

# コヒーレントシンクロトロン放射 光とビームダイナミクス

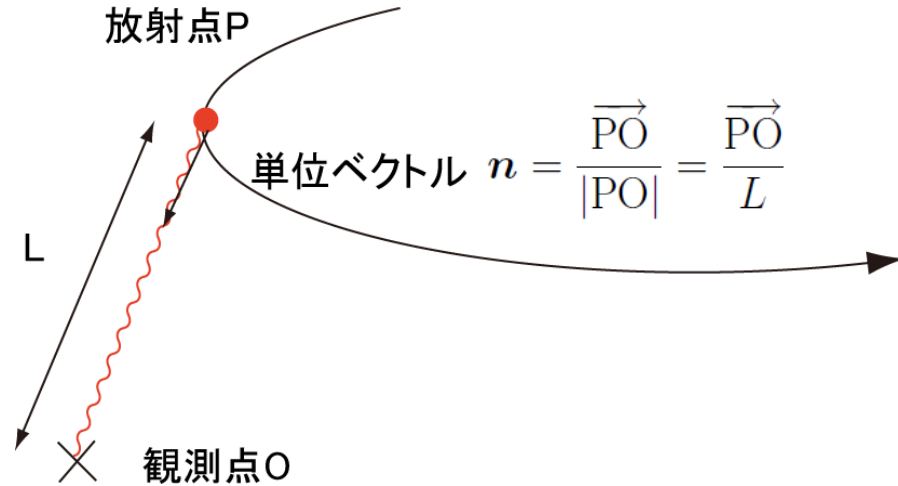
放射光源研究系  
島田 美帆

# 目次

- コヒーレントシンクロトロン放射光(CSR)によるエネルギー分布の変化
  - シンクロトロン放射光とCSR
  - CSRによるエネルギー変化
  - 過渡状態
  - 遮蔽効果
- CSRがビームダイナミクスに及ぼす影響
  - ビームダイナミクスの基礎
  - Emittance 増加の抑制方法
  - バンチ圧縮
  - コンパクトERLでの最適化

# 放射光とは

一般に  
荷電粒子の軌道の向きが変化したときに発生する電磁場のことを指す。



クーロン場  
(空間電荷効果)

放射場  
(CSR, 放射光)

$$E(\mathbf{r}, t) = \frac{e(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})}{\gamma^2(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3 L^2} + \frac{e\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{c(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3 L}$$

加速度

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt}$$

直進するより、円運動で大きい。

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$\mathbf{v}$  : 電子の速度ベクトル

$c$  : 光速

$\gamma$  : ローレンツ因子

放射光を議論するときは、無視することが多いが、

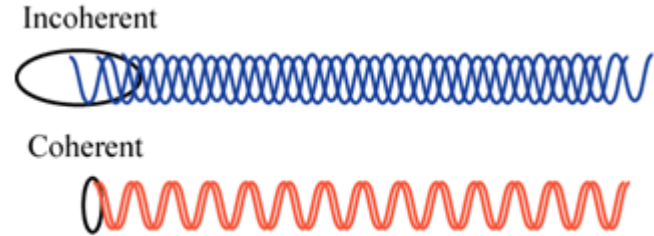
- 低エネルギー ( $\gamma$ が小さい)
- 近距離 ( $L$ が小さい)

の場合に現れることがある。

加速度を含む項で、一般的に、**シンクロトロン放射光やCSRはこの放射場のことを指す。**

# コヒーレントシンクロトロン放射光(CSR)の強度

- 通常の放射光 : 位相が揃っていない状態
- CSR : 位相が揃っている状態



通常の放射光の強度

$$\propto N$$

CSRの強度

$$\propto N^2$$

$$P_{\text{all}}(k) = NP_{\text{SR}}(k) + \mathcal{F}(k)N(N-1)P_{\text{SR}}(k)$$

フォームファクター(CSRの割合)

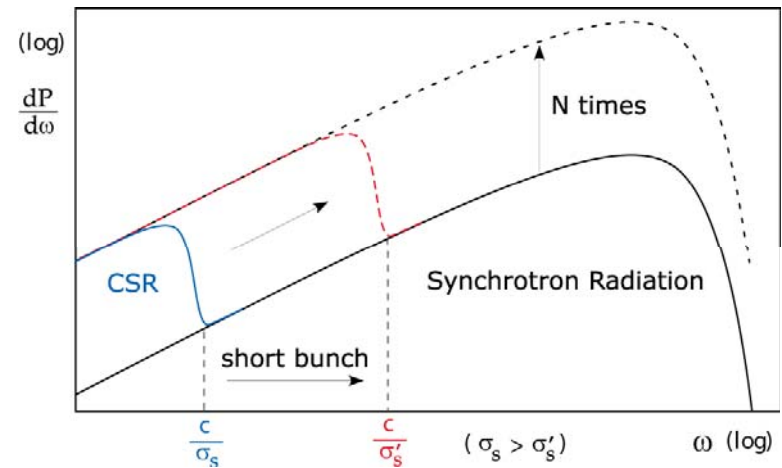
$$\begin{aligned} \mathcal{F}(k) &\equiv \frac{1}{N(N-1)} \sum_{n \neq m}^N \exp[ik(z_n - z_m)] \\ &= \left[ \int \lambda(z) \exp(ikz) dz \right]^2 \end{aligned}$$

$\lambda(z)$  : 電荷線密度、 $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda(z) dz = 1$

$P_{\text{all}}$  : 全体の放射光の強度  $k$  : 波数

$P_{\text{SR}}$  : 電子当たりの放射光の強度

$N$  : 電子数、通常バンチ当たりの数は  $10^{10}$  程度



バンチ長が短くなると?

- バンチ長程度の波長でCSRが発生する。
- 波長が短いほど、CSRの放射エネルギーは強くなる。

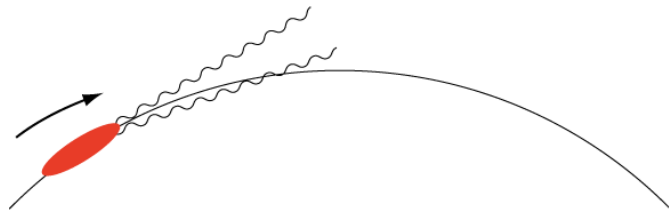
**光源としては望ましいが、ビームに影響を及ぼす可能性**

# 放射角度

- 放射光の波長によって広がり角度が異なり、**長い波長では広い角度で放射する。**

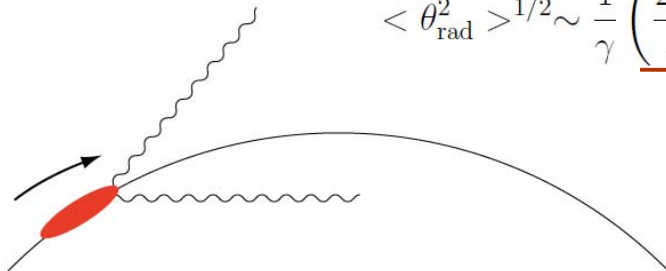
(i) :  $\omega = ck \leq \omega_c$  (通常、放射光利用される波長領域)

$$\langle \theta_{\text{rad}}^2 \rangle^{1/2} \sim \frac{1}{\gamma}$$



(ii) :  $\omega = ck \ll \omega_c$  (長い波長領域)

$$\langle \theta_{\text{rad}}^2 \rangle^{1/2} \sim \frac{1}{\gamma} \left( \frac{2\omega_c}{\omega} \right)^{1/3}$$



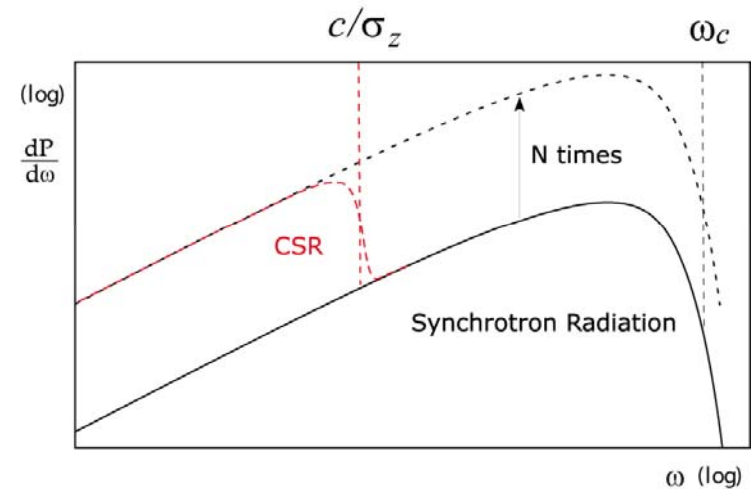
臨界周波数 :  $\omega_c = \frac{3}{2} \gamma^3 \frac{c}{R}$

$R$  : 軌道の曲率半径

$\gamma = E/mc^2$

$E$  : 電子のエネルギー

$mc^2$  : 電子の静止エネルギー

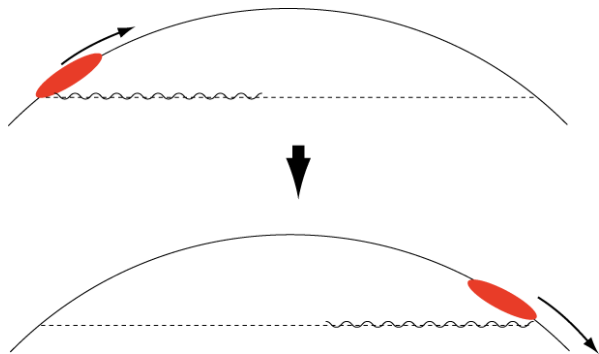


計算例

200MeVコンパクトERLの場合、  
 $\omega_c$ に相当する波長はおよそ10nm  
 目標とするバンチ長はおよそ30um

$c/\sigma_z \ll \omega_c$ であるCSRは広い角度で放射する。

# CSRによるエネルギー変化



- 広い角度で放射したCSRの一部が曲線を描くバンチに追いつく。



- バンチのエネルギー分布や軌道の変化を引き起こす。

- どのように求めるか？

ハミルトニアン  $\mathcal{H}$  は次のようになる。

$$\mathcal{H} = \sqrt{(c\mathbf{P} - e\mathbf{A})^2 + m^2c^4} + e\Phi \quad \mathbf{P} \equiv \gamma m c \boldsymbol{\beta} + \frac{e}{c} \mathbf{A}$$

興味があるのは、電子と CSR の相互作用の部分の相互作用ハミルトニアン  $\mathcal{H}_{int}$  である。

電子の運動に関わる項 :  $\boldsymbol{\beta}$   
 CSR の場に関わる項 :  $\Phi, \mathbf{A}$

$\boldsymbol{\beta}$  : 電子の速度/光速  
 $\Phi$  : CSR のスカラーポテンシャル  
 $\mathbf{A}$  : CSR のベクトルポテンシャル  
 $\mathbf{P}$  : 電子の正準運動量  
 $\mathbf{r}$  : 電子の位置ベクトル  
 $t$  : 時間  
 $m$  : 電子の静止質量  
 $e$  : 電子の電荷量  
 $\gamma$  : ローレンツ因子

上の項の積を含んだ項の相互作用ハミルトニアン  $\mathcal{H}_{int}$  は、

$$\mathcal{H}_{int} = e(\Phi - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A})$$

ローレンツ力  $\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B})$  の式から、エネルギー変化が次のように求めることができる。

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} \approx \frac{\partial \mathcal{H}_{int}}{\partial t}$$

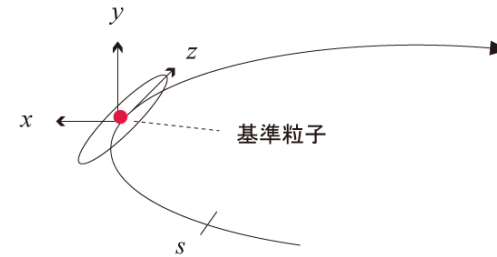
# Frenet-Serret座標系

基準粒子 : 理想軌道上の粒子

$s$  : 理想軌道上の座標

$(x, y, z)$  : 基準粒子からの位置のずれ

## Frenet-Serret 座標系



# Lienard-Wiechertポテンシャルと遅延距離

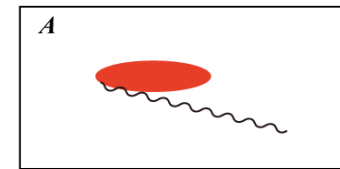
直進するCSRと曲線を描くバンチの飛行距離の差は？

$$\tilde{z} = \widehat{AB} - |AB| = R\theta - 2R \sin(\theta/2) \approx \frac{(s_B - s_A)^3}{24R^2}$$

$$s_B - s_A = R\theta$$

遅延距離の模式図

CSRはバンチに比べて $\tilde{z}$ だけ前方に到達する。  
 $\tilde{z}$ を追いつき距離という。



CSRの作るスカラー・ポテンシャル $\Phi$ とベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}$ は？  
 点Aが点Bに与えるLienard-Wiechertポテンシャル

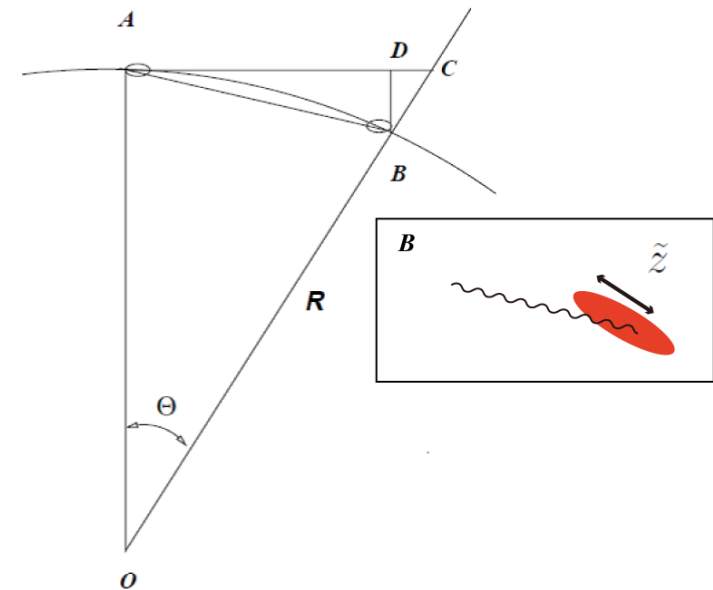
$$\Phi(\mathbf{r}_B, t) = \int d\mathbf{r}_A \frac{\rho(\mathbf{r}_A, t - \tau)}{c\tau}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_B, t) = \int d\mathbf{r}_A \frac{\beta\rho(\mathbf{r}_A, t - \tau)}{c\tau}$$

直線距離 :  $c\tau = |\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B| = |AB|$   $\rho$  : 電荷分布

CSRによるエネルギー変化

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} \approx \frac{\partial \mathcal{H}_{int}}{\partial t} = \frac{\partial [e(\Phi - \beta \cdot \mathbf{A})]}{\partial t}$$



# CSRによるエネルギー分布の変化

バンチ長  $\sigma_z$  のガウス分布の場合の解析解の結果

$d\mathcal{E}/dt \approx \partial\mathcal{H}_{int}/\partial t$  と Lienard-Wiechert ポテンシャルから

$$\frac{d\mathcal{E}}{ds} = Nr_e mc^2 \int_{-\infty}^z W'_0(z-z') \lambda(z') dz'$$

$$W'_0(z) = -\frac{2}{(3R^2)^{1/3}} \frac{1}{z^{1/3}} \frac{\partial}{\partial z}$$

Wake関数は  $z^{1/3}$  に反比例

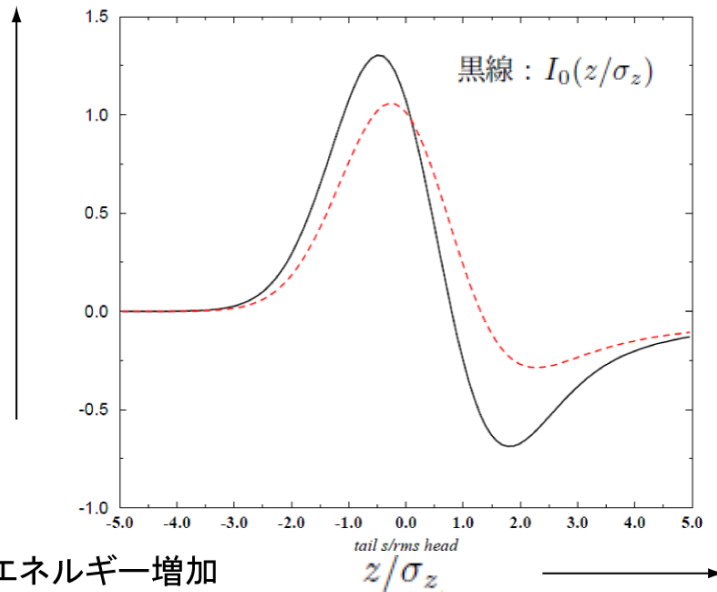
エネルギー分布の変化

$$\frac{d\mathcal{E}}{ds} = -\frac{2Nr_e mc^2}{\sqrt{2\pi}(3R^2\sigma_z^4)^{1/3}} I_0(z/\sigma_z)$$

$$I_0(x) = \int_{-\infty}^x \frac{dx'}{(x-x')^{1/3}} \frac{\partial}{\partial x'} e^{-x'^2/2}$$

- $I_0$  は図に示す。
- バンチの先頭でエネルギーが増加するが、中心部分でエネルギーを損失

エネルギー損失



エネルギー変化の平均

$$P_{CSR} = \frac{N^2 r_e mc^2 2^{4/3} 3^{1/6} [\Gamma(2/3)]^2}{R^{2/3} \sigma_z^{4/3} \pi}$$

- $\sigma_z^{4/3}$  に反比例
- 全体的にエネルギーは損失

偏向電磁石の長さ  $L$  の場合のエネルギー広がりの変化

$$\sigma_{P_{CSR}} \approx 0.22 \frac{Nr_e mc^2 L}{(R\sigma_z^2)^{2/3}}$$

$r_e$  : 電子の古典半径



# 過渡状態とは？

— 偏向電磁石の長さは有限である。 —

バンチ最後尾のCSRがバンチ先頭に追いつくために必要な電子の飛行距離

$$s_P - s_{P_0} = (24R^2\sigma_z)^{1/3}$$

- 定常状態

- バンチは常に偏向電磁石の磁場を受けていると考えられる状態

$$(24R^2\sigma_z)^{1/3} < s_P - s_A$$

- 過渡状態(入口)

- 直線部にいた時の影響が残っている状態

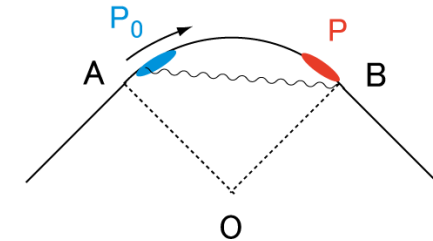
$$(24R^2\sigma_z)^{1/3} > s_P - s_A$$

- 過渡状態(出口)

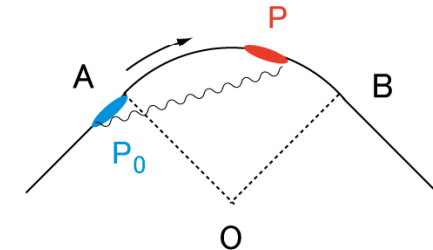
- 偏向電磁石を過ぎた後に感じるCSR

$$s_P > s_B$$

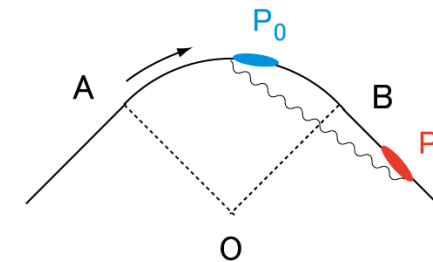
- 定常状態



- 過渡状態(入口)



- 過渡状態(出口)



点 A - 点 B 偏向電磁石 (長さ L)

# 過渡状態(入口) の解析解の導出

- Saldin et alに倣い、2粒子モデルで考える。

領域 (B) の定常状態の wake 関数

$$(B) : W'_0(z) = -\frac{2}{(3R^2)^{1/3}} \frac{1}{z^{1/3}} \frac{\partial}{\partial z}$$

領域 (A) では  $\tilde{z}_A \sim \tilde{z}$  と近似し

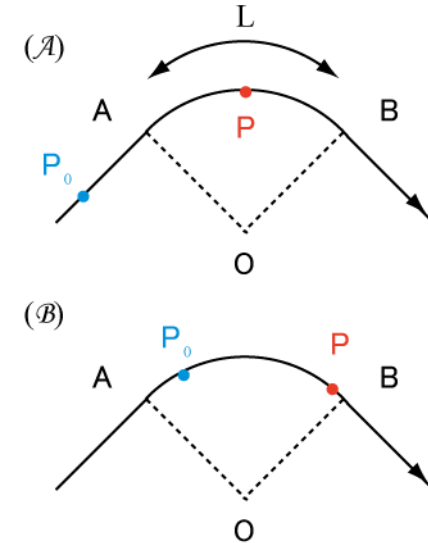
$$(A) : W'_0(z) \sim -\frac{2}{(3R^2)^{1/3}} \frac{1}{\tilde{z}_A^{1/3}} \frac{\partial}{\partial z}$$

$\tilde{z}_A$  は偏向電磁石入口からの追いつき距離

$$s_P - s_A = (24R^2\tilde{z}_A)^{1/3}$$

- 任意の電荷線密度  $\lambda$  に対して、積分範囲に注意すると、エネルギー変化量が得られる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathcal{E}}{ds}\right)_{ent} &= \frac{2Nr_e mc^2}{(3R^2)^{1/3}} \left[ \int_{z-4\tilde{z}_A}^{z-\tilde{z}_A} \frac{dz'}{\tilde{z}_A^{1/3}} \frac{\partial}{\partial z'} \lambda(z') + \int_{z-\tilde{z}_A}^z \frac{dz'}{(z-z')^{1/3}} \frac{\partial}{\partial z'} \lambda(z') \right] \\ &= \frac{2Nr_e mc^2}{(3R^2)^{1/3}} \left[ \frac{\lambda(z-\tilde{z}_A)}{\tilde{z}_A^{1/3}} - \frac{\lambda(z-4\tilde{z}_A)}{\tilde{z}_A^{1/3}} + \int_{z-\tilde{z}_A}^z \frac{dz'}{(z-z')^{1/3}} \frac{\partial}{\partial z'} \lambda(z') \right] \end{aligned}$$



偏向電磁石と2つの粒子の位置関係

点 P 前方の粒子

点 P<sub>0</sub> 後方の粒子

点 A - 点 B 偏向電磁石 (長さ L)

## 補足

(B)のP0の作る電場E

$$E(\mathbf{r}, t) = \frac{e(\mathbf{n} - \beta)}{\gamma^2(1 - \beta \cdot \mathbf{n})^3 L^2} + \frac{e \mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \beta) \times \dot{\beta}]}{c(1 - \beta \cdot \mathbf{n})^3 L}$$

- Pの軌道が曲がることによって、Lが小さくなり、1項目のクーロン力が無視できなくなった結果。直進しているので2項目はゼロである。

# 過渡状態(出口) の解析解の導出

- 基本的には入口の場合と同じように解析解を得ることができる。

領域(㉔)の定常状態の wake 関数

$$(㉔) : W'_0(z) = -4 \frac{1}{L_B + x} \frac{\partial}{\partial z}$$

領域(㉕)では  $L_B \sim L$  と近似し

$$(㉕) : W'_0(z) \sim -4 \frac{1}{L + x} \frac{\partial}{\partial z}$$

- 任意の電荷線密度  $\lambda$  に対して、積分範囲に注意すると、エネルギー変化量が得られる。

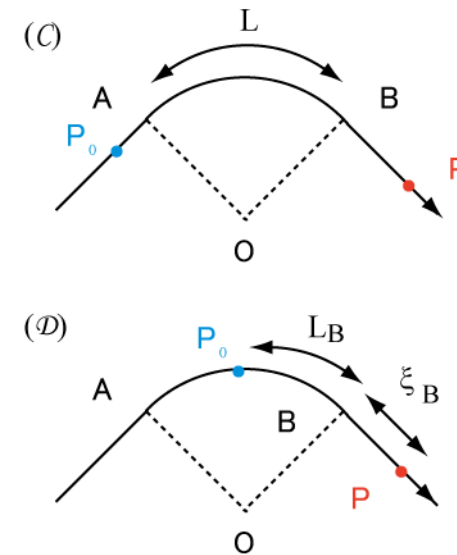
$$\left( \frac{d\mathcal{E}}{ds} \right)_{exit} = 4Nr_e mc^2 \left[ \frac{\lambda(z - \xi_1(L))}{L + 2\xi_B} - \frac{\lambda(z - 4\xi_2(L))}{L + 2\xi_B} + \int_{z - \xi_1(L)}^z \frac{dz'}{L_B + 2\xi_B} \frac{\partial}{\partial z'} \lambda(z') \right]$$

$$\xi_1(\zeta) \equiv \frac{\zeta^3}{24R^2} \frac{\zeta + 4\xi_B}{\zeta + \xi_B}, \quad \xi_2(\zeta) \equiv \frac{\zeta^2}{24R^2} (\zeta + 3\xi_B)$$

$\xi_1(L_B)$  は、 $P_0$  から  $P$  の電子の軌道に沿った長さ と 直線距離の差  
(図(㉔)の追いつき距離)

$\xi_2(L)$  は(㉕)の近似が成り立つ範囲。

一部、OHOテキストに未掲載



偏向電磁石と2つの粒子の位置関係

点 P 前方の粒子

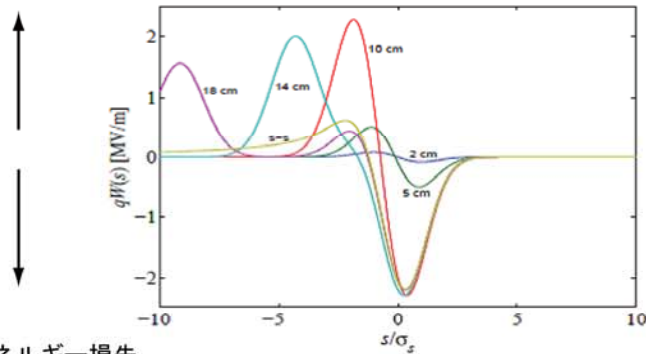
点 P<sub>0</sub> 後方の粒子

点 A - 点 B 偏向電磁石 (長さ L)

- 厳密に言うと、(㉔)はCSRではなくクーロン力。

# 過渡状態の計算例

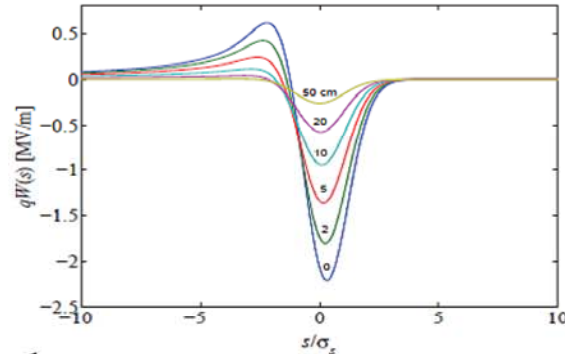
エネルギー増加



エネルギー損失

入口付近の効果

入口からの距離、2, 5, 10, 14, 18cm について  
プロット。s-s は定常状態

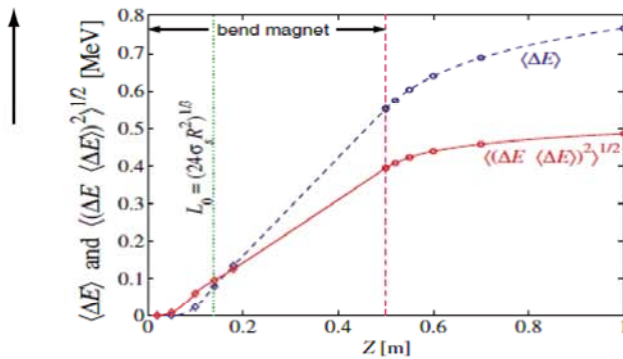


バンチ前方 出口付近の効果 バンチ後方

出口からの距離、0, 2, 5, 10, 20, 50cm について  
プロット

バンチあたりの電荷量 1 nC  
バンチ長 0.05 mm  
軌道の曲率半径 1.5 m  
偏向電磁石の長さ 50 cm

エネルギー損失  $\langle \Delta E \rangle$



平均エネルギーとエネルギー広がり  
の推移  
緑の点線が追いつき距離

定常状態になるまでの距離：およそ 14 cm

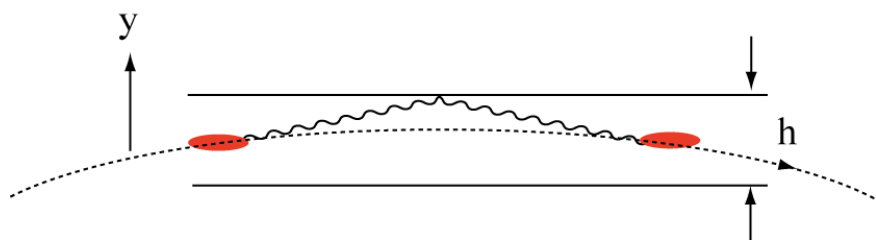
入口の効果 : エネルギー損失は入口から 10cm で定常状態に近づく。  
一方で、エネルギー増加する部分は前方に移動し続ける。

出口の効果 : 徐々にエネルギー変化量が減少する。

エネルギーの変化 : 偏向磁石を過ぎた後も CSR の影響を受け続け、  
50 cm 離れた個所でもエネルギーの減少がある。

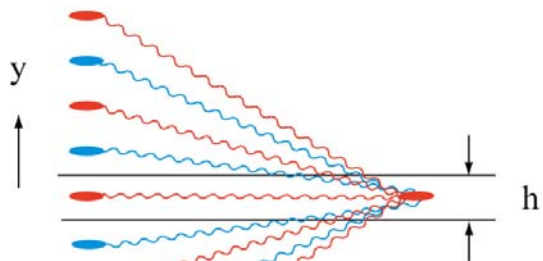
# CSRの遮蔽効果

- チャンバーが軌道の近くにあると、表面で反射したCSRもバンチに追いつく。
- 固定端反射するため位相は反転する。直接到達するCSRと若干光路長が異なるため、完全には打ち消しあわない。



## 境界条件

- チャンバー表面 ( $y = \pm h/2$ ) で
- 電場の接線成分がゼロ



- 電荷  $-Ne$
- 電荷  $+Ne$

## Lienard-Wiechert ポテンシャル

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}_0 dt_0 \rho(\mathbf{r}_0, t_0) G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0),$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}_0 dt_0 \beta \rho(\mathbf{r}_0, t_0) G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0)$$

チャンバーがない時の遅延グリーン関数  $G$

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) = \frac{\delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c - (t - t_0))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$$

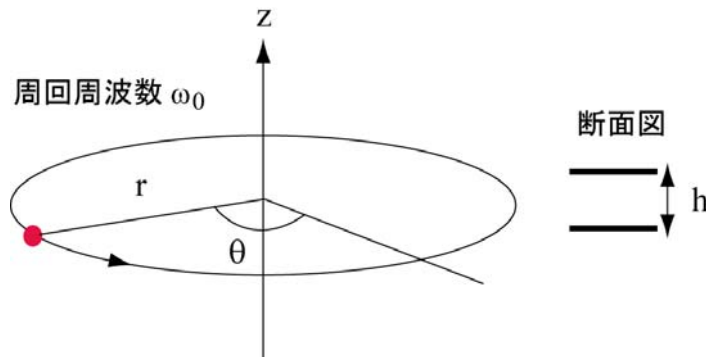
チャンバーがある時の遅延グリーン関数  $G$

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - k h \mathbf{e}_y|/c - (t - t_0))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - k h \mathbf{e}_y|}$$

このアプローチによって  $h \rightarrow 0$  の漸近解を求めるのは困難。

# インピーダンス $Z(n, \omega)/n$ の導出

一部、OHOテキストに未掲載



- 離散的な周波数  $\omega = n\omega_0$  を導入
- $z$  方向のモード  $\alpha_p$  と  $r$  方向のモード  $\gamma_p$  に展開

$$\alpha_p = \frac{\pi}{h}(2p+1) \quad \gamma_p = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \alpha_p^2}$$

$$cZ(k) = \int dz W'(z) \exp(-ikz) \quad k = \omega/c$$

Maxwell 方程式から

$$E_{\theta p} = \frac{-i}{\gamma_p^2} \left[ \alpha_p \frac{n}{r} E_{znp} + \frac{\omega}{c} Z_0 \left( \frac{\partial H_{znp}}{\partial r} + J_{\theta np} \right) \right]$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial H_{znp}}{\partial r} \right) + \left( \gamma_p^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) H_{znp} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r J_{\theta np})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E_{znp}}{\partial r} \right) + \left( \gamma_p^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) E_{znp} = Z_0 \alpha_p c \rho_{np}$$

$Z_0$ : 真空中のインピーダンス  $\rho$ : 電荷量  $J_\theta$ : 電流

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( x \frac{df(x)}{dx} \right) + \left( 1 - \frac{n^2}{x^2} \right) f(x) = 0$$

ベッセル関数  $J_n(x)$ 、 $Y_n(x)$  は、この微分方程式の独立な解。  
第1種ハンケル関数  $H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iY_n(x)$  もこの微分方程式の解。  
 $J'_n(x)$  および  $H_n^{(1)'}(x)$  は  $x$  に対する一階微分。

周回あたりのインピーダンスは電流の平均値  $I_\theta$ 、電場  $E_\theta$  から次のように定義

$$-2\pi R E_\theta(n, \omega) = Z(n, \omega) I_\theta(n, \omega) \quad \text{ここで、すべてのモード } p \text{ について和を取っている。}$$

上記の Maxwell 方程式の結果から

$$\frac{\bar{Z}(n, \omega)}{n} = \frac{2\pi^2 Z_0 R}{\beta h} \sum_{p=0}^{\infty} \Lambda_p \left[ \frac{\beta \omega R}{nc} J'_n(\gamma_p R) H_n^{(1)'}(\gamma_p R) + \frac{\alpha_p^2}{\gamma_p^2} J_n(\gamma_p R) H_n^{(1)}(\gamma_p R) \right]$$

$$\Lambda_p = \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2, \quad x = \frac{\pi \delta h}{2h} (2p+1), \quad \delta h: \text{垂直方向のバンチのスケール}$$

# 遮蔽が強い時のインピーダンスの漸近解

一部、OHOテキストに未掲載

単位長さ当たりのインピーダンス

$$Z(\omega) = Z_0 \frac{\pi \omega R}{ch} \sum_{p=0}^{\infty} \left[ J'_n(r) H_n^{(1)}(r) - \left(1 - \frac{n^2}{r^2}\right) J_n(r) H_n^{(1)}(r) \right] \quad r = n \sqrt{1 - \left(\frac{c\alpha_p}{\omega}\right)^2}$$

式を簡単にするためにエアリー関数  $Ai(x)$  と  $Bi(x)$  を導入



$$\begin{aligned} J_n(nz) &\approx \left(\frac{4\zeta}{1-z^2}\right)^{1/4} \frac{1}{n^{1/3}} Ai(n^{2/3}\zeta) & Ai(e^{\pm 2\pi i/3}z) &= \frac{1}{2} e^{\pm \pi i/3} [Ai(z) - iBi(z)] & Ai'(e^{\pm 2\pi i/3}z) &= \frac{1}{2} e^{\mp \pi i/3} [Ai'(z) - iBi'(z)] \\ J'_n(nz) &\approx -\frac{1}{z} \left(\frac{1-z^2}{4\zeta}\right)^{1/4} \frac{1}{n^{2/3}} Ai'(n^{2/3}\zeta) & \zeta &\approx 2^{1/3} \left[ (1-z) + \frac{3}{10}(1-z)^2 \right], & \frac{4\zeta}{1-z^2} &\approx 2^{4/3} \left[ 1 + \frac{4}{5}(1-z) \right] \\ H_n^{(1)}(nz) &\approx 2e^{-\pi i/3} \left(\frac{4\zeta}{1-z^2}\right)^{1/4} \frac{1}{n^{1/3}} Ai(e^{2\pi i/3}n^{2/3}\zeta) & \beta_p &\equiv (2p+1)\frac{\pi}{h} \left(\frac{c^2 R}{2\omega^2}\right) \\ H_n^{(1)'}(nz) &\approx \frac{4}{z} e^{4\pi i/3} \left(\frac{1-z^2}{4\zeta}\right)^{1/4} \frac{1}{n^{2/3}} Ai'(e^{2\pi i/3}n^{2/3}\zeta) \end{aligned}$$

$$Z(\omega) = Z_0 \frac{2\pi}{h} \left(\frac{2c}{\omega R}\right)^{1/3} \sum_{p=0}^{\infty} [Ai'(\beta_p^2) (Ai'(\beta_p^2) - iBi'(\beta_p^2)) + \beta_p^2 Ai(\beta_p^2) (Ai(\beta_p^2) - iBi(\beta_p^2))]$$

$h \rightarrow 0$  における漸近解

$$Z(k) = \frac{\pi Z_0}{kh^2} \left[ \exp\left(-\frac{2\pi^3 R}{3k^2 h^3}\right) - \frac{3i}{2} C_5 \left(\frac{k^2 h^3}{\pi^3 R}\right)^2 \right] \quad C_5 \sim 1.004524$$

exp の中身に  $h^{-3}$  に比例する項

→  $h$  が小さくなる実数部は急激に減少する。

虚数部は  $h^4$  に比例

→ 実部に比べて遮蔽が効きにくい。

$h \rightarrow \infty$  (遮蔽のない場合) における漸近解

$$Z(k) = \frac{Z_0}{4\pi} \frac{2\Gamma(2/3)}{3^{1/3}} \frac{(i\omega)^{1/3}}{R^{2/3}}$$

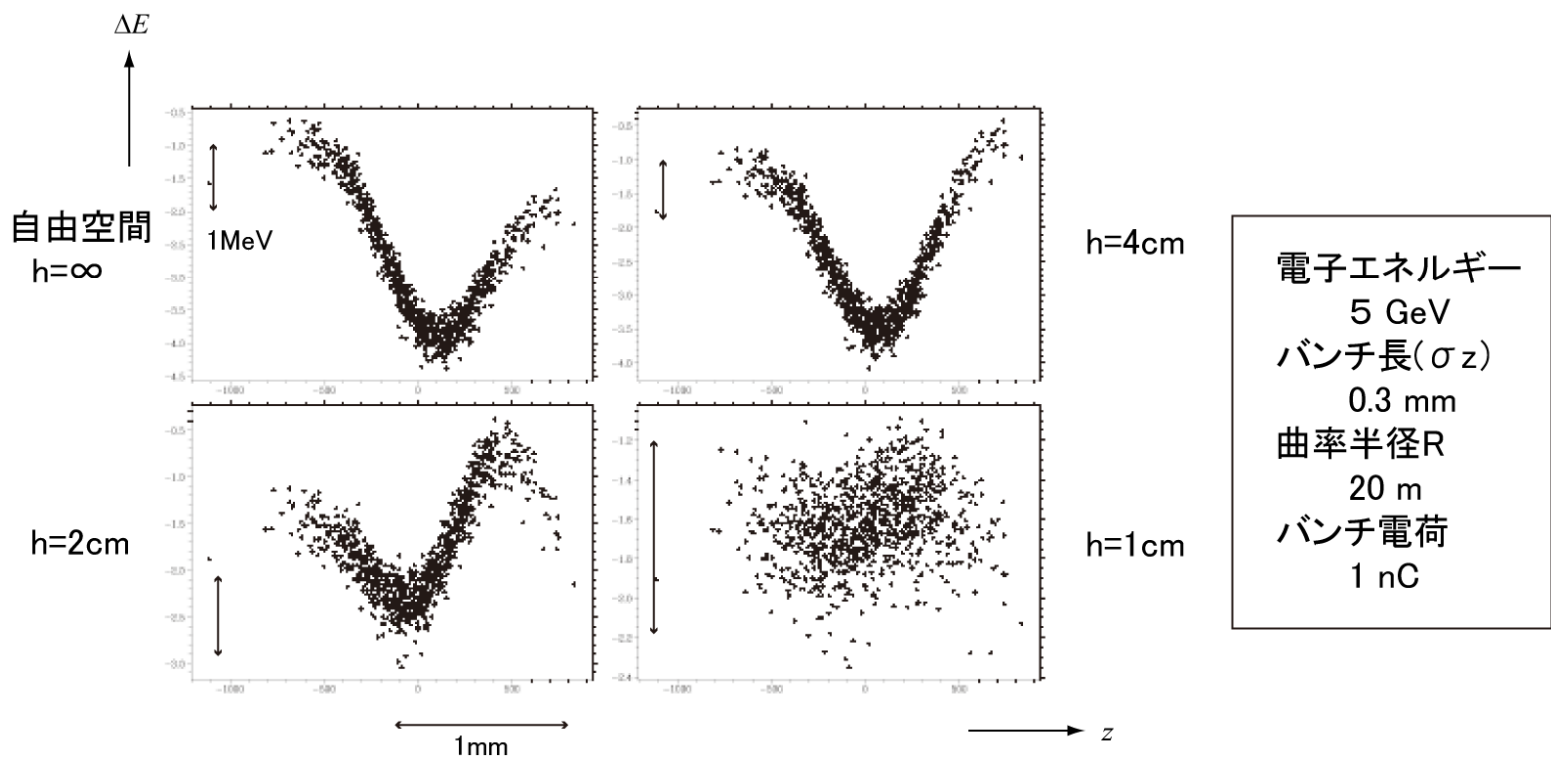
逆フーリエ変換すると、  
自由空間の CSR の wake 関数になる。

# 遮蔽効果による縦方向の位相空間の推移

- 遮蔽効果が表れる最低条件

直進した最後尾からのCSRがバンチの先頭に追いつくとき、  
反射したCSRがバンチの後尾に追いつく。

$$h_{\max} = 2(3\sigma_z^4 R^2)^{1/6} \approx 30\text{mm}$$



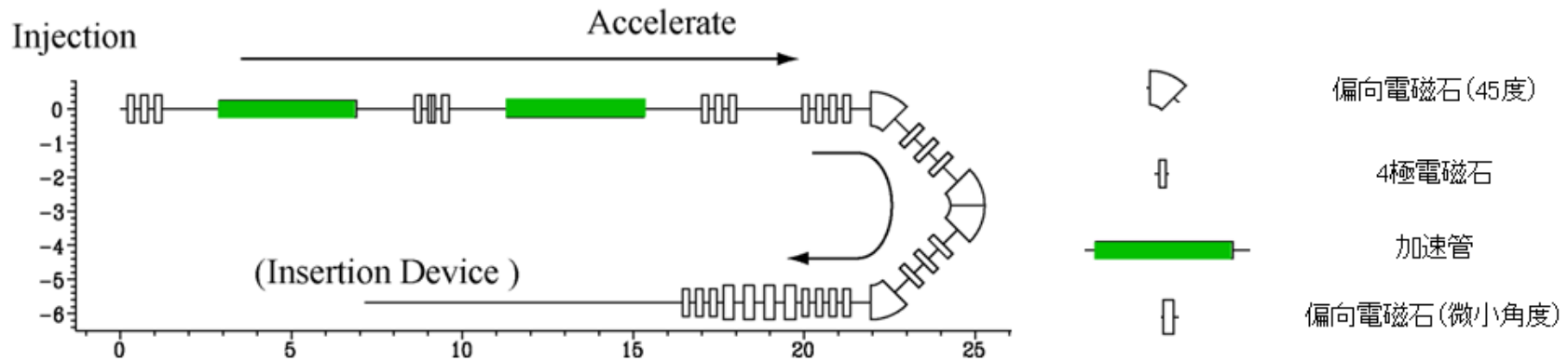
- トラッキングの結果によると、遮蔽効果が顕著になるのはhが10mm以下のときである。



# 目次

- コヒーレントシンクロトロン放射光(CSR)によるエネルギー分布の変化
  - シンクロトロン放射光とCSR
  - CSRによるエネルギー変化
  - 過渡状態
  - 遮蔽効果
- CSRがビームダイナミクスに及ぼす影響
  - ビームダイナミクスの基礎
  - Emittance 増加の抑制方法
  - バンチ圧縮
  - コンパクトERLでの最適化

# コンパクトERLの光学系（挿入光源まで）



基本的な配置案は原田健太郎氏による

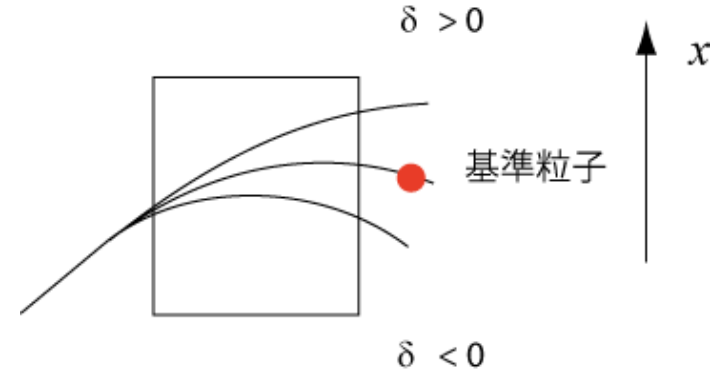
## ・主なパラメーター

・入射エネルギー	5 - 10 MeV
・最大エネルギー	65 - 205 MeV
・通常運転のバンチ長	1 - 3 psec
・圧縮後のバンチ長	0.1 psec
・射影エミッタンス	0.1 - 1 mm $\cdot$ mrاد
・エネルギー広がり	0.002 $\times$ 5 MeV

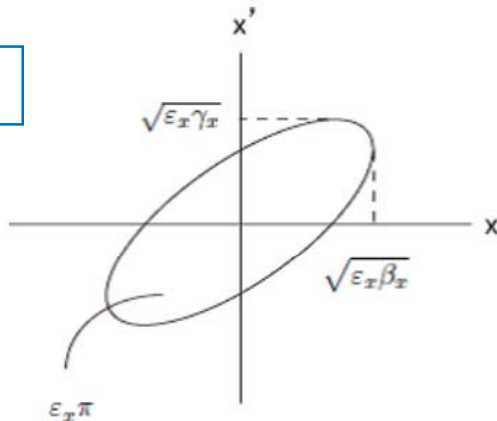
# ビームダイナミクスの基礎

ビームの運動を記述する重要なパラメーター

- Twiss パラメーター  $\beta_x, \alpha_x, \gamma_x$
- エミッタンス  $\varepsilon_x$
- 位相の進み  $\phi(s)$ 、初期位相  $\phi_0, \phi_1$



## 位相空間



エネルギーのずれ  $\delta = \Delta E/E_0$  による軌道のずれ  $x$

$$x = x_\beta + \eta_x \delta \quad \eta_x \text{ 分散関数}$$

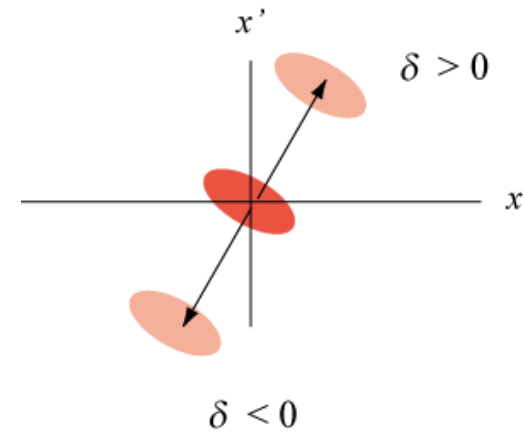
$x_\beta$  はエネルギーのずれがない時の軌道

- バンチの位置  $s$  が進むにつれ、位相空間上の楕円を周回する。
- 位相空間の面積に相当する量がエミッタンス。  
→ エミッタンスは小さいほうが望ましい。

$$x = \sqrt{\varepsilon_x \beta_x} \cos(\phi(s) + \phi_0)$$

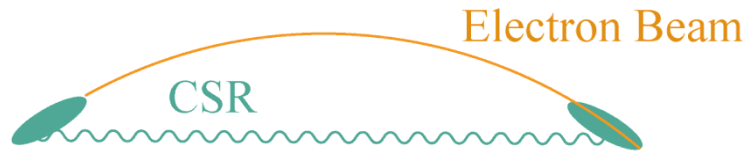
$$x' = \frac{dx}{ds} = \sqrt{\varepsilon_x \beta_x} \sin(\phi(s) + \phi_1)$$

$$\gamma_x \beta_x = 1 + \alpha_x^2$$



エネルギーのずれ  $\delta$  による位相空間のずれ

# CSR wakeと偏向磁石におけるエミッタンスの増加



(1) バンチ後方から発生したCSRは直進し、バンチ先頭に追いつく。



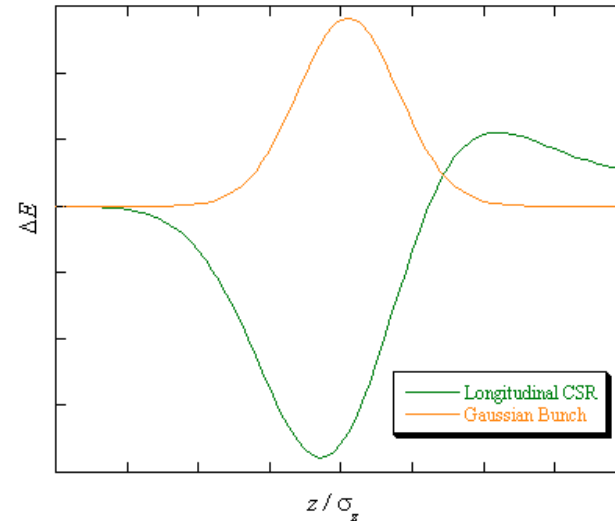
(3) バンチスライスによって軌道にずれが生じる。

**エミッタンスの増加**

CSRの影響は

- 短バンチ
- 小さい電子エネルギーであるときに大きい

(2) バンチ内にエネルギーの変化を引き起こす



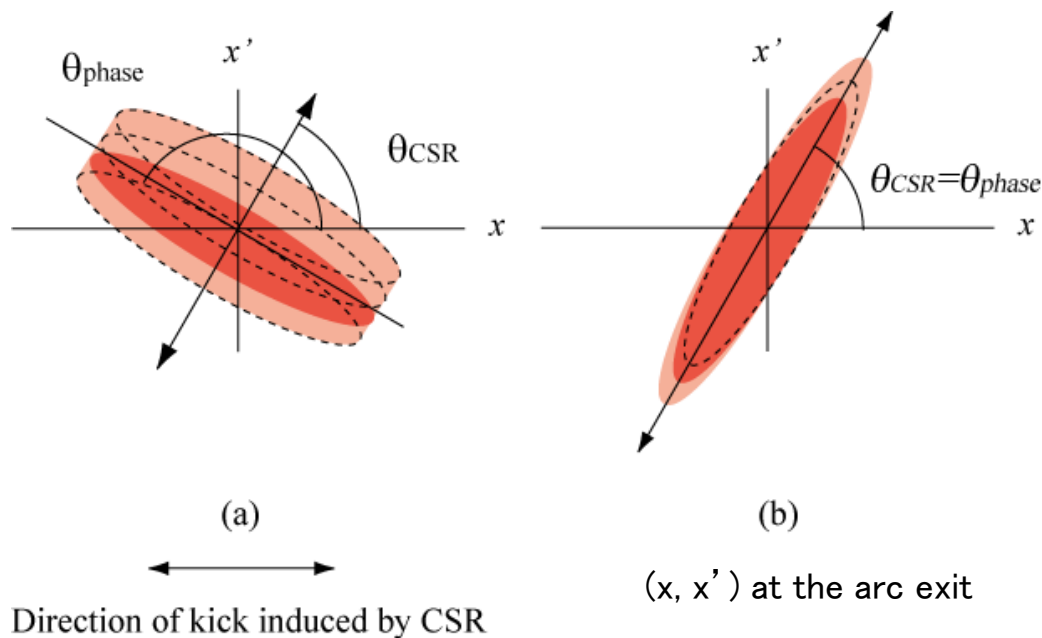
Bunch tail ← → Bunch head

$$\frac{dE(z)}{dz} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2Ne^2}{(3\rho^2\sigma_z^4)^{1/3}} F(z/\sigma_z),$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{d\xi}{(x-\xi)^{1/3}} \frac{\partial}{\partial \xi} e^{-\xi^2/2},$$

Y. S. Derbenev *et al* , TESLA-FEL

# 射影エミッタンス増加の最少化



$$\tan 2\theta_{Phase} = 2\alpha / (\gamma - \beta)$$

$$\tan \theta_{CSR} = \sin \phi / \rho(1 - \cos \phi)$$

$\alpha, \beta, \gamma$  : Twiss parameter,  
 $\phi$  : bending angle

最適化されていない場合

最適化されている場合

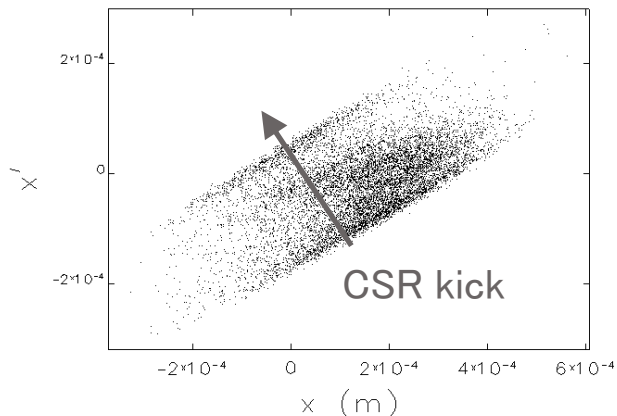
射影エミッタンスの増加は位相空間の楕円の向き  $\theta_{Phase}$  が CSRによるキックの方向  $\theta_{CSR}$  と一致するときに最小になる。

# 射影エミッタンスの最少化の例

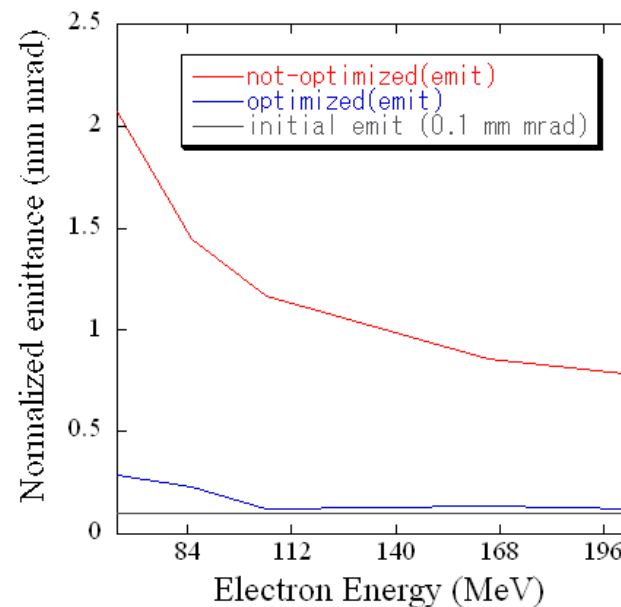
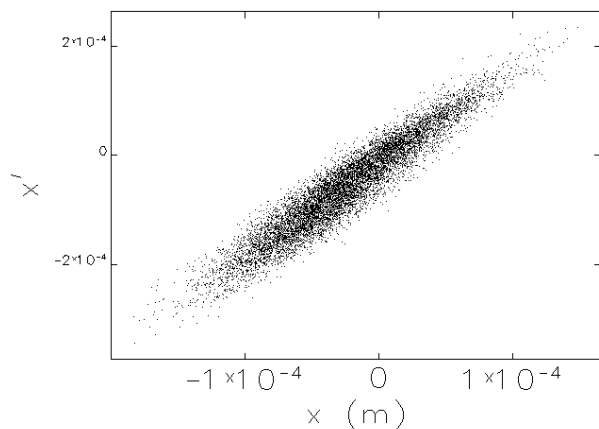
一部、OHOテキストに未掲載

85MeVの例

最適化前  
1.45 mm·mrad



最適化後  
0.27 mm·mrad



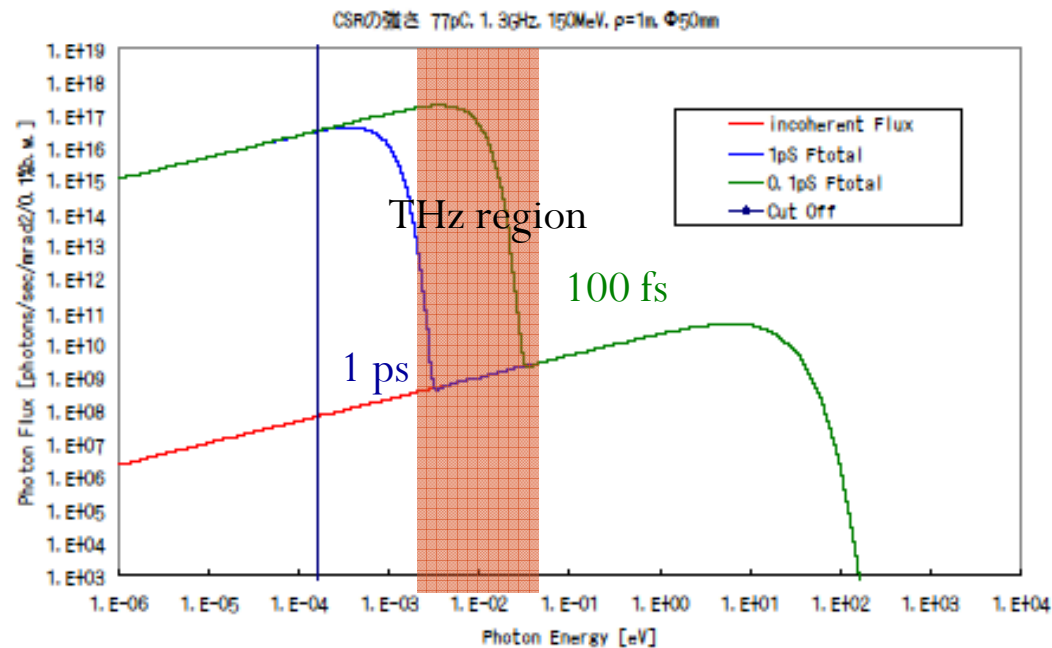
各エネルギーによる  
周回部出口の規格化エミッタンス

- 光学系の最適化によって、1/5から1/15までエミッタンスを小さくすることが可能。
- 100MeV以上ではほぼ0.1 mm·mradを満たしている。

# なぜバンチ圧縮が必要なのか?(1)

## -コヒーレントなテラヘルツ光源-

- CSRは光源として期待されている。
- 1THz to 10 THzはテラヘルツギャップと呼ばれ、光源開発が進んでいない。この波長領域でCSRを得るにはバンチ長が**0.1 ps程度以下**である必要がある。
- 横方向のビームサイズも波長以下である必要がある。(エミッタンス  $\epsilon_x < 100 \text{ mm mrad}$ )




## なぜバンチ圧縮が必要か？(2)

—コンプトン散乱によるフェムト秒X線の発生—

フェムト秒のX線を発生するにはレーザーとともに、電子バンチもサブピコ秒の長さを持つ必要がある。

$$E_{x-Ray} \approx 2\gamma^2 E_{Laser}$$

$$\lambda_{Laser} = 800nm \quad (Ti:SaLaser)$$

50keV以下のX線            電子ビームがおよそ65MeV ( $\gamma=130$ )以下

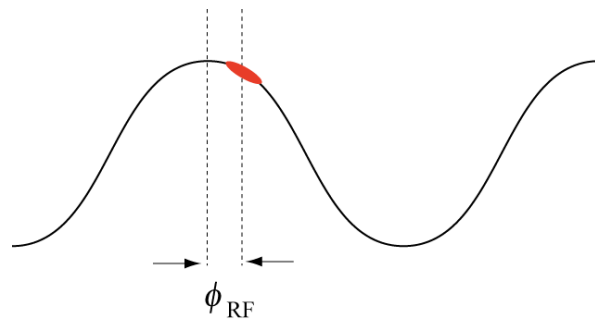
しかし、CSRによる影響は電子エネルギーが小さいほど大きい



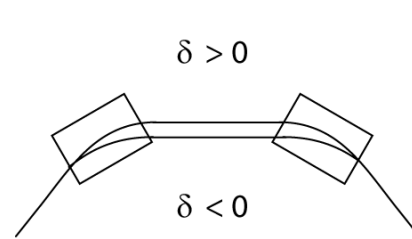
# バンチ圧縮

エネルギー偏差  $\delta$  による飛行距離の差を利用して、バンチ長を変える。

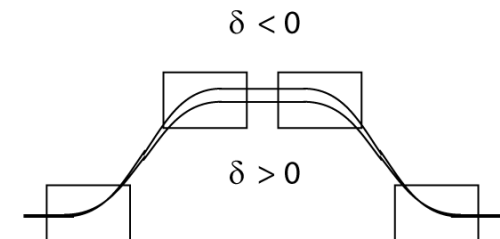
$$\Delta z = R_{56} \delta$$



位相をずらした加速の模式図



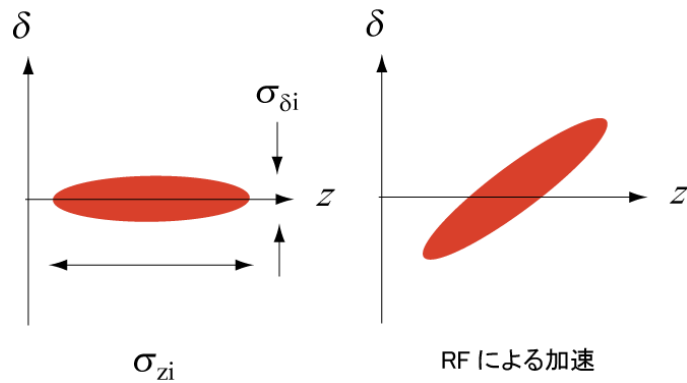
アーク (周回部)



シケイン

$\delta > 0$  で遠回り → 遅れる  
 $\delta < 0$  で近道 → 進む

$\delta < 0$  で遠回り → 遅れる  
 $\delta > 0$  で近道 → 進む



圧縮後のバンチ長  $\sigma_{zf}$  は

$$\sigma_{zf} = \sqrt{(1 + kR_{56})^2 \sigma_{zi}^2 + R_{56}^2 \sigma_{\delta i}^2}$$

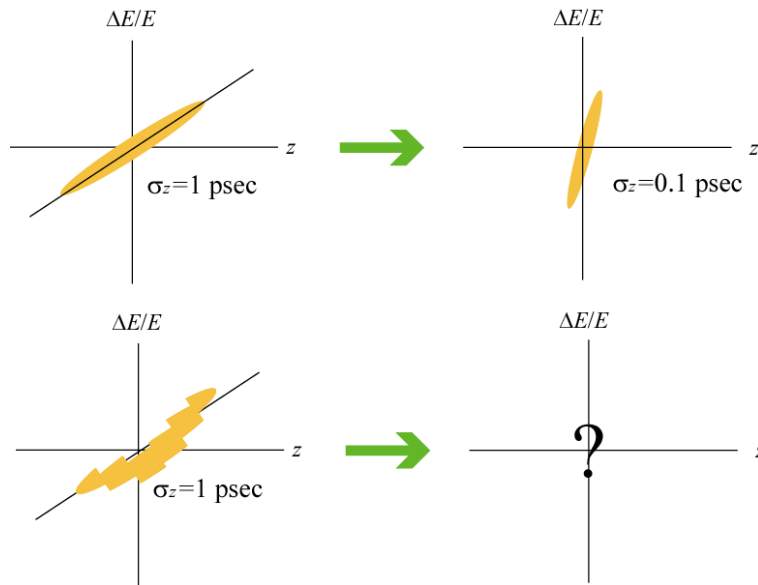
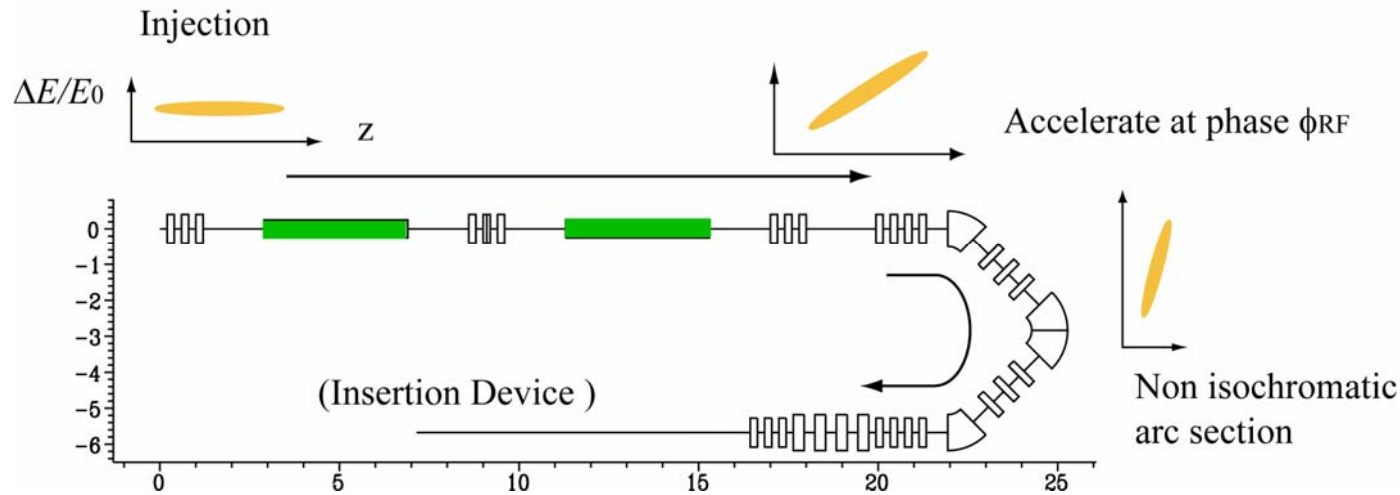
$$k \equiv d\delta_f / dz_i$$

$\sigma_{zf} \gg R_{56} \sigma_{\delta i}$  の場合

$$\sigma_{zf} \approx |1 + kR_{56}| \sigma_{zi}$$

下付き  $i$  と  $f$  はそれぞれ加速前 (バンチ圧縮前) と加速後 (バンチ圧縮後)

# 周回部によるバンチ圧縮



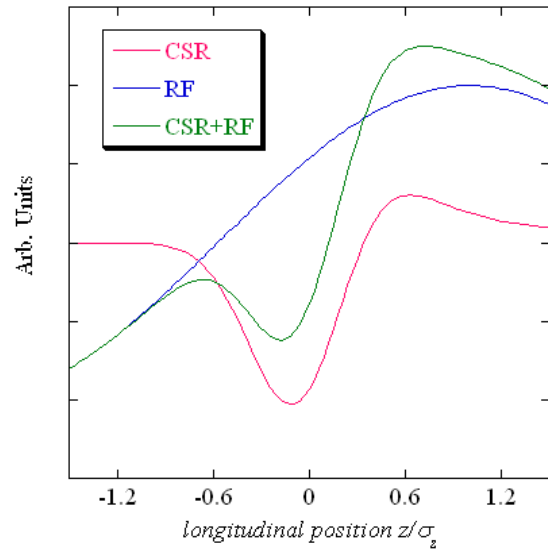
$$\Delta z = R_{56} \frac{\Delta E}{E_0} \quad R_\sigma = \frac{(1-0.1)\text{psec}}{1\text{psec}}$$

$$\tan \phi_{RF} = -\frac{cR_\sigma}{2\pi f_{RF} R_{56}}$$

- $\phi_{RF}$  と  $R_{56}$  を調整し、1 ps  $\rightarrow$  0.1ps バンチ圧縮の最適化を行う。
- CSR wakeなどによるエネルギー分布の変化によってバンチ圧縮の効率が悪化する場合もある。

# 6極磁石の導入

一部、OHOテキストに未掲載



位相をずらした加速による  $\delta$  と  $z$  は線形ではない。  
さらに CSR によってエネルギーが変化する。

バンチ圧縮に影響

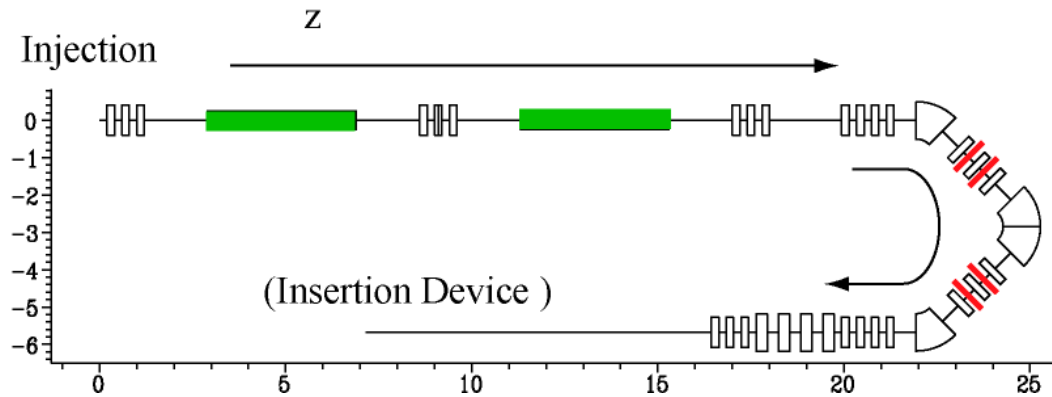
一方で、バンチの  $z$  方向の位置のずれは  $\delta$  の高次項の影響も受ける。

$$\Delta z = R_{56}\delta + R_{566}\delta^2 + \dots$$

4 極電磁石 →  $R_{56}$  の調整  
6 極電磁石 →  $R_{566}$  の調整

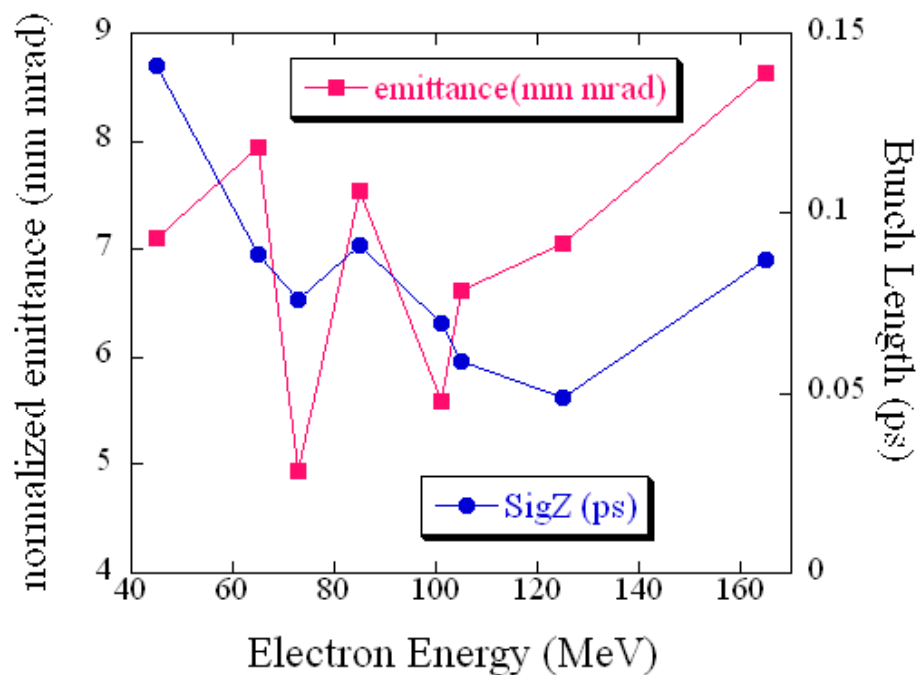
縦方向のエネルギー分布の歪み

- 6 極電磁石の最適化で高次項の補正。バンチ圧縮の効率化。



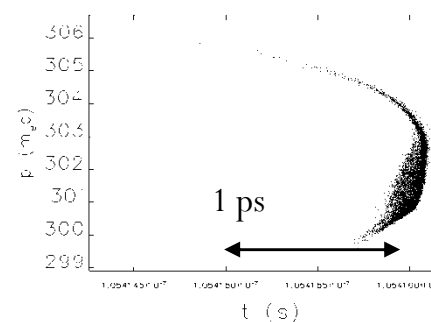
6極磁石の配置図

# エネルギーによるバンチ圧縮の効果の変化 (77pC)

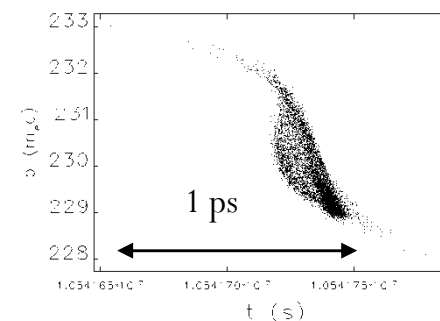


- 165MeV の最短バンチ長が65MeVとほぼ同じであるのは、テールの発生が原因。
- テールの形成は電子エネルギーによって非線形に変化する。
- テールを除くと、エネルギーが大きいほどバンチ圧縮しやすい

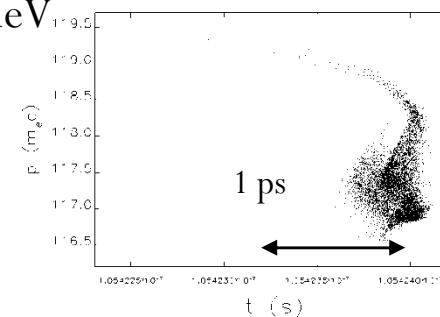
165 MeV



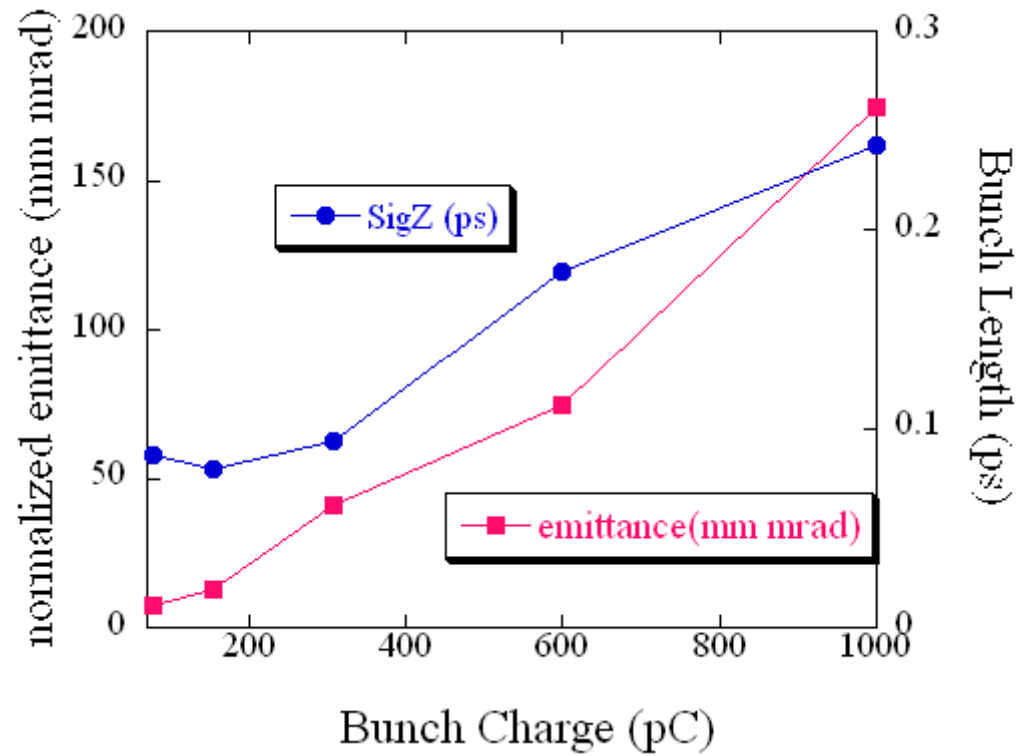
125 MeV



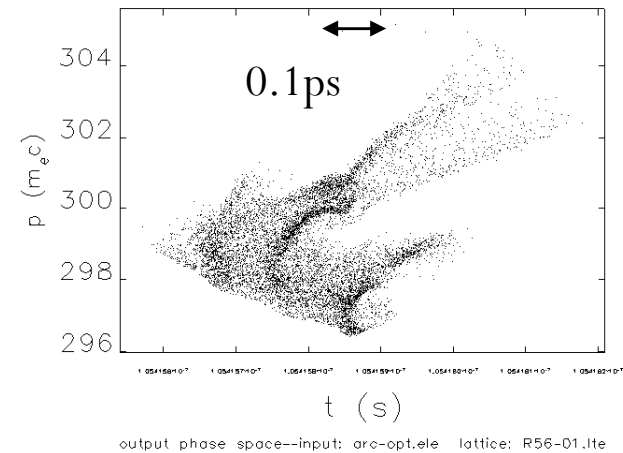
65 MeV



# 165MeVにおけるバンチ圧縮 (テラヘルツ光発生源)

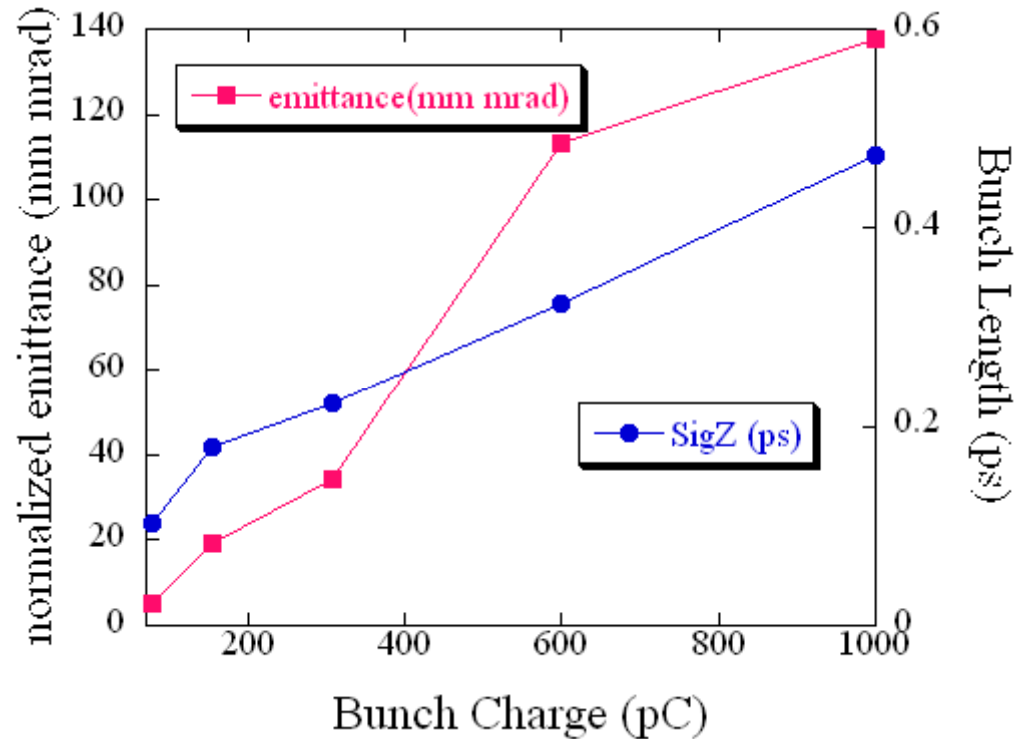


308pC 縦方向の位相分布  
(縦軸:エネルギー、横軸:時間)

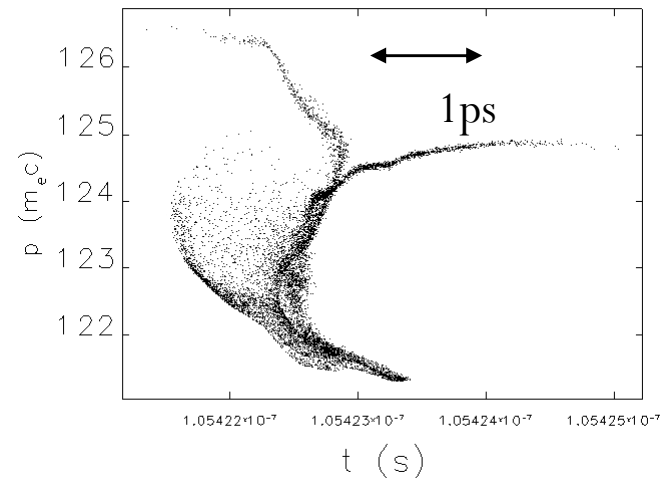


- およそ400pC以下であれば、規格化エミッタンス $<100$  mm mradかつバンチ長 $<0.1$ psを実現可能である。

# 65MeVにおけるバンチ圧縮 (Compton散乱によるフェムト秒X線)



1nC 縦方向の位相分布  
(縦軸:エネルギー、横軸:時間)



- 1nCでは0.6ps程度まで圧縮可能である。しかし、規格化エミッタンスは100mm mradを超えてしまう。
- 0.5 nC以下では容易に0.2ps以下まで短くすることが可能。