリングの上流と異なり solenoid – bend の 2 段階ではなく solenoid pair – bend – solenoid pair という 3 段階になっている。bend での偏極の回転は 90° に固定される（軌道

の曲がり 7.9°) が、前後の solenoid 磁場を変更することにより、最終的な偏極方向を任意に選ぶことができるように設計されている。

3. なぜ「リニア」なのか

これまでの衝突型加速器はほとんどが円形（周回型）である（唯一の例外が SLC）が、ILC は線形である。ここでは、なぜ円形ではなく直線の加速器なのか、説明を試みる。

3.1. ビームエネルギー

周回型加速器の主な利点は、

- 同じ加速装置を何度も通過させて加速できる（「リニア」では一回しか使えないので多数の加速装置が必要）
- 同じビームを長時間使用可能（「リニア」では一回交差させたビームは捨てられるので効率が悪い）

などがある。

しかし、荷電粒子の軌道が曲げられると放射光を出して（シンクロトロン放射）エネルギーを失ってしまう。加速器の軌道半径を ρ 、ビームエネルギーを E 、粒子の質量を m 、エネルギーファクター $\gamma \equiv E/mc^2$ とすると、一周当たりの放射によるエネルギー損失は、

$$U = \frac{e^2 \gamma^4}{3\epsilon_0 \rho} \quad (3-1)$$

$$U[\text{eV}] \approx 6 \times 10^{-9} \frac{\gamma^4}{\rho[\text{m}]} \quad (3-2)$$

のように計算できる。このエネルギーは周回毎に補ってやらなければならない。ビームエネルギーを上げるためには、同じサイズの円形加速器では必要な電力がエネルギーの 4 乗で増大する。逆に電力が決まっているとすると、加速器の曲率半径をエネルギーの 4 乗に比例して大きくしなければならない。これを考えると、先に挙げた利点はビームエネルギーが高くなるに従って成り立たなくなっていくことが分かる。例えば、曲率半径が 3 km だとすると、電子のビームエネルギー 125 GeV では一周当たりの損失 7 GeV、エネルギー

250 GeV では損失 120 GeV となり、非現実的なものとなる。

また、シンクロトロン放射はエネルギー損失だけでなく、ビームのエミッタンスの増大（放射励起 Appendix 参照）ももたらす。

以上のように、電子・陽電子では、エネルギーが高くなると円形よりも線形のコライダーが有利となる。

（放射によるエネルギー損失は gamma factor ($\gamma \equiv E/mc^2$) の 4 乗に比例する。陽子は電子の約 1840 倍重いので、同じビームエネルギーに対して放射による損失は約 10^{-13} 倍であり、現存する加速器ではほぼ無視できる。現在の陽子円形加速器のエネルギーの限界は軌道を曲げるための磁場強度で決まっている。）

3.2. エネルギーのアップグレード

さらに、リニアコライダーでは、両端にビームラインを延長することで、既存の施設をほとんど無駄にすることなくエネルギーを上げていくことができる。ILC は重心エネルギー 250 GeV で出発する計画だが、主線形加速器を上流に追加していくことでエネルギーを 1 TeV（ビームエネルギー 500 GeV）まで上げられるように、最終収束系などの他の部分が設計されている。

以上のような理由で、エネルギーフロンティアの電子・陽電子加速器は線形とするのが自然な選択だと思われる。

3.3. ルミノシティ

周回型のコライダーでは同じバンチが何度も衝突の機会を持つがリニアコライダーでは 1 回のみであり、交差頻度を大きくしてルミノシティを稼ぐのが難しい。

そこで、衝突点でのビームのサイズを極力小さくすることで、1 回当たりのルミノシティを大きくする。2 つのバンチが交差してもほとんどの粒子はすり抜けていくが、各ビーム粒子は相手のバンチの作る強力な電磁場（beam-beam force）によって曲げられ、さらに制動放射（beamstrahlung）を出し、角度とエネルギーの拡がりが増大する。

ルミノシティを大きくするには交差点でのビームのサイズを小さくしたいが、そうするとビームの作る電磁場が強くなる。周回型加速器では、交差後のビームの質の劣化やビーム粒子損失につながるため、ビームサイズを極端に小さくすることができず、交差一回当たりのルミノシティをあまり大きくすることができない。(SuperKEKBで採用されている「ナノビームスキーム」のようにルミノシティを上げる工夫はあるが、原理的な問題が無くなっているわけではない。)

一方、リニアコライダーでは、交差後のビームは捨ててしまうので、その質があまり問題にならない。そのため交差点でのビームサイズを小さくしてルミノシティを大きくすることが可能なのである。

4. 衝突点でのビームパラメータ

4.1. 極小ビーム

ルミノシティはコライダーの性能を表す重要なパラメータである。単位時間にある物理現象（これを観測することがコライダー実験の目的である）が起こる回数は、ルミノシティ (L) とその現象の衝突断面積 (σ) の積で表される。

$$\text{event rate} = L\sigma \quad (4-1)$$

速度が各々 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ のビーム 1 とビーム 2 を衝突させる場合、位置 $\vec{x}$ での各々のビーム粒子の密度を $\rho_1(\vec{x}), \rho_2(\vec{x})$ とすると、ある瞬間のルミノシティは、

$$L_{\text{ins}} = \int dx^3 \rho_1(\vec{x}) \rho_2(\vec{x}) |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \quad (4-2)$$

と書くことができる。

衝突点でのビームの横方向（ビーム軸に垂直な方向, (x, y) ）の粒子密度が標準偏差 (σ_x^*, σ_y^*) を持つ正規分布の場合、バンチ当たりの粒子数を N 、パルス当たりのバンチ数を n_b 、パルスの頻度 (repetition rate) を f_{rep} とする（バンチが単位時間に $n_b f_{\text{rep}}$ 回交差する）と、平均ルミノシティは

$$L = \frac{N^2 n_b f_{\text{rep}}}{4\pi \sigma_x^* \sigma_y^*} \quad (4-3)$$

となる。(ただし、実際にはビームが交差する間に形状が変化するので、この式は近似である。) 従って、ルミノシティを大きくするには、 σ_x^* と σ_y^* の積（ビームの横方向の断面積に比例）を小さくする必要がある。

4.2. ビームの最終収束、砂時計効果

荷電粒子のビームを収束させるのに 4 極磁石を使う。(Appendix 参照)

1 台の 4 極磁石では、水平・垂直方向のどちらか一方しか収束できないので、衝突点手前には「final doublet」と呼ばれる 2 台の 4 極磁石を組み合わせることで、Fig. 22 のように両方向ともに収束される。

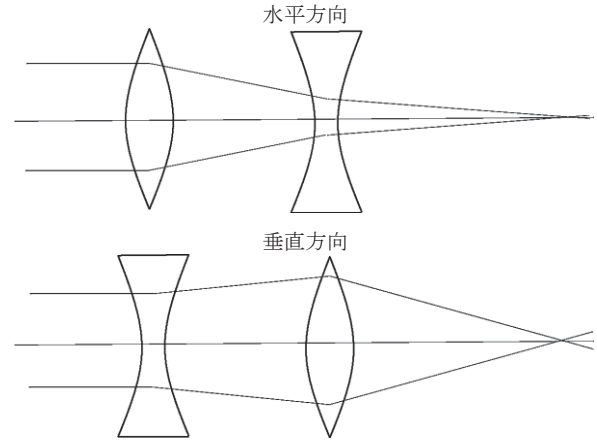


Fig. 22 2 台の 4 極磁石によるビームの最終収束

衝突点付近では横方向の磁場が無く、各粒子の軌道は直線である。1 方向のみ考えるとビームの様子は Fig. 23 のようになる。

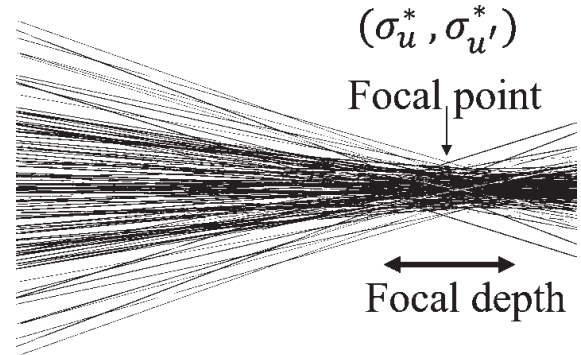


Fig. 23 衝突点付近の粒子軌道の様子

焦点深度とビームサイズの関係調べてみる。焦点(Focal point)でのビームサイズと軌道角度の広がりを $\sigma_u^* = \sqrt{\langle u^{*2} \rangle}$, $\sigma_{u'}^* = \sqrt{\langle u'^2 \rangle}$ とする (u は x または y , $\langle \rangle$ は全ビーム粒子の平均、 u^* は焦点での位置、 u' は軌道角度)。焦点からビーム軸方向に距離 d ずれると、軌道角度のばらつきのためにビームサイズは (焦点では $\langle u^* u' \rangle = 0$ である)

$$\begin{aligned}\sigma_u &\equiv \sqrt{\langle u^2 \rangle} = \sqrt{\langle (u^* + u' d)^2 \rangle} \\ &= \sqrt{\sigma_u^{*2} + \sigma_{u'}^{*2} d^2}\end{aligned}\quad (4-4)$$

と増大するが、

$$\sigma_u = \sqrt{2} \sigma_u^* \quad (4-5)$$

となる距離を焦点深度(β_u^*)と定義すると

$$\beta_u^* = \frac{\sigma_u^*}{\sigma_{u'}} \quad (4-6)$$

で、エミッタンスは、

$$\varepsilon_u = \sigma_u^* \sigma_{u'} \quad (4-7)$$

なので、

$$\sigma_u^* = \sqrt{\varepsilon_u \beta_u^*} \quad (4-8)$$

となり、一定のエミッタンスのビームを小さくするには焦点深度を短くしなければならないことが分かる。

バンチはビーム軸方向に有限の長さを持っているので、衝突は焦点の前後の有限の長さで起こる。従って、ルミノシティは焦点の前後のバンチ長の範囲でのビームサイズで決まる。焦点付近のビームは砂時計の括れた部分のような形になり、焦点深度をあまり短くすると前後でのビームサイズが大きくなり却ってルミノシティが下がる。最適な焦点深度はバンチ長程度になるはずである。従って、バンチ長を σ_z とすると、最適なビームサイズは、

$$\sigma_u^* \approx \sqrt{\varepsilon_u \sigma_z} \quad (4-9)$$

となり、エミッタンスとバンチ長がルミノシティを制限することが分かる。これを「砂時計効果」と呼んでいる。

4.3. 扁平ビーム (flat beam)

ILC の衝突点でのビームは水平方向のサイズが垂直方向のサイズの 100 倍程度に設計されている。これは、以下に述べるように、beamstrahlung 等の beam-beam force の悪影響を抑えながらルミノシティを大きくするためである。

ルミノシティを大きくするためにはビームサイズを小さくしたいが、ビームをあまり小さくすると困ることがある。前節で、「交差後のビームは捨ててしまうので、その質があまり問題にならない」と述べたが、beam-beam force はバンチが交差する間働き、衝突する前の粒子も beamstrahlung によってエネルギーを失ってしまう。これは、決まったエネルギーでの衝突を観測したい場合に問題となる (どの程度まで許されるかは観測したい現象によって異なる)。エネルギー損失の平均は

$$\delta_{BS} \equiv \frac{\text{average energy loss}}{\text{beam energy}} \approx \frac{r_e^3 N^2 \gamma}{\sigma_z (\sigma_x^* + \sigma_y^*)^2} \quad (4-10)$$

と表される (r_e : 電子古典半径, γ : energy factor, σ_z^* : バンチ長)。従って、beamstrahlung を抑えるためには、 $\sigma_x^* + \sigma_y^*$ を大きくすればよい。

ルミノシティは σ_x^* と σ_y^* の積に反比例するので、 σ_x^* と σ_y^* に大きな差をつけるのが良いことが分かる (積を小さく、和を大きくする)。

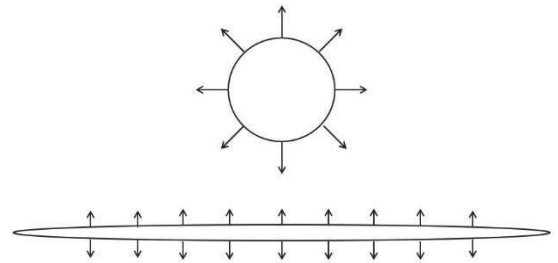


Fig. 24 断面の周囲の長い扁平なビームは円筒のビームよりも周囲に作る電場が弱い

このことは、長いバンチの表面の電場強度を Fig.24 のように考えると理解できる。密度が一

定とすると（電荷量は断面積に比例）断面積が同じであれば（ガウスの定理から）表面での電場の強さは周囲の長さに反比例する。

垂直方向のエミッタンスが水平方向のエミッタンスよりも小さいこと（また、アラインメントの精度が良い）などの理由で、 $\sigma_y^* \ll \sigma_x^*$ となるように選ぶ。すなわち、ビームの断面は水平方向に扁平な形状となる。

この場合、

$$\delta_{BS} \approx \frac{r_e^3 N^2 \gamma}{\sigma_z \sigma_x^{*2}} \quad (4-11)$$

となり、 δ_{BS} に上限があるとすると、 σ_x^* の下限が

$$\sigma_x^* > \sqrt{\frac{r_e^3 N^2 \gamma}{\sigma_z \delta_{BS}}} \quad (4-12)$$

のように与えられる。

4.4. ルミノシティの式

式(4-3), (4-9) ($u \rightarrow y$), (4-12) をまとめると、ルミノシティの最大値が

$$L = \frac{N n_b f_{\text{rep}}}{4\pi \sqrt{r_e^3 \gamma}} \sqrt{\frac{\delta_{BS}}{\epsilon_y}} = \frac{1}{4\pi e \sqrt{r_e^3 \gamma}} \bar{I}_b \sqrt{\frac{\delta_{BS}}{\epsilon_y}} \quad (4-13)$$

で与えられる（ $\bar{I}_b$ は平均ビーム電流）。ルミノシティを上げる方法は以下の3通りしかないことが分かる。

- 平均電流を増やす
- 大きな beamstrahlung を許容する
- 垂直方向のエミッタンスを小さくする

1つ目は、所要電力や設備の容量を増やすことになりコストの増加を意味する。2つ目は調べたい物理現象によって制限される。

結局、垂直エミッタンスを小さくすることが、技術的な努力によってルミノシティを大きくするほぼ唯一の方法と言える。

従って、ダンピングリングは必須であり、以降のビームラインで様々な誤差を抑えて低エミッタンスを保持することが必要になる。

4.5. パラメータの柔軟性

ルミノシティの式(4-13)の導出でも見たように、 $N, n_b, \sigma_x^*, \sigma_y^*, \sigma_z$ 等のパラメータの間には制限があるが、その制限内ではある程度の自由度がある。 δ_{BS} を変えないためには $N^2 / \sigma_z \sigma_x^{*2}$ を一定にしなければならないが、例えば N, σ_z, σ_x^* を全て小さくし、 $N n_b$ を一定にするために n_b を増やす、といったことは可能である。ルミノシティとコストをこれらのパラメータの関数として表すことができれば唯一の最適なパラメータの組み合わせを決めることができるであろう。しかし、実際には全ての条件が事前にわかるわけではないので、本当の最適パラメータは決められない。また、研究の進展に伴い何をどのビームエネルギーで調べるかという物理学の要請が変化すれば最適パラメータは変わるであろう。バンチ圧縮の所でも述べたように、色々な条件に対応できるように、ある程度柔軟にパラメータを変えられるようにしておくことは重要である。

5. ビームの時間構造とエネルギー効率

ILC のビームの1個のバンチは 2×10^{10} 個の電子又は陽電子からなり、1312 個のバンチが 554 ns 間隔で連なったものが1個のビームパルスになる。1パルスは約 0.73 ms の長さがあり、これが 5Hz で運転される。

このようなパラメータはどのように決められたのだろうか？ 超伝導空洞を用いた線形加速器は一般的に常伝導のものに比べてパルス長が極めて長く、パルス内の平均電流が小さい。これはなぜか？ 空洞壁での RF パワーの損失がほとんどないことがその本質的な理由であるが、以下にその説明を試みる。

5.1. RF エネルギーの効率

ILC での1パルスの空洞電圧の時間変化を簡略化したものは Fig. 25 のようになる。RF パワーを入れ始めてから時間と共に空洞内にエネルギーが蓄積され電圧が上がっていく。パルス内のビームを全て同じ電圧で加速するために、ビームパル

スがある前に RF パワーを入力し始め、設定電圧になるタイミングでビームが来るようにしておく。

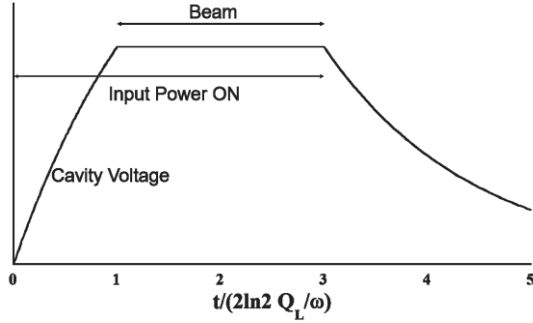


Fig. 25 空洞電圧の 1 パルスでの時間変化 ($T_b = 2T_{\text{fill}}$ の場合) の様子

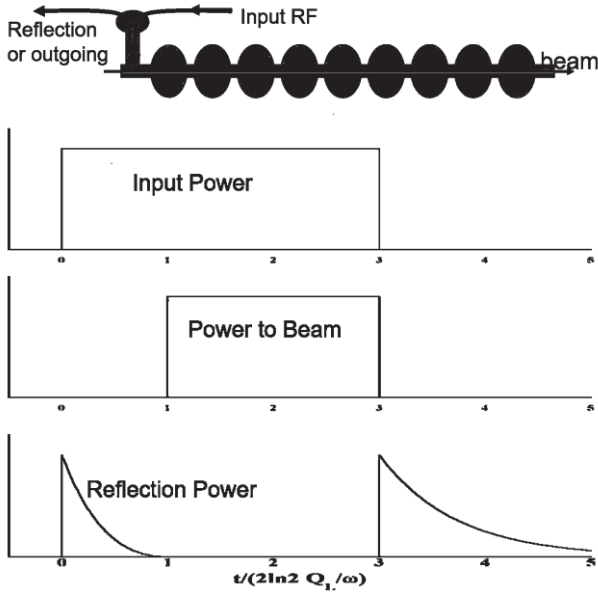


Fig. 26 1 パルスでの入力パワー、ビームに与えられるパワー、反射パワーの時間変化 ($T_b = 2T_{\text{fill}}$ の場合：実際とは異なる)

ビームパルスの通過中には電圧が一定となるようにパラメータを決めておく。ビームパルスの終わりと同時に入力 RF も切る。空洞壁でのパワー損失を無視し（超伝導空洞の特徴）、ビーム通過中に空洞からの反射が無いとすると（実際には、反射がほとんどないようにパラメータを設定する）、入力パワー(P_{in}) は加速電圧(V_c) とパルス内の平均ビーム電流の積である。

$$P_{\text{in}} = V_c I_b \quad (5-1)$$

ビーム通過中は入力パワーとビームに与えられるパワーが等しくなるので、結果として全入力 RF エネルギーのうち、ビームが来る前に入力されたエネルギーの分だけビームに与えられることなく捨てられることになる。

入力パワーが全 RF パルス長にわたって一定の場合（実際の運転では必ずしもそうではないが、近似的には正しい）、入力パワーを ON してから設定電圧になるまでの時間(fill time) を T_{fill} 、ビームのパルス長を T_{beam} とすると、

$$\text{Energy to Beam} = P_{\text{in}} T_{\text{beam}} \quad (5-2)$$

$$\text{Wasted Energy} = P_{\text{in}} T_{\text{fill}} \quad (5-3)$$

であるから、エネルギー効率は

$$\text{RF Energy Efficiency} = \frac{T_{\text{beam}}}{T_{\text{fill}} + T_{\text{beam}}} \quad (5-4)$$

となる。fill time は他のパラメータから決まり、

$$T_{\text{fill}} = \ln 2 \times \frac{2Q_L}{\omega} = \ln 2 \times \tau \quad (5-5)$$

になる。 ω は RF の角周波数、 Q_L は空洞の loaded Q（ほぼ入力カップラーの Q_{ext} に等しい：超伝導空洞の特徴）であり、 $\tau = 2Q_L/\omega$ は空洞の時定数である。また、 Q_L はビーム通過中の入力パワーとビームに与えられるパワーが等しくなるためには、

$$Q_L = \frac{V_c}{(R/Q)I_b} \quad (5-6)$$

でなければならない。 (R/Q) は空洞の形状で決まる定数である。（Appendix 参照）

以上をまとめると、

$$\text{Wasted Energy} = P_{\text{in}} T_{\text{fill}} = 2\ln 2 \frac{V_c^2}{\omega(R/Q)} \quad (5-7)$$

なので、1 パルス当たり無駄になるエネルギーは空洞電圧（及び空洞の形状）のみで決まり、ビームのパラメータには依らないことが分かる。なお、設定電圧での空洞内の電磁場のエネルギーは

$$W(V = V_c) = \frac{V_c^2}{\omega(R/Q)} \quad (5-8)$$

であり、fill time 中に捨てられる（反射してくる）エネルギーは、空洞内エネルギーの約 40% ($2\ln 2 - 1$) である。（パルスの後(decay time)に空洞内に残っているエネルギーが捨てられる）(Fig. 25 も参照)。

一方、ビームに与えられるエネルギーは設定電圧と全電荷量(q_{pulse})との積である。

$$\text{Energy to Beam} = V_c I_b T_{\text{beam}} = V_c q_{\text{pulse}} \quad (5-9)$$

以上のことから結論として、入力 RF に対するエネルギー効率をよくするには、

$$\frac{q_{\text{pulse}}}{V_c} = \frac{I_b T_{\text{beam}}}{V_c} \quad (5-10)$$

を大きくすればよいことが分かる。

ここの議論では、空洞壁での損失が無視できるほど小さく、ビーム通過中は入力パワーがほぼ全てビームに与えられることが本質的に重要である。

5.1.1. 空洞電圧を下げる？

空洞の設定電圧を下げればエネルギー効率が上がるが、電圧に反比例して必要な空洞の数が増加して加速器が長くなる。これは建設費の増加につながり得策でない。

5.1.2. 電流を大きくする？

電流を大きくすれば効率が良くなる。しかし、それに比例して入力パワーを上げなくてはならず、RF 源（クライストロン等）を増強する必要がある。これも建設費の増加につながるので限界がある。

5.1.3. ビームパルスを長くする？

ビームパルスを長くすれば、パルス当たりの電荷を大きくでき、エネルギー効率が良くなる。これが、ILC のビームパルスが一般的な常伝導空洞の線形加速器に比べて極端に長い理由である。ただし、いくらでも長くできるわけではない。一つの制限はダンピングリングの長さからくる。現在の設計では、線形加速器でのビームパルス長は 0.73 ms すなわち 220 km であるが、ダンピングリングの周長は約 3km である。これは高速の

キッカーマグネットによってバンチ毎に入射・出射して、ダンピングリング内ではバンチ間隔を短く詰め込むことで可能になる。キッカーマグネットの立上り・立下り時間（バンチ間隔はこれより長くなければならない）には限界があるので、バンチの数を増やすにはそれに比例してダンピングリングを長くしなければならず、建設費の増大につながる。

バンチ数も電流も増やせなくても、1 バンチの電荷を大きくしてバンチ間隔を大きくすることで（ビームパルスが長くなる）パルス当たりのビーム電荷を増加させて効率を上げることができそうである。しかし、バンチ電荷を大きくすると（ウェーク場などにより）ビームの不安定性の問題が生じる。バンチ電荷をあまり大きくすると、ダンピングリング内でエミッタンスを小さくするのが難しくなるとともに、その下流でのエミッタンスも増大する。

別の方法として、極端にビームパルスを長く（ダンピングリングの減衰時間(damping time)より十分長く）すれば、減衰したバンチを取り出し、そこに新たにバンチを入射していくということができて、ダンピングリングからのバンチ数の制限がなくなる。実質的にはパルス運転でなく連続(CW: Continuous Wave) 運転することになる。世の中では多くの超伝導線形加速器が CW で稼働している。入力 RF のエネルギー効率のみを考えれば、CW が理想的である。

しかし、ILC はエネルギーフロンティアの加速器であり、限られた長さの加速器で高エネルギーのビームを作るためにできる限り高電場で運転する必要がある。そうすると、空洞を冷却するのに必要なエネルギーが膨大なものになるという問題が生じる。これについては次節で論じる。

結局、ダンピングリングの周長からバンチ数に制限があり、適度な長さの (msec 程度の) パルス運転のみが現実的である。

5.2. 空洞の冷却に要するエネルギー

これまで、空洞壁でのパワー損失は無視してきた。これは現在の設計パラメータで入力 RF パワ

一の効率を考える上では十分良い近似である。空洞壁での時間当たりのエネルギー損失は

$$P_0 = \frac{\omega W}{Q_0} = \frac{V_c^2}{(R/Q)Q_0} \quad (5-11)$$

と表される。 W は空洞内の電磁場のエネルギー、 ω は RF の角周波数、 Q_0 は空洞の Q 値(quality factor)、 V_c は空洞電圧、 (R/Q) (アールオーバーキュー) は空洞の形状で決まる定数である。

ILC の設計値 ($V_c = 32.7\text{MV}$, $(R/Q) = 1036 \Omega$, $Q_0 = 10^{10}$) では、空洞 1 台当たりの損失は約 100 W となる。これは、空洞当たりの入力パワー ($V_c = 32.7\text{MV}$, $I_b = 5.8\text{mA}$ の積) 約 190 kW に比べると非常に小さい (したがって、前節での近似は妥当である)。しかし、これに相当する熱を極低温 (2K) の空洞から取り除くためには、無視できないエネルギー (冷凍設備が消費する電力) が必要になる。

熱力学の教科書に載っているように、温度 T で ΔQ の熱量を取り除くとエントロピーが $\Delta Q/T$ 減少する。その分のエントロピーはどこかで増加していないとつじつまが合わない (熱力学第 2 法則より)。冷却設備は環境中に熱を放出することでエントロピーも放出しているわけである。熱は自然には温度の高いところから温度の低いところに移動するが、極低温の空洞から常温の環境中に熱を移動させるにはエネルギー消費が必要である。

空洞の温度と環境の温度をそれぞれ T_{cold} , T_{warm} , 空洞から奪う熱を ΔQ_{cold} , 環境に放出する熱を ΔQ_{warm} , 空洞から奪うエントロピーを ΔS_{cold} , 環境に放出するエントロピーを ΔS_{warm} , とすると、熱力学第 2 法則より

$$-\Delta S_{\text{cold}} + \Delta S_{\text{warm}} > 0 \quad (5-12)$$

でなければならないので

$$\Delta Q_{\text{warm}} > \Delta Q_{\text{cold}} \frac{T_{\text{warm}}}{T_{\text{cold}}} \quad (5-13)$$

であり、 $T_{\text{cold}} \approx 2\text{K}$, $T_{\text{warm}} \approx 300\text{K}$ だから、

$$\Delta Q_{\text{warm}} > \Delta Q_{\text{cold}} \times 150 \quad (5-14)$$

でなければならない。つまり、空洞から取り除く熱の 150 倍以上の熱を環境中に放出する必要がある、このエネルギーの元は冷凍装置が消費する電力である。150 倍という計算値は効率 100% の理想的な冷凍設備の場合であり、実際の効率 20% 程度 (ILC-TDR) では空洞壁の発熱の約 750 倍の電力が必要になる

ILC のビームパルス長 (T_b) は 0.73 ms, 繰返し (f_{rep}) 5Hz なので、単純にビームパルスの通過時のみ計算すると空洞 1 台当たりの平均発熱は $100 \times 0.00073 \times 5 \text{ W}$ となる。より正確には、ビームパルス前後 (fill time 及び decay time) も空洞電圧は 0 ではないので、それも考慮に入れ、空洞壁での平均損失パワーは

$$P_{0,\text{average}} = \frac{V_c^2}{(R/Q)Q_0} (T_b + (4\ln 2 - 2)\tau) f_{\text{rep}} \approx 0.9 \text{ W} \quad (5-15)$$

と計算できる。

これに 750 を掛け、さらに電子・陽電子を 125GeV まで加速するのに必要な空洞台数 6800 を掛けると、冷却に要する電力は約 5MW となる。(実際には、空洞以外での発熱や熱侵入もあり、その分必要な電力は増える。)

空洞を連続 (CW) 運転すると、先にも計算したように、約 100 W の熱が空洞壁で発生し、この 750 倍の 75 kW が空洞一台当たりの冷却に必要で、6800 台では 500 MW 以上となり、連続運転にすることで節約できる RF エネルギーよりもはるかに大きいエネルギーを消費することになる。(さらに、運転コストのみでなく冷却設備の建設コストも膨大なものとなる)。

というわけで、ILC ではパルス運転を採用している。ビームパルス長 (T_b) を短くすれば冷却コストは下がるけれども、先にみたように RF パワーの効率低下 (I_b 一定の場合)、あるいは RF ピークパワーの増大から建設コスト増につながる (I_b を大きくしてパルス当たりの電荷を一定とした場合)。

ところで、上の式を変形すると、

$$P_{0,average} = \frac{V_c^2 f_{rep}}{\left(\frac{R}{Q}\right) Q_0}$$

$$\times \left(1 + 4(2\ln 2 - 1) \frac{V_c}{\omega(R/Q)q_{pulse}} \right) T_b \quad (5-16)$$

となるので、繰り返し(f_{rep})とパルス当たりの電荷量(q_{pulse})を固定した場合には、空洞壁の平均発熱はビームパルス長(T_b)に比例（従ってビーム電流(I_b)に反比例）する。つまり、冷凍機の負荷を減らすには、ビームパルス長を短くした方が良いことがわかる。

5.2.1. まとめ

ここまでの議論をまとめてみると、

- ビームパルスの全電荷($Nn_b e = I_b T_b$) : RF エネルギーの効率化のために大きくしたい
- バンチ 1 個の電荷(Ne) : ビーム不安定性、ウェーク場の影響などで制限される
- 1 パルス内のバンチ数(n_b) : ダンピングリングの周長を短く（建設コスト低減）するため小さくしたい
- ビームパルス内の電流(I_b) : RF 源の建設コスト低減のため小さくしたいが、冷凍機負荷低減のためには大きくしたい。
- ビームパルス長(T_b) : 冷凍機負荷低減のため短くしたい

となる。

これらの条件は相違反するものがあるので、最適と思われる妥協点を探してパラメータを決めているわけである。ただし、何が最適かを定義するのも、その定義に従って正確にパラメータを決めるのも難しい。

5.3. 参考：常伝導空洞の場合のエネルギー効率

先に述べたように、超伝導空洞を用いた線形加速器のビームパルスは通常の常伝導加速器に比べると極端に長い。ここで、常伝導空洞のエネルギー効率を調べることで、これを確認しておく。超伝導空洞では入力パワーに対して空洞壁でのパワー損失は無視できるので、「ビームパルス通

過中の入力パワーは、ビームに与えられるパワーに等しい」という条件でエネルギー効率を考えてきた。常伝導空洞では損失が無視できないのでこの条件を一般化して

- ビームパルス通過中の入力パワー(P_{in})は、ビームに与えられるパワー($P_b = I_b V_c$)と空洞壁での損失(P_0)との和に等しい

とする。これは、反射がゼロであるということである（こういう条件の時、エネルギー効率は最適に近いであろう）。

つまり

$$P_{in} = P_b + P_0 \quad (5-17)$$

とする。ここで、

$$P_0 = \frac{V_c^2}{(R/Q)Q_0} \quad (5-18)$$

である。

さらに、入力カプラーのカップリング($\beta = Q_0/Q_{ext} = 1 + Q_0/Q_L$)を用いると、

$$V_c = \frac{2\sqrt{\beta}}{1+\beta} \sqrt{P_{in}(R/Q)Q_0} - I_b \left(\frac{R}{Q}\right) Q_L \quad (5-19)$$

なので、カップリングを、

$$\beta = 1 + \frac{I_b(R/Q)Q_0}{V_c} \quad (5-20)$$

つまり、

$$Q_L = \frac{V_c}{I_b(R/Q)} \times \frac{1}{1 + \frac{2V_c}{I_b(R/Q)Q_0}} \quad (5-21)$$

と設定することになる。

この場合、ビームパルス通過中のエネルギー効率は

$$\frac{I_b V_c}{P_{in}} = \frac{1}{1 + \frac{V_c}{I_b(R/Q)Q_0}} \quad (5-22)$$

である。従って、効率をよくするためにはビーム電流(I_b)を大きくする必要がある、少なくとも

$$I_b \sim \frac{V_c}{(R/Q)Q_0} \quad (5-23)$$

でなければならない(この場合 $P_b \sim P_0$)。この電流は Q_0 に反比例する。

常伝導空洞の場合の概算(桁数程度)として、 $V_c \sim 10 \text{ MV}$, $(R/Q) \sim 1000 \Omega$, $Q_0 \sim 10^4$ とすると、 $I_b \sim 1 \text{ A}$ となり (ILC のビーム電流は 5.8 mA) 非常に大きい。また、 $P_{in} \sim P_b \sim P_0 \sim 10 \text{ MW}$ であり、これらも非常に大きい (ILC では $P_{in} \sim P_b \approx 200 \text{ kW}$, $P_0 \sim 100 \text{ W}$)。

また、空洞の冷却、RF 装置の建設・運転コストなどの制限から、デューティー比 ($T_b f_{rep}$) を大きくすることはできない。

なお、ILC では、 $I_b = 5.8 \text{ mA} \gg \frac{V_c}{(R/Q)Q_0} \sim 3 \mu\text{A}$ なので、前節までの近似が成り立ち、ビーム通過中のエネルギー効率ほぼ 100% である。

6. Appendix

6.1. ビーム力学

6.1.1. 座標系

ビームの設計軌道付近で局所的に直行する座標 (x, y, z) を使用する (曲線直交座標)。ビームの設計上の進行方向 (縦方向) を z , それと直交する方向 (横方向) を (x, y) とする。任意の設計軌道に対して x と y をどのように選ぶかは簡単でなく、ここでは議論しない。本稿では単純に x を「水平方向」 y を「垂直方向」としておく。独立変数として時間ではなく設計ビーム軌道に沿った距離 s を使用する。 s で微分した量には「'」を付ける。例えば、

$$x' \equiv \frac{dx}{ds} \quad (6-1)$$

である。

6.1.2. 横方向の磁場の多重極展開

加速器での粒子の運動を考えるのに、多くの場合、横方向の磁場 (ビーム軸に垂直な成分) を多重極展開すると便利である。

$2n$ -極 normal 磁場は磁極が

$$r^n \sin n\theta = \text{constant} \quad (6-2)$$

と表されるような磁石で作られ、水平・垂直方向の磁場はそれぞれ

$$\begin{aligned} B_x &= a_n \frac{\partial}{\partial x} (r^n \sin n\theta) \\ B_y &= a_n \frac{\partial}{\partial y} (r^n \sin n\theta) \end{aligned} \quad (6-3)$$

となり、 $2n$ -極 skew 磁場は磁極が

$$r^n \cos n\theta = \text{constant} \quad (6-4)$$

と表されるような磁石で作られ、

$$\begin{aligned} B_x &= b_n \frac{\partial}{\partial x} (r^n \cos n\theta) \\ B_y &= b_n \frac{\partial}{\partial y} (r^n \cos n\theta) \end{aligned} \quad (6-5)$$

となる。

n は正整数で、 a_n, b_n は定数、極座標 (r, θ) ($x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$) を使用した。 a_n は "normal" 成分、 b_n は "skew" 成分の強さである。

加速器で使われる多くの磁石は多重極のうちの 1 成分のみを目的とする (他の成分も含まれてしまうことは避けられないが)。例えば、 $n=1$ の normal は水平方向の偏向磁石、 $n=1$ の skew は垂直方向の偏向磁石、 $n=2$ の normal は 4 極磁石、 $n=2$ の skew は skew 4 極磁石に対応する。

6.1.3. 転送行列

横方向 (x, y) の線形運動は転送行列で表すことができる。すなわち、 s_1 から s_2 への 4×4 転送行列 $M_{s1 \rightarrow s2}$ で以下のように表す。

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_2' \\ y_2 \\ y_2' \end{bmatrix} = M_{s1 \rightarrow s2} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1' \\ y_1 \\ y_1' \end{bmatrix} \quad (6-6)$$

$x-y$ 間にカップリングが無ければ、各々の方向の運動が 2×2 行列で表せる。

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_2' \end{bmatrix} = M_x \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1' \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_2 \\ y_2' \end{bmatrix} = M_y \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1' \end{bmatrix} \quad (6-7)$$

6.1.4. エミッタンス (emittance)

横方向のエミッタンスは、

$$\varepsilon_u \equiv \sqrt{\langle u^2 \rangle \langle u'^2 \rangle - \langle uu' \rangle^2} \quad (6-8)$$

のように定義される。 u は x または y , $\langle \rangle$ はビーム内の全粒子に対する平均を表す。エミッタンスは、正規分布の場合に $u-u'$ 面 (phase space) で $1\cdot\sigma$ の所の線を引いてできる楕円の面積を π で割ったものに等しい。

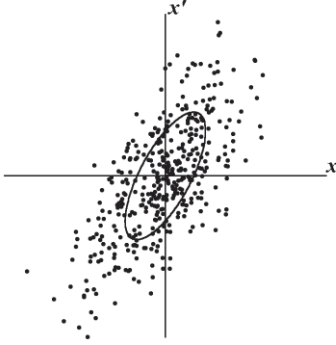


Fig. 27 粒子の分布 (正規分布)。エミッタンスに π を掛けたものは $1\cdot\sigma$ の楕円の面積に等しい

エミッタンスの小さなビームは品質が良い (大きさが小さく運動方向がそろっている) ことを意味する。

次節で示すようにエミッタンスは線形運動で保存する。

正規分布に対しては、

$$\langle u^2 \rangle = \sigma_u^2, \quad \langle u'^2 \rangle = \sigma_{u'}^2 \quad (6-9)$$

で、 u と u' に相関が無ければ、

$$\varepsilon_u = \sigma_u \sigma_{u'} \quad (\langle uu' \rangle = 0) \quad (6-10)$$

である。

エミッタンスはビームが加速されると減少する。これは、ビーム軸方向に加速されることによって、横方向の運動の角度が減少するからである。

「規格化エミッタンス(normalized emittance)」を

$$\varepsilon_{un} \equiv \sqrt{\langle u^2 \rangle \langle p_u^2 \rangle - \langle up_u \rangle^2} / mc \quad (6-11)$$

のように定義すれば (p_u は各粒子の u 方向の運動量)、横方向の運動量は軸方向への加速によって変化しないので、規格化エミッタンスは加速に

よって変化しない。高エネルギー (超相対論的な) ビームの場合には、

$$\varepsilon_{un} = \gamma \varepsilon_u \quad (6-12)$$

である。

6.1.5. 4 極磁場中のビーム粒子の運動

荷電粒子のビームを収束させるのに 4 極磁石を使う。4 極磁石は理想的には 4 個の磁極の形状が双曲線で、水平方向の磁場強度が垂直方向の位置に比例し垂直方向の磁場強度が水平方向の位置に比例する (比例定数は絶対値が同じで正負が逆) ような 4 極磁場を作る。

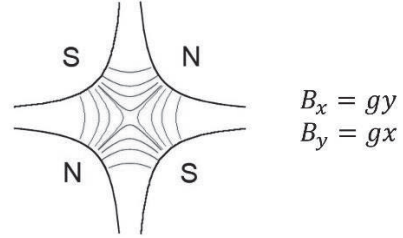


Fig. 28 4 極磁石のビーム軸に垂直な断面

磁場中で荷電粒子 (電荷 e) は運動方程式

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{v} \times \vec{B} \quad (6-13)$$

に従い、力と速度が直交するのでエネルギーは変化しない。4 極磁場中では、

$$\frac{dv_x}{dt} = -av_z x \quad (6-14)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = av_z y \quad (6-15)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = a(v_x x - v_y y) \quad (6-16)$$

となる ($a \equiv eg/m\gamma$) が、高エネルギー加速器では $v_z \gg v_x, v_y$ と近似でき、

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = -Kx \quad (6-17)$$

$$\frac{d^2 y}{ds^2} = Ky \quad (6-18)$$

としてよい ($K \equiv eg/p_z$, $v_z = ds/dt$)。

K が正であれば x 方向に収束、 y 方向に発散され、負であればその逆になる。

このように表される運動を「線形運動」と呼ぶ (K が s に依存していてもよい。また、電磁場の無いドリフト空間 ($K = 0$) の運動を含む)。

エミッタンスが線形運動で不変であることは以下のように簡単に確かめられる。エミッタンスの定義式の 2 乗を s で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{d(\varepsilon_u^2)}{ds} &= \\ \left\langle \frac{d(u^2)}{ds} \right\rangle \langle u'^2 \rangle + \langle u^2 \rangle \left\langle \frac{d(u'^2)}{ds} \right\rangle - 2 \left\langle \frac{d(uu')}{ds} \right\rangle \langle uu' \rangle \\ &= 2 \left\langle u \frac{du}{ds} \right\rangle \langle u'^2 \rangle + 2 \langle u^2 \rangle \left\langle u' \frac{du'}{ds} \right\rangle - 2 \left\langle \frac{du}{ds} u' \right\rangle \langle uu' \rangle \\ &\quad - 2 \left\langle u \frac{du'}{ds} \right\rangle \langle uu' \rangle \\ &= 2 \langle uu' \rangle \langle u'^2 \rangle + 2 \langle u^2 \rangle \langle u'(-Ku) \rangle - 2 \langle u'^2 \rangle \langle uu' \rangle \\ &\quad - 2 \langle u(-Ku) \rangle \langle uu' \rangle = 0 \quad (6-19) \end{aligned}$$

K が定数であれば (あるいは、1 個の磁石の中のように、 K を定数とみなせるような範囲での近似として) 運動方程式は調和振動の方程式であり、簡単に解ける。行列の形で、 $K \geq 0$ の場合 $\kappa \equiv \sqrt{K} > 0$ と定義して、

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} \cos \kappa s & \frac{1}{\kappa} \sin \kappa s \\ -\kappa \sin \kappa s & \cos \kappa s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{s=0} \quad (6-20)$$

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} \cosh \kappa s & \frac{1}{-\kappa} \sinh \kappa s \\ \kappa \sinh \kappa s & \cosh \kappa s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_{s=0} \quad (6-21)$$

$K < 0$ の場合 $\kappa \equiv \sqrt{-K} > 0$ と定義して、

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} \cosh \kappa s & \frac{1}{-\kappa} \sinh \kappa s \\ \kappa \sinh \kappa s & \cosh \kappa s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{s=0} \quad (6-22)$$

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} \cos \kappa s & \frac{1}{\kappa} \sin \kappa s \\ -\kappa \sin \kappa s & \cos \kappa s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_{s=0} \quad (6-23)$$

等が得られる。

磁石の長さ (l) が短い場合には $k \equiv Kl$ として、入り口から出口までの変化を

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{\text{exit}} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{\text{entrance}} \quad (6-24)$$

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_{\text{exit}} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_{\text{entrance}} \quad (6-25)$$

と近似できる (thin lens 近似)。

6.1.6. スピン (偏極) の力学

電子 (陽電子) の偏極ベクトル ($\vec{P}$) は以下のような、Thomas-BMT equation と呼ばれる方程式に従って変化する。[5]

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{P}}{dt} &= -\frac{e}{m\gamma} [(1 + G\gamma)\vec{B}_\perp + (1 + G)\vec{B}_\parallel \\ &\quad + \left(G\gamma + \frac{\gamma}{\gamma + 1}\right) \frac{\vec{E} \times \vec{v}}{c^2}] \times \vec{P} \quad (6-26) \end{aligned}$$

ここで、 m は電子質量、 $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ 、 $G \approx 0.00115965$ は電子の異常磁気モーメント、 $\vec{B}_\perp$ は粒子の速度に垂直な磁場、 $\vec{B}_\parallel$ は速度に平行な磁場、 $\vec{E}$ は電場、 $\vec{v}$ は粒子の速度、 c は光速である。

ILC 加速器内には粒子速度に垂直な強い電場は無いのでカッコ内の最後の項は無視できる。また、 $\vec{B}_\perp$ としては偏向電磁石の磁場を、 $\vec{B}_\parallel$ はソレノイドの磁場を考えればよい。

$\vec{B}_\perp$ のみの領域では方程式は

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = -\frac{e}{m\gamma} (1 + G\gamma) \vec{B}_\perp \times \vec{P} \quad (6-27)$$

のように、偏極ベクトルは磁場方向を軸として回転する。これは、磁場によるローレンツ力の式

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{e}{m\gamma} \vec{B}_\perp \times \vec{p} \quad (6-28)$$

と係数 $(1 + G\gamma)$ だけ異なるが同じ形をしていることが分かる (小文字の $\vec{p}$ は粒子の運動量)。従って、偏極磁場によって軌道が角度 θ 曲げられると、

偏極ベクトルの磁場に垂直な成分は $(1 + G\gamma)\theta$ 回転する。つまり、ビーム軸方向に対する相対的な偏極の方向が $G\gamma\theta$ だけ回転する。

$\vec{B}_{\parallel}$ のみ存在する領域では

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = -\frac{e}{m\gamma}(1 + G)\vec{B}_{\parallel} \times \vec{P} \quad (6-29)$$

のようにビーム軸に垂直な偏極の成分がビーム軸の周りに回転する。偏極ベクトルのビーム軸に垂直な成分を $\vec{P}_{\perp}$ 、偏極方向の角度を ϕ と書くと、

$$\frac{1}{|\vec{P}_{\perp}|} \left| \frac{d\vec{P}_{\perp}}{dt} \right| = \frac{d\phi}{dt} = \frac{e}{m\gamma}(1 + G)B_{\parallel} \quad (6-30)$$

となるので、粒子の速さを v として、偏極方向の角度の変化は磁場内の移動距離の積分で、

$$\Delta\phi = \int \frac{1}{v} \frac{d\phi}{dt} ds = \frac{e}{p}(1 + G) \int B_{\parallel} ds \quad (6-31)$$

のように表せる (p は粒子の運動量の大きさ)。
(注意： 電子・陽電子のスピンは量子力学的な概念であり、厳密には偏極ベクトル($\vec{P}$)も量子力学的に定義する必要がある。しかし、多数の粒子がある場合には、偏極ベクトルを「スピンの向きの平均」のように考えておいて間違いではないと思われる。)

6.1.7. ソレノイド磁場中の運動

ビーム軸方向に強度 B_z の磁場がある領域では、荷電粒子 (電荷 e) の運動方程式が

$$\frac{dp_x}{dt} = ev_y B_z, \quad \frac{dp_y}{dt} = -ev_x B_z \quad (6-32)$$

($p_{x,y}$, $v_{x,y}$ は x, y 方向の運動量と速度) となるので、 x - y 間にカップリングが生じる。磁場中 (電場が無い) ではエネルギーが変化しないので、これは、

$$\frac{dv_x}{dt} = kv_y, \quad \frac{dv_y}{dt} = -kv_x \quad (6-33)$$

と書ける ($k \equiv eB_z/m\gamma$)。これを解くと軌道は z 軸周りの螺旋となり、ソレノイド内の長さ L での転送行列が以下のように得られる。

$$M_{in} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k} \sin kL & 0 & -\frac{1}{k}(1 - \cos kL) \\ 0 & \cos kL & 0 & -\sin kL \\ 0 & \frac{1}{k}(1 - \cos kL) & 1 & \frac{1}{k} \sin kL \\ 0 & \sin kL & 0 & \cos kL \end{bmatrix} \quad (6-34)$$

ソレノイドの端部では、横方向の磁場が発生する。磁束密度 $\vec{B}$ とすると $\text{div } \vec{B} = 0$ なので、Fig. 29 のような半径 r の円筒の表面での面積分に対して Gauss の定理を使うことにより、以下のようにその影響を計算することができる。

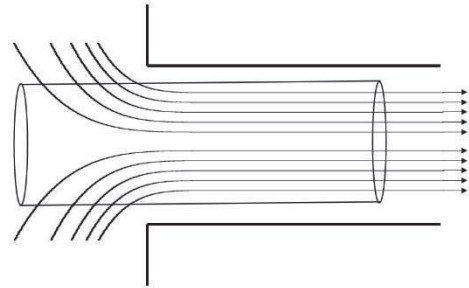


Fig. 29 ソレノイド端部の磁場。円筒の表面で Gauss の定理を使うことにより、横方向の磁場の積分が計算できる

円筒を左側に十分長くすることにより、左の底面での積分は 0。側面での動径方向の磁場成分 B_r の積分は

$$\int_{\text{side}} \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 2\pi r \int B_r dz \quad (6-35)$$

であり、これと右端 (ソレノイドの十分内部に取る) での面積分

$$\int_{\text{bottom}} \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \pi r^2 B_z \quad (6-36)$$

との和が 0 になる。従って、

$$\int B_r dz = -\frac{r}{2} B_z \quad (6-37)$$

が得られ、対称性より周方向の磁場成分は無いので、

$$\int B_x dz = -\frac{x}{2} B_z, \quad \int B_y dz = -\frac{y}{2} B_z \quad (6-38)$$

となる。ソレノイドの出口ではこの逆符号となる。

運動方程式

$$\frac{dp_x}{dt} = -ev_z B_y, \quad \frac{dp_y}{dt} = ev_z B_x \quad (6-39)$$

を変形して、

$$\begin{aligned} x'' &= -\frac{eB_y}{m\gamma} = \frac{k}{2}y \\ y'' &= \frac{eB_x}{m\gamma} = -\frac{k}{2}x \end{aligned} \quad (6-40)$$

$$(k \equiv eB_z/m\gamma)$$

となるので、横方向の磁場の存在する領域が短いとして近似すると、以下のような入口・出口端部での転送行列が得られる。

$$M_{\text{ent}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -k/2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6-41)$$

$$M_{\text{exit}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -k/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ k/2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6-42)$$

ソレノイド全体での転送行列は、

$$M_{\text{sol}} = M_{\text{exit}} M_{\text{in}} M_{\text{ent}} \quad (6-43)$$

で得られる。

ソレノイド 2 台組によるカップリングの消去

同じ強さと長さのソレノイド 2 台の間に転送行列が $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$ となるようなビームライン ($I, 0$ は 2×2 の単位行列とゼロ行列) を挟むことで x - y 間

のカップリングを消すことができる。さらに、任意のドリフト空間を入れてもよい。すなわち、

$$M_{\text{sol}} D_2 \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} D_1 M_{\text{sol}} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{bmatrix} \quad (6-44)$$

となる。ここで、 $D_{1,2}$ は任意の長さのドリフト空間の転送行列、 A は 2×2 行列である。 $D_{1,2}$ の長さを $d_{1,2}$ として $d \equiv d_1 - d_2$ と書くと、

$$A = \begin{bmatrix} \cos kL - \frac{kd}{4} \sin kL & \frac{2}{k} \sin kL + \frac{d}{2} (1 + \cos kL) \\ -\frac{k}{2} \sin kL + \frac{kd}{8} (1 - \cos kL) & \cos kL - \frac{kd}{4} \sin kL \end{bmatrix} \quad (6-45)$$

となる。

6.1.8. Dispersion

dispersion とはビーム内の粒子のエネルギーの差に依存した横方向の軌道のずれのことである。同じ電磁場を通過しても粒子のエネルギーの差によって軌道の変化が異なることによって生じる。超相対論的なエネルギーの場合には、電磁場による軌道の角度変化はエネルギーに反比例する。

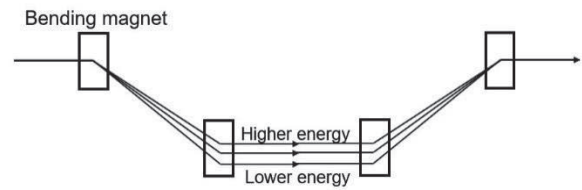


Fig. 30 Linear dispersion by bending magnets.

Dispersion は設計軌道が曲がっているところで発生し、何らかの誤差によってビームの中心軌道が曲がっている場合にも発生する。**Fig. 30** のように、**bending magnet** で軌道を曲げることによってほぼ線形の **dispersion** (軌道のずれがエネルギーのずれに比例) が発生する。線形の **dispersion** は多くの場合に測定可能であり、また、**bending magnet** を (2 台以上) 含むビームラインで消すことができる。

ビームのエネルギーを測定するため、あるいはエネルギーコリメーション（エネルギーのずれた粒子をビームから取り除く）などのためにビームライン上に dispersion が作られる。

一方、4 極磁場やさらに高次の磁場がある場合には 2 次以上の高次の（非線形の）dispersion が発生する。例えば長いビーム輸送路や長い線形加速器では、Fig. 31 のように 4 極磁石の設置誤差などによってビーム軌道と磁場中心がずれると下流の全ての 4 極磁石によってさらに高次の dispersion が発生する。非線形 dispersion は測定が困難で補正することは難しい。

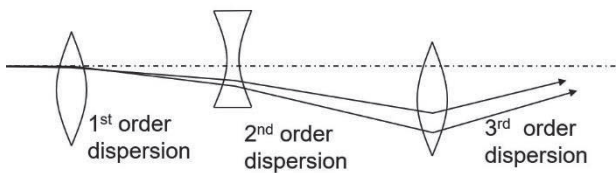


Fig. 31 Non-linear dispersion by quadrupole magnets

6.2. 放射減衰と放射励起

6.2.1. 放射減衰 (radiation damping)

円形加速器に（陽）電子ビームを周回させていると、自然にエミッタンスやエネルギーの広がりが減少していく。これはシンクロトロン放射 (synchrotron radiation) によるエネルギー損失と、加速空洞によるエネルギー補填を繰り返すことで起こる。「エミッタンスやエネルギーの広がりが減少していく」ことは、ビーム内の個々の粒子の運動としての「ベータトロン振動（横方向の振動）とシンクロトロン振動（縦方向の位置とエネルギーの振動）が減衰していく」ということである。（詳しくは、例えば参考文献[2]参照）

シンクロトロン放射は粒子が磁場で曲げられるところで発生するが、その時間当たりのエネルギーの平均（放射パワー P_r ）は粒子のエネルギー (E) の 2 乗と磁場の強さ (B) の 2 乗に比例する。

$$P_r \propto E^2 B^2 \quad (6-46)$$

これは粒子が時間あたりに失うエネルギーだから、エネルギーが高いほど放射によって多くのエネルギーを失う。一方、加速空洞によるエネルギー補填は粒子のエネルギーに依らない。従ってエネルギーが高いほうにずれた粒子はエネルギーが減少し、低いほうにずれた粒子はエネルギーが増大する。これが、シンクロトロン振動が減衰（エネルギーの広がりが減少）する原因である。

シンクロトロン放射は粒子の超前方に出る。つまり、粒子はエネルギーを失うが、その運動方向（角度）はほとんど変化しない（量子力学的効果により変化は完全にはゼロではないが、通常は無視できるほど小さい）。一方、加速空洞によるエネルギー補填では全ての粒子が同じ方向に加速される。結果として、粒子の横方向の運動量（運動方向の角度）が減少する (Fig. 32)。これを繰り返すことで、粒子の方向がそろっていくのが、横方向の振動の減衰（横方向のエミッタンスの減少）である。

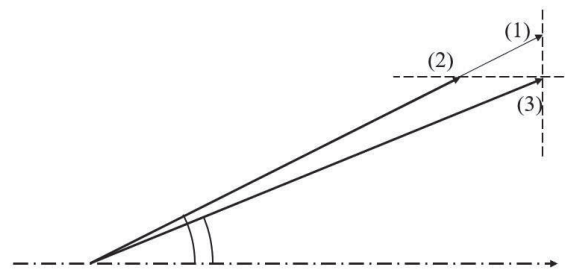


Fig. 32 横方向の運動の放射減衰の概念図。運動量 (1) の粒子がシンクロトロン放射によってエネルギーを失い (2) の運動量となり、加速によってエネルギーを補填されて (3) の運動量となる。横方向の運動量が減少する。

其々の方向の振動（縦方向、水平方向、垂直方向）の振幅が $1/e$ になる時間を其々の「減衰時間 (damping time)」と呼ぶ。

6.2.2. 放射励起 (radiation excitation)

シンクロトロン放射では量子論的效果により粒子のエネルギーにでたらめな変化が生じるため、粒子の振動を励起する効果もある。（詳しくは、例えば参考文献[2]参照）

エネルギーがでたらめに变化するので、直接の効果としてエネルギーの広がりが大きくなる（個々

の粒子を見ると、縦方向の振動（シンクロトロン振動）の振幅が大きくなる傾向をもたらす）。

dispersion のある場所でシンクロトロン放射があると横方向の振動（ベータトロン振動）もエネルギーがでたらめに変化することによって励起される。振動の中心（その周りで粒子が振動する）となる軌道（設計軌道、より正確には閉軌道）がエネルギーに依存して異なるためである。（Fig. 33 を参照）

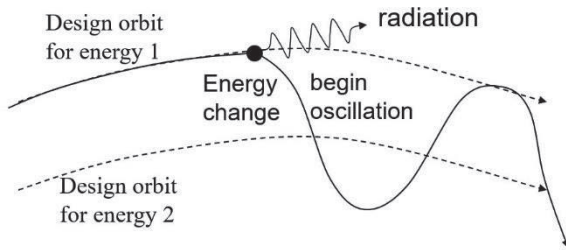


Fig. 33 横方向の放射励起の概念図。エネルギー1で設計軌道（閉軌道）にあった粒子。dispersion のある場所で放射によりエネルギーが 1 → 2 と変化。元の軌道は変化後のエネルギーでは設計軌道（閉軌道）からずれており、振動を始める。

円形加速器では必ず軌道が曲がっている場所があり、そこでは dispersion があり、シンクロトロン放射が発生するの。そのため放射励起によるエミッタンス増大は避けられない。設計軌道が同一平面上（通常は水平面上）にあれば、その平面に垂直な方向には設計上の dispersion が無い。磁石の設置誤差などの効果を小さくするような補正を行うことで dispersion を小さくして放射励起を抑えることができる（シンクロトロン放射では、エネルギーだけでなく角度もでたらめに変化する。しかし、その変化の効果はエネルギーの変化に比べると非常に小さい）。従って、通常は垂直方向のエミッタンスは水平方向に比べて小さくできる。

6.2.3. equilibrium, extracted emittance

ダンピングリング入射後十分長時間経過した後のビームは放射減衰と放射励起が釣り合う（全体の平均として釣り合うということ。個々の粒子は励起と減衰をランダムに繰り返す）状態になる。

この釣り合ったビームのエミッタンスが equilibrium emittance である。

damping time を τ 、放射励起率を r と書くと emittance (ε) の変化は、

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = r - \frac{\varepsilon}{\tau} \quad (6-47)$$

となるので、equilibrium emittance は

$$\varepsilon_e = r\tau \quad (6-48)$$

である。

入射時のエミッタンスを ε_0 とすると入射からの時刻 t でのエミッタンスは (6-47) を解いて

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \varepsilon_e \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (6-49)$$

となる。

取り出し時のエミッタンスは、要求される値よりも小さくなるようになっていなければならない。

6.3. 軌道補正の方法

ここではダンピングリングを出た後の長いビーム輸送ライン（Return line, turnaround）と主線形加速器でのビーム軌道の補正、特に dispersive effect によるエミッタンス増大を抑える方法についてその概要を述べる。

偏向磁石の強度の誤差や 4 極磁石の設置誤差などがある程度あることは避けられないので、ビームの軌道は設計からずれる。軌道補正の道具として、ビーム位置モニター(BPM)と軌道補正用の偏向磁石(steering magnet)がある。これらは、ビームラインのほぼ全ての 4 極磁石のすぐ近くに設置される（4 極磁石・BPM・steering magnet がセットになっている）。4 極磁石と steering magnet が同じ場所にあれば、steering magnet の強さを変えることはビームに対しては 4 極磁石の横方向の位置を変えることと同じである。従って、steering magnet の代わりに 4 極磁石の位置調整装置があってもよい。

6.3.1. quad shunting

組になっている 4 極磁石の磁場中心と BPM のゼロ点（読み値 0）を”quad shunting”と呼ばれる方

法でビームを使って合わせることができる。4 極磁石でのビーム軌道の角度変化はビーム位置の中心からのずれと 4 極磁場の強度に比例するので、4 極磁石の強度を変えて下流での軌道の変化を測定することでそこでのビーム位置のずれが分かる。強度を変えても下流の軌道が変化しないような位置を BPM のゼロ点とする。

6.3.2. one-to-one steering

全ての BPM での読みがゼロになるように steering magnet を上流から逐次調整していきビームを最後まで通す軌道補正が one-to-one correction と呼ばれるものである。4 極磁石の設置誤差があるのでこの結果得られる軌道は各 steering magnet の所で曲がっており、エミッタンス増大を十分抑えることはできない。

6.3.3. kick minimization

kick minimization と呼ばれる方法でビーム軌道をなめらかにしてエミッタンス増大を抑えることができる。この方法は 4 極磁石・steering magnet の組での軌道変化をなるべく小さくするもので、 i 番目の組の steering magnet の蹴角を θ_i 、4 極磁石の強度を k_i 、BPM の読みを x_i として

$$\sum_i (\theta_i + k_i x_i)^2 \quad (6-50)$$

を最小にするように全ての i について θ_i を調整する。one-to-one steering (あるいはその後の変化) の結果、現状の steering magnet の設定が $\theta_{i,0}$ 、BPM の測定値が $x_{i,0}$ 、であるとすれば、steering magnet を $\delta\theta_i$ 変えた場合の BPM の測定値の変化は

$$\delta x_j = \sum_{i < j} R_{12}(i \rightarrow j) \delta\theta_i \quad (6-51)$$

と書けるので、

$$\sum_i \left(\theta_{i,0} + k_i x_{i,0} + \delta\theta_i + k_i \sum_{j < i} R_{12}(i \rightarrow j) \delta\theta_j \right)^2 \quad (6-52)$$

を最小にするような $\delta\theta_i$ の組を求めればよい。上式のカッコ内は $\delta\theta_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) の 1 次式なので結果は簡単に計算できる。ここで、 $R_{12}(i \rightarrow j)$ は i 番目の steering magnet から j 番目の BPM までの転送行列の 1-2 成分 (垂直方向の場合は 3-4 成分) である。

6.3.4. dispersion matching steering

Kick minimization と基本的には同様の結果となる補正方法に dispersion matching steering (設計 dispersion が 0 の場合は dispersion free steering) と呼ばれるものがある。これは、ビームライン上のあらゆる場所で (全ての BPM の場所で) dispersion (エネルギーの違いに依存した位置の違い) を設計値に合わせるというものである。主線形加速器では、上流の RF を調整することで、ある区間のビームエネルギーを変えることができ、異なるエネルギーでビーム軌道を測定できる。この軌道補正では、その差をなるべく設計値に合わせる。つまり、エネルギー”1”での i 番目の BPM の読みを $x_{i,1}$ 、エネルギー”2”での読みを $x_{i,2}$ 、そこでのビーム位置の差の設計値を $\Delta_{i,1-2}$ として

$$\sum_i (x_{i,1} - x_{i,2} - \Delta_{i,1-2})^2 \quad (6-53)$$

を最小にするように steering magnet を設定する。steering magnet を変化させることによる $x_{i,1}$ 、 $x_{i,2}$ の其々の変化は、steering magnet の強度変化に比例し (ビームライン上の全ての 4 極磁石の強度は既知なので) その比例係数もわかる。さらに多数の steering magnet の強度変化の影響は単純に足し合わせることができる。つまり、上式のカッコ内も steering magnet の強度変化の 1 次式なので、その 2 乗の最小化の結果は簡単に求められる。この方法では、BPM の読みの差のみを使うので quad shunt を使った BPM のゼロ点の調整は不要である。

数学ノート

kick minimization steering と dispersion matching steering の計算は、 u_i を測定値、 a_{ij} を既知の定数として

$$\sum_i \left(u_i + \sum_j a_{ij} \delta_j \right)^2 \quad (6-54)$$

を最小にするような δ_i を求める問題になる。
これは、 u_i, δ_i をベクトル u, δ の i 成分、 a_{ij} を行列 A の i, j 成分とみれば、

$$|u + A\delta|$$

を最小にする δ を求めるということであり、その結果は A^+ を A の疑似逆行列として

$$\delta = -A^+ u \quad (6-55)$$

と求められる。

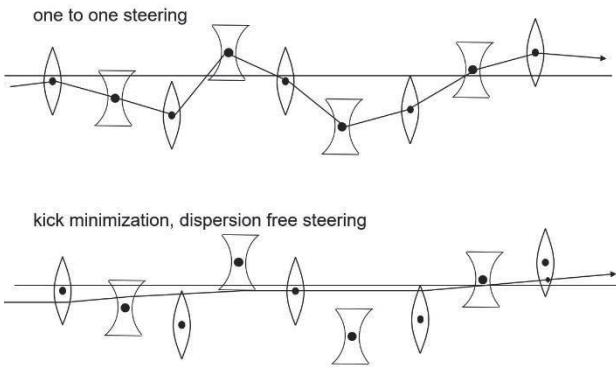


Fig. 34 One-to-one steering の結果と低エミッタンス保存のための軌道補正 (kick minimization, dispersion free steering) の結果の概念図

6.4. Chromaticity, 6 極磁場による補正

chromaticity とはビーム内の粒子のエネルギーの差に依存した横方向の振動の位相のずれのことである。

超相対論的なエネルギーの場合には、磁場による軌道の角度変化はエネルギーに反比例するので、chromaticity は収束 4 極磁場の所で減少し、発散 4 極磁場の所で増加する。しかし、ビームライン全体としては必ず収束の効果が大きいので、4 極磁場 (及び偏向磁場) のみからなるビームラインでは chromaticity は負の値になる。

この補正に使われるのが 6 極磁場である。

6 極磁場とは、水平・垂直方向の強度が

$$\begin{aligned} B_y &= a_3(x^2 - y^2) \\ B_x &= 2a_3xy \end{aligned} \quad (6-56)$$

となるもので、Fig. 35 のような 6 個の磁極を持つ磁石によって (近似的に) 作ることができる。

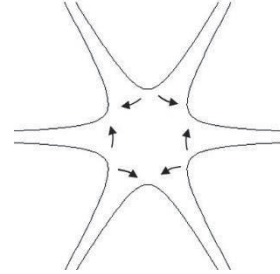


Fig. 35 6 極磁石の概念図

粒子の運動は 4 極磁場中の運動の所で述べたのと同様、近似的に

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{eB_y}{p_z} = -\frac{ea_3}{p_z}(x^2 - y^2), \quad (6-57)$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{eB_x}{p_z} = \frac{ea_3}{p_z}2xy \quad (6-58)$$

と書ける。右辺は x, y の 2 次に依存するので、単純には線形運動に効かない。

しかしここで、ビームの中心が磁場の中心から水平方向に Δ ずれているとしよう。すると上の 2 式は x, y の 1 次の項のみを残すと

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{ea_3}{p_z}((x + \Delta)^2 - y^2) \approx -\frac{2ea_3}{p_z}\Delta x \quad (6-59)$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{ea_3}{p_z}2(x + \Delta)y \approx \frac{2ea_3}{p_z}\Delta y \quad (6-60)$$

となり、4 極磁場中の運動と全く同じ形をしていることが分かる。つまり、水平方向に Δ ずれたところを通るビームに対しては 6 極磁場は強さが $2a_3\Delta$ の 4 極磁場と同等の効果がある。

従って、粒子のエネルギーに比例した水平方向の位置のずれ (dispersion) のある場所に 6 極磁石を置くことによってエネルギーに比例した収束・発散力を付け加えることができる。これが、6 極磁場による chromaticity 補正の原理である。

6.5. RF 空洞の入力パワー・ビーム電流・電圧 [6]

加速空洞の共振周波数、入力 RF の周波数、ビームの周波数（バンチ間隔の逆数の整数倍）がすべて一致している場合には、空洞の電圧（ V_c ）の変化は

$$\frac{dV_c}{dt} = \frac{1}{\tau} (V_{g0} + V_{b0} - V_c) \quad (6-61)$$

と表すことができる。ここで τ は空洞の時定数

$$\tau = \frac{\omega}{2Q_L} \quad (6-62)$$

入力 RF パワー（ P_{in} ）による（定常状態の）電圧

$$V_{g0} = \frac{2\sqrt{\beta}}{1+\beta} \sqrt{P_{in} \left(\frac{R}{Q}\right) Q_0} \quad (6-63)$$

ビーム電流（ I_b ）による（定常状態の）電圧

$$V_{b0} = -I_b \left(\frac{R}{Q}\right) Q_L \quad (6-64)$$

である。

(R/Q) (R over Q) は空洞の形状で決まる定数。空洞壁でのパワー損失（ P_0 ）と空洞の Q 値（ Q_0 ）の関係は

$$P_0 = \frac{V_c^2}{\left(\frac{R}{Q}\right) Q_0} \quad (6-65)$$

であるが、共振周波数を ω 、空洞内のエネルギーを W として Q_0 の定義は

$$Q_0 \equiv \frac{\omega W}{P_0} \quad (6-66)$$

で、

$$\left(\frac{R}{Q}\right) = \frac{V_c^2}{\omega W} \quad (6-67)$$

である。

入力カップラーの Q 値を Q_{ext} としてそのカップリング

$$\beta = \frac{Q_0}{Q_{ext}} \quad (6-68)$$

空洞の loaded Q

$$Q_L = \frac{1}{\frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{ext}}} = \frac{Q_0}{1+\beta} \quad (6-69)$$

等の関係がある。超伝導空洞の場合は空洞壁での損失が非常に小さいので通常は

$$Q_L \approx Q_{ext} \ll Q_0, \quad \beta \gg 1 \quad (6-70)$$

という近似が成り立つ。

空洞電圧 0 の状態から時刻 $t = 0$ から一定のパワー P_{in} を入力するとその後の電圧は、

$$V_c = V_{g0} (1 - e^{-t/\tau}) \quad (6-71)$$

と増大していく。時刻 $t = T_{fill} > 0$ から一定のビーム電流 I_b がある間、電圧が一定であるためには、微分方程式(6-61)の右辺が 0 でなければならず、

$$V_{g0} + V_{b0} - V_c = 0 \quad (6-72)$$

つまり、

$$V_{g0} e^{-\frac{T_{fill}}{\tau}} + V_{b0} = 0 \quad (6-73)$$

$$\rightarrow T_{fill} = \tau \ln \frac{V_{g0}}{-V_{b0}} \quad (6-74)$$

となる必要がある（ビームパルスに対して RF を入れ始める時刻を調整する）。

ここで、さらに反射パワーがゼロになるという要請をすると、

$$P_{in} = P_0 + I_b V_c \quad (6-75)$$

なので（ $I_b V_c$ はビームに与えられるパワー）、

$$\beta = 1 + \frac{I_b \left(\frac{R}{Q}\right) Q_0}{V_c} \quad (6-76)$$

という関係が要求されることが分かる（入力カップラーのカップリング β をこのように調整しておく）。この場合には、

$$V_{b0} = -\frac{\beta - 1}{2\beta} V_{g0} \quad (6-77)$$

$$V_c = \frac{\beta + 1}{2\beta} V_{g0} \quad (6-78)$$

といった簡単な関係が成り立つ。
特に、 $\beta \gg 1$ の場合には、

$$V_c = -V_{b0} = \frac{V_{g0}}{2} \quad (6-79)$$

$$T_{\text{fill}} = \tau \ln 2 \quad (6-80)$$

となる。

参考文献

- [1] ILC-TDR (Technical Design Report) Volume 3,
https://www2.kek.jp/ilc/en/docs/ILCTDR_Volume3_PART1.pdf,
https://www2.kek.jp/ilc/en/docs/ILCTDR_Volume3_PART2.pdf
- [2] OHO2012 講義テキスト「単粒子力学」久保浄
- [3] OHO2014 講義テキスト「リニアコライダー
 ビーム力学」久保浄
- [4] M. Omet, et.al., Pys.Rev.STAB 17, 072003 (2014)
- [5] Handbook of Accelerator Physics and
 Engineering" (second edition), section 2.6.1, ed.
 A.W.Chao, et.al. (2013)
- [6] "KEK Lectures on Beam Loading and Impedance
 Problem in e+e- Storage Rings", P. B. Wilson,
 KEK-Accelerator-79-7, <https://lib-extopc.kek.jp/preprints/PDF/1979/7920/7920007.pdf>
- [7] OHO2014 講義テキスト「リニアコライダー加
 速器」横谷馨