

高エネルギー加速器セミナー OHO'05

大強度陽子ビームの不安定性

陳榮浩 (KEK)

1. はじめに

この講義ノートは加速器科学の初心者の人を対象に陽子円形加速器におけるビーム不安定性の問題を解説したものである。ビーム不安定性の問題は加速器の分野のなかでも比較的良く理論的に整備されているので、学生さんにとって取り付き易い分野である。今までにも OHO シリーズの中でたびたび取り上げられていて[1、2]、加速器物理を勉強する人にとって必修科目である。この講義ノートの内容の多くは OHO 9 6 [2]で講義者が書き残した講義ノートに準拠している。この講義ノートは、講義者が今でも教科書や公式集としてよく利用している。今回は加速器科学の初心者の人たちを対象にしているので、内容の更なる自己完結を目指して、ビーム力学の基礎的な説明と、空洞、導波管内での電磁波の様子などについての簡単な説明を加筆した。

ビーム不安定性やインピーダンス、ウェイク場といった問題はさまざまな教科書(Zotter-Kheifets[3]、Chao[4])で説明され、比較的馴染み易い分野にもかかわらず、実際に加速器を取り巻くさまざまな装置に対し応用しようとすると、なかなかうまくいかないことが多い。これはインピーダンスやウェイク場は、誘起された電磁場をビーム不安定性理論に取り込みやすいように加工したものであるが、肝心の電磁場に対する直感的で電磁気学 (RF) 的な理解がないと、インピーダンスの評価や機器の設計が難しいからである。結局、マイクロ波工学を多少勉強しないと空洞や導波管中の電磁場の様子やその伝播の仕方がよくわからない。マイクロ波工学の更なる解説は OHO84 を参照して下さい。

ビーム不安定性の問題に関しても、多くの現象や理論をカバーするかわりに、円形陽子加速器において重要だと思われる必要最小限度の事柄に話を絞った。また、厳密な理論の導入より直感的で物理的な理論の展開を試みることで、読者がより内容をフォローできるように、また覚えられるように努めた。電子リングにおけるビーム不安定性の問題解決には多少物足りない所もあると思

うが、バンチの長い陽子ビームへの応用には、ほぼ十分な内容と公式が網羅されていると思う。

全体の構成は以下のとおりである。まず全体の基本として、円形加速器における粒子の運動と、空洞や導波管内での電磁波の様子について勉強する。次にウェイクの説明に移り、そのフーリエ展開としてインピーダンスを導入する。最後にそれらを運動方程式やブラソフ方程式に入れることでさまざまなビーム不安定性を解説する。

2. 円形加速器における粒子の運動

2.1. 座標系のとり方

円形加速器の中の個々の粒子の運動を記述するために、まず独立変数と運動の変数を決めなくてはならない。円形加速器は主に偏向磁石 (2 極磁石) と収束磁石 (4 極磁石) で構成されており、偏向磁石によって粒子の軌道は円形に保たれ、収束磁石によって粒子は設計軌道の周りをベータatron振動と称する横方向調和振動を行っている。また、円形加速器には高周波 (RF) 空洞があり、空洞内の進行方向ギャップ間に交流電圧をかけることで、粒子をバケツという名前の空間に閉じ込める。粒子はバケツの中で設計軌道を中心としたシンクロトロン振動という縦 (進行) 方向の調和振動を行っている。また、交流電圧の加減によって、粒子群を加速したり減速したりできる。

運動の独立変数として、粒子の円形加速器の円周上の位置、つまり、円周上の基準点から粒子の位置までを円周上にそって動いたときの距離 s を取る (図 1 参照)。

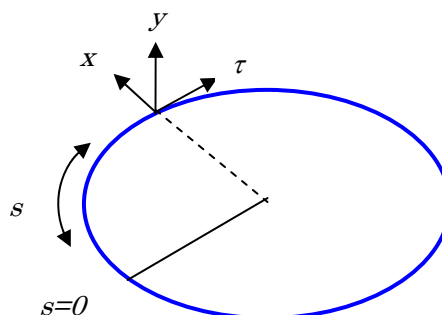


Fig.1 座標系と運動の変数。

ここで x と y はそれぞれ位置 s に於ける水平方向と垂直方向の粒子の位置の設計軌道からの変位を表す。また、 τ は考えている粒子と、ビームの中心にある基準粒子が、位置 s に到達する時間の差である。

- ただし、時間 τ の符号の取り方は、基準粒子より早く到達した方をプラスと定義する。

この3つの位置に対応する運動量として、 x' ($=dx/ds$)、 y' ($=dy/ds$)、 δ ($=\Delta p/p$) を取る。ここで、 δ は基準粒子の運動量から測った粒子の運動量の相対的なずれである。

これらの量を運動の変数として採用したのは、それらが容易に測定できる物理量であるからである。即ち、リング上のある位置 s にビーム位置測定装置をおき、粒子（或いはビーム）が通過したときの横方向の変位を測定すれば、それが x と y であり、粒子の到達時間の基準時間からのずれを測定すれば、それが τ である。仮に縦方向の変数として、バケツの中心にある基準粒子から測った粒子の縦方向の距離 z を採用すると、これを直接測定するためには、リングを上からみて、ある時間に全体のスナップショットを撮り、そこから距離を測るしかない(図2参照)。この場合、運動の独立変数はむしろ時間 t を採るべきである。しかし、リングを上から見てスナップショットを撮って運動の変数を測定するのはあまり实际的でない。このように容易に測定できる物理量を運動の変数を採用することは矛盾のない理論を構築する上で重要であり、結果を加速器に応用するのを容易にする。

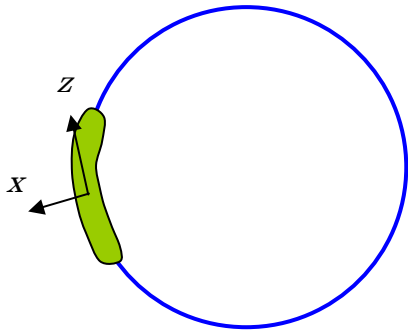


Fig. 2 時間 t でのビームのスナップショット。

2.2. 運動方程式

2.2.1. 横方向

粒子は設計軌道の周りを s の関数として振動しているが、厳密にいうと一様に振動しているわけではない。ベータトロン振動の位相の進みを独立変数に設定したときのみ、その振動は調和振動子となる。ビーム不安定性を起こすインピーダンスの種がリング上に局在しているときは、そういった理論の展開が必要であるが、ここでは、簡便のため、インピーダンスはリング上に分散して存在していると考え、粒子は一般的な調和振動をしていると近似する。そうすると粒子の運動方程式は

$$\frac{dx}{ds} = x' \quad (2.1)$$

$$\frac{dx'}{ds} = -\left(\frac{v_{x0}}{R}\right)^2 x \quad (2.2)$$

$$\frac{dy}{ds} = y' \quad (2.3)$$

$$\frac{dy'}{ds} = -\left(\frac{v_{y0}}{R}\right)^2 y \quad (2.4)$$

となる。ここで v_{x0} と v_{y0} はそれぞれ水平方向と垂直方向のベータトロン振動数であり、リング一周あたり粒子が何回横方向の振動をするかを表す。また、 R はリングの平均半径である。この表現を使うと運動方程式に粒子の速度 βc が直接現れないので都合がよい。

2.2.2. 縦方向

縦方向の運動方程式を導くには、まずスリッページファクターを説明しなければならない。仮にリングのある一点から多くの粒子が一斉にリングを回転し始めたとして、それらが一周して出発点に帰ってきたときの到達時間を測ると、必ずしも縦方向の運動量（或はエネルギー）の大きい、つまり速い粒子が早く帰ってくるわけではない。これは偏向磁場が一定のとき、運動量の大きい粒子

ほど、回転半径が大きくなってしまいうので、より長い距離を走ることになるからである。結局、到達時間はこの長い距離と速い速度のバランスで決まる。式で書くと、回転周期は軌道長 C と速さ βc の関数として

$$T = \frac{C}{\beta c} \quad (2.5)$$

と書ける。微分をとると

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{\delta C}{C} - \frac{\delta \beta}{\beta} \quad (2.6)$$

となる。第2項は運動量を用いて以下の様にも書ける：

$$\frac{\delta \beta}{\beta} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{\delta p}{p} \quad (2.7)$$

ここで $\gamma (=1/\sqrt{1-\beta^2})$ はガンマーファクターである。第1項も運動量の関数として表現できる：

$$\frac{\delta C}{C} = \alpha_p \frac{\delta p}{p} \quad (2.8)$$

ここで α_p はモーメンタムコンパクションファクターと呼ばれ、リングの設計で決まる量である。二つの式を合わせると

$$\frac{\delta T}{T} = \left(\alpha_p - \frac{1}{\gamma^2} \right) \frac{\delta p}{p} \equiv \eta \frac{\delta p}{p} \quad (2.9)$$

となり、 η をスリッページファクターと呼ぶ。さて、回転周期が長くなることは、位置 s での到達時間が遅くなる（ τ が減る）ことであるから、 τ の運動方程式は

$$\frac{d\tau}{ds} = -\frac{\delta T}{C} = -\frac{T}{C} \eta \frac{\delta p}{p} = -\frac{\eta}{\beta c} \frac{\delta p}{p} \quad (2.10)$$

で与えられる。一方運動量の変位 δ に関する運動方程式は高周波空洞での粒子の運動に関する複雑な議論が必要で、ここでは結果のみを記す：

$$\frac{d\delta}{ds} = \frac{\beta c}{\eta} \left(\frac{v_{s0}}{R} \right)^2 \tau \quad (2.11)$$

ここで v_{s0} はシンクロトロン振動数と呼ばれる量で、粒子が縦方向にリング一周あたり何回振動するかを表す。この2つの式を合わせると、縦方向の調和振動子となる：

$$\frac{d^2\tau}{ds^2} + \left(\frac{v_{s0}}{R} \right)^2 \tau = 0 \quad (2.12)$$

陽子円形加速器では、高周波空洞がない、或はその電源をオフにしている場合がある。その時、式 (2.11) の右辺はゼロになり、粒子は縦方向の振動を行わず、式 (2.10) に従って粒子の速度に応じてドリフトしていく。これをコースティングビームと呼ぶ。

2.2.3. 位相空間での粒子の運動

最後に粒子の位相空間 (x, x') 、 (y, y') 、 (τ, δ) での運動について考えよう。式 (2.1-2.4) から明らかな様に、粒子は横方向の位相空間上では常に右回り方向の回転運動を行う（図3参照）。

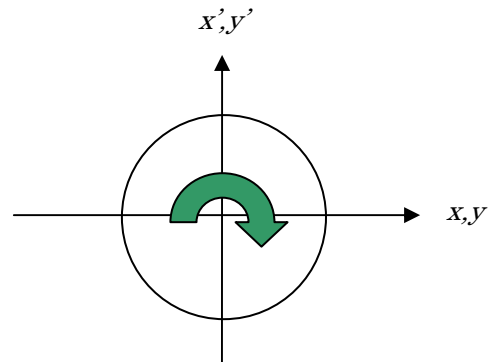


Fig.3 横方向位相空間での粒子の運動。

一方、縦方向の振動はスリッページファクター η の符号によって変わる。 η が負の時、つまり

$$\gamma < \frac{1}{\sqrt{\alpha_p}} \equiv \gamma_t \quad (2.13)$$

の時（これをトランジション以下と呼ぶ）、粒子は縦方向の位相空間 (τ, δ) で右回り方向の回転運動を行う（図4参照）。高周波空洞がオフの場合（コースティングビーム）は、粒子は位相空間の上部では右に向かうドリフトを、下部では左に向かったドリフトを行う（図5参照）。

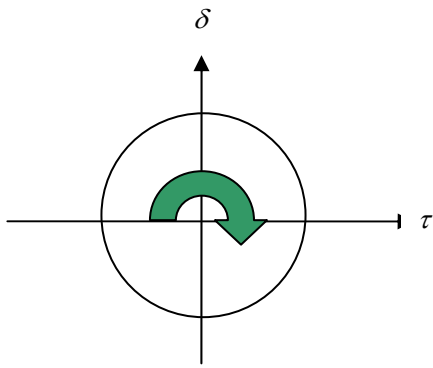


Fig.4 トランジション以下での縦方向位相空間での粒子の運動（バンチしたビームの場合）。

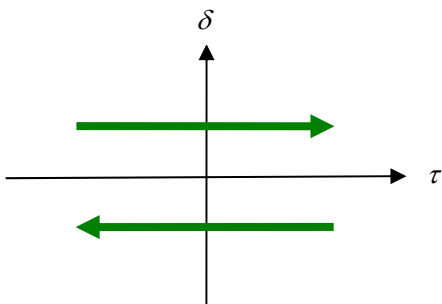


Fig.5 トランジション以下での縦方向位相空間での粒子の運動（コースティングビームの場合）。

逆に η が正の時、つまりトランジション以上では、粒子は縦方向の位相空間 (τ, δ) で左回り方向の回転運動を行い、コースティングビームの場合は図5と逆方向の運動を行う（図6参照）。

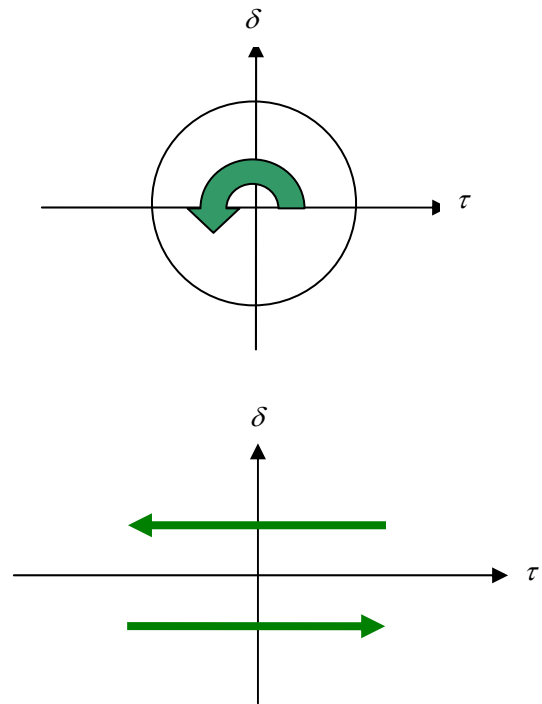


Fig.6 トランジション以上での縦方向位相空間での粒子の運動。バンチしたビームの場合（上）コースティングビームの場合（下）。

2.3. 横方向のスペースチャージ効果

2.3.1. ラスレットチューンシフト

ほとんどのビーム不安定性現象はビームがそれを取り囲むさまざまな装置と電磁的に相互作用することによって起こるが、完全な自由空間上でも個々の粒子は他の粒子が作る集散的なクーロン力によって力を受けている。これをスペースチャージ効果と呼ぶ。スペースチャージ効果には横方向と縦方向の効果があるが、縦方向はビームの周りにビームチェンバーがあることが必要なので、後述の章で扱うことにして、ここでは横方向のスペースチャージ効果だけを考える。

半径が a の円柱ビームを考える（図7参照）。粒子は横方向に一様に分布していると仮定する。粒子の進行方向線密度は λ とする：

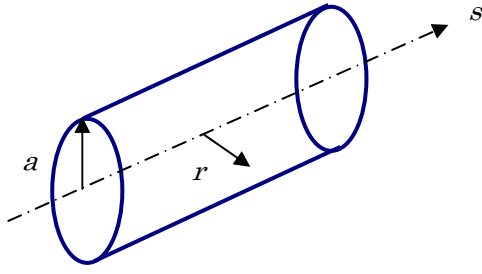


Fig.7 粒子の進行方向線密度が λ で、半径が a の円柱ビーム。粒子は横方向に一様に分布している。

この円柱ビームが作るビーム内半径 r ($r \leq a$)での径方向電場はガウスの法則から

$$E_r = \frac{\lambda e}{2\pi\epsilon_0} \frac{r}{a^2} \quad (2.14)$$

で与えられる。ここで ϵ_0 は真空の誘電率である。一方回転方向の磁場はアンペールの法則から

$$B_\theta = \mu_0 \frac{\lambda e}{2\pi} \frac{r}{a^2} \beta c \quad (2.15)$$

となる。ここで μ_0 は真空の透磁率である。半径 r の点にある粒子は径方向にローレンツ力

$$\begin{aligned} F_r &= e(E_r - \beta c B_\theta) \\ &= \frac{\lambda e^2}{2\pi\epsilon_0} \frac{r}{a^2} (1 - \beta^2) = \frac{\lambda e^2}{2\pi\epsilon_0 \gamma^2} \frac{r}{a^2} \end{aligned} \quad (2.16)$$

を受ける。これを粒子の運動方程式 (2.4) に入れ、

$$\frac{d^2 y}{d s^2} + \left(\frac{v_{y0}}{R} \right)^2 y = \frac{F_r}{m_0 \beta^2 c^2 \gamma} \quad , \quad (2.17)$$

ローレンツ力 F_r の内 y 方向成分だけを取り出して書き改めると

$$\frac{d^2 y}{d s^2} + \left[\left(\frac{v_{y0}}{R} \right)^2 - \frac{2\lambda r_p}{a^2 \beta^2 \gamma^3} \right] y = 0 \quad (2.18)$$

となる。ここで m_0 は陽子の静止質量、 r_p は陽子の古典半径である：

$$r_p = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_0 c^2} \quad . \quad (2.19)$$

式 (2.18) から分かるように、横方向のスペースチャージ力は磁石によるビーム収束を弱める方向に働く。式 (2.18) を

$$\frac{d^2 y}{d s^2} + \left(\frac{v_y}{R} \right)^2 y = 0 \quad (2.20)$$

とおき、ベータトロン振動数の変化分 (チューンシフト)

$$\Delta v_y = v_y - v_{y0} \quad (2.21)$$

を求めると

$$\Delta v_y = - \frac{\lambda r_p R^2}{v_{y0} a^2 \beta^2 \gamma^3} \quad (2.22)$$

となる。これをビームの垂直方向エミッタンス ϵ_y を使って書き改めると、

$$\begin{aligned} a^2 &= \epsilon_y \beta_y, \\ \beta_y &\approx \frac{R}{v_{y0}} \end{aligned} \quad (2.23)$$

であるから、チューンシフトは

$$\Delta v_y = - \frac{\lambda r_p R}{\epsilon_y \beta^2 \gamma^3} \quad (2.24)$$

で与えられることになる。さてリング一周にわたる平均線密度は

$$\lambda_{av} = \frac{N_p}{2\pi R} \quad (2.25)$$

であるから（ここで N_p はリング内の陽子の総数）、式 (2.24) は更に以下のように書くことができる：

$$\begin{aligned} \Delta v_y &= -\frac{N_p r_p}{2\pi\epsilon_y \beta^2 \gamma^3} \frac{\lambda}{\lambda_{av}} \\ &= \frac{N_p r_p}{2\pi\epsilon_y \beta^2 \gamma^3} \frac{I_l}{I_{av}} \\ &\equiv \frac{N_p r_p}{2\pi\epsilon_y \beta^2 \gamma^3} \frac{1}{B_f} \end{aligned} \quad (2.26)$$

ここで I_l 、 I_{av} はそれぞれ局所的、及び平均の電流密度であり、 B_f はバンチングファクターである。式 (2.26) で与えられる量を狭義のラスレットチューンシフトと呼ぶ（真のラスレットチューンシフトはビームを取り巻く境界条件の効果を入れてもの）。

さて、以上の計算ではビームは横方向に様な粒子分布を持つと仮定した。その結果、粒子の受けるスペースチャージ力は粒子の横方向変移量に比例する線形な力だけになるので、全ての粒子は式 (2.26) で与えられる同じ量のチューンシフトを行うことになる。しかし実際の分布はビームの軸をピークとして外側に向かって減少する山のような分布をしている。この場合、粒子は横方向変移量に非線形に比例する力も受けるので、チューンシフトの量はベータトロン振動の振幅の関数となる。内側にいる粒子ほど強い線形力を受けるので大きくチューンシフトを起こすが、外側に行くにつれて粒子が受ける力は弱まり、チューンシフトも小さくなっていく。従ってビーム全体では図 8 で示されるようにチューンスペース上でチューンスプレッドと呼ばれるチューンが占める領域ができる。

最後に、このスペースチャージによるベータトロンチューンシフトがビームに与える影響を考えよう。ベータトロン振動数を磁石の線形、非線形磁場が作る共鳴ラインから離れたところに設定してもラスレットチューンシフトによってベータトロン振動数は下方（小さい方）にチューンスプレッドと呼ばれる領域を作る。このときベータトロンチューンスプレッドが整数や半整数の強い共鳴ラインを跨ぐと、粒子の運動が不安定になる恐れがある。仮にラスレットチューンシフトを 0.5 以下に抑えて整数や半整数の強い共鳴ラインを跨がないようにしても、非線形共鳴ラインを跨ぐ可能性はある。このとき起こる共鳴現象によってベータトロン振動の振幅がどれだけ増大し、また許容できなくなるかは、個々の加速器の設計とその運転によるので、一概にはいえないが、J-PARC ではラスレットチューンシフトを 0.2-0.3 程度に抑えるように設計している。

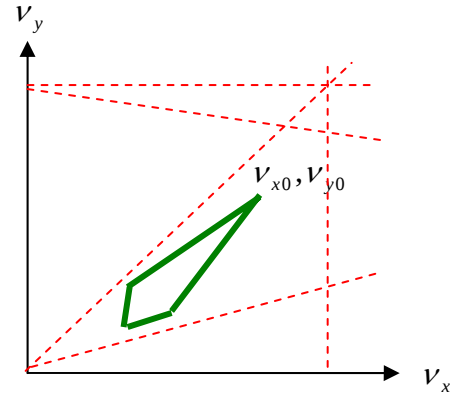


Fig.8 スペースチャージ効果によるラスレットチューンシフトとチューンスペース上でのチューンスプレッド。

2.3.2. エンベロップ方程式

さて、横方向のスペースチャージ力は磁石によるビーム収束を弱める方向に働き、その結果ベータトロン振動数が減少することが分かったが、一方ではビームの収束力が弱まれば、ビームの横方向サイズは増大し、その結果ラスレットチューンシ

フトは減少することになる。今まではビームの横方向サイズは与えられる量として考えてきたが、実際にはスペースチャージ力も含めて正しいビームサイズとスレットチューンシフトを決定するセルフコンシステントな解析が必要である。実空間上で一様な粒子分布の場合に、ビームサイズ（エンベロップ）をビーム電流とビームエミッタンスの関数として定式化したのが Kapchinskij-Vladimirskij であり、実空間上で一様な粒子分布を KV 分布と呼ぶ。その解析結果によると、セルフコンシステントなスレットチューンシフトは式 (2.26) で与えられる量より 30% 程度小さくなる。

2.4. 陽子加速器におけるエネルギーの定義

最後に陽子加速器で使用されるエネルギーの定義に関して注意点を述べる。陽子加速器において、例えばエネルギーが 3 GeV という時、これは運動エネルギーを指している。従って全エネルギー E は陽子の静止エネルギー $m_0c^2=0.938\text{GeV}$ (m_0 は陽子の静止質量) に、この運動エネルギー T を足したものになる：

$$E = T + m_0c^2 \quad (2.27)$$

ガンマーファクターは次の式で求まる：

$$\gamma = 1 + \frac{T}{m_0c^2} \quad (2.28)$$

ガンマーファクターが求まれば β も計算できる：

$$\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\gamma}\right)^2} \quad (2.29)$$

運動量の相対的変化分とエネルギーの相対的変化分の間には以下の関係式が成り立つ：

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\Delta E}{E} \quad (2.30)$$

3. 空洞や円形導波管内での電磁場

以上でウェイク場のない時（正確には、スペースチャージ力以外の摂動がない時）のビーム（粒子）の簡単な運動の様子をおさらいした。次に導波管や空洞内に於ける電磁場とその伝播に関する一般的な知識を学習しよう。

3.1. 円形導波管内での電磁波

後述するウェイク場を考える前に、ビームチェンバーや空洞の中での電磁場の様子やその伝播について勉強する。円形加速器のビームチェンバーや空洞などは円形の形をしていることが多く、またそれらが円形対称性を持つと仮定する、あるいは近似したほうが取り扱いが簡単になる場合が多いので、ここでは円形の形をした導波管や空洞のみを考える。境界条件が軸対称性をもつので、円柱座標を使って電磁界を記述するのが便利である。円形導波管を伝播する電磁波は TM 波（磁界は横波であり、進行方向成分をもたない）と TE 波（電界は横波であり、進行方向成分をもたない）がある。TE 波は、進行方向に傾きをもたないで直進するビームとは相互作用しまいので、円形加速器のビーム不安定性理論ではあまり取り扱わない。ここでは時間の都合で TM 波だけを考える。

時間方向と z 方向空間の一様性のために、電磁界は一般的に

$$E = E_r(r) \cdot E_\theta(\theta) \cdot \exp(i\omega t - i\beta z) \quad (3.1)$$

と書ける。また軸回転方向 θ に関しても、電磁界の円形導波管一周に渡る周期性（ $E_\theta(\theta + 2\pi) = E_\theta(\theta)$ ）からフーリエ展開ができて、その結果、

$$E = \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_{rm}(r) \cdot \exp(im\theta) \cdot \exp(i\omega t - i\beta z) \quad (3.2)$$

を得る。ここで m は整数である。インデックス m はこの電磁解の軸方向に関する周期性を表して

おり、モードと呼ばれている（ $m=0$ はモノポール（電磁界は軸対称）、 $m=1$ はダイポール）。これから以降は電磁場の z 方向成分だけを考え、電磁界の記号にも z のインデックスを省略する。さて、 $\theta=0$ の原点をどこにとるかは任意なので、簡単のため、式 (3.2) を

$$E_z = \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_{rm}(r) \cdot \cos(m\theta) \cdot \exp(i\omega t - i\beta z) \quad (3.3)$$

と書こう。この一般解をマクスウェル方程式にいれると、 $E_{rm}(z)$ に関する波動方程式を得る：

$$\frac{d^2 E_{rm}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE_{rm}}{dr} + (k_c^2 - \frac{m^2}{r^2}) E_{rm} = 0. \quad (3.4)$$

ここで

$$k = \omega / c$$

$$k_c^2 = k^2 - \beta^2 \quad (3.5)$$

である。

この方程式の解はベッセル関数で表わされる：

$$E_{rm}(r) = J_m(k_c r) \quad (3.6)$$

円形導波管の半径を a とすると、導波管の内壁では電解の接線成分はゼロにならなければならないので、 $E_{rm}(z)$ は半径 a でゼロになる。即ち、

$$J_m(k_c a) = 0. \quad (3.7)$$

つまり $k_c a$ は m 次のベッセル関数のゼロ根である。これによって変数 β と周波数 ω とが関係づけられる。 m 次のベッセル関数のゼロ根は無限にあり、表 1 にその一部を示した。

次数 m のベッセル関数の n 番目のゼロ根を ρ_{mn} と書くとなると、 $k_c = \rho_{mn} / a$ であるから、境界条件を満たす電磁場の m 次のモードの z 方向成分は

Table 1 m 次のベッセル関数のゼロ根 ρ_{mn} 。

$n \backslash m$	1	2	3
0	2.40	5.52	8.65
1	3.83	7.02	10.17
2	5.14	8.42	11.62

$$E_{zm} = J_m\left(\frac{\rho_{mn}}{a}r\right) \cdot \cos(m\theta) \cdot \exp(i\omega t - i\beta z) \quad (3.8)$$

となる。図9に E_{z0} (モノポールモード) の導波管内径方向分布の一例を示した。式 (3.5) から位相定数 β は

$$\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\rho_{mn}}{a}\right)^2} \quad (3.9)$$

で与えられるので、 $k < \rho_{mn}/a$ の時はこの電磁界は導波管中を伝播せず、 z の方向に指数関数的に減衰していく。つまり、電磁界の周波数が

$$\omega_c = c \frac{\rho_{mn}}{a} \quad (3.10)$$

以下のとき、式 (3.8) で与えられる電磁波は導波管を伝播しない。言い換えれば、周波数が ω_c 以下の電磁波を円形導波管に入射することは出来ない。これを遮断周波数 (カットオフ周波数) と呼ぶ。 β の逆数は電磁波の導波管内での波長 (管内波長 λ_g) を与えるので、管内波長は

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - \left(\frac{\rho_{mn}}{a}\right)^2}} \quad (3.11)$$

となる。遮断周波数で管内波長は無限大になる。

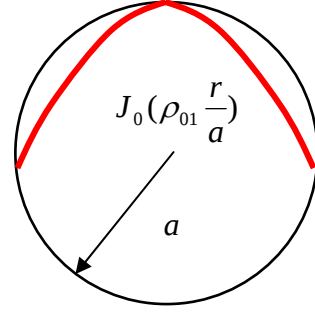


Fig.9 円形導波管内での TE_{01} 、 E_{z0} (モノポールモード) の導波管内径方向分布。

その他の電磁場解成分は以下ようになる：

$$\begin{aligned} E_{rm} &= -i \frac{\beta}{(y_{mn}/a)} \cos(m\theta) J'_m\left(\frac{y_{mn}}{a}r\right) \exp(i\omega t - i\beta z) \\ E_{\theta m} &= i \frac{m\beta}{(y_{mn}/a)^2} \sin(m\theta) \frac{1}{r} J_m\left(\frac{y_{mn}}{a}r\right) \exp(i\omega t - i\beta z) \\ E_{zm} &= \cos(m\theta) J_m\left(\frac{y_{mn}}{a}r\right) \exp(i\omega t - i\beta z) \\ H_{rm} &= -i \frac{m\varepsilon_0\omega}{(y_{mn}/a)^2} \sin(m\theta) \frac{1}{r} J_m\left(\frac{y_{mn}}{a}r\right) \exp(i\omega t - i\beta z) \\ E_{\theta m} &= -i \frac{\varepsilon_0\omega}{(y_{mn}/a)} \cos(m\theta) J'_m\left(\frac{y_{mn}}{a}r\right) \exp(i\omega t - i\beta z) \\ H_{zm} &= 0 \end{aligned} \quad (3.12-17)$$

ここで $J'_m(x)$ は $J_m(x)$ の x に関する微分である。この様に導波管内の電磁波は、進行方向成分の有無と θ 方向の依存性を表すモード番号 m 、径方向の依存性を表すモード番号 n によって分類することができる。そこで磁場が進行方向成分を持たない TM 波はモード番号 m と n によって TM_{mn} モードと書くことにする。例として TM_{01} モード (モノポールモード) と TM_{11} モード (ダイポールモード) の電磁界分布を図 10 に示す。

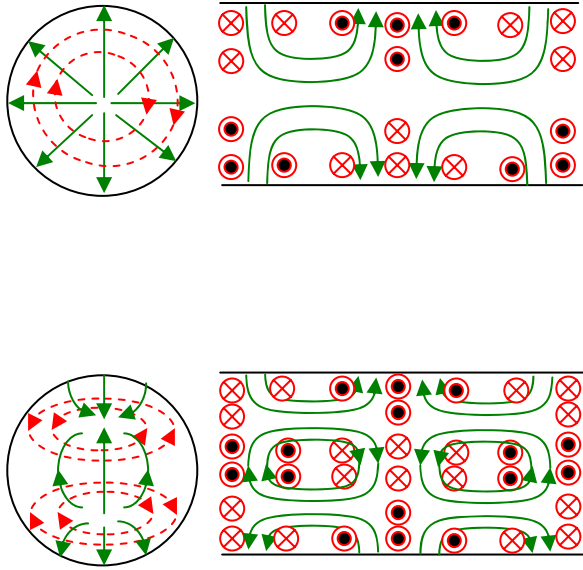


Fig. 10 円形導波管内の電磁界分布。(上) TM_{01} モード (モノポール)、(下) TM_{11} モード (ダイポール)。

3.2. 円形空洞内の電磁場

次に、この円形導波管の両端に板を置いて短絡してみよう。この時は、電場の径方向と軸方向成分が短絡した面で境界条件 (=完全導体との境界では電場の接線方向成分はゼロ) を満たさなくてはならない。つまり、両端を短絡した導波管 (空洞) 内では進行方向に完全な定在波ができる。以上の条件は空洞での管内波長の $1/2$ の整数倍が空洞の長さ L と等しい時に満たされる。式 (3.11) から

$$L = l \frac{\lambda_g}{2}. \quad (3.18)$$

これによって空洞内の共振周波数が決まる：

$$(kc)^2 = \left(\frac{\rho_{mn}}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi l}{L} \right)^2. \quad (3.19)$$

整数 m, n, l は無限にあるので、空洞の半径 a と長さ L が決まっても、空洞の共鳴モードは無数にあ

る。それらを TM_{mnl} モードと呼ぶ。その幾つかの例を図 11 に示した。

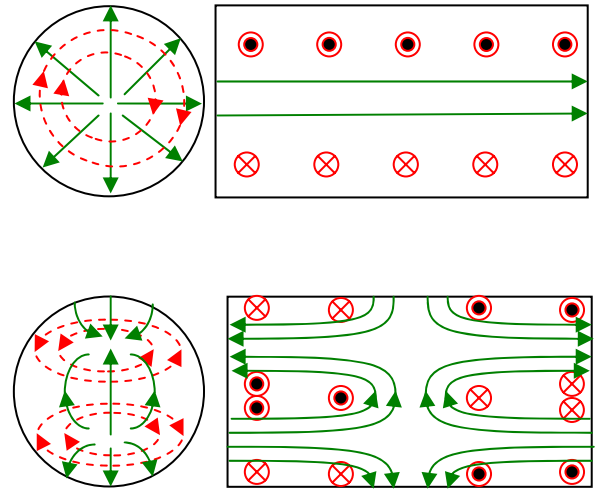


Fig. 11 円形空洞内の電磁界分布。(上) TM_{010} モード (モノポール)、(下) TM_{111} モード (ダイポール)。

実際に加速器で使われる空洞はもっと形状が複雑であるが、最大の違いは空洞の両端が完全に短絡した板があるのではなく、その中心に穴があいており (穴の半径を b としよう)、そこに円形導波管が繋がっていることである (この円形導波管の中をビームが通る)。その様子を図 12 に示した。

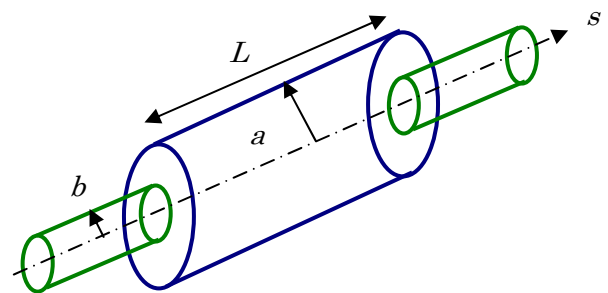


Fig. 12 円形空洞とその両端についた円形ビームチェンバー (ピルボックス空洞)。

この様に円形空洞の両端に円形ビームチェンバーを繋げたものをピルボックス空洞と呼

ぼう（円形ビームチェンバーがなくてもピルボックス空洞と呼ぶが）。さて、円形導波管が両端に繋がっている時の共鳴モードを考えてみよう。前章でこの円形導波管には式 (3.10) で与えられる遮断周波数（ a を b に置き換える必要あり）があることを学習した。つまり式 (3.19) で与えられる空洞の TM_{mnl} モードの共鳴周波数がこの遮断周波数より低いときにのみ、このモードは空洞内に留まる。言い換えれば、空洞の TM_{mnl} モードの共鳴周波数がこの遮断周波数より大きいときは、そのモードは導波管を通じて外へ伝播してってしまう。

次に空洞内にトラップされた共鳴モードを考えよう。このモードの周波数はビームチェンバーの遮断周波数より低いので、空洞内にトラップされているが、減衰する波として、その一部はビームチェンバーの中にも存在する。モードの共振周波数がビームチェンバーの遮断周波数と近い時には、ビームチェンバーのかなり遠くまでモードの一部が広がることもある。この電磁場の漏れのため、空洞の実効的な空間が広がったように見える。従って空洞内の共振周波数はビームチェンバーがない時と比べて若干下がる。

3.3. 空洞の並列共振回路モデル

最後に空洞共振器を集中定数回路で表現しよう。一般に集中定数回路における共振回路は LRC の直列共振回路と LGC の並列共振回路が考えられるが、空洞共振器や加速器に於けるその他の多くのインピーダンス源は並列共振回路でモデル化されることが多い。図 13 は LGC の並列共振回路の一例である。

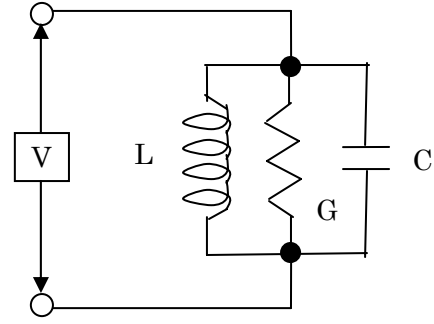


Fig. 13 空洞共振器と等価回路の LGC 並列共振回路。

並列共振回路では回路に流れる全電流は LGC それぞれの回路要素を流れる電流の和に等しい。つまり、

$$I(t) = C \frac{dV}{dt} + GV + \frac{1}{L} \int V dt. \quad (3.20)$$

ここで C はキャパシタンス（静電容量）、 G はアドミッタンス（抵抗の逆数）、 L はインダクタンスである。電流と電圧がそれぞれ $I(t) = \hat{I} \exp(i\omega t)$ 、 $V(t) = \hat{V} \exp(i\omega t)$ の様に振動していると仮定すると、式 (3.20) は

$$\hat{I} = Y\hat{V} \quad (3.21)$$

と書け、ここで

$$Y(\omega) = i\omega C + G - i \frac{1}{\omega L} \quad (3.22)$$

であり、 Y をアドミッタンスと言う。並列共振回路のインピーダンスは Y の逆数である：

$$Z(\omega) = \frac{1}{Y(\omega)}. \quad (3.23)$$

このインピーダンスを空洞の特性を表す 3 つのパラメーターで表現すると以下の様になる：

$$Z(\omega) = \frac{R_s}{1 + iQ \left(\frac{\omega_R}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_R} \right)}. \quad (3.24)$$

ここで ω_R は共振周波数

$$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (3.25)$$

Q はクオリティファクター或は Q 値

$$Q = R_s \sqrt{\frac{C}{L}}, \quad (3.26)$$

R_s はシャントインピーダンス

$$R_s = \frac{1}{G} \quad (3.27)$$

である。空洞の特性を評価する時によく使われる R_s / Q は

$$\frac{R_s}{Q} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (3.28)$$

で与えられ、 G によらない。

以上で空洞共振器を並列共振回路でモデル化した。次に実際にビームが空洞を通過した時に、LGC 回路のそれぞれの要素は空洞で起こる何に対応しているか考えよう。図 14 にその対応を示した。ビーム電流 I_b を持ったビームが空洞を通過すると、電磁誘導によって空洞内の磁場の変化を妨げる向き、つまりビームの進行方向と逆向きに誘導起電力が生じ、空洞のインダクタンスに比例する鏡像電流 I_L が空洞の表面に流れる。空洞の材質に抵抗があると、更に起電力が生じ、 I_R の電流がビーム電流の向きと逆向き流れる。空洞のギャップ間には電荷がたまるため、変位電流 I_C が流れる。

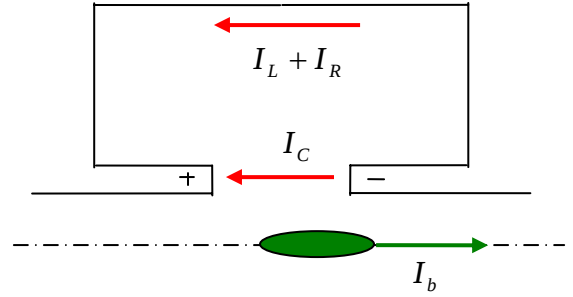


Fig. 14 ビームが空洞共振器を通過したときに誘起される電流の様子。

以上を総合すると、電荷の保存則から

$$I_b + I_L + I_R + I_C = 0 \quad (3.29)$$

が得られる。この式を回路に誘導される起電力 V の式として書き換えると

$$\frac{1}{L} \int V dt + \frac{V}{R} + C \frac{dV}{dt} = -I_b \quad (3.30)$$

となる。ここでアドミッタンス Y を

$$Y \cdot V = -I_b \quad (3.31)$$

と定義するとアドミッタンスは式 (3.22) で表され、その逆数である空洞のインピーダンスも式 (3.24) で表される。

4. ウェイク場

さて、いよいよビームとそれを取り巻く構造体との間の電磁的相互作用の問題に移ろう。相互作用の結果出来る電磁場をウェイク場と呼ぶ。まず、どうしてウェイクができるのかを考えてみよう。

4.1. ウェイク場

完全導体で出来た真っ直ぐなパイプの中心を光速で直進する粒子を考える。パイプの外側で電磁場がゼロになる様にパイプの内側の表面上に鏡像電流が誘起され、粒子との間に電磁場の雲ができる。そして全体がそのまま光速で前方に移動していく。境界の効果はこの鏡像電流によって置き換えることができるので、以下境界の存在をわすれてもかまわない。さて、パイプの先で口径が急に広がっているとしよう（図15参照）。粒子はそのまま直進するが鏡像電流はパイプに沿ってその軌道が曲げられるだろう。その時、鏡像電流はシンクロトロン放射を出す。これがウェイク場である。広がったパイプの替りにパイプの材質が伝導率有限の物質になっていたとしよう。鏡像電流は急に減速され、前方に制動輻射を出す。これもウェイク場である。つまりウェイク場とは鏡像電流の軌道が曲げられた時、或は加速、減速された時（つまり、横方向か縦方向に加速が加わった時）に鏡像電流が出す輻射なのである。では輻射のエネルギーはどこから来るのか。もちろん最終的には粒子からである。輻射場、粒子、そして鏡像電流と粒子間の電磁場、この3つの間でエネルギーのやり取りがなされる。こうして、ウェイク場を鏡像電流が出す輻射と考えると、その軌道を考察することで、どこでウェイク場が作られ易いかが直感的に理解できる。

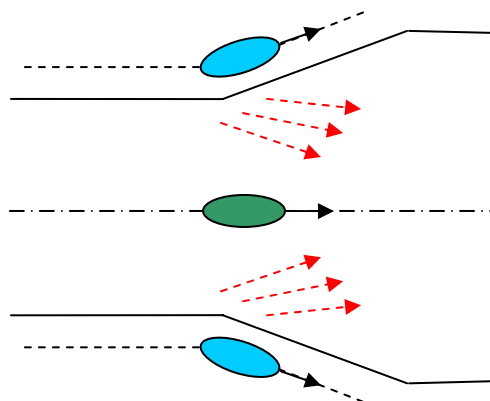


Fig. 15 鏡像電流によるウェイクの発生。

ウェイク場は境界条件付きでマックスウェル方程式を解くことによって求められる。しかしこれは大変な作業であり、ビーム不安定性とインピーダンスの問題を検討するときに最も多くの時間はここに費やされる。解析的に計算できる場合は極めて限られていて、円形のパイプが小さく波打っている場合や、真っ直ぐなパイプが非完全導体でできている場合などだけである。殆どの場合、ABCI [5]やMAFIA [6]などの計算機コードを使って計算する。

4.2. ウェイクポテンシャル

さて、粒子の作るウェイク場が計算できたとしよう。今度はそのウェイク場が粒子の（ウェイク場を作った粒子だけでなく、周りの他の粒子も含めて）運動にどう影響を与えるかを考えてみよう。これは後でビーム不安定性の解析をする際の重要なインプットになるので、解析に便利な様に結果をうまくパラメーター化しておく必要がある。

粒子の運動方程式を書くためには、ウェイク場が引き起こす粒子の運動量の変化を知らなければならない。粒子がウェイク場の雲の中を通過する間に起きる軌道変化が十分に小さければ、ウェイク場による粒子の運動量変化の総量を知れば充分である。

議論を簡単にするために、ウェイク場は軸対象構造体の中で出来るとする。対称性から電磁場は

軸の周りの角度 θ に関して $\cos m\theta$ の形にフーリエ展開できる。次数の低い順に モノポール ($m=0$)、ダイポール ($m=1$) と呼ぶ。殆どの場合、問題となるビーム不安定性はこの2つの成分を考慮すれば充分である。さて、上手な解析の第一歩はウェイク場を誘起する粒子の集まり（これを誘導ビームと呼ぶ）をどう用意するかにある。単純に針の様なビームを用意し、それが軸対象構造体の軸からずれたとして話を展開すると、モノポールやダイポールだけではなく、全ての高次のモードを一編に考えていかなくてはならない。これでは都合が悪いので、誘導ビームとして $\cos m\theta$ の電荷分布をもったリングを考える（図16参照）。リングの半径を r_0 とし、リングの中心は構造体の軸上を走る。そうすると次数 m の電磁場を考えるときは $\cos m\theta$ の電荷分布をもったリングを用意すればよく、違う次数の電磁場の計算には別のリングを用意して別々に行えばよい。しかも、リングの電流密度を、電荷 q の点電荷が $\theta=0$ の方向に r_0 のオフセットを持った時と同じモーメントを持つ様に選んでおくと後で都合が良い：

$$\lambda = \frac{qc}{\pi_0(1+\delta_{m0})} \delta(z-ct)\delta(r-r_0)\cos m\theta \quad (4.1)$$

ここで c は光速であり、 δ_{m0} はクロネッカーのデルタである。

次にこのウェイク場から力を感じる別の粒子（試験粒子）を考える（図16を参照）。この粒子は同じバンチの中で誘導ビームを構成する粒子群と一緒に（軸と平行に）動いてる粒子を念頭においている。2つの軸方向における相対的位置がウェイク場を通過中にあまり変わらないとして、誘導ビームが軸方向の位置 z にいる時に試験粒子は誘導ビームの後方 s のところを走っているとしよう。試験粒子は軸から r だけ離れた所を走るとする。この試験粒子が時間 t の時、軸方向の位置 z で受ける縦方向、横方向（径方向）のローレンツ力を F_L 、 F_T とする：

$$F_L = eE_z \cos m\theta \quad (4.2)$$

$$\mathbf{F}_T = e(E_r - c \cdot B_\theta) \cos m\theta \cdot \mathbf{r} \equiv F_T \cos m\theta \cdot \mathbf{r} \quad (4.3)$$

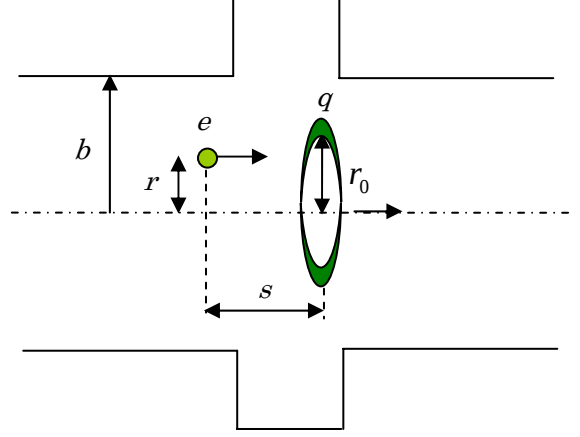


Fig. 16 リング状の誘導ビームと試験粒子との位置関係。

ここで、 $\mathbf{r}$ は放射方向の単位ベクトルであり、 E_z 、 E_r と B_θ はそれぞれ $\theta=0$ での電場と磁場の軸方向、径方向と角度方向の成分である。試験粒子がウェイク場の雲を通過中に受ける運動量変化の総量は試験粒子に乗った系で受ける力を積分すれば求まる：

$$\begin{aligned} \Delta p_z &= \int_{-\infty}^{\infty} dz F_L(z, t = \frac{z+s}{c}) \\ &\equiv -eqW_{Lm}(s) \cdot r_0^m r^m \cos m\theta \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{p}_T &= \int_{-\infty}^{\infty} dz \mathbf{F}_T(z, t = \frac{z+s}{c}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dz F_T(z, t = \frac{z+s}{c}) \cdot \cos m\theta \cdot \mathbf{r} \\ &\equiv eqW_{Tm}(s) \cdot m r_0^m r^{m-1} \cos m\theta \cdot \mathbf{r} \end{aligned} \quad (4.5)$$

ここでは証明を省くが、マクスウェル方程式を変換すると、以上の様に定義された $W_{Lm}(s)$ と $W_{Tm}(s)$ は誘導ビームの半径や試験粒子が構造体

のどこを走っているかによらないことが分かる（つまり運動量変化の r_0 や r 依存性は式 (4.4) と (4.5) に明確に表現されている）[4]。従って、関数 $W_{Lm}(s)$ と $W_{Tm}(s)$ は構造体の形状によって一意的に決まる関数で、これをウェイクポテンシャルと言う。誘導ビームは光速で走っていると仮定すると（これは陽子ビームでは当てはまらない時もあるが）、ウェイクポテンシャルは誘導ビームの前方でゼロになる：

$$W_{Lm}(s) = W_{Tm}(s) = 0 \quad (s < 0) \quad (4.6)$$

試験粒子の運動量変化の式 (4.4) と (4.5) をもう少し詳細に調べて見よう。

● モノポール場 ($m=0$)

この時、当然のことながら対称性から横方向のウェイクポテンシャルはゼロである。さて、式 (4.4) から試験粒子の運動量変化は誘導ビームのリングの半径にも、また試験粒子の位置にもよらない。結局、

→ 試験粒子の運動量変化は誘導ビームと試験粒子の相対距離だけの関数である。

● ダイポール場 ($m=1$)

式 (4.5) から、運動量変化は誘導ビームのリングの半径に比例するが、自分自身の構造体の軸からのオフセットの量とその向きにはよらない。一方、 $\cos m\theta$ の電荷分布をもったリングはその電流密度の選択より、構造体の軸から $\theta=0$ の方向に r_0 だけオフセットをもった電荷 q のビームと同じモーメントを持っている。結局、

→ 試験粒子の運動量変化の大きさは誘導ビームのオフセットに比例する。その向きは $W_{Tm}(s)$ が正（負）ならば、誘導ビームのオフセットの向き（逆向き）と同じである。

4.3. Panofsky-Wenzel theorem

さて、縦方向と横方向のウェイクポテンシャル $W_{Lm}(s)$ と $W_{Tm}(s)$ との間には Panofsky-Wenzel theorem と呼ばれる関係がある[7]：

$$W_{Tm}(s) = \int_0^s ds W_{Lm}(s) \quad (4.7)$$

この関係はこのままでは殆ど役に立たない。なぜなら次数 m の $W_{Lm}(s)$ を計算できるほどに電磁場解が解かっているならば、同じ次数の $W_{Tm}(s)$ も直接、定義に従って計算できるはずで、Panofsky-Wenzel theorem に頼る必要はないからである。この関係はむしろモノポール場での $W_{L0}(s)$ が計算できるが、ダイポール場の $W_{T1}(s)$ の計算が困難な場合や、ダイポール場の $W_{T1}(s)$ の直接の計算を端折りたいときに、モノポール場の $W_{L0}(s)$ からダイポール場の $W_{T1}(s)$ を近似的に求めるときに用いられる。よく使われる近似式は

$$W_{T1}(s) \approx \frac{2}{b^2} \int_0^s ds W_{L0}(s) \quad (4.8)$$

で、ここで b はビームパイプの内径である。

4.4. ウェイクポテンシャルの振る舞い

さて、Panofsky-Wenzel theorem (4.7) と式 (4.6) より横方向のウェイクポテンシャルは原点ではゼロであることがわかる：

$$W_{Tm}(0) = 0 \quad (4.9)$$

一方、縦方向のウェイクポテンシャルの原点近傍での振る舞いはどうであろうか。誘導ビームの作ったウェイク場が持つエネルギーは、誘導ビームのエネルギーによって補われなければエネルギーが保存されない。従って誘導ビームはウェイク場によって減速される力を受ける筈である。つまり、

$$\lim_{s \rightarrow +0} W_{L0}(s) > 0 \quad (4.10)$$

さて ε を微小な量とすると、位置 $s = -\varepsilon$ ではウェイクポテンシャル $W_{L0}(s)$ はゼロであり $s = \varepsilon$ では $W_{L0}(\varepsilon)$ の値を持っているとして、 $s = -\varepsilon$ と $s = \varepsilon$ の間でウェイクポテンシャルを直線で繋ぐと、 $s = 0$ ではウェイクポテンシャルは $W_{L0}(\varepsilon)/2$ の値をもつことがわかる：

$$W_{L0}(0) = \frac{W_{L0}(\varepsilon)}{2} \quad (4.11)$$

つまり、誘導ビームはそのすぐ後ろの試験粒子が受ける減速力の半分の力を受ける。これを“Fundamental theorem of beam loading” [8]と呼ぶ。以上の結果をまとめると、縦方向と横方向のウェイクポテンシャルは一般的に図 17 でスケッチした様に振る舞う。

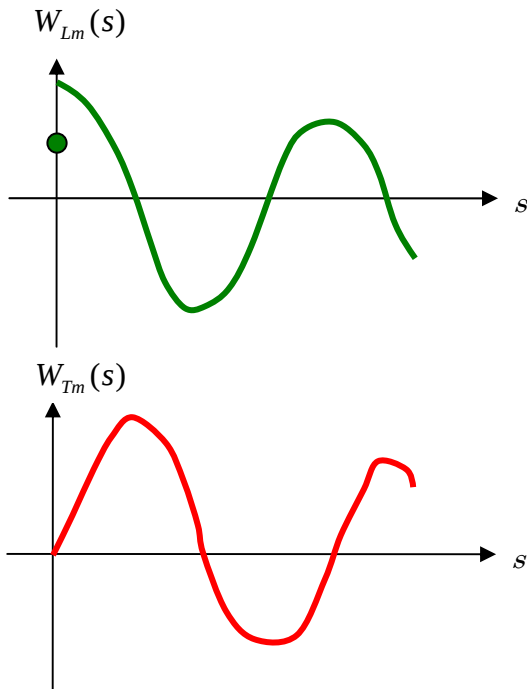


Fig. 17 一般的な縦方向と横方向のウェイクポテンシャルのスケッチ。

さて、誘導ビームが進行方向に薄いリングのような形状をしている時に、誘導ビームは自分が作

った縦方向のウェイク場を感じることができるのに、どうして横方向の場合はそれができないのかを考えてみよう。簡単のために誘導ビームの半径はビームパイプのそれと等しいと仮定し、ウェイク場は図 16 に示したような空洞で出来るとしよう。また、縦方向の代表としてモノポール場を、横方向の代表としてダイポール場を考える。この章の第 2 節で説明した様に、ウェイク場は導体の表面を走る鏡像電流からの輻射によって作られる。この輻射は当然前方にでるので、長い距離を走る内に誘導ビームに追い付くことができる。このことは縦方向と横方向の場合で変わらない。それではなぜ横方向の場合、誘導ビームは自分が作るウェイク場から力を受けないのか。その鍵は鏡像電流の流れ方の違いにある。縦方向の場合、鏡像電流はビームパイプ上を軸対称的に流れるが、横方向の場合、鏡像電流の向きが上下で ($\theta = 0$ と $\theta = \pi$ とで) 逆転していて、違った角度にある鏡像電流からの輻射の差が横方向のローレンツ力を作っている。従って、例えば $\theta = 0$ の軌道を走る試験粒子は $\theta = 0$ で発せられた輻射のみならず、他の部位 (例えば $\theta = \pi$) で発せられた輻射がビームパイプ上を斜めに走ってきて追い付いて始めて横方向のローレンツ力を感じるのである。この場合、 $\theta = 0$ 以外での輻射の軌道は誘導ビームのそれより長くなるため誘導ビームに追い付くことはできない。つまり、誘導ビームは自分が作った横方向ウェイク場を感じないのである。

最後に指摘しておきたいのは、ウェイクポテンシャルを定義、導入する過程で、誘導ビームも試験粒子も光速で移動していると仮定したことである。低エネルギー (1, 2 GeV 以下) の陽子ビームの場合、この仮定はあまりよい近似とはいえない。しかし、この章で述べたウェイクポテンシャルの性質の多くはこの仮定の上で成り立つ。また、次章で説明するインピーダンスが、構造体の性質で決まり、ビームのパラメーターによらないためにもこの仮定は必要である。この辺りで多少の不整合が存在するが、理論全体をすっきりさせるために、必要な仮定 (近似) である。

5. インピーダンス

5.1. インピーダンスの定義

前章で求めたウェイクポテンシャルは、ビームの振る舞いを時間領域で調べるのに都合が良く、トラッキング等を行う時に便利である。しかしビームの振る舞いを解析的に調べようとする、周波数領域で議論した方が簡単で都合が良いことが多い。そこでインピーダンスという量を、第3章で学習した電気回路やRFでの定義に沿うように定義しよう。以下、説明の簡略化のためにモノポール場での縦方向インピーダンスとダイポール場での横方向インピーダンスの場合に議論を限る。実用上、これで十分である。

縦方向の電流分布 $I(\tau)$ を持った誘導ビームを考える。ビームの横方向分布は任意でよいが、ビーム重心はチェンバーの軸から r_0 のオフセットを持つとする。この電流のフーリエ変換 $I(\omega)$ を以下の様に定義する。:

$$I(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau I(\tau) \exp(i\omega\tau) \quad (5.1)$$

このビームの先端から距離 s だけ遅れて走る試験粒子を考える。この粒子がウェイク場から受ける軸方向電場の積分値（つまり電圧）は

$$V(s) = \int_{-\infty}^{\infty} dz E_z(z, t = \frac{(z+s)}{c}) \quad (5.2)$$

で与えられる。この電圧をフーリエ変換して周波数の関数としたものを $V(\omega)$ とする:

$$V(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{c} V(s) \exp(i\omega \frac{s}{c}) \quad (5.3)$$

電圧、電流のフーリエ変換が定義されたので、これらを使って縦方向インピーダンス $Z_L(\omega)$ を以下の式で定義する:

$$V(\omega) = -Z_L(\omega) I(\omega) \quad (5.4)$$

ここで、インピーダンスの前に負の符号をつけたのは電圧 V を直接作っているのは鏡像電流であり、それは $-I$ で与えられるからである（章3.3の図13を思い出そう）。

ダイポール場での横方向インピーダンスも同様に定義できる:

$$V_T(\omega) = iZ_T(\omega) \cdot r_0 I(\omega) \quad (5.5)$$

ここで $r_0 I(\omega)$ は横方向ダイポール電流のフーリエ変換である。定義(5.5)に虚数 i を導入したのは、横方向電圧の位相が電流の位相より90度ずれることが多いのを考慮してあるからである。

さて、誘導ビームとして特別に、光速で移動する電荷 q 、半径 r_0 のリング(i.e., $I(\tau) = q\delta(\tau)$)を考えると、インピーダンスとウェイクポテンシャルとの間の関係が導き出せる。この場合、試験粒子が受ける電圧は、式(4.4)を使って

$$V(s) = -qW_{L0}(s) \quad (5.6)$$

となる。つまりウェイクポテンシャルその物である。この電圧のフーリエ変換は

$$V(\omega) = -\frac{q}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{c} W_{L0}(s) \exp(i\omega \frac{s}{c}) \quad (5.7)$$

となる。また電流のフーリエ変換は

$$I(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau I(\tau) \exp(i\omega\tau) = \frac{q}{2\pi} \quad (5.8)$$

で与えられる。式(5.4)、(5.7)、(5.8)から、 $Z_L(\omega)$ は縦方向ウェイクポテンシャル $W_{L0}(s)$ のフーリエ変換に等しいことが分かる:

$$Z_L(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{c} W_{L0}(s) \exp(i\omega \frac{s}{c}) \quad (5.9)$$

同様に、横方向インピーダンスと横方向ウェイクポテンシャルとは

$$Z_T(\omega) = \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{c} W_{T1}(s) \exp(i\omega \frac{s}{c}) \quad (5.10)$$

の関係がある。

ここで注意する必要があるのは、インピーダンスの定義は式 (5.4) と (5.5) であって、式 (5.9) と (5.10) はインピーダンスとウェイクポテンシャルの関係を示しているにすぎない。つまり、インピーダンスはウェイクポテンシャルを知らなくてもその定義から独立に計算できる。むしろインピーダンスを求めて、それからウェイクポテンシャルを関係 (5.9) 及び (5.10) の逆変換を使って計算することはよくある。次の節でそれらの例を幾つか上げる。

5.2. インピーダンスの性質

その前に後でビーム不安定性を考える時に役立つ大事な指摘をしておく。周波数 ω が正と負の領域でのインピーダンスの間にはウェイクポテンシャルが実数であるために、次の関係がある：

$$Z_L(-\omega) = Z_L^*(\omega) \quad (5.11)$$

$$Z_T(-\omega) = -Z_T^*(\omega) \quad (5.12)$$

縦方向の場合、インピーダンスに周波数を掛けたり割ったりしたものがビーム不安定性の公式に現れることが多いので、実際には横方向と同じポラリティを持つと考えた方が都合が良い。図 18 に典型的なインピーダンスとして空洞型インピーダンスを例にとり、その周波数依存性を概念的に示した。

第4章で学習した Panofsky-Wenzel theorem をインピーダンスで表すと

$$Z_{Tm}(\omega) = \frac{c}{\omega} Z_{Lm}(\omega) \quad (5.13)$$

となる。また同じ章で、 $m=0$ の縦方向ウェイクポテンシャルと $m=1$ の横方向ウェイクポテンシャルを関係づける便利な近似式 (4.8) を披露した。この近似式に対応して、それぞれのインピーダンス間の関係も次の式で近似できる：

$$Z_T \cong \frac{2c}{b^2} \frac{Z_L}{\omega} \quad (5.14)$$

この近似式はかなり広く使われている。

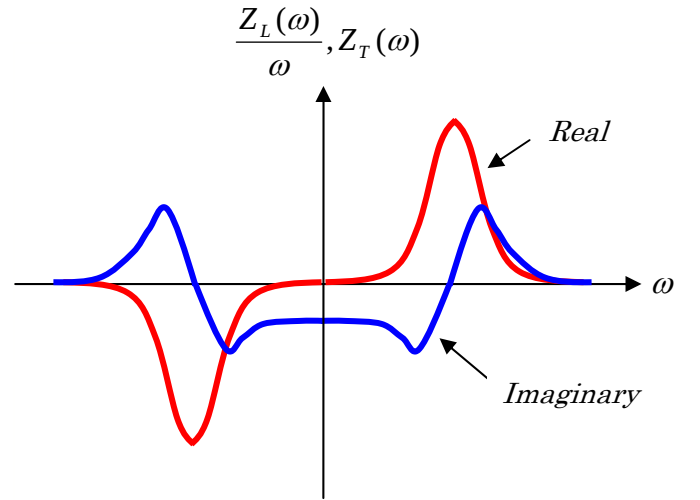


Fig. 18 縦方向 (Z_L / ω) と横方向 (Z_T) インピーダンスの概念図。

5.3. インピーダンスの種類

さて、インピーダンスにはどんな種類があるのだろうか。典型的な縦方向インピーダンスを書いてみると

$$Z_L = -i\omega L + R_w \sqrt{\omega} + R_\Omega + \frac{R_c}{\sqrt{\omega}} + \dots \quad (5.15)$$

ここで第1項はインダクタンス、第2項は resistive-wall インピーダンスと呼ばれ、ビームパイプが電導率有限の物質でできている時に生じるインピーダンス、第3項は純粋な抵抗、そして最後の項は加速空洞の全インピーダンスの高周波成分である。第1項で L が負の時、加速器ではキャパシタンスと呼んでいる（本当のキャパシタ

ンスは $i/(\omega C)$ の周波数依存性を持つはずであるが)。もう一つ重要なインピーダンスにローレンツ型インピーダンスがある。第3章の並列共振回路の講義で学習した様に、加速空洞のインピーダンスはこの形で書ける：

$$Z_L(\omega) = \frac{R_L}{1 + iQ\left(\frac{\omega_R}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_R}\right)} \quad (5.16)$$

$$Z_T(\omega) = \frac{R_T \frac{\omega_R}{\omega}}{1 + iQ\left(\frac{\omega_R}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_R}\right)} \quad (5.17)$$

ここで R_L と R_T は縦方向と横方向のカップリングインピーダンス、 Q はQ値で ω_R は共振周波数である。

これら代表的なインピーダンスに対応するウェイクポテンシャルは、式 (5.6) と (5.8) の逆変換をすれば求まる。ここではインダクタンス、純粋な抵抗とローレンツ型インピーダンスのウェイクポテンシャルを列記するに留めよう：

1) インダクタンス：

$$W_{L0}(s) = Lc \frac{d}{ds} \delta(s/c) \quad (5.18)$$

2) 純粋な抵抗

$$W_{L0}(s) = R\delta(s/c) \quad (5.19)$$

3) ローレンツ型(共振空洞)インピーダンス

$$W_{L0} = \begin{cases} 0 & (s < 0) \\ \alpha R_L & (s = 0) \\ 2\alpha R_L e^{-\alpha \frac{s}{c}} \left[\cos \frac{\omega' s}{c} - \frac{\alpha}{\omega'} \sin \frac{\omega' s}{c} \right] & (s > 0) \end{cases} \quad (5.20)$$

$$W_{T1} = \begin{cases} 0 & (s \leq 0) \\ \frac{R_T \omega_R^2}{Q \omega'} e^{-\alpha \frac{s}{c}} \sin \frac{\omega' s}{c} & (s > 0) \end{cases} \quad (5.21)$$

ここで、

$$\alpha = \omega_R / (2Q) \quad (5.22)$$

$$\omega' = \sqrt{\omega_R^2 - \alpha^2} \quad (5.23)$$

である。

以上の様な形式的な説明では、インピーダンスの種類とその名前はわかっていても、実際にどういった構造体がどういうインピーダンスを作るかはよくわからない。そこでいくつかの重要なインピーダンスを簡単に求めてみよう。

5.4. インダクタンス

まずインダクタンスの説明から始めよう。ビームパイプ上に図19で示した様な小さな空洞のような構造体があり、このビームパイプの中心軸上をビームが通過するとする。

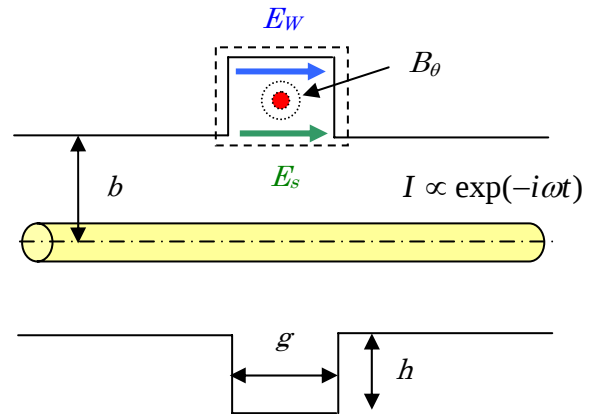


Fig. 19 小さな空洞の作るインダクタンス。

ビームと一緒に走る電磁場の中で、電場はビームパイプの近傍では殆どゼロであるから、空洞の

中では磁場だけを考えればよい。今知りたいのはギャップ間に立つ電場 E_s である。そこで点線で示した積分路を考える。この積分路にそって電場の積分を行うと、それは空洞内の磁場の時間変化の反対符号に等しい（ファラデーの法則）：

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.24)$$

ビームパイプが完全導体で出来ているとすると ($E_w = 0$)、左辺はギャップ間電圧そのものである：

$$V = \int_{gap} E_s ds \quad (5.25)$$

さて問題は右辺である。ビーム電流を I とし、 $\exp(-i\omega t)$ の様に時間変化するとする。すると空洞内の磁場は（ギャップの深さはパイプの半径に対し充分小さいとして、磁場が一定と見なせると仮定）

$$B_g = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \quad (5.26)$$

で与えられる。すると式 (5.24) の右辺は

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = i\omega \frac{\mu_0 gh}{2\pi b} I \quad (5.27)$$

となる。ここで μ_0 は真空の透磁率である。式 (5.25)、(5.26)、(5.27) よりギャップ間電圧が求まる：

$$V = i\omega \frac{\mu_0 gh}{2\pi b} I \quad (5.28)$$

インピーダンスの定義よりこの小さな空洞が作るインピーダンスは以下の式で与えられる：

$$Z_L = -i\omega \frac{\mu_0 gh}{2\pi b} = -i\omega \frac{Z_0 gh}{2\pi bc} \quad (5.29)$$

これはインダクタンスである。ここで $Z_0 = c\mu_0$ は真空のインピーダンス ($=120\pi\Omega$) である。円形加速器では後述する様に、ビームは円形加速器の回転周波数の整数倍の周波数でしかインピーダンスを誘起しない。従ってこのインピーダンスを、 $\omega = n\omega_0$ (ω_0 は円形加速器の回転周波数、 n は整数) を使って次の様に書く：

$$\begin{aligned} \frac{Z_L}{n} &= -i\omega_0 \frac{Z_0 gh}{2\pi bc} \\ &= -i\beta \frac{Z_0 gh}{2\pi bR} \end{aligned} \quad (5.30)$$

ここで β は粒子の速度を光速で割った量である。この結果はギャップ間電圧が空洞内に立つ磁場の誘導起電力によることを考えれば（つまりギャップはコイルの役割をする）容易に理解できる。バンチが長い陽子ビームでは殆どの構造体はこの様にインダクタンスに見える。

5.5. Resistive-wall インピーダンス

次にこの空洞の中が電導率が大いなが有限である物質で満たされているとしよう。この場合、電磁場はスキンドープス以上にはこの物質の中に入っていない。ここでスキンドープスは

$$\delta_s = \sqrt{\frac{2\rho_c}{\omega\mu_0}} \quad (5.31)$$

で与えられる ($\rho_c = 1/\sigma_c$ は体積抵抗率、 μ_0 は真空の透磁率)。従って空洞の深さがスキンドープス以上であれば、結果は空洞の深さによらないはずである。そこで、いっそ空洞の深さをスキンドープスにとってしまおう。

$$h = \delta_s \quad (5.32)$$

空洞の中が電導率有限の物質で満たされている効果は、式 (5.24) の左辺 (電場の線積分) に現れる。図 19 で示した積分路のうち、空洞の両端の壁を径方向に走る電場は対称性からゼロである (電場は径方向を向いている)。従って空洞の奥の内壁で進行方向の成分を持つ電場 E_w の寄与だけを考えれば良い。この電場を正確に求めるのは実は簡単でなく、Leontovich 条件と呼ばれる関係が電場 E_w と磁場は H_θ の間にあることを使って求める：

$$E_w = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_c}} H_\theta \quad (5.33)$$

ここで表面インピーダンス

$$\zeta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_c}} \quad (5.34)$$

は複素誘電率

$$\varepsilon_c = \varepsilon_0 + \frac{\sigma_c}{i\omega} \quad (5.35)$$

によって定義されている。ここで $\sigma_c = 1/\rho_c$ は導体の電気伝導度である。電気伝導度が十分大きいと仮定すると ($\sigma_c \gg \varepsilon_0\omega$)、表面インピーダンスは以下の式で近似できる：

$$\zeta \approx \sqrt{\frac{i\omega\mu_0}{\sigma_c}} = \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega\mu_0}{\sigma_c}} \quad (5.36)$$

この式を Leontovich 条件 (5.33) に入れて、磁場を B_θ で表すと、変換の末、

$$E_w = \frac{\omega}{2} \delta_s (1+i) B_g \quad (5.37)$$

が求まる。この電場の寄与を式 (5.24) の左辺に足して前節と同じ様に式を展開すると ($h = \delta_s$ と

設定したことを忘れないで)、ギャップ間電圧が次の様に求まる：

$$\begin{aligned} V &= -\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} - \int E_w ds \\ &= i\omega \frac{\mu_0 g \delta_s}{2\pi b} I - \frac{\omega}{2} \delta_s (1+i) g \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \\ &= -\frac{\omega}{2} (1-i) \frac{Z_0 g \delta_s}{2\pi b c} I \end{aligned} \quad (5.38)$$

インピーダンスは定義から

$$Z_L = \frac{\omega}{2} (1-i) \frac{Z_0 g \delta_s}{2\pi b c} \quad (5.39)$$

となる。前節同様にこのインピーダンスを円形加速器の回転周波数の整数倍の周波数 ($\omega = n\omega_0$) で の形に書き換えると、次のようになる：

$$\frac{Z_L}{n} = Z_0 \beta \cdot \left(\frac{1-i}{2} \right) \frac{\delta_s}{b} \frac{g}{2\pi R}. \quad (5.40)$$

これが縦方向の resistive-wall インピーダンス [9] である。ビームパイプが非完全導体でできているときのインピーダンスを与える。

横方向の resistive-wall インピーダンスは縦方向の resistive-wall インピーダンスから式 (5.14) を使って以下の様に求まる：

$$Z_T = Z_0 (1-i) \frac{g \delta_s}{2\pi b^3} \quad (5.41)$$

$\delta_s \propto 1/\sqrt{\omega}$ の周波数依存性のために、横方向の resistive-wall インピーダンスは低周波で急激に増大する。そのため、大電流陽子加速器では横方向の resistive-wall インピーダンスが最も深刻な横方向インピーダンスになることが多い。

さて、縦方向の resistive-wall インピーダンスの式 (5.39) の物理的意味合いを考えて見よう。第 1 項、インピーダンスの実部は抵抗を表してい

るが、これは次の様にしても求まる。この空洞は図 20 の様な体積抵抗率 ρ_c の円筒のパイプ(半径 b 、厚さ δ_s 、長さ g) と考えてよく、その電気回路的な抵抗値は下の式で与えられる：

$$\text{Re } Z_L = \frac{\rho_c g}{2\pi b \delta_s} \quad (5.42)$$

この中で ρ_c / δ_s は次の様に変換できる：

$$\begin{aligned} \frac{\rho_c}{\delta_s} &= \frac{\rho_c}{\sqrt{\frac{\rho_c}{\omega\mu_0}}} = \frac{\omega\mu_0}{2} \sqrt{\frac{2\rho_c}{\omega\mu_0}} \\ &= \frac{\omega\mu_0}{2} \delta_s = \frac{\omega}{2} \frac{Z_0}{c} \delta_s \end{aligned} \quad (5.43)$$

従って、式 (5.42) は以下の様に書き換えることができる：

$$\text{Re } Z_L = \frac{\omega}{2} \frac{Z_0 g \delta_s}{2\pi b c} \quad (5.44)$$

これは式 (5.39) の第 1 項と同じである。つまり、式 (5.39) の第 1 項はこの物質の抵抗そのものである。次に式 (5.39) 第 2 項を見てみよう。この項はインダクタンスを与えている。この項を導出するために図 20 の円筒形パイプの両端に内径 b の完全導体のビームパイプに繋がっていると考えよう。また円筒形パイプの外側は完全導体で囲まれているとする（電磁場はスキンドープス以上に入らないので外側の完全導体の効果はない）。その断面の様子を図 21 に示した。すると非完全導体の円筒形パイプは一種の空洞を構成する。磁場はこの空洞内部で指数関数的に減衰するから、空洞の外半径での磁場をゼロと近似すると、実効的な磁場は内部が真空の時の磁場 (5.26) の約半分ぐらいになる：

$$B_\phi \approx \frac{1}{2} \times \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \quad (5.45)$$

後は前節のインダクタンス計算の手順通りに式を展開すればよく、結局インピーダンスの虚部は式 (5.27) で $h = \delta_s$ と置き、全体を 2 で割った量で与えられる：

$$\text{Im } Z_L = -i \frac{\omega}{2} \frac{Z_0 g \delta_s}{2\pi b c} \quad (5.46)$$

実部 (5.44) と虚部 (5.46) を合わせると式 (5.39) になる。

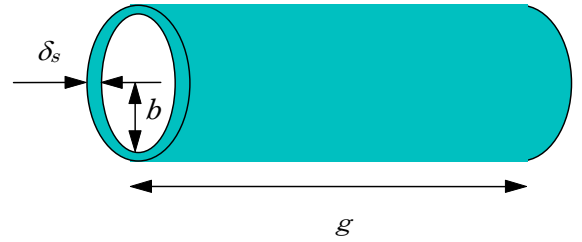


Fig. 20 Resistive-wall インピーダンス計算のために想定する円筒形パイプ。

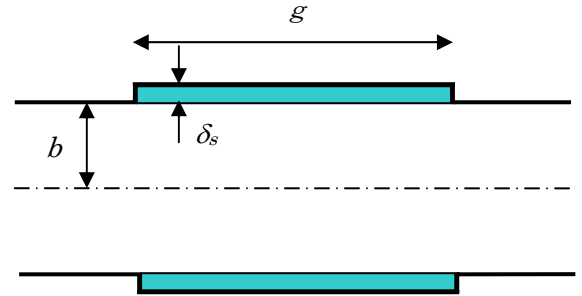


Fig. 21 非完全導体の円筒形パイプが構成する空洞。

5.6. 縦方向スペースチャージインピーダンス

最後に縦方向のスペースチャージ（これを空間電荷とも呼ぶ）インピーダンスを求めよう [10]。第 2 章で学習した様に、ビーム内の粒子は他の粒子からクーロン反発力を受ける。縦方向（進行方向）には、前方の粒子はバンチの中心から前方に押し出される様な力を受け、後方の粒子は後方に押し戻される。この力はインダクタンスの効果と逆の方向である。求め方はインダクタンスの場合と似ている。ビームパイプは完全導体で出来ていると

して、その半径を b とする。積分路は図 2.2 のようにビームの中心軸に沿って走るものを考える。ビームパイプ表面上の接線方向電場 E_w は境界条件よりゼロである。インダクタンスの場合との違いは積分路がビームの内部まで入っているので、ビームが在る時のビームパイプ内の電磁場をちゃんと求めておく必要があることである。また電場の径方向成分も自由空間上なのでゼロではなく、結果に大きく寄与する。第 2 章で述べた様に、結果はビームの横方向分布に依存する。簡単のため、第 2 章と同様にビームは円筒形をしていて、粒子は横方向に一様に分布していると仮定しよう。後で参考のためパラボラ分布の時の結果も記す。

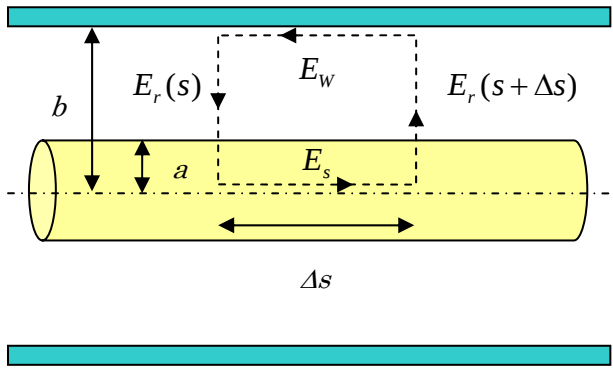


Fig. 2.2 縦方向スเปージチャージ（空間電荷）インピーダンス計算のための積分路の取り方。

さて、円筒形ビームの半径を a とし、ビームの進行方向線密度を λ とした時に、横方向の電磁場は

$$E_r = \begin{cases} \frac{e\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} & (r \geq a) \\ \frac{e\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{r}{a^2} & (r < a) \end{cases} \quad (5.47)$$

$$H_\phi = \begin{cases} \frac{e\lambda\beta c}{2\pi} \frac{1}{r} & (r \geq a) \\ \frac{e\lambda\beta c}{2\pi} \frac{r}{a^2} & (r < a) \end{cases} \quad (5.48)$$

で与えられる。ここで、 ϵ_0 は真空の誘電率を、 βc は粒子の速度を表す。インダクタンスの場合と同様に図 2.2 で示された積分路にそって電場の積分を行うと、それは空洞内の磁場の時間変化の反対符号に等しい（ファラデーの法則）：

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.49)$$

まずこの式の左辺から片付けよう。ビームパイプが完全導体で出来ているとすると $E_w = 0$ である。位置 $s + \Delta s$ と s での電場の径方向の積分を式 (5.47) を使って実行すると、式 (5.49) の左辺は以下のようになる：

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{E} d\mathbf{l} &= E_s \Delta s + \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(1 + 2\ln \frac{b}{a}\right) (\lambda(s + \Delta s) - \lambda(s)) \\ &= E_s \Delta s + \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(1 + 2\ln \frac{b}{a}\right) \frac{\partial \lambda}{\partial s} \Delta s \end{aligned} \quad (5.50)$$

式 (5.49) の右辺も同様に計算でき、

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\mu_0 e \beta c}{4\pi} \left(1 + 2\ln \frac{b}{a}\right) \Delta s \frac{\partial \lambda}{\partial t} \quad (5.51)$$

となる。ここで、式 (5.50) と (5.51) を式 (5.49) に挿入し、関係式

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = -\beta c \frac{\partial \lambda}{\partial s} \quad (5.52)$$

を使って全体を書き改めると以下の式を得る：

$$\begin{aligned} E_s &= -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} (1 - \beta^2) \cdot \left(1 + 2\ln \frac{b}{a}\right) \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial s} \\ &= -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 \gamma^2} \cdot \left(1 + 2\ln \frac{b}{a}\right) \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial s} \\ &= -\frac{e Z_0 c}{4\pi \gamma^2} \cdot \left(1 + 2\ln \frac{b}{a}\right) \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial s} \end{aligned} \quad (5.53)$$

ここで

$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \quad (5.54)$$

と

$$Z_0 c = \frac{1}{\epsilon_0} \quad (5.55)$$

の関係式を使った。加速器リング一周に渡る電圧は式 (5.53) の両辺に $2\pi R$ をかけることで得られる。ビーム電流 I は

$$I = e\beta c\lambda \quad (5.56)$$

で与えられるので、更にジオメトリカルファクター

$$g_0 = 1 + 2 \ln \frac{b}{a} \quad (5.57)$$

を導入して式(5.53)を書き改めると、

$$V = E_s \cdot 2\pi R = -\frac{\partial I}{\partial s} Z_0 R \frac{g_0}{2\beta\gamma^2} \quad (5.58)$$

となる。電流 I の位置 s 依存性を

$$I = I_0 + I_1 \exp i\left(\frac{n}{R}s - \omega t\right) \quad (5.59)$$

として、式 (5.58) に入れ整理すると、以下の式を得る：

$$V = -in \cdot Z_0 \frac{g_0}{2\beta\gamma^2}. \quad (5.60)$$

従って、縦方向のスピーチャージインピーダンスは定義から

$$\frac{Z_L}{n} = i \frac{Z_0 g_0}{2\beta\gamma^2} \quad (5.61)$$

となる。

ジオメトリカルファクターはビームの横方向の分布関数によって変わる。以下の関数で与えられるパラボラビームの場合、

$$\rho(r) = \frac{N_p}{\pi^2 a^2 R} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \quad (5.62)$$

ジオメトリカルファクターは

$$g_0 = 1.5 + 2 \ln \frac{b}{a} \quad (5.63)$$

となる。

式 (5.61) をよく見ると縦方向のスピーチャージインピーダンスはインダクタンスと逆の符号を持っていることに気がつくだろう（つまり、キャパシタンスの様に働く）。また γ^2 ファクターのため高エネルギーでは効かなくなることもある。このファクターは電場と磁場の寄与が高エネルギーでは打ち消し合うために起こる（電場は押し出そうとし、磁場は押し戻そうとする）。

横方向のスピーチャージインピーダンスは結果だけを書くに留める：

$$Z_T = i \frac{Z_0 R}{\beta^2 \gamma^2} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \quad (5.64)$$

5.7. 穴やスロットのインピーダンス

インピーダンスの最後の例として、穴やスロットのインピーダンスを学習しよう。加速器のビームパイプには真空を引くための穴や、フィンガー形式のベローなど、さまざまな理由でさまざまな形状の穴があいている。これらは殆ど小さなインダクタンスを作るが、穴の数が膨大になり、総量ではその効果が無視できなくなることがある。穴の

インピーダンスは、加速器では教科書にもあまり記述のない、一見馴染みのない分野に見えるが、ジャクソンの教科書やベーテの論文にも載っている電磁気学ではきわめて古典的な問題である。穴のインピーダンスの定式化には、以前学習した小さな空洞のインピーダンスなども含めて、ビームパイプ上の摂動(突起物、溝、穴など)が古典電磁気学でどう処理されるかの面白い考察がある。これを学習することは、インピーダンスの生成のメカニズムを理解する上で重要である。

5.7.1. 小さな空洞の作る電磁気ダイポール

まず、小さな空洞が作るインダクタンスを別の観点から考え直そう[11]。図19の様な小さな空洞を考える。ビーム電流はこの空洞の中に

$$B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \quad (5.65)$$

で与えられる磁場を作り、この磁場は空洞の中をトロイダルのように回転する磁束を作る：

$$\Phi_m = \int_S B(r) dS \quad (5.66)$$

ここで積分は図19で示された様に空洞の断面に渡っての面積分である。空洞が十分小さければ磁束は

$$\Phi_m \approx B_\theta S \quad (5.67)$$

で近似できる。ここで

$$S = gh \quad (5.68)$$

はこの空洞の断面の面積である。ファラデーの法則から、この磁束の時間変化は電磁誘導によって起電力を作る：

$$V = i\omega\Phi_m. \quad (5.69)$$

一方、磁束 Φ_{m0} がある時の磁極の大きさは Φ_{m0} / μ_0 であるから、空洞一周の磁気ダイポールモーメント M は

$$M = \frac{2\pi b \Phi_m}{\mu_0} \quad (5.70)$$

となる(図23参照)。更に単位長さ当りの磁気ダイポールモーメントは

$$m = \frac{M}{2\pi b} = \frac{\Phi_m}{\mu_0} \quad (5.71)$$

で与えられる。つまり、空洞の近くに磁場 H_θ があると式(5.71)で与えられる磁気分極が起きるわけである。そこで磁気分極率を以下の様に定義すると、

$$m = \alpha_m H_\theta(b), \quad (5.72)$$

磁気分極率は

$$\alpha_m = \frac{\Phi_m}{(\mu_0 H_\theta(b))} \quad (5.73)$$

で求められる。小さな空洞の場合、これは面積 S と一致する：

$$\alpha_m = S = gh. \quad (5.74)$$

この磁気分極が作る縦方向インピーダンスは

$$Z_{L(m)} = -\frac{V}{I} = -i\omega \frac{Z_0 \alpha_m}{2\pi b c} \quad (5.75)$$

で与えられる。結局この式は以前求めた式(5.29)と同じであるが、考え方が微妙に違う。以前は空洞内にビーム電流が作った磁場が進入し、その磁場の時間的変化が電磁誘導によって空洞のギャップ間に起電力を作り、それがインピーダンスを

作ると考えた。今回は空洞の近傍に磁場をかけたときに、その磁場が空洞内に磁気分極を引き起こし、その磁気分極場の中を試験粒子が走るときに力を受けて、それがインピーダンスになると考えている。この方法の場合、ビームパイプの形状に摂動がある時にどういう磁気分極が起きるかが分かればインピーダンスは計算できる。磁気分極率 α_m を摂動法を使って求められる場合はこの方法が適している。

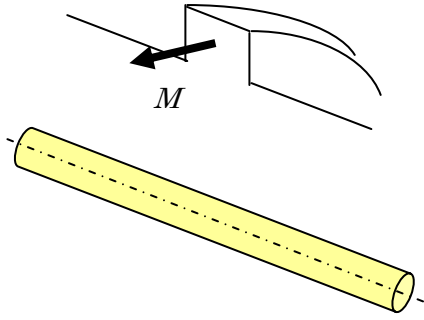


Fig. 23 空洞一周の磁気モーメント M 。

以上に述べたトロイダル中の磁場が作る磁気ダイポールモーメントの他に、ビームが作る電場(或は電気ポテンシャル)がビームパイプ上の摂動(小さな空洞)によって乱されることによって出来る電気ダイポールモーメントもある。磁気モーメントの場合は磁場の時間的変化が電磁誘導によって起電力を生じ、それがビームに力を及ぼしたが、電場の場合は時間的変化は関係ないので、電磁場の時間的変動を無視する。そうすると電場はスカラーポテンシャル $\phi(z)$ によって表現でき、その z -方向の微分が電場の z -方向成分を与える：

$$E_z = -\frac{\partial \phi(z)}{\partial z}. \quad (5.76)$$

この E_z が作るインピーダンスを計算しよう。その前に式 (5.2) と (5.3)、及び (5.4) を合体させて、 E_z から直接インピーダンスを計算する式を作ろう。ビーム電流が

$$I(z, t) = I_0 \exp(-i\omega t) \quad (5.77)$$

の様に時間的に変化をしていると仮定すると、全ての電磁場もこれに従う。そこで E_z も $\exp(-i\omega t)$ の様に時間的変化をするとして、これを式(5.2)の中の E_z に応用し、式 (5.3) と (5.4) を使うと、縦方向インピーダンスは以下の式で与えられる：

$$\begin{aligned} Z_{L(e)}(\omega) &= -\frac{V(\omega)}{I_0} \\ &= -\frac{1}{I_0} \int_{-\infty}^{\infty} dz E_z(z, r) \exp(-i\frac{\omega}{c}z) \end{aligned} \quad (5.78)$$

式 (5.76) を上の式に入れて、偏積分を行うと

$$\begin{aligned} Z_{L(e)}(\omega) &= i \frac{\omega}{I_0 c} \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp(-i\frac{\omega}{c}z) (\phi(z) - \phi_{\infty}) \\ &\approx i \frac{\omega}{I_0 c} \int_{-\infty}^{\infty} dz (\phi(z) - \phi_{\infty}) \end{aligned} \quad (5.79)$$

ここでスカラーポテンシャル $\phi(z)$ は原点近傍 ($z=0$) に局所的に存在し、考えている波長がギャップの距離よりずっと長いと仮定し、 $\exp(-i\omega z/c) \approx 1$ の近似を行った。スカラーポテンシャル $\phi(z)$ は径方向の位置によるが、積分は $r=b$ のパイプの半径上で行うとしよう。そうすると積分の寄与は空洞の近傍だけとなる。

さて、ビームが作る電場は径方向を向いているが、空洞近傍では電場はどうなるか。図 24 はその様子を示している(図 26 の穴の場合も参照して下さい)。

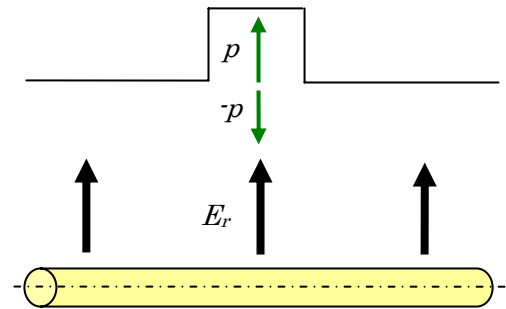


Fig. 24 空洞に誘起される電気ダイポールモーメント。

この電場の様子は場所 $z=0$ 、 $r=b$ のところに2つの電気モーメントが径方向を逆に向いて存在しているのと同様である。するとスカラーポテンシャル $\phi(z)$ は

$$\phi(z) = \phi_{\infty} + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{px}{x^2 + z^2} \quad (5.80)$$

で与えられる。ここで

$$x = r - b \quad (5.81)$$

であり、 p は空洞の周方向単位長さあたりの電気ダイポールである。この電気ダイポールを求めることは簡単ではないので、ここでは求めない。以後は分かっているとして話を進める。式 (5.80) を式 (5.79) に挿入して積分を実行すると、 $x < 0$ の領域で

$$Z_{L(e)}(\omega) = -i \frac{\omega}{I_0 c} \frac{p}{2\epsilon_0} \quad (5.82)$$

となる。ここで電気ダイポールモーメント p を電気分極率 α_e を使って表現しよう：

$$p = \alpha_e \epsilon_0 E_r \quad (5.83)$$

ここで E_r は $r=b$ での径方向電場であり、

$$E_r = \frac{I_0 / c}{2\pi\epsilon_0 b} \quad (5.84)$$

で与えられる。電気分極率 α_e は磁気分極率 α_m の類推から面積の次元を持っていると思われる。式 (5.83) と式 (5.84) をインピーダンスの式 (5.82) に入れると最終的に以下の式に到達する：

$$Z_{L(e)}(\omega) = -i\omega \frac{Z_0 \alpha_e}{4\pi b c} \quad (5.85)$$

この電気ダイポールは空洞の入り口から外では径方向の正の方向を向いており空洞の入り口から内では負の方向を向いている（つまり $\alpha_e < 0$ ）。従ってこの電気ダイポールの効果は磁場とは逆に負のインダクタンスを作る。実は、以前小さな空洞の作るインピーダンスを導いた時、この電気ダイポールの寄与は考えていなかった。因みに $g < h$ の時の電気分極率 α_e は

$$\alpha_e = -\frac{g^2}{\pi} \quad (5.86)$$

で与えられる。電気ダイポールの寄与は磁気ダイポールの寄与よりファクター $2\pi h / g$ だけ小さい。

5.7.2. 穴やスロットのインピーダンス

以上のように、ビームパイプ上に小さな空洞などの摂動がある時、それらが作る磁気ダイポールモーメントや電気ダイポールモーメントを計算することでインピーダンスを計算できることが分かった。ビームパイプ上に穴やスロットがある場合も同様にそれらが作る電気磁気ダイポールモーメントを計算すればインピーダンスを計算できる。

ビームパイプ上に一つの穴、或はスロットがあると仮定しよう。小さな空洞のインピーダンスの計算ではダイポールモーメントはパイプの周上に一様に存在したが、今回はパイプの周上に一つしかないので、そのインピーダンスへの効果は $2\pi b$ だけ小さくなる。一般に穴やスロットが作る縦方向インピーダンスは以下の式で与えられる [12]：

$$Z_L(\omega) = -iZ_0 \frac{\omega}{c} \frac{(\alpha_m + \alpha_e)}{4\pi^2 b^2} \quad (5.87)$$

ここで α_m と α_e は穴やスロットの磁気分極率と電気分極率である。穴が作る磁気、電気ダイポールモーメントの様子を図 25、26 に示した。

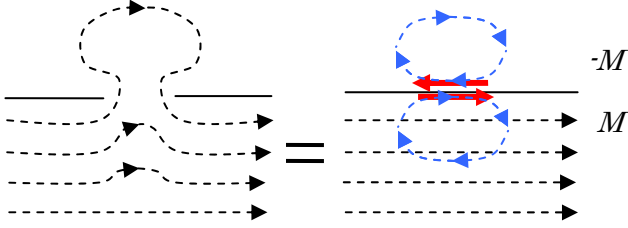


Fig. 25 穴による磁気ダイポールモーメント。

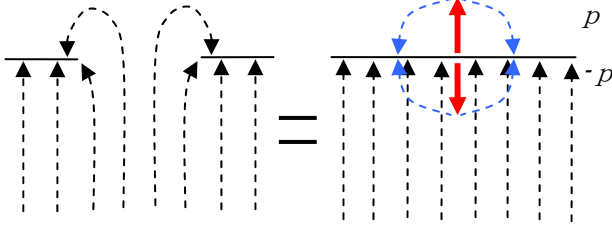


Fig. 26 穴による電気ダイポールモーメント。

以下に幾つかのケースについて磁気分極率と電気分極率の例を示す：

1. 半径 a の丸い穴

$$\begin{aligned}\alpha_m &= \frac{4}{3}a^3, \\ \alpha_e &= -\frac{2}{3}a^3\end{aligned}\quad (5.88)$$

2. ビームの進行方向に長い幅 w 、長さ l の長方形スロット ($x = w/l \leq 1$)

$$\begin{aligned}\alpha_m &= \frac{\pi}{16}w^2l(1 + 0.3577x - 0.0356x^2) \\ \alpha_e &= -\frac{\pi}{16}w^2l(1 - 0.5663x + 0.1398x^2)\end{aligned}\quad (5.89)$$

3. ビームの進行方向に長い幅 w 、長さ l のレーストラック形スロット ($x = w/l \leq 1$)

$$\begin{aligned}\alpha_m &= \frac{\pi}{16}w^2l(1 - 0.0857x - 0.0654x^2) \\ \alpha_e &= -\frac{\pi}{16}w^2l(1 - 0.7650x + 0.1894x^2)\end{aligned}\quad (5.90)$$

4. ビームの進行方向と直角方向に長い幅 w 、長さ l の長方形スロット ($0.1 \leq x = w/l \leq 1$)

$$\alpha_m = \frac{0.132}{\ln(1 + 0.66/x)}l^3. \quad (5.91)$$

5. ビームの進行方向と直角方向に長い幅 w 、長さ l のレーストラック形スロット ($0.1 \leq x = w/l \leq 1$)

$$\alpha_m = \frac{0.187 + 0.052x(1-x)}{\ln(1 + 2.12/x)}l^3. \quad (5.92)$$

ビームの進行方向と直角方向に長いスロットの場合、電気分極率は磁気分極率に比べて十分無視できるくらい小さい。

5.8. ロスファクター

最後にロスファクターについて触れておこう。ビームがインピーダンスを持つ構造体を通過するとき、幾ばくかのエネルギーを損失する。損失の量はビームの進行方向の形状に依存する。ビームの総電荷を q としたとき、構造体を一回通過した時のエネルギー損失は以下の式で与えられる：

$$\Delta E = -q^2 k_L \quad (5.93)$$

ここで量 k_L はロスファクターと呼ばれ、

$$k_L = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \rho(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} dt \rho(\tau - t) W_{L0}(\beta ct) \quad (5.94)$$

で定義される。これは進行方向に線密度 $\rho(\tau)$ を持ったビームがウェイクポテンシャルを作った時、そのウェイクポテンシャルをビーム自身が感じてビームがエネルギーを損失する割合を示している。線密度 $\rho(\tau)$ のフーリエ変換 $\hat{\rho}(\omega)$ を使うと、ロスファクターはインピーダンスを使っても表現できる：

$$k_L(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \operatorname{Re} Z_L(\omega) |\hat{\rho}(\omega, \sigma)|^2 \quad (5.95)$$

ここで、 σ は時間で測ったバンチ長である（バンチ長が σ_s の時、 $\sigma = \sigma_s / \beta c$ ）。

ビームの進行方向線密度がガウシアン形状をしている場合、ロスファクターは

$$k_L(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \operatorname{Re} Z_L(\omega) \exp(-\omega^2 \sigma^2) \quad (5.96)$$

で与えられる。ロスファクターはプログラム ABCI などを使って任意の軸対象構造体の場合に計算できる。一旦ワンパスのロスファクターが計算できれば、リングの様に、同じ構造体を周回の度に通過する場合の単位時間あたりのエネルギー損失、つまりパワー損失を以下の式で計算できる：

$$P_{\text{loss}} = 1.6 \times 10^{-19} \cdot N_p \cdot I_b \cdot k_L \quad (5.97)$$

ここで N_p は一バンチ中の陽子の数であり、 I_b は総ビーム電流（多バンチの場合はバンチ電流の総和）である。

6. ビーム不安定性

6.1. 序

前章で、ビームがその周りの構造体と電磁的に相互作用した結果、ウェイク場という電磁場が出来きるが、そのウェイク場がビーム又はその廻りの粒子に及ぼす力を、ウェイクポテンシャルやインピーダンスの概念を導入して定式化できることを学んだ。この章では今度はビームの運動がそれによってどう変化するかを考えてみよう。陽子リングにおいて問題になるビーム不安定性には主に次の様な種類がある：

1. マイクロウェーブ不安定性 (縦方向のみ)
2. ネガティブマス不安定性 (縦方向のみ)
3. ロビンソン不安定性 (縦、横方向両方)
4. 結合バンチ不安定性 (縦、横方向両方)
5. ヘッドテイル不安定性 (縦、横方向が結合)
6. 横方向モード結合不安定性 (横方向のみ)
7. 電子雲不安定性 (横方向のみ)

この中で、最初の2つの不安定性は、一般にコースティングビームと呼ばれる、バンチしていない進行方向に均一なビームにおいて解析が行われる。しかし、その解析結果はバンチしたビームの場合にも比較的良い精度で応用できることが実験的に解っている。ロビンソン不安定性[13]はバンチ全体がまるで1つの粒子の様に振る舞うので、バンチを1つのマクロ粒子と見なして解析を定式化することが多い。また複数バンチ間で起こる結合バンチ不安定性はロビンソン不安定性の変形であり、解析的には同時に扱える。ヘッドテイル不安定性[14]はバンチ内部の運動が問題になるので、バンチを複数(2個以上)の粒子の集合体と見なすか、またはある分布を持った関数として解析する必要がある。横方向モード結合不安定性に対しても同様である。インピーダンスの章で覚えた知識が未だフレッシュな内に、それを駆使することになるロビンソン不安定性の説明からこの章を始めよう。

6.2. ロビンソン不安定性

ロビンソン不安定性[13]は最も基本的なビーム不安定性の一つである。バンチがコヒーレントに全体として縦方向や横方向に振動したとき、その運動がインピーダンスとの相互作用によって不安定に増大する現象を一般にロビンソン不安定性と呼ぶ。

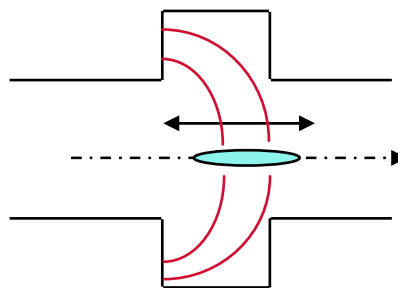


Fig. 27 縦方向ロビンソン不安定性。

最初に簡単化のため、バンチ内部の運動を考えず、バンチ全体を点電荷と近似し、全体が一緒に動くと仮定して解析を始めるが、後で有限のバンチ長の時の補正項を考える。ここでは Chao[4]の講義ノートの様にウェイクポテンシャルを導入せずインピーダンスの定義に従って式を展開する。

6.2.1. 点電荷近似

バンチが縦方向に振動しながらリングの中を回っているとしよう。バンチの縦方向振動は

$$\tau = \hat{\tau} \exp(-i\nu \frac{s}{R}) \quad (6.1)$$

の様に変化すると仮定する。ここで、 ν はビームのコヒーレントなシンクロトロン振動数であり、ビームがリングを一周する間に何回縦方向にコヒーレント振動するかを表す。さて、インピーダンスはリング上のある一点に局在すると仮定しよう(この点を原点 $s=0$ とする)。インピーダンスの局在する点でビーム電流を観測すると、シ

グナルは図 2 8 の様にある一定の周期のまわりを振動しながら現れる。これを式で表すと次の様になる：

$$I(t) = Ne \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0 - \tau + \tau_k). \quad (6.2)$$

ここで N はバンチ内の電荷の総量、 δ はデルタ関数、 T_0 は周回周期であり、 τ_k は k 番目の周回でのバンチの到着時間の進みである。

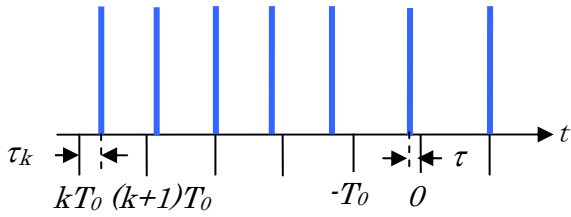


Fig. 28 インピーダンスが局在するリング上の観測点（原点）でみたビーム電流シグナル。

縦方向振動の振幅が小さいとすると、ビーム電流のシグナルは以下の様に近似できる：

$$\begin{aligned} I(t) &= Ne \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0 - \tau + \tau_k) \\ &\cong Ne \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) - (\tau - \tau_k) \frac{d}{dt} \delta(t - kT_0) \end{aligned} \quad (6.3)$$

ここで第 1 項はいわゆるビームローディングの項でバンチの縦方向振動とは関係なく存在し、バンチのエネルギーロスを表す。この項は加速空洞の位相を変えることで相殺できるので以下無視する。第 2 項のフーリエ変換は以下の式で与えられる：

$$\begin{aligned} I(\omega) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \cdot Ne \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\tau - \tau_k) \frac{d}{dt} \delta(t - kT_0) \\ &\quad \times \exp(i\omega t) \\ &= i \frac{Ne}{2\pi} \hat{\tau} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega [\exp(ikT_0 \omega) \\ &\quad - \exp(ikT_0 (\omega - \nu \omega_0))] \\ &= i \frac{Ne}{T_0} \hat{\tau} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \omega [\delta(\omega - p\omega_0) \\ &\quad - \delta(\omega - p\omega_0 - \nu \omega_0)] \end{aligned} \quad (6.4)$$

ここで Poisson の和公式

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-ikx) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(x + 2\pi p) \quad (6.5)$$

を第 2 式から第 3 式への変換に使った[15]。従って、バンチが感じる電圧のフーリエ変換はインピーダンスの定義より

$$\begin{aligned} V(\omega) &= -i \frac{Ne}{T_0} \hat{\tau} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \omega Z_L(\omega) [\delta(\omega - p\omega_0) \\ &\quad - \delta(\omega - p\omega_0 - \nu \omega_0)] \end{aligned} \quad (6.6)$$

で与えられる。

一方、バンチの運動方程式は以下の式で書ける。

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{ds} &= -\frac{\eta}{\beta c} \delta \\ \frac{d\delta}{ds} &= \frac{\beta c}{\eta} \left(\frac{\nu_{s0}}{R} \right)^2 \tau \end{aligned} \quad (6.7)$$

ここで δ は基準粒子の運動量から測った運動量の相対的ずれを表し、 η はスリページファクター、 ν_{s0} は個々の粒子のシンクロトン振動数である。この 2 つの方程式を τ に関する式に一本化

し、さらにバンチが感じる電圧の項を加えてやると

$$\frac{d^2\tau}{ds^2} + \left(\frac{v_{s0}}{R}\right)^2 \tau = -\frac{\eta}{2\pi R\beta c} \left(\frac{\Delta p}{p}\right)_v = -\frac{\eta e V(s)}{2\pi R\beta^3 c E_0} \quad (6.8)$$

となる。左辺に式 (6.1) を、右辺に式 (6.6) を入れた後に $s=0$ ととると、

$$\begin{aligned} & \left(-\left(\frac{v}{R}\right)^2 + \left(\frac{v_{s0}}{R}\right)^2\right) = i \frac{Ne^2\eta}{2\pi R\beta^3 c T_0 E_0} \\ & \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} [p\omega_0 Z_L(p\omega_0) \\ & - (p\omega_0 + v\omega_0) Z_L(p\omega_0 + v\omega_0)] \end{aligned} \quad (6.9)$$

となる。ここで $v \approx v_{s0}$ と近似すると

$$\begin{aligned} v - v_{s0} & \cong -i \frac{Ne^2\eta}{8\pi^2 v_{s0} \beta^2 E_0} \sum_{p=-\infty}^{\infty} [p\omega_0 Z_L(p\omega_0) \\ & - (p\omega_0 + v_{s0}\omega_0) Z_L(p\omega_0 + v_{s0}\omega_0)] \end{aligned} \quad (6.10)$$

となる。ここで

$$R = \frac{\beta c T_0}{2\pi} \quad (6.11)$$

を使った。縦方向振動の振幅の増加率は $(v - v_{s0})\omega_0$ の虚部で与えられる：

$$\begin{aligned} \tau^{-1} & \cong \frac{Ne^2\eta}{4\pi v_{s0} \beta^2 T_0 E_0} \sum_{p=-\infty}^{\infty} (p\omega_0 + v_{s0}\omega_0) \\ & \times \text{Re} Z_L(p\omega_0 + v_{s0}\omega_0) \\ & = \frac{I_b \eta}{4\pi v_{s0} \beta^2 E_0 / e} \sum_{p=-\infty}^{\infty} (p\omega_0 + v_{s0}\omega_0) \\ & \times \text{Re} Z_L(p\omega_0 + v_{s0}\omega_0) \end{aligned} \quad (6.12)$$

ここで縦方向インピーダンスの実部が $\pm\omega$ に対して対称であることを使った。式 (6.12) において、 $I_b (= Ne/T_0)$ は平均バンチ電流である。

横方向のロビンソン不安定性も同様に導くことができる。やはりビームは全体が同位相で横方向に振動していると仮定する。インピーダンスの局在する原点での横方向ビームシグナルは

$$I_T(t) = Ne \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k \cdot \delta(t - kT_0) \quad (6.13)$$

の様に見える。ここでバンチの横方向振動は

$$y = \hat{y} \exp(-i v \frac{s}{R}) \quad (6.14)$$

の様に変化すると仮定する。量 y_k は k 番目の周回での横方向振動位置である。このビームシグナルのフーリエ変換を実行すると、結局、

$$I_T(\omega) = \frac{Ne}{T_0} \hat{y} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - p\omega_0 - v\omega_0) \quad (6.15)$$

となる。従って、ビームの作る横方向の電圧は

$$V(\omega) = i Z_T(\omega) \cdot I_T(\omega) \quad (6.16)$$

の定義式より

$$V(\omega) = i \frac{Ne}{T_0} \hat{y} \sum_{p=-\infty}^{\infty} Z_T(\omega) \delta(\omega - p\omega_0 - v\omega_0) \quad (6.17)$$

となる。この式をバンチの運動方程式

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + \left(\frac{v_{\beta 0}}{R}\right)^2 = \frac{e V(s)}{2\pi R E_0} \quad (6.18)$$

に挿入し、結果を整理すると、コヒーレントなベータトロン振動数は以下の式で与えられる：

$$\nu - \nu_{\beta 0} \cong -i \frac{I_b R}{4\pi \nu_{\beta 0} E_0 / e} \sum_{p=-\infty}^{\infty} Z_T(p\omega_0 + \nu_{\beta 0} \omega_0) \quad (6.19)$$

増大率に関する公式は以下の様になる：

$$\tau^{-1} \cong -\frac{I_b \beta c}{4\pi \nu_{\beta 0} E_0 / e} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \text{Re } Z_T(p\omega_0 + \nu_{\beta 0} \omega_0) \quad (6.20)$$

ここでもう一度インピーダンスの章で記した次のインピーダンスの性質を思い出そう：

$$\begin{aligned} \text{Re } Z_L(-\omega) \times (-\omega) &= -\text{Re } Z_L(\omega) \\ \text{Re } Z_T(-\omega) &= -\text{Re } Z_T(\omega) \end{aligned} \quad (6.21)$$

式 (6.12) と (6.20) を見るとロビンソン不安定性はインピーダンスが周波数の関数として急激に変化する場合に起こり易いことが解る。例えば、 Q 値の大きい RF 空洞内のモードとか、低周波に向かってインピーダンスが $1/\sqrt{\omega}$ で急速に増大する横方向 resistive-wall インピーダンスなどがロビンソン不安定性の主なインピーダンスソースである。縦方向ロビンソン不安定性の式 (6.12) を RF 空洞内のモードに対して図解したのが図 29 である。ビーム振動の増加率は周波数 $p\omega_0 + \nu_{s0}\omega_0$ と $p\omega_0 - \nu_{s0}\omega_0$ でのインピーダンスの差に比例する。トランジション・エネルギー以下 ($\eta < 0$) の場合は、周波数 $p\omega_0 - \nu_{s0}\omega_0$ でのインピーダンスの方が大きければビーム振動は増大する。このことの物理的意味合いを考えてみよう。以下では簡単のためにトランジション・エネルギー以下 ($\eta < 0$) の場合を想定する。

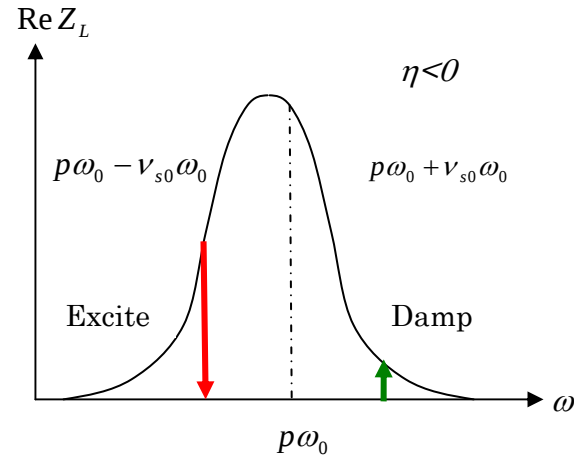


Fig. 29 縦方向ロビンソン不安定性の起こる条件。トランジション・エネルギー以下 ($\eta < 0$) で運転している場合を想定している。

ビーム全体がコヒーレントな振動をしている時に、シンクロトロン位相空間では、ビームはその全体が原点からオフセットを持ちながら右回りに回転している (図 30 参照)。

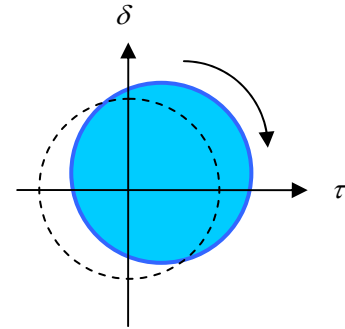


Fig. 30 シンクロトロン位相空間でのビームの運動 (ダイポール振動)。

観測点におけるビームシグナルはバンチ全体が縦方向に振動しているためにビームの到着する周期が変化する。この変化は以下の式で与えられる：

$$\frac{d\tau}{ds} = -\frac{\eta}{\beta c} \delta \quad (6.22)$$

つまり、ビームはシンクロトロン位相空間上で $\delta > 0$ の領域に居るときにリング中を速く廻り、 $\delta < 0$ の領域では遅く廻る（図 3 1 を参照）。ここで、 δ は $\nu_{s0}\omega_0$ の周波数で振動していることと、 τ が増えるということは位置 s に早く到達すると定義したことを思い出そう。その結果、シンクロトロン位相空間上でビームは $\delta > 0$ の領域にいる時は高い周波数（ $p\omega_0 + \nu_{s0}\omega_0$ ）のインピーダンスを、 $\delta < 0$ の領域にいる時は低い周波数（ $p\omega_0 - \nu_{s0}\omega_0$ ）のインピーダンスを感じる。インピーダンスの実部は常に正であるから、ビームは位相空間上で下側（エネルギーを失う方向に）力を受ける。これらの力は $\delta > 0$ の領域ではビームの振動を減衰させ、 $\delta < 0$ の領域では逆に増大させる（図 3 1 を参照）。ビームが位相空間を一周すると、正味にはこれら 2 つの周波数でのインピーダンスの差がビームの受ける運動量変化となり、その向きが振動の安定性を決める。

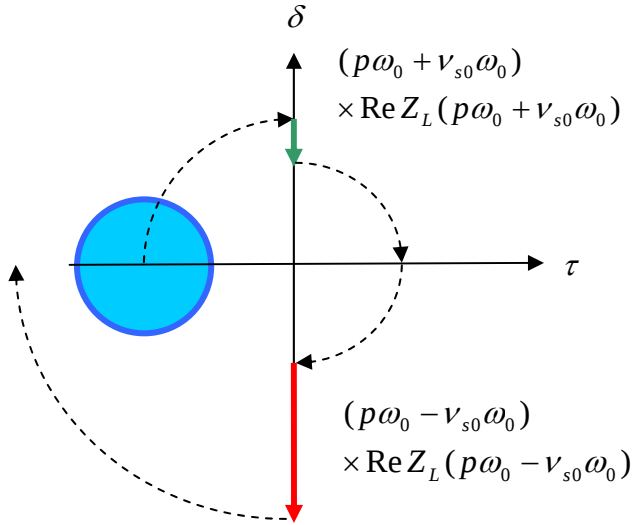


Fig. 31 シンクロトロン位相空間上でビームが受ける力（トランジション・エネルギー以下（ $\eta < 0$ ）で運転している場合を想定）。

トランジション・エネルギー以上（ $\eta > 0$ ）の場合は、ビームはシンクロトロン位相空間上で逆周りをしているので、上記の議論と逆となり、

周波数 $p\omega_0 + \nu_{s0}\omega_0$ でのインピーダンスの方が大きければビーム振動は増大する。

なお、インピーダンスの前に $p\omega_0$ のファクターが掛かっている理由であるが、これは $p\omega_0$ で振動しているインピーダンスのソースから見たビーム振動の振幅は、波長がファクター p だけリングの全周より短いために相対的な振幅幅が大きく見えるためである。式 (6.4) を見ると、周波数が増大するに比例して、ビーム電流のフーリエ変換成分も増大しているのがわかる。

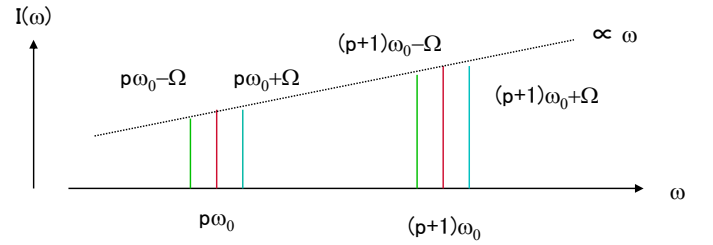


Fig. 32 ビーム電流のフーリエ変換。

6.2.2. 有限のバンチ長の場合

さて、上記の解析ではバンチ全体が点電荷の様に一緒に動くと仮定したが、バンチの長い陽子ビームの場合、これは相当無理な近似である。有限のバンチ長の場合のロビンソン不安定性の解析にはバンチの進行方向分布の仮定がまず必要である。バンチ全体の運動を粒子 1 つの運動方程式 (6.7) や (6.18) で表現することはもうできない。結局、正しい解析には粒子の分布関数に関するブラソフ方程式を解くことになり、解析が複雑になる。読者の便宜とこの講義の自己完結性のために、付録 A に縦方向ロビンソン不安定性の解析方法を示した。簡単化のために、バンチは縦方向の位相空間で円筒形の分布をしていて、この円筒の中で粒子は一様に分布していると仮定した（ウォーターバグモデル）。この時進行方向の粒子分布は以下の式で当てられる：

$$\rho_0(\tau) = 2 \frac{N}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{\tau}{\hat{\tau}} \right)^2} \quad (6.23)$$

ここで $\hat{\tau}$ は時間で測った全バンチ長の半分であり、RMS バンチ長 σ_τ は

$$\sigma_\tau = \frac{\hat{\tau}}{2} \quad (6.24)$$

になる。この時、縦方向コヒーレント振動の振動数は以下の式で与えられる：

$$\begin{aligned} \nu - m\nu_{s0} &\cong i \frac{mI_b T_0 \eta}{8\pi^2 \nu_{s0} \beta^2 E_0 / e} \sum_{p=-\infty}^{\infty} (p\omega_0 + m\nu_{s0}\omega_0) \\ &\times Z_L(p\omega_0 + m\nu_{s0}\omega_0) \cdot \left(\frac{J_m((p\omega_0 + m\nu_{s0}\omega_0)\hat{\tau})}{(p\omega_0 + m\nu_{s0}\omega_0)\hat{\tau}/2} \right)^2 \\ &= i \frac{mI_b T_0 \eta}{2\pi^2 \nu_{s0} \beta^2 \hat{\tau}^2 E_0 / e} \\ &\times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{Z_L(p\omega_0 + m\nu_{s0}\omega_0)}{p\omega_0 + m\nu_{s0}\omega_0} J_m^2((p\omega_0 + m\nu_{s0}\omega_0)\hat{\tau}) \end{aligned} \quad (6.25)$$

ここで m はコヒーレントシンクロトロン振動のモード番号であり、 $m=1$ はダイポールモード、 $m=2$ はクワドロポールモードと呼ばれる。ダイポールモードはビームの形状は変わらないが、ビームの中心が位相空間の原点からオフセットをもち、原点の周りを回っている場合である。クワドロポールモードはビームが少しひしゃげて楕円の様な形になり、その中心は原点に一致したまま、原点の周りを回転している場合である。

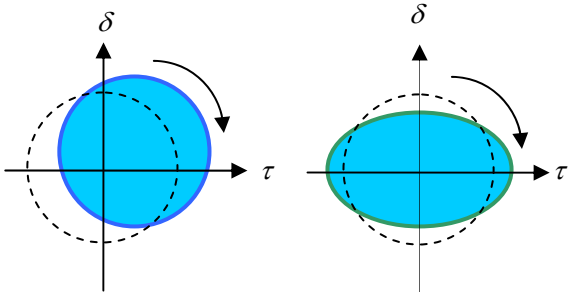


Fig. 33 コヒーレントなシンクロトロン振動。(左) $m=1$ はダイポールモード、(右) $m=2$ はクワドロポールモード。

縦方向の振幅の増大率は

$$\begin{aligned} \tau^{-1} &= \frac{mI_b \eta}{4\pi \nu_{s0} \beta^2 E_0 / e} \sum_{p=-\infty}^{\infty} (p\omega_0 + m\nu_{s0}\omega_0) \\ &\times \text{Re} Z_L(p\omega_0 + m\nu_{s0}\omega_0) \left(\frac{J_m((p\omega_0 + m\nu_{s0}\omega_0)\hat{\tau})}{(p\omega_0 + m\nu_{s0}\omega_0)\hat{\tau}/2} \right)^2 \\ &= \frac{mI_b T_0 \eta}{\pi \nu_{s0} \beta^2 \hat{\tau}^2 E_0 / e} \\ &\times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{Z_L(p\omega_0 + m\nu_{s0}\omega_0)}{p\omega_0 + m\nu_{s0}\omega_0} J_m^2((p\omega_0 + m\nu_{s0}\omega_0)\hat{\tau}) \end{aligned} \quad (6.26)$$

で与えられる。

同様にバンチ長が有限な時の横方向ロビンソン不安定性を考えることができる。しかし、ここではビーム全体は依然同位相で横方向に振動していると仮定しよう（つまり縦方向振動はしていない）。付録 B にヘッドテイル不安定性のブラソフ方程式に基づく定式化を示したが、横方向ロビンソン不安定性の固有解は、ヘッドテイル不安定性の解 (9.34) に於いてシンクロトロンモードとクロマティシティの効果を無視した場合 ($m=0$ 及び $\xi=0$ とする) に得られる。つまり、横方向コヒーレント振動数は以下の式で与えられる：

$$\begin{aligned} \nu - \nu_{\beta 0} &\cong -i \frac{I_b R}{4\pi \nu_{\beta 0} E_0 / e} \sum_{p=-\infty}^{\infty} Z_T(p\omega_0 + \nu_{\beta 0}\omega_0) \\ &\times J_0^2((p\omega_0 + \nu_{\beta 0}\omega_0)\hat{\tau}) \end{aligned} \quad (6.27)$$

振幅の増大率は

$$\begin{aligned} \tau^{-1} &\cong -\frac{I_b \beta c}{4\pi \nu_{\beta 0} E_0 / e} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \text{Re} Z_T(p\omega_0 + \nu_{\beta 0}\omega_0) \\ &\times J_0^2((p\omega_0 + \nu_{\beta 0}\omega_0)\hat{\tau}) \end{aligned} \quad (6.28)$$

で与えられる。以上の結果はバンチ長 $\hat{t}$ をゼロにもっていくと、それぞれ点電荷近似の結果と一致する。

6.3. 結合バンチ不安定性

ロビンソン不安定性は単バンチの時でも起こりうるが、もしリングの中を多数のバンチが周遊していて、しかもインピーダンスのQ値が大きい時（つまり1バンチが誘起したウェイクが次のバンチが到着したときにもまだ充分残っている時）には、各バンチのロビンソン不安定性が結合（同期）してウェイク場の build-up が起こり、新しいタイプのビーム不安定性が起こり得る。これを結合バンチ不安定性と呼ぶ。しかも、後述する様に結合バンチ不安定性の増大率は全バンチの粒子数の総和に比例するので、多バンチ運転の時は一般的に結合バンチ不安定性の方が個々のバンチのロビンソン不安定性よりも深刻になる。

最初に縦方向の結合バンチ不安定性を考える。さて、リング内を M 個のバンチが等間隔で回っているとしよう。それぞれのバンチが単独でロビンソン不安定性を起こしている時には、各バンチの振動の位相の間には何の関係もない。しかし、もしそれらが結合した場合、 M 個の独立の振動パターンが考えられる。バンチに優劣はないから、振動振幅は全バンチ同じである。振動周波数も同じである。従って、振動パターンは各バンチの振動の位相差によって特徴づけられる事になる。それも M 通りあるはずである。さて、ある瞬間にリング一周にわたってバンチ振動のスナップ写真を撮ったとしよう（図34参照）。あるバンチから始めて、それぞれのバンチ振動の位相差を測り、それらを足し上げていくと、もとのバンチに戻ったときは位相差の総和は 2π の整数倍になる筈である。またバンチに優劣はないので、バンチ間振動位相差はどのバンチ間でも等しくなければならない。結局、バンチ間振動位相差は

$$\frac{2\pi}{M} \times \mu \quad (6.29)$$

ただし、 $\mu = 0, 1, 2, \dots, M-1$ で与えられる。

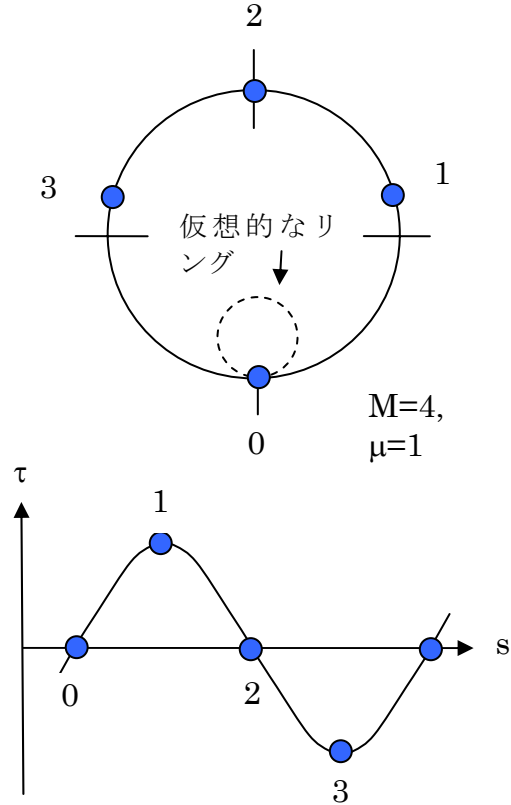


Fig. 34 ある瞬間における各バンチのシンクロトロン振動のスナップ写真 ($M=4$ 、 $\mu=1$)。

多バンチの存在とこのバンチ間振動位相差によって何が変わるのであろうか。それは結局ウェイク場の発生源のところで観測されるビーム電流に違いになって現れる。まず、バンチが一周してくるのを待たなくても T_0/M 時間後には次のバンチがくるので、周期が短くなったように見える。また、バンチ間振動位相差のため次々に来るバンチの振動の位相を観測すると一周で $2\pi\mu$ だけ位相が速く回るように見える。これらの変化はビーム電流のフーリエ変換を与える式 (6.4) において T_0 (ω_0) を T_0/M ($M\omega_0$) に置き換え、 ν を $\nu + \mu$ に変えることで表すことができる。それ以後の式の展開はロビンソン不安定性の時の全く同じにでき、最終的にバンチ長が有限の時の結合バンチ不安定性の増加率は次の式で与えられる：

$$\tau^{-1} = \frac{MI_b \eta}{4\pi \nu_{s0} \beta^2 E_0 / e} m \sum_{p=-\infty}^{\infty} (Mp + \mu + m \nu_{s0}) \omega_0 \times \text{Re } Z_L((Mp + \mu + m \nu_{s0}) \omega_0) \times \left(\frac{J_m((Mp + \mu + m \nu_{s0}) \omega_0) \hat{\tau}}{((Mp + \mu + m \nu_{s0}) \omega_0) \hat{\tau} / 2} \right)^2 \quad (6.30)$$

この式から解る様に増加率はバンチ電流ではなくて全ビーム電流による。

横方向の結合バンチ不安定性も全く同様に導き出すことができる。単バンチの時との違いはビーム電流のフーリエ変換の式 (6.15) に於いて T_0 (ω_0) を T_0 / M ($M\omega_0$) に置き換え、 ν を $\nu + \mu$ に変えればよい。横方向の結合バンチ不安定性の増大率は

$$\tau^{-1} \cong -\frac{MI_b \beta c}{4\pi \nu_{\beta 0} E_0 / e} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \text{Re } Z_T((Mp + \mu + \nu_{\beta 0}) \omega_0) \times J_0^2(((Mp + \mu + \nu_{\beta 0}) \omega_0) \hat{\tau}) \quad (6.31)$$

で与えられる。

6.4. ヘッドテイル不安定性

ロビンソン不安定性の章で横方向のロビンソン不安定性を議論した時に、バンチ全体が同位相で振動すると仮定した。しかし、長い陽子バンチにおいて進行方向の全ての部分が同位相で動かなければならない必要はない。例えば図 3 5 に図解した様に、ある瞬間にバンチの先方（これをヘッドと呼ぶ）は右に振れているが、バンチの後方（これをテイルと呼ぶ）では 180 度位相がずれて左に振れていることもありうる。この時、後方の粒子は前方の粒子が作ったウェイク場を直ぐに感じることができる。一方、前方の粒子は一周回ってこないとバンチの前方と後方の両方が作ったウェイクを感じることはできない。このために、たとえウェイク場の寿命が短くても（つまり、バンチが一周回って来るころにはすでに減衰している場合でも）、後方の粒子は常にウェイク

場を感じることができる。バンチ内の粒子はシンクロトロン振動をしているから、先方にあった粒子群はやがて後方に移り、逆に後方の粒子は前方に移動する。そのため、バンチ内の全ての粒子が何時かはウェイク場の力を受けることになる。

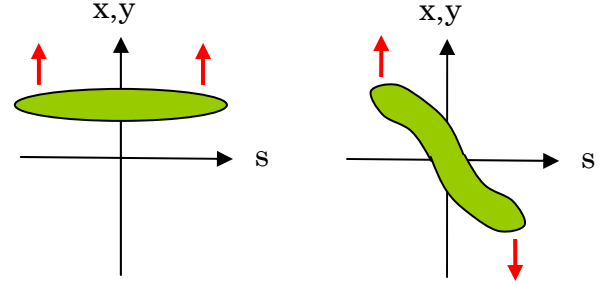


Fig. 35 バンチの前後が同位相と逆位相でベータトロン振動している場合のスナップ写真。

こういったバンチ内の縦方向位置によって位相の違う不安定な横方向振動は、実際に CERN PS を始めとする多くの陽子加速器において観測されていて、これをヘッドテイル不安定性と呼ぶ。図 3 6 に CERN PS Booster で観測されたバンチ電流シグナルを示した[16]。

一般に寿命の短いウェイク場（或いはブロードバンドなインピーダンス）によって引き起こされるヘッドテイル不安定性（これを古典的ヘッドテイル不安定性と呼ぶ）は、後で述べるクロマティシティ（色収差）が小さい時には横方向モード結合不安定性[17]を除いてあまり問題にならない。むしろ、寿命の長いウェイク場による方が大きな増大率を持つことが多い。これは、寿命の短いウェイク場の中にバンチの前後で位相が 90° 変わる様な速く波打つ成分が余り無いためである。バンチの後方が受ける、前方の作った“新鮮な”ウェイク場の効果を考慮にいれなければ、解析方法は結合バンチ不安定性のそれと殆ど同じである。バンチ内のシンクロトロン振動を表すために、縦方向位相空間上の円周上に m 個のマクロ粒子を等間隔で置いていくと、観測点で見たビーム電流シグナルは式 (6.2) の様な変調がかかったものになる。ただし、この変調はマクロ粒子の数

だけシンクロトン振動より速く振動している様に見える。結果として式 (6.19) のインピーダンスの引数が $p\omega_0 + \omega_{\beta 0}$ から $p\omega_0 + \omega_{\beta 0} + m\omega_{s0}$ に代わる。しかし、これだけでは不十分である。バンチ長が有限な効果が正しく考慮されていないからである。

Chao の教科書[4]には2個のマクロ粒子を使ったヘッドテイル不安定性の解析方法が載っている。この方法は分かり易い反面、クロマティシティがゼロだとヘッドテイル不安定性が起きないことになったり、不安定性が起きるモードが ξ/η の正負で決まったりと、結論があまり正しくないなので、ここでは紹介しない。

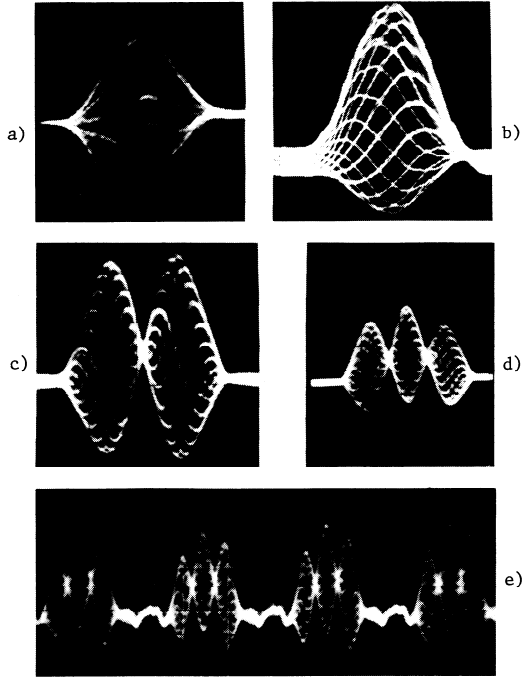


Fig. 36 CERN PS Booster で観測されたバンチの横方向振動[14]。

やはり、正しい解析には粒子の分布関数に関するブラソフ方程式を解く必要がある。解析の方法は付録 B に示した（ここではクロマティシティの効果も考慮されているので、この章の最後までまず読んでください）。ロビンソン不安定性の時と違い、バンチは縦方向の位相空間で半径 $\hat{r}$ のところだけに存在すると仮定しよう（エアバッグモデ

ル）。この時、有限バンチ長の場合の横方向コヒーレント振動数を与える式 (6.27) は少しだけ変更される。縦方向振動のモード番号が 1 の時、横方向コヒーレント振動数は以下の式で与えられる。

$$\nu - \nu_{\beta 0} - m\nu_{s0} \cong -i \frac{I_b R}{4\pi\nu_{\beta 0} E_0 / e} \sum_{p=-\infty}^{\infty} Z_T(\omega') \times J_m^2((\omega' \hat{r})) \quad (6.32)$$

ここで

$$\omega' = (p + \nu_{\beta 0} + m\nu_{s0})\omega_0 \quad (6.33)$$

である。振幅の増大率は

$$\tau^{-1} \cong -\frac{I_b \beta c}{4\pi\nu_{\beta 0} E_0 / e} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \text{Re} Z_T(\omega') J_m^2(\omega' \hat{r}) \quad (6.34)$$

で与えられる。

さて、クロマティシティが大きいと、縦方向振動のモード番号 m が大きい、高次のヘッドテイル不安定性が起り易くなることがある。クロマティシティ（色収差）とは、4 極磁石における収束力がエネルギーによって違うことによって作られるベータトロン振動数の幅で、以下の式で定義される：

$$\xi = \frac{d\omega_{\beta}}{\omega_{\beta}} / \delta \quad (6.35)$$

つまり、ベータトロン振動数はオフモーメント粒子に対して以下の様に変化する：

$$\omega_{\beta}(\delta) = \omega_{\beta 0}(1 + \xi\delta) \quad (6.36)$$

シンクロトン位相空間上でバンチの先頭にいる粒子を考えよう（図 3 7 参照）。

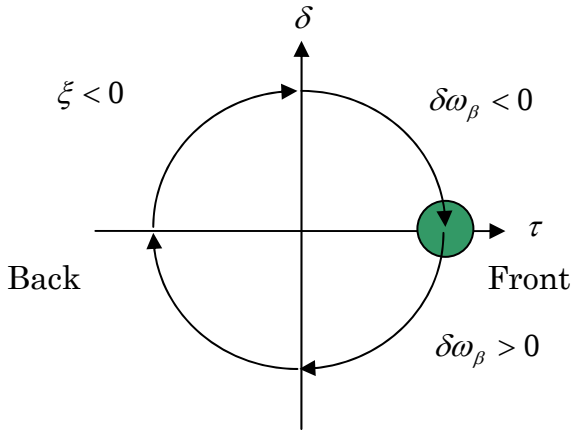


Fig.37 シンクロトロン位相空間上でのベータトロン振動数の変化。

クロマティシティは負とすると、この粒子が後方へ移動するにつれてベータトロン振動数は徐々に増加し、 $\tau = 0$ で最大になり、その後減少してバンチの一番後ろで元の値に戻る。その後、バンチの先頭に戻るにつれてベータトロン振動数は減少し、 $\tau = 0$ で最小になり、先頭でまたもとの値に戻る。この振動数の変化により、ベータトロン位相は次の様に変化する：

$$\begin{aligned}\phi_\beta(s) &= \int \omega_\beta(\delta) \frac{ds}{\beta c} \\ &= \omega_{\beta 0} \left(\frac{s}{\beta c} + \xi \int \delta \frac{ds}{\beta c} \right) \\ &= \omega_{\beta 0} \left(\frac{s}{\beta c} - \frac{\xi}{\eta} \tau \right)\end{aligned}\quad (6.37)$$

つまり、位相の変化は粒子のシンクロトロン振動の縦方向位置による。今、トランジション・エネルギー以下 ($\eta < 0$) で加速器は運転されているとし、またクロマティシティは負とすると、バンチの後方ではベータトロン振動の位相がバンチの前方より常に早い。全ての粒子はシンクロトロン位相空間上で一周すると元の位相に戻るから、位相差は蓄積することはない、バンチの前後で固定されている。このバンチ内の位相差があると、バンチ内では殆ど位相の変化しないウェイ

ク場でも見かけ上、バンチの後方をドライブする 90° 位相の廻った成分が現れる様になる。

さて、クロマティシティがあるとビームの横方向振動シグナルはどう見えるのであろうか。実験結果とよく合うような、縦方向粒子分布を考えてみよう。まず、ビーム電流のダイポールモーメント（横方向振動に電流密度を掛けたもの）の振幅が

$$p_m(t) = \begin{cases} \cos(m+1)\pi \frac{t}{\tau_L} & m = 0, 2, 4, \dots \\ \sin(m+1)\pi \frac{t}{\tau_L} & m = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (6.38)$$

で与えられる定在波のパターンをもっていると仮定しよう。ここで τ_L はバンチの全長である。この仮定は図 36 に見られる実際のビーム電流のダイポールモーメントとよく一致している。この時、リング上のある一点で k 周回目に観測されるビームの横方向振動シグナルは、式 (6.37) から

$$I_m(t) \propto p_m(t) \exp(i\omega_\xi t + i2\pi k \nu_{\beta 0}) \quad (6.39)$$

の様に変化することが分かる。ここで

$$\omega_\xi = \frac{\xi}{\eta} \omega_{\beta 0} \quad (6.40)$$

である。図 38 にいろいろなクロマティシティに対してビームの横方向振動シグナルがどう見えるかを図式的に示した[14]。この図において

$$\chi = \omega_\xi \tau_L = \frac{\xi}{\eta} \omega_{\beta 0} \tau_L \quad (6.41)$$

はベータトロン位相変化の最大振幅を表す（式 (6.37) を見よ）。また、モード番号 m はシンクロトロン振動の高次の次数であるが、上記の説明及び観測の観点からいうとビーム内の個々の位置での横方向振動の位相差からできる縦方向のノードの数を表す。例えば、粒子分布の変化を考

えない時は $m=0$ 、上記の例の様にバンチの前後で位相が反転している場合は $m=1$ である。

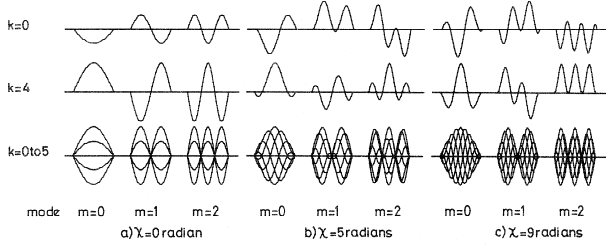


Fig. 38 ビームの横方向振動シグナルの時間変化 [16].

クロマティシティの効果がヘッドテイルモードのコヒーレント振動数にどういふ変化をもたらすかは複雑な解析が必要である。付録 B にクロマティシティの効果を正しく入れたブラソフ方程式に基ずく解析方法を示した。結果は仮定する位相空間上の粒子の分布関数による。一般的に、ビーム不安定性によって起こる複素周波数変化（この虚部が増大率を与える）は以下の式で与えられる [14] :

$$\Delta\omega = -i \frac{1}{1+m} \frac{I_b \beta c}{4\pi \nu_{\beta 0} E_{0/e}} \sum_{p=-\infty}^{\infty} Z_T(\omega_p') F_m'(\omega_p' - \omega_{\xi}) \quad (6.42)$$

ここで

$$\omega_p' = (p + \nu_{\beta 0} + m \nu_{s0}) \omega_0 \quad (6.43)$$

である。図 3 9 に関数 $F_m'(\omega)$ を $\chi = \omega \tau_L$ の関数としてプロットした例を示した [14]。図 3 9 からわかる様に、関数 $F_m'(\omega)$ は高次のモード程高い周波数でピークを持つ。またそのピーク値は高次のモードほど $(1+m)$ のファクターの分だけ抑えられる。関数 $F_m'(\omega)$ はクロマティシティの分だけ左右にずれるが、トランジション以下 ($\eta < 0$) では、クロマティシティは補正をしない場合、負であることが一般的なので関数 $F_m'(\omega)$ は正の周波数の方へずれる。

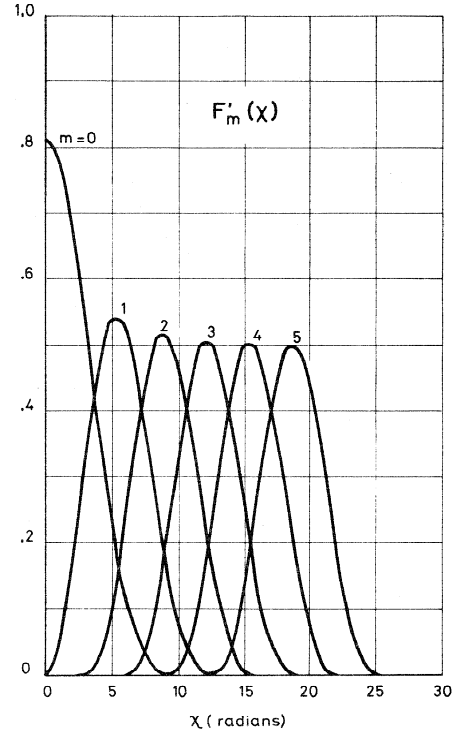


Fig.39 バンチスペクトラム $F_m'(\omega)$ 。

この時、図 3 4 に示されている様に正の周波数領域でのインピーダンスの寄与が大きくなるので $m=0$ のビームの振動は安定化する。しかし、逆に高次のモードが不安定に成りやすくなる。図 4 0 ではモード 1 が横方向 resistive-wall インピーダンスによって不安定になる。

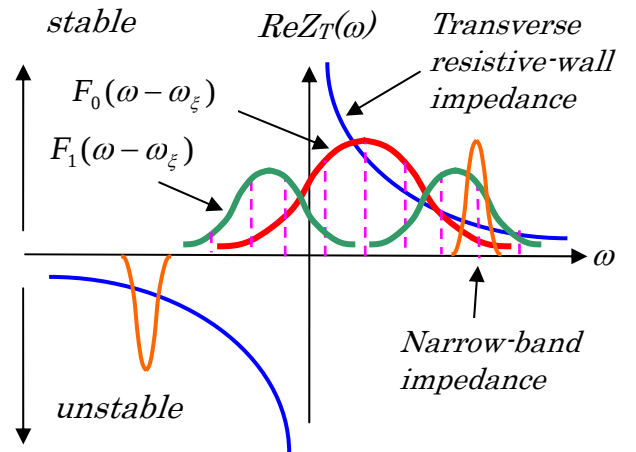


Fig. 40 ヘッドテイル不安定性におけるクロマティシティの効果の例。モード 0 は安定化されるがモード 1 は逆に不安定になる。

先ほども述べた様に付録Bにクロマティシティの効果の正しく入れたブラソフ方程式に基づく解析方法を示した。そこでは粒子が縦方向位相空間上で半径 $\hat{r}$ のところだけに存在するエアバッグモデルを採用している。この時、横方向コヒーレント振動数は以下の公式で与えられる：

$$\nu - \nu_{\beta 0} - m\nu_{s0} \cong -i \frac{I_b R}{4\pi\nu_{\beta 0} E_0 / e} \sum_{p=-\infty}^{\infty} Z_T(\omega'_p) \times J_m^2((\omega'_p - \omega_\xi)\hat{r}) \quad (6.44)$$

振幅の増大率は

$$\tau^{-1} \cong -\frac{I_b \beta c}{4\pi\nu_{\beta 0} E_0 / e} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \text{Re} Z_T(\omega') J_m^2((\omega'_p - \omega_\xi)\hat{r}) \quad (6.45)$$

で与えられる。やはりベッセル関数で与えられるバンチスペクトラム $F'_m(\omega) = J_m^2((\omega'_p - \omega_\xi)\hat{r})$ が

$$\omega_\xi = \omega_{\beta 0} \frac{\xi}{\eta} \quad (6.46)$$

だけ右にずれた形になる。

さて、クロマティシティがあるとスペクトラムが $\omega_{\beta 0} \xi / \eta$ だけ左右にシフトする物理的理由を考えて見よう。先程説明した様に、バンチの後端では $\omega_{\beta 0} \xi \tau_L / \eta$ だけベータトロン振動の位相がバンチの前端より早い (τ_L はバンチの全長)。そのため、横方向振動の様子を見てみると(図38参照)、 $\chi = \omega_{\beta 0} \xi \tau_L / \eta$ を大きくしていくと、バンチの前後のベータトロン振動の位相差が徐々に大きくなっていく。例えば $\chi = 5$ にすると、純粋なダイポール振動である $m=0$ モードで、バンチの前後が逆位相で振動したり、コヒーレントなシンクロトロン振動が混じった $m=1$ モードで、バンチの前後が同位相で振動したりすることが起きる。この位相差を補ってバンチ内振動とウェイ

ク場の振動とが同期するためにはウェイク場がクロマティシティがゼロの時に比べて周波数で $\omega_{\beta 0} \xi / \eta$ だけ (バンチ全長 τ_L の通過で位相は $\omega_{\beta 0} \xi \tau_L / \eta$ 進む) 速く振動すればよい。例えば、 $m=0$ モードの場合を考えよう (図41参照)。クロマティシティがゼロの時は、バンチの前後は同位相で振動しているので、殆ど振動しないウェイク場と同期し易い。つまり、 $m=0$ モードのバンチスペクトラムのピークは原点にある。クロマティシティがゼロでない時、例えば $\omega_{\beta 0} \xi \tau_L / \eta \approx 2\pi$ の時、バンチの端から端まででベータトロン振動は位相に 2π の差があるので、バンチの横方向振動シグナルは図41の右図のように一振動している様に見える。振幅のピークとピークの間では位相に π の差がある。そのため、一見 $m=1$ モードの振動の様に見える(コヒーレントなシンクロトロン振動はしていないのに)。このモードはバンチの端から端までの通過で位相が $\omega_{\beta 0} \xi \tau_L / \eta \approx 2\pi$ が進むウェイク場と、つまり $\omega_{\beta 0} \xi / \eta$ で振動するウェイク場と同期して励起され易くなる。これは、クロマティシティがゼロの時に $m=1$ モードと同期しやすかった周波数である (図39で $\chi \approx 2\pi$ に対応)。以上を数式化すると各モードのスペクトラムが $\omega_{\beta 0} \xi / \eta$ だけ右にシフトする。

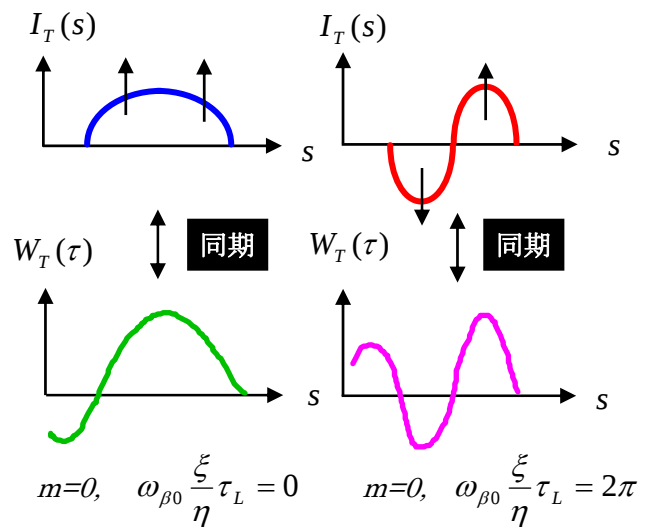


Fig. 41 クロマティシティがある時のビーム振動とウェイク場の同期の関係。

6.5. 横方向モード結合不安定性

ビーム強度が大きくなると、違ったモード間の相互作用(結合)が問題となってきた、前章の様にモードを別々に取り扱うことが出来なくなる。この場合は付録 B で記述した様に、全てのモード間の相互作用を含む以下の様な連立方程式(行列)を解いて、その固有モード解 ν を求めなくてはならない：

$$\det((\nu - \nu_{\beta 0})\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0. \quad (6.47)$$

ここで $\mathbf{I}$ は単位行列で、行列 $\mathbf{A}$ の要素は以下の式で与えられる：

$$A_{mn} = m \nu_{s0} \delta_{mn} + M_{mn}. \quad (6.48)$$

ここで行列の要素 M_{mn} は

$$M_{mn} = -i \frac{I_b R}{4\pi_0 \nu_{\beta 0} E_0 / e} i^{m-n} \sum_p Z_T(\omega_p') J_m \left(\left(\omega_p' - \frac{\nu_{\beta 0} \xi}{\eta} \omega_0 \right) \hat{r} \right) J_n \left(\left(\omega_p' - \frac{\nu_{\beta 0} \xi}{\eta} \omega_0 \right) \hat{r} \right) \quad (6.49)$$

で与えられる。ここで

$$\omega_p' = (p + \nu_{\beta 0} + m \nu_{s0}) \omega_0 \quad (6.50)$$

である。

さて、モード間の相互作用が重要になることで何が変わるのであろうか。固有モード解の周波数の実部(非摂動解 $\nu_{\beta 0} + m \nu_{s0}$ からのずれ)は横方向インピーダンスの虚部の全周波数における和でできる。横方向インピーダンスの虚部は周波数の正負に関して対称なので、ピークの鋭いインピーダンス(ナローバンドインピーダンス)より、なだらかで幅広い周波数に渡るインピーダンス(ブロードバンドインピーダンス)の方が、固有周波数の非摂動解 $\nu_{\beta 0} + m \nu_{s0}$ からのずれは大きくなる。通常のヘッドテイル不安定性ではブロードバン

ドインピーダンスは殆どビーム不安定性を起こさないが、ビーム強度が上がリ、ある閾値を超えて2つの固有モードが結合すると突然強大なビーム不安定性を引き起こす。振幅の増大率はシンクロトロン振動の周期ぐらいまで増大する(図42参照)。これを横方向モード結合不安定性と呼ぶ[17]。バンチが長い陽子加速器では起こりにくいですが、バンチの短い電子加速器(CERNのLEPなど)では、リングに蓄えられるビーム電流の上限値が横方向モード結合不安定性によって決まることが多い。陽子加速器でもバンチ長が比較的短いLHCやその入射器としてのSPSなどで起こる。

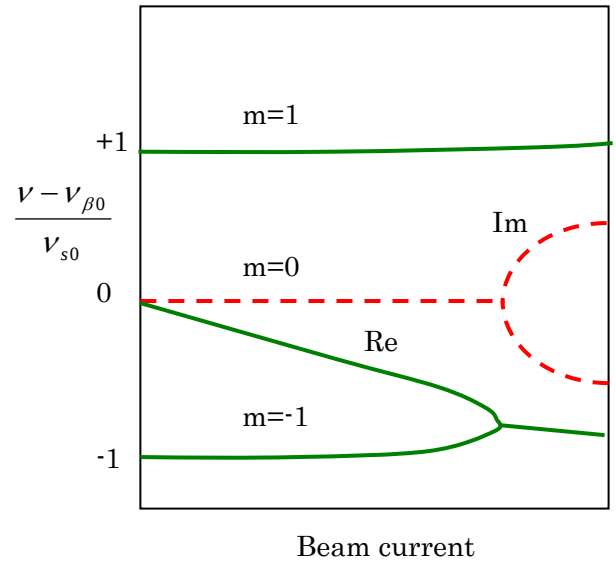


Fig. 42 ビーム電流の関数としての固有モード周波数の変化。実線は周波数の実部を破線は虚部を表す。ビーム強度が閾値を超えて2つの固有モードが結合すると突然強大なビーム不安定性が引こる。

6.6. ネガティブマス不安定性とマイクロウェーブ不安定性

これら2つのビーム不安定性は縦方向にのみ起こり、解析的にはコースティング近似の範囲内で同様に扱うことができる。ただし、それらを起こしているインピーダンスの周波数帯が違い、ネガティブマス不安定性ではバンチ長程度の波長(～MHz)でのインピーダンスが主に寄与して

いるのに対し、マイクロウェーブ不安定性はビームパイプ程度の波長（～GHz）領域のインピーダンスが関与していると思われる。まず、ネガティブマス不安定性の定性的説明から始めよう。

6.6.1. ネガティブマス不安定性

簡単のために、トランジションエネルギー以下で加速器が運転されているとしよう。この状態は“真っ当な”世界であり、加速（減速）された粒子はバンチの前方（後方）へ移動していく。さて、このビーム不安定性を起こすのは、インダクタンスで代表されるインピーダンスの虚部である。仮に、加速器リング中にインダクタンスインピーダンスを作る構造体があるとしよう。ビームはこの構造体を通過するとき力を受ける。電気回路の類推から解る様にこの時電圧は

$$V = -L \frac{dI}{d\tau} \quad (6.51)$$

或いは

$$V(\tau) = -L \frac{dI}{d\tau} \quad (6.52)$$

で与えられる。ここで I はビームの縦方向電流密度、 τ はバンチ内部の縦方向の座標であり、 L はインダクタンスである。式 (6.51) はビームの前方では減速力を受け、後方では加速力をうけることを表している。その結果、ビームは中心付近に集まってくる。すると $\frac{dI}{d\tau}$ は更に増加するの

で、ビームが同じ構造体に戻って来た時に一層強い求心力を受けることになる（図 4 3 を見よ）。この悪循環は結局、バンチが破壊されるまで続く。この現象をネガティブマス不安定性[18]と呼ぶ。トランジションエネルギー以上ではインダクタンスが負の時（加速器では一般にキャパシタンスと呼ぶ）にこの不安定性が起こりうる。

そうしたインピーダンスとして後に述べる空間電荷インピーダンスがある。

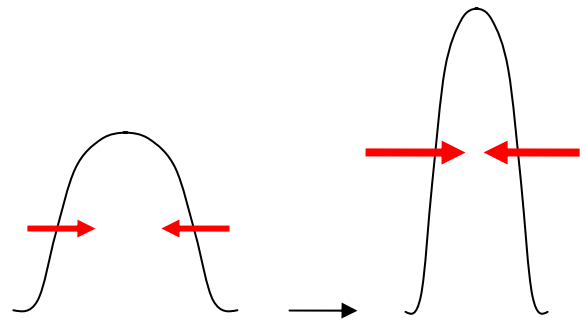


Fig. 43 インダクタンスによるネガティブマス不安定性。バンチは求心力を受け、縮む。

6.6.2. マイクロウェーブ不安定性

この現象は電子ビームでも頻繁に観測されているが、最初は CERN の PS や ISR リングでビームのデバンチングの際に観測された[17]。ビーム電流シグナルをスペクトラルアナライザーでみると、高周波成分（数 100MHz～数 GHz）が広い範囲に渡って強くエキサイトされているのが観測されたためにこの名が付いた[19]。マイクロウェーブ不安定性が起こるとバンチ長が延びたり、ビームのエネルギー幅が増大したりする。この現象にはビーム電流に閾値があり、ビーム電流がある一定以上にならないとマイクロウェーブ不安定性は起きない。観測の例として図 4 4 に CERN ISR でのバンチ長とエネルギー幅の測定結果を示した[20]。

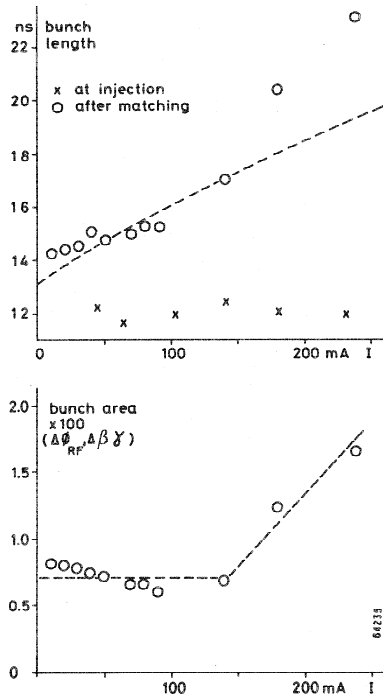


Fig. 44 CERN ISR で観測されたマイクロウェーブ不安定性によるバンチ長とエネルギー幅の増大。約 130mA あたりにビーム電流の敷居値がある。

6.7. Keil-Schnell-Boussard クライテリオン

以上の2つのビーム不安定性を定量的に扱うためにブラソフ理論を展開しよう[21]。その結果は最終的に Keil-Schnell-Boussard クライテリオン[22]と呼ばれる、ビーム安定化のために必要なインピーダンスに対する条件式にまとめられる。話を簡単にするために、ここではビームはバンチしておらず、リング上に均一に分布していると考え(コースティングビーム近似)。しかしビームは有限幅のエネルギー分布を持っていて、それがランダウ減衰と呼ばれるビーム運動の安定化を引き起こす。

6.7.1. ブラソフ方程式

さて、ビームの縦方向位相空間上での分布関数を f とすると、個々の粒子の運動がハミルトニアンで記述できるときに、その時間に関する全微分はゼロになる(リウビルの定理)：

$$\frac{df}{dt} = 0 \quad (6.53)$$

この式は位相空間上で運動している粒子の近傍の密度は粒子と一緒に動いている系からみると時間的に不変であることを述べている。ここで f は1体分布関数とし(1粒子の運動方程式で表せる)、さらに式(6.53)を各変数の偏微分書き直して粒子の運動方程式を入れれば、ブラソフ方程式になる。それでは、その変数に何をとるかを考えよう。コースティングビームではバンチの内部座標といった物はないので独立変数の取り方がバンチしたビームと異なり、時間 t をそのまま独立変数に取る。つまり、リング内ではビーム不安定性が一樣に起こっているとする(s を独立変数としたときはリングのスナップショットを撮った時にリングの下流にいくにつれてビーム振動の振幅は増大していることになる)。縦方向の正準変数としては以下の2つの量を定義する：

$$\theta = \frac{s}{R} \quad (6.54)$$

$$w = 2\pi \int_{E_0}^E \frac{dE}{\omega} \quad (6.55)$$

ここで R はリングの平均半径、 E は粒子のエネルギー(E_0 は平均エネルギー)、 ω は粒子の回転周期である。 θ は粒子のリング上での位置を角度で表したものである。

ところで、量 w は取扱い憎い変数である。そこで ω のエネルギー依存性が小さいことを使って、 w の替りに

$$\varepsilon = E - E_0 \quad (6.56)$$

を変数として使うことにする。ブラソフ方程式をこれらの変数を使って書くと、

$$\frac{\partial f(\varepsilon, \theta, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(\varepsilon, \theta, t)}{\partial \theta} \omega + \frac{\partial f(\varepsilon, \theta, t)}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} = 0 \quad (6.57)$$

となる。

6.7.2. 分散関係式

粒子の分布関数に対して摂動理論が適用できるとすると、分布関数は次の様に分解できる：

$$f = f_0 + f_1 \quad (6.58)$$

ここで f_0 は非摂動項で時間的にも空間的にも不変だとし（エネルギー分布は持っている）、摂動項の f_1 だけが変化していくと考える。摂動項 f_1 は f_0 よりずっと小さいと仮定する。摂動項 f_1 の θ 依存性をリング一周に渡って測ると、測り始めた元の場所に戻ると f_1 の値は元に戻るので、 f_1 は θ に関してフーリエ展開できることが解る：

$$f_1(\varepsilon, \theta, t) = \sum_{n \neq 0} h_n(\varepsilon, t) e^{in\theta} \quad (6.59)$$

粒子のエネルギー変化はインピーダンスと f_1 を使って以下の式で与えられる：

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= -\frac{(e\omega_0)^2}{2\pi} \sum_{n \neq 0} Z_n \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\varepsilon, t) e^{in\theta} d\varepsilon \\ &= -e\omega_0 \sum_{n \neq 0} Z_n \phi_n(t) e^{in\theta} \end{aligned} \quad (6.60)$$

ここで

$$\phi_n(t) = \frac{e\omega_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\varepsilon, t) d\varepsilon \quad (6.61)$$

は電流線密度の n -番目の成分であり、 Z_n は周波数 $n\omega_0$ でのインピーダンスである。エネルギー変化 $\dot{\varepsilon}$ は摂動項に比例するので、ブラソフ方程式

に式 (6.58) を入れた後に摂動項に関して線形化すると

$$\frac{\partial f_1(\varepsilon, \theta, t)}{\partial t} + \frac{\partial f_1(\varepsilon, \theta, t)}{\partial \theta} \omega + \frac{\partial f_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} = 0 \quad (6.62)$$

となる。この線形化されたブラソフ方程式に式 (6.59) (6.60) と (6.61) をいれて、 f_1 や $\phi_n(t)$ の時間依存性として

$$f_1 \propto \phi_n \propto \exp(-i\Omega t) \quad (6.63)$$

を仮定すると線形化されたブラソフ方程式は次の様に変形できる：

$$h_n(\varepsilon) = i \frac{e\omega_0 Z_n \phi_n \frac{\partial f_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}}{\Omega - n\omega} \quad (6.64)$$

さて、粒子の回転周期のエネルギー依存性は以下で与えられる：

$$\omega = \omega_0 + k_0 \varepsilon \quad (6.65)$$

ここで

$$k_0 = -\eta \frac{\omega_0}{\beta^2 E_0} \quad (6.66)$$

である。式 (6.64) の両辺を ε で積分すると、式 (6.61) から

$$\phi_n \left[1 - \frac{(e\omega_0)^2}{2\pi} i Z_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial f_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} d\varepsilon}{\Omega - n(\omega_0 + k_0 \varepsilon)} \right] = 0 \quad (6.67)$$

を得る。量 ϕ_n が有限の解を持つためにはブラケットの中がゼロでなくてはならない：

$$1 - \frac{(e\omega_0)^2}{2\pi} iZ_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial f_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} d\varepsilon}{\Omega - n(\omega_0 + k_0 \varepsilon)} = 0 \quad (6.68)$$

これが所謂、分散関係式である。

6.7.3. スタビリティダイアグラムと Keil-Schnell-Boussard クライテリオン

さて分散関係式は f_0 のエネルギー分布関数と積分路の取り方を指定すれば解ける。この積分路の取り方が有名なランダウの積分路[23]である(図45参照)。

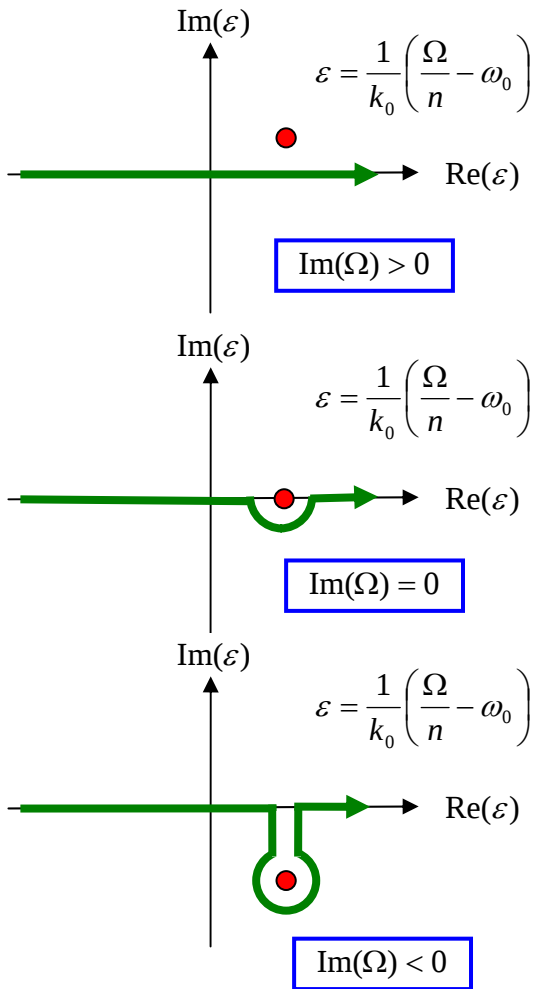


Fig. 45 ランダウ積分路 ($k > 0$ の場合)。

ここではその導き方を詳しく述べないが、一口でいうならば ε の複素空間で積分路は常に Ω が作

るポールの下側を走らなければならないと言うものである。 Ω の虚部がゼロの時にポールは ε の実軸上にあるが、 ε の積分路はこのポールを迂回するように下側に小さな半円を作って回る。この時、分散関係式を満たすインピーダンス Z_n が所謂、安定限界値 (スタビリティリミット) を与える。例に分散関係式を解いて見よう。本来ならば、まずリングのインピーダンス Z_n がまず計算されていて、その Z_n に対する固有解 Ω を求めるべきだろうが、通常は逆に Ω を与えて分散関係式中の積分を実行し、その逆数から Z_n を求めて、それをスタビリティダイアグラムと呼ばれるマップを作るのが一般的である。必要ならそのマップから Z_n に対応する固有解 Ω を読み取ればよい。

分散関係式を任意のエネルギー分布関数に適用するために規格化しよう。まずエネルギーエラー ε を規格化して $x = \varepsilon / \Delta E$ を導入する。ここで ΔE はエネルギーの半値全幅である。回転周期の半値全幅は

$$S = \Delta E \cdot k_0 \quad (6.69)$$

であり、分散関係式のポールは

$$x_1 = \frac{\Omega - n\omega_0}{nS} \quad (6.70)$$

で与えられる。規格化されたエネルギー分布関数はこの x を使って以下のように書ける：

$$g_0(x) = \frac{\pi \Delta E}{N} f_0(\varepsilon) \quad (6.71)$$

ここで N はコースティングビーム中の全粒子数である。こうして定義された $g_0(x)$ は以下のように規格化されている：

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_0(x) dx = 1 \quad (6.72)$$

分散関係式はこうした規格化変数や関数を使って次の様に変換することができる：

$$1 = -\text{sgn}(\eta) \cdot (U - iV) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial g_0(x)}{x - x_1} dx \quad (6.73)$$

ここで規格化されたインピーダンス U と V を以下の様に導入した：

$$U - iV = \frac{-2I_b \beta^2}{\pi \left(\frac{\Delta E}{E_0} \right)^2 |\eta| E_0 / e} i \frac{Z_n}{n} \quad (6.74)$$

ここで $I_b = Ne\omega_0 / (2\pi)$ は平均ビーム電流である。

エネルギーの分布関数の例として以下の関数を考えよう：

$$g_0(x) = \frac{8a}{3\pi} (1 - a^2 x^2)^{3/2} \quad (6.75)$$

ただし、 $|x| < 1/a$ であり、 $a^2 = 5/6$ である。トランジション以下での規格化された分散関係式の解を、 (U, V) 複素平面上に $(\text{Re } x_1, \text{Im } x_1)$ からのマッピングとしてプロットしたのが図 46 であり、これをスタビリティダイアグラムと呼ぶ。

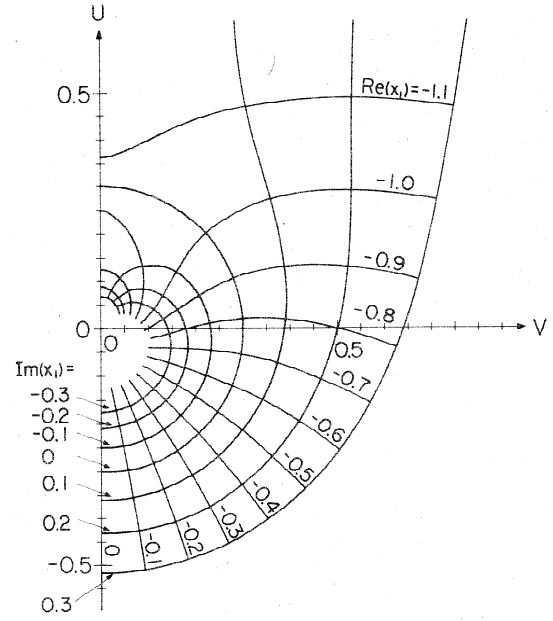


Fig.46 式 (6.68) で与えられる分布関数に対するスタビリティダイアグラム（トランジションエネルギー以下） [19]。

前にも述べた様に、 $\text{Im } x_1 = 0$ の曲線がスタビリティリミットを与え、これより原点寄りに規格化されたインピーダンスが在る時はビームの振動は安定である。つまり、

$$|U - iV| = \left| \frac{-2I_b \beta^2}{\pi \left(\frac{\Delta E}{E_0} \right)^2 |\eta| E_0 / e} \frac{Z_n}{n} \right| \leq 0.3 \quad (6.76)$$

がビームが安定であるための条件である。これを書き換えると

$$\left| \frac{Z_n}{n} \right| \leq F \cdot \frac{|\eta| E_0 / e \left(\frac{\Delta E}{E_0} \right)^2}{I_b \beta^2} \quad (6.77)$$

となる。ここでフォームファクター F は、式 (6.75) で与えられるエネルギー分布関数の場合は約 0.5 であるが、分布関数の仮定に依るパラメータであり、さまざまな分布関数に対する値を比

べてみると、一般には約1ぐらいの値になる。条件式(6.77)はKeil-Schnell-Boussard クライテリオンと呼ばれている。ここで ΔE がエネルギー分布の半値全幅であることを再度確認しておく。

6.7.4. バンチしたビームに対する Keil-Schnell-Boussard クライテリオン

さて、こうして求められた公式はあくまでコースティングビームに対してであり、バンチしたビームに対してはもっと精密な理論が必要である。しかし実際には多くの陽子リングではKeil-Schnell-Boussard クライテリオンは実験値と良く一致していることが知られている。なるほど、いま問題にしているビーム不安定性の振動の波長がバンチ長よりずっと短かったり、振動の増大時間がシンクロトロン振動数よりずっと速ければ、ビーム不安定性から見て、バンチしたビームは限りなくコースティングビームに近く見えるはずである。そこで、Keil-Schnell-Boussard クライテリオンを陽子バンチに適用するとき I_b や $\frac{\Delta E}{E_0}$ としてバンチ内の局所的な値を使うことにする：

$$\left| \frac{Z_n}{n} \right| \leq F \cdot \frac{|\eta| E_0 / e}{\beta^2} \left[\frac{1}{I_b} \left(\frac{\Delta E}{E_0} \right)^2 \right]_{local} \quad (6.78)$$

ここで次の様な疑問が湧くかもしれない。バンチ内でのエネルギー分布幅や電流値は縦方向の位置によるが、いったいどの位置での値を使ったらよいのだろうか。実は粒子の空間分布関数がパラボラの際は局所的電流値 I_b と局所的エネルギー

幅 $\left(\frac{\Delta E}{E_0} \right)^2$ の変化はお互いに相殺しあい、

Keil-Schnell-Boussard クライテリオンはバンチ内の位置によらなくなる。このパラボラ分布は陽子バンチの空間分布関数をモデル化するとき最も良く使われる分布関数で、実験的にも陽子

バンチの分布はパラボラ分布に近いことが確認されている。従って、エネルギー分布幅や電流値として、陽子バンチの中心での値を使えばだいたいよいことになる。

6.8. 電子雲不安定性

最後に電子雲不安定性 [24] について簡単に説明しよう。これはLANLのPSRリングでe-pビーム不安定性として最初に観測され、長いあいだその現象のメカニズムは謎とされていた。最近になって、陽子ビームとチェンバー内に出来た電子雲とが相互作用した結果起こる陽子ビームの横方向不安定性として一般化され、広くシュミレーション解析が行われる様になった。これにはKEKBやPEP-IIなどの陽電子リングで電子雲不安定性が観測され、理論的な解析やシュミレーションコード等が開発された結果、実験事実をよく説明できるようになったことの功績が大きい。その後CERNのPSやSPSなどの陽子リングでも観測され、建設中のLHC、SNSやJ-PARCなどの陽子リングでもビーム電流の上限を決める一要因と考えられている。

さて、最初に電子が作られるメカニズムはいろいろ考えられる。例えば

- 陽子が残留ガスと衝突してイオンと電子を作る。
- 入射付近のストリッピングコイルに陽子がぶつかって電子が放出する。
- コリメーターやビームパイプの表面に損失陽子が当たり電子が飛び出る。
- 陽子から出た放射光がビームパイプに当たり、光電子を作る。

などのメカニズムが考えられる。こうして一旦電子が出来ると、電子は陽子ビームが作るスペースチャージ力(クーロン力)によって引力を受け、陽子ビームに向かって加速される(図4.7参照)。電子は陽子ビームを突き抜けて反対側のビームパイプに衝突して2次電子を作る。この時電子一個が作る2次電子の数が1より十分に大きけれ

ば電子の総数は増加する。2次電子もまた陽子ビームの引力によって加速され、同じプロセスを繰り返すうちに電子の数は指数関数的に増加し、陽子ビームを取り巻く電子雲を形成する。電子雲が陽子ビームを中和し、新規にビームパイプの表面にできた電子が陽子ビームから引力を受けなくなるようになると、電子雲生成は飽和し、電子の数もほぼ一定になる。陽子ビームと電子雲は横方向に相互作用（2流体不安定性）し、陽子ビームの電流値が閾値を超えると陽子ビームのダイポール振動の振幅が増大して、陽子ビームの損失やエミッタンス増加が起こる。これが電子雲不安定性の概略である。

電子雲発生シュミレーションは比較的簡単であるが、陽子ビームとの相互作用の正確なシュミレーションは難しい。バンチが長い陽子ビームでは理論的な解析も電子ビームに比べて難しいので、電子雲不安定性が脅威と考えられる時は、出来るだけ電子雲を発生させないケアをリングに施すことが一番である。例えば

- 入射付近のストリッピングコイル近傍に電子コレクターをおいて電子を吸収する。
- ビームパイプに電子除去用の電極を取り付ける。
- ビームパイプや磁石の内側などに TiN をコーティングして2次電子放出率を下げる
- ビームパイプなどの周りにソレノイドを巻き、30 Gauss程度の磁場を作ると電子は磁力線に捕獲され、陽子ビームとの相互作用が弱まる。
- ダンパーと呼ばれる電極を使って陽子ビームの横方向振動を減衰させる。

などの方法が考えられ、現実に実行されている。

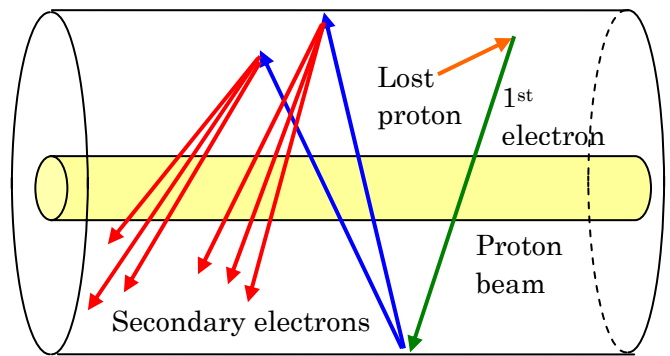


Fig. 47 カスケイド式電子雲生成のメカニズム。

7. 最後に

この講義録はインピーダンスやビーム不安定性の全体を網羅した教科書として執筆した。第1章において、出来るだけ自己完結を目指す書いたが、出来上がった講義録は概ねそうになっていると思う。最初は想定していなかったバンチしたビームに対するブラソフ方程式に基づく解析も自己完結性を高めるために付け足した。特に Chao の教科書におけるヘッドテイル不安定性の解析は一部恣意性があるので、出来るだけ正しい定式化を試みた。ビーム力学の基礎的な説明や空洞、導波管内での電磁波の様子の記述なども、インピーダンスやビーム不安定性の理解に最低限必要な量は確保されていると思う。さらなる知識を広げるには読者が自分で参考文献を当たって下さい。

今回の講義録で特に気を使ったのは、粒子の速度 βc の効果を正しく記述することである。殆どの教科書や講義録では粒子は光速で回転していると仮定して公式を導いているので、エネルギーの低い陽子ビームにはその結果を正しく応用できない。理論を展開する上で、できるだけ βc を出さない、或は βc が現れるときは出来るだけエキスプリシットに現れる様に勤めた。リング半径や振動数を物理量として多く使用しているのはそのためである。独立変数としてリングの位置 s を採用しているので、この方法が一番粒子の速度を表面に出さない方法であることを賢い読者は気づいていたことと思う。

参考文献

- [1] 鈴木敏郎 (OHO86) , 久保淨 (OHO91) , 赤井和憲 (OHO94) , 阿部哲郎 (OHO04) .
- [2] 陳 榮浩、OHO96.
- [3] B. W. Zotter, S. A. Kheifets, “Impedances and Wakes in High-Energy Particle Accelerators”, (World Science Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 1998).
- [4] A. W. Chao, “Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators” (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993).
- [5] Y. H. Chin, “User’s Guide for ABCI Verion 8.8”, LBL-35258 (1994).
- [6] T. Weiland, Particle Accelerators 15, 245 (1984).
- [7] W. K. H. Panofsky and W. A. Wenzel, Rev. Sci. Instrum. 27, 967 (1956).
- [8] Perry B. Wilson, AIP Proc. 87, Phys. High Energy Accelerators (Fermilab, 1981), p. 450.
- [9] V. K. Neil and A. M. Sessler, Rev. Sci. Instrum. 36, 429 (1965).
- [10] A. Hofmann, “Theoretical Aspects of the Behavior of Beams in Accelerators and Storage Rings”, CERN 77-13 (1977), p.139.
- [11] S. S. Kurennoy and G. T. Stupakov, Particle Accelerators 45, 95 (1994).
- [12] S.S. Kurennoy, Particle Accelerators 39, 1 (1992).
- [13] K. W. Robinson, SLAC-49 (1965) p. 32.
- [14] F. Sacherer, “Theoretical Aspects of the Behavior of Beams in Accelerators and Storage Rings”, CERN 77-13 (1977), p.198.
- [15] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York, 1965).
- [16] J. Gareyte and F. Sacherer, in Proc. of 9th Int. Conf. on High Energy Accelerators (Stanford, 1974), p. 341.
- [17] Y. H. Chin, CERN /SPS/85-2 (1985).
- [18] C. E. Nielsen, A. M. Sessler and K. R. Symon, in Proc. of 1959 CERN Accelerator Conf. (CERN, 1959), p.239.
- [19] D. Boussard, CERN/Lab II/RF/Int/75-2 (1975).
- [20] S. Hansen, H. G. Hereward, A. Hofmann, K. Huebner and S. Myers, IEEE Trans. Nucl. Sci. NS-22, 1381 (1975).
- [21] Y. H. Chin and K. Yokoya, Phys. Rev. D, 28, 2141 (1983).
- [22] K. Keil and W. Schnell, CERN-ISR-TH-RF/69-48 (1969).
- [23] L. D. Landau, J. Phys. (Moscow) 10, 25 (1946).
- [24] The 31st ICFA Advanced Beam Dynamics Workshop on Electron-Cloud Effects, “ECLLOUD’04” (Napa, California, USA, 2004), <http://icfa-ecloud04.web.cern.ch/icfa-ecloud04/>

8. 付録 A : バンチしたビームに対する縦方向ロビンソン不安定性のブラソフ方程式に基づく解析

バンチしたビームに対する縦方向ロビンソン不安定性の解析をブラソフ方程式を使って定式化しよう。粒子の縦方向位相空間分布関数を

$$\Psi(s, \tau, \delta) \quad (8.1)$$

と仮定しよう。個々の粒子の運動がハミルトニアンで記述できるときに、その独立変数に関する全微分はゼロになる（リウビルの定理）：

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s} = 0. \quad (8.2)$$

この式は位相空間上で運動している粒子の近傍の密度は、粒子と一緒に動いている系からみると粒子群の移動に伴って不変であることを述べている。上記の式を各変数の偏微分を書き直すと次のブラソフ方程式になる：

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s} + \tau' \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + \delta' \frac{\partial \Psi}{\partial \delta} = 0. \quad (8.3)$$

ここでプライム（'）は独立変数 s に関する微分を表す。粒子の運動方程式は

$$\begin{aligned} \tau' &= -\frac{\eta}{\beta c} \delta \\ \delta' &= \frac{\beta c}{\eta} \left(\frac{v_{s0}}{R} \right)^2 \tau - \frac{eV(s, \tau)}{2\pi R \beta^2 E_0} \end{aligned} \quad (8.4)$$

ここで電圧 V はウェイク場によって生じる。この効果が粒子の運動に対して摂動で扱える範囲ならば、粒子は位相空間でほぼ調和振動をしていると考えてよい。そこで、縦方向位相空間で極座標を導入する：

$$\begin{aligned} \tau &= r_s \cos \phi_s \\ \delta &= \frac{\beta c}{\eta} \left(\frac{v_{s0}}{R} \right) r_s \sin \phi_s \end{aligned} \quad (8.5)$$

ブラソフ方程式（8.3）を極座標を使って書くと

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s} + \frac{v_{s0}}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi_s} - \frac{eV(s, \tau)}{2\pi R \beta^2 E_0} \frac{\partial \Psi}{\partial \delta} = 0 \quad (8.6)$$

となる。さてウェイク場による粒子の分布関数の摂動が小さいと仮定すると、分布関数は r_s にしかよらない無摂動部分と、振動する摂動部に分離できる：

$$\Psi = g_0(r_s) + g_1(r_s, \phi_s) \exp(-i\nu \frac{s}{R}). \quad (8.7)$$

展開式（8.7）をブラソフ方程式（8.6）に挿入し、摂動項に関して線形化すると

$$\begin{aligned} &\left(-i\nu g_1 + v_{s0} \frac{\partial g_1}{\partial \phi_s} \right) \exp(-i\nu \frac{s}{R}) \\ &- \frac{e\eta R V(s, \tau)}{2\pi v_{s0} \beta^3 c E_0} \sin \phi_s \frac{dg_0}{dr_s} = 0 \end{aligned} \quad (8.8)$$

を得る。

さて、ウェイク場が作る縦方向電圧 $V(s, \tau)$ を求めよう。リング上の位置 s で観測したビーム電流は粒子の位相空間での位置 τ の関数として

$$e\rho(\tau) \exp(-i\nu \frac{s}{R}) \quad (8.9)$$

で与えられる。関数 $\rho(\tau)$ は位置 τ でのビームの摂動項から発生する粒子の縦方向線密度である：

$$\rho(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(r_s, \phi_s) d\delta. \quad (8.10)$$

縦方向電圧 $V(s, \tau)$ はこのビーム電流が作るウェイク場を過去の周回まで遡ってそれらの寄与をすべて足しあげることと求まる：

$$V(s, \tau) = e \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \rho(\tau') \times \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-i\nu \left(\frac{s}{R} - 2\pi k \right)) W_L((\tau' - \tau)\beta c + kC_0) \quad (8.11)$$

ここで $\tau < 0$ の時 $W_T(\tau) = 0$ であることを使って整数 k に対する和を負の無限大から正の無限大まで拡張した。また、

$$C_0 = 2\pi R = \beta c T_0 \quad (8.12)$$

はリングの平均周長である。さらに

$$W_L(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z_L(\omega) \exp(-i\omega \frac{z}{\beta c}) d\omega \quad (8.13)$$

を使って式 (8.11) を変換すると

$$V(s, \tau) = \frac{e}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \rho(\tau') \exp(-i\nu \frac{s}{R}) \times \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp(-i\omega(\tau' - \tau + kT_0)) Z_L(\omega) \exp(i\nu 2\pi k) \quad (8.14)$$

となる。ポアッソンの公式

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-ikx) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi p) \quad (8.15)$$

を使うと式 (8.14) は以下の様に変換される：

$$V(s, \tau) = \frac{e}{2\pi T_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \rho(\tau') \exp(-i\nu \frac{s}{R}) \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp(-i\omega(\tau' - \tau)) \cdot Z_L(\omega) \delta(\omega - \nu\omega_0 - p\omega_0) \\ = \frac{e}{2\pi T_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \rho(\tau') \exp(-i\nu \frac{s}{R}) \times \sum_p Z_L(\nu\omega_0 + p\omega_0) \exp(-i(\tau' - \tau)(\nu\omega_0 + p\omega_0)) \\ = \frac{e}{T_0} \exp(-i\nu \frac{s}{R}) \times \sum_p Z_L(\nu\omega_0 + p\omega_0) \exp(i(\nu\omega_0 + p\omega_0)\tau) \\ \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \rho(\tau') \exp(-i(\nu\omega_0 + p\omega_0)\tau') \quad (8.16)$$

線密度 $\rho(\tau)$ のフーリエ変換を以下の様に導入すると、

$$\tilde{\rho}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau \quad (8.17)$$

式 (8.16) は

$$V(s, \tau) = \frac{e}{T_0} \exp(-i\nu \frac{s}{R}) \sum_p Z_L(\nu\omega_0 + p\omega_0) \times \exp(i(\nu\omega_0 + p\omega_0)\tau) \tilde{\rho}(\nu\omega_0 + p\omega_0) \quad (8.18)$$

と書ける。この結果を式 (8.8) に入れた後、係数を関係式 $2\pi R = \beta c T_0$ を使って整理すると次の式を得る：

$$-i\nu g_1 + \nu_{s0} \frac{\partial g_1}{\partial \phi_s} - \frac{e^2 \eta}{4\pi^2 \nu_{s0} \beta^2 E_0} \sin \phi_s \frac{dg_0}{dr_s} \\ \times \sum_p Z_L(\nu\omega_0 + p\omega_0) \times \exp(i(\nu\omega_0 + p\omega_0)\tau) \tilde{\rho}(\nu\omega_0 + p\omega_0) = 0 \quad (8.19)$$

あとは g_1 の解を求めればよい。関数 g_1 は位相空間で ϕ_s に関する周期性があるので、 ϕ_s に関してフーリエ展開できる：

$$g_1(r_s, \phi_s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m(r_s) \exp(im\phi_s). \quad (8.20)$$

ここで m はコヒーレントシンクロトロン振動のモード番号を表す。この解を式 (8.19) に入れ、両辺に $\exp(-im\phi_s)$ をかけた後、 ϕ_s について積分する。結果を整理すると

$$\begin{aligned} (-i\nu g_1 + im\nu_{s0})g_1 + \frac{e^2\eta}{4\pi^2\nu_{s0}\beta^2 E_0} m i^m \frac{1}{r_s} \frac{dg_0}{dr_s} \\ \times \sum_p \frac{Z_L(\nu\omega_0 + p\omega_0)}{\nu\omega_0 + p\omega_0} \\ \times J_m((\nu\omega_0 + p\omega_0)r_s) \tilde{\rho}(\nu\omega_0 + p\omega_0) = 0 \end{aligned} \quad (8.21)$$

となる。ここで公式

$$\int_0^{2\pi} \exp(iqr_s \cos\phi_s - m\phi_s) \sin\phi_s d\phi_s = -2\pi i^m \frac{J_m(qr_s)}{qr_s} \quad (8.22)$$

を使った。線密度 $\rho(\tau)$ のフーリエ変換の式 (8.17) に、式 (8.10) と式 (8.20) を挿入し、さらに以下の公式を使って結果を整理すると

$$\int_0^{2\pi} \exp(iqr_s \cos\phi_s - n\phi_s) d\phi_s = 2\pi i^n J_n(qr_s), \quad (8.23)$$

以下の表現を得る：

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(\nu\omega_0 + p\omega_0) \\ = 2\pi\omega_0 \frac{\nu_{s0}}{\eta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{-n} \int_0^{\infty} g_n(r_s) J_n((\nu\omega_0 + p\omega_0)r_s) r_s dr_s \end{aligned} \quad (8.24)$$

この結果を式 (8.23) に入れると

$$\begin{aligned} (\nu g_1 - m\nu_{s0})g_1(r_s) = -im \frac{\omega_0 e^2}{2\pi\beta^2 E_0} \frac{1}{r_s} \frac{dg_0(r_s)}{dr_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{m-n} \\ \times \sum_p \frac{Z_L(\nu\omega_0 + p\omega_0)}{\nu\omega_0 + p\omega_0} J_m((\nu\omega_0 + p\omega_0)r_s) \\ \times \int_0^{\infty} g_n(r_s') J_n((\nu\omega_0 + p\omega_0)r_s') r_s' dr_s' \end{aligned} \quad (8.25)$$

となる。この積分方程式を解くには非摂動関数 $g_0(r_s)$ を仮定しなければならない。簡単のため、 $g_0(r_s)$ は位相空間上で半径 $\hat{\tau}$ の中で一様に存在する関数だとしよう（ウォーターバッグモデル）：

$$g_0(r_s) = \frac{N\eta}{\pi\beta c \nu_{s0} \hat{\tau}^2} \delta(r_s - \hat{\tau}). \quad (8.26)$$

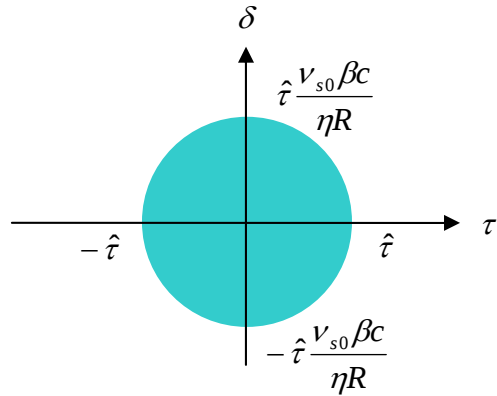


Fig. 48 縦方向位相空間での粒子分布：ウォーターバッグモデル。

この時解 $g_m(r_s)$ は

$$g_m(r_s) = a_m \delta(r_s - \hat{\tau}) \quad (8.27)$$

となるので、式 (8.26) と (8.27) を積分方程式 (8.25) に入れ、右辺の ν を $m\nu_{s0}$ で近似すると、係数 a_m に関する連立方程式を得る：

$$\begin{aligned}
(\nu g_1 - m \nu_{s0}) a_m &= im \frac{I_b \eta T_0}{2\pi^2 \beta^2 \nu_{s0} \hat{\tau}^2 E_0 / e} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{m-n} \\
&\times a_n \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{Z_L(\omega_p')}{\omega_p'} J_m(\omega_p' \hat{\tau}) J_n(\omega_p' \hat{\tau}) \\
&= im \frac{I_b \eta T_0}{8\pi^2 \beta^2 \nu_{s0} E_0 / e} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{m-n} \\
&\times a_n \sum_{p=-\infty}^{\infty} \omega_p' Z_L(\omega_p') \left(\frac{J_m(\omega_p' \hat{\tau})}{\omega_p' \hat{\tau} / 2} \right) \left(\frac{J_n(\omega_p' \hat{\tau})}{\omega_p' \hat{\tau} / 2} \right)
\end{aligned}
\tag{8.28}$$

ここで

$$\omega_p' = (p + m \nu_{s0}) \omega_0 \tag{8.29}$$

である。また、 $I_b = Ne/T_0$ はビーム電流である。
この連立方程式の固有振動数解 ν は以下の式を解くことで得られる：

$$\det(\mathbf{M} - \mathbf{A}) = 0. \tag{8.30}$$

ここで $\mathbf{I}$ は単位行列で、行列 $\mathbf{A}$ の要素は以下の式で与えられる：

$$A_{mn} = m \nu_{s0} \delta_{mn} + M_{mn}. \tag{8.31}$$

ここで行列 M_{mn} は

$$\begin{aligned}
M_{mn} &= im \frac{I_b \eta T_0}{2\pi^2 \beta^2 \nu_{s0} \hat{\tau}^2 E_0 / e} \\
&\times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{Z_L(\omega_p')}{\omega_p'} J_m(\omega_p' \hat{\tau}) J_n(\omega_p' \hat{\tau}) \\
&= im \frac{I_b \eta T_0}{8\pi^2 \beta^2 \nu_{s0} E_0 / e} \\
&\times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \omega_p' Z_L(\omega_p') \left(\frac{J_m(\omega_p' \hat{\tau})}{\omega_p' \hat{\tau} / 2} \right) \left(\frac{J_n(\omega_p' \hat{\tau})}{\omega_p' \hat{\tau} / 2} \right)
\end{aligned}
\tag{8.32}$$

で与えられる。この連立方程式を正確に解けば縦方向のモード結合不安定性の解析が可能になる。仮に摂動が小さく、固有振動数解 ν が $m \nu_{s0}$ とあまり変わらないときはモード間の相互作用を無視することができ、式 (8.30) の解は近似的に以下の式で与えられる：

$$\begin{aligned}
\nu - m \nu_{s0} &\cong im \frac{I_b \eta T_0}{2\pi^2 \beta^2 \nu_{s0} \hat{\tau}^2 E_0 / e} \\
&\times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{Z_L(\omega_p')}{\omega_p'} J_m(\omega_p' \hat{\tau}) J_n(\omega_p' \hat{\tau}) \\
&= im \frac{I_b \eta T_0}{8\pi^2 \beta^2 \nu_{s0} E_0 / e} \\
&\times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \omega_p' Z_L(\omega_p') \left(\frac{J_m(\omega_p' \hat{\tau})}{\omega_p' \hat{\tau} / 2} \right) \left(\frac{J_n(\omega_p' \hat{\tau})}{\omega_p' \hat{\tau} / 2} \right)
\end{aligned}
\tag{8.33}$$

9. 付録 B：バンチしたビームに対するヘッドテイル不安定性のブラソフ方程式を使った解析

バンチしたビームに対するヘッドテイル不安定性の解析をブラソフ方程式を使って固有値問題として正確に展開しよう。粒子の位相空間（縦方向と横方向両方の）分布関数を

$$\Psi(s, y, p_y, \tau, \delta) \quad (9.1)$$

と仮定しよう。この分布関数は次のブラソフ方程式を満たす：

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s} + y' \frac{\partial \Psi}{\partial y} + p_y \frac{\partial \Psi}{\partial p_y} + \tau' \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + \delta' \frac{\partial \Psi}{\partial \delta} = 0. \quad (9.2)$$

ここでプライム (') は独立変数 s に関する微分を表す。さて、クロマティシティの効果を考慮した運動方程式を書き出してみよう：

$$\begin{aligned} y' &= p_y \\ p_y' &= -\left(\frac{\nu_{\beta 0}}{R}(1 + \xi\delta)\right)^2 y + \frac{F_y}{2\pi R E_0} \\ \tau' &= -\frac{\eta}{\beta c} \delta \\ \delta' &= \frac{\beta c}{\eta} \left(\frac{\nu_{s0}}{R}\right)^2 \tau \end{aligned} \quad (9.3)$$

ここでウェイク場が作る横方向の力 F_y から生じる縦方向の力は小さいので無視した。式 (9.3) にはベータトロン振動数がモーメントムエラーによって変化する効果(式 (6.36) を参照)が入っているのに注意しよう。さて、縦方向と横方向両方の位相空間で極座標を導入しよう：

$$\begin{aligned} y &= r_y \cos \phi_y \\ p_y &= -\left(\frac{\nu_{\beta 0}}{R}(1 + \xi\delta)\right) r_y \sin \phi_y \\ \tau &= r_s \cos \phi_s \\ \delta &= \frac{\beta c}{\eta} \left(\frac{\nu_{s0}}{R}\right) r_s \sin \phi_s \end{aligned} \quad (9.4)$$

ブラソフ方程式 (9.2) を極座標を使って書くと

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s} + \frac{\nu_{\beta 0}}{R}(1 + \xi\delta) \frac{\partial \Psi}{\partial \phi_y} + \frac{F_y}{2\pi R E_0} \frac{\partial \Psi}{\partial p_y} + \frac{\nu_{s0}}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi_s} = 0 \quad (9.5)$$

となる。さてウェイク場による粒子の分布関数の摂動が小さいと仮定すると、分布関数は r_y と r_s にしかよらない無摂動部分と、振動する摂動部に分離できる：

$$\begin{aligned} \Psi &= f_0(r_y) g_0(r_s) \\ &+ f_1(r_y, \phi_y) g_1(r_s, \phi_s) \exp(-i\nu \frac{s}{R} + i \frac{\nu_{\beta 0} \xi}{\eta} \omega_0 \tau) \end{aligned} \quad (9.6)$$

ここで指数関数の中の第2項はヘッドテイル位相ファクターであり、式 (6.37) の右辺の第2項に対応している。展開式 (9.6) をブラソフ方程式 (9.5) に挿入し、摂動項に関して線形化すると

$$\begin{aligned} &\left(-i\nu f_1 g_1 + \nu_{\beta 0} \frac{\partial f_1}{\partial \phi_y} g_1 + \nu_{s0} f_1 \frac{\partial g_1}{\partial \phi_s} \right) \\ &\times \exp(-i\nu \frac{s}{R} + i \frac{\nu_{\beta 0} \xi}{\eta} \omega_0 \tau) - \frac{F_y R}{2\pi E_0 \nu_{\beta 0}} \sin \phi_y \frac{df_0}{dr_y} g_0 = 0 \end{aligned} \quad (9.7)$$

を得る。

さて、ウェイク場による横方向の力 F_y を評価してみよう。リング上の位置 s で観測した横方向の

ダイポール電流は粒子の位相空間での位置 τ の関数として

$$eD\rho(\tau)\exp(-i\nu\frac{s}{R}+i\frac{\nu_{\beta 0}\xi}{\eta}\omega_0\tau) \quad (9.8)$$

で与えられる。ここで D は横方向のダイポールモーメントである：

$$D \equiv \frac{\iint y f_1 dy dp_y}{\iint f_0 dy dp_y}. \quad (9.9)$$

また関数 $\rho(\tau)$ は位置 τ でのビームの摂動項から発生する縦方向線密度である：

$$\rho(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(r_s, \phi_s) d\delta. \quad (9.10)$$

横方向の力 F_y はこのダイポール電流によるキックを過去のビームの周回からの寄与を足しあげることによって求まる：

$$\begin{aligned} F_y &= e^2 D \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \rho(\tau') \\ &\times \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-i\nu\left(\frac{s}{R} - 2\pi k\right) + i\frac{\nu_{\beta 0}\xi}{\eta}\omega_0\tau') \\ &\times W_T((\tau' - \tau)\beta c + kC_0) \end{aligned} \quad (9.11)$$

ここで

$$C_0 = 2\pi R = \beta c T_0 \quad (9.12)$$

はリングの平均周長である。

$$W_T(z) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z_T(\omega) \exp(-i\omega\frac{z}{\beta c}) d\omega \quad (9.13)$$

を使って式(9.11)を変換すると

$$\begin{aligned} F_y &= \frac{ie^2 D}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \rho(\tau') \exp(-i\nu\frac{s}{R} + i\frac{\nu_{\beta 0}\xi}{\eta}\omega_0\tau') \\ &\times \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp(-i\omega(\tau' - \tau + kT_0)) \\ &\times Z_T(\omega) \exp(i\nu 2\pi k) \end{aligned} \quad (9.14)$$

となる。

ポアッソンの公式

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-ikx) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi p) \quad (9.15)$$

を使うと式(9.14)は以下の様に変換される：

$$\begin{aligned} F_y &= \frac{ie^2 D}{2\pi T_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \rho(\tau') \exp(-i\nu\frac{s}{R} + i\frac{\nu_{\beta 0}\xi}{\eta}\omega_0\tau') \\ &\times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp(-i\omega(\tau' - \tau)) \cdot Z_T(\omega) \delta(\omega - \nu\omega_0 - p\omega_0) \\ &= \frac{ie^2 D}{2\pi T_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \rho(\tau') \exp(-i\nu\frac{s}{R} + i\frac{\nu_{\beta 0}\xi}{\eta}\omega_0\tau') \\ &\times \sum_p Z_T(\nu\omega_0 + p\omega_0) \exp(-i(\tau' - \tau)(\nu\omega_0 + p\omega_0)) \\ &= \frac{ie^2 D}{T_0} \exp(-i\nu\frac{s}{R}) \sum_p Z_T(\nu\omega_0 + p\omega_0) \exp(i(\nu\omega_0 + p\omega_0)\tau) \\ &\times \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \rho(\tau') \exp(-i\left((\nu\omega_0 + p\omega_0) - \frac{\nu_{\beta 0}\xi}{\eta}\omega_0\right)\tau') \end{aligned} \quad (9.16)$$

線密度 $\rho(\tau)$ のフーリエ変換を以下の様に導入すると、

$$\tilde{\rho}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau, \quad (9.17)$$

式(9.16)は

$$F_y = \frac{ie^2 D}{T_0} \exp(-i\nu \frac{s}{R}) \sum_p Z_T(\nu\omega_0 + p\omega_0) \times \exp(i(\nu\omega_0 + p\omega_0)\tau) \tilde{\rho}\left(\nu\omega_0 + p\omega_0 - \frac{\nu_{\beta 0}\xi}{\eta}\omega_0\right) \quad (9.18)$$

となる。この結果を式 (9.7) に入れると

$$\left(-i\nu f_1 g_1 + \nu_{\beta 0} \frac{\partial f_1}{\partial \phi_y} g_1 + \nu_{s0} f_1 \frac{\partial g_1}{\partial \phi_s}\right) - \frac{ie^2 D c \beta}{4\pi^2 E_0 \nu_{\beta 0}} \sin \phi_y \frac{df_0}{dr_y} g_0 \sum_p Z_T(\nu\omega_0 + p\omega_0) \times \exp(i(\nu\omega_0 + p\omega_0 - \frac{\nu_{\beta 0}\xi}{\eta}\omega_0)\tau) \times \tilde{\rho}\left(\nu\omega_0 + p\omega_0 - \frac{\nu_{\beta 0}\xi}{\eta}\omega_0\right) = 0 \quad (9.19)$$

となる。この方程式の $f_1(r_y, \phi_y)$ の解は簡単に求まる：

$$f_1(r_y, \phi_y) = -D \frac{df_0(r_y)}{dr_y} \exp(i\phi_y) \quad (9.20)$$

この解を式 (9.19) にいれてると次の式を得る：

$$i\left(-\nu + \nu_{\beta 0} + \nu_{s0} \frac{\partial}{\partial \phi_s}\right) g_1 + \frac{ie^2 c \beta}{8\pi^2 E_0 \nu_{\beta 0}} g_0 \sum_p Z_T(\nu\omega_0 + p\omega_0) \times \exp(i(\nu\omega_0 + p\omega_0 - \frac{\nu_{\beta 0}\xi}{\eta}\omega_0)\tau) \times \tilde{\rho}\left(\nu\omega_0 + p\omega_0 - \frac{\nu_{\beta 0}\xi}{\eta}\omega_0\right) = 0 \quad (9.21)$$

あとは g_1 の解を求めればよい。関数 g_1 は位相空間で ϕ_s に関する周期性があるので、 ϕ_s に関してフーリエ展開できる：

$$g_1(r_s, \phi_s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m(r_s) \exp(im\phi_s). \quad (9.22)$$

ここで m はシンクロトロン振動の次数であり、またヘッドテイル不安定性のモード番号を表す。この解を式 (9.21) に入れ、両辺に $\exp(-im\phi_s)$ をかけた後、 ϕ_s について積分する。結果を整理すると

$$(\nu - \nu_{\beta 0} - m\nu_{s0}) g_m(r_s) = -i \frac{e^2 c \beta}{8\pi^2 E_0 \nu_{\beta 0}} g_0 \sum_p Z_T(\nu\omega_0 + p\omega_0) \times \tilde{\rho}\left(\nu\omega_0 + p\omega_0 - \frac{\nu_{\beta 0}\xi}{\eta}\omega_0\right) \times i^m J_m\left((\nu\omega_0 + p\omega_0 - \frac{\nu_{\beta 0}\xi}{\eta}\omega_0)r_s\right) \quad (9.23)$$

を得る。ここで公式

$$\int_0^{2\pi} \exp(iqr_s \cos \phi_s - m\phi_s) d\phi_s = 2\pi i^m J_m(qr_s) \quad (9.24)$$

を使った。線密度 $\rho(\tau)$ のフーリエ変換の式 (9.17) に式 (9.10) と式 (9.22) を挿入し、同じ公式 (9.24) を使って結果を整理すると

$$\tilde{\rho}\left(\nu\omega_0 + p\omega_0 - \frac{\nu_{\beta 0}\xi}{\eta}\omega_0\right) = 2\pi\omega_0 \frac{\nu_{s0}}{\eta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{-n} \int_0^{\infty} g_n(r_s) J_n\left((\nu\omega_0 + p\omega_0 - \frac{\nu_{\beta 0}\xi}{\eta}\omega_0)r_s\right) r_s dr_s \quad (9.25)$$

となる。この式を式 (9.23) に入れると、以下のような関数 $g_m(r_s)$ に関する積分方程式を得る：

$$\begin{aligned}
& (\nu - \nu_{\beta 0} - m\nu_{s0})g_m(r_s) \\
&= -i \frac{e^2 \omega_0 \nu_{s0} \beta c}{4\pi E_0 \nu_{\beta 0} \eta} g_0 \sum_p Z_T(\nu \omega_0 + p\omega_0) \\
&\times i^m J_m \left((\nu \omega_0 + p\omega_0 - \frac{\nu_{\beta 0} \xi}{\eta} \omega_0) r_s \right) \\
&\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{-n} \int_0^{\infty} g_n(r'_s) J_n \left((\nu \omega_0 + p\omega_0 - \frac{\nu_{\beta 0} \xi}{\eta} \omega_0) r'_s \right) r'_s dr'_s
\end{aligned} \tag{9.26}$$

この積分方程式を解くには非摂動関数 $g_0(r_s)$ を仮定しなければならない。簡単のため、 $g_0(r_s)$ は位相空間上で半径 $\hat{\tau}$ のところだけに存在する関数だとして (エアバッグモデル) :

$$g_0(r_s) = \frac{N\eta}{2\pi\beta c} \frac{R}{\nu_{s0}\hat{\tau}} \delta(r - \hat{\tau}). \tag{9.27}$$

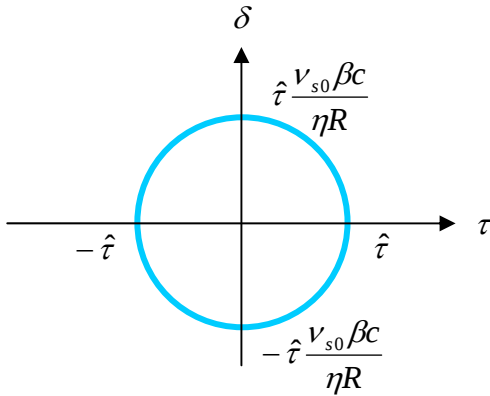


Fig. 49 縦方向位相空間での粒子分布：エアバッグモデル。

この時解 $g_m(r_s)$ は

$$g_m(r_s) = a_m \delta(r - \hat{\tau}) \tag{9.28}$$

となるので、式 (9.27) と (9.28) を積分方程式 (9.26) に入れ、右辺の ν を $\nu_{\beta 0} + m\nu_{s0}$ で近似すると、係数 a_m に関する連立方程式を得る：

$$\begin{aligned}
& (\nu - \nu_{\beta 0} - m\nu_{s0})a_m \\
&= -i \frac{I_b R}{4\pi_0 \nu_{\beta 0} E_0 / e} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{m-n} a_n \sum_p Z_T(\omega'_p) \\
&J_m \left((\omega'_p - \frac{\nu_{\beta 0} \xi}{\eta} \omega_0) \hat{\tau} \right) J_n \left((\omega'_p - \frac{\nu_{\beta 0} \xi}{\eta} \omega_0) \hat{\tau} \right)
\end{aligned} \tag{9.29}$$

ここで

$$\omega'_p = (p + \nu_{\beta 0} + m\nu_{s0})\omega_0 \tag{9.30}$$

である。

この連立方程式の固有振動数解 ν は以下の式を解くことで得られる：

$$\det((\nu - \nu_{\beta 0})\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0. \tag{9.31}$$

ここで $\mathbf{I}$ は単位行列で、行列 $\mathbf{A}$ の要素は以下の式で与えられる：

$$A_{mn} = m\nu_{s0}\delta_{mn} + M_{mn}. \tag{9.32}$$

ここで行列 M_{mn} の要素は

$$\begin{aligned}
M_{mn} &= -i \frac{I_b R}{4\pi_0 \nu_{\beta 0} E_0 / e} i^{m-n} \sum_{p=-\infty}^{\infty} Z_T(\omega'_p) \\
&J_m \left((\omega'_p - \frac{\nu_{\beta 0} \xi}{\eta} \omega_0) \hat{\tau} \right) J_n \left((\omega'_p - \frac{\nu_{\beta 0} \xi}{\eta} \omega_0) \hat{\tau} \right)
\end{aligned} \tag{9.33}$$

で与えられる。この連立方程式を正確に解けば横方向のモード結合不安定性の解析が可能になる。仮に摂動が小さく、固有振動数解 ν が $\nu_{\beta 0} + m\nu_{s0}$ とあまり変わらないときはモード間の相互作用を無視することができ、式 (9.31) の解は近似的に以下の式で与えられる：

$$\begin{aligned} \nu - \nu_{\beta 0} - m \nu_{s0} &\cong -i \frac{I_b R}{4 \pi \nu_{\beta 0} E_0 / e} \sum_{p=-\infty}^{\infty} Z_T(\omega_p') \\ &\times J_m^2 \left(\left(\omega_p' - \frac{\nu_{\beta 0} \xi}{\eta} \omega_0 \right) \hat{r} \right) \end{aligned}$$

(9.34)