

ERL入射部でのビーム力学

高エネルギー加速器研究機構
物質構造科学研究所 放射光源研究系
宮島 司

OHO'08, Lecture 2-3 (11:30 – 12:30)

2008年9月3日(水)

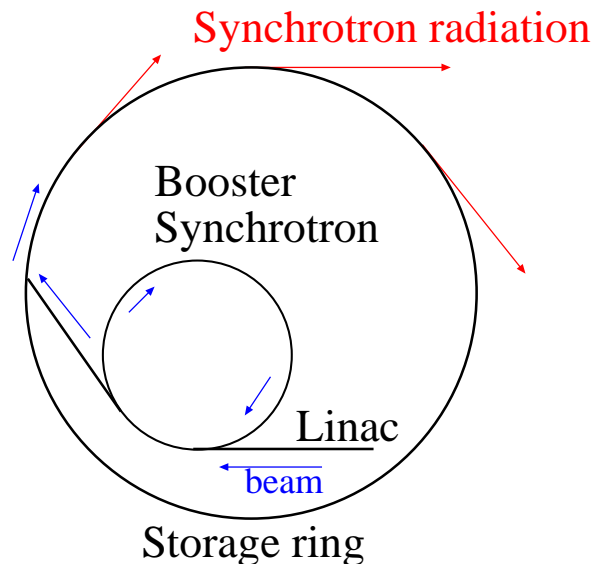
目次

- 前半の講義(Lecture 2-3, 11:30 – 12:30)
 - ERL入射部の役割
 - ERL入射部を構成する要素
 - ERL入射部で重要となる物理
 - ビームを構成する単粒子の運動方程式
- 後半の講義 (Lecture 2-4, 14:00 – 15:00)
 - 電子バンチ内での空間電荷効果
 - 空間電荷効果による投影エミッタンスの増大
 - 空間電荷効果の数値計算
 - 合流部での物理

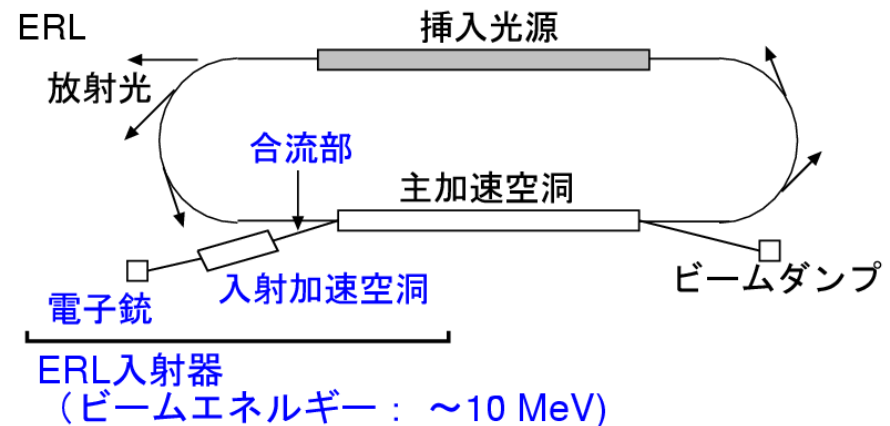
ERL入射部の役割

ERL光源とリング型光源

- 貯蔵リング型光源(PF-ring, Spring-8など)
 - 電子銃で電子ビームを生成
 - Linac やブースターシンクロトロンでビームを加速
 - 貯蔵リングへ入射
 - ビームは複数の要因によって失われ減衰するが、基本的にリングを周回し続ける



- ERL(Energy recovery linac)光源
 - 電子銃で電子ビームを生成
 - 入射部空洞で10 MeV程度まで加速
 - 合流部で周回部に合流
 - 主加速空洞で加速(100 MeV – 5 GeV)
 - 周回部を通過して挿入光源へ(放射光の発生)
 - 再び周回部を通過して主加速空洞へ(入射時のエネルギーへ減速)
 - ビームダンプへビームを捨てる



ERL光源の特徴

- 貯蔵リング型光源
 - 電子ビームは、貯蔵リングに入射された後は、周回し続ける
 - 放射光発生に伴い放射励起・減衰が発生
 - ビームの質(エミッタンス)は、放射励起・減衰の釣り合った平衡状態によって決まる
- ERL光源
 - 電子銃から生成されたビームは、1回(あるいは数回)のみ挿入光源を通過し、捨てられる
 - ビームは放射励起・減衰による平衡状態に到達しない
 - 入射部で生成されたビームの質が放射光の質を決定づける



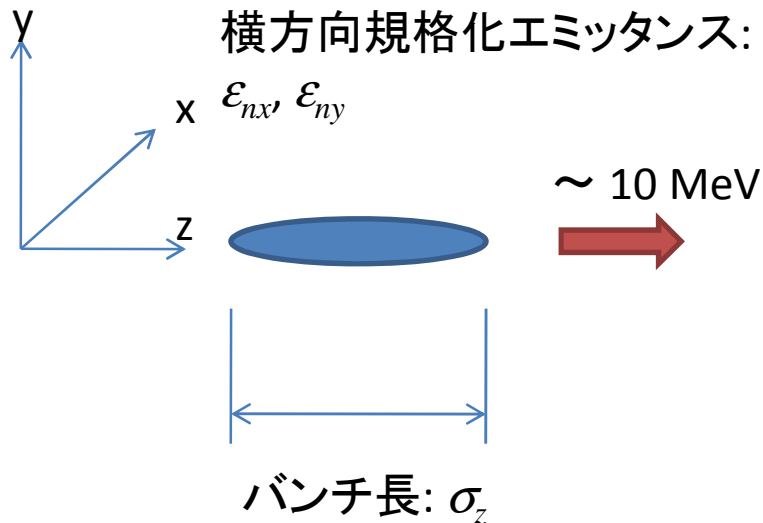
ERL入射部の性能次第で、原理的にビームの平衡状態に因らない超低エミッタンスビームを実現可能

ERL入射部の役割

- 入射部でのビームの質を向上させれば、放射光の質を向上させられる



- 入射部で如何に超低エミッタンスビームを生成し、増大させずに挿入光源まで輸送するか？ **ERL入射部の最大の課題**

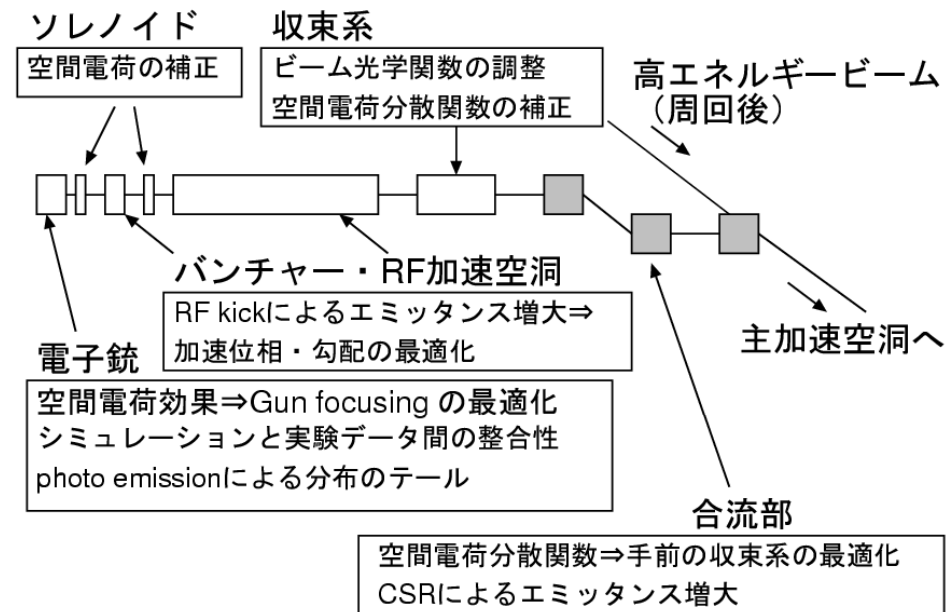


要求されるビーム品質

- 1バンチあたりの電荷:
77 pC (繰り返し1.3 GHz で100 mAのビーム電流)
- 規格化エミッタンス:
0.1 mm mrad
- バンチ長: 1 mm 以下

ERL入射部

- 電子銃
- ソレノイド電磁石
- バンチャー空洞
- 超伝導RF加速空洞
- 収束系
- 合流部



- 入射部で考慮すべき物理現象
 - **空間電荷効果**: バンチ内電子間でのCoulomb相互作用
入射部ではビームエネルギーが低いため、入射部全体でその影響を考慮する必要あり
 - **コヒーレント輻射**(CSR, Coherent Synchrotron Radiation):
合流部内のビームが曲げられる部分で考慮する必要あり

本講義の目標

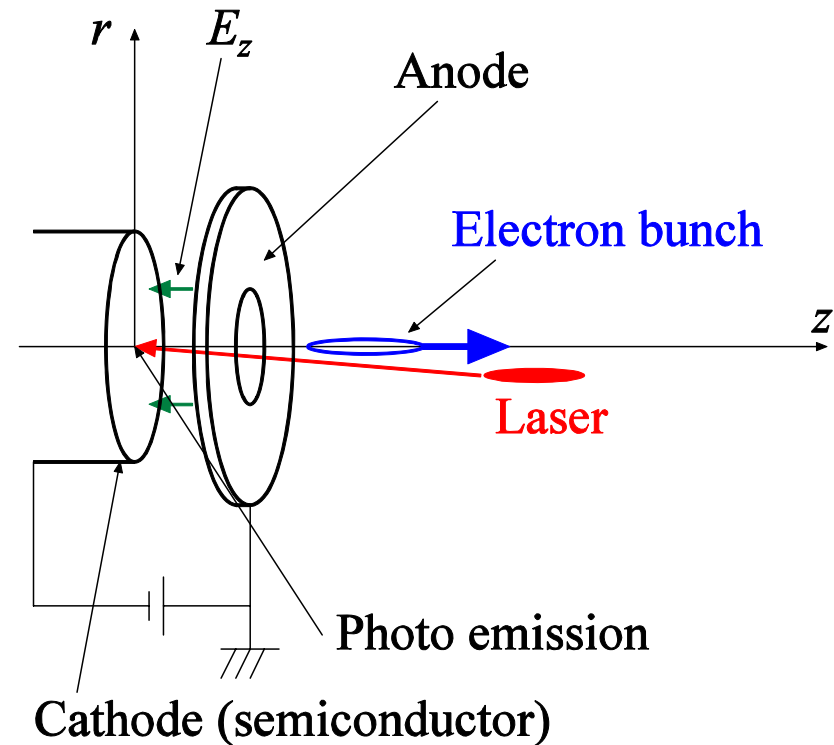
- ERL入射部を対象として、
電子ビームの物理を紹介すること
- 特に、ERL入射部のような低エネルギービームで重要となる空間電荷効果について紹介する
- また、ERL入射部を構成する各要素での物理現象を概観し、
数値計算を行う際の指針を示す
- 実際の入射部でのビームダイナミクスを扱う場合は、数値計算に頼ることが多くなるが、そのための基礎知識として、
空間電荷効果の数値計算法の基礎を紹介する

ERL入射部を構成する要素

電子銃

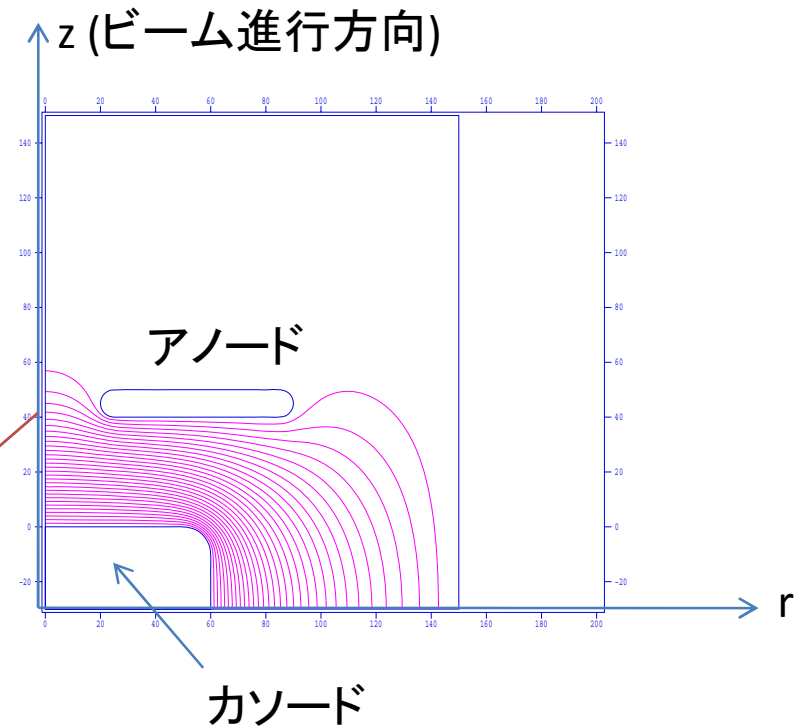
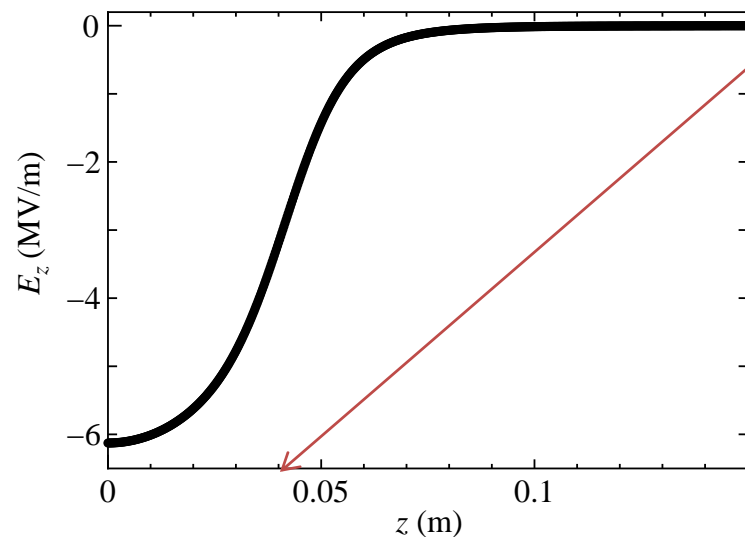
- 役割: 品質の良い電子ビームを生成すること
- ERL入射部の性能を決定する上で、最も重要な要素である
- 電子銃で品質の良いビームを生成できなければ、それ以降の要素でいくら品質を維持するようにしても、初期品質以上にはできないため

- 電子銃の有力な候補
 - 光陰極カソードを用いたDC電子銃
 - 光陰極カソードを用いたRF電子銃
- 光陰極カソードを用いた電子銃
 - パルス状のレーザーをカソード表面に当てて、光電効果によって電子ビームを取り出す
 - 高い加速電圧の実現、高い量子効率、長いカソード寿命などの開発課題
 - 空間電荷効果を線形化するための、レーザーの分布形状の整形(空間、時間方向)



電子銃の形状と加速電場分布

- JAEA-typeの光陰極DC電子銃の断面形状
- カソード・アノード間のギャップ: 40 mm
- z軸周りに円筒対称性をもつ



z 軸上での加速電場 E_{z0} の分布。
z 軸上では対称性のため、半径方向成分、
円周方向成分はともにゼロ。

電子銃の加速電場による横方向の力

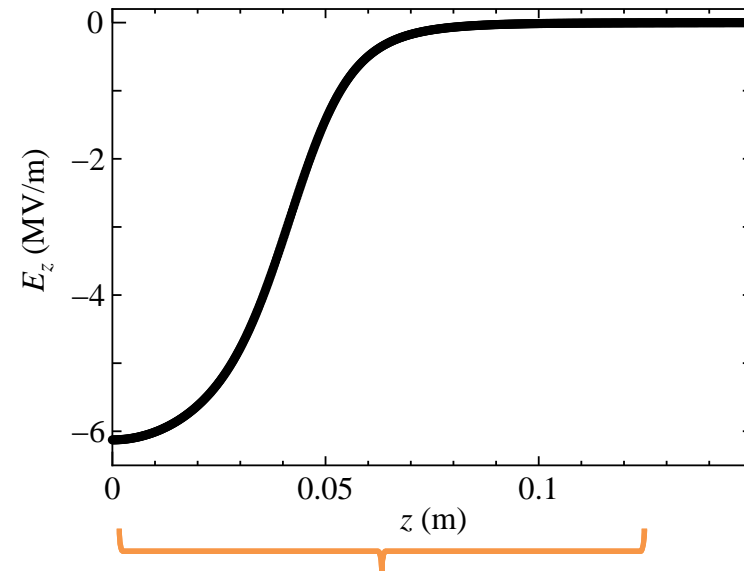
- z軸上の1次元電場分布から、z軸近傍での2次元電場分布を求めることができる

$$E_z(r, z) = E_{z0}(z) - \frac{1}{4} r^2 \frac{\partial^2 E_{z0}(z)}{\partial z^2}$$

$$E_r(r, z) = -\frac{1}{2} r \frac{\partial E_{z0}(z)}{\partial z}$$

- 横方向の電場は、 $\partial E_{z0}(r)/\partial z$ に比例する
- 電子銃内で、電子が受ける横方向の力は、

$$F_r = \frac{1}{2} e r \frac{\partial E_{z0}(z)}{\partial z}$$



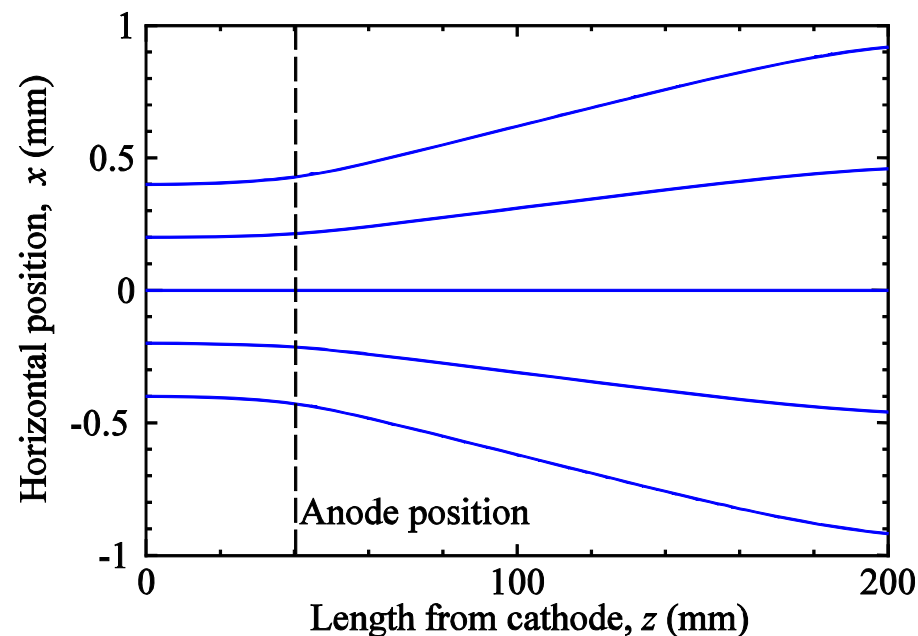
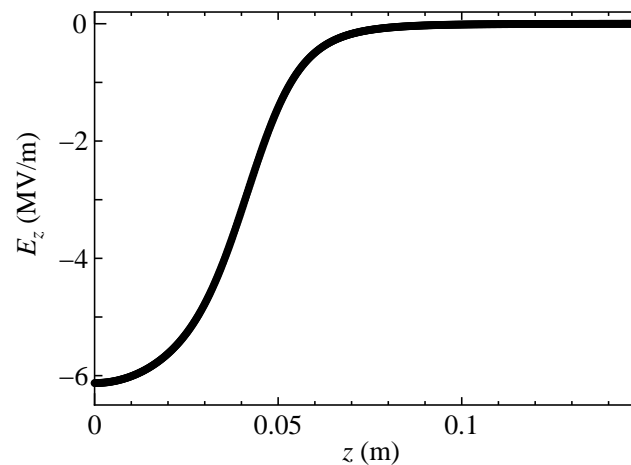
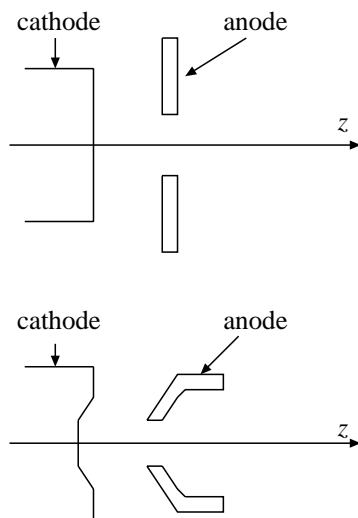
電子銃の電場分布より、 $\partial E_{z0}(r)/\partial z > 0$

$r \neq 0$ のとき、 $F_r > 0$

電子銃内では、負の電荷を持つ電子は横方向に発散力を受ける

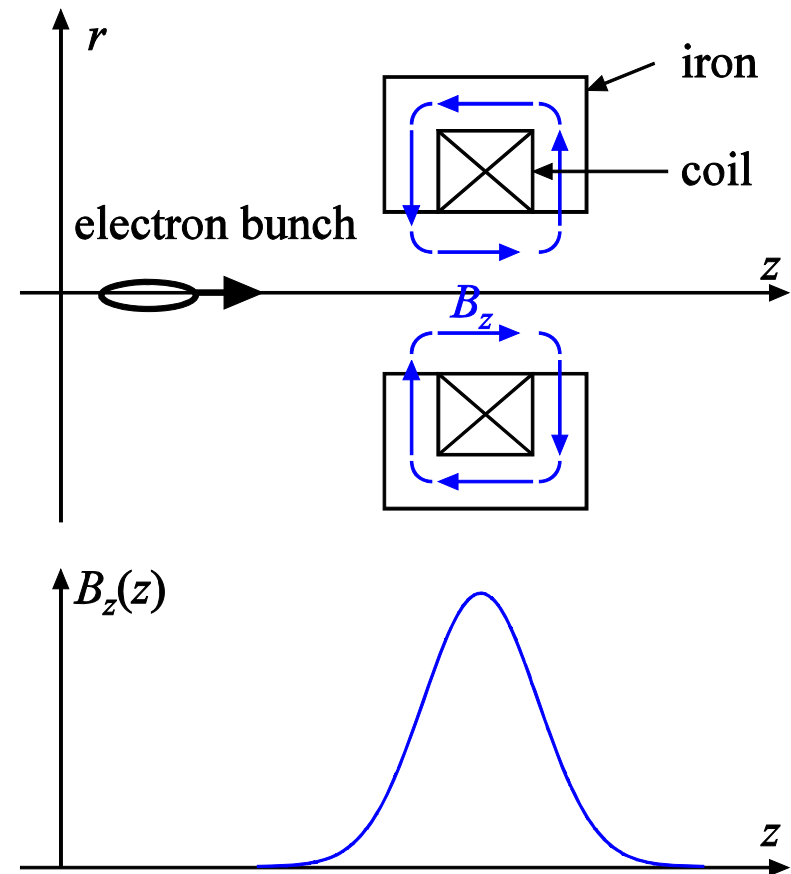
電子銃が生成する電場による影響

- カソード表面のx軸上に0.2mm間隔で5つの電子を配置($x_0 = -0.4, -0.2, 0.0, 0.2, 0.4$ mm)
- 各粒子間のCoulomb相互作用は無視
- 加速電圧: 250 kV
- 粒子は電子銃を通過する間に、発散力を受ける
- カソード面に勾配をつけることにより、発散力を制御することが可能



ソレノイド電磁石

- ERL入射部では、電子銃の後にソレノイド電磁石を設置する
- ソレノイド電磁石の効果
 - ビームに収束力を与える
 - ビームの(x-y)断面を回転させる
- ソレノイド電磁石の役割
 - 電子銃の電場と空間電荷効果により発散したビームを収束する(ビームサイズの減少)
 - 空間電荷効果によって生じた投影エミッタンスの補償
- 多くの場合、電子銃下流とバンチャー空洞下流の2か所にソレノイドが設置される



ソレノイド電磁石が作る磁場

- JAEA-typeのソレノイド電磁石
- カソード表面での磁場をゼロにするために、主コイルの他に補正コイルが使用される
- z 軸上の1次元磁場分布から、 z 軸近傍での2次元磁場分布を求めることができる

$$B_r(r, z) = -\frac{1}{2} \frac{\partial B_{z0}(z)}{\partial z}$$

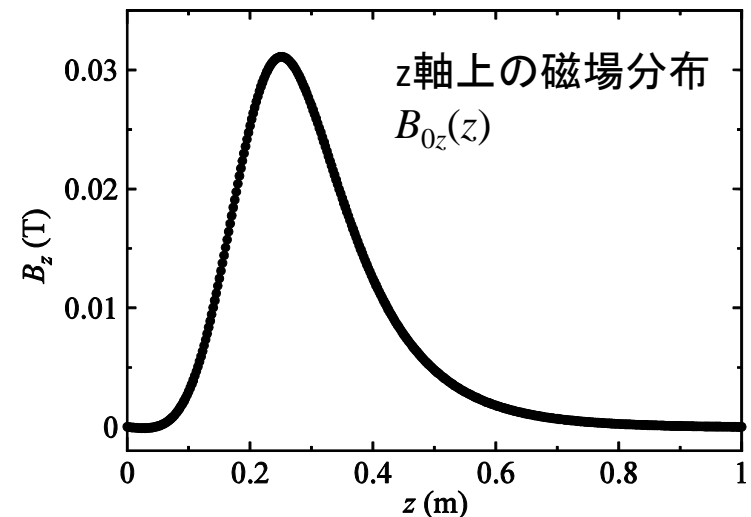
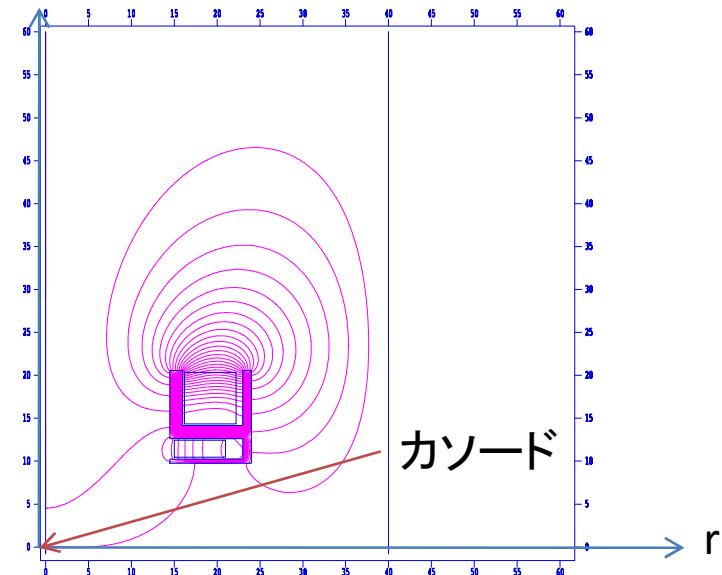
$$B_z(r, z) = B_{z0}(z) - \frac{1}{4} r^2 \frac{\partial^2 B_{z0}(z)}{\partial z^2}$$

- 電子は、上記のソレノイド磁場中でローレンツ力を受ける

$$\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

- ソレノイドを通過するとき、電子はどのような軌道を描くか？

z (ビーム進行方向)

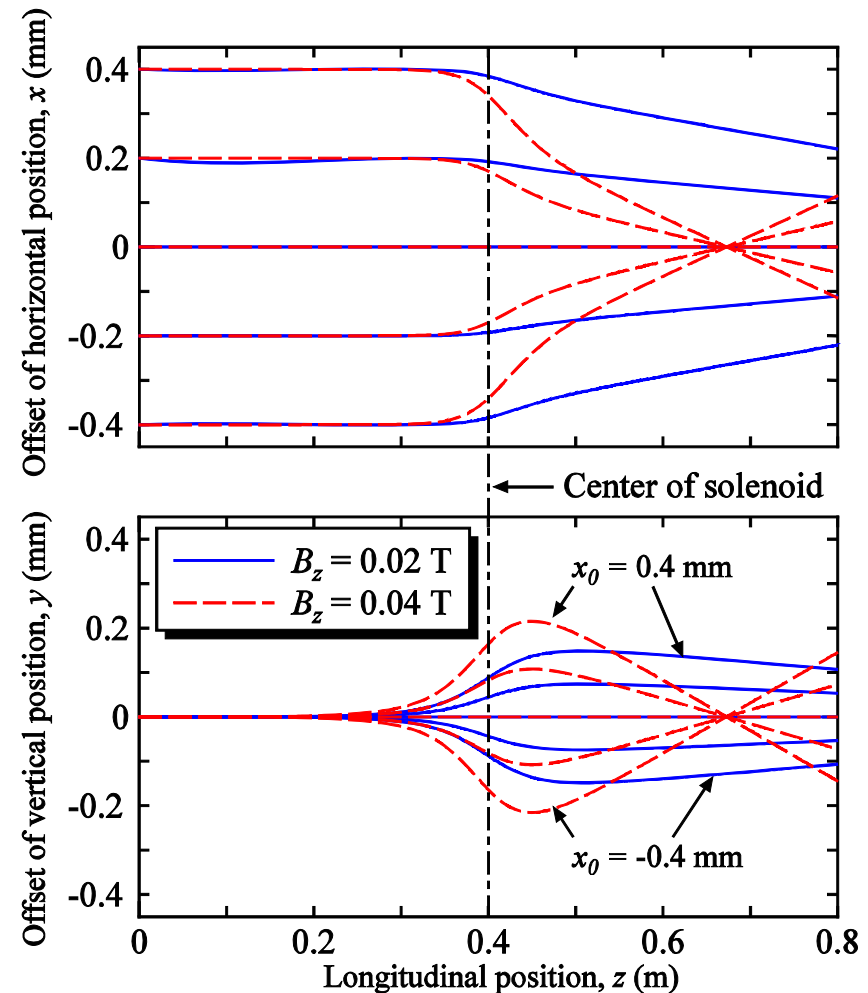


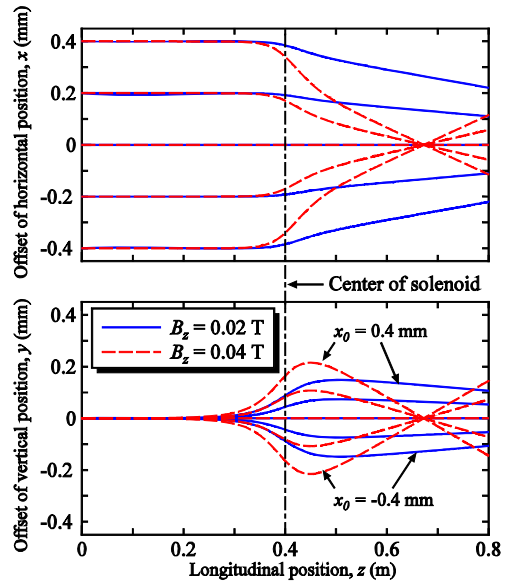
ソレノイド磁場中での電子の運動

- x 軸上に0.2 mm間隔で5つの電子が配置されるとする
($x_0 = -0.4, -0.2, 0.0, 0.2, 0.4$)
- y 軸上の位置はすべてゼロ
($y_0 = 0.0$)
- 横方向の初期運動量はゼロ
($P_x = P_y = 0$,
すなわち、 $\beta_x = \beta_y = 0$)
- 電子は z 方向に進行するとし、250 keVの運動エネルギーを持つ
- ソレノイドの中心磁場は、
 - $B_z = 0.02$ T
 - $B_z = 0.04$ T
- 空間電荷効果は無視



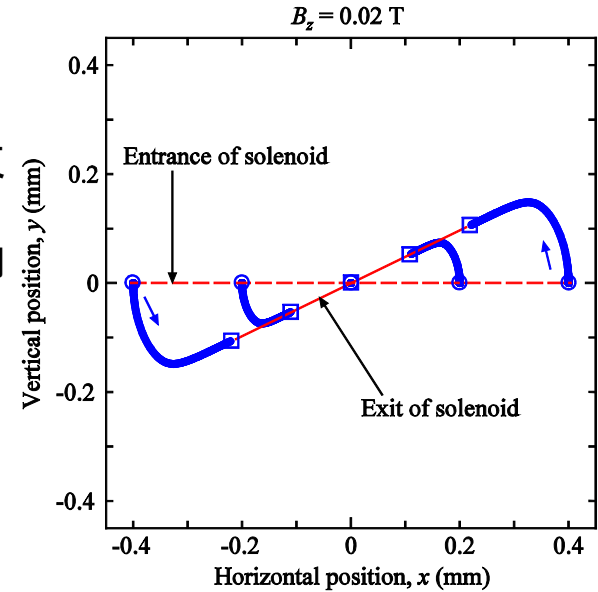
- ソレノイド磁場は電子に収束作用を与えている
- また、ソレノイド磁場は y 方向の運動を生じさせる



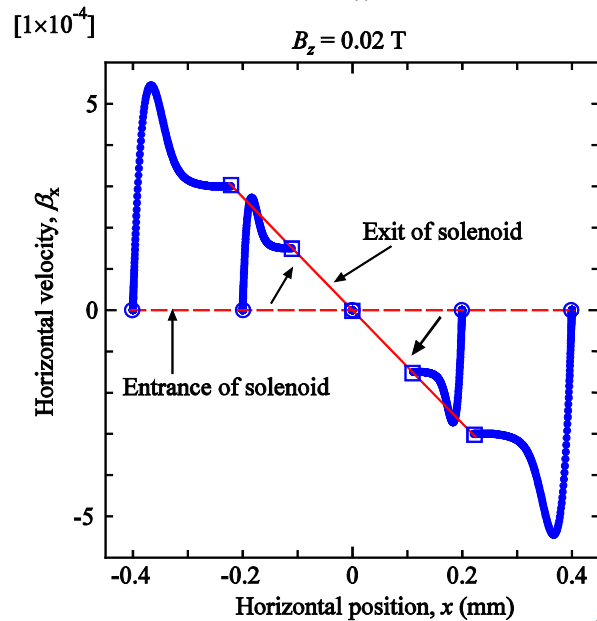


● (x-y)面内の運動

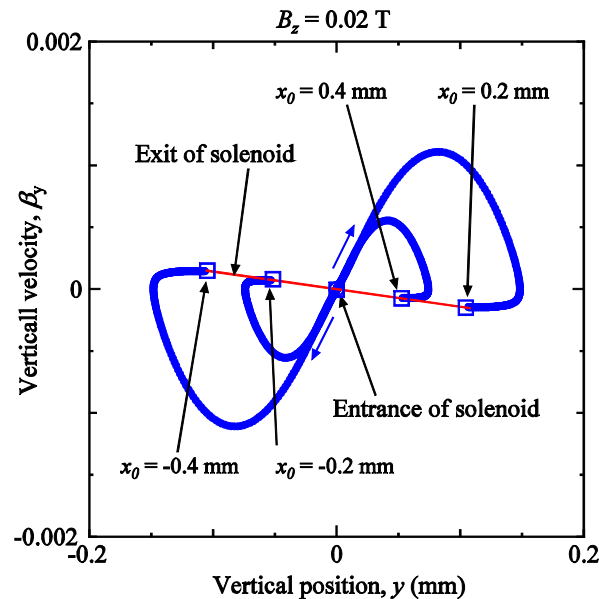
- ソレノイド出口での粒子の位置は、収束作用によって減少するとともに、(x-y)面内で回転する



● 位相空間(x-β_x)内の運動



● 位相空間(y-β_y)内の運動



■(x-β_x)内:
出口での分布は傾いた分布となる

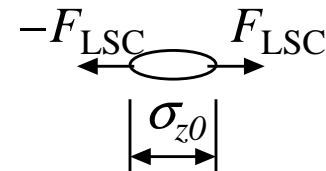
■(y-β_y)内:
1点にあった初期分布が、出口で拡がりを持つ

ソレノイドは、位相空間での分布の傾きを与える

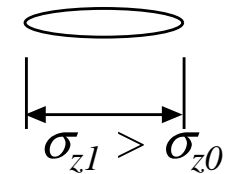
バンチャー空洞

- 光陰極電子銃では、パルス状のレーザーをカソードに当てて、バンチ化された電子ビームを取り出す
- カソード直後では、ビームのエネルギーが低いために、空間電荷効果の影響が強く働き、ビームは進行方向に引き伸ばされる
- 引き伸ばされたバンチを再圧縮するために、バンチャー空洞を用いる
- バンチ圧縮の方法: バンチャー空洞が作るRF電磁場によって、バンチの前後に速度差を作り、バンチを圧縮する(ドリフトバンチング、あるいは速度バンチング)

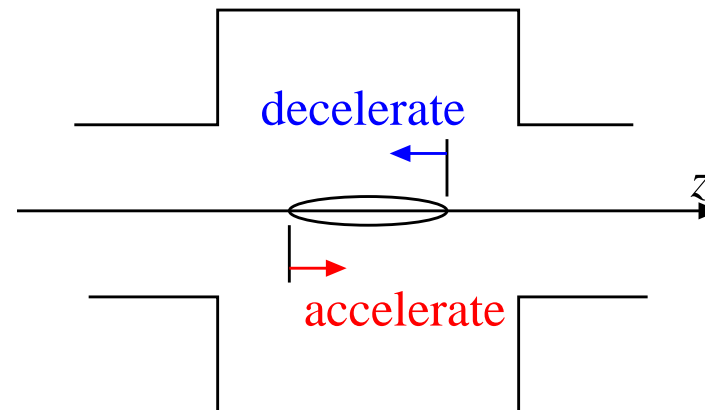
(a) after cathode



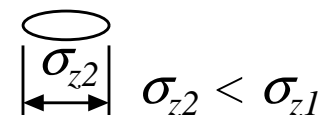
(b) after drift



(c) buncher cavity



(d) after drift



バンチャー空洞が作る加速電場

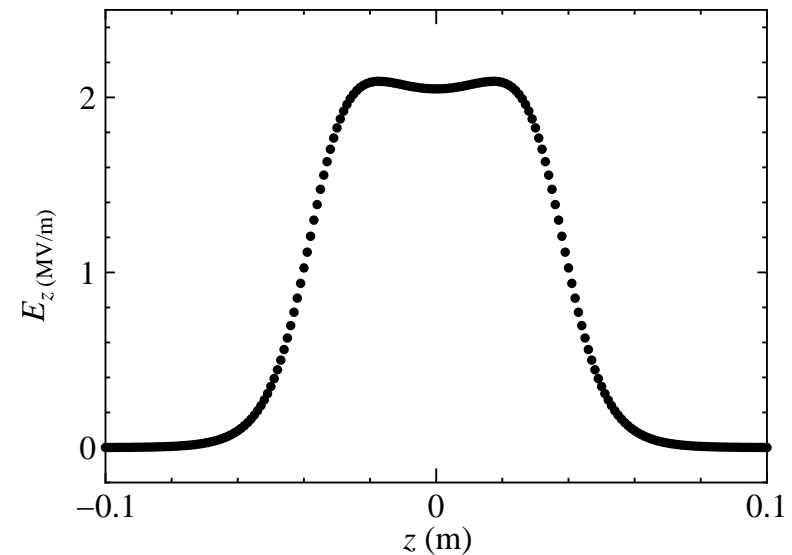
- コーネル大学ERL計画で使用されるバンチャー空洞の1次元電磁場分布 $E_{0z}(z)$
- 円筒対称性があると仮定
- RF電磁場は、時間によって変化するので、 $E_{0z}(z)$ に時間依存を付け加えて、 $E_z(z,t)$ がz軸上の加速電場を表す
- z軸上で半径方向rおよび円周方向 θ の成分は一定であると仮定して、 $E_z(z,t)$ をMaxwell方程式に代入すると、z軸近傍では、

$$E_r(z,t) = -\frac{r}{2} \frac{\partial E_z(z,t)}{\partial z}$$

$$B_\theta(z,t) = \frac{r}{2c^2} \frac{\partial E_z(z,t)}{\partial t}$$

ここで、 c は光速、
 ω はRF電磁場の各振動数、
 ϕ は初期位相

z軸上の電場分布
 $E_{z0}(z)$



TMモードの電磁場の場合、z軸近傍での電磁場の各成分は、

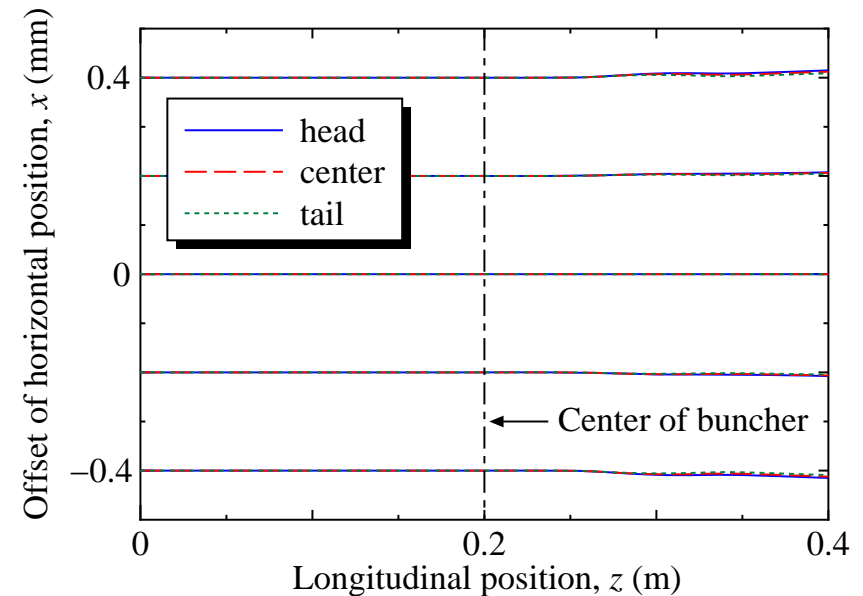
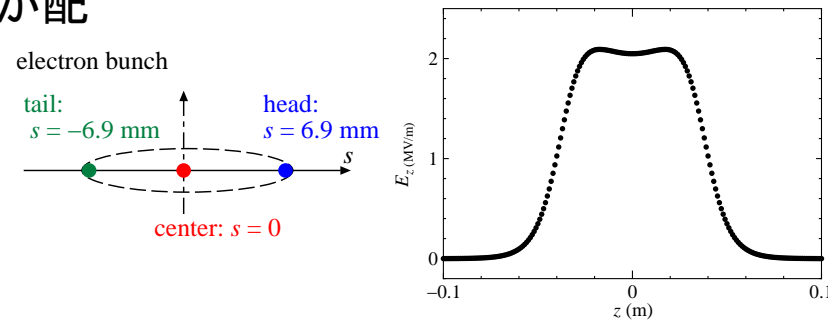
$$E_z(r,z) = E_{z0}(z) \cos(\omega t + \phi)$$

$$E_r(r,z) = -\frac{1}{2} r \frac{\partial E_{z0}(z)}{\partial z} \cos(\omega t + \phi)$$

$$B_\theta(r,z) = \frac{r\omega}{2c^2} E_{z0}(z) \sin(\omega t + \phi)$$

バンチャー空洞内での電子の軌道

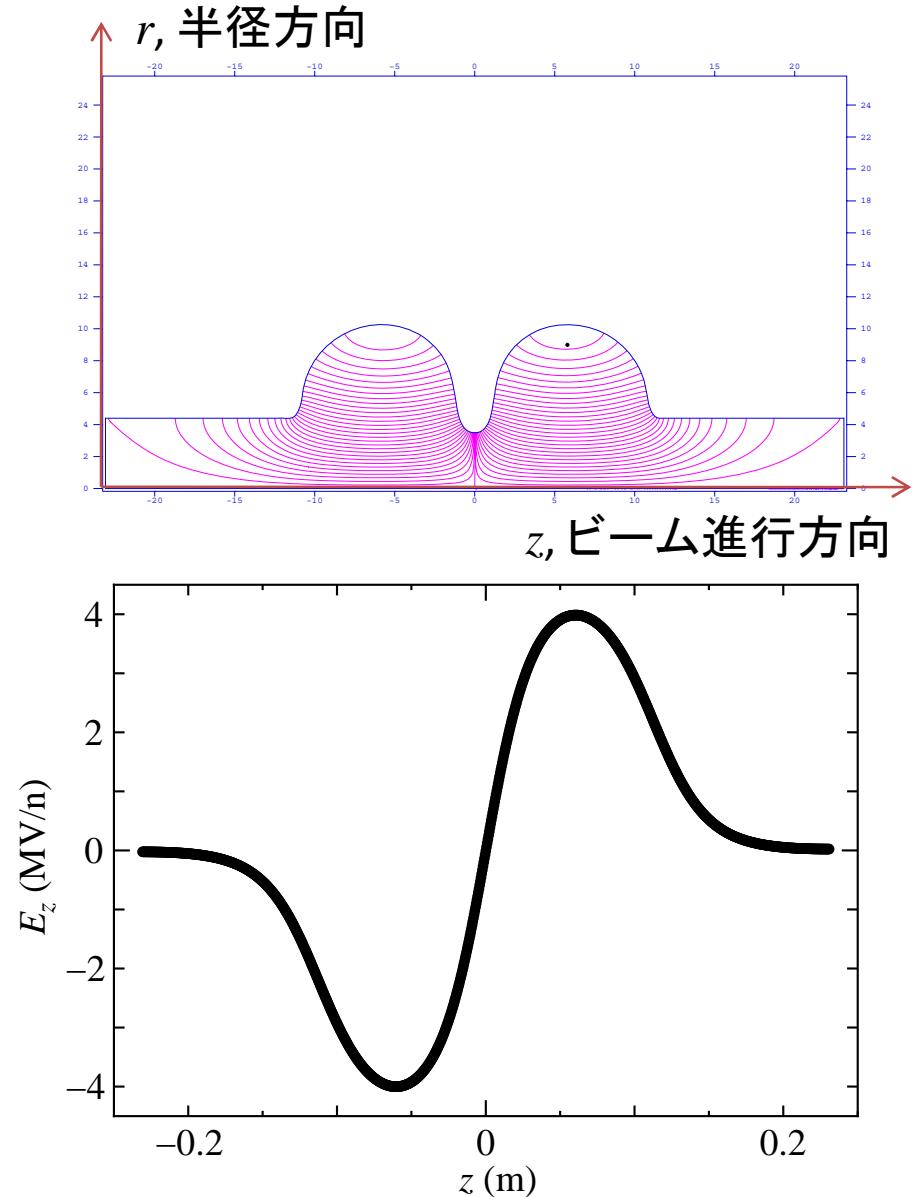
- x 軸上に0.2 mm間隔で5つの電子が配置されるとする
($x_0 = -0.4, -0.2, 0.0, 0.2, 0.4$)
- y 軸上の位置はすべてゼロ
($y_0 = 0.0$)
- 横方向の初期運動量はゼロ
($P_x = P_y = 0$, すなわち、 $\beta_x = \beta_y = 0$)
- 電子は z 方向に進行するとし、250 keVの運動エネルギーを持つ
- 最大加速電場: 1 MV/m
- 加速位相: 最大加速を与える位相から-90度
- 空間電荷効果は無視
- バンチの先頭、後、中心の3つについて計算(RF電磁場は時間変動するので、受ける力が異なる)



バンチャー内で横方向の力を受ける
バンチ前後での横方向の力の変化は小さい

超伝導RF加速空洞

- ERLでは、入射部用空洞および周回部用空洞には、超伝導加速空洞(Super conducting RF cavity)が使用される
- 超伝導空洞が必要な理由は、連続波(CW)で大電流ビーム(100 mA)を加速し、また高い加速勾配を得るため
- CERL入射部には、超伝導空洞を3台設置
- 電子銃から生成したビームを10 MeV程度まで加速
- 周回部加速空洞とは異なり、エネルギー回収が行われなかったため、加速に必要なパワーはすべて外部のRF源から供給されなければならない
- 最大加速勾配は30 MV/mが達成できそう
- ただし、位相や加速勾配などの自由度を確保するために、20 MV/m程度に制限した方が、低エミッタンスを得る上で有利と考えられる



超伝導加速空洞が作る電磁場

- バンチャー空洞の場合と同様に表わされる

$$E_z(r, z) = E_{z0}(z) \cos(\omega t + \phi)$$

$$E_r(r, z) = -\frac{1}{2} r \frac{\partial E_{z0}(z)}{\partial z} \cos(\omega t + \phi)$$

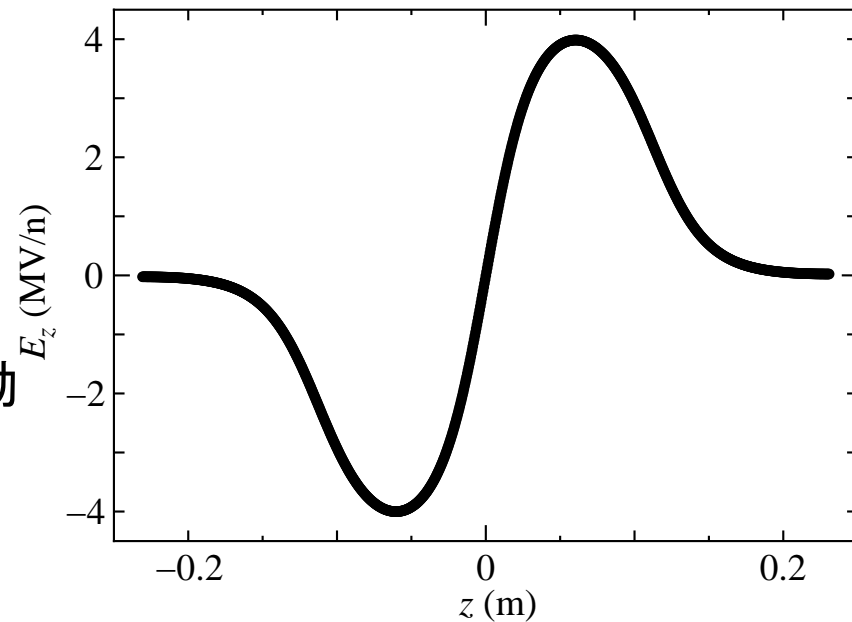
$$B_\theta(r, z) = \frac{r\omega}{2c^2} E_{z0}(z) \sin(\omega t + \phi)$$

- 超伝導加速空洞内での電子の運動

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

超伝導加速空洞内での電子の軌道
はどうなるか？

z軸上の電場分布
 $E_{z0}(z)$

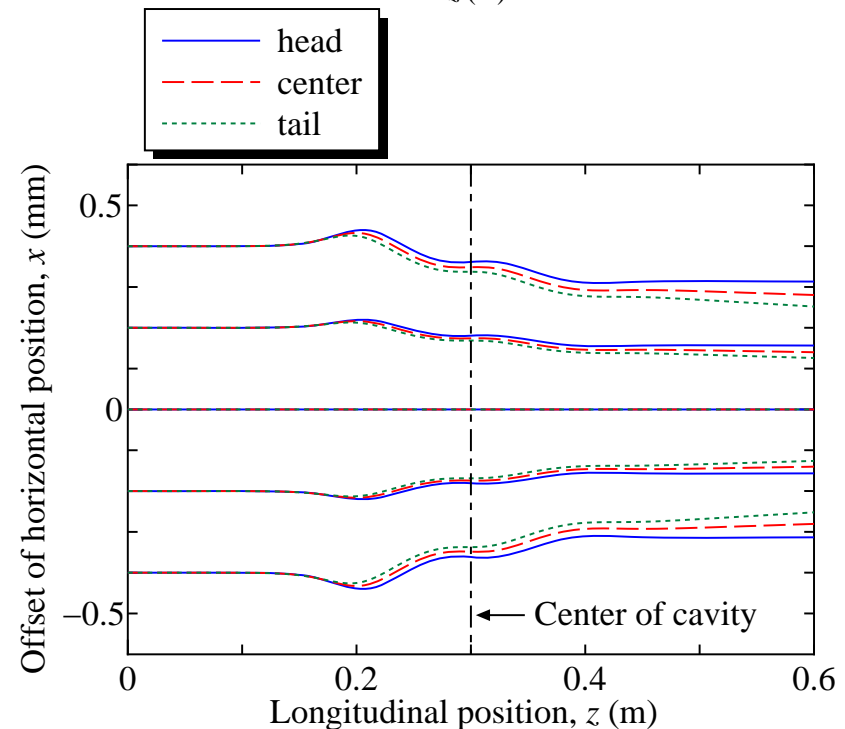
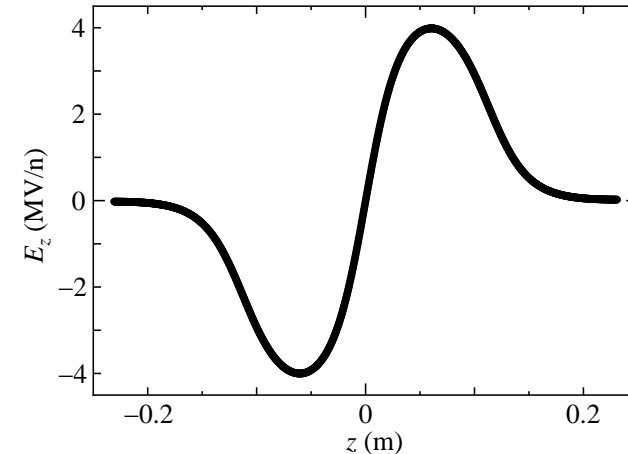


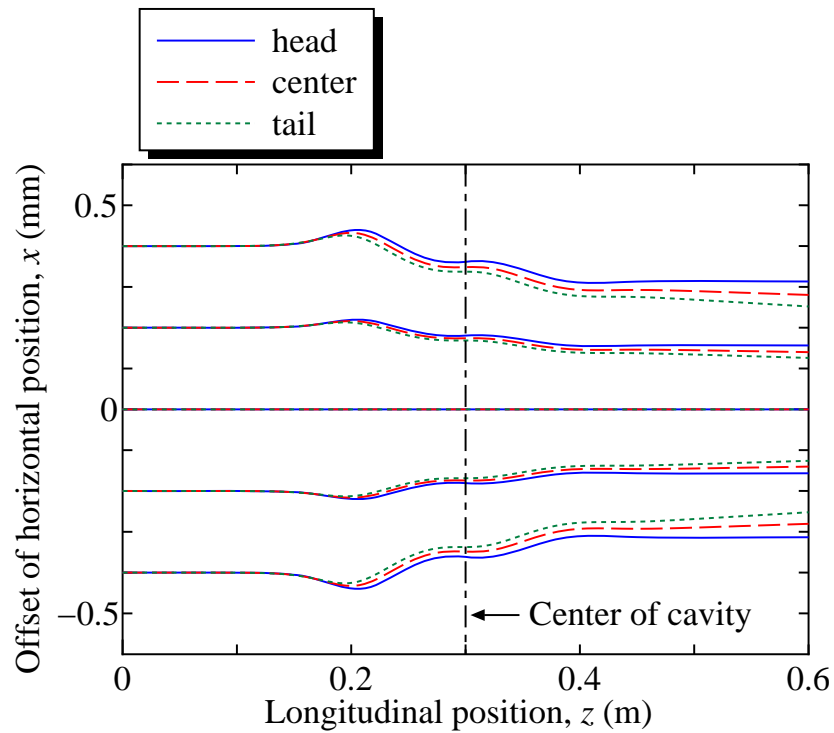
超伝導加速空洞内での電子の軌道

- x 軸上に0.2 mm間隔で5つの電子が配置されたとする
($x_0 = -0.4, -0.2, 0.0, 0.2, 0.4$)
- y 軸上の位置はすべてゼロ
($y_0 = 0.0$)
- 横方向の初期運動量はゼロ
($P_x = P_y = 0$, すなわち、 $\beta_x = \beta_y = 0$)
- 電子は z 方向に進行するとし、250 keVの運動エネルギーを持つ
- 最大加速電場: 10 MV/m
- 加速位相: 最大加速を与える位相
- バンチの先頭、後、中心の3つについて計算(RF電磁場は時間変動するので、受ける力が異なる)

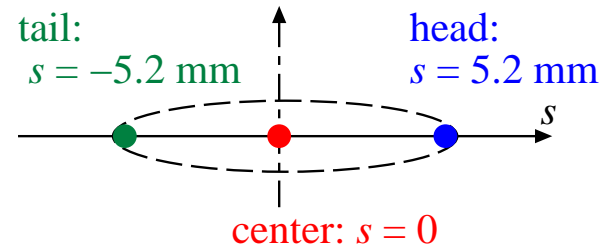


- 加速空洞内で横方向の力を受ける
- バンチ前後で、横方向に受ける力の大きさが異なる

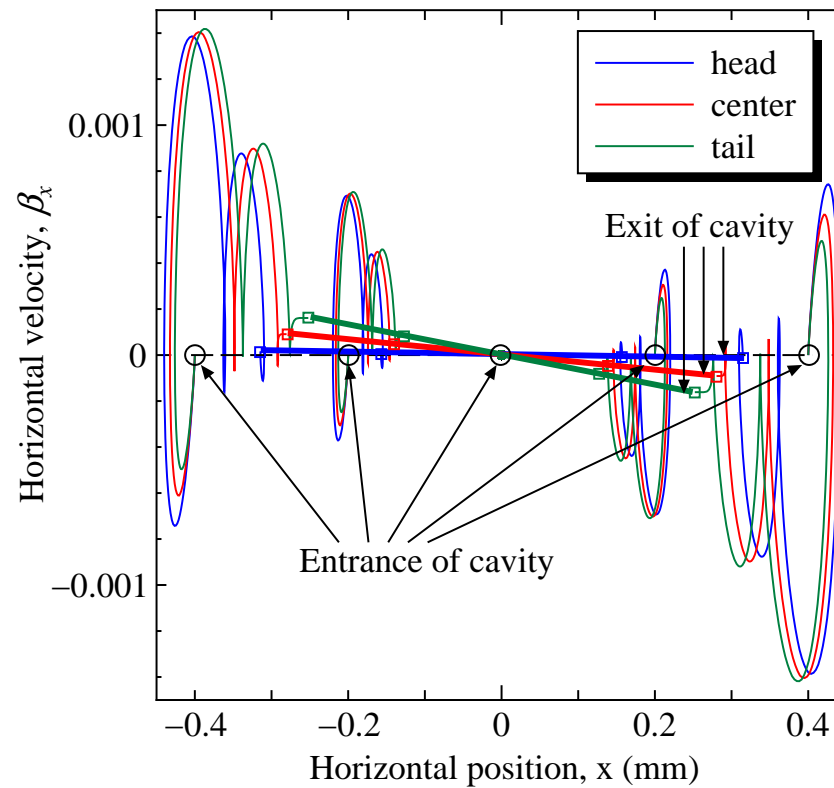




electron bunch



• 位相空間($x-\beta_x$)内の運動



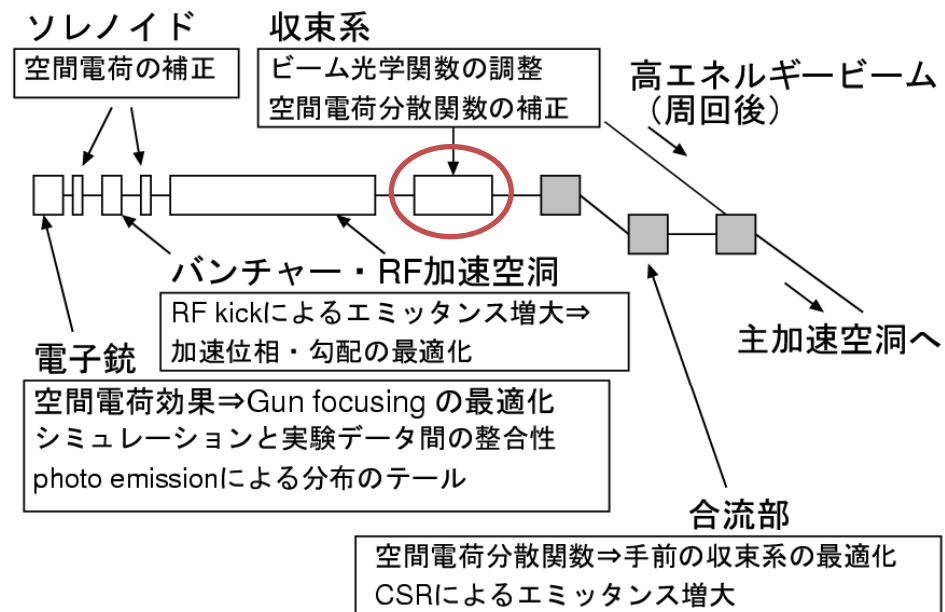
バンチ内での粒子によって、空洞出口での位相空間の傾きが異なる



投影エミッタンス増大の原因

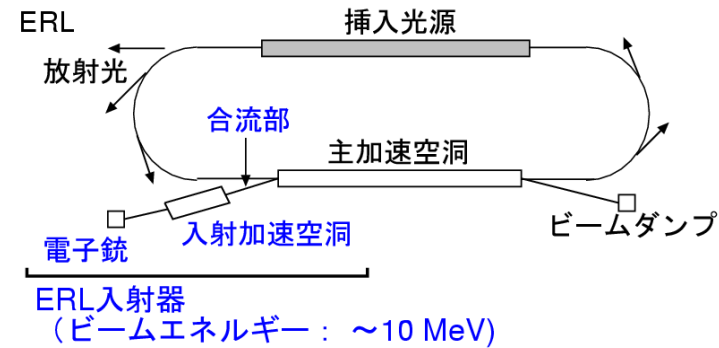
4極電磁石によるマッチング部

- ERL入射器では、入射器用加速空洞の後に、ビーム光学関数調整用に複数の4極電磁石が設置される
- この部分をマッチング部という
- CERN計画では、5台の4極電磁石を設置
- マッチング部の役割は、この後に続く合流部での分散関数とエネルギー拡がりによる投影エミッタンスの増大を避けるために、ビーム光学関数を調整すること
- 電子銃から加速空洞までは、基本的に円筒対称性をもつ要素
- 4極電磁石は円筒対称性を持たないため、これ以降ビームの円筒対称性はなくなる



合流部

- 合流部は、ERL入射部からの低エネルギービームを、周回部から来た高エネルギービームと合流させる部分である
- 合流部は、一般に3つあるいは4つの偏向電磁石から構成される
- 合流部出口で分散関数をゼロにする必要がある (3-dipoleの場合は電磁石端部の形状を調整あるいは、4極電磁石を設置して調整する)

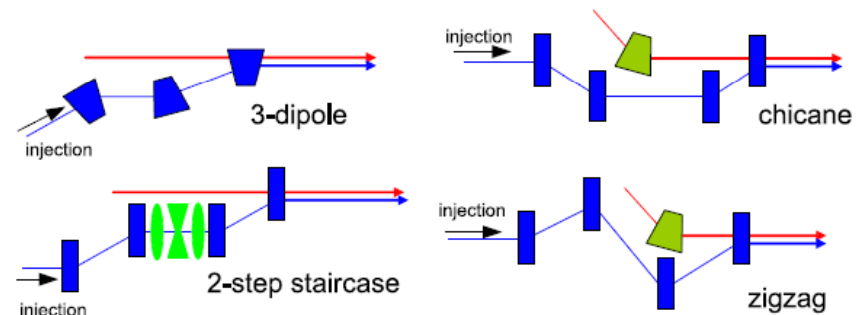


- 合流部で問題となる物理現象

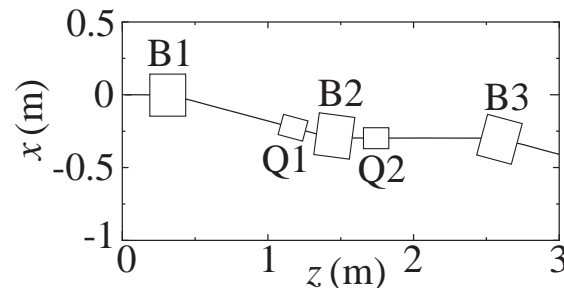
- 縦方向空間電荷効果
- コヒーレント輻射 (Coherent Synchrotron Radiation)

- どちらも、分散関数がゼロでない部分でエネルギー拡がりを生じさせ、投影エミッタンスの増大を引き起こす

- これらの影響は、合流部手前のマッチング部でビーム光学関数を調整することにより、その影響を最小に抑えることが可能



コンパクトERLの設計研究報告書 (CDR)より
<http://ccdb4fs.kek.jp/tiff/2007/0724/0724007.pdf>



コーネル大学
ERL計画での
合流部

ERL入射部で重要となる物理

電磁場中の電子の運動方程式

- 加速器中では、電子は外部から加えられた電磁場から力を受ける
- 基本方程式

Maxwell 方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

\mathbf{D} と \mathbf{E} , \mathbf{B} と \mathbf{H} の関係式

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

電荷密度の連続の方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

電磁場中の電子の運動方程式

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \beta c) = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

- 運動方程式に、外部から与えられた電磁場、あるいは電子間の相互作用などを加えて、加速器中での運動を記述することができる

ビームを支配する物理

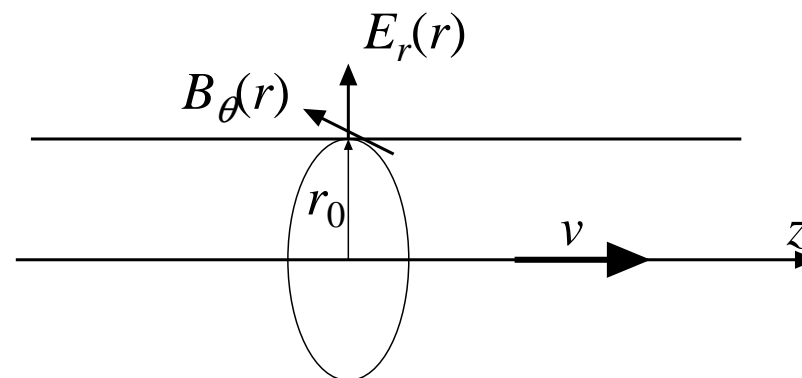
- ビームを支配する物理
 - 外部から加えた静電場・静磁場からの電磁力
 - 外部から加えた動電場・動磁場からの電磁力
 - 粒子間のCoulomb相互作用(空間電荷効果)
 - ビーム自身が生成する電磁場(航跡場)
 - 偏向場による放射光の発生(放射減衰, CSR)
 - 放射光の量子化(放射励起)
 - 他のビームが作る電磁場(ビーム・ビーム相互作用)
 - 残留ガスとの散乱、イオン捕獲
 - 光電子による電子雲との相互作用
- ERL入射器で考慮すべき相互作用は、上記の物理から、ビーム・ビーム相互作用と、光電子による電子雲との相互作用をのぞいたものである

ERL入射部で重要となる物理

- ERL入射部を設計する際にまず重要となる物理
 - 静電磁場による力
 - DC電子銃、ソレノイド、4極電磁石、合流部
 - 動電磁場による力
 - バンチャー空洞、超伝導加速空洞
 - 粒子間のCoulomb相互作用
 - 横方向・縦方向空間電荷効果
- 特に、入射部ではエネルギーが低いために、粒子間のCoulomb相互作用が重要になる
- まず、これら3つの効果を考え、より現実的な状況を考える場合には、航跡場やイオン捕獲による影響を考える
- 合流部での物理を考える際には、CSRの影響も考慮する必要がある
- 現在、放射光源として広く用いられている GeV 程度のエネルギーを持つ電子貯蔵リングでは、通常空間電荷効果の影響は無視され、第一次近似としてビームは単粒子として扱われる。
- どうして、エネルギーが高い場合には、粒子間のCoulomb相互作用を無視できるか？

空間電荷効果(簡単な場合)

- z 方向に一様かつ連続なビームが、 z 軸上を速度 v で移動しているとする
- ビームの断面: 半径 r の円
- 電荷密度はビーム内で一様
($\rho_0 = \text{const.}$)
- ビームが作る電磁場も円筒対称性をもつ
- z 軸方向に連続ビームとしたため、電場、磁場の z 方向成分はゼロ
- E_r, B_θ のみが残る



半径方向の電磁場(Gaussの法則より)

$$E_r(r) = \frac{1}{2\epsilon_0} \rho_0 r$$

電流密度は一様であるので、 $j = \rho_0 v$

Ampereの法則より、ビームの作る磁場は、

$$B_\theta = \frac{1}{2} \mu_0 \rho_0 v r$$

このような E_r, B_θ 内で電子が受ける力は

$$F_r = e(E_r - vB_\theta) = \frac{1}{2} \frac{e}{\epsilon_0} \frac{\rho_0}{\gamma^2} r$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = v/c,$$

$$c^2 = 1/(\epsilon_0 \mu_0)$$

■電子は空間電荷効果によって、半径方向に発散力を受ける

■その強さは、 $1/\gamma^2$ に比例

円筒断面をもつ連続ビーム内での空間電荷効果

$$F_r = e(E_r - vB_\theta) = \frac{1}{2} \frac{e}{\epsilon_0} \frac{\rho_0}{\gamma^2} r$$

- 高いエネルギーを持つビーム、すなわち γ が十分大きい場合には、空間電荷効果を見捨てることができる
- ビームの運動エネルギーを E_0 とすると γ は

$$\gamma = 1 + \frac{E_0}{mc^2}$$

$E_0 = 2.5 \text{ GeV}$ の場合

$$\gamma = 4893$$

$$\frac{1}{\gamma^2} = 4.2 \times 10^{-8}$$

$E_0 = 10 \text{ MeV}$ の場合

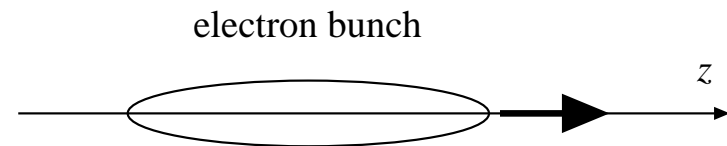
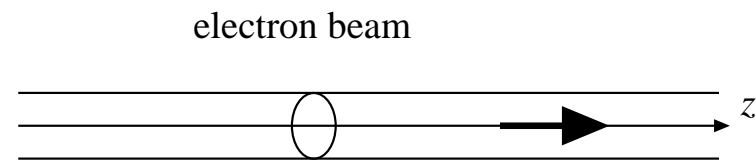
$$\gamma = 20.6$$

$$\frac{1}{\gamma^2} = 2.4 \times 10^{-3}$$

- $E_0 = 2.5 \text{ GeV}$ の場合には、 $1/\gamma^2$ は非常に小さくなり、空間電荷効果を見捨てる、すなわち単粒子的にビームを取り扱うことが可能となる
- 一方、 $E_0 = 10 \text{ MeV}$ の場合には、空間電荷効果を見捨てることはできない
- 同様の結果は、ビームの静止系でCoulomb力による静電場を計算し、ビームが動いて見える実験室系にLorentz変換することにより得ることができる

バンチ化されたビーム

- **ビーム (beam)**: 光線といった意味や、建築物の梁という意味があり、連続して連なったものというイメージとなる
- 加速器でビームというときは、進行方向に集団で運動しているということ指しているといえる
- このため、粒子の分布が進行方向に一様であるか、塊になっているかには関係ない
- **バンチ**: 進行方向に対してもある塊となっている
- ERLでの電子ビームはバンチになっている
- 電子バンチに対しての空間電荷効果は、進行方向にたいしても端があるため、進行方向に対しても発散力が働く



- ERLでは、短いパルス幅を持つ光を生成するために、バンチ長を短くすることが要求される
- また、加速空洞で加速する際にも、エネルギー拡がりの増大を防ぐために短いバンチ長が必要となる
- ERL入射器では、バンチ長を短くするために、電子銃と超伝導加速空洞の間に、バンチャー空洞が設置される

ビームの性質を表す物理量

- ビームは多数の粒子から構成されている
- ビームの性質は、全ての粒子の座標を一つの6次元位相空間上で表すことによって表現することができる
- 粒子数が N の場合、 $6N$ 個の値を持つことになる
- この位相空間分布はビームの性質を完全に表現しているが、実際にビーム同士の品質を比較する際には、幾つかのパラメタで表現できた方が便利である
- 多くの場合、6次元位相空間分布から計算される次のような物理量が使われる
 - 横方向のrmsビームサイズ
 - バンチ長(進行方向)
 - エミッタンス
 - エネルギー拡がり
 - ビーム光学関数など

rmsビームサイズ、バンチ長

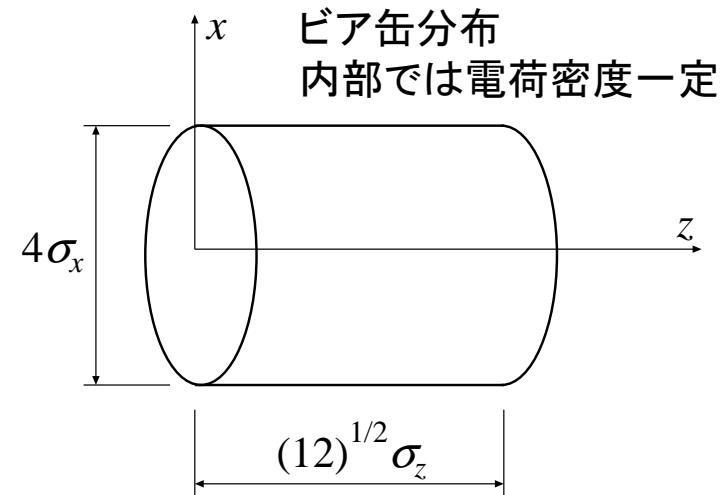
- ビームの分布に対する物理量の平均を $\langle \rangle$ で表すと横方向のrmsビームサイズ、rmsバンチ長は

$$\sigma_x^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$$

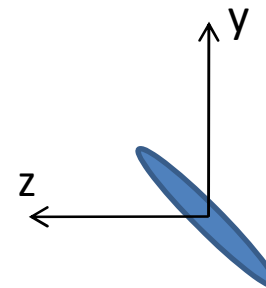
$$\sigma_y^2 = \langle (y - \langle y \rangle)^2 \rangle$$

$$\sigma_z^2 = \langle (z - \langle z \rangle)^2 \rangle$$

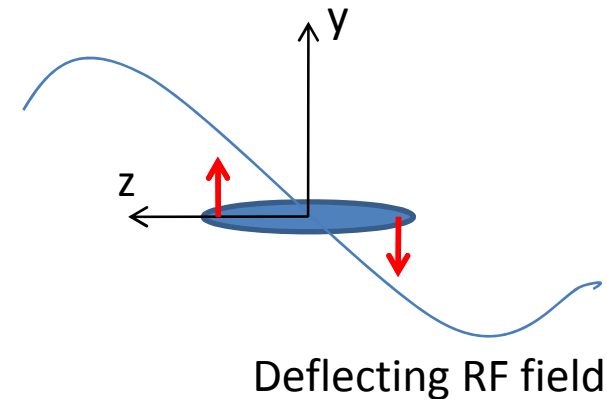
- 横方向ビームサイズの測定: スクリーンモニターやワイヤースキャナーを使用
- バンチ長の測定: 偏向RF空洞を用いて、バンチの前後で横方向にキック(速度変調)を与える
- 自由空間を走るとバンチ中心からの位置に比例して、横方向の変位が生じる
- これをスクリーンモニター上で測定する



On view screen



In deflecting cavity



エミッタンス、rmsエミッタンス

- エミッタンス: 位相空間中でのビームの分布が占める面積により定義
- エミッタンスが小さいビームでは、ビームサイズが小さく、またその広がりも小さい
- 位相空間中 (x, x') で楕円分布をもつ場合を考える

$$ax^2 + 2bxx' + cx'^2 = 1$$

a, b, c は楕円を記述するパラメタ
位相空間の面積は

$$A_x = \frac{\pi}{(ac - b^2)^{1/2}}$$

この面積よりエミッタンスは

$$\varepsilon_x = \frac{A_x}{\pi}$$

規格化エミッタンス

Liouvilleの定理より、位置座標 x と力学的運動量 P_x とからなる位相空間の面積は不変量となる

$$\iint dx dP_x = const.$$

位相空間の面積は、

$$A_x = \frac{1}{P} \iint dx dP_x = \frac{1}{\gamma\beta mc} \iint dx dP_x$$

A_x は $1/\gamma\beta$ に依存する

ビームエネルギーが変化しない場合は一定
しかし、ERL入射器では一定とならない

規格化エミッタンス(エネルギーに依存しない)

$$\varepsilon_{nx} = \beta\gamma\varepsilon_x$$

規格化rmsエミッタンス

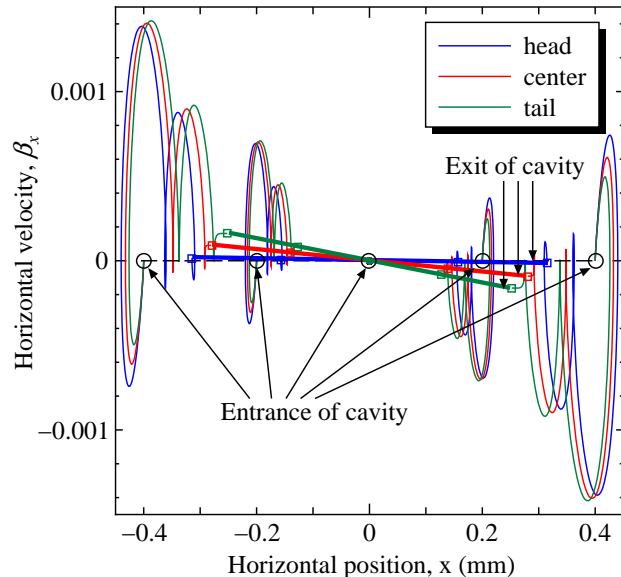
位相空間での面積の代わりに
一般的によく使用される定義

$$\begin{aligned} \varepsilon_{nx} &= \frac{1}{mc} \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle P_x^2 \rangle - \langle xP_x \rangle^2} \\ &= \beta\gamma \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle x'^2 \rangle - \langle xx' \rangle^2} = \beta\gamma\varepsilon_x \end{aligned}$$

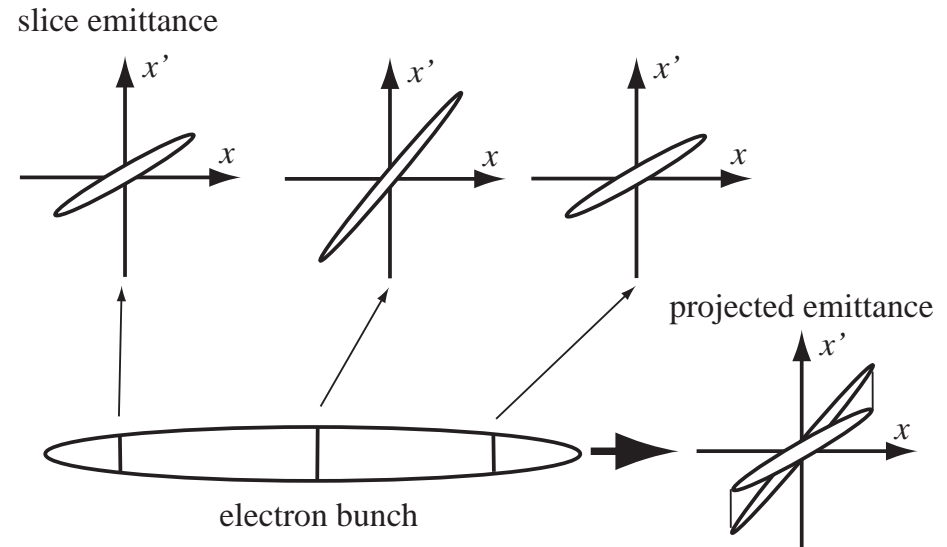
スライスエミッタンス、投影エミッタンス

- Hamiltonian によって記述される系では、Liouvilleの定理が成り立ち、位相空間でビームが占める面積は保存する
- 位相空間の面積が保存する場合でも、rmsエミッタンスは保存しない場合があるので注意が必要
- バンチ化されたビームの場合、バンチを進行方向にスライスして、そのスライス毎の位相空間を考えることができる
- これをスライスエミッタンスと呼ぶ
- バンチ全体を進行方向に垂直な面に対して投影した位相空間を考えることもできる **投影エミッタンス**

超伝導空洞での投影エミッタンスの増大



空間電荷効果やRF電磁場により、スライスエミッタンスに不一致が生じているとき、投影エミッタンスが増大する



エネルギー拡がり

- ビーム内の粒子はほぼ同一のエネルギーをもつ
- しかし、完全に同じエネルギーを持っているわけではない
- 現実のビームは有限なエネルギー拡がりをもつ
- 粒子間のエネルギー差がある場合、磁場中で異なる軌道を描くことになる
- エネルギーがずれた粒子が偏向電磁石を通過すると、軌道差が生じ、エネルギーのずれの大きさに比例して横方向の位置のずれが生じる (分散関数)
- ERL入射部: 電子ビーム生成時、RF電磁場、空間電荷効果によってエネルギー拡がりが生じる
- エネルギー拡がりは、Lorentz因子から

$$\delta = \frac{\sigma_E}{E_0} = \frac{\langle (\gamma - \langle \gamma \rangle)^2 \rangle^{1/2}}{\langle \gamma \rangle}$$

$$E_0 = mc^2 \langle \gamma \rangle$$

ビームを構成する単粒子の 運動方程式

近軸光線近似による運動方程式

- 電子の集団の運動を論じる前に、ビームを構成する個別の電子の運動を考える
- 系は z 軸に沿って円筒対称性をもつと仮定
- 粒子の運動は円筒座標系で表される $(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}, z, \dot{z})$
- 近軸光線近似(荷電粒子は z 軸近傍を運動)
 - r は外部磁場をつくるコイルや鉄心に比べて十分小さい
 - r' も十分に小さい
 - v_θ も十分に小さい

z 軸上のポテンシャル: $V(z)$

$$E_z(r, z) = -\frac{\partial\phi}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial z} = -V'$$

$$E_r(r, z) = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1}{2}V''r = -\frac{r}{2}\frac{\partial E_z}{\partial z}$$

z 軸上の磁場: $B(z)$

$$E_\theta = 0, B_\theta = 0$$

$$B_z(r, z) = -\frac{\partial\phi_m}{\partial z} = B,$$

$$B_r(r, z) = -\frac{\partial\phi_m}{\partial r} = -\frac{1}{2}B'r.$$

このような電磁場中での荷電粒子の運動方程式

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \gamma m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + m\mathbf{v} \frac{d\gamma}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

半径方向の運動方程式 $m \frac{d}{dt}(\gamma \dot{r}) - m\gamma r \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}qV''r + qr\dot{\theta}B$

半径方向の運動方程式 $m \frac{d}{dt}(\gamma \dot{r}) - m\gamma r \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}qV''r + qr\dot{\theta}B$

正準運動量の保存 $p_{\theta} = \gamma m r^2 \dot{\theta} + \frac{q}{2} B r^2 = \text{const.}$

↓

$$\dot{\theta} = -\frac{qB}{2\gamma m} + \frac{p_{\theta}}{\gamma m r^2}$$

エネルギーの保存 $\gamma = 1 - \frac{qV(z)}{mc^2} = 1 + \frac{|qV(z)|}{mc^2}$

↓

$$qV'' = -mc^2 \gamma''$$

時間微分をz微分に置き換えると、半径方向の運動方程式は

$$r'' + \frac{\gamma'}{\gamma\beta^2} r' + \frac{\gamma''}{2\gamma\beta^2} r + \left(\frac{qB}{2mc\beta\gamma} \right) r - \frac{p_{\theta}^2}{m^2 c^2 \gamma^2 \beta^2} \frac{1}{r^3} = 0$$



近軸光線近似による相対論的荷電粒子の運動方程式
 左辺第3項: 加速電場による収束発散項
 左辺第4項: ソレノイドによる収束の項

ビームエンベロープ方程式

- 相対論的な荷電粒子に対する近軸光線近似のもとでの運動方程式

$$r'' + \frac{\gamma'}{\gamma\beta^2}r' + \frac{\gamma''}{2\gamma\beta^2}r + \left(\frac{qB}{2mc\beta\gamma}\right)r - \frac{p_\theta^2}{m^2c^2\gamma^2\beta^2} \frac{1}{r^3} = 0$$

- 実際のビームは粒子分布をもつため、ビームの運動を考える際にはそれを考慮する必要がある
- ビームの集団の運動を記述する場合、粒子分布に対するrmsビームサイズを考える方が便利
- ビームが半径 r_m の円筒断面を持ち、電荷密度はビーム内で一様で、ビーム内の各粒子の軌道は交差しない(laminar beam)と仮定すると、ビームサイズの変化は、上記の式で r を r_m で置き換えたビームエンベロープ方程式で表わされる
- このとき、エミッタンスはゼロ
- エミッタンスが有限の場合、ビームエンベロープ方程式にエミッタンスによる増大を表す項を追加する必要がある

$$R'' - \frac{\varepsilon^2}{R^3} = 0$$

ソレノイドによる収束作用

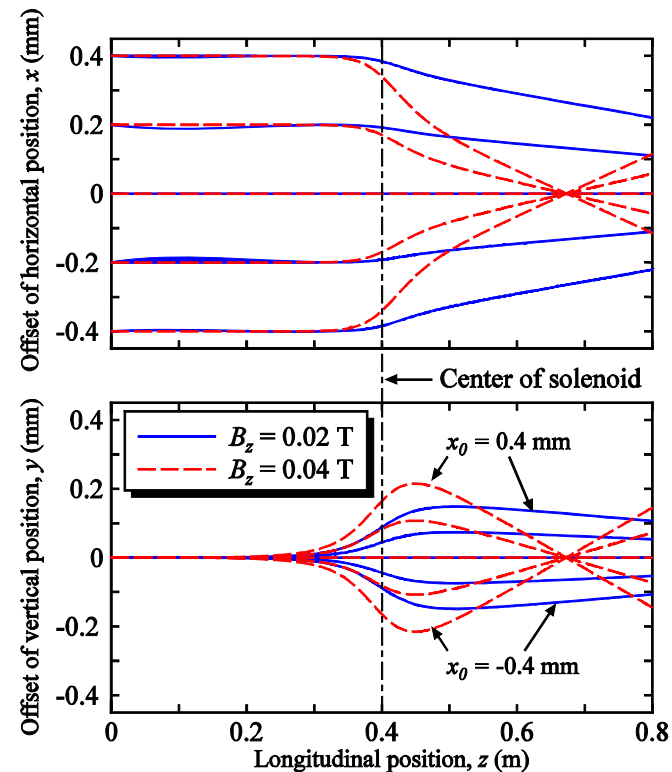
- 近軸光線近似による荷電粒子の方程式を使って、ソレノイド電磁石による収束作用を考える
- γ は一定、初期の円周方向運動量 p_θ をゼロとする
- ソレノイド磁場: B

$$r'' + k^2(z)r = 0 \quad k^2(z) = \left(\frac{qB(z)}{2mc\beta\gamma} \right)^2$$

この方程式をソレノイドの入口(z_1)から出口(z_2)まで積分すると、入口と出口でのビームの傾きの差は、

$$r'(z_2) - r'(z_1) = - \int_{z_1}^{z_2} k^2(z) dz$$

- k^2 は常に正である 粒子の軌道がソレノイド内で z 軸を横切らない場合、出口での傾きは入口での傾きより小さくなり、ソレノイドは収束作用を及ぼす
- この積分は k^2 の積分、つまり B^2 の積分であるため、磁場の向きは関係ない



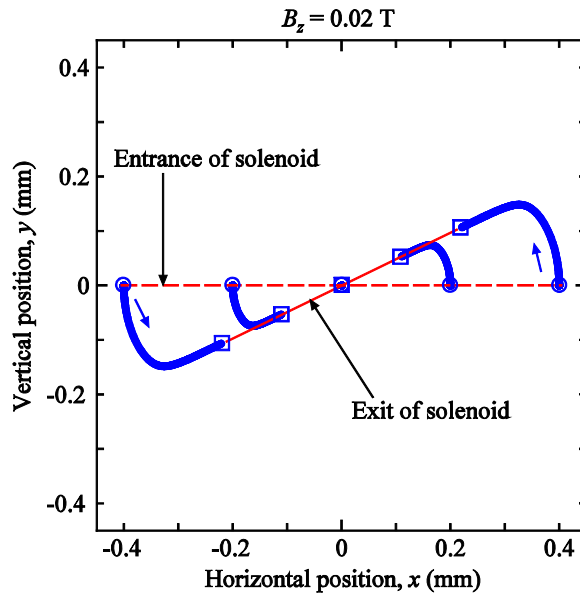
- ソレノイドによる収束のもう一つの特徴
- xy 空間での分布を収束とともに回転させる
- 円周方向の時間発展

$$\theta' = \frac{d\theta}{dz} = \dot{\theta} \frac{dt}{dz} \simeq -\frac{qB}{2\gamma m\beta c} + \frac{p_\theta}{mc\beta\gamma r^2}$$

- ソレノイドの入口で $\theta=0, p_\theta=0$ として、積分

$$\theta_r = -\int_{z_1}^{z_2} \frac{qB(z)}{2mc\beta\gamma} dz = -\int_{z_1}^{z_2} k(z) dz$$

粒子はソレノイドの出口で θ_r だけ回転する



ソレノイドによる収束作用の焦点距離

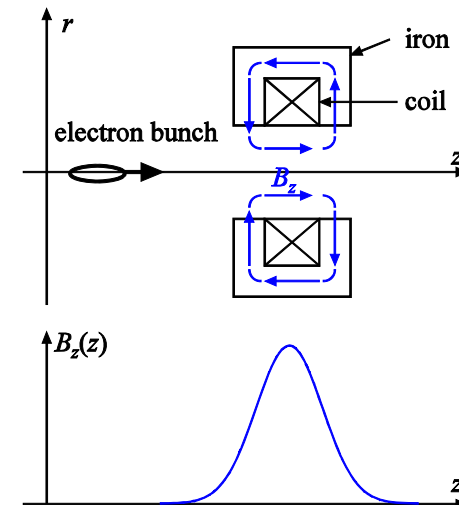
$$\frac{1}{f} = -\frac{r'}{r} = \left(\frac{q}{2mc\beta\gamma}\right)^2 \int_{z_1}^{z_2} B^2(z) dz$$

有効磁場長

$$L_{sol} = \frac{1}{B_0^2} \int_{z_1}^{z_2} B^2(z) dz$$

を用いると

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{q}{2mc\beta\gamma}\right)^2 L_{sol} B_0^2$$



RF電磁場による収束・発散作用

- RF電磁場による横方向の力を考える
- 空洞内に円筒対称性を持った定在波ができていているとする
- その中を電子バンチが通過する
- 空洞内でのz軸上の電場のz成分は

$$E_z(z, t) = E_0(z) \cos(kz) \cos(\omega t)$$

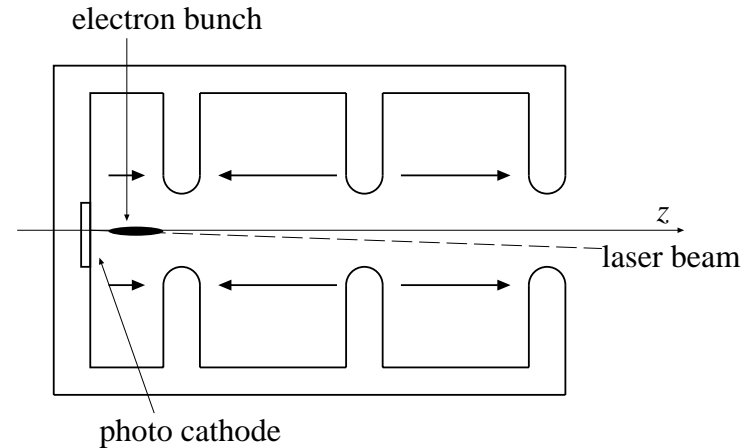
z軸近傍では

$$E_r(z, t) = -\frac{r}{2} \left[\frac{\partial E_0}{\partial z} \cos(kz) \cos(\omega t) - E_0 \sin(kz) \cos(\omega t) \right],$$

$$B_\theta(z, t) = \frac{r\omega}{2c^2} E_0 \cos(kz) \sin(\omega t)$$

半径方向の運動方程式

$$\frac{dP_r}{dt} = q(E_r - vB_\theta) \quad \rightarrow$$



光電陰極RF電子銃

ビーム粒子のRF電磁場に対する位相

$$\varphi = \omega t - kz$$

$$\frac{dP_r}{dt} = \frac{r}{2} kqE_0 \left[-\frac{1}{kE_0} \frac{\partial E_0}{\partial z} \cos(kz) \cos(kz + \varphi) + \frac{1}{2}(1 + \beta) \sin(2kz + \varphi) - \frac{1}{2}(1 - \beta) \sin(\varphi) \right]$$

半径方向の力は、位相に依存、つまりバンチ内での粒子の相対的な位置に依存

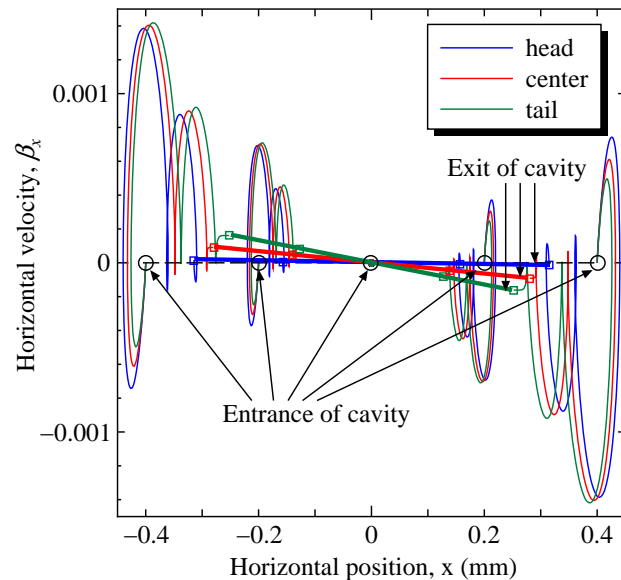
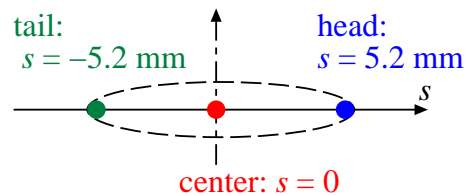
- 横方向の運動量の展開

$$P_x(x, s) = P_x(0, 0) + \frac{\partial P_x}{\partial x} x + \frac{\partial P_x}{\partial z} z + \frac{\partial^2 P_x}{\partial x \partial z} xz + \dots$$

右辺第3項: RF電磁場によるキック

右辺第4項: 収束発散作用

electron bunch



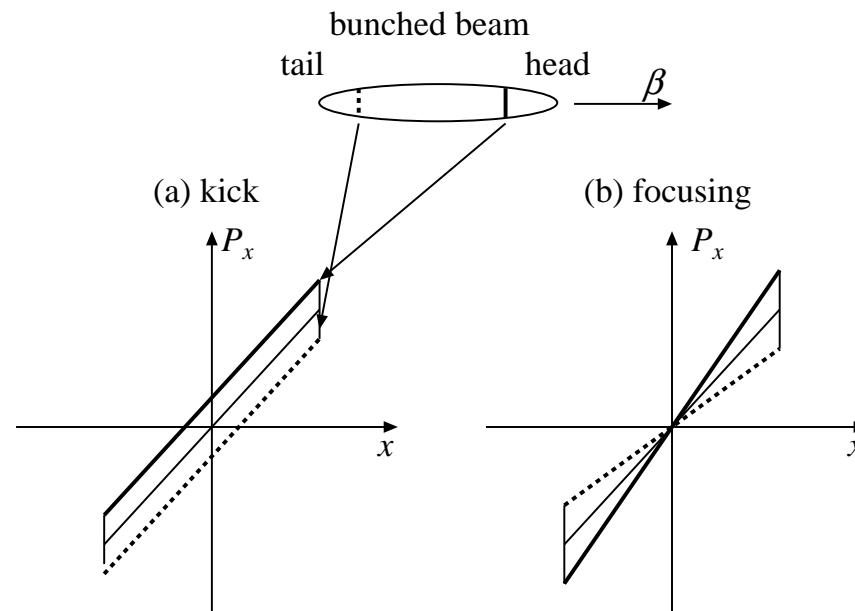
キックと収束発散作用による 投影エミッタンスの増大

$$\Delta \varepsilon_{kick} = \frac{1}{mc} \left| \frac{\partial P_x}{\partial z} \right| \sigma_x \sigma_z$$

$$\Delta \varepsilon_{focus} = \frac{1}{mc} \left| \frac{\partial^2 P_x}{\partial s \partial x} \right| \sigma_x^2 \sigma_z$$

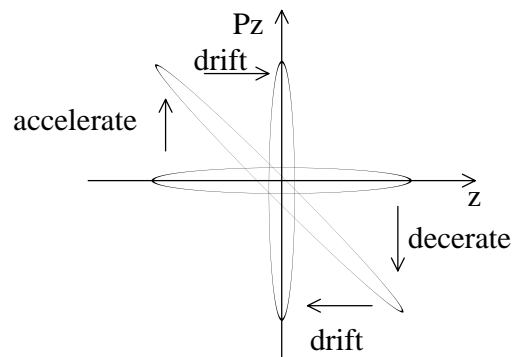
RF空洞での規格化エミッタンスの増大

$$\varepsilon_{nx}^2 = \varepsilon_0^2 + (\Delta \varepsilon_{kick})^2 + (\Delta \varepsilon_{focus})^2$$



バンチ化 (バンチ長の圧縮)

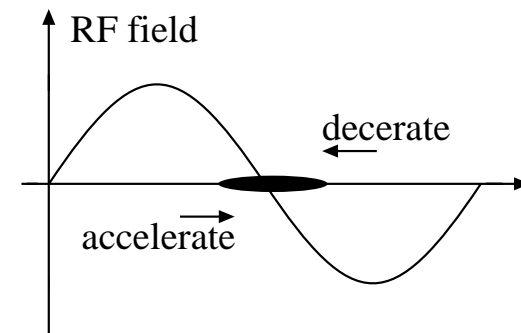
- ERL入射器用の光電陰極電子銃からは、パルス状レーザーを用いて、バンチ化されたビームが取り出される
- しかし、カソード近傍ではエネルギーが低いために、空間電荷効果の影響が顕著に現れ、バンチ長が引き伸ばされる
- 伸びたバンチ長を短くするために、ERL入射器ではバンチャー空洞を設置して、ドリフトバンチングを行っている



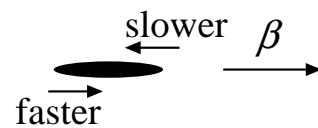
(1) entrance of buncher



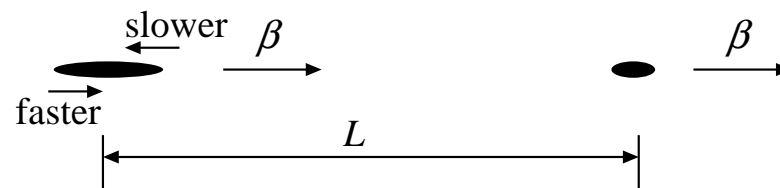
(2) buncher



(3) exit of buncher

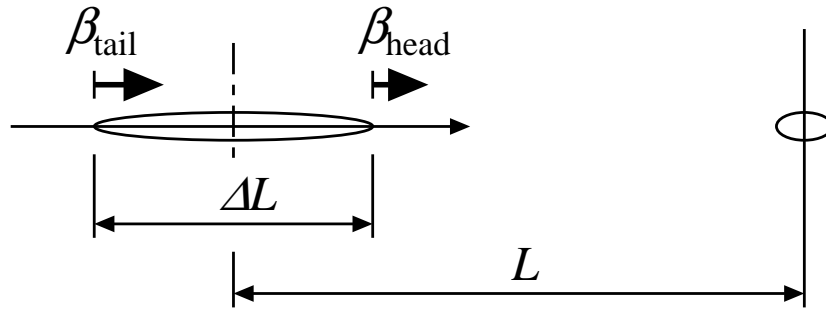


(4) after drift space



• バンチ長が最少となる距離

$$\Delta\beta = \beta_{\text{tail}} - \beta_{\text{head}} > 0$$



$$L = \beta_0 c \frac{\Delta L}{c \Delta\beta}$$

$$\frac{\Delta\beta}{\beta_0} = \frac{\Delta\gamma}{\gamma_0} \frac{1}{\gamma_0^2 - 1} \text{ を用いると}$$

$$L = \Delta L \frac{\gamma_0}{\Delta\gamma} (\gamma_0^2 - 1)$$

位相がゼロ付近である場合の加速電場は

$$E_z \approx E_0 \omega t$$

粒子がバンチャーを通過するのに要する時間を Δt とすると

$$\Delta\gamma = \frac{1}{mc^2} \omega e E_0 \Delta t \Delta L$$

バンチ長が最少となる距離は

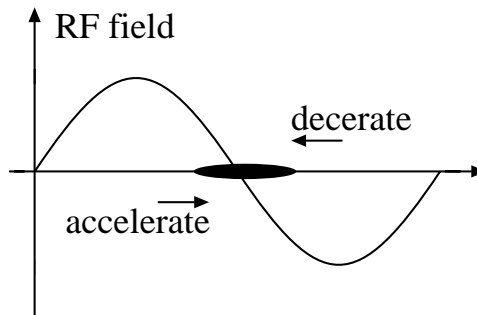
$$L = \frac{1}{\omega} \frac{1}{e E_0 \Delta t} T \left\{ \frac{T^2}{(mc^2)^2} - 1 \right\}$$

$$T = \gamma mc^2$$

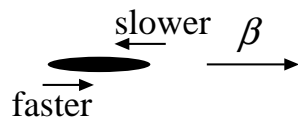
(1) entrance of buncher



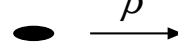
(2) buncher



(3) exit of buncher



(4) after drift space



L

まとめ

- 前半の講義(Lecture 2-3, 11:30 – 12:30)
 - ERL入射部の役割
 - ERL入射部を構成する要素
 - ERL入射部で重要となる物理
 - ビームを構成する単粒子の運動方程式
- 後半の講義 (Lecture 2-4, 14:00 – 15:00)
 - 電子バンチ内での空間電荷効果
 - 空間電荷効果による投影エミッタンスの増大
 - 空間電荷効果の数値計算
 - 合流部での物理