

# ERL入射部でのビーム力学

高エネルギー加速器研究機構  
物質構造科学研究所 放射光源研究系  
宮島 司

OHO'08, Lecture 2-4 (14:00 – 15:00)

2008年9月3日(水)

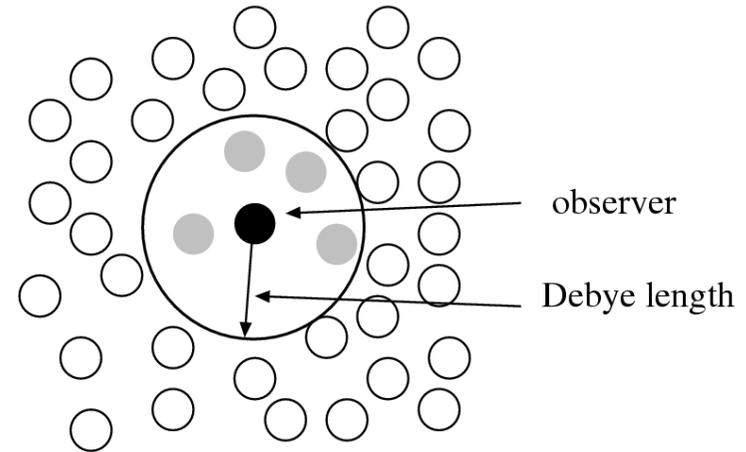
# 目次

- 前半の講義 (Lecture 2-3, 11:30 – 12:30)
  - ERL入射部の役割
  - ERL入射部を構成する要素
  - ERL入射部で重要となる物理
  - ビームを構成する単粒子の運動方程式
- 後半の講義 (Lecture 2-4, 14:00 – 15:00)
  - 電子バンチ内での空間電荷効果
  - 空間電荷効果による投影エミッタンスの増減
  - 空間電荷効果の数値計算
  - 合流部での物理

# 空間電荷効果

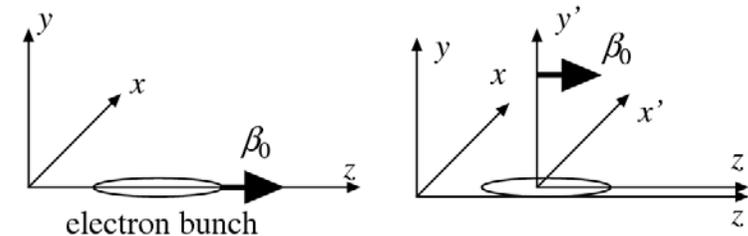
# 空間電荷効果の分類

- ビーム内での荷電粒子間には Coulomb相互作用が働く
  - 同じ電荷符号: 斥力
  - 異なる電荷符号: 引力
- ビームのように非常に多くの荷電粒子を含む場合
  - 離れた距離にある粒子集団からの相互作用全体: **空間的に滑らかな力**
  - 近接した粒子からの相互作用: **強い力 (衝突的、局所的な配置に強く依存)**
- ビームの静止系での相互作用
  - 静止系ではビーム内の粒子間の速度差は非相対論的であるとする
  - ビームはN個の粒子からなる



Laboratory frame

Rest frame



粒子jが粒子iに及ぼすCoulomb力

$$F_{ij} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_{ij}}{r_{ij}^3}$$



ビーム全体が粒子iに及ぼす力

$$F_i = \sum_{j \neq i}^N \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_{ij}}{r_{ij}^3}$$

ビーム全体が粒子*i*に及ぼす力

$$F_i = \sum_{j \neq i}^N \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3}$$

- Coulomb力の性質として、ある程度距離の離れた粒子からの力も $F_i$ に寄与する  
これらの多数の小さい力が集まって空間的に滑らかなポテンシャルが形成される  
 $\phi_s(\mathbf{r}, t)$
- ただし、粒子*i*に極めて近い位置にも幾つかの粒子がある  
粒子*i*との局所的な位置関係に強く依存した強い力
- 空間的に滑らかなポテンシャルと局所的な(衝突的な)力に分けると

$$F_i = \sum_{j \neq i}^N \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3} \quad \longrightarrow \quad F_i = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \phi_s(\mathbf{r}, t) + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3}$$

右辺第2項の和は、粒子*i*に極めて近い粒子についての和

どの程度の距離まで、そのような局所的な強い力となるかを示す指針

Debye長

空間的に滑らかなポテンシャル

電荷分布密度から計算できる

$$\phi_s(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV$$

# プラズマの場合のDebye遮蔽

- 1価のイオンと電子からなる中性なプラズマのDebye長
- プラズマは温度Tで熱平衡状態にある
- 球座標で考え、プラズマの中心( $r=0$ )にテスト電荷 $q$ を置く  
電荷分布は中性から外れ、ポテンシャル $\phi(r)$ が生じる
- イオンと電子の分布 Maxwell分布

$$n(r) = n_0 \exp\left[-\frac{q\phi(r)}{k_B T}\right] \quad n_0 = n(0)$$

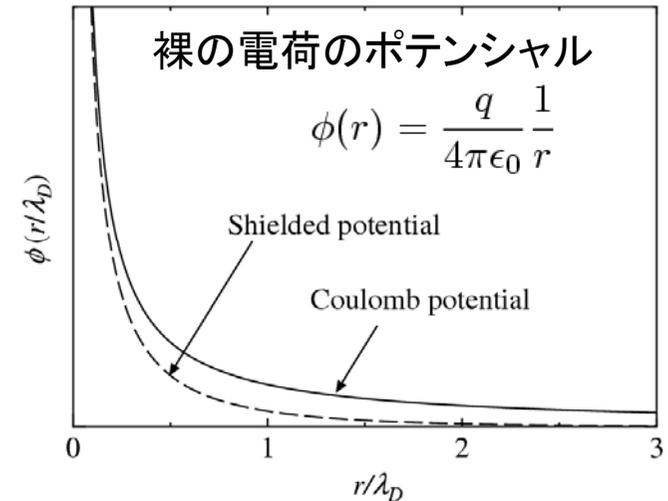
このポテンシャルはイオンと電子から作られる電荷分布のずれから生じる: Poisson方程式

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(r) &= -\frac{q}{\epsilon_0} n_i(r) - n_e(r) \\ &= -\frac{q}{\epsilon_0} n_0 \left[ \exp\left(-\frac{q\phi(r)}{k_B T}\right) - \exp\left(\frac{q\phi(r)}{k_B T}\right) \right] \end{aligned}$$

指数関数を展開し1次の項のみを残す

$$\nabla^2 \phi(r) = \frac{q}{\epsilon_0} \left[ \frac{2q\phi(r)}{k_B T} \right] = 2 \frac{\phi(r)}{\lambda_D^2}$$

$$\text{Debye長 } \lambda_D = \left( \frac{\epsilon_0 k_B T}{q^2 n_0} \right)^{1/2} \quad \lambda_D = \frac{\bar{v}_x}{\omega_p}$$



$$\text{プラズマ周波数 } \omega_p = (q^2 n / \epsilon_0 m)^{1/2}$$

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}r}{\lambda_D}\right)$$

Debye長の外側では、Coulomb力が遮蔽される

# 相対論的電子ビームのDebye長

- 電子ビーム: 非中性プラズマ
- プラズマについての議論から電子ビームのDebye長を類推する
- 電子ビームのDebye長: 局所的な強い力がどの範囲まで重要かを示す

相対論的な速度をもつ電子ビームの運動方程式

$$\ddot{x} = \omega_p^2/2 = F_s/\gamma m$$

円筒断面をもつ連続ビームによる空間電荷力

$$F_s = q^2 n r / (2\epsilon_0 \gamma^2)$$



相対論的な電子ビームのプラズマ周波数

$$\omega_p = \left( \frac{q^2 n}{\epsilon_0 \gamma^3 m} \right)^{1/2}$$

ビームが実験室系の温度 $T$ で熱平衡状態にある場合

$$\bar{v}_x = (k_B T / \gamma m)^{1/2}$$

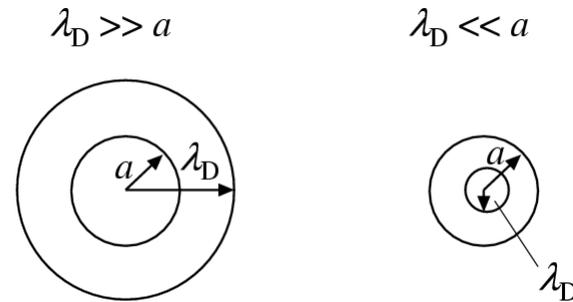
相対論的な電子ビームのDebye長

$$\lambda_D = \frac{\bar{v}_x}{\omega_p} = \left( \frac{\epsilon_0 m \gamma^3 \bar{v}_x^2}{q^2 n} \right)^{1/2}$$



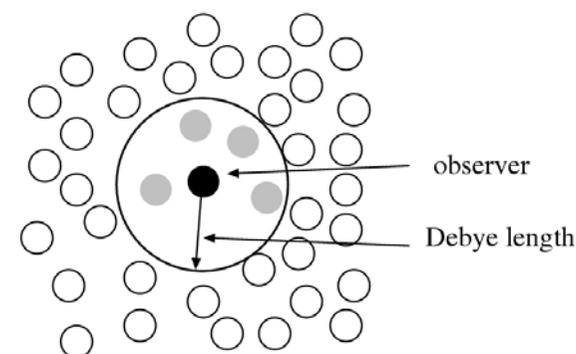
$$\lambda_D = \left( \frac{\epsilon_0 \gamma^2 k_B T}{q^2 n} \right)^{1/2}$$

- ビーム内での空間電荷効果の分類
- ビームの半径:  $a$
- ビーム内の粒子間平均距離:  $l_p$



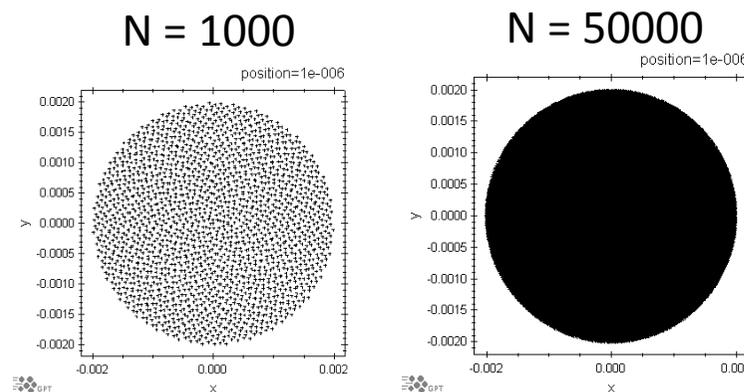
- $\lambda_D \gg l_p$  の場合: Debye長の内側に十分多くの粒子が含まれる
  - $\lambda_D \gg a$ : 衝突的な力が強い、エミッタンスが支配的な領域  
 ビーム内粒子はDebye長以内に収まる  
 数多くの粒子から受ける衝突的な力が支配的  
 衝突的な力によりビーム内粒子間でのエネルギーのやり取りが十分に行われる 熱平衡状態に達する  
 統計力学からの類推によって、個別の相互作用を無視して、6次元位相空間をもつ単粒子の集団として扱える  
 エミッタンスは保存
  - $\lambda_D \ll a$ : 集団的な効果による空間的に滑らかな力が支配的な領域  
 粒子の多くはDebye長の外にある  
 空間的に滑らかな力が支配的となる  
 空間電荷効果が線形な場合にはエミッタンスは保存
  - $\lambda_D \sim a$ : 衝突的な力、空間的に滑らかな力の両方が重要

$\lambda_D \sim l_p$  の場合: Debye長の内側に入る粒子の数は限られてくる  
 ビームの温度が極端に低い、粒子密度が極端に高いとき  
 着目する粒子の極近傍にいる少数の粒子からの力が支配的



- マクロ粒子を用いたビームのシミュレーション
- マクロ粒子の数が重要となる

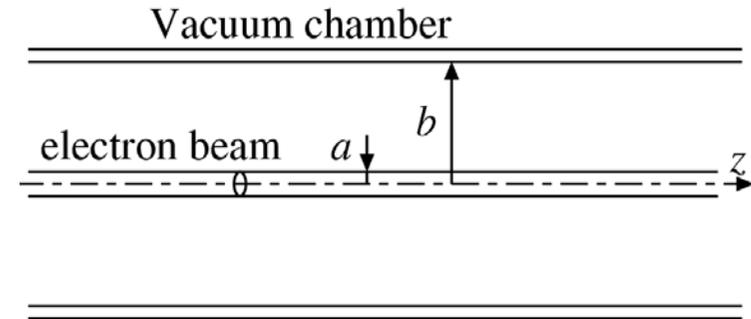
- マクロ粒子の数が多い場合  
 ビーム内の粒子間距離が近くなる  
 Debye長内に入る粒子数は多くなる
- マクロ粒子の数が少ない場合  
 ビーム内の粒子間距離が遠くなる  
 少数の局所的な力による効果が強くなる



- 現実のビームに近づけるには、多くのマクロ粒子が必要となる
- シミュレーションの際には、Debye長と粒子間距離から、どの程度のマクロ粒子が必要となるかを把握しておく必要がある

# 空間電荷効果を含んだ ビーム内電子の方程式

- $z$ 軸上を進行する連続ビーム
- ビームは半径 $a$ の円形断面をもち、半径 $b$ の同心円真空チェンバーの中を進行する
- ビーム軸上と真空チェンバー壁面でのポテンシャルの差は、運動エネルギーに比べて十分小さい
- 真空チェンバー壁面での鏡像電荷が及ぼす影響は無視
- ビームの粒子密度は、ビーム内で一定、ビーム外ではゼロ ビーム内の電流密度は一様
- 全てのビーム粒子は軌道上に沿って運動し、その軌道は交差しない
- ビーム進行方向に沿ったあらゆる位置で、ビーム断面は時間に依存して変化しない
- 粒子の軌道は、近軸光線近似に従う



ビームの電荷密度と電流密度

$$J = \rho v$$

$v$ はビームの速度

ビーム断面上で、電荷密度、電流密度、ビームの速度が一定であると仮定すると

$$J_z = J = \frac{I}{\pi a^2},$$

$$\rho = \rho_0 = \frac{I}{\pi a^2 v},$$

- 円筒形ビームで電荷密度が一定の場合、電場は半径方向成分のみが残る

$$E_r(r) = \frac{\rho_0 r}{2\epsilon_0} = \frac{I r}{2\pi\epsilon_0 a^2 v}, (r \leq a),$$

$$E_r(r) = \frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0 r} = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 v r}, (r > a),$$

- 磁場は円周方向成分のみが残る

$$B_\theta(r) = \mu_0 \frac{I r}{2\pi a^2}, (r \leq a),$$

$$B_\theta(r) = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}, (r > a)$$

- 半径方向の運動方程式

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \dot{r}) - \gamma m r \dot{\theta}^2 = q(E_r + r\dot{\theta}B_z - \dot{z}B_\theta)$$

↓ 外部電磁場による加減速なし ( $\gamma = \text{const.}$ )  
 ↓ 円周方向の速度が十分小さい  $qr\dot{\theta}B_z$  を無視

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \dot{r}) = m\gamma \ddot{r} = qE_r - q\dot{z}B_\theta$$

電場と磁場を代入

$$m\gamma \ddot{r} = \frac{qIr}{2\pi\epsilon_0 a^2 \beta c} (1 - \beta^2) \quad \Rightarrow \quad r'' = \frac{qIr}{2\pi\epsilon_0 mc^3 \beta^3 \gamma^3 a^2}$$

時間による微分をzによる微分に置き換える

- 空間電荷効果の影響を表現するパラメタ
- 一般化されたパービアンズ(generalized perveance)

$$K = \frac{I}{I_0} \frac{2}{\beta^3 \gamma^3} = \frac{2\nu_B}{\beta^2 \gamma^3} = \frac{\omega_p^2 a^2}{2\beta^2 c^2}$$

- Budkerパラメタ

$$\nu_B = \frac{I}{I_0 \beta},$$

- Characteristic current

$$I_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 m c^3}{q},$$

- プラズマ周波数

$$\omega_p^2 = \frac{qI}{\pi\epsilon_0 m c \beta \gamma^3 a^2}$$

- 一般化されたパービアンズを用いると空間電荷効果を含んだ方程式は

$$r'' = \frac{K}{a^2} r$$

# ビームエンベロープ方程式

- 一般化されたパービアンズを用いると空間電荷効果を含んだ粒子の方程式は

$$r'' = \frac{K}{a^2} r$$

- ビームを構成する粒子の軌道が互いに交差しないと仮定 (laminar flow)
- 自由空間でのビームサイズ  $r_m$  の時間発展を記述するビームエンベロープ方程式

$$r_m'' = K \frac{1}{r_m} \quad \leftarrow \quad r = a = r_m$$

- ビームの半径  $r_m$  の代わりに、rmsビームサイズのエンベロープ方程式

$$\begin{aligned} \sigma'' &= \frac{K}{4} \frac{1}{\sigma} \quad \leftarrow \quad \sigma_x^2 = \frac{1}{\rho_{S0}} r d\theta \int_0^{2\pi} dr x^2 \rho_{S0} \\ &= \frac{1}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^a r^3 dr \\ &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

一様円形断面の場合のrmsビームサイズ

空間電荷効果がないときのビームエンベロープ方程式に空間電荷による項を付け加える

ビーム半径 $r_m$ についてのビームエンベロープ方程式

$$r_m'' + \frac{\gamma'}{\gamma\beta^2} r_m' + \frac{\gamma''}{2\gamma\beta^2} r_m + \left( \frac{qB}{2mc\beta\gamma} \right) r_m - \frac{p_\theta^2}{m^2 c^2 \gamma^2 \beta^2} \frac{1}{r_m^3} - \frac{\varepsilon_n^2}{\beta^3 \gamma^2} \frac{1}{r_m^3} - K \frac{1}{r_m} = 0$$

エネルギーの変化を考慮して規格化エミッタンス  $\varepsilon_n = \beta\gamma\varepsilon$  に置き換えた

Rmsビームサイズについてのビームエンベロープ方程式

$$\sigma'' + \frac{\gamma'}{\gamma\beta^2} \sigma' + \frac{\gamma''}{2\gamma\beta^2} \sigma + \left( \frac{qB}{2mc\beta\gamma} \right) \sigma - \frac{p_\theta^2}{m^2 c^2 \gamma^2 \beta^2} \frac{1}{\sigma^3} - \frac{\varepsilon_n^2}{\beta^3 \gamma^2} \frac{1}{\sigma^3} - \frac{K}{4} \frac{1}{\sigma} = 0$$

加速電場による収束発散

ソレノイドによる収束

円周方向運動量

エミッタンスの項

空間電荷の項

# 空間電荷効果による 投影エミッタンスの増減

# 投影エミッタンスの増減

- 空間電荷効果を含んだビームエンベロープ方程式を用いて、平衡状態からの微小な振動を考え、投影エミッタンスの増大を示す

$$\sigma'' + \frac{\gamma'}{\gamma\beta^2}\sigma' + K_r\sigma - \frac{\varepsilon_n^2}{\beta^3\gamma^2}\frac{1}{\sigma^3} - \frac{I}{2I_0\beta^3\gamma^3}\frac{1}{\sigma} = 0$$

ソレノイド、RF電磁場による収束を表す係数

一様な収束力の下での運動を考える  $K_r = \text{const.}$

初期の円周方向運動量: ゼロ ( $p_\theta = 0$ )

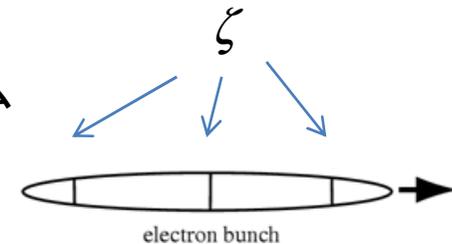
ビームは外部電磁場によって加速されない ( $\gamma' = 0$ )

空間電荷効果が支配的 エミッタンス項を無視

$$\cancel{\sigma'' + \frac{\gamma'}{\gamma\beta^2}\sigma' + K_r\sigma - \frac{\varepsilon_n^2}{\beta^3\gamma^2}\frac{1}{\sigma^3} - \frac{I}{2I_0\beta^3\gamma^3}\frac{1}{\sigma} = 0}$$

$$\sigma'' + K_r\sigma - \frac{I(\zeta)}{2I_0\beta^3\gamma^3}\frac{1}{\sigma} = 0$$

バンチ化されたビーム  
各スライス毎に  $I(\zeta)$



- スライス毎のビームエンベロープ方程式

$$\sigma'' + K_r \sigma - \frac{I(\zeta)}{2I_0 \beta^3 \gamma^3} \frac{1}{\sigma} = 0$$

$\sigma'' = 0$  (Brillouin flow) の場合、平衡状態でのビームサイズは

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{I(\zeta)}{2K_r I_0 \beta^3 \gamma^3}}$$

この  $\sigma_{eq}$  の周りで微小な振幅  $\delta\sigma$  で振動すると考える

$$\sigma(z, \zeta) = \sigma_{sq}(\zeta) + \delta\sigma(z)$$



微小な振動の方程式は

$$\delta\sigma'' + 2K_r \delta\sigma = 0 \quad \rightarrow \quad \text{角振動数 } \sqrt{2K_r} \text{ をもつ単振動}$$

初期条件  $\left\{ \begin{array}{l} \sigma(0, \zeta) = \sigma_{eq}(\zeta) + \delta\sigma(\zeta) = \sigma_0 \\ \sigma'(0, \zeta) = 0 \end{array} \right\}$  を持つ場合の解

$$\begin{aligned} \sigma(z, \zeta) &= \sigma_{eq}(\zeta) + \delta\sigma(\zeta) \cos(\sqrt{2K_r} z) \\ \sigma'(z, \zeta) &= -\sqrt{2K_r} \delta\sigma(\zeta) \sin(\sqrt{2K_r} z) \end{aligned}$$



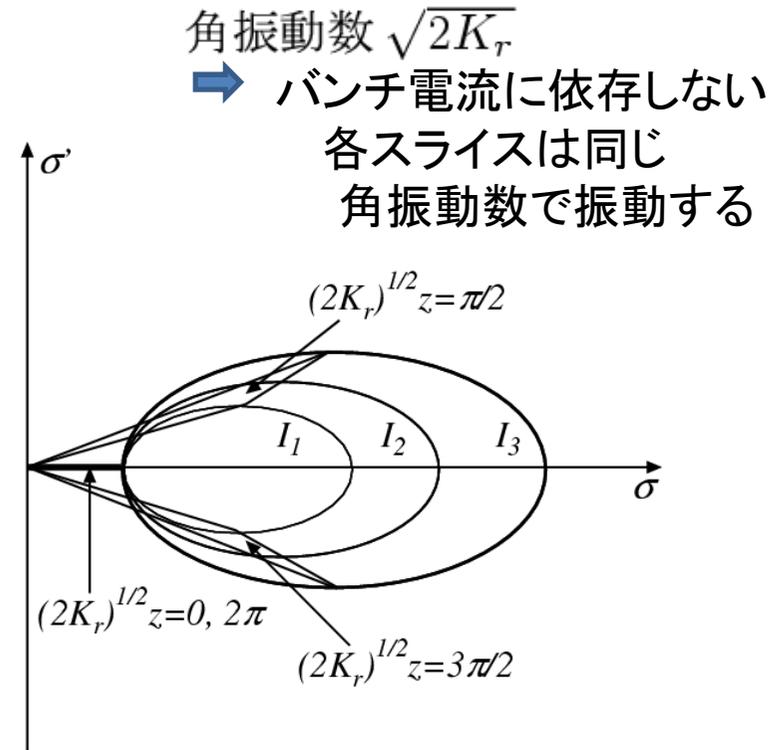
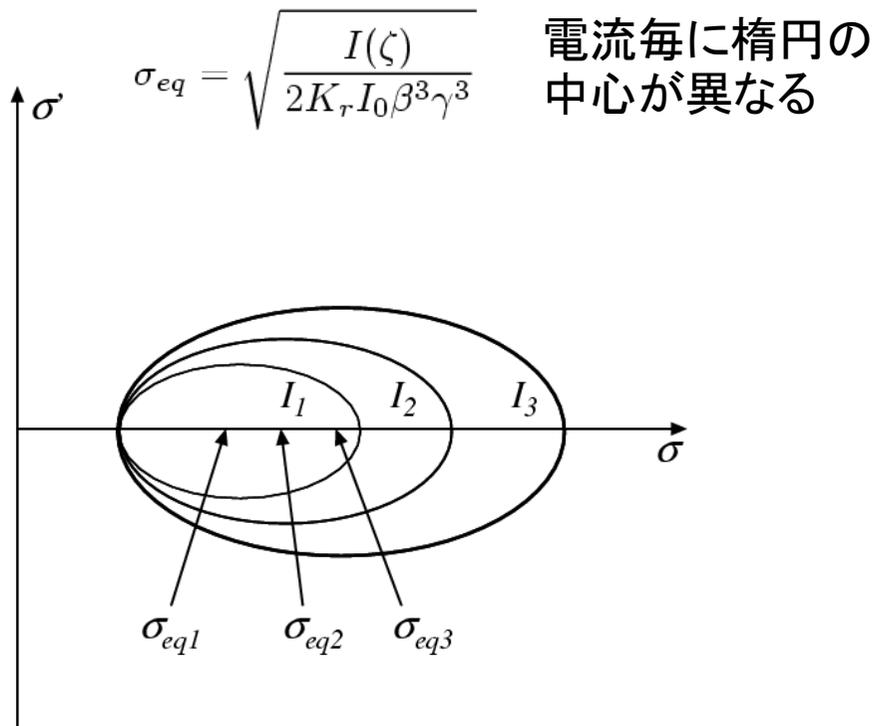
位相空間では、 $\sigma_{eq}$  を中心とした楕円となる

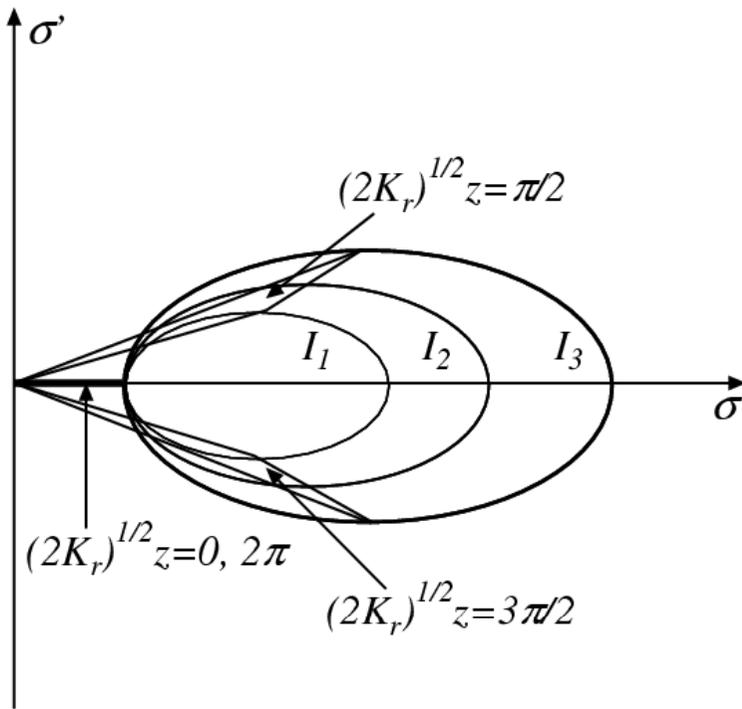
$$\sigma(z, \zeta) = \sigma_{eq}(\zeta) + \delta\sigma(\zeta) \cos(\sqrt{2K_r}z)$$

$$\sigma'(z, \zeta) = -\sqrt{2K_r}\delta\sigma(\zeta) \sin(\sqrt{2K_r}z)$$

位相空間では、 $\sigma_{eq}$ を中心とした楕円となる

- ビームが3つのスライスから構成される場合
- 各スライスは、 $I_1, I_2, I_3$ の電流をもつ
- $I_1 < I_2 < I_3$
- ビームの初期値: どのスライスでも  $(\sigma, \sigma') = (\sigma_0, 0)$





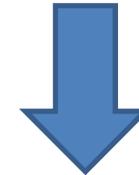
- 位相0: スライスが作る面積はゼロ
- 位相 $\pi/2$ : スライスが作る面積は最大
- 位相 $\pi$ : 面積は再びゼロ
- 位相 $3\pi/2$ : 再び面積最大

Rmsエミッタンス

$$\varepsilon(z) = \sqrt{\langle \sigma^2 \rangle \langle \sigma'^2 \rangle - \langle \sigma \sigma' \rangle^2}$$

各スライスではエミッタンスはゼロ

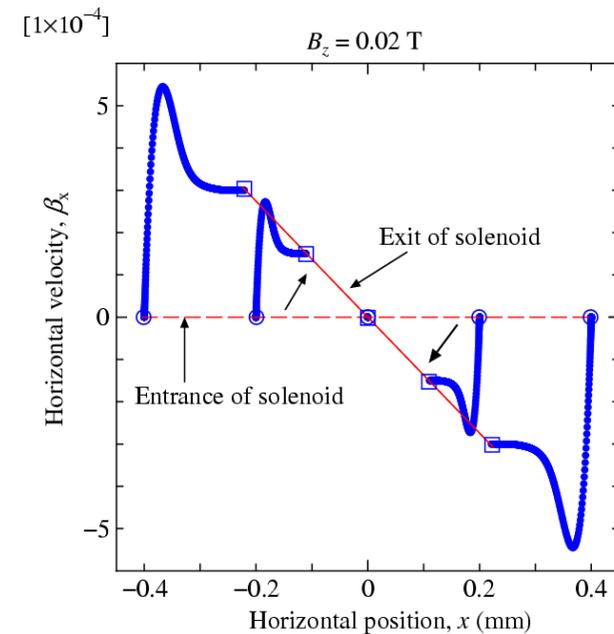
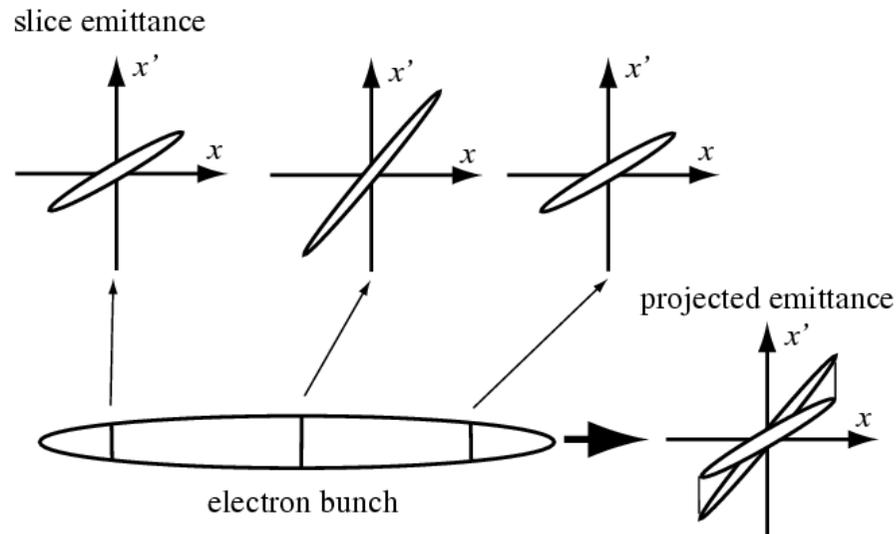
しかし、投影エミッタンスはゼロとはならない



空間電荷効果がある場合、スライス毎の電流が異なると、投影エミッタンスの増減が生じる

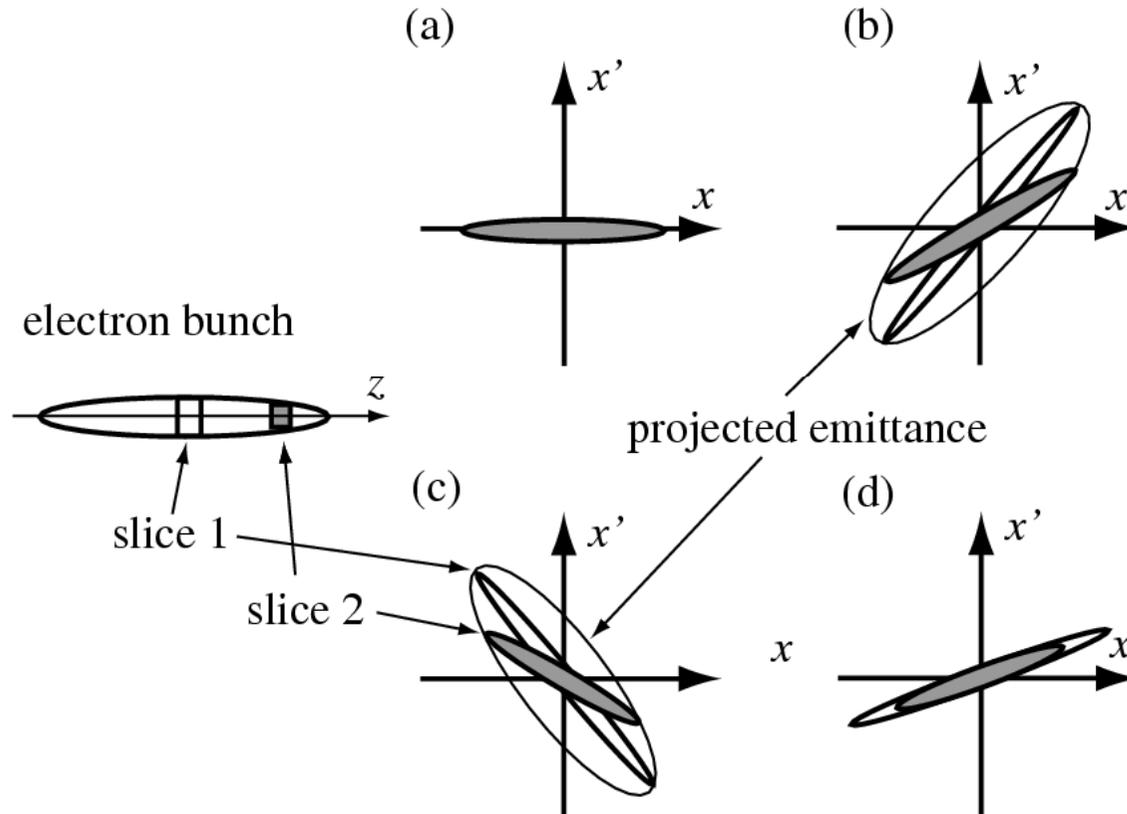
# ソレノイドによるエミッタンスの補償

- バンチ化されたビームで、スライス毎にビーム電流が異なる場合、投影エミッタンスの増減が起きることがわかった
- ERL入射器でも、電子銃で生成された電子バンチは、バンチ前後での空間電荷効果の違いによって、投影エミッタンスの増大が起きる
- これを回復するには、スライスのずれをもとにもどすようにすればよい  
ソレノイド(と自由空間)により可能



(a) 電子銃から電子ビーム  
が生成された直後  
スライスの不一致はない

(b) ソレノイド入口  
空間電荷効果によってスラ  
イスの不一致が生じる



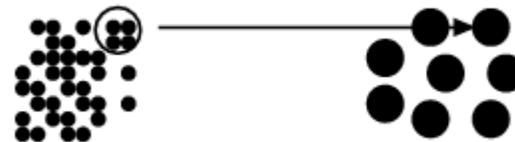
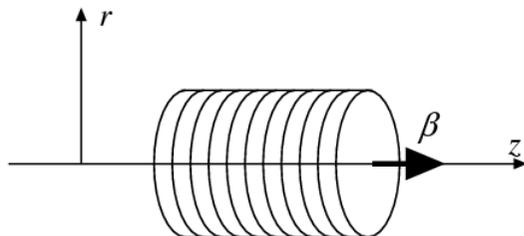
(c) ソレノイド出口  
適切な磁場を与えれば、  
位相空間分布を垂直方向に反転できる

(d) ソレノイド下流  
適切な距離自由空間を進むと  
スライスが一致する

# 空間電荷効果の数値計算

# 空間電荷効果を含んだ ビームのシミュレーション

- 現実の加速器: 複雑な電磁場、バンチ化されたビーム
- ビームを解析的に取り扱うことは難しい
- 多くの場合には、ERL入射器の設計などでは多くの場合、数値計算による方法が用いられる
- ERL: 1.3 GHz, 100 mA のビーム
  - 1 バンチあたりの電荷量:  $Q = -77 \text{ pC}$
- 電子バンチ内の電荷:  $N = Q/e = 4.8 \times 10^8$
- 数値計算で全ての電子間のCoulomb相互作用を直接計算すると、 $\sim N^2$ の計算回数 現実的ではない
- 直接電子を扱う代わりに、電子バンチの運動を記述する方法
  - 電子バンチを進行方向にスライスし、小さい幅をもつ多数の円筒の集まりと考える
  - 同じ $e/m$ を持ったマクロ粒子の集まりとして記述する
  - 電荷 $Q$ を持つバンチを $N_m$ 個のマクロ粒子で記述すると、一つのマクロ粒子あたり $Q/N_m$ の電荷となる



# 空間電荷効果の扱い方のレベル

1. 円筒スライスを用いた準解析的コード(スライス内では電荷密度が一定として、空間電荷効果の非線形性を無視)
  - ビームの運動は、各スライスの半径の大きさと進行方向の幅の変化で記述される
  - 基本的に扱うスライス数は粒子数に比べて少ないため、計算は高速
  - 複雑な粒子分布は扱えない
2. マクロ粒子を用い、ビームの静止系で静電場を計算
  - ビームの運動は、マクロ粒子の集団として記述される
  - 空間電荷計算は、粒子分布をビームの静止系にLorenz変換して、Poisson方程式から静電場を求める
  - マクロ粒子の数を増やせば、複雑な分布の扱える
  - ビームの静止系を定義するため、ビーム内の粒子の速度差が大きいと正しくない
3. 遅延ポテンシャルの効果を取り入れたコード(Lienard-Wichertポテンシャルを用いる)
  - マクロ粒子を用いる
  - Lienard-Wichertポテンシャルを解くため、余計な仮定を含まない厳密な計算が可能
  - ただし、計算に時間がかかる

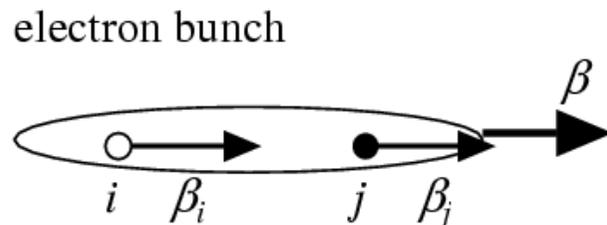
# 代表的な空間電荷計算コード

1. HOMDYN (レベル1、円筒対称ビーム)
2. ASTRA (レベル2、円筒対称ビーム)
3. Parmela (レベル2、円筒対称ビーム、3次元空間電荷効果)
4. GPT (レベル2、3次元空間電荷効果)
5. TREDI (レベル3)
6. PETAR (レベル3)

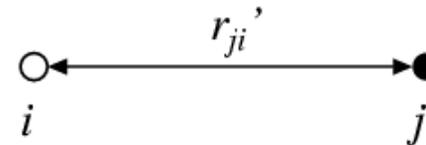
# 点電荷間の力を計算する方法

- ビームを構成するマクロ粒子のうち、2つを取り出し、その静止系にLorentz変換した後、Coulombの法則から、静電場を計算
- 逆Lorentz変換によって、静電場を実験室系の電磁場に変換する
- 長所: 電荷密度や電磁場の平均化などの近似を入れていない
- 短所: 粒子数が増えた場合には、計算時間が掛る
- また、マクロ粒子の数が少ない場合には、粒子間距離が近い場合に相互作用が非常に強くなる場合があり、数値的なノイズが生じる場合がある

(a) laboratory frame



(b) rest frame



- ビームは電荷 $Q$ を持つ、 $N$ 個のマクロ粒子から構成される
- 2つの粒子 $i, j$ を考え、マクロ粒子 $j$ が $i$ の位置に作る電磁場を求める

実験室系での粒子間距離  $\mathbf{r}_{ji} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$

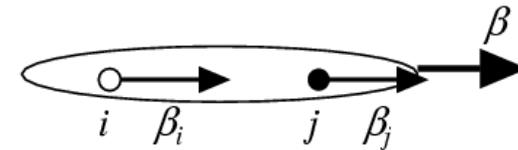
マクロ粒子 $j$ の静止系でみた粒子間距離

$$\mathbf{r}'_{ji} = \mathbf{r}_{ji} + \frac{\gamma_j^2}{\gamma_j + 1} (\mathbf{r}_{ji} \cdot \boldsymbol{\beta}_j) \boldsymbol{\beta}_j$$

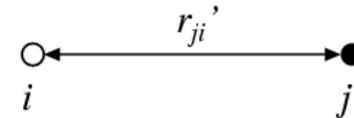
静止系での静電場

$$\mathbf{E}'_{ji} = \frac{Q \mathbf{r}'_{ji}}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}'_{ji}|^3}$$

(a) laboratory frame  
electron bunch



(b) rest frame



逆Lorentz変換

実験室系での電磁場

$$\mathbf{E}_{ji} = \gamma_j \left[ \mathbf{E}'_{ji} - \frac{\gamma_j}{\gamma_j + 1} (\boldsymbol{\beta}_j \cdot \mathbf{E}'_{ji}) \boldsymbol{\beta}_j \right]$$

$$\mathbf{B}_{ji} = \frac{\gamma_j \boldsymbol{\beta}_j \times \mathbf{E}'_{ji}}{c}$$

ビーム全体が $i$ の位置に作る電磁場

$$\mathbf{E}_i = \sum_{j \neq i} \gamma_j \left[ \mathbf{E}'_{ji} - \frac{\gamma_j}{\gamma_j + 1} (\boldsymbol{\beta}_j \cdot \mathbf{E}'_{ji}) \boldsymbol{\beta}_j \right]$$

$$\mathbf{B}_i = \sum_{j \neq i} \frac{\gamma_j \boldsymbol{\beta}_j \times \mathbf{E}'_{ji}}{c}$$

# ビームの静止系に設置した格子上で 静電場を計算する方法

- 空間電荷効果の計算方法の代表的なものとして、ビームの静止系でPoisson方程式を解いて静電場を求める方法がある
- Poisson方程式を解く際には、格子上での電荷密度から計算することになる
- 長所
  - 格子間隔内では粒子分布が平均化されるため、点電荷間の計算のときのような意図しない衝突的な力の影響を避けることができる
  - 粒子数が増えても、点電荷間の計算より高速
- 短所
  - 格子間隔によっては、細かい粒子分布が見えなくなってしまう
  - 格子サイズと粒子数の選び方が重要
  - Lorenz変換する際に、ビーム全体の静止系を仮定しているため、エネルギー拡がり大きいビームの場合には、速度差のため厳密な静止系を定義できない
  - エネルギー拡がり大きい場合には、注意が必要

## 計算の流れ

1. ビームの静止系を求める

$$\beta_0 = \frac{\sum \gamma_i \beta_i}{\sum n_i \gamma_i}$$

$$\gamma_0 \beta_0 = \frac{\beta_0}{\sqrt{1 - \beta_0^2}},$$

$$\gamma_0 = \sqrt{1 + \gamma_0^2 \beta_0^2}$$

2. ビームを構成するマクロ粒子の位置と速度 ( $\mathbf{r}_i$ ,  $\mathbf{u}_i$ ) を、ビームの静止系に Lorentz 変換する

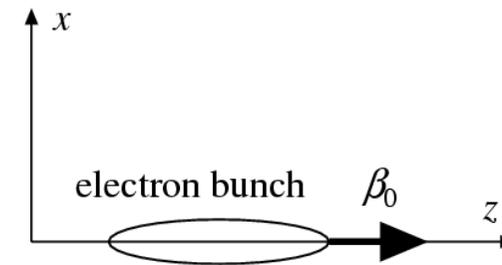
$$(\mathbf{r}'_i, \mathbf{u}'_i) \quad \mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \frac{\mathbf{r}_i \cdot \gamma_0 \beta_0}{\gamma_0 + 1} \gamma_0 \beta_0$$

3. ビームの静止系で、ビームを含む空間中に格子を作成し、格子点上での電荷密度  $\rho$  を計算する

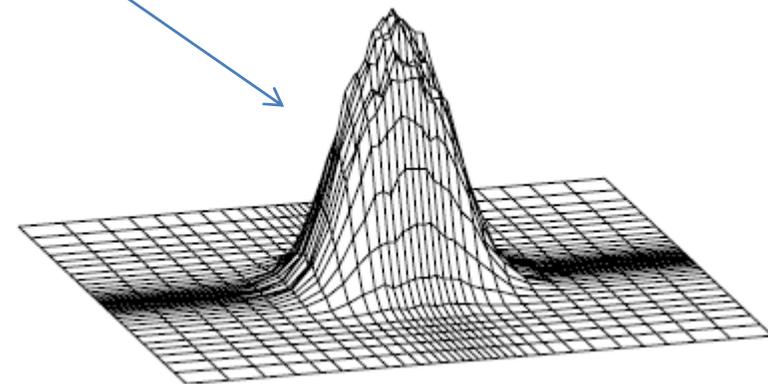
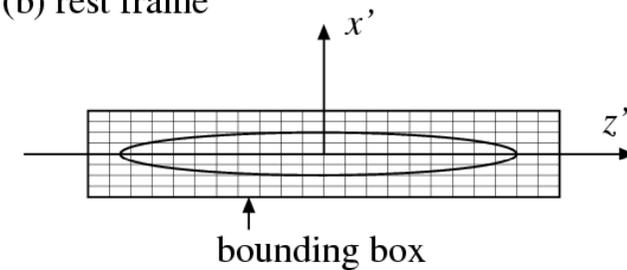
4. 電荷密度  $\rho$  に対して Poisson 方程式を解き、電ポテンシャル  $V$  を計算する

$$-\nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

(a) laboratory frame



(b) rest frame



格子の作り方の例(GPT user manual)

5. 静電ポテンシャル  $V$  から、各粒子の位置での静電場  $E'_i$  を求める

$$\mathbf{E}' = -\nabla V$$

6. 求めた静電場  $E'_i$  を逆 Lorentz 変換して、実験室系での電磁場を求める

$$\mathbf{E}_i = \gamma_0 \left[ \mathbf{E}'_i - \frac{\gamma_0}{\gamma_0 + 1} (\boldsymbol{\beta}_0 \cdot \mathbf{E}'_i) \boldsymbol{\beta}_0 \right]$$
$$\mathbf{B}_i = \frac{\gamma_0 \boldsymbol{\beta}_0 \times \mathbf{E}'_i}{c}$$

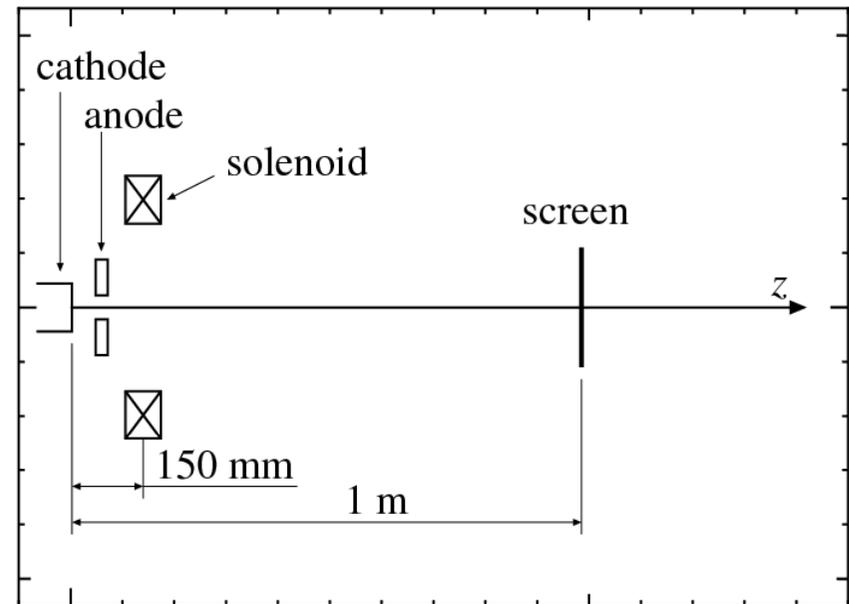
7. 実験室系での電磁場からマクロ粒子に加わる力を計算し、次の時間ステップの粒子の位置と速度を計算する

この方法では、空間電荷力は空間的に滑らかな力となる  
対象とするビームが衝突的な力が重要な場合には、注意が必要  
Debye長を求め、空間電荷力の計算法を選択する必要がある

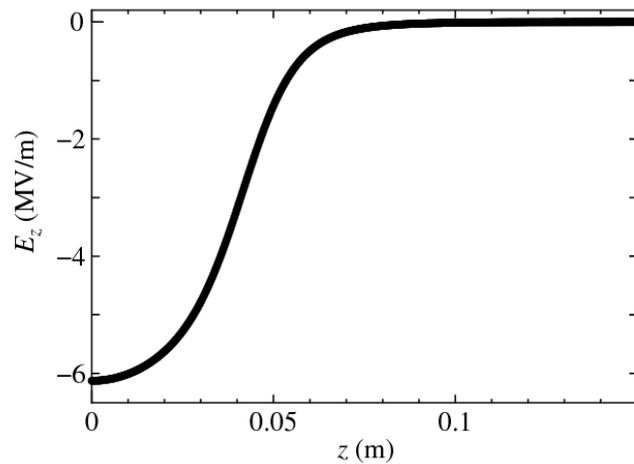
# 計算例1

## DC電子銃のシミュレーション

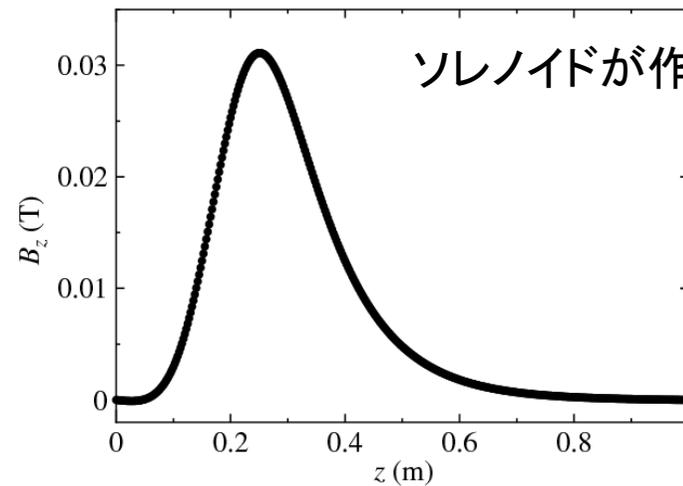
- GPT(General Particle Tracer)による空間電荷効果を含んだシミュレーション
- ビームライン: JAEA-type 光電陰極DC電子銃
- $z=1\text{ m}$  の位置で仮想的なスクリーンを設置



電子銃が作る静電場



ソレノイドが作る静磁場

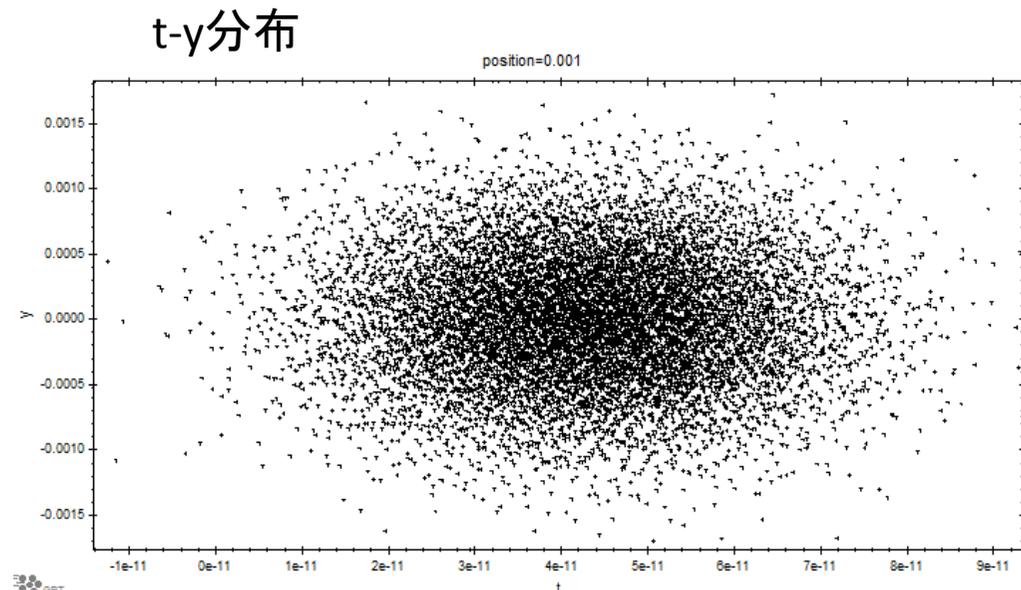
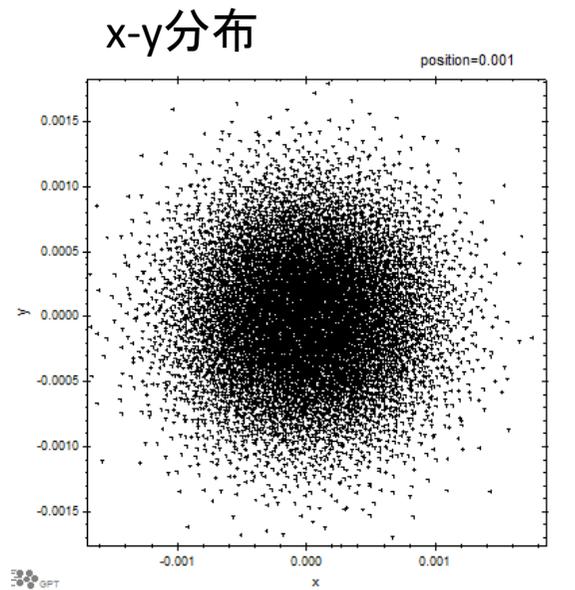


---

バンチ電荷	-80 pC
電子銃電圧	250 kV
初期分布	ガウス分布
初期 $\sigma_x, \sigma_y$	0.5 mm
初期 $\sigma_t$	15 ps
初期分布の生成法	準乱数 [28]
空間電荷効果の計算	sc3dmesh [24]
マクロ粒子の数	20000

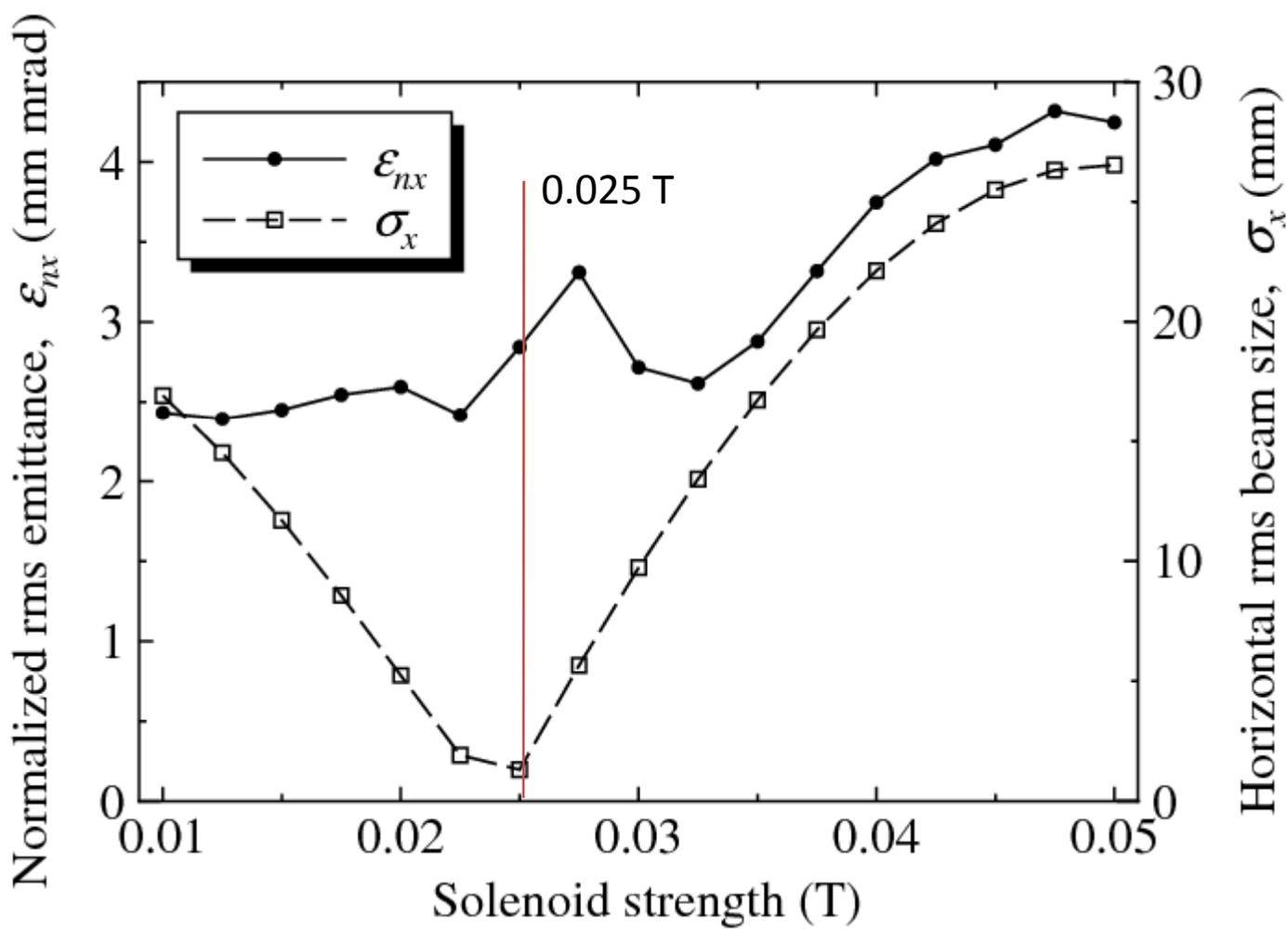
---

## 初期分布

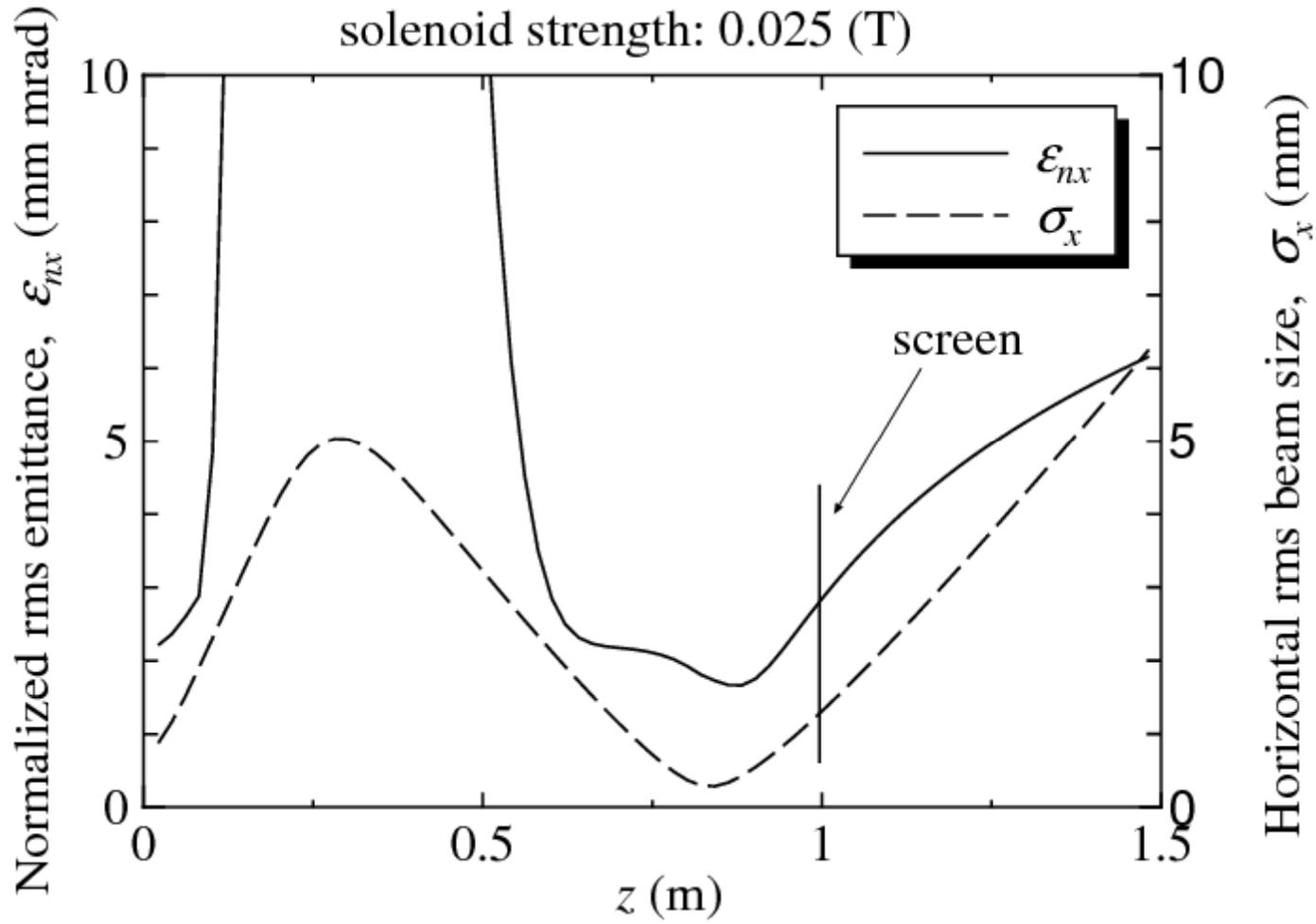


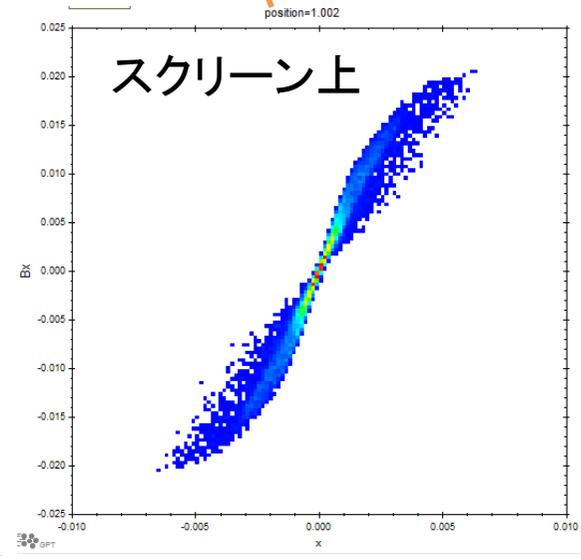
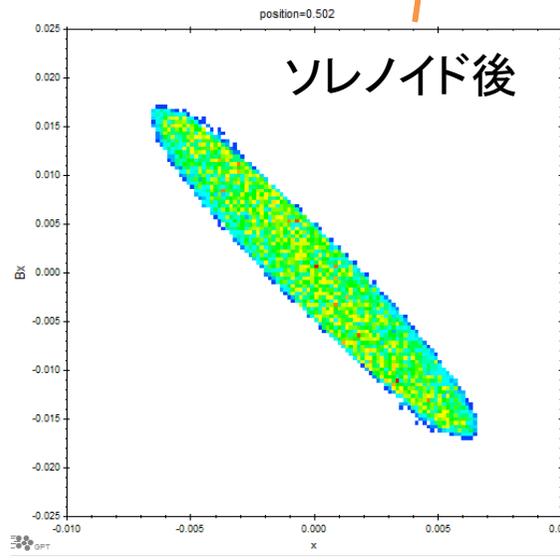
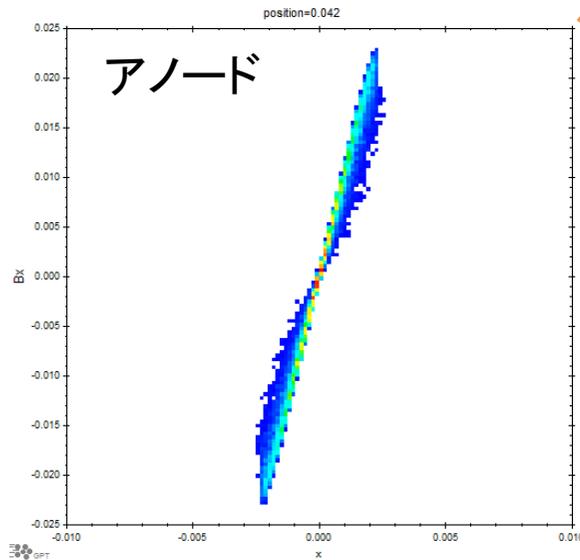
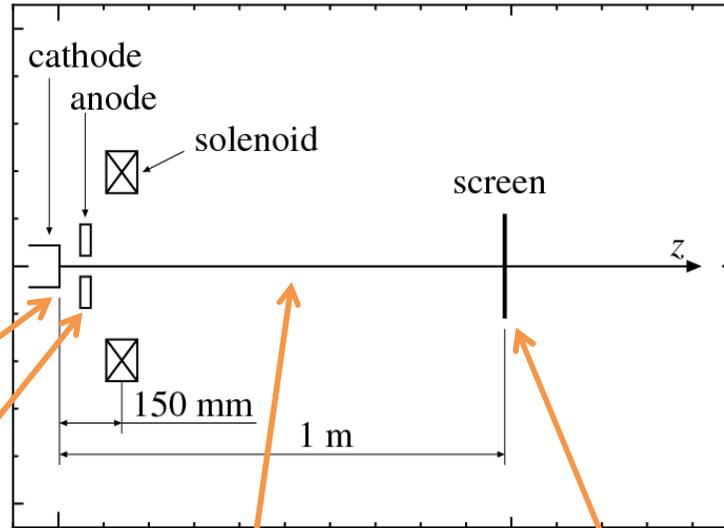
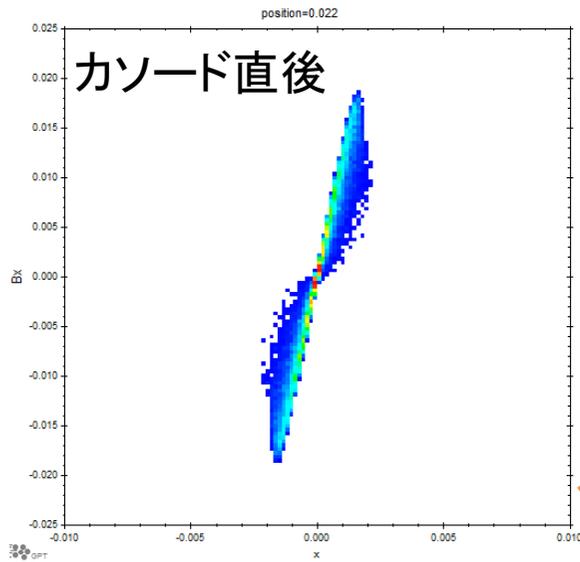
## ソレノイドの強さの影響

$z=1$  mでの規格化rmsエミッタンスとビームサイズ



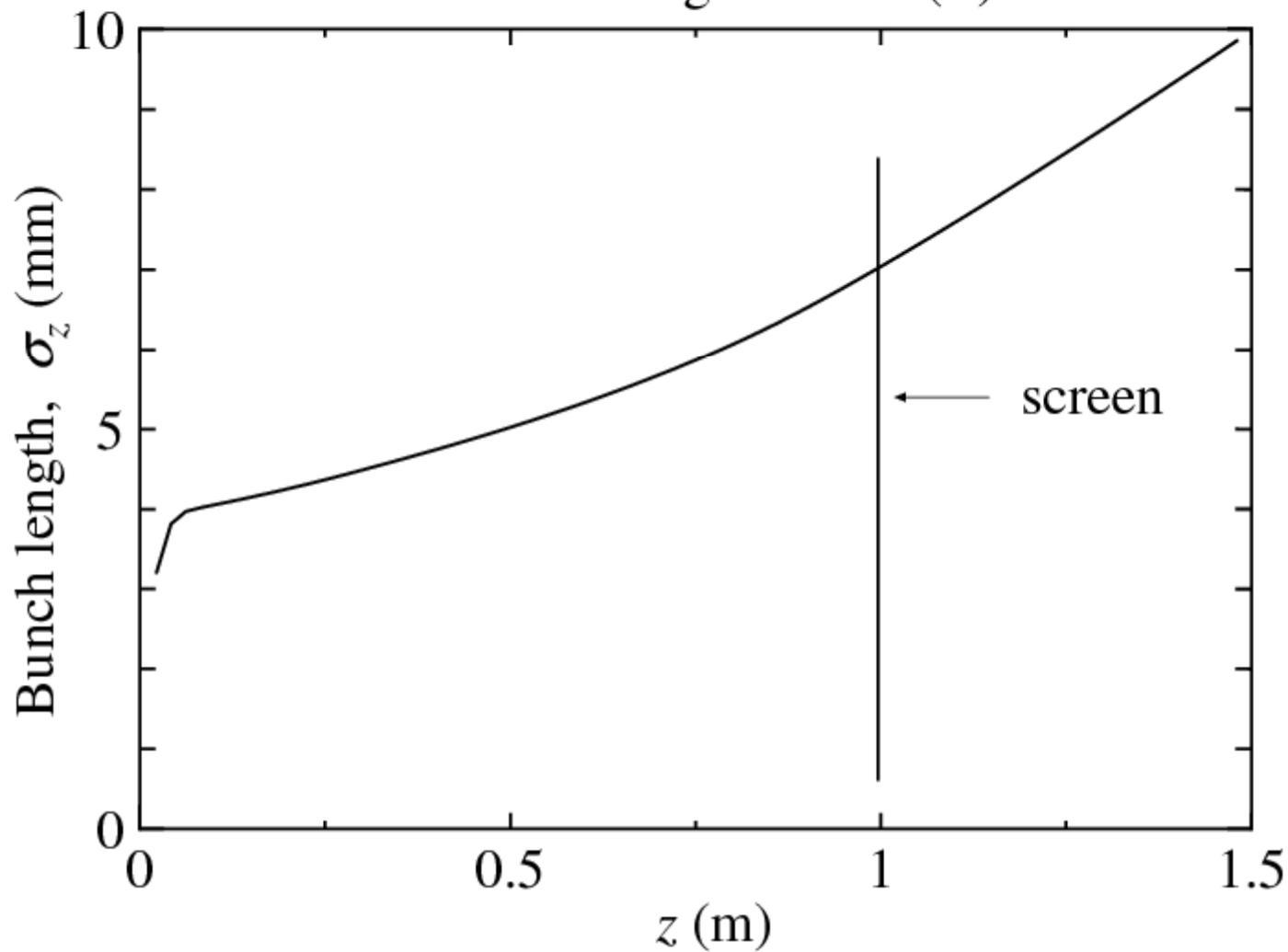
# 規格化rmsエミッタンスとビームサイズ的时间発展



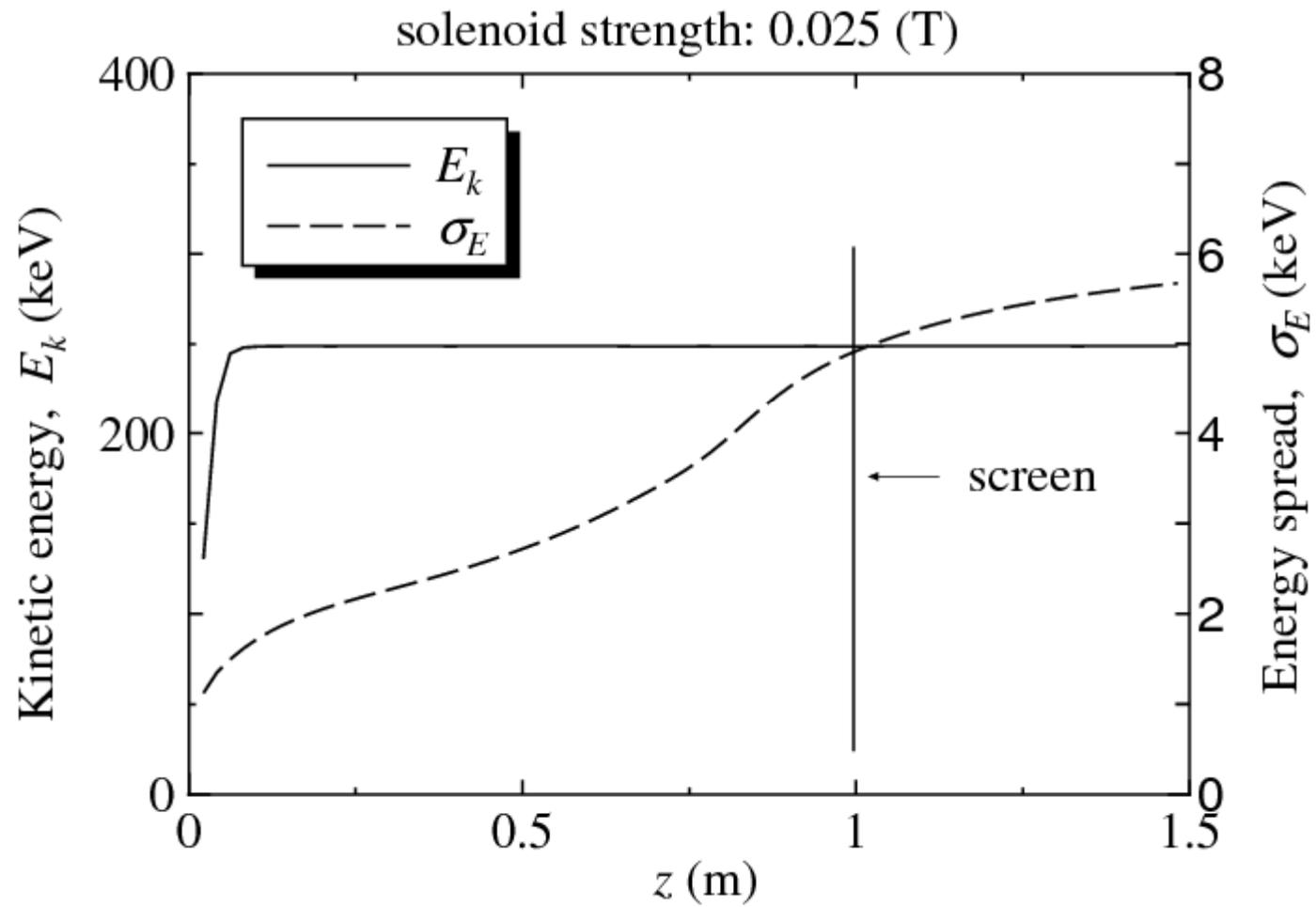


バンチ長の変化  
電子銃から出た後、単調に増加  
短いバンチ長を得るには、バンチャーが必要

solenoid strength: 0.025 (T)



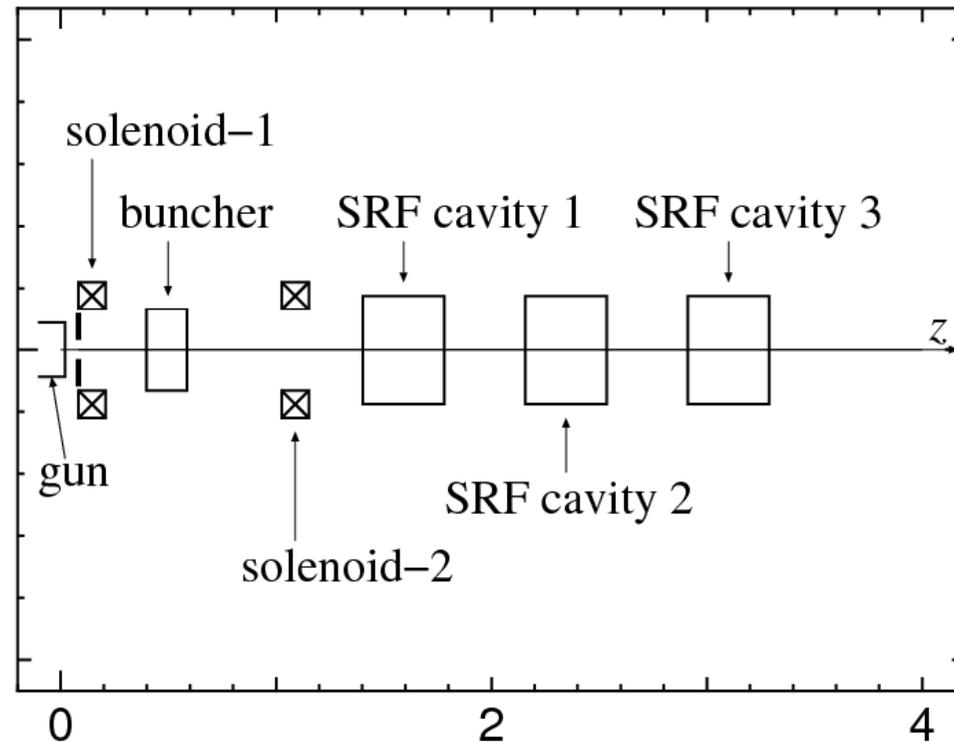
# エネルギーとエネルギー拡がり



# 計算例2

## CERL入射器のシミュレーション

- ビームライン: CERL入射器
- 光陰極DC電子銃
- ソレノイド1
- バンチャー空洞
- ソレノイド2
- 超伝導空洞1
- 超伝導空洞2
- 超伝導空洞3

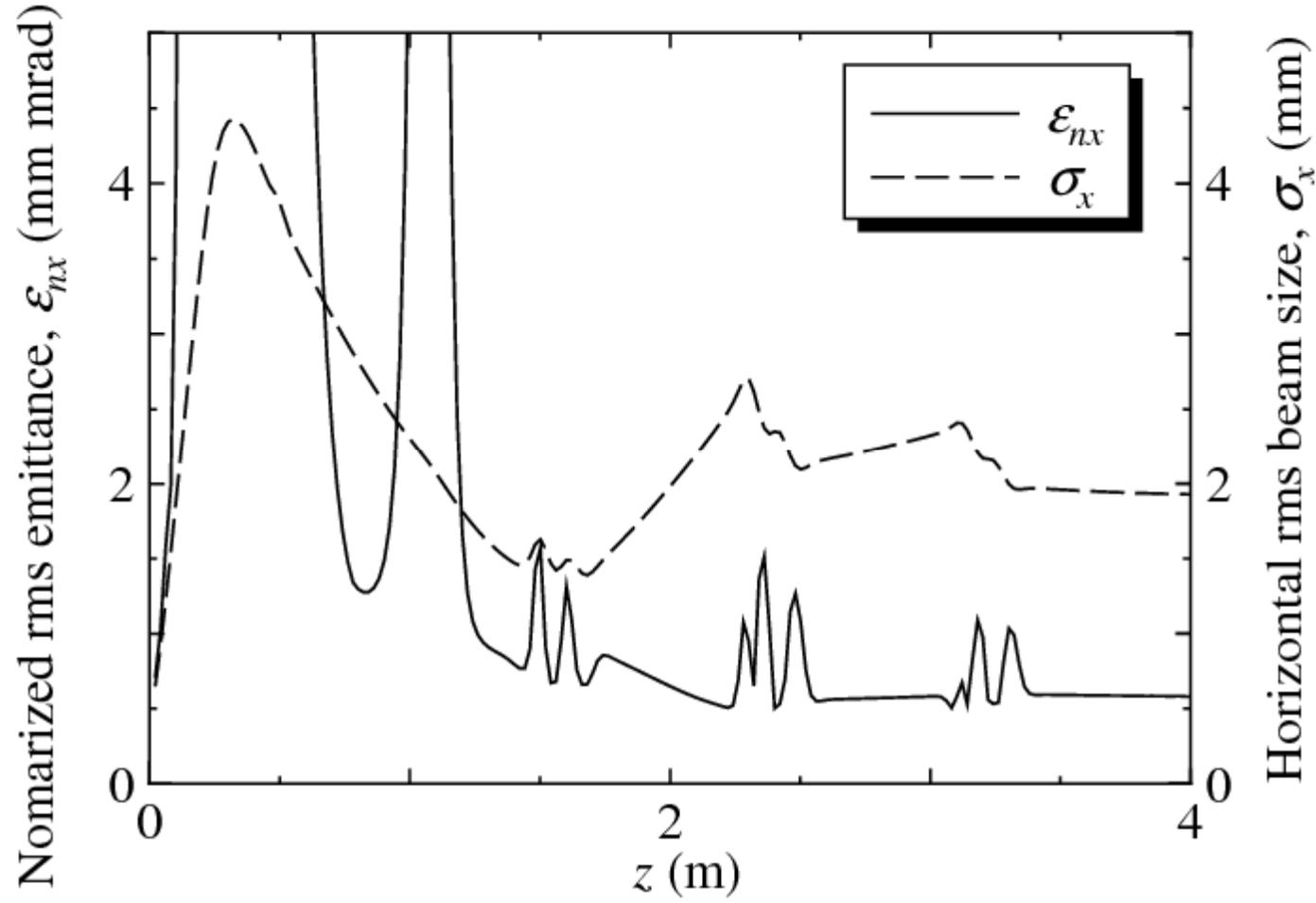


---

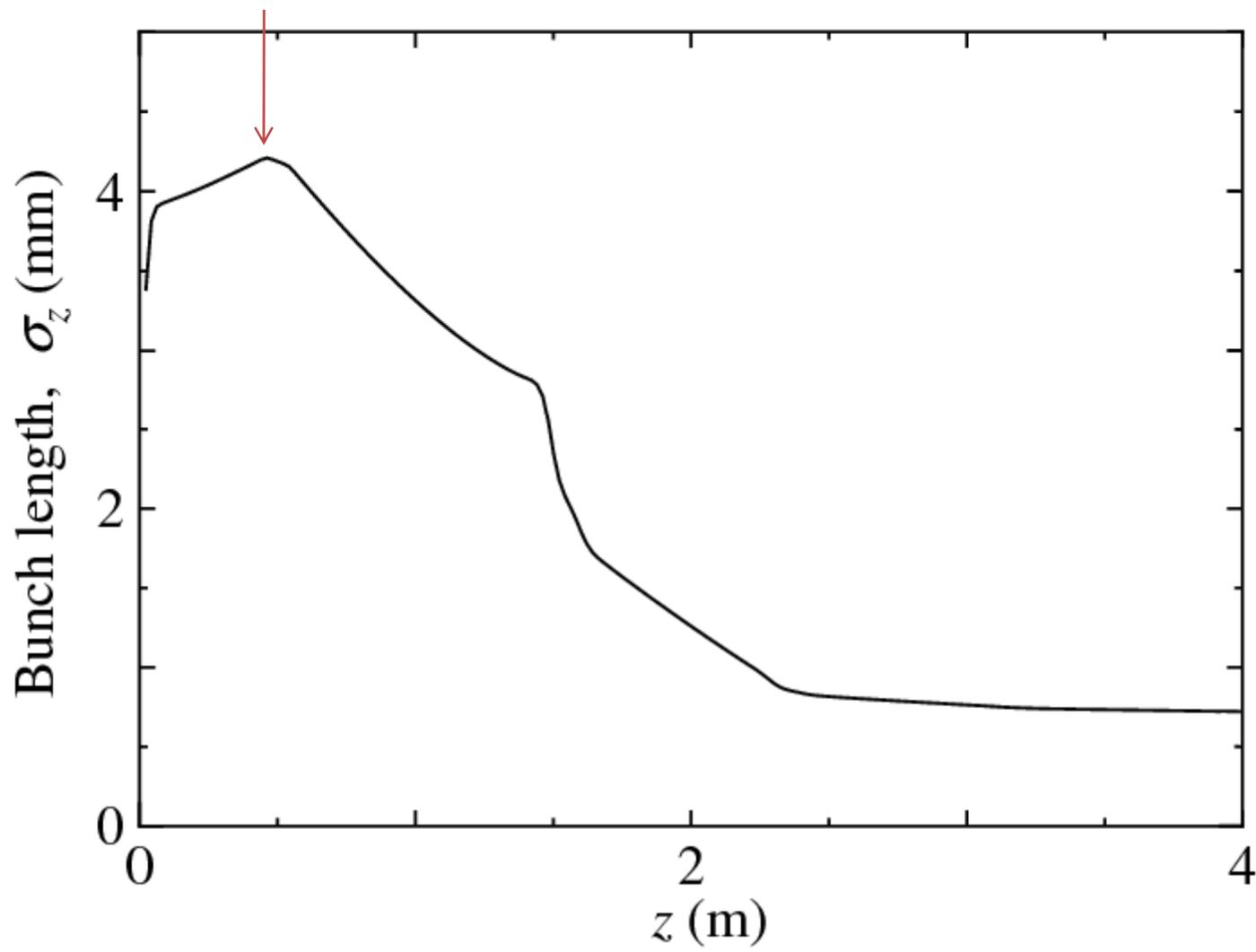
バンチ電荷	-80 pC
電子銃電圧	500 kV
カソード表面の初期 $k_B T$	50 meV
初期分布	ビア缶分布 (図 3)
初期 $\sigma_x, \sigma_y$	0.21, 0.21 mm
初期 $\sigma_t$	13.3 ps
初期分布の生成法	準乱数 [28]
空間電荷効果の計算	sc3dmesh [24]
マクロ粒子の数	10000
ソレノイド 1 の強さ	0.034 T
ソレノイド 2 の強さ	0.014 T
バンチャー (電場)	1.17 MV/m
バンチャー (位相)	-90 degree
空洞 1 (電場)	9.57 MV/m
空洞 1 (位相)	-34 degree
空洞 2 (電場)	15.0 MV/m
空洞 2 (位相)	8 degree
空洞 3 (電場)	15.0 MV/m
空洞 3 (位相)	-2 degree

---

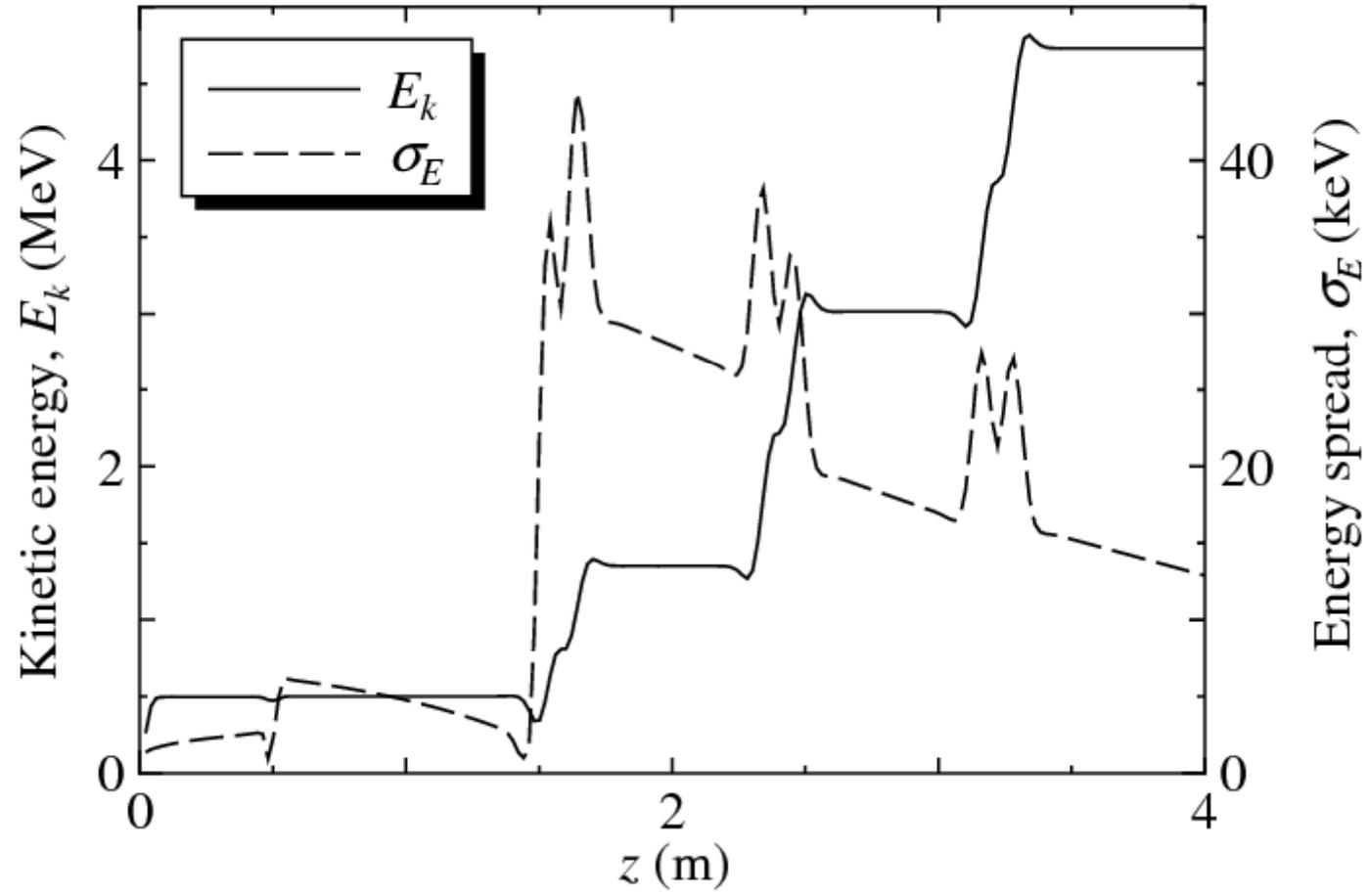
# 規格化rmsエミッタンスとビームサイズの時間発展



バンチ長の変化  
電子銃から出た後、単調に増加  
バンチャー空洞後は、減少に転じる



# エネルギーとエネルギー拡がり



# 合流部での物理

# 縦方向空間電荷力による 投影エミッタンスの増大と補償

- 縦方向空間電荷効果によって、時間発展とともにビームのエネルギー拡がりが増大
- 合流部手前まで:ビームは直線軌道を進むため、エネルギー拡がりは横方向の運動に対して影響を与えない
- 合流部:偏向電磁石によってビームが曲げられる  
エネルギー拡がりが分散関数を通して、横方向の運動に影響を与える

- 合流部内でエネルギー拡がりの変化がない場合

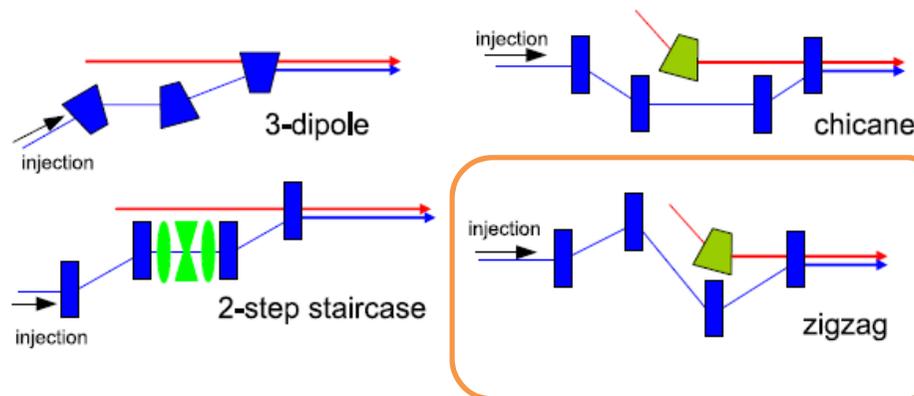
合流部出口で分散関数がゼロであればよい

- 合流部内でエネルギー拡がりが増加する場合

出口の分散関数の調整だけでは、横方向への影響を避けられない

合流部直前で、ビーム光学関数を最適化しておく必要がある

- 同様のことは、CSRによっても引き起こされる



合流部での電磁石配置にある対称性を持たせると線形な縦方向空間電荷力の影響をキャンセルできる

zigzag merger

## 合流部での縦方向空間電荷力(LSC)の線形解析(R. Hajima)

仮定: 縦方向空間電荷力によって生じるエネルギー拡がりは、電子バンチが進んだ距離に比例(合流部ないで粒子分布が大きく変化しない場合は妥当)

縦方向空間電荷力によるエネルギー拡がり:  $\kappa(s-s_0)$

$s$ : 設計軌道上のビーム進行方向の座標

$s_0$ : 偏向電磁石入口の座標

設計軌道からの水平方向の位置ずれ

$$x'' = d^2x/ds^2$$

$$x'' = -\frac{x}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} (\delta_0 + \delta_{SC} + \kappa(s - s_0))$$

合流部入口までのLSCによるエネルギー拡がり

偏向電磁石の曲率半径

$s=0$ でのエネルギー拡がり

合流部での水平方向の運動を記述する量

$$\mathbf{x} \equiv (x, x', \delta_0, \delta_{SC}, \kappa)$$

合流部での水平方向の運動を記述する量

$$\boldsymbol{x} \equiv (x, x', \delta_0, \delta_{SC}, \kappa)$$

$s_0$   $s_1$ の時間発展

$${}^t\boldsymbol{x}(s_1) = R(s_1|s_0){}^t\boldsymbol{x}(s_0)$$



拡張した転送行列

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} & R_{15} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} & R_{25} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

空間電荷分散関数  $(\zeta_x, \zeta'_x)$

$$\begin{pmatrix} \zeta_x(s_1) \\ \zeta'_x(s_1) \\ 0 \\ L(s_1) \\ 1 \end{pmatrix} = R(s_1|s_0) \begin{pmatrix} \zeta_x(s_0) \\ \zeta'_x(s_0) \\ 0 \\ L(s_0) \\ 1 \end{pmatrix}$$

行列要素は、  
自由空間、偏向電磁石などの要素毎に決まる

縦方向空間電荷力による位相空間 $(x, x')$ での位置のずれ

$$\boldsymbol{d} = (\kappa\zeta_x, \kappa\zeta'_x)$$

縦方向空間電荷力による位相空間 $(x, x')$ での位置のずれ

$$\mathbf{d} = (\kappa\zeta_x, \kappa\zeta'_x)$$

合流部でのバンチスライス:  $\zeta_x x' - \zeta'_x x = 0$  の直線状に整列

合流部出口での位相空間の傾き

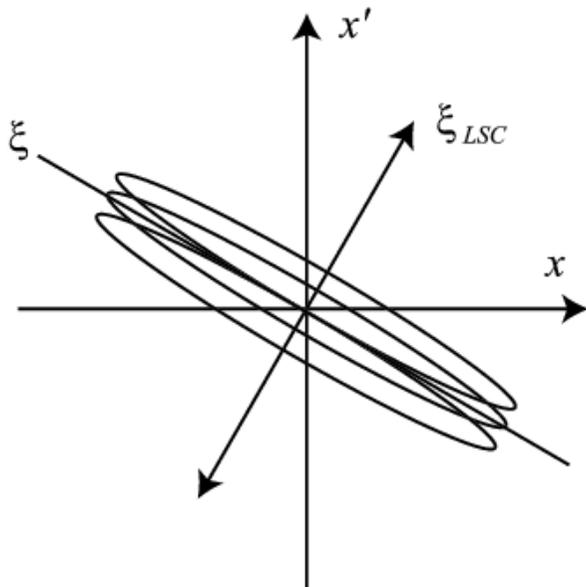
$$\xi = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2\alpha_x}{\gamma_x - \beta_x} \right)$$

LSCによってバンチスライスが整列する向き

$$\xi_{LSC} = \arctan \left( \frac{\zeta'_x}{\zeta_x} \right)$$

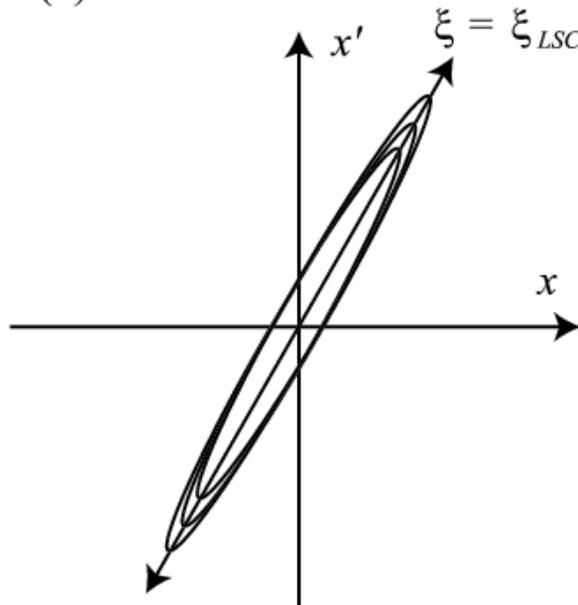
向きが不一致のとき  
投影エミッタンス増大

(a)



向きが一致したとき  
投影エミッタンスの増大は最小

(b)

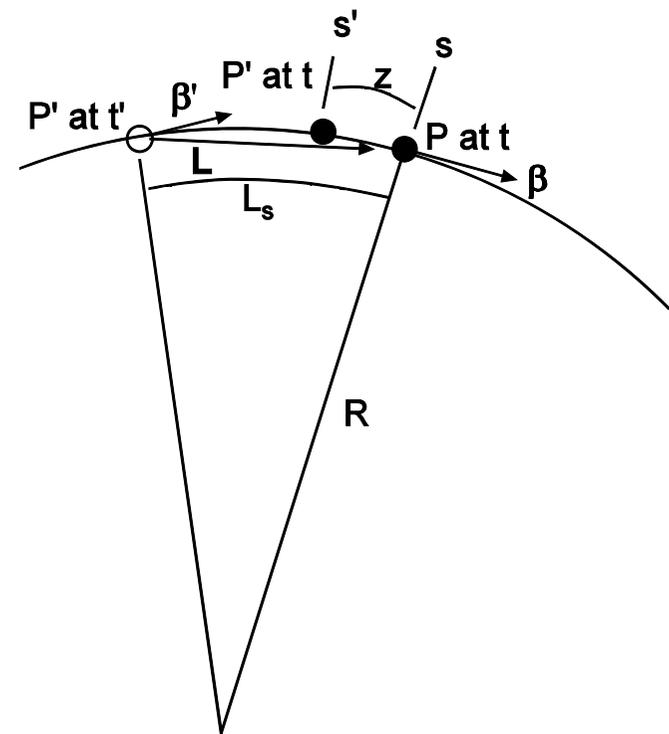


合流部ではビーム  
光学関数を調整する  
手段がない

合流部手前の  
マッチング部でビーム  
光学関数を調整  
する

# 合流部でのCSRの影響

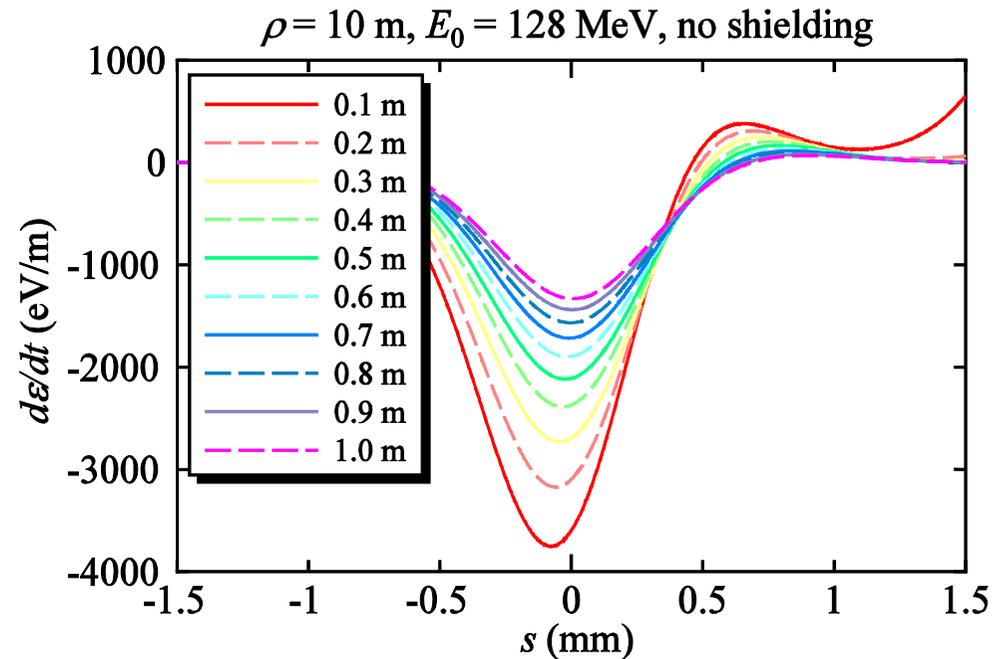
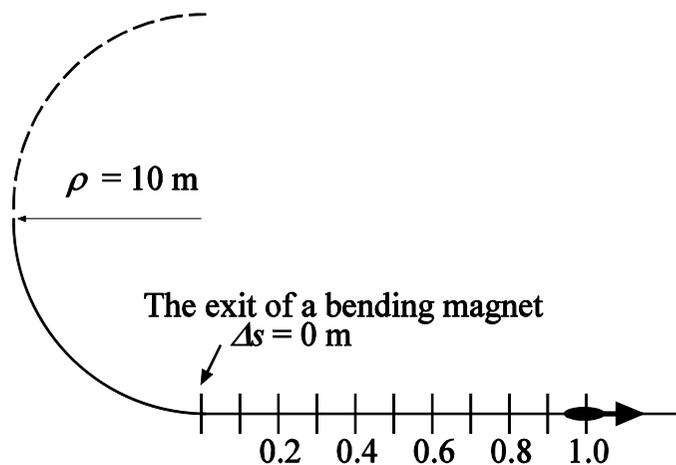
- 合流部でのCSRによっても、縦方向空間電荷力の場合と同様に、分散関数が有限な部分でのエネルギー拡がりの増大が引き起こされる
- ERL入射器の合流部では、LSCと同様に、CSRによる影響も評価する必要がある
- シミュレーションには、空間電荷効果+CSRを含んだコードが必要
- また、高速なCSR計算の多くは超相対論的な近似 ( $\gamma \gg 1$ ) が使われているが、合流部ではその条件が満たされない
- 低エネルギー側でも有効なCSR計算法が必要
- GPT用にSaganが提案した方法を用いて、1次元CSR計算をするためのプログラムを開発し、合流部での影響を調べた
- GPT/CSRの利点: 比較的高速、低エネルギー領域でも有効



# 1次元CSRによるエネルギー変化

- GPT/CSR を用いて、偏向電磁石出口からのCSRによるwake関数を計算した
- バンチ前方は加速され、後方は減速される

- Beam energy: 128 MeV
- Bending radius:  $\rho = 10.0$  m
- Bunch length:  $\sigma_s = 0.3$  mm
- Initial distribution: Gaussian
- Bunch charge:  $Q = 80$  pC
- Shielding chamber height:  $h = \infty$
- Number of image charge layers: 32



# CSRによるエネルギー損失

- 円形軌道に対して、GPT/CSR, elegant, 解析的式から安定状態でのCSRによるエネルギー損失を計算した

•ElegantのCSR計算は、超相対論的な仮定を含む

•GPT/CSRはその仮定を含まない

- Bending radius:  $\rho = 1.0$  m
- Bunch length:  $\sigma_s = 0.6$  mm
- Initial distribution: Gaussian
- Bunch charge:  $Q = 80$  pC.

C. Mayes によるエネルギー損失の式

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2 (r_e m_e c^2) c \beta^4 \gamma^4}{3 \rho^2} N(1 + (N-1)T(a))$$

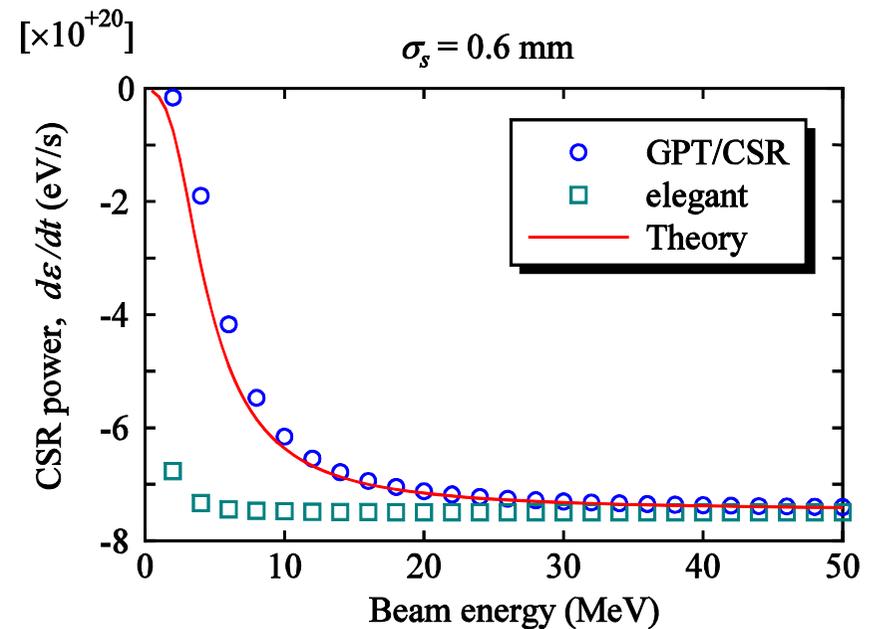
$$a = 3/2 \cdot \gamma^3 \sigma_s / (\beta \rho)$$

$$T(a) = \frac{9}{32\pi} \frac{1}{a^3} \left( e^{\frac{1}{8a^2}} \sqrt{\pi} K_{5/6} \left( \frac{1}{8a^2} \right) - 2\pi a \right)$$

$K_{5/6}(x)$  : the modified Bessel function

$N$  : the number of electron in the bunch

$r_e$  : the classical electron radius



# CSRによるエネルギー損失

- GPT/CSR と elegant とともに、 $E_0 > 40\text{MeV}$ では解析値と一致
- elegant と解析値は $E_0 \rightarrow 0$ で発散
- GPT/CSR は予想される通りゼロに近づく

解析式 ( $\gamma \gg (R/\sigma_s)^{1/3}$  の近似の場合) [1,2]

$$\frac{d\sigma_\delta}{dt} \approx 0.22 \frac{r_e N c \beta}{\gamma \rho^{2/3} \sigma_s^{4/3}}$$

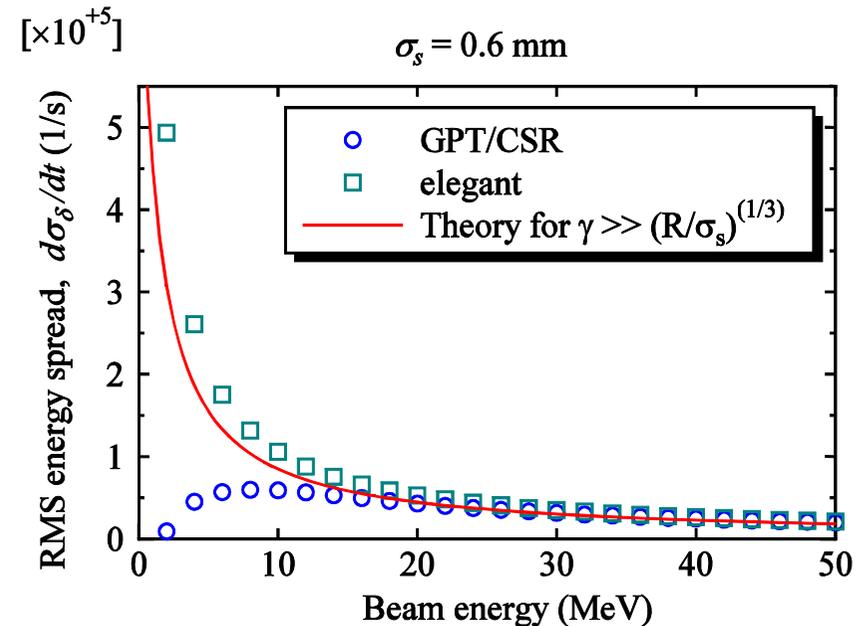
$c$  : the speed of light

$\gamma$ : the Lorentz energy factor

$$\beta = (1 - 1/\gamma^2)^{1/2}$$

[1] P. Emma and R. Brinkmann, Proceedings of PAC97, Vancouver, B.C., Canada, 1997, pp. 1679-1681.

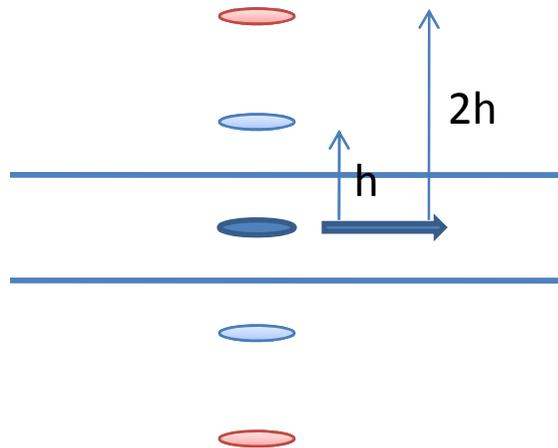
[2] Ya. S. Derbenev. et.al., TESLA FEL-Report 1995-05.



# CSR の遮蔽

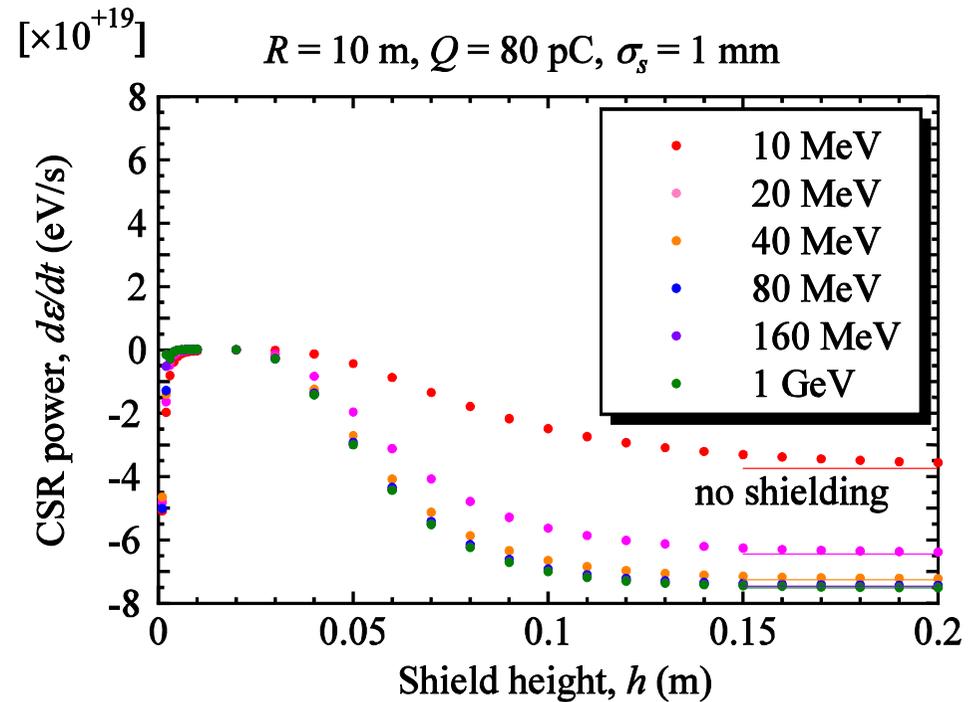
- 真空チェンバーによるCSRの遮蔽
- 鏡像電荷により表現

Chamber height,  $h$



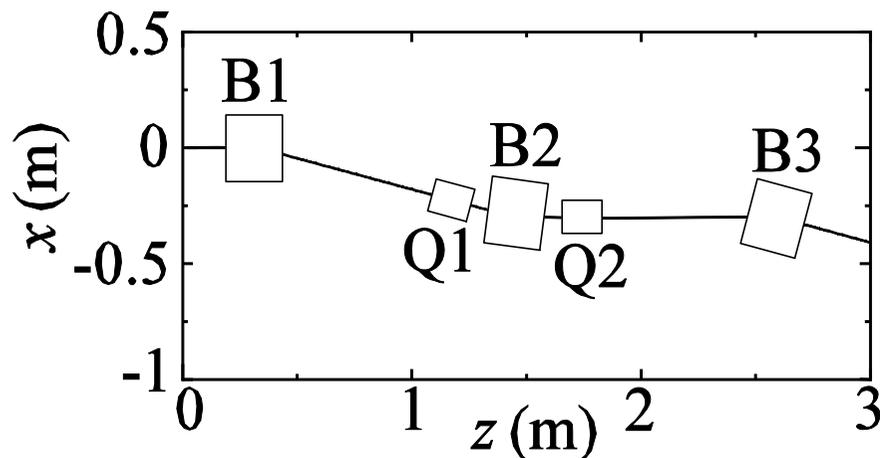
GPT/CSR を用いて、円軌道に対してエネルギー損失を計算

- Bending radius:  $\rho = 10.0$  m
- Bunch length:  $\sigma_s = 1.0$  mm
- Initial distribution: Gaussian
- Bunch charge:  $Q = 80$  pC.
- Number of image charge layers: 32

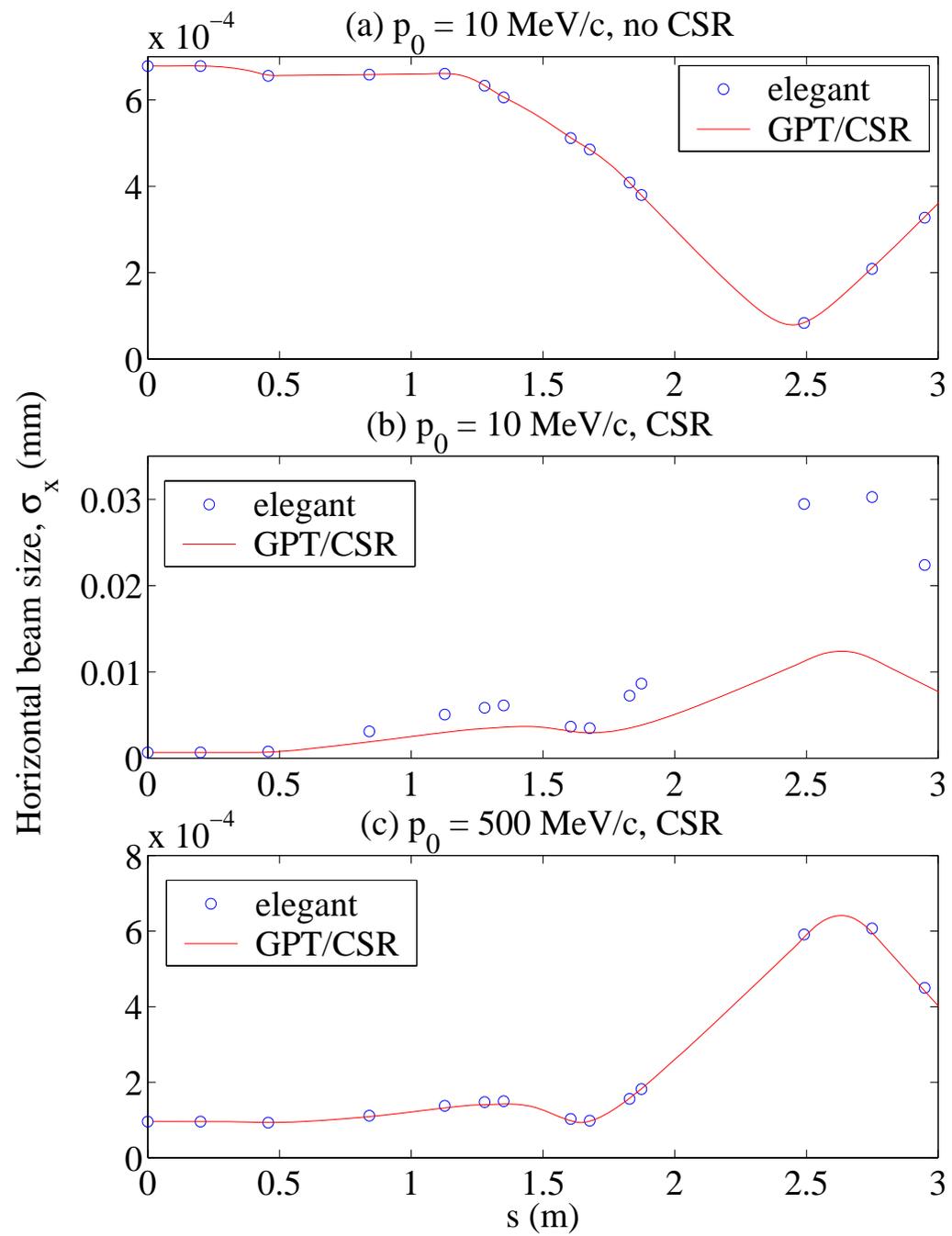


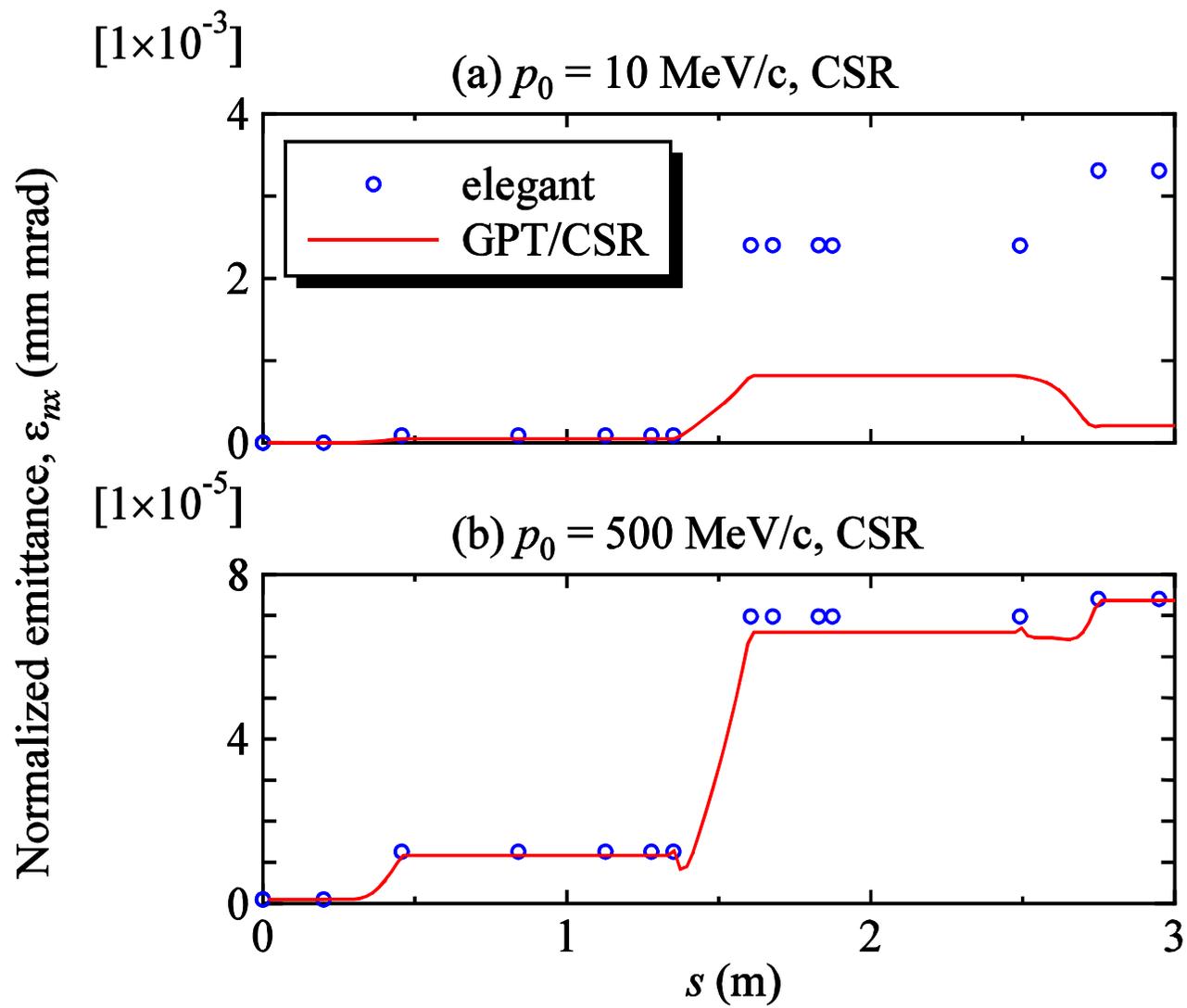
# CSR in merger section

- 3-dipole mergerに対して、GPT/CSRを用いてCSRによるエミッタンス増大を計算した
- 計算では、空間電荷効果の影響は無視
- (a)  $p_0 = 10$  MeV/c and (b)  $p_0 = 500$  MeV/c.



- Bunch length:  $\sigma_s = 0.3$  mm
- Initial distribution: Gaussian
- Bunch charge:  $Q = 80$  pC
- Initial emittance :  $\varepsilon_{nx} = 1 \times 10^{-12}$  m rad
- Initial betatron function :  $\beta_x = \beta_y = 9$  m
- Without shielding and space charge





# まとめ

- 本講義での紹介内容
  - 電子バンチ内での空間電荷効果
  - 空間電荷効果による投影エミッタンスの増減
  - 空間電荷効果の数値計算
  - 合流部での物理
- 現実のERL入射器設計においては、最小エミッタンスを実現するためのパラメタ(機器の配置や設定値)を調整する必要がある
- このために、数値計算による最適化法が幾つか提案されている
- おわび
  - 印刷されたテキストには、いくつか誤りがあることがわかりました
  - 後日、web上に正誤表を載せる予定です
  - また、時間の都合上テキストに掲載できなかった、パラメタ最適化手法等についても増補する予定です

# CSR in GPT

- 1D CSR wake calculation in GPT using D. Sagan's formula.
  - General Particle Tracer (GPT) is a particle tracking code, which includes 3D space charge effect based on a nonequidistant multigrid Poisson solver or a point-to-point method.
  - The routine can calculate 1D-wake functions for arbitrary beam trajectories as well as CSR shielding effect.
  - In particular, the CSR routine does not assume ultrarelativistic electron beam and is therefore applicable at **low beam energies** in the injector.
- I. V. Bazarov and T. Miyajima, "Calculation of Coherent Synchrotron Radiation in General Particle Tracer", Proc of EPAC 2008, MOPC024
- D. Sagan, "AN EFFICIENT FORMALISM FOR SIMULATING THE LONGITUDINAL KICK FROM COHERENT SYNCHROTRON RADIATION", Proc of EPAC 2006, THPCH024

Sagan's formula

# Sagan's formula 1

## Two particle interaction

- The source particle at point P'.
- An electric field  $E(P)$  at the position of the kicked particle at point P and time.
- The Lienard-Wiechert formula

$$\mathbf{E}(P) = \frac{e}{\gamma^2} \frac{\mathbf{L} - L\boldsymbol{\beta}'}{(L - \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\beta}')^3} + \frac{e}{c^2} \frac{L \times [(\mathbf{L} - L\boldsymbol{\beta}') \times \mathbf{a}']}{(L - \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\beta}')^3}$$

- The CSR term

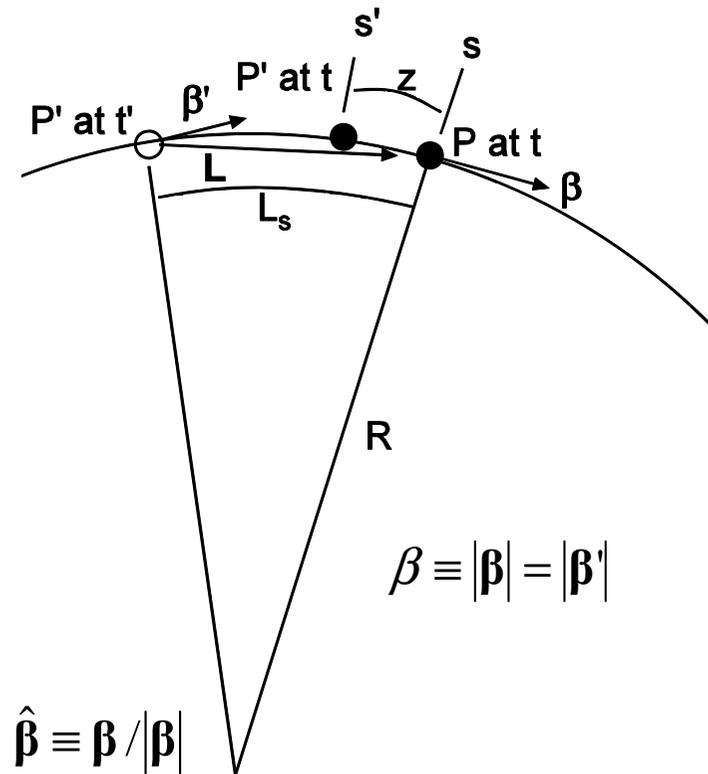
$$\mathbf{E}_{CSR} \equiv \mathbf{E} - \mathbf{E}_{SC}$$

- Here, the space charge term is

$$\mathbf{E}_{SC}(P) \equiv \frac{e\gamma[z\hat{\mathbf{s}} + x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}]}{(\gamma^2 z^2 + x^2 + y^2)^{3/2}}$$

- The rate of energy change is given by

$$K_{CSR} = e\hat{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{E}_{CSR} = e\hat{\boldsymbol{\beta}} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{E}_{CSR})$$



# Sagan's formula 2

## Space charge term

- The space charge term

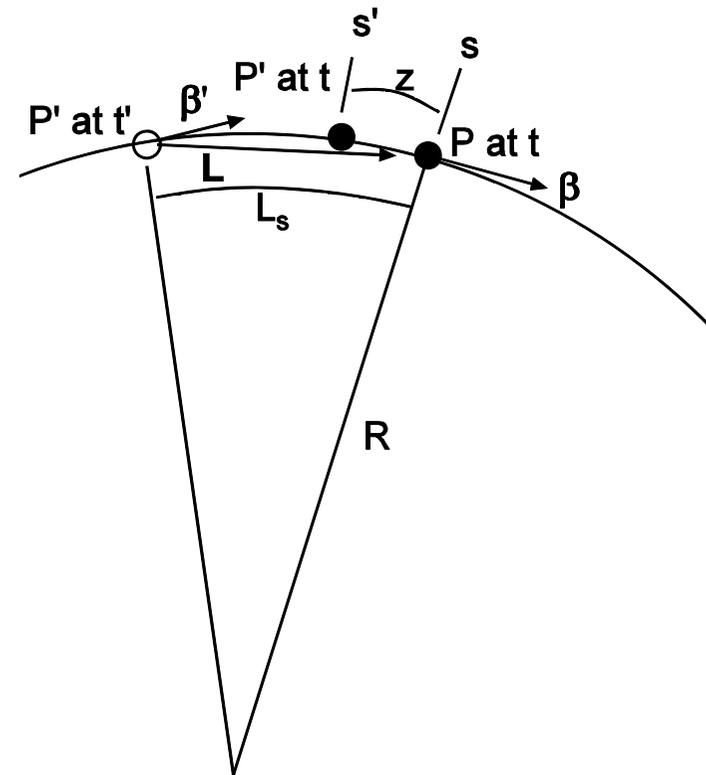
$$\mathbf{E}_{sc}(P) \equiv \frac{e\gamma[z\hat{s} + x\hat{x} + y\hat{y}]}{(\gamma^2 z^2 + x^2 + y^2)^{3/2}}$$

- The longitudinal distance is required to calculate the space charge term.
- The change of the longitudinal position of the source particle is

$$L_s - z = \beta c(t - t') = \beta L$$

- The longitudinal distance between  $P'$  and  $P$  is

$$z = L_s - \beta L$$



# Sagan's formula 3

## Calculation of z on arbitrary orbit

- The orbit is divided into N elements from O.

- The path length:  $L_s = d + v_1$   $v_1 = \sum_{i=1}^N d_i$

- v and w components of the vector **L**:

$$L_v = v + R \sin \phi \quad v = v_1 - v_3 \quad v_3 = \sum_{i=1}^N d_i \left( \frac{1}{2} \psi_i + \frac{1}{2} \psi_i g_i d_i + \frac{1}{6} g_i^2 d_i^2 \right)$$

$$L_w = w - R(1 - \cos \phi) \quad w = \omega_2$$

$$L = \sqrt{L_v^2 + L_w^2}$$

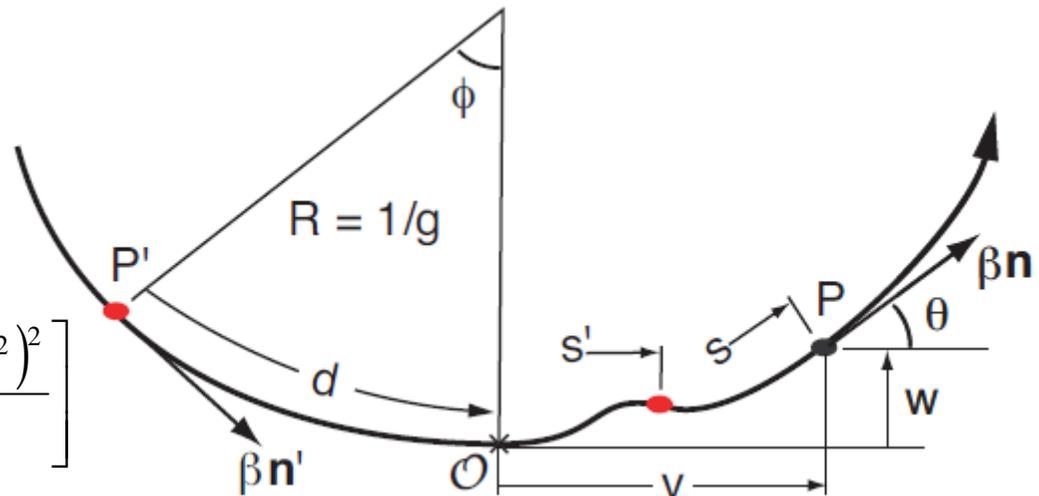
$$\omega_2 = \sum_{i=1}^N d_i \left( \psi_i + \frac{1}{2} g_i d_i \right)$$

- The distance, z:

$$z = L_s - \beta L$$



$$z = \frac{v_1 + d}{2\gamma^2} + \left[ v_3 + \frac{g^2 d^3}{6} - \frac{1}{8} \frac{(2\omega_2 - g d^2)^2}{v_1 + d} \right]$$



# Sagan's formula 4

## Calculation of CSR kick on arbitrary orbit

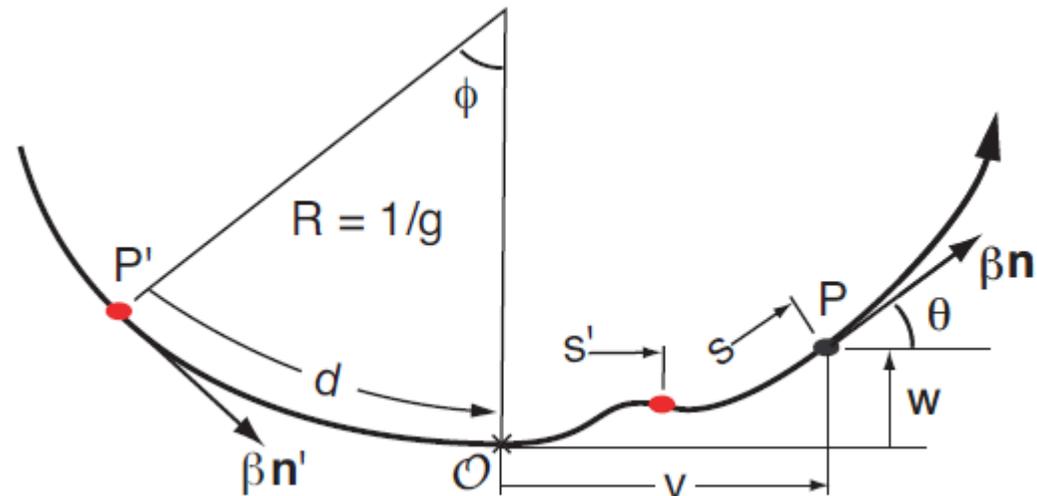
- CSR kick: 
$$K_{CSR} = 4e^2 \gamma^4 \tau^2 \left\{ \frac{g(\tau^2 - \alpha^2)(\alpha - \tau\kappa)}{(\tau^2 + \alpha^2)^3} + \frac{\tau^2 - \alpha^2 + 2\tau\alpha\kappa}{(\tau^2 + \alpha^2)^3} \right\} - \frac{e^2}{\gamma^2 z^2}$$

$$\tau = \gamma(d + v_1)$$

$$\alpha = \gamma^2 \left( \omega_2 + gdv_1 + \frac{1}{2}gd^2 \right)$$

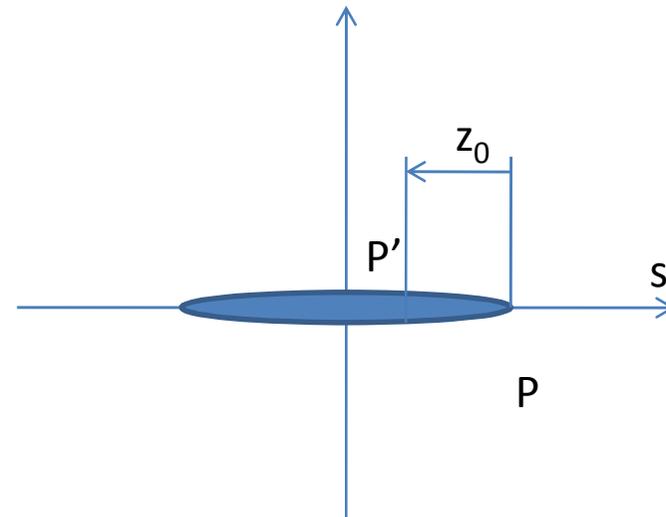
$$\kappa = \gamma(\theta + gd)$$

$$z = \frac{v_1 + d}{2\gamma^2} + \left[ v_3 + \frac{g^2 d^3}{6} - \frac{1}{8} \frac{(2\omega_2 - gd^2)^2}{v_1 + d} \right]$$



# Procedure of CSR calculation

1. Calculate  $i$ , which satisfy  $z_i = z_0$
2. Calculate  $v_1$ ,  $\omega_1$ ,  $g$  and  $d$  with  $i$
3. Calculate  $K_{CSR}$  with  $i$
4. Shift  $z_0$  and repeat 1 to 3.



CSR calculation in GPT

# Commands of GPT/CSR

- Command name
  - `csr1Dwakexz()`;
- Assumption
  - It is assumed that the particles move on x-z plane. Namely, the vertical component of the average velocity is zero.
- Options
  - The GPT/CSR has 16 options.

# Options of GPT/CSR

1. CSRTimestep (double) (s)
2. CSRCalcTstep (double) (s)
3. CSRMeshNbin (long)
4. CSRBGTolerance (double)
5. CSRMeshBoxSize (double)
6. CSRMeshNbfac (double)
7. CSRMeshStep (double) (m)
8. CSRTriangleWidth (double) (m)
9. CSRSign (double)
10. CSRHshield (double) (m)
11. CSRNimage (int)
12. CSRDriftLength (double) (m)
13. CSRCalcArea (double) (m)
14. CSRArcRadius (double) (m)
15. CSRArcAngle (double) (rad)
16. CSROutputWake (double) (m)

```
#-----  
# example of CSR calculation  
#-----  
csr_dt   = 10.0e-12;  
csr_tstep = 0.0;  
csr_Nb   = 0;  
csr_bgtol = 1.0e-2;  
csr_nstd  = 20.0;  
csr_mNbfac = 0.1;  
csr_mdl   = 0.06e-3;  
csr_dtri  = 0.6e-3;  
csr_sign  = -1.0;  
csr_h     = 1.0;  
csr_Nh    = 0;  
csr_inids = 10.0;  
csr_xin   = -10.0;  
csr_xout  = 10.0;  
csr_zin   = -10.0;  
csr_zout  = 10.0;  
csr_arcr  = 0.0;  
csr_arcang = 0.0;  
csr_wfrom = 0.0;  
csr_wto   = 0.0;  
csr_wstep = 0.0;  
#-----  
# please comment out the following line  
# for calculation without CSR  
#-----  
csr1Dwakexz("CSRTimestep", csr_dt, "CSRCalcTstep", csr_tstep, "CSRMeshNbin", csr_Nb,  
"CSRBGTolerance", csr_bgtol, "CSRMeshBoxSize", csr_nstd, "CSRMeshNbfac", csr_mNbfac,  
"CSRMeshStep", csr_mdl, "CSRTriangleWidth", csr_dtri, "CSRSign", csr_sign,  
"CSRHshield", csr_h, "CSRNimage", csr_Nh, "CSRDriftLength", csr_inids,  
"CSRCalcArea", csr_xin, csr_xout, csr_zin, csr_zout,  
"CSRArcRadius", csr_arcr, "CSRArcAngle", csr_arcang,  
"CSROutputWake", csr_wfrom, csr_wto, csr_wstep);
```

