

1. 高周波デバイスの基礎

1. はじめに

本年度の OHO の主題は ERL であるが、ERL のみに捉われず、一般的な高周波加速器を構成する高周波デバイスに設計に必要な基礎、シミュレーション、製作、試験方法について述べる事とした。超伝導加速器の設計には役に立たない事項も多く含んでいるかと思うが、結果の式だけは役に立つ事もあるだろう。

対象としては、既に電磁気学の勉強はしてきた方で、これから例えば修士課程で高周波デバイスの設計を行う事になる、学部4年生や修士1年の学生の参考書になればと考えている。電磁気学の教科書から、実際の高周波デバイスの設計へは若干の飛躍があるので、このギャップを埋める事を目的とした。マイクロ波工学といった書籍は非常に参考にはなるが、対象が通信関係である事が多く、加速器のように大電力を蓄積する目的で書かれていない。また加速器の本には高周波の事は断片的にしか書いていない事が多い。そこで修士課程で高周波デバイスの設計を行った、今まで指導してきた学生・関わりをもった学生の修論の序章等を参考にさせて頂き、専門的な部分は省いた内容とした。

まずは電子線形加速器について一般的な説明を行い。その後 Maxwell 方程式から電磁波の基礎、そして電磁波空洞について述べる。さらに加速器の装置全体での各コンポーネントについての簡単な説明を行う。

2. 加速器における高周波の役割とエネルギーフロー

2.1. 静電場加速

電子や荷電粒子の加速は、電場 E を使って行われる。もっとも単純な加速方式は、Fig. 1 のようにコンデンサのようなギャップ間に 直流電圧をかけて、電子などの荷電粒子を加速させる方式である。この方式で電子を加速する場合は、印加した

電圧 V により、 eV (e : 素電荷) のエネルギーが得られる。たとえば、1V の電圧を使って得られる運動エネルギーは[eV] (エレクトロンボルト) という単位として使われる。

$1[\text{eV}] = 1.60217646 \times 10^{-19}[\text{J}]$ である。

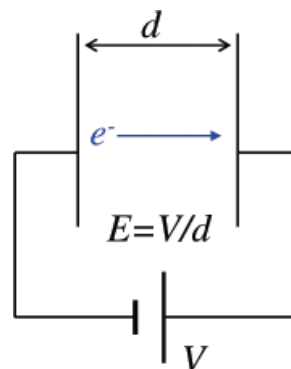


Fig. 1 静電場を用いた電子加速

静電場を使った加速器には、コッククロフト・ウォルトン型加速器、バンデグラフ型加速器がある。

静電場による加速は、加速器として電圧を上げる事は難しいが、電流は増やす事が可能である。例えば電子管内部では数 100kV 程度の電圧で、数 100A の電子を加速し、この電子ビームを変調させる事で高周波を増幅し、大電力の高周波を得ている。

2.2. 高周波加速

静電場を使った加速では、エネルギーを上げようとすればさらに高電圧が必要になる。高電圧を利用する場合には絶縁破壊が問題になり、ある一定以上の加速は困難になる。

そこで、電極に比較的低い電圧を与えながら粒子を何回も通して繰り返し加速する「多重加速」の考えが生まれた。この原理で初めて実現した本格的な加速器はサイクロトロンであった。Fig. 2 にサイクロトロンの原理図を示す。図のように磁場により運動する荷電粒子を回転させながら電極間に粒子がきたとき常に加速方向に電場が向くように高周波を印加している。

また、線形に電極を並べたヴィデレー型ライナックの原理図をFig. 3 に示す。これも、ギャップ

間を粒子が通過するときに常に加速電場を受けるように粒子の速度と高周波の周波数を合わせておく。

しかし、ヴィデレー型ライナックで可能な周波数は10MHz程度であり、軽い粒子には適してはいない。そこで、さらに高周波を用いて効率よく加速するために共振空洞に高周波を共振させて加速させる方法が開発された。共振空洞を利用するものには、Fig. 4 に示すようなヴィデレー型ライナック、Fig. 5 の円盤装荷導波管がある。

ヴィデレー型ライナックは共振空洞内の粒子が常に加速電場を感じるように空洞内にドリフトチューブを挿入し、逆電場がかかるときにはドリフトチューブ内を粒子が通過するようにしている。

円盤装荷型導波管では、もともと位相速度が光速を超えてしまう導波管の中に円盤を取り付けることで位相速度を落とし粒子の速度と一致させることで常に加速電場を受けられるようにしている。

また、ひとつの空洞共振器を何度も通過させることで加速を行う加速器をシンクロトロンといいFig. 6 に示すような構造になっている。

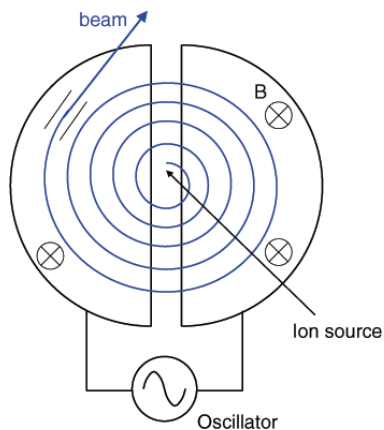


Fig. 2 サイクロトロン

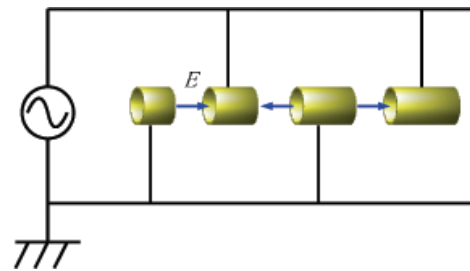


Fig. 3 ヴィデレー型ライナック

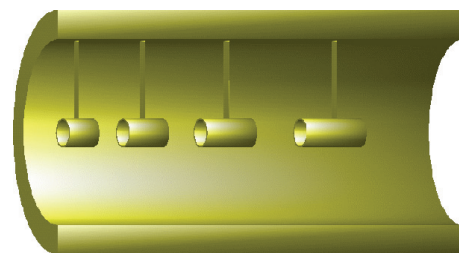


Fig. 4 アルバレ型ライナック

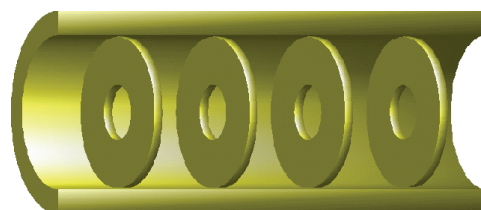


Fig. 5 円盤装荷導波管

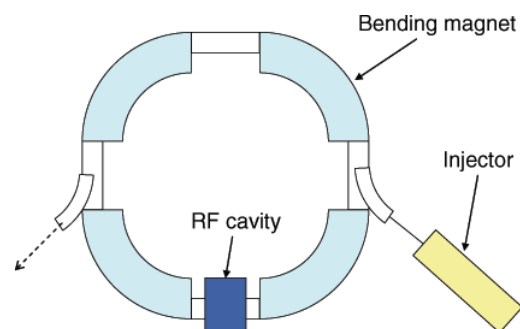


Fig. 6 シンクロトロン

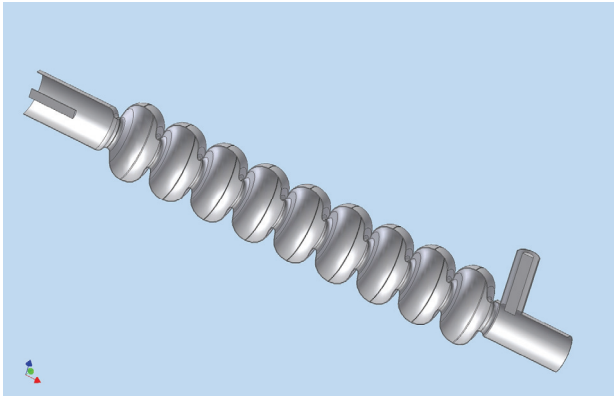


Fig. 7 ERL 用の超伝導空洞

2.2.1. 高周波空洞のギャップにおける荷電粒子との相互作用

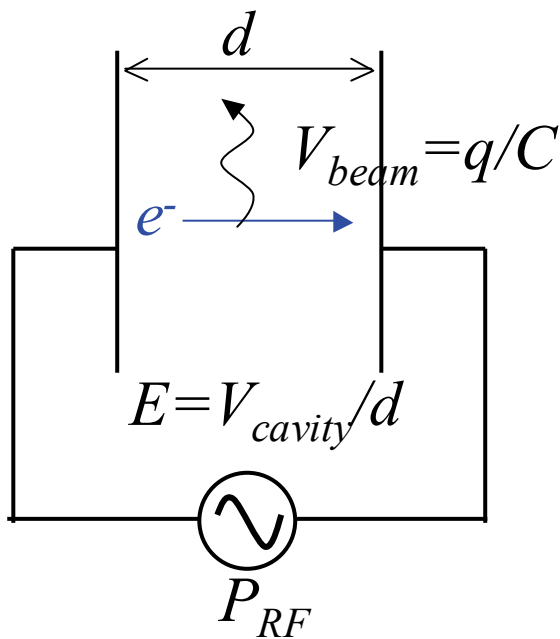


Fig. 8 空洞に入射する荷電粒子の概念図

C をギャップの容量、 ω を角振動数、空洞のパラメーターについては後述だが、とりあえずシャントインピーダンスを (R/Q) 、負荷 Q 値を Q_L などと置く。 $C = \frac{\epsilon S}{d} = \frac{1}{\omega(R/Q)}$ の平板に電荷 q の荷電

粒子が入射した場合に放射される電圧は $\Delta V_{beam} = q/C$ となる。

蓄積されている電磁界のエネルギー W は

$$W = \frac{CV_{cavity}^2}{2} = \frac{\tilde{V}_{cavity}^2}{\omega(R/Q)}$$

$$\frac{V_{cavity}}{\sqrt{2}} = \tilde{V}_{cavity} = \sqrt{\omega(R/Q)W} = \sqrt{(R/Q)Q_L P_{RF}} \quad (2-1)$$

なので、荷電粒子が通過する前と後のエネルギーの差 ΔW は以下のように、電荷のポテンシャルエネルギーになる。

$$\Delta W = \frac{C(V_{cavity} \pm \Delta V_{beam})^2 - CV_{cavity}^2}{2} \quad (2-2)$$

$$\simeq \pm CV_{cavity} \Delta V_{beam} = \pm q V_{cavity}$$

これから、低い電圧で大電流のビームを、短いギャップ(小さい R/Q)かつ低い Q の空洞で減速して、高周波エネルギーを取り出し(電子管)、 R/Q 及び Q が高い空洞(加速管)に入れる事で回路におけるトランスのような働きができ、高電界での加速が可能になる事が分かる。

しかも高周波では位相速度をビームの速度に合わせる事で、連続的に加速ができるため、繰り返して、いくらでもエネルギーを上げられるというのが、高周波加速の非常に優れた点である。

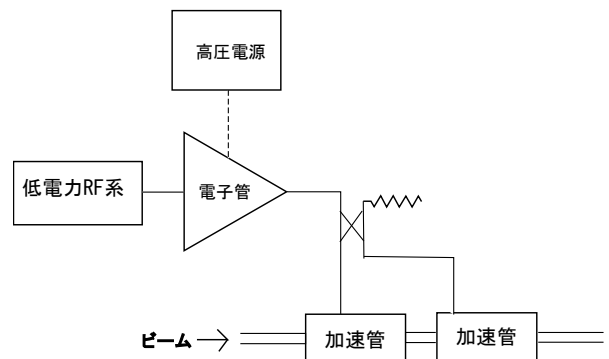


Fig. 9 高周波加速器の概念図

Fig. 9 は高周波加速器の概念図であり、全体のエネルギーの流れは以下になっている。

- DC 電圧(～100kV)、パルス高電圧(～500kV)の大電流(～数 100A)電子ビームのエネルギー
↓ (低電力 RF による変調)

- ギャップが短く(低い R/Q)、少ない高周波の蓄積(低い Q 値)の高周波空洞で高周波を取り出し

↓ (大電力高周波)

- 大きい高周波の蓄積(高い Q 値)で長いギャップ(高い R/Q)の高周波空洞に高周波を蓄積して、例えば数十 MV、数 100mA のビームの集群・加速

2.2.2. ビームの減速(エネルギー回収)

加速管に減速位相で入射した場合、ビームの減速により、加速空洞のエネルギーが上がる。ここで重要なのは、電磁波は単純に和であり、空洞の損失が少ない場合、ビームの減速による空洞電圧は線形に上がるので、空洞エネルギーは2乗で増えていく。 V_{beam} の足し算であつという間に増えてしまう事である。この性質がビームウェーク場による加速が興味深い所でもある。

ERL では、加速したビームを、再度加速管に減速位相で入射する事で、加速したビームエネルギーを回収し、一時的に例えば数 100MW という、投入電力よりもはるかに大きい総電力のビームを得る事ができる。ビーム電流の損失や位相のずれが無ければ、原理的には式(2-2)のビームによる損失エネルギーを $\Delta W = qV_{cavity} - qV_{cavity} = 0$ にできる。実際には、位相のずれなどのエラーがあり、加速ビームの位相のずれは0、減速ビームの位相のずれを $\delta\phi$ とすれば、

$$\begin{aligned}\Delta V_{beam}^{\pm} &= -\Delta V_{beam} + \Delta V_{beam} e^{j\delta\phi} \\ &= \Delta V_{beam} (e^{j\delta\phi} - 1)\end{aligned}\quad (2-3)$$

この位相のずれた成分は、そのまま空洞に蓄積されていく。ここで空洞中の最大到達電圧は、荷電粒子流 $I = qf$ が通過する際のエネルギーと、空洞内部及び外部への損失エネルギーの総和が釣り合った時なので、

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dt} &= fCV_{beam}\Delta V_{beam}^{\pm} - P_L \\ &= \frac{V_{beam}\Delta V_{beam}^{\pm}}{2\pi(R/Q)} - \frac{V_{beam}^2}{(R/Q)Q_L}\end{aligned}\quad (2-4)$$

これが0になる時

$$V_{beam} = \frac{Q_L \Delta V_{beam}^{\pm}}{2\pi} = I(R/Q)Q_L(e^{j\delta\phi} - 1)\quad (2-5)$$

の電圧が空洞に発生する事になる。

3. 高周波の基礎

3.1. 電磁波の復習

電磁波は以下のマクスウェル方程式に従うことはよく知られている。

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\quad (3-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\quad (3-2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho\quad (3-3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0\quad (3-4)$$

これらは物質に無関係にいつでも成り立つ基本的な式であつてマクスウェルの基本方程式と呼ばれる。これに物質の性質に関する式、

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}\quad (3-5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}\quad (3-6)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}\quad (3-7)$$

が加わって方程式系として完結する。

導波管など物体を伝わらせて電磁波を送る場合の伝送電磁波に対する方程式を求めるには以下のようにする。まず、電場・磁場を

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x, y)e^{j\omega t - \gamma_z z}\quad (3-8)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0(x, y)e^{j\omega t - \gamma_z z}\quad (3-9)$$

の形におき、 γ_z が純虚数

(3-17)

$$\gamma_z = j\beta_z \quad (3-10)$$

となる場合に z 方向に進む波となる。真空中のマクスウェル方程式($\sigma = 0, \rho = 0$)に式(3-8)、

(3-9)を代入すれば

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma_z H_y \\ -\gamma_z H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j\omega\epsilon E_x \\ j\omega\epsilon E_y \\ j\omega\epsilon E_z \end{pmatrix} \quad (3-11)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma_z E_y \\ -\gamma_z E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -j\omega\mu H_x \\ -j\omega\mu H_y \\ -j\omega\mu H_z \end{pmatrix} \quad (3-12)$$

となり、この式と $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ から

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = -(\omega^2\epsilon\mu + \gamma_z^2)E_z \quad (3-13)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} = -(\omega^2\epsilon\mu + \gamma_z^2)H_z \quad (3-14)$$

$$(\omega^2\epsilon\mu + \gamma_z^2)E_x = -j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} - \gamma_z \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (3-15)$$

$$(\omega^2\epsilon\mu + \gamma_z^2)E_y = j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} - \gamma_z \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (3-16)$$

$$(\omega^2\epsilon\mu + \gamma_z^2)H_x = j\omega\mu \frac{\partial E_z}{\partial y} - \gamma_z \frac{\partial H_z}{\partial x}$$

$$(\omega^2\epsilon\mu + \gamma_z^2)H_y = -j\omega\mu \frac{\partial E_z}{\partial x} - \gamma_z \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (3-18)$$

が導かれる。

3.2. 境界条件

完全導体、完全磁気壁ではそれぞれ、接線方向のポテンシャル差が0であり、接線方向の電界、もしくは磁界が0である、従って、境界の法線方向を $\mathbf{n}$ として、以下のような境界条件が成り立つ。

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_s = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_s = 0 & \quad \text{完全導体} \\ \mathbf{n} \times \mathbf{H}_s = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_s = 0 & \quad \text{完全磁気壁} \end{aligned} \quad (3-19)$$

また誘電率の違う媒質同士の境界条件は境界の接線方向を $\mathbf{t}$ として以下である。

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_{s1} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_{s2}, \quad \mathbf{t} \cdot \mathbf{E}_{s1} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{E}_{s2}$$

3.3. Maxwell 方程式の積分形と TM/TE モード

Maxwell 方程式を積分形は、

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = & -\int_V G \left(\nabla \frac{\rho}{e} + j\omega\mu \mathbf{J}_0 \right) dV \\ & + \int_S \left[-jkz \mathbf{H} \times \mathbf{n} - (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \right. \\ & \left. \times \nabla G - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \nabla G \right] dS \end{aligned} \quad (3-20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = & -\int_V G (-\nabla \times \mathbf{J}_0) dV \\ & + \int_S \left[\left(\mathbf{J}_0 + j \frac{k}{Z} \mathbf{E} \right) \times \mathbf{n} - (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \right. \\ & \left. \times \nabla G - (\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}) \nabla G \right] dS \end{aligned} \quad (3-21)$$

この Maxwell 方程式の積分形は、結果の式は本や論文に書いてあるが、私の調べ方が悪いのだと思うが、導出過程の書物が見つからなかったため、私が導出した過程を付録に書いておいた。完全導体の境界条件の式(3-19)を代入すると、

$$\mathbf{E} = \int_S \left[-jkz \mathbf{H}_s \times \mathbf{n} - (\mathbf{E}_s \cdot \mathbf{n}) \nabla G \right] dS \quad (3-22)$$

$$\mathbf{H} = \int_S -(\mathbf{n} \times \mathbf{H}_S) \times \nabla G dS \quad (3-23)$$

となる。ここで XY 平面上の 2 次元的に囲まれ、z 軸方向に伸びている導波管などのパイプ形状の物を考え、境界表面での磁場を

$$\mathbf{H}_S = \mathbf{H}_S^{xy} + \mathbf{H}_S^z = \begin{pmatrix} H_S^x \\ H_S^y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H_S^z \end{pmatrix} \quad (3-24)$$

と XY 成分と Z 成分に分離する。なお ∇G は面積分する、もしくは境界垂直面では、法線方向になる。 $\mathbf{H}_S = \mathbf{H}_S^{xy}$ の時は、導波管内部の磁場の z 成分 $H_z = 0$ だが、電界の z 成分 $E_z \neq 0$ となり、TM(Transverse Magnetic)モードと呼ばれる。また $\mathbf{H}_S = \mathbf{H}_S^z$ の時は導波管内部の電界の z 成分 $E_z = 0$ だが、磁場の z 成分 $H_z \neq 0$ となり TE(Transverse Electric)モードと呼ばれる。これらから、導波管内を伝播する電磁波は TM モードと TE モードの重ね合わせである事が分かる。

3.4. 表面抵抗

3.4.1. 常伝導の表面抵抗

導電体表面では導電率が大きく変位電流は無視できるため、以下のようになる。

$$\Delta \mathbf{H} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = j \omega \mu \sigma \mathbf{H} \quad (3-25)$$

これを導体の深さ方向を d として解くと

$$H(d) = H(0) e^{j\omega t} e^{-(1+j)\sqrt{\frac{\omega \sigma \mu}{2}} d} \quad (3-26)$$

となり、電流は指数関数的に深さ方向に減衰する事が分かる。ここで電流もしくは磁界が 1/e になる深さを表皮深さ(δ)と言う。

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma \mu}} \quad (3-27)$$

ここで表皮抵抗 R_s を以下のようにおけば、

$$R_s = \frac{1}{\delta \sigma} = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2 \sigma}} = \frac{\omega \mu \delta}{2} \quad (3-28)$$

3.4.2. 超伝導の表面抵抗

第一種超伝導体は BCS 理論に従っており、クーパーペアがマイクロ波により励起され常伝導電子となる電子の数は統計的に計算できる。これにより計算された BCS 理論値を R_{BCS} 、空洞の表面状態による残留抵抗を R_{res} として、全表面抵抗は以下のようになる。

$$R_s = R_{BCS} + R_{res} \quad (3-29)$$

$$R_{BCS} = A \frac{\omega^2}{T} \exp\left(-\frac{\Delta(0)}{k_B T_c} \cdot \frac{T_c}{T}\right) \quad (3-30)$$

ここで k_B はボルツマン定数、 $\Delta(0)$ は 0[K]でのギャップエネルギー、 T_c は超伝導臨海温度である。係数 A は超伝導体によって決まる定数である。 $T < T_c$ の温度範囲では Nb では半実験式が使える。

$$R_{BCS} = 2 \times 10^{-4} \frac{1}{T} \left(\frac{f}{1.5}\right)^2 \exp\left(-\frac{17.67}{T}\right) \quad (3-31)$$

4. 伝送線路

伝送線路とは電磁波を輸送するための金属の管である[10]。電力は周波数が低い場合は通常の電線を用いるが、高周波になると漏洩が大きく普通の電線では電力を輸送することができない。そこで、低電力の場合は同軸線路、大電力の場合は導波管が用いられる。

4.1. 位相速度と群速度

単色平面波

$$u(x, t) = u_0 e^{j(\omega t - \beta x)} \quad (4-1)$$

の位相速度 v_p は明らかに以下の式で示される。

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \quad (4-2)$$

もし、どの周波数においてもこの単色平面波の速度が等しいならば、このような波で構成された波束は同じ速度で伝わっていく。しかし、一般には伝播速度 v_g は、波数 β によって異なる。したがって、波束は新たな特徴を持つ。調和的な波動の重ね合わせの一般形は

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\beta) e^{j(\omega t - \beta x)} d\beta \quad (4-3)$$

ここで、 $u_0(\beta)$ は波数 β に対する振幅である。この波の角振動数は β によって違うので、

$$\omega = \omega(\beta) \quad (4-4)$$

と書ける。もし $u_0(\beta)$ がある β_0 の周りに鋭く分布していたとすると、 β_0 に近い波数の波のみが (4-3) に関与でき、(4-4) の線形近似

$$\omega(\beta) = \omega_0 + \left. \frac{d\omega}{d\beta} \right|_0 (\beta - \beta_0) \quad (4-5)$$

で十分である。式(4-3)に代入すると

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{j\left(\omega_0 - \frac{d\omega}{d\beta}|_0 \beta_0\right)t} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\beta) e^{j\left[-\beta\left(x - \frac{d\omega}{d\beta}|_0 t\right)\right]} d\beta \quad (4-6)$$

式(4-3)より、 $t = 0$ のとき

$$u(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\beta) e^{-j\beta x} d\beta \quad (4-7)$$

したがって、式(4-6)の積分は $u(x', 0)$ と見なせる。

但し、 $x' = x - \left. \frac{d\omega}{d\beta} \right|_0 t$ である。よって

$$u(x, t) = u\left(x - \left. \frac{d\omega}{d\beta} \right|_0 t, 0\right) e^{j\left(\omega_0 - \beta_0 \left. \frac{d\omega}{d\beta} \right|_0\right)t} \quad (4-8)$$

この波束の速度を群速度 v_g と呼び、

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} \quad (4-9)$$

である。

4.2. 同軸線路

同軸線路は、原理的には周波数分散性が無く、カットオフ周波数も無いため、通常の高周波の伝送は同軸線路を用いる。同軸線路の伝送モードは、波長に比べて半径が十分小さい場合は TEM モードのみである。TEM モードでは、円筒座標で

$$E_z = E_\theta = H_z = H_r = 0 \quad (4-10)$$

となる。マクスウェル方程式は、以下となる。

$$\frac{\partial}{\partial r}(rH_\theta) = 0, \quad \frac{\partial E_r}{\partial r} = -j\omega\mu H_\theta \quad (4-11)$$

これから rH_θ が定数である事が分かる。

外導体の内側と外側の経路積分を考えると

$$H_\theta(r) 2\pi r = I \quad (4-12)$$

また $E_r = E_r e^{j(\omega t - k_z z)}$ を代入すると、

$$\begin{aligned} -k_z E_r &= -\omega \sqrt{\epsilon\mu} E_r = -j\omega\mu H_\theta \\ E_r &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H_\theta \end{aligned} \quad (4-13)$$

これを同軸線路の内導体の半径 a 、外導体の半径 b として、積分すると、

$$V = \int_a^b E_r dr = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{I}{2\pi} \log\left(\frac{b}{a}\right) \quad (4-14)$$

従って特性インピーダンスは以下となる。

$$Z_{TEM} = \frac{V}{I} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{b}{a}\right) \quad (4-15)$$

4.3. 導波管

4.3.1. 矩形導波管

矩形導波管は、大電力高周波の輸送にもっともよく使われるものであり、四方を良導体で囲まれた筒状のものである。矩形導波管の形をFig. 10 に示す。Fig. 10 において電磁波は z 方向に進む。

導波管の中を進む波のうち、 $E_z \neq 0, H_z = 0$ のものを TM 波または E 波と呼ぶ。また、 $E_z = 0, H_z \neq 0$ のものを TE 波または H 波と呼ぶ。

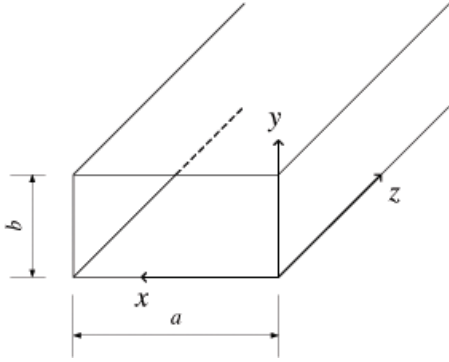


Fig. 10 矩形導波管

TM モード

TM 波の方程式は、式(3-13)より、

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_c^2 E_z = 0 \quad (4-16)$$

$$k_c^2 = \omega^2 \varepsilon \mu + \gamma_z^2 = k^2 - \beta^2$$

という 2 次元の固有値問題になり、境界条件は金属表面で電場が垂直なので、 $x = 0, a$ および $y = 0, b$ のときに $E_z = 0$ である。

式(4-16)の解は、

$$E_z = (C_1 \sin k_x x + C_2 \cos k_x x) \times (C_3 \sin k_y y + C_4 \cos k_y y) \quad (4-17)$$

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2$$

の形をとる。ただし、境界条件 $x = 0, y = 0$ で $E_z = 0$ を考慮すると、

$$E_z = A \sin k_x x \sin k_y y \quad (4-18)$$

となり、 $x = a, y = b$ で $E_z = 0$ を考慮すると、

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b} \quad (4-19)$$

ただし、 m, n は 0 でない整数である。したがって、固有値 k が、

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \equiv k_{mn}^2$$

$$m, n = 1, 2, \dots \quad (4-20)$$

を満たすときのみ解が定まる。 k_{mn} に対するものを TM_{mn} モードという。 E_z を式(3-15)、(3-16)、(3-17)、(3-18)に代入すると他の成分も求められ以下ようになる。

$$E_x = -A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$E_y = -A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}$$

$$E_z = A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$H_x = -\frac{E_y}{Z_{mn}} = A \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (4-21)$$

$$H_y = \frac{E_x}{Z_{mn}} = -A \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}$$

$$H_z = 0$$

$$Z_{mn} = \frac{\beta}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}} Z_0$$

導波管の中を電磁場が波として進行するためには γ_z が純虚数でなければならないから、 $\omega^2 \varepsilon \mu > k_c^2$ でなければならない。したがって、 TM_{mn} モードは

$$\omega > \omega_c, \quad \omega_c = \frac{k_{mn}}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad (4-22)$$

の場合のみ導波管を通過し、 ω_c 以下の角周波数は通過しない。 ω_c に対する周波数 $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$ を遮断周波数(cutoff frequency)と呼ぶ。

ω_c に対する波長 λ_c は遮断波長と呼ぶが、 λ_c よりも波長が短いものだけが導波管を通過できる。管内での波長 λ_g は自由空間での波長 λ より大きくなり、次の関係がある。

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{\omega_c \sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{2\pi}{k_{mn}} \quad (4-23)$$

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\epsilon\mu} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} \quad (4-24)$$

$$\frac{1}{\lambda_g} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_c^2}} \quad (4-25)$$

また、管内での波の群速度 v_g は

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} \quad (4-26)$$

である。伝送電力と単位長当たりの伝送損失および減衰定数は次式のように求まる。

$$\begin{aligned} P_{\text{TM}} &= \int_S \text{Re}(S_z) dS = \frac{1}{2Z_{\text{TM}}} \int_S |E_T|^2 dS \\ &= A^2 \frac{1}{8Z_{\text{TM}}} \frac{\lambda_c^2}{\lambda \lambda_g} ab \end{aligned} \quad (4-27)$$

$$\begin{aligned} p_{\text{loss, TM}} &= \oint_C \text{Re}(-S_n) ds = \frac{R_s}{2} \oint_C |H_T|^2 ds \\ &= A^2 \frac{R_s}{2} \frac{\omega^2 \epsilon^2}{k_c^4} \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 b + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 a \right] \end{aligned} \quad (4-28)$$

$$\alpha = \frac{R_s \lambda_g \lambda_c^2}{2Z_{\text{TM}} \lambda} \frac{1}{ab} \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 b + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 a \right] \quad (4-29)$$

TE モード

TE 波の方程式は、式(3-14)より、

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + k_c^2 H_z = 0 \quad (4-30)$$

という固有値問題になり、境界条件は金属表面では磁場の法線方向への微分が 0、 $\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0$ という条件である。よって、 $x = 0, a$ のとき $\frac{\partial H_z}{\partial x} = 0$ であり $y = 0, b$ のとき $\frac{\partial H_z}{\partial y} = 0$ である。式(4-30)の解は、式(4-17)と同じ形になるが、境界条件を考慮すると、

$$H_z = A \cos k_x x \cos k_y y \quad (4-31)$$

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b} \quad (4-32)$$

となる。 m, n は整数であるが、今の場合それらを 0 にしても $H_z = 0$ にはならない。ただし、 $m = n = 0$ の場合においては $k_c = 0$ となり、 $\omega = 0$ となってしまうから m, n のうち一つだけが 0 になりうる。ゆえに、

$$\begin{aligned} k_c^2 &= k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \equiv k_{mn}^2 \\ m, n &= 0, 1, 2, \dots \quad m = n = 0 \end{aligned} \quad (4-33)$$

を満たすときのみ解が定まる。 k_{mn} に対するものを TE_{mn} モードという。 H_z を式(3-15)、(3-16)、(3-17)、(3-18)に代入すると他の成分も求められ以下のようなになる。

$$\begin{aligned}
E_x &= Z_{mn} H_y = A \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\
E_y &= -Z_{mn} H_x = -A \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\
E_z &= 0 \\
H_x &= A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\
H_y &= A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\
H_z &= \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\
Z_{mn} &= \frac{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{\beta} Z_0
\end{aligned}
\tag{4-34}$$

普通、矩形導波管では TE_{01} モードを使って RF 輸送を行う。

伝送電力と単位長当たりの伝送損失および減衰定数は次式で与えられる。

$$P_{\text{TE}} = A^2 \frac{1}{2} \zeta \frac{\lambda_c^2}{\lambda \lambda_g} \frac{\varepsilon_n \varepsilon_m}{4} ab \left(\varepsilon_n = \begin{cases} 2 & n=0 \\ 1 & n \neq 0 \end{cases} \right)
\tag{4-35}$$

$$\begin{aligned}
p_{\text{loss,TE}} &= A^2 \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma_c \delta_s} \left\{ \frac{k^2 - k_c^2}{k_c^4} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 a \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 b \right] + (a\varepsilon_m + b\varepsilon_n) \right\}
\end{aligned}
\tag{4-36}$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\eta}{\sigma_c \delta_s} \frac{\lambda \lambda_g}{\lambda_c^2} \frac{2}{\varepsilon_n \varepsilon_m} \frac{1}{ab} \left\{ \frac{k^2 - k_c^2}{k_c^2} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 a \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 b \right] + (a\varepsilon_m + b\varepsilon_n) \right\}
\end{aligned}
\tag{4-37}$$

4.3.2. 円形導波管

円形導波管は、矩形導波管と比べると実用的に使用されることはあまりないが、加速管の電磁場モ

ードの基礎になっているので非常に重要である。Fig. 11 に円形導波管の形と円柱座標系を示す。

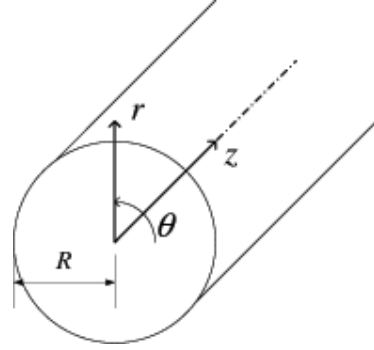


Fig. 11 円形導波管

TM モード

TM 波であるので $H_z = 0$ として円柱座標系 (r, θ, z) を使い、式(3-13)を書き直すと

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} + k_c^2 E_z = 0 \tag{4-38}$$

となる。Fig. 11 のとおり導波管の半径を R とし、中心軸を z 軸とすると、境界条件は $r = R$ で $E_z = 0$ である。式(4-38)の解は、 m 次の Bessel 関数 ($m = 0, 1, 2, \dots$) を J_m とすると、

$$E_z = J_m(k_c r) (A \cos m\theta + B \sin m\theta) \tag{4-39}$$

の形になる。ここで、境界条件を考慮すると、

$$J_m(k_c R) = 0 \tag{4-40}$$

となる。 J_m の n 番目の 0 点を j_{mn} と書くと、 k として

$$\begin{aligned}
k_{mn} &= \frac{j_{mn}}{R} \\
(m &= 0, 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots)
\end{aligned}
\tag{4-41}$$

の値をとり、 $k_c^2 = \omega^2 \varepsilon \mu + \gamma_z^2 = (j_{mn} / R)^2$ である。

$$\begin{aligned}
H_z &= 0 \text{ として、} E_r = E_x \cos \theta + E_y \sin \theta, \\
E_\theta &= -E_x \sin \theta + E_y \cos \theta, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r},
\end{aligned}$$

$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r}$ を考慮すると式(3-15)、(3-16)、(3-17)、(3-18)は

$$E_r = -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} \quad (4-42)$$

$$E_\theta = -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \quad (4-43)$$

$$H_r = \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \quad (4-44)$$

$$H_\theta = -\frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} \quad (4-45)$$

となる。 $E_z = AJ_m(k_{mn}r)\cos m\theta$ として上記の式に代入すると以下ようになる。

$$\begin{aligned} E_r &= -A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{j_{mn}}{R} J'_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta \\ E_\theta &= A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{m}{r} J_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \sin m\theta \\ E_z &= AJ_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta \\ H_r &= -A \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{m}{r} J_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \sin m\theta \\ H_\theta &= -A \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{j_{mn}}{R} J'_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta \\ H_z &= 0 \end{aligned} \quad (4-46)$$

この際の伝送電力、減衰定数は以下のようになる。

$$\begin{aligned} P_{TM} &= \frac{k\beta\pi}{4k_c^4 Z_0} j_{mn}^2 J_m'^2(j_{mn}R) \varepsilon_0 \\ \alpha &= \frac{R_s}{RZ_0} / \sqrt{1 - \frac{k_c^2}{k_0^2}} \end{aligned} \quad (4-47)$$

TE モード

TM 波は $E_z = 0$ として円柱座標系 (r, θ, z) を使い、式(3-14)を書き直すと

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \theta^2} + k_c^2 H_z = 0 \quad (4-48)$$

となる。ここで、境界条件は $r = R$ で $\frac{\partial H_z}{\partial r} = 0$ である。式(4-48)の解は、式(4-39)と同型になるが境界条件を考慮すると、

$$\begin{aligned} J'_m(k_c R) &= 0 \\ \left(J'_m(r) = \frac{dJ_m(r)}{dr} \right) \end{aligned} \quad (4-49)$$

となり、 m 次の Bessel 関数の微分 J'_m の n 番目の 0 点を j'_{mn} と書くと、 $k_c R = j'_{mn}$ となるように、 $k_{mn} = \frac{j'_{mn}}{R}$ ($m = 0, 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots$) をとることになる。 k^2 のとり得る値は

$$k_c^2 = \left(\frac{j'_{mn}}{R} \right)^2 \quad (4-50)$$

である。

$E_z = 0$ として、 $E_r = E_x \cos \theta + E_y \sin \theta$,
 $E_\theta = -E_x \sin \theta + E_y \cos \theta$, $\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r}$,
 $\frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r}$ を考慮すると式(3-15)、(3-16)、(3-17)、(3-18)は

$$E_r = \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} \quad (4-51)$$

$$E_\theta = -\frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial r} \quad (4-52)$$

$$H_r = -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial r} \quad (4-53)$$

$$H_\theta = -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} \quad (4-54)$$

となる。 $H_z = A J_m(k_{mn} r) \cos m\theta$ として上記の式に代入すると以下ようになる。

$$\begin{aligned} E_r &= -A \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{m}{r} J_m \left(\frac{j'_{mn}}{R} r \right) \sin m\theta \\ E_\theta &= -A \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{j'_{mn}}{R} J'_m \left(\frac{j'_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta \\ E_z &= 0 \\ H_r &= -A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{j'_{mn}}{R} J'_m \left(\frac{j'_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta \\ H_\theta &= A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{m}{r} J_m \left(\frac{j'_{mn}}{R} r \right) \sin m\theta \\ H_z &= A J_m \left(\frac{j'_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta \end{aligned} \quad (4-55)$$

この際の伝送電力と、減衰定数は以下ようになる。

$$\begin{aligned} P_{TE} &= \frac{Z_0 k \beta \pi}{4 k_c^4} (j'_{mn}{}^2 - m^2) J_m(j'_{mn}) \varepsilon_0 \\ \alpha &= \frac{R_s}{R Z_0} / \sqrt{1 - \frac{k_c^2}{k_0^4}} \times \left(\frac{k_c^2}{k_0^4} + \frac{m^2}{j'_{mn}{}^2 - m^2} \right) \end{aligned} \quad (4-56)$$

円形導波管の減衰率

円形導波管の減衰率の例として、Fig. 12 に内径 80mm ϕ の 円形導波管の様々な伝搬モードでの損失をプロットしてみた。

通常モードは単位長さ当たりの損失が最小になる周波数が存在する事が分かる。しかし TE_{0n} モードだけは特別で、周波数が上がれば着々と損失が減るため、長距離伝送に向いている事が分かる。

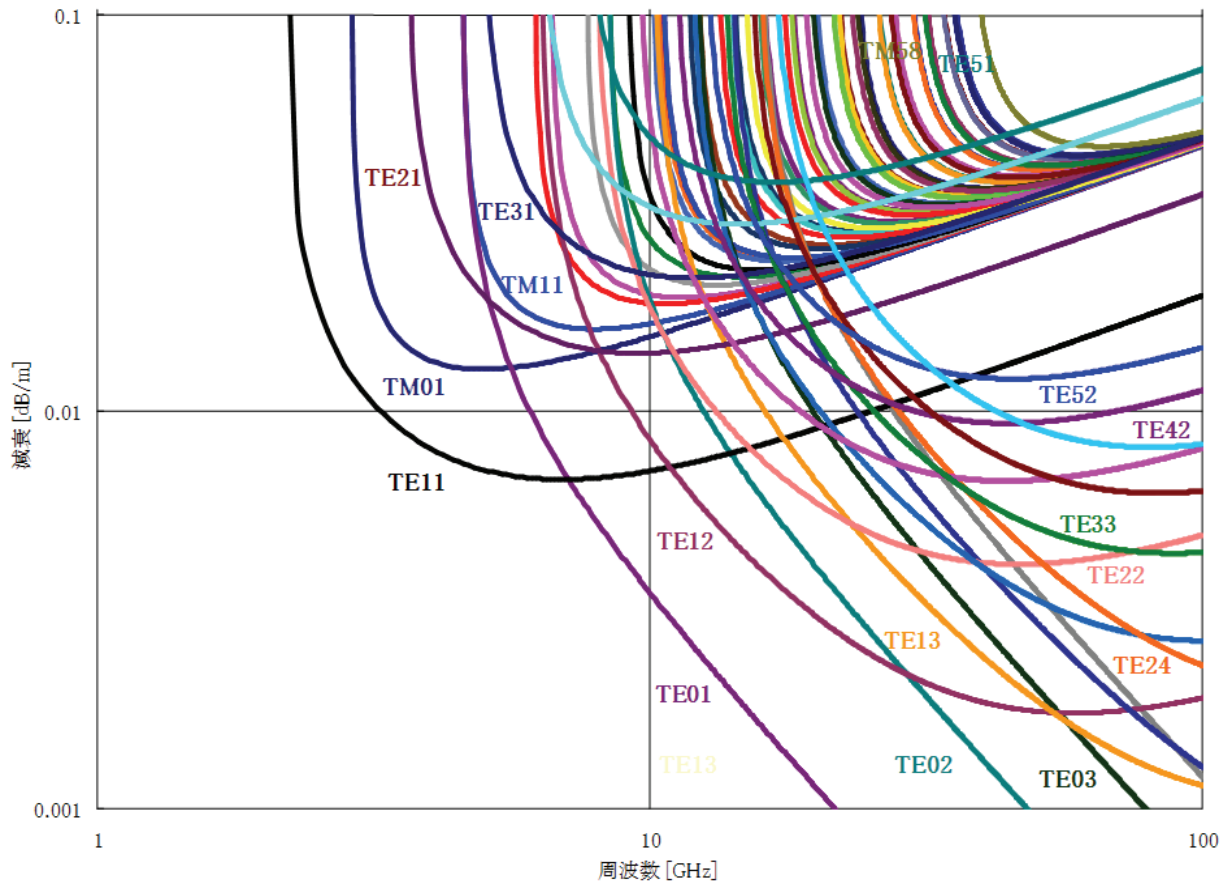


Fig. 12 円形導波管の減衰率

5. 空洞共振器

例えば、導波管をある長さのところで切り、両端に導体でふたをするとその中で電磁波が反射を繰り返し、波長の合うものが共振する。このように、閉じた導体中で電磁場の共振を生じさせるものを空洞共振器という。

これは、導波管にふたをしたものに限らず、どのような形のものでも共振を生じさせることができる。定在波加速管はまさにこの空洞共振器である。

空洞の内部の電磁波は以下のヘルムホルツ方程式

$$\begin{aligned}(\Delta + k_c^2)\mathbf{E} &= 0 \\(\Delta + k_c^2)\mathbf{H} &= 0\end{aligned}\quad (5-1)$$

を、以下の境界条件で固有モードを解けば、

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \times \mathbf{E}_s &= 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_s = 0 && \text{完全導体} \\ \mathbf{n} \times \mathbf{H}_s &= 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_s = 0 && \text{完全磁気壁}\end{aligned}$$

以下のような直交関数の固有モードが得られる。

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E}_n &= -jk_n Z_n \mathbf{H}_n \\ \nabla \times \mathbf{H}_n &= j \frac{k_n}{Z_n} \mathbf{E}_n \\ \int \mathbf{E}_n \cdot \mathbf{E}_m dV &= \int Z_n \mathbf{H}_n \cdot Z_m \mathbf{H}_m dV = \delta_{nm}\end{aligned}\quad (5-2)$$

なお完全導体ではなく、金属のような導体上の場合、変位電流が無視できて、境界条件は前述の表皮抵抗を利用して、

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_s = -(1+j)R_s \mathbf{H}_s \quad \text{導体} \quad (5-3)$$

と書けるが、 R_s は金属では小さいため、内部の電磁界の形にはほとんど影響を与えず、完全導体の場合の固有モードが通常はそのまま使える。

5.1. 直方体空洞共振器

直方体空洞共振器は、ある長さの矩形導波管の両端に導体でふたをしたものと考えられる。今、Fig.

13 のように x, y, z 座標軸をとり、それぞれの辺の長さが a, b, d であるとする。

これは、 z 方向の導波管が $z = 0, d$ で閉じたものと考え、両端で電磁波が反射し z 方向と $-z$ 方向の波が重なり合い定在波を作る状態である。電磁波が z 方向に進むときは、 $\gamma_z = j\beta$ であるが、 $-z$ 方向に進むときは、 $\gamma_z = -j\beta$ である。両端では、 $\mathbf{E}$ は端面に垂直であるので、 $E_x = E_y = 0$ である。

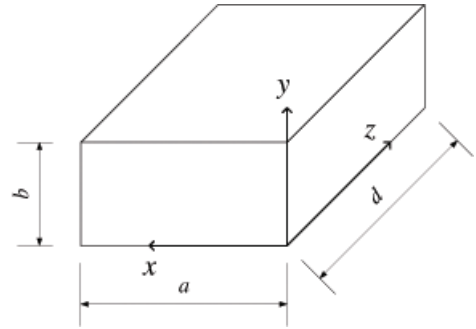


Fig. 13 直方体空洞共振器

TM モード

矩形導波管の TM モードの結果、式(4-21)より、 z 方向に進む波（進行波）は

$$\begin{aligned}E_x &= -A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z} \\ E_y &= -A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z} \\ E_z &= A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z} \\ H_x &= A \frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z} \\ H_y &= -A \frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z} \\ H_z &= 0\end{aligned}\quad (5-4)$$

と表され、 $-z$ 方向に進む波（後退波）はこの結果の β を $-\beta$ に置き換えたもので表されるので

$$\begin{aligned}
E_x &= A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{j\beta z} \\
E_y &= A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{j\beta z} \\
E_z &= A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{j\beta z} \\
H_x &= A \frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{j\beta z} \\
H_y &= -A \frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{j\beta z} \\
H_z &= 0
\end{aligned} \tag{5-5}$$

となる。ところで、

$$\begin{aligned}
&-je^{-j\beta z} + je^{j\beta z} \\
&= j(e^{-j\beta z} + e^{j\beta z}) = -2\sin \beta z
\end{aligned} \tag{5-6}$$

であり、このとき

$$\beta = \frac{p\pi}{d} \quad (p = 0, 1, 2, \dots) \tag{5-7}$$

とすると $z = 0, c$ で $\sin \beta z = 0$ となる。したがって、進行波と後退波を足しあわせたとき、 $z = 0, c$ で $E_x = E_y = 0$ とするためには式(5-7)の条件が必要になる。進行波と後退波の和をとり2で割ると以下の結果を得る。

$$\begin{aligned}
E_x &= -A \frac{1}{k_c^2} \frac{p\pi}{d} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{d} \\
E_y &= -A \frac{1}{k_c^2} \frac{p\pi}{d} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{d} \\
E_z &= A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{p\pi z}{d} \\
H_x &= A \frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{p\pi z}{d} \\
H_y &= -A \frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{p\pi z}{d} \\
H_z &= 0
\end{aligned} \tag{5-8}$$

このとき、

$$\begin{aligned}
\omega^2 \epsilon \mu &= k_c^2 + \beta^2 = \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{d^2} \right) \pi^2 \\
(m &= 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots; \quad p = 0, 1, 2, \dots)
\end{aligned} \tag{5-9}$$

となる。またこの空洞のQ値は以下である。

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{\lambda}{2\delta_s} \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right] \times \sqrt{\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 + \left(\frac{p}{d} \right)^2} \\
&\quad / \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 \left(\frac{2}{a} + \frac{\epsilon_p}{d} \right) + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \left(\frac{2}{b} + \frac{\epsilon_p}{d} \right) \right] \\
&\quad \left(\epsilon_p = \begin{cases} 1 & p = 0 \\ 2 & p \neq 0 \end{cases} \right)
\end{aligned} \tag{5-10}$$

TEモード

矩形導波管のTEモードの結果、式(4-21)より、 z 方向に進む波（進行波）は

$$\begin{aligned}
E_x &= A \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z} \\
E_y &= -A \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z} \\
E_z &= 0 \\
H_x &= A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z} \\
H_y &= A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z} \\
H_z &= \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}
\end{aligned} \tag{5-11}$$

と表され、 $-z$ 方向に進む波（後退波）は

$$\begin{aligned}
E_x &= \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} A \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{j\beta z} \\
E_y &= -\frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} A \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{j\beta z} \\
E_z &= 0 \\
H_x &= -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} A \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{j\beta z} \\
H_y &= -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} A \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{j\beta z} \\
H_z &= \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{j\beta z}
\end{aligned} \quad (5-12)$$

となる。この場合も進行波と後退波を足しあわせたときに $E_x = E_y = 0$ となるためには、式(5-7)の条件が必要になる。

進行波と後退波の和をとると以下の結果を得る。

$$\begin{aligned}
E_x &= A \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{d} \\
E_y &= -A \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{d} \\
E_z &= 0 \\
H_x &= -A \frac{1}{k_c^2} \frac{p\pi}{d} \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{p\pi z}{d} \\
H_y &= -A \frac{1}{k_c^2} \frac{p\pi}{d} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{p\pi z}{d} \\
H_z &= \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{d}
\end{aligned} \quad (5-13)$$

このとき、

$$\begin{aligned}
\omega^2 \varepsilon \mu &= k_c^2 + \beta^2 = \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{d^2} \right) \pi^2 \\
(m &= 0, 1, 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots; \\
p &= 1, 2, \dots; m = n = 0)
\end{aligned} \quad (5-14)$$

となる。またこの空洞のQ値は以下である。

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{\lambda}{\delta_s} \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 + \left(\frac{p}{d} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \\
&\quad / 2 \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 \left(\frac{2}{a} + \frac{\varepsilon_n}{b} \right) + \left(\frac{p}{d} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. \left(\left(\frac{\varepsilon_n}{b} + \frac{2}{L} \right) \left(\frac{m}{a} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{d} \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right) \right) \right] \\
&\quad \left(\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 2 & n \neq 0 \end{cases} \right)
\end{aligned} \quad (5-15)$$

5.2. 円筒形空洞共振器

円筒形空洞共振器は、ある長さの円形導波管の両端に導体でふたをしたものと考えられる。今、Fig. 14 のように r, θ, z 座標軸をとり、円の半径を R 、高さを h とする。

これは、 z 方向の導波管が $z = 0, h$ で閉じたものと考えることができる。

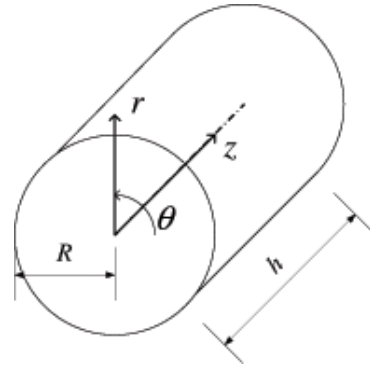


Fig. 14 円筒形空洞共振器

TM モード

円形導波管の TM モードの結果、式(4-46)より、 z 方向に進む波（進行波）は

$$\begin{aligned}
E_r &= -A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{j_{mn}}{R} J'_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta e^{-j\beta z} \\
E_\theta &= A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{m}{r} J_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \sin m\theta e^{-j\beta z} \\
E_z &= A J_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta e^{-j\beta z} \\
H_r &= -A \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{m}{r} J_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \sin m\theta e^{-j\beta z} \\
H_\theta &= -A \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{j_{mn}}{R} J'_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta e^{-j\beta z} \\
H_z &= 0
\end{aligned} \tag{5-16}$$

と表され、 $-z$ 方向に進む波（後退波）は

$$\begin{aligned}
E_r &= A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{j_{mn}}{R} J'_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta e^{j\beta z} \\
E_\theta &= -A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{m}{r} J_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \sin m\theta e^{j\beta z} \\
E_z &= A J_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta e^{j\beta z} \\
H_r &= -A \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{m}{r} J_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \sin m\theta e^{j\beta z} \\
H_\theta &= -A \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{j_{mn}}{R} J'_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta e^{j\beta z} \\
H_z &= 0
\end{aligned} \tag{5-17}$$

となる。進行波と後退波を足しあわせたときに
 $E_r = E_\theta = 0$ となるためには、

$$\beta = \frac{p\pi}{h} \quad (p = 0, 1, 2, \dots) \tag{5-18}$$

の条件が必要になる。進行波と後退波の和をとり
2 で割ると以下の結果になる。

$$\begin{aligned}
E_r &= -A \frac{1}{k_c^2} \frac{p\pi}{h} \frac{j_{mn}}{R} J'_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta \sin \frac{p\pi z}{h} \\
E_\theta &= A \frac{1}{k_c^2} \frac{p\pi}{h} \frac{m}{r} J_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \sin m\theta \sin \frac{p\pi z}{h} \\
E_z &= A J_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta \cos \frac{p\pi z}{h} \\
H_r &= -A \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{m}{r} J_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \sin m\theta \cos \frac{p\pi z}{h} \\
H_\theta &= -A \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{j_{mn}}{R} J'_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta \cos \frac{p\pi z}{h} \\
H_z &= 0
\end{aligned} \tag{5-19}$$

このとき、

$$\begin{aligned}
\omega^2 \varepsilon \mu &= k_c^2 + \beta^2 = \left(\frac{j_{mn}}{R} \right)^2 + \left(\frac{p^2}{d^2} \right)^2 \\
(m &= 0, 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots; \quad p = 0, 1, 2, \dots)
\end{aligned} \tag{5-20}$$

となる。またこの空洞のQ値は以下である。

$$Q = \frac{R}{\delta_s} / \left(1 + \frac{\varepsilon_p R}{L} \right) \quad \left(\varepsilon_p = \begin{cases} 1 & p=0 \\ 2 & p \neq 0 \end{cases} \right) \tag{5-21}$$

TE モード

円形導波管の TE モードの結果、式(4-55)より、 z 方向に進む波（進行波）は

$$\begin{aligned}
 E_r &= -A \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{m}{r} J_m \left(\frac{j_{mn}'}{R} r \right) \sin m\theta e^{-j\beta z} \\
 E_\theta &= -A \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{j_{mn}'}{R} J_m' \left(\frac{j_{mn}'}{R} r \right) \cos m\theta e^{-j\beta z} \\
 E_z &= 0 \\
 H_r &= -A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{j_{mn}'}{R} J_m' \left(\frac{j_{mn}'}{R} r \right) \cos m\theta e^{-j\beta z} \\
 H_\theta &= A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{m}{r} J_m \left(\frac{j_{mn}'}{R} r \right) \sin m\theta e^{-j\beta z} \\
 H_z &= A J_m \left(\frac{j_{mn}'}{R} r \right) \cos m\theta e^{-j\beta z}
 \end{aligned} \tag{5-22}$$

と表され、 $-z$ 方向に進む波（後退波）は

$$\begin{aligned}
 E_r &= -A \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{m}{r} J_m \left(\frac{j_{mn}'}{R} r \right) \sin m\theta e^{j\beta z} \\
 E_\theta &= -A \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{j_{mn}'}{R} J_m' \left(\frac{j_{mn}'}{R} r \right) \cos m\theta e^{j\beta z} \\
 E_z &= 0 \\
 H_r &= A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{j_{mn}'}{R} J_m' \left(\frac{j_{mn}'}{R} r \right) \cos m\theta e^{j\beta z} \\
 H_\theta &= -A \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{m}{r} J_m \left(\frac{j_{mn}'}{R} r \right) \sin m\theta e^{j\beta z} \\
 H_z &= A J_m \left(\frac{j_{mn}'}{R} r \right) \cos m\theta e^{j\beta z}
 \end{aligned} \tag{5-23}$$

進行波と後退波を足しあわせたときに $E_r = E_\theta = 0$ となるために β は TM モードのときと同じ条件である。進行波と後退波の和をとり $2i$ で割ると以下の結果になる。

$$\begin{aligned}
 E_r &= A \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{m}{r} J_m \left(\frac{j_{mn}'}{R} r \right) \sin m\theta \sin \frac{p\pi z}{h} \\
 E_\theta &= A \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{j_{mn}'}{R} J_m' \left(\frac{j_{mn}'}{R} r \right) \cos m\theta \sin \frac{p\pi z}{h} \\
 E_z &= 0 \\
 H_r &= A \frac{1}{k_c^2} \frac{p\pi}{h} \frac{j_{mn}'}{R} J_m' \left(\frac{j_{mn}'}{R} r \right) \cos m\theta \cos \frac{p\pi z}{h} \\
 H_\theta &= -A \frac{1}{k_c^2} \frac{p\pi}{h} \frac{m}{r} J_m \left(\frac{j_{mn}'}{R} r \right) \sin m\theta \cos \frac{p\pi z}{h} \\
 H_z &= A J_m \left(\frac{j_{mn}'}{R} r \right) \cos m\theta \sin \frac{p\pi z}{h}
 \end{aligned} \tag{5-24}$$

このとき、

$$\begin{aligned}
 \omega^2 \varepsilon \mu &= k_c^2 + \beta^2 = \left(\frac{j_{mn}'}{R} \right)^2 + \left(\frac{p}{d} \right)^2 \\
 (m &= 0, 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots; \quad p = 1, 2, \dots)
 \end{aligned} \tag{5-25}$$

となる。またこの空洞の Q 値は以下である。

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{\lambda}{2\pi\delta_s} \left(j_{mn}'^2 - m^2 \right) \left(j_{mn}'^2 + \left(\frac{\pi p R}{L} \right)^2 \right) \\
 &\quad / \left[j_{mn}'^4 + 2 \left(\pi p j_{mn}' \right)^2 \left(\frac{R}{L} \right)^3 \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\pi m p R}{L} \right)^2 \left(1 - \frac{2R}{L} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{5-26}$$

6. 空洞と伝送線路の結合

6.1. 共振空洞と伝送線路の結合のマクスウェル方程式からの導出

ポインティングベクトル $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ を面積積分し、Maxwell 方程式を代入すると以下になる。

$$\begin{aligned}
\int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS &= \int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV \\
&= \int_V (\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}) dV \\
&= -\int_V \left(\mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \varepsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) dV \quad (6-1) \\
&= -\int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV - \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\mu H^2}{2} + \frac{\varepsilon E^2}{2} \right) dV \\
&= -P_{beam} - \frac{dW}{dt}
\end{aligned}$$

これは良く知られているように、ポインティングベクトルの面積分 $\int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS$ とビーム加速エネルギー $P_{beam} = \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV$ と電磁波エネルギーの時間変化 $\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\mu H^2}{2} + \frac{\varepsilon E^2}{2} \right) dV$ の総和が0であり、ポインティングベクトルが電磁波の単位面積当たりのエネルギー流である事が分かる。

ここで、ポインティングベクトルの面積分を結合孔と導体壁に分け、ポインティングベクトルと法線ベクトルの内積を書き換え、導体表面について式(5-3)で法線ベクトルの向きが逆なので $\mathbf{H}_s = -\mathbf{H}$ として、

$$\begin{aligned}
\int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS \\
&= \int_{S_{hole}} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS_{hole} + \int_{S_{wall}} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H} dS_{wall} \\
&= P_{ext} + (1+j)R_s \int_{S_{wall}} H^2 dS_{wall} \quad (6-2)
\end{aligned}$$

ここで P_{ext} は外部への結合孔からの電力流出を指している。この電力は、波高 $\sqrt{2}$ で位相が 45 度ずれている事を意味し、導体上での壁損失の平均電力は $R_s \int_S H^2 dS$ となる。そこで、

$$\frac{1}{Q_{wall}} = \frac{R_s}{\omega \mu} \frac{\int_{S_{wall}} H^2 dS_{wall}}{\int_V H^2 dV} = \frac{\delta_s}{2} \frac{\int_{S_{wall}} H^2 dS_{wall}}{\int_V H^2 dV} \quad (6-3)$$

と無次元の量を定義すれば、式(6-1)と式(6-2)から

$$\frac{\omega}{Q_{wall}} W + P_{ext} = -P_{beam} - \frac{dW}{dt} \quad (6-4)$$

並び替えると

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{\omega}{Q_{wall}} W - P_{ext} - P_{beam} \quad (6-5)$$

となる。これは、振動を平均化したエネルギーの時間変化を表した物だが、実際には $\mathbf{H}$ と $\mathbf{E}$ は 90 度ずれた振動をしており、2 次の微分を計算すれば、振動解の時間発展の方程式を導出する事もできる。

6.2. 共振空洞と伝送線路の結合の過渡現象とフィリングタイム

空洞共振器は外部から励振されるため導波管などの伝送線路と結合されている。ここでは、空洞共振器を取り扱うとき重要になるパラメータについて説明する[11]。

空洞共振器を特徴付けるパラメータとしては、 Q 値と結合係数 β がある。 Q 値は次式で定義される。

$$Q = \frac{\omega_0 W}{P} \quad (6-6)$$

ここで、 ω_0 : 共振周波数、 W : 空洞に蓄えられているエネルギー、 P : 損失（単位あたりに空洞から失われるエネルギー）である。

Q 値には 3 種類あり、

- (1) 無負荷の Q (unloaded Q) - Q_0
- (2) 外部の Q (external Q) - Q_{ext}
- (3) 負荷時の Q (loaded Q) - Q_L

がある。 Q_0 は空洞内で電磁場による壁電流で消費される電力 P_0 による Q である。 Q_{ext} は空洞の結合孔から外に逃げていく電磁場の電力 P_{ext} による Q である。この P_0 と P_{ext} の和が空洞から失われるパワー P_L とすると次の関係がある。

$$P_L = P_0 + P_{ext} \quad (6-7)$$

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{ext}} \quad (6-8)$$

結合係数は、空洞と外部回路（普通は導波管）との結合の強さを表し、

$$\beta = \frac{P_{ext}}{P_0} = \frac{Q_0}{Q_{ext}} \quad (6-9)$$

で表され、 $\beta > 1$, $\beta = 1$, $\beta < 1$ に対して、それぞれ強結合、臨界結合、弱結合という。また、式(6-8)、(6-9)から

$$Q_L = \frac{1}{1 + \beta} Q_0 \quad (6-10)$$

の関係が導かれる。

ここで空洞電圧が0の状態、高周波入力矩形パルスとして、入力された場合の過渡現象を考える。Fig. 15のようなエネルギー変化をしている系を用いる。Gはアドミッタンス、Vは電圧、Pはパワーを表しており、添え字の0は空洞内、wgは導波管、inは入力、rは反射、extはQ値の説明のときに用いたカップリングによる損失を表している。空洞内のエネルギー変化は入力マイクロ波のパワー P_{in} と空洞内に入らずに反射するマイクロ波のパワー P_r 、そして、空洞から漏れ出てくるマイクロ波のパワー P_{ext} を用いて、

$$\frac{dW_0}{dt} = P_{in} - P_r - P_0 \quad (6-11)$$

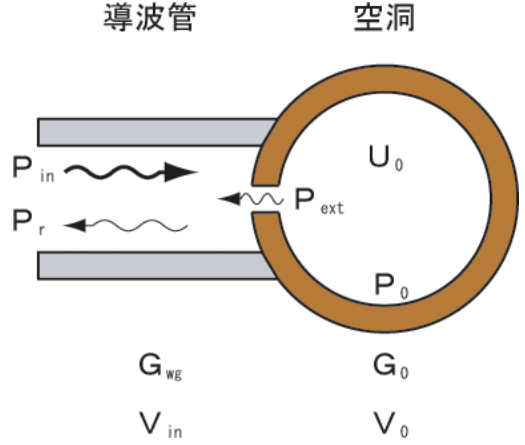


Fig. 15 空洞内のエネルギー変化を表した図 (Gはアドミッタンス、Vは電圧、Pはパワーを表しており、添え字の0は空洞内、wgは導波管、inは入力、rは反射、extはQ値の説明のときに用いたカップリングによる損失を表している)

と書くことができる。反射電圧は

$$V_r = -V_{in} + V_0 \quad (6-12)$$

なので、アドミッタンスと電圧を用いて書き直すと

$$\frac{dW_0}{dt} = G_{wg} V_{in}^2 - G_{wg} (V_0 - V_{in})^2 - G_0 V_0^2 \quad (6-13)$$

となる。ここで、

$$Q_0 = \frac{\omega W_0}{P_0} \quad (6-14)$$

という関係式を用いて式(6-13)を書き直すと

$$\begin{aligned} & \frac{Q_0}{\omega} \frac{d}{dt} (G_0 V_0^2) \\ &= G_{wg} V_{in}^2 - G_{wg} (V_0 - V_{in})^2 - G_0 V_0^2 \end{aligned} \quad (6-15)$$

とせる。また、

$$\beta = \frac{G_{gw}}{G_0} = \frac{P_{ext}}{P_0} \quad (6-16)$$

$$Q_L = \frac{\omega W_0}{P_0 + P_{ext}} = \frac{Q_0}{1 + \beta} \quad (6-17)$$

を用いて式(6-15)を書き直していくと

$$\begin{aligned}
& \frac{(1+\beta)Q_L}{\omega} \frac{d}{dt} (V_0)^2 G_0 \\
&= G_{wg} V_{in}^2 - G_{wg} V_0^2 - G_{wg} V_{in}^2 \\
& \quad + 2G_{wg} V_0 V_{in} - G_0 V_0^2 \\
& \frac{2(1+\beta)G_L}{\omega} \frac{dV_0}{dt} G_0 \\
&= -G_{wg} V_0 + 2G_{wg} V_{in} - G_0 V_0 \\
&= -\beta G_0 V_0 + 2\beta G_0 V_{in} - G_0 V_0 \\
& \frac{2(1+\beta)Q_L}{\omega} \frac{dV_0}{dt} \\
&= -\beta V_0 + 2\beta V_{in} - V_0 \\
&= -V_0(1+\beta) + 2\beta V_{in} \\
& \frac{2Q_L}{\omega} \frac{dV_0}{dt} \\
&= -V_0 + \frac{2\beta}{(1+\beta)} V_{in}
\end{aligned} \tag{6-18}$$

となる。そして、

$$T_c = \frac{2Q_L}{\omega} \tag{6-19}$$

$$\alpha = \frac{2\beta}{1+\beta} \tag{6-20}$$

と定義し式(6-18)を変形すると

$$T_c \frac{dV_0}{dt} + V_0 = \alpha V_{in} \tag{6-21}$$

と表せる。ここで、

$$V_0(t) = \tilde{V} e^{-\frac{t}{T_c}} \tag{6-22}$$

とおき、 t で微分をすると

$$\frac{dV_0(t)}{dt} = \frac{d\tilde{V}}{dt} e^{-\frac{t}{T_c}} + \tilde{V} \left(-\frac{1}{t_c} \right) e^{-\frac{t}{T_c}} \tag{6-23}$$

となり、式(6-21)に式(6-22)、式(6-23)を代入し書き直すと

$$\begin{aligned}
T_c \left(\frac{d\tilde{V}}{dt} e^{-\frac{t}{T_c}} + \tilde{V} \left\{ -\frac{1}{t_c} \right\} e^{-\frac{t}{T_c}} \right) + \tilde{V} e^{-\frac{t}{T_c}} &= \alpha V_{in} \\
T_c \frac{d\tilde{V}}{dt} e^{-\frac{t}{T_c}} - \tilde{V} e^{-\frac{t}{T_c}} + \tilde{V} e^{-\frac{t}{T_c}} &= \alpha V_{in} \\
T_c \frac{d\tilde{V}}{dt} e^{-\frac{t}{T_c}} &= \alpha V_{in} \\
\frac{d\tilde{V}}{dt} &= \frac{1}{T_c} \alpha V_{in} e^{\frac{t}{T_c}}
\end{aligned} \tag{6-24}$$

と表せる。この式(6-24)を積分すると

$$\tilde{V} = \alpha V_{in} e^{\frac{t}{T_c}} + C \tag{6-25}$$

と表せ、式(6-22)に代入すると

$$\begin{aligned}
V_0(t) &= \left(\alpha V_{in} e^{\frac{t}{T_c}} + C \right) e^{-\frac{t}{T_c}} \\
&= \alpha V_{in} + C e^{-\frac{t}{T_c}}
\end{aligned} \tag{6-26}$$

となる。この時、初期条件 $t=0$ のとき、 $V_0(t) = 0$ を用いると以下のように C が求まる。

$$\begin{aligned}
V_0(0) &= \alpha V_{in} + C = 0 \\
C &= -\alpha V_{in}
\end{aligned} \tag{6-27}$$

求めた C を式(6-26)に代入すると

$$\begin{aligned}
V_0(t) &= \alpha V_{in} - \alpha V_{in} e^{-\frac{t}{T_c}} \\
&= \alpha V_{in} \left(1 - e^{-\frac{t}{T_c}} \right)
\end{aligned} \tag{6-28}$$

と表せる。

ここで、

$$\omega = 2\pi f \tag{6-29}$$

という関係式と式(6-17)、(6-20)を用いて式(6-28)を書き直すと

$$\begin{aligned} V_0(t) &= \left(1 - e^{-\frac{\omega}{2Q_L}t}\right) \frac{2\beta}{1+\beta} V_{in} \\ &= \left(1 - e^{-\frac{2\pi f(1+\beta)}{2Q_0}t}\right) \frac{2\beta}{1+\beta} V_{in} \\ &= \left(1 - e^{-\frac{\pi f(1+\beta)}{Q_0}t}\right) \frac{2\beta}{1+\beta} V_{in} \end{aligned} \quad (6-30)$$

と表せる。この時、式(6-14)をアドミタンス G_{wg} を用いて書き換えると、

$$W_0 = \frac{Q_0}{\omega\beta} G_{wg} V_0^2 \quad (6-31)$$

と表せ、式(6-30)を用いると、

$$W_0 = \frac{Q_0 G_{wg}}{2\pi f\beta} \left[\left(1 - e^{-\frac{\pi f(1+\beta)}{Q_0}t}\right) \frac{2\beta}{1+\beta} V_{in} \right]^2 \quad (6-32)$$

と表せる。式(6-32)は時間変化に伴う空洞内に溜まるエネルギー W_0 を表しているため、エネルギーに関する **filling time** を表していると言える。また、空洞内に溜まるマイクロ波のエネルギー W_0 と空洞内に立つ電場 E_0 には $W_0 \sim E_0^2$ という関係があるため、時間変化に伴う空洞内に立つ電場についての関係は

$$\begin{aligned} V_0 &= \sqrt{\frac{Q_0 G_{wg}}{2\pi f}} \left(1 - e^{-\frac{\pi f(1+\beta)}{Q_0}t}\right) \frac{2\sqrt{\beta}}{1+\beta} V_{in} \\ &= 2\sqrt{\frac{Q_L G_{wg}\beta}{2\pi f(1+\beta)}} \left(1 - e^{-\frac{\pi f}{Q_L}t}\right) V_{in} \\ &= 2\sqrt{\frac{Q_L G_{wg}(Q_0 - Q_L)}{2\pi f Q_0}} \left(1 - e^{-\frac{\pi f}{Q_L}t}\right) V_{in} \end{aligned} \quad (6-33)$$

と Q_0 、 Q_L 、 β などを用いて表すことができる。この結果を用いることで、**filling time** を求めることができる。この様子を適当な時定数で書くと図ようになる。

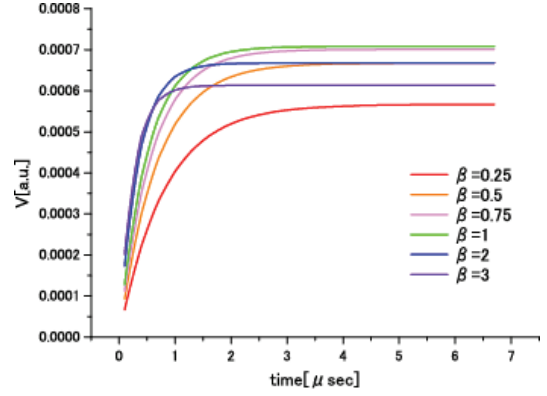


Fig. 16 空洞電圧の時間応答

7. 結合空洞(連成空洞)

7.1. マクスウェル方程式での空洞の結合

$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_{0s} = 0$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_{0s} = 0$ 完全導体: 0モード

$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_{\pi s} = 0$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_{\pi s} = 0$ 完全磁気壁: π モード

$$\nabla \times \mathbf{E}_\beta = -jk_\beta Z_\beta \mathbf{H}_\beta$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_\beta = j \frac{k_\beta}{Z_\beta} \mathbf{E}_\beta \quad (7-1)$$

$$\beta = 0, \pi$$

この 0 モードの界と π モードの界をヘルムホルツ方程式と、ベクトル公式を利用し、境界条件を考慮すると、以下ようになる。

$$\begin{aligned} &(k_\pi^2 - k_0^2) \int_V \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_\pi dV \\ &= - \int_V (\mathbf{E}_0 \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_\pi - \mathbf{E}_\pi \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_0) dV \\ &= - \int_S (\mathbf{E}_0 \times \nabla \times \mathbf{E}_\pi - \mathbf{E}_\pi \times \nabla \times \mathbf{E}_0) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= - \int_S (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_\pi) \cdot \mathbf{n} dS + \int_S (\mathbf{E}_\pi \times \mathbf{H}_0) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= - \int_{S_{hole}} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_\pi) \cdot \mathbf{E}_0 dS - \int_{S_{wall}} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0) \cdot \mathbf{H}_\pi dS \\ &\quad + \int_{S_{hole}} (\mathbf{E}_\pi \times \mathbf{H}_0) \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_{wall}} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_\pi) \cdot \mathbf{H}_0 dS \\ &= \int_{S_{hole}} (\mathbf{E}_\pi \times \mathbf{H}_0) \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (7-2)$$

結合度 k は結合孔のエネルギー流

$\int_{S_{hole}} (\mathbf{E}_\pi \times \mathbf{H}_0) \cdot \mathbf{n} dS$ と蓄積エネルギー

$\int_V \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_\pi dV$ の比で、これは π モードと 0 モードの 2 乗の差に比例する事が分かる。

$$k \sim \frac{\int_{S_{hole}} (\mathbf{E}_\pi \times \mathbf{H}_0) \cdot \mathbf{n} dS}{\int_V \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_\pi dV} = k_\pi^2 - k_0^2 \quad (7-3)$$

7.2. 等価回路

7.2.1. 結合空洞の等価回路

以上はエネルギーのやり取りを元にして、空洞の特性を表してきたが、エネルギーでは連成空洞の全ての特性を表す事ができない。そこで、等価回路を用いて空洞との結合を表す事にする。

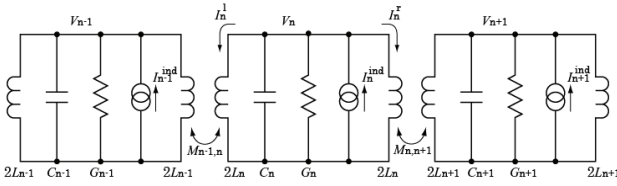


Fig. 17 結合空洞の等価回路

Fig. 17 は結合空洞の等価回路を表している。n 番目の空洞で結合が無い場合のアドミッタンスは以下のように書ける。

$$\begin{aligned} Y_n &= j\omega C_n + \frac{1}{j\omega L_n} + G_n \\ &= \frac{1}{(R/Q)_n} \left[j \left(\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega_n}{\omega} \right) + \frac{1}{Q_n} \right] \end{aligned} \quad (7-4)$$

ここで、

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{L_n C_n}} \quad (7-5)$$

$$Q_n = \frac{\omega_n C_n}{G_n} = \frac{1}{\omega_n L_n G_n} \quad (7-6)$$

$$(R/Q)_n = \sqrt{\frac{L_n}{C_n}} = \omega_n L_n = \frac{1}{\omega_n C_n} \quad (7-7)$$

磁気的な結合がある場合を記述するため、まず n 番目の空洞内部の電流を書くと

$$\begin{aligned} i_n^{ind} &= i_n^C + i_n^L + i_n^G \\ &= C_n \frac{dv_n}{dt} + i_n^l + i_n^r + G_n v_n \end{aligned} \quad (7-8)$$

式(7-5)、(7-6)、(7-7)、式(7-8) を使うと

$$\begin{aligned} \omega_n L_n i_n^{ind} &= (R/Q)_n i_n^{ind} \\ &= \frac{1}{\omega_n} \frac{dv_n}{dt} + \omega_n L_n (i_n^l + i_n^r) + \frac{1}{Q_n} v_n \end{aligned} \quad (7-9)$$

n 番目の空洞の左側の磁気結合は、以下のように表せる。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_n \\ v_{n-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2L_n & M_{n,n-1} \\ M_{n,n-1} & 2L_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{di_n^l}{dt} \\ \frac{di_{n-1}^r}{dt} \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} 1 & k_{n-1,n} \sqrt{\frac{L_n}{L_{n-1}}} \\ k_{n-1,n} \sqrt{\frac{L_{n-1}}{L_n}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_n \frac{di_n^l}{dt} \\ L_{n-1} \frac{di_{n-1}^r}{dt} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7-10)$$

同様に右側の磁気結合は、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_n \\ v_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2L_n & M_{n,n+1} \\ M_{n,n+1} & 2L_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{di_n^r}{dt} \\ \frac{di_{n+1}^l}{dt} \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} 1 & k_{n,n+1} \sqrt{\frac{L_n}{L_{n+1}}} \\ k_{n,n+1} \sqrt{\frac{L_{n+1}}{L_n}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_n \frac{di_n^r}{dt} \\ L_{n+1} \frac{di_{n+1}^l}{dt} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7-11)$$

ここで M は磁気結合の相互インダクタンスで、結合度 k と以下のような関係である。

$$\begin{aligned} M_{n-1,n} &= k_{n-1,n} \sqrt{4L_{n-1}L_n} \\ M_{n,n+1} &= k_{n,n+1} \sqrt{4L_nL_{n+1}} \end{aligned} \quad (7-12)$$

式(7-9)から、

$$\begin{aligned} \frac{dv_n}{dt} = & -\omega_n^2(L_n i_n^l + L_n i_n^r) - \frac{\omega_n}{Q_n} v_n \\ & + \omega_n(R/Q)_n i_n^{ind} \end{aligned} \quad (7-13)$$

式(7-10)、(7-11)の逆行列から電流の微分である $\frac{d(L_n i_n^l)}{dt}$ と $\frac{d(L_n i_n^r)}{dt}$ の式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{d(L_n i_n^l)}{dt} &= \frac{v_n - k_{n-1,n}^* v_{n-1}}{2(1 - k_{n-1,n}^2)} \\ \frac{d(L_n i_n^r)}{dt} &= \frac{v_n - k_{n,n+1}^* v_{n+1}}{2(1 - k_{n,n+1}^2)} \end{aligned} \quad (7-14)$$

ここで式を簡単にするために、結合度を以下の k^* として置き換えた。

$$\begin{aligned} k_{n-1,n}^* &= k_{n-1,n} \sqrt{\frac{L_n}{L_{n-1}}} \\ &= k_{n-1,n} \sqrt{\frac{\omega_{n-1}(R/Q)_n}{\omega_n(R/Q)_{n-1}}} \\ k_{n,n+1}^* &= k_{n,n+1} \sqrt{\frac{L_n}{L_{n+1}}} \\ &= k_{n,n+1} \sqrt{\frac{\omega_{n+1}(R/Q)_n}{\omega_n(R/Q)_{n+1}}} \end{aligned} \quad (7-15)$$

式(7-13)、(7-14)は時系列の連立微分方程式であり、 v_n 、 $L_n i_n^l$ 、 $L_n i_n^r$ が変数である。

さらに、式(7-9)を微分し、式(7-14)を使って、さらに k は小さいとして2次の項 k^2 は無視した場合、以下の2次の微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} (R/Q)_n \frac{di_n^{ind}}{dt} &= \frac{1}{\omega_n} \frac{d^2 v_n}{dt^2} + \omega_n v_n + \frac{1}{Q_n} \frac{dv_n}{dt} \\ &\quad - \frac{\omega_n}{2} (k_{n-1,n}^* v_{n-1} + k_{n,n+1}^* v_{n+1}) \end{aligned} \quad (7-16)$$

この式をフーリエ変換により $\frac{d}{dt} = j\omega$ と置き換え、 $v_n = V_n e^{j\omega t}$ 、 $i_n^{ind} = I_n^{ind} e^{j\omega t}$ とする事により、以下の定常解を得る事ができる。

$$\begin{aligned} (R/Q)_n I_n^{ind} &= \left[j \left(\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega_n}{\omega} \right) + \frac{1}{Q_n} \right] V_n \\ &\quad + \frac{j\omega_n}{2\omega} (k_{n-1,n}^* V_{n-1} + k_{n,n+1}^* V_{n+1}) \end{aligned} \quad (7-17)$$

以上は良く教科書に載っている2次の項 k^2 は無視した式であるが、空洞列が一樣な場合には、以下のように変数変換すると、式が簡単になるので2次の項を省略せず計算を進める事ができる。

$$\begin{aligned} k_{n,n+1} &= k_{n,n+1}^* = k \\ \omega_n &= \omega_c \sqrt{1 - k^2} \\ Q_n &= Q_c \sqrt{1 - k^2} \\ (R/Q)_n &= \frac{(R/Q)_c}{\sqrt{1 - k^2}} \end{aligned} \quad (7-18)$$

式(7-9)を微分し、式(7-14)を使って、以上の関係式を使うと、 k の2次の項を無視しない式(7-16)は以下ようになる。

$$\begin{aligned} (R/Q)_c \frac{di_c^{ind}}{dt} &= \frac{1}{\omega_c} \frac{d^2 v_n}{dt^2} + \omega_c v_n + \frac{1}{Q_c} \frac{dv_n}{dt} \\ &\quad - k\omega_c \frac{v_{n-1} + v_{n+1}}{2} \end{aligned} \quad (7-19)$$

前と同様に $v_n = V_n e^{j\omega t}$ 、 $i_n^{ind} = I_n^{ind} e^{j\omega t}$ とすれば、

$$\begin{aligned} (R/Q)_c I_n^{ind} &= \left[j \left(\frac{\omega}{\omega_c} - \frac{\omega_c}{\omega} \right) + \frac{1}{Q_c} \right] V_n \\ &\quad + jk \frac{\omega_c}{\omega} \frac{V_{n-1} + V_{n+1}}{2} \end{aligned} \quad (7-20)$$

これに伝播定数 $\gamma = \alpha + j\beta$ の電磁波 $v_n = V_n e^{-\gamma z} = V_0 e^{j\omega t - \gamma z} = V_0 e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)}$ を代入し、さらに

$$\frac{1}{Q_c^*} = \frac{1}{Q_c} - (R/Q)_c \frac{I_n^{ind}}{V_n} = \frac{1}{Q_c} - (R/Q)_c G^{ind}$$

とすると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} & \left[j \left(\frac{\omega}{\omega_c} - \frac{\omega_c}{\omega} \right) + \frac{1}{Q_c^*} \right] V_n \\ & + jk \frac{\omega_c}{\omega} \frac{e^{-\gamma D} + e^{\gamma D}}{2} \\ & = \left[j \left(\frac{\omega}{\omega_c} - \frac{\omega_c}{\omega} \right) + \frac{1}{Q_c^*} \right] V_n \\ & + jk \frac{\omega_c}{\omega} (\cosh(\alpha D) \cos(\beta D) \\ & + j \sinh(\alpha D) \sin(\beta D)) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (7-21)$$

ここで式の実数と虚数はそれぞれ一致しないといけないので、以下の2つの関係式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{\omega_c^2} &= 1 - k \cosh(\alpha D) \cos(\beta D) \\ \frac{1}{Q_c^*} &= k \frac{\omega_c}{\omega} \sinh(\alpha D) \sin(\beta D) \end{aligned} \quad (7-22)$$

式(7-22)は2次の項などを省略していない分散関係の式である。ここでこれを解くと非常に複雑になってしまうため、ここまでは初めての近似として、 $\alpha D \ll 1$ とすれば、 $\sinh(\alpha D) = \alpha D$ 、 $\cosh(\alpha D) = 1$ なので、

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\omega_c} &= \sqrt{1 - k \cos(\beta D)} \\ \alpha D &= \frac{1}{Q_c^*} \frac{\omega}{\omega_c} \frac{1}{k \sin(\beta D)} \\ &= \frac{1}{Q_c^*} \frac{\sqrt{1 - k \cos(\beta D)}}{k \sin(\beta D)} \end{aligned} \quad (7-23)$$

が得られる。

この関係を $\beta D \leq \pi$ の基本ブリリアン帯について描くと Fig. 18 のようになる。この曲線を分散曲線 (dispersion curve) といい、 $\omega_c \sqrt{1-k}$ と $\omega_c \sqrt{1+k}$ の間の周波数を通過帯 (pass band) という。

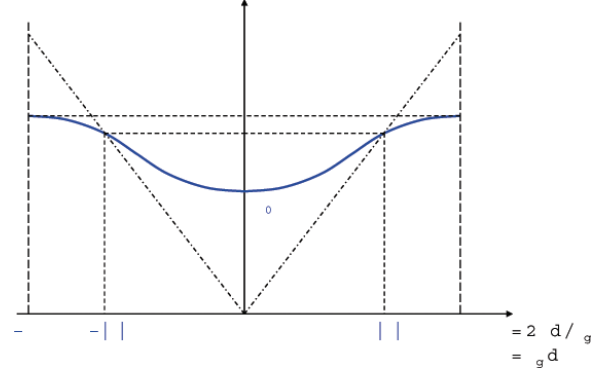


Fig. 18 無限周期構造の分散曲線 (基本ブリリアン帯)。D はセルの長さ、 λ_g は管内波長

また通過帯に属するひとつの周波数 ω にはセル間の位相差が $\pm \beta D$ の2つの波が存在する。

なお βD が $0, \pi/2, \pi$ の時をそれぞれ 0-モード、 $\pi/2$ -モード、 π -モードなどと呼ぶが、それらの共振周波数は以下のようになる。

$$\begin{aligned} f_0 &= f_c \sqrt{1-k} = \frac{1}{2\pi\sqrt{CL}} \frac{1}{\sqrt{1+k}} \\ f_{\pi/2} &= f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{CL}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \\ f_\pi &= f_c \sqrt{1+k} = \frac{1}{2\pi\sqrt{CL}} \frac{1}{\sqrt{1-k}} \end{aligned} \quad (7-24)$$

なお結合度 k と空洞周波数 f_c を 0 モード及び π モードの周波数から求めると、

$$\begin{aligned} k &= \frac{f_\pi^2 - f_0^2}{f_\pi^2 + f_0^2} \\ f_c &= \sqrt{\frac{2f_\pi^2 f_0^2}{f_\pi^2 + f_0^2}} \end{aligned} \quad (7-25)$$

となる。再確認だが、これらの式が成り立つのは $\alpha D \ll 1$ の時であり、 k^2 が無視できないような結合度が大きい場合でも成り立つ。

$\alpha D \ll 1$ と見なせないような損失の大きい媒体の場合は、式(7-22)から計算する必要がある。実際に私が以前開発した周期構造型減衰器で、等価回路設計と電磁波特性が異なる結果になった事がある。

また二重周期型(APS)空洞のように $k_{n,n+2}$ が無視できない場合についての式も導出できるが、複雑になるので、ここでは記述しない。

7.2.2. 結合度の計算(2セル結合空洞)

前述のように結合度の計算には βD が $0, \pi$ となる 0-モード、 π モードの共振周波数の計算をするのが良い。このためには2セル結合空洞の計算が必要である。Fig. 19 に示すような、ピルボックス空洞を2つ並べ、その2つの間に円孔をあけた形を考える。

同形のセルが2個何らかの方法で結合した連成振動系では、2セル間の振動が同位相(位相差=0)になるものと逆位相になるものの2つの基準モードが存在する。Fig. 19 の構成で、 TM_{010} モードの場合を例にとれば、2つの基準モードは Fig. 20 、Fig. 21 のようになる。

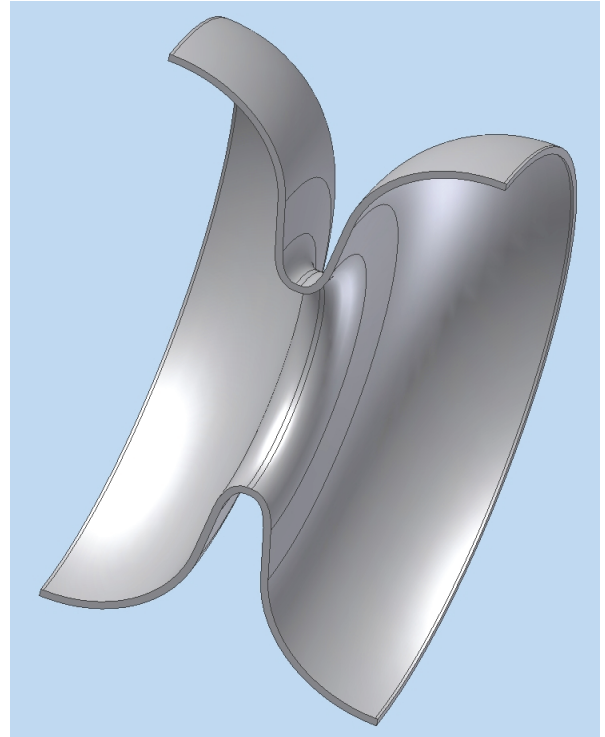


Fig. 19 円孔で結合した2ハーフセル超伝導空洞

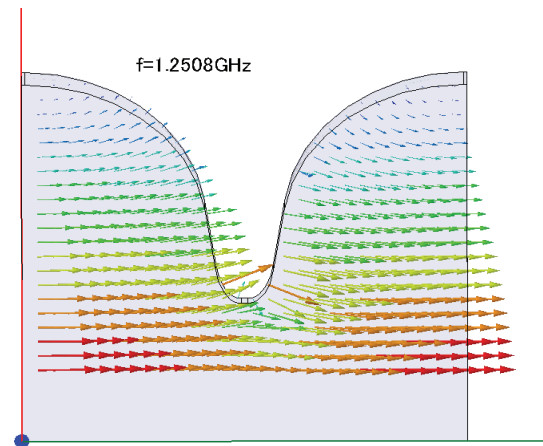


Fig. 20 2ハーフセル空洞の0モードでの電場分布

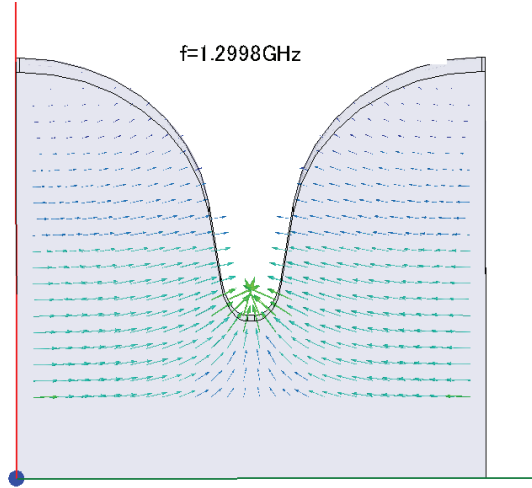


Fig. 21 2 ハーフセル空洞の
 π モードでの電場分布

この 2 セルピルボックス空洞の等価回路を式 (7-20) を使って行列で表すと以下ようになる。

$$\begin{bmatrix} j\left(\frac{\omega}{\omega_c} - \frac{\omega_c}{\omega}\right) + \frac{1}{Q_c^*} & jk\frac{\omega_c}{\omega} \\ jk\frac{\omega_c}{\omega} & j\left(\frac{\omega}{\omega_c} - \frac{\omega_c}{\omega}\right) + \frac{1}{Q_c^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7-26)$$

この式が、 $V_1 = V_2 = 0$ 以外の解を持つための条件は左辺の行列式が 0 になる事であり、以下が成り立つ必要がある。

$$j\left(\frac{\omega}{\omega_c} - \frac{\omega_c}{\omega}\right) + \frac{1}{Q_c^*} = \pm jk\frac{\omega_c}{\omega} \quad (7-27)$$

壁損失を 0 とした場合には、

$$\omega = \omega_c \sqrt{1 \pm k} \quad (7-28)$$

となる。これは 2 セル結合空洞の固有モードであり、式(7-24)と比較すると、それぞれ $\beta D = 0, \pi$ の 0・モードと π ・モードと対応している事が分かる。

7.2.3. 連成空洞の群速度

式(7-23)から群速度は

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{\omega_c^2}{2\omega} kD \sin(\beta D) \quad (7-29)$$

これから群速度が最大になるのはおよそ $\pi/2$ モードの時である事が分かる。

7.2.4. 入力空洞の等価回路

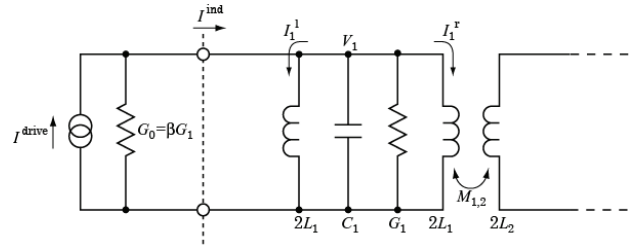


Fig. 22 入力空洞の等価回路

入力空洞は $G_0 = \beta G_1$ の伝送線路と結合している。図は入力空洞部の等価回路である。

$$\begin{aligned} I_1^{ind} &= I^{drive} - G_0 V_1 \\ &= I^{drive} - \frac{V_1}{(R/Q)_1 Q_{ext}} \end{aligned} \quad (7-30)$$

ここで外部 Q である Q_{ext} は以下のように定義される。

$$Q_{ext} = \frac{1}{(R/Q)_1 G_0} = \frac{Q_1}{\beta} \quad (7-31)$$

式(7-30)、式(7-17)を使うと入力空洞($n=1$)は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} (R/Q)_1 I^{drive} &= \left[j\left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega}\right) + \frac{1}{Q_L} \right] V_1 \\ &\quad + \frac{j\omega_1}{2\omega} (k_{12}^* V_2) \end{aligned} \quad (7-32)$$

ここで負荷 Q は以下の関係が成り立つ。

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_{ext}} \quad (7-33)$$

8. 高周波源

加速器における高周波源は、電子ビームを変調し、マイクロ波を増幅する事で、大電力高周波を得ている。本稿は高周波的な特性について限定したため、荷電粒子を含む系については触れない事にし、必要に応じて結果の式のみとした。

8.1. 電子銃

大電力高周波源である電子管では、電子銃が欠かせない。電子銃には、熱カソード DC 電子銃、フォトカソード RF 電子銃、熱カソード RF 電子銃などがあるが、ここでは熱カソード DC 電子銃いわゆる熱電子銃について簡単に説明する[6]。

熱電子銃は、カソードから熱電子放出により真空中に放出された電子を静電場によって取り出す電子銃である。静電場の代わりに高周波による電場を用いて電子を取り出すものを RF 電子銃という。熱電子放出とは、金属を高温に熱することで伝導体の自由電子がエネルギーを得て表面障壁を越えて真空中に放出された電子である。熱カソードから放出された電子の電流量は、アノード、カソード間に印加された電圧により変化する。

まず、電場が 0 付近では電子が有している初速度によりアノードへの到達電流が決定される。電子の初速度はカソード温度によって変化するので、この電流値はカソード温度により変化する。

徐々に電圧を上げていくと電流がカソードからの放出ではなくビーム自身が作る電場、すなわち空間中に存在する空間電荷によって制限される領域となる。この領域を空間電荷制限領域という。ここでは電流はほぼ電圧の 3/2 乗に比例し、3/2 乗則(three-halves law)が近似的に成り立つ。電流がカソードからの放出ではなく空間電荷により制限されるのでカソード温度に対して電流はほとんど 変化しない。

さらに電場を上げていくと、電場に対して電流は飽和する。この領域を電圧飽和領域という。この領域では電流は再び陰極からの放出電流により制限されているため、カソード温度により電流も変化する。

熱電子銃は空間電荷制限領域で運転されることが多い。陰極からの電流は陰極の温度や陰極自身の劣化などにより変化するので、長期にわたり一定に保つことは困難である。一方で、両極間の電圧を一定に保つことは容易である。この領域においては得られる電流はカソードからの放出電流には依存せずに、アノード・カソード間の電圧により決定されるので、結果的に安定した電流が容易に得られるのである。

空間電荷制限領域では、平行電極の場合、両極間の距離 d 、アノード電位 V_A (カソードがアース) とすると、熱カソードから取り出せる最大電流密度 J は、

$$J = 2.33 \times 10^{-6} \frac{V_A^{\frac{3}{2}}}{d^2} \quad [\text{A/m}^2] \quad (8-1)$$

となることが知られている。この式を 3/2 乗則あるいはチャイルド・ラングミュアの法則(Child-Langmuir law)という。ここで 3/2 乗則における比例係数

$$P = \frac{J}{V_A^{\frac{3}{2}}} \quad [\text{AV}^{2/3}] \quad (8-2)$$

をパービアンسと呼び、電子銃の性質を表す量として用いる。パービアンスの高い電子銃は低い極電圧で大きなビーム電流を取り出せる。

カソード面積を S とおくと、平行ビームのパービアンスは式(8-1)を変形して、

$$P = 2.33 \times 10^{-6} \frac{S}{d^2} \quad [\text{AV}^{2/3}] \quad (8-3)$$

のように表される。つまりパービアンスはカソード面積に比例し、かつアノード・カソード間隔の 2 乗に反比例する。

8.2. Inductive Output Tube (IOT) = Klystron

ERL 計画では、主線形加速器の高周波源として IOT が候補になっている。IOT は 3 極管の一種で、グリッド-カソード間に高周波をかけた後、直流電圧で加速して、高周波の増幅を行うものである。

IOT の利点は

- 効率が 70%程度と高い。
- 入出力特性が線形に近く、低電力制御に都合が良い。

逆に IOT の欠点は

- 大電力化が難しく、1 本当たりの電力はクライストロンに遠く及ばない。結果として単価が相当下がらないと、対電力価格ではクライストロンに劣る。
- 高周波になるとカソード-グリッド間の間隔が縮まり製造が困難になる。
- 増幅度が 20dB 程度しかないため、前段にもう一段の IOT が必要になる

8.3. クライストロン

クライストロン(klystron)は加速器用の RF 源としてはもっともよく用いられるもので、ハイパワーの RF が得られる[7]。クライストロンには直進形クライストロンと反射形クライストロンがある。加速器の RF 源として用いられるものは直進形クライストロンである。また、近年はマルチビームクライストロンの開発も進められている[8], [9]。

Fig. 23 に直進形クライストロンの原理を示す。Buncher cavity に種となる RF を入れてやることで電子銃から発生した電子ビームにモジュレーションをかけ、バンチングした電子ビームを Catcher cavity に打ち込む。このバンチングした電子ビームが作る電磁場を Catcher cavity に溜めて出力 RF として取り出す。

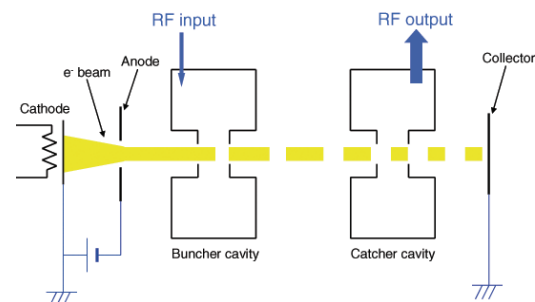


Fig. 23 直進形クライストロンの原理

直進型クライストロンの特徴を以下に示す。

- 効率が 高く 40%にも達するので大電力用に適する
- 空洞を多段にする事で、増幅度を大きくでき、60dB にも達する
- 入力 RF の周波数によって出力周波数が完全に決まるので、周波数安定度はきわめてよいが、周波数帯域は狭い

クライストロンのビーム電力や効率は電子ビームのパービアンスで決まっている。従って、ビーム一本当たりのパービアンスを下げるマルチビームクライストロンでは効率が高くできるため、開発が進められている[8]、[9]。

8.4. マグネトロン

マグネトロン(magnetron)は、磁電管とも呼ばれ、電場と磁場の相互作用によって振動をおこす RF 電子管である[4]。

Fig. 24 にマグネトロンの構造を示す。マグネトロンは図のように複数の RF 空洞を持った真空管であり、中心が陰極、外側の導体が陽極になっている。

空洞はそれぞれ同じ共振周波数をもつ空洞共振器になっており、隣り合う 2 つの空洞間の電磁場位相が 180 度(π [rad])になる π モードが誘起されるようになっている。

中心のヒータ温度を上げることによって熱電子が放出され 陰極に向かって加速されるが、軸方向に加えられた磁場によって軌道がまげられ、作用空間を回転運動する。ここで空洞共振器の空隙部を通過する際、そこに加わる高周波電場によって加速、減速の速度変調を受ける。回転運動を

している電子のうち、加速電場を受けたもの（電場からエネルギーを奪うもの）は、ここで加速されるので直ちに陽極に到達してしまい、作用空間にとどまることができない。したがって、作用空間には減速電場を受けたもの、すなわち、電場にエネルギーを与え、発振に役立つものばかりになる。作用空間にできる減速電場は、空洞共振器の数の $1/2$ であるので、作用空間の電子も減速電場と同じ数だけの塊になる。この塊を電子極と呼び、発振に役立つ電子は必ずいずれかの電子極に含まれる。

電子極は、陽極電圧と磁場とによってある周期で作用空間を回転しながら、同じ周期で振動する空洞共振器の高周波電場にエネルギーを与えるので、空洞共振器は振動が持続する。

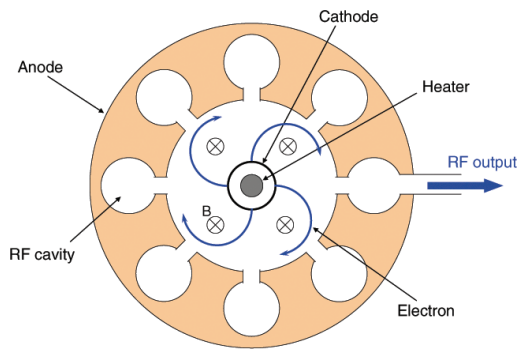


Fig. 24 マグネトロンの構造

マグネトロンの特徴を以下に示す。

- 小型、堅固であり、取り扱いも比較的容易である
- 発振効率が高く、70%にも達する
- 自励発振であり直進形クライストロンに比べると周波数の安定性が悪い

9. 加速管

ここでは、電子線形加速器でもっとも重要な部分である加速管について説明する。電子線形加速器の加速管は円筒型導波管に円盤を装荷した形のものが使われ、円盤装荷導波管(disc-loaded waveguide)と呼ばれる。円盤を装荷するのは、加速管のマイクロ波の位相速度を遅くして電子ビ

ームを加速できる速度($v_p \leq c$)にするためである。これを遅波構造(slow-wave structure)と呼ぶ[12]。

円盤装荷導波管には進行波管(travelling-wave tube)と定在波管(standing-wave tube)がある。超伝導空洞は通常は定在波管であるが、ここでは超伝導空洞のみに捉われず、この両方について説明し、加速管を電気回路的な等価回路に置き換えた解析方法について説明する。

9.1. シャントインピーダンス

さて、次に実際にシャントインピーダンスを計算する方法を示す。今、加速管の1周期ぶんの電磁場分布が分かっているとすると、これは、計算コードなどを使い知ることができる。ここで、得られる電磁場分布は当然共振周波数の周期で時間とともに変化するので複素数で表され

$$E(r, z) = E_R(r, z) + jE_I(r, z),$$

$$H(r, z) = H_R(r, z) + jH_I(r, z)$$

と表現される。また、電磁場が分かれば加速管表面電流が計算でき、その値と加速管の材質（普通は銅）の電気抵抗値・表皮深さから Q 値や1セルでの消費電力 P が導き出せる。

さきほど「加速に有効な」電場という表現をしたが、これは粒子が感じる電場であるので軸上の電場強度であり、時間的に移動する粒子の位置での電場強度である。1周期の間に粒子が感じる電位差を V とすると

$$V = \left| \int_0^{z(t)=D} E_z(0, z(t)) e^{j\omega t} dt \right| \quad (9-1)$$

と表される。ここで、 L は1セル分の長さ、 $z(t)$ は粒子の位置である。粒子が光速で通過すれば $z = ct$ なので、

$$V = \left| \int_0^D \frac{1}{c} E(0, z) e^{\frac{j\omega z}{c}} dz \right| \quad (9-2)$$

である。1セルあたりでの電位差 V と電力損失 P_D を用いるとシャントインピーダンスは

$$Z_s = \frac{V^2}{P_D D} = \frac{E_0^2}{P_D / D} = \frac{E_0^2}{P} \quad (9-3)$$

である。なお、 P は単位長さの電力損失、 $E_0 = V / D$ は軸上電場の平均である。これを R/Q で書くと以下ようになる。

$$R / Q = \frac{E_0^2}{\omega W} \quad (9-4)$$

9.1.1. Transit Time Factor

E_D は加速管の z 方向電場ピーク値 $E_z(r, z)$ を用いると

$$E_D = \frac{1}{D} \int_0^D E_z(0, z) dz \quad (9-5)$$

である。ここで、 E_D はピーク値を積分したので必ずしも粒子が感じる電場強度ではない。そこで、粒子が感じる電場の値に換算するためのファクターを考える。それが **transit time factor** T である。粒子が感じる平均電場が TE_D となるように T を計算すると

$$T = \frac{\left| \int_0^D \frac{1}{c} E(0, z) e^{\frac{j\omega z}{c}} dz \right|}{\int_0^D E_z(0, z) dz} \quad (9-6)$$

である。ただし、粒子の速度が光速 c であるとした。また、分子で絶対値を取っているのは最大加速電場を受ける位相で粒子が入射されたと仮定しているためである。

9.2. 進行波管

ERL とは逸れるが、常伝導の進行波管の構成を Fig. 25 に示す。進行波管は加速管の電子ビーム入射側から RF を投入して、加速管反対側まで流れた RF をダミーロードに捨てる。このように進

行波管は RF のエネルギーの流れが電子の進行方向と一致している。さらに、位相速度 v_p を電子の速度と一致させている。

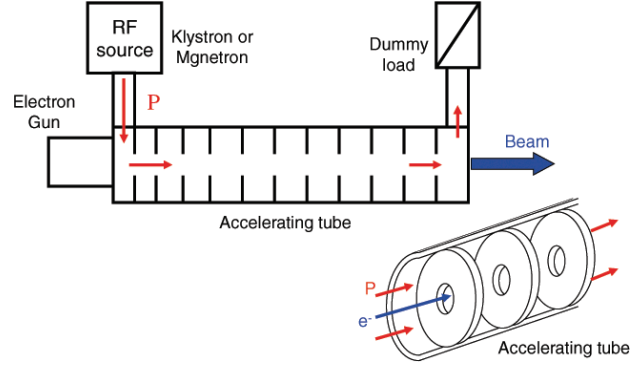


Fig. 25 進行波管

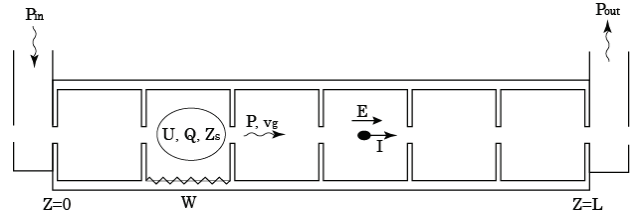


Fig. 26 進行波加速管の概念図

Fig. 26 は進行波加速管の概念図であり、以下のような関係が成り立っている。

$$P = v_g U \quad (9-7)$$

$$Q = \frac{\omega U}{W} \quad (9-8)$$

$$Z_s = \frac{E^2}{W} \quad (9-9)$$

$$\alpha = \frac{W}{2P} \quad (9-10)$$

$$\tau = \int_0^L \alpha dz \quad (9-11)$$

ここで式のパラメーターは以下のようになっている。

P	電力流
U	単位長さ当たりのエネルギー
v_g	群速度
Q	Q値
W	壁損失
Z_s	シャントインピーダンス
E	電界
α	減衰率
L	実質的な加速管の長さ
τ	全体の減衰係数

式から以下のような α と v_g の関係が得られる。

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{W}{2P} = \frac{W}{2v_g U} \\ &= \frac{\omega}{2Q} \frac{1}{v_g} \end{aligned} \quad (9-12)$$

式(9-12)を z で積分すると以下のような式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_0^z \alpha dz &= \frac{\omega}{2Q} \int_0^z \frac{dz}{v_g} \\ &= \frac{\omega}{2Q} t_z \\ &= \tau \frac{t_z}{t_f}, \end{aligned} \quad (9-13)$$

ここで t_f は加速管のフィリングタイムで、以下のようになっている。

$$\begin{aligned} t_f &= \int_0^L \frac{dz}{v_g} \\ &= \frac{2Q}{\omega} \int_0^L \alpha dz \\ &= \frac{2Q\tau}{\omega}. \end{aligned} \quad (9-14)$$

加速管内での高周波の損失は壁損失と、ビームローディングである。従って、高周波の減衰は以下のように表せる。

$$\frac{dP}{dz} = -W - IE = -2\alpha P - IE \quad (9-15)$$

ここで I は平均的な電流量である。

電力の全微分を以下のように偏微分で置き換えると、

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dz} &= \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial t} \frac{dt_z}{dz} \\ &= \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial P}{\partial t} \end{aligned} \quad (9-16)$$

式(9-15)は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial P}{\partial t} &= -W - IE \\ &= -2\alpha P - IE \end{aligned} \quad (9-17)$$

ビーム電流が無いと、電力損失は以下のようになる。

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -W = -2\alpha P \quad (9-18)$$

$$\begin{aligned} \frac{P}{P_{in}} &= e^{-2 \int_0^z \alpha dz} \\ \frac{P_{out}}{P_{in}} &= e^{-2 \int_0^L \alpha dz} = e^{-2\tau} \end{aligned} \quad (9-19)$$

ここで P_{in} は高周波の加速管への入力電力であり、 P_{out} は加速管出口からの出力電力である。

電界一定(Constant Gradient(CG))という条件で計算を行うと式(9-10)から W は一定である。従って式(9-18)を以下のように書き換える事ができる。

$$\frac{\partial P_{CG}}{\partial z} = -W_{CG} = -2\alpha_{CG} P_{CG} = const \quad (9-20)$$

これから P_{CG} が以下のように求まる。

$$P_{CG} = P_{in} - W_{CG}z \quad (9-21)$$

式(9-19)と式(9-21)から、加速管出口での電力は

$$\begin{aligned} P_{CG}(L) &= P_{out} = P_{in}e^{-2\tau} = P_{in} - W_{CG}L \\ W_{CG} &= P_{in} \frac{1 - e^{-2\tau}}{L} \end{aligned} \quad (9-22)$$

これから減衰率は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \alpha_{CG} &= \frac{W_{CG}}{2P_{CG}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\frac{1-e^{-2\tau}}{L}}{1 - \frac{1-e^{-2\tau}}{L}z} \end{aligned} \quad (9-23)$$

ビームローディングがある場合でも、減衰率の関数形は同じで $\alpha = \alpha_{CG}$ である。

式(9-10)、式(9-11)から電力流と壁損失の電界との関係は以下のようになっている。

$$\begin{aligned} W &= \frac{E^2}{Z_s} \\ P &= \frac{E^2}{2\alpha_{CG}Z_s} \end{aligned} \quad (9-24)$$

これを式(9-17)に代入すると電界の満たす式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{E^2}{2\alpha_{CG}Z_s} \right) = -\frac{E^2}{Z_s} - IE \quad (9-25)$$

これを展開すると

$$\frac{\partial E}{\partial z} + \alpha_{CG}E \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2\alpha_{CG}} \right) + 1 \right\} = -\alpha_{CG}Z_s I \quad (9-26)$$

式(9-23)を使えば以下が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2\alpha_{CG}} \right) = -1 \quad (9-27)$$

従って式(9-26)を書き換えれば

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -\alpha_{CG}Z_s I \quad (9-28)$$

これを積分すれば、電界は以下ようになる

$$E = E_0 - Z_s I \int_0^z \alpha_{CG} dz \quad (9-29)$$

ここで

$$E_0 = \sqrt{Z_s W(0)} = \sqrt{P_{in} Z_s \frac{1 - e^{-2\tau}}{L}} \quad (9-30)$$

これから

$$E = E_0 - Z_s I \tau \frac{t_z}{t_f} \quad (9-31)$$

加速電界の長さ L の総和は積分すると得られ以下ようになる。

$$E = E_0 - \frac{Z_s I}{2} \log \left(1 - \frac{1 - e^{-2\tau}}{L} z \right) \quad (9-32)$$

$$V = E_0 L - \frac{Z_s I L}{2} \left(1 - \frac{2\tau e^{-2\tau}}{1 - e^{-2\tau}} \right) \quad (9-33)$$

超伝導の連成空洞の場合では、 Q が非常に大きい
ため、減衰定数 τ を大きくするためには、群速度
 v_g を小さくする必要がある。結果結合度を小さく
せねばならず、空洞の形状精度の面からも、ウェ
ークフィールドの面からも不可能となる。

超伝導で進行波管が可能だとすれば還流型の進
行波管だろう。

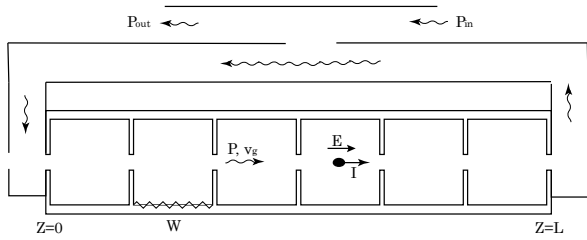


Fig. 27 還流型進行波管

Fig. 27 は還流型進行波管の概念図である。還流型にする事で、結合度は大きいままで、全体としては高いQの空洞に見せる事が可能になる。例えば、超伝導加速空洞の電界が 20MV/m で $R/Q=1000\ \Omega$ の場合、必要な蓄積エネルギーは、

$$W = \frac{E^2}{\omega(R/Q)} \sim 98 [J/m] \text{ であり、例えば } \pi/2 \text{ モードの進行波管で空洞間の結合度が ERL 用の空洞と同じ } 4\% \text{ 程度だとすると、}$$

$$v_g/c = \frac{\omega_c^2}{2c\omega} kD \sin(\beta D) \sim 0.03 \text{ である。これらから、還流電力は } P = Wv_g \sim 900 [MW] \text{ となってしまふ。}$$

しかも超伝導で還流型にするには、還流部分まで超伝導にする必要があり、やはり難しい。

9.3. 定在波管

定在波管の構成をFig. 28 に示す。定在波管は供給した RF がすべて加速管の中で消費され、進行波管のように RF を捨てることはしない。定在波管は導波管から見れば6節で示した空洞として見える。

加速管の中では、エネルギー束が両端の壁で反射され、進行波と後退波が入り混じった状態になり、定在波を作っている。常伝導の定在波管では位相が $\pi/2$ だけ進む $\pi/2$ モードが群速度最大であり、電磁場が安定になるため良く使われる。しかし $\pi/2$ モードでは電界が小さい空洞が1つおきにできてしまうため、シャントインピーダンスが低い。これを解消するため APS 型や DAW 型、サイドカップル型などが開発された。

なおシャントインピーダンスがもっとも高くなるのは π モードである。しかし、 π モードは群速度が 0 である完全な定在波であるため、電磁場

が不安定である。従って π モードでは、常伝導の加速管では空洞内の損失があるため長くすることはできず、数セルが限界である。超伝導加速の場合は、壁損失もほぼ 0 で、ビームローディングも小さいため、 π モードの連成空洞も可能であり、実際 ILC や ERL 計画では 9 セルの π モードの定在波空洞が採用されている。

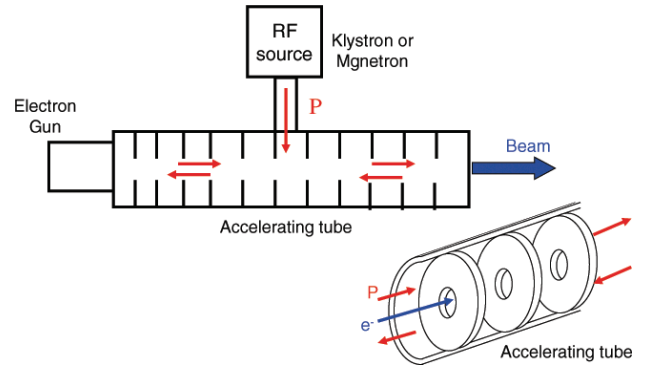


Fig. 28 定在波管

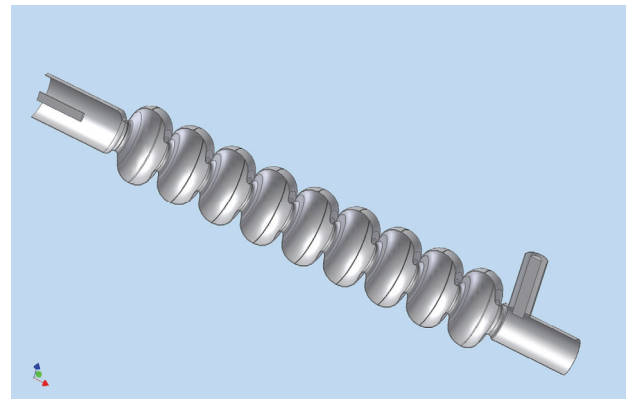


Fig. 29 ERL 用の超伝導空洞

超伝導では $\alpha D \ll 1$ なので、 π モードの群速度を検討するためには式(7-23)と式(7-29)から出発すれば良い。

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{\omega_c^2}{2\omega} kD \sin(\beta D) = \frac{\omega_c}{2\alpha Q_c^*}$$

つまり π モードというのは、損失がある事により、 βD が π から微小にずれて、エネルギー流が生まれるという事を意味していると考えられる。

参考文献

- [1] 亀井亨、木原元央、「加速器科学」丸善株式会社
- [2] S. Y. Lee 、“Accelerator Physics Second Edition”、World Scientific Pub. Co. Inc. 2004
- [3] 小林仁、「電子線形加速器」、OHO' 88 高エネルギー加速器セミナー、(財) 高エネルギー加速器科学研究奨励会 1988
- [4] 中島将光、「マイクロ波工学」、森北出版株式会社
- [5] 鈴木清、「マイクロ波回路の基礎」、啓学出版株式会社
- [6] 栗木雅夫、「電子線形加速器の基礎 電子源」、OHO' 02 高エネルギー加速器セミナー、(財) 高エネルギー加速器科学研究奨励会 2002
- [7] 道園真一郎、「電子線形加速器の基礎 高周波源」、OHO' 02 高エネルギー加速器セミナー、(財) 高エネルギー加速器科学研究奨励会 2002
- [8] A. Larionov, V. Teryaev, S. Matsumoto, Y.H. Chin, “Design of Multi-Beam Klystron in X-Band”、 Proceeding of the 27th Linear Accelerator Meeting in Japan
- [9] A.Yano, S. Miyake, TOSHIBA ELCTRON TUBES & DEVICES Co., Ltd., Ohtawa-shi, Japan, S. Choroba, DESY, Hamburg, Germany, “DEVELOPMENT OF TOSHIBA L-BAND MULTI-BEAM KLYSTRON FOR EUROPEAN XFEL PROJECT”、 Proc. of Particle Accelerator Conference '07, June 25 - 29, 2007, Albuquerque, New Mexico
- [10] 後藤憲一、山崎修一郎、「電磁気学演習」、共立出版株式会社
- [11] 山口誠哉、「電子線形加速器の基礎 加速管・立体回路」、OHO' 02 高エネルギー加速器セミナー、(財) 高エネルギー加速器科学研究奨励会 2002
- [12] 高田耕治、「加速器の基礎理念」、高エネルギー加速器研究機構 加速器研究施設、2002 年 7 月 8 日改訂
- [13] 高田耕治、「高周波加速の基礎」、高エネルギー加速器研究機構 加速器研究施設、2005 年 1 月 12 日改訂
- [14] 肥後寿泰、「ディスクロード型加速構造のカプラーマッチングに関する簡単な等価回路解析」、JLC-note、No.42、1993 年 2 月 9 日
- [15] D. E. Nagle、E. A. Knapp、B. C. Knapp、“Coupled Resonator Model for Standing Wave Accelerator Tanks”、The Review of Scientific Instruments Volume 38. Number 11 November 1967 pp.1583-1587
- [16] E. A. Knapp、B. C. Knapp、J. M. Potter、“ Standing Wave High Energy Linear Accelerator Structures”、The Review of Scientific Instruments Volume 39. Number 7 July 1968 pp.979-991
- [17] 鍛冶幸悦、岡田新之助、「電気回路(1)」、コロナ社
- [18] G. Wendt, in Handbuch der Physik, ed. S. Flügge, Vol. 16 (Springer, Berlin, 1958), p.140.
- [19] 夏井拓也、「可搬型非破壊検査用 X バンドライナックの実証」、修士論文、東京大学大学院工学系研究科、2008
- [20] 古田安彦、「マイクロ波アンジュレータの開発研究」、修士論文、東京理科大学大学院理工学研究科物理専攻、2007

付録 A

1. スカラーヘルムホルツ方程式の基本解

$$(\Delta + k^2)G = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1-1)$$

(3次元)

$$G = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$$

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \quad (1-2)$$

(2次元)

$$G = -\frac{jH_0^{(2)}(kR)}{4} = \frac{Y_0(kR) - jJ_0(kR)}{4} \quad (1-3)$$

ここで ∇G を求める

$$\nabla G(kR) = G'(kR) \cdot k \cdot \nabla R = G'(kR) \cdot k \frac{\mathbf{R}}{R} \quad (1-4)$$

(3次元)

$$\nabla G = G' \cdot \left(-\frac{1}{R} - jk \right) \frac{\mathbf{R}}{R} \quad (1-5)$$

(2次元)

$$\nabla G = -\frac{jH_1^{(2)}(kR)}{4} \cdot k \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{Y_1(kR) - jJ_1(kR)}{4} \cdot k \frac{\mathbf{R}}{R} \quad (1-6)$$

2. 基本解

スカラーヘルムホルツ方程式の基本解

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

$$(\Delta + \kappa^2)G = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2-1)$$

↓ベクトルヘルムホルツ方程式へ

$$\mathbf{u}_e = G\mathbf{e}$$

$$(\Delta + k^2)\mathbf{u}_e = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\mathbf{e} \quad (2-2)$$

($\mathbf{e}$ は任意のベクトル)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{u}_e) &= \nabla \cdot (G\mathbf{e}) \\ &= G \cdot \nabla \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot \nabla G \\ &= \mathbf{e} \cdot \nabla G \end{aligned} \quad (2-3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_r &= \nabla \times (G\mathbf{e}) (= \nabla \times (\mathbf{u}_e)) \\ &= (\nabla G) \times \mathbf{e} + G(\nabla \times \mathbf{e}) \\ &= (\nabla G) \times \mathbf{e} \end{aligned} \quad (2-4)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u}_r &= \nabla \cdot \nabla \times (G\mathbf{e}) = 0 \\ \nabla \times \mathbf{u}_r &= \nabla \times \nabla \times (G\mathbf{e}) \\ &= \nabla \nabla \cdot (G\mathbf{e}) - \Delta(G\mathbf{e}) \\ &= \nabla \nabla \cdot (G\mathbf{e}) - (\Delta G)\mathbf{e} \\ &= \nabla \nabla \cdot (G\mathbf{e}) + (k^2 G + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'))\mathbf{e} \end{aligned} \quad (2-5)$$

$$\Delta \mathbf{u}_r - \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}_r + \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}_r = 0 \quad (2-6)$$

↓

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_r + \nabla \times \nabla \nabla \cdot (G\mathbf{e}) + k^2 \nabla \times (G\mathbf{e}) \\ + \nabla \times (\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\mathbf{e}) = 0 \end{aligned} \quad (2-7)$$

$$(\Delta + k^2)\mathbf{u}_r = -\nabla \times (\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\mathbf{e}) \quad (2-8)$$

3. 体積積分→面積分

$\int_V (\mathbf{u} \Delta \mathbf{A} - \mathbf{A} \Delta \mathbf{u}) dV$ を面積分に変換するため

$$= \int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{\psi} dV) = \int_S \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{n} dS \quad \text{となる } \boldsymbol{\psi} \text{ を求める}$$

ここで $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b}$ を利用して

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \nabla \times \mathbf{A}) &= \nabla \times \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{u} - \mathbf{u} \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} \\ &= \nabla \times \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{u} - \mathbf{u} \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{u} \Delta \mathbf{A} \end{aligned} \quad (3-1)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{u}) = \nabla \times \mathbf{u} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{A} \Delta \mathbf{u} \quad (3-2)$$

さらに $\nabla \nabla \cdot$ の項を消去するため、
 $\nabla \cdot (\phi \cdot \mathbf{a}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla \phi$ を利用して

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{A}) = \nabla \cdot \mathbf{A} \cdot \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (3-3)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \nabla \cdot \mathbf{u}) = \nabla \cdot \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (3-4)$$

これから $\boldsymbol{\psi} = (3-1) + (3-3) - (3-2) - (3-4)$ である
 従って

$$\begin{aligned} & \int_V (\mathbf{u} \Delta \mathbf{A} - \mathbf{A} \Delta \mathbf{u}) dV \\ &= \int_S (\mathbf{u} \times \nabla \times \mathbf{A} + \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{u} - \mathbf{A} \nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (3-5)$$

4. ベクトルヘルムホルツ方程式の積分形

$$\begin{aligned} & \int_V (\mathbf{u} (\Delta + k^2) \mathbf{A} - \mathbf{A} (\Delta + k^2) \mathbf{u}) \\ &= \int_V (\mathbf{u} \Delta \mathbf{A} - \mathbf{A} \Delta \mathbf{u}) dV \end{aligned} \quad (4-1)$$

(1) $\mathbf{u} = (G, G, G)$ として $\mathbf{A}$ の各成分 A_i にスカラーヘルムホルツ方程式として解く

$$\begin{aligned} & \int_V (G (\Delta + \kappa^2) A_i - A_i (\Delta + \kappa^2) G) dV \\ &= \int_S \left(G \frac{\partial A_i}{\partial n} - A_i \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS \end{aligned} \quad (4-2)$$

$$\begin{aligned} c A_i &= - \int_V G (\Delta + k^2) A_i dV \\ &+ \int_S \left(G \frac{\partial A_i}{\partial n} - A_i \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS \end{aligned} \quad (4-3)$$

$$\left(c = \int_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV \right) \quad (4-4)$$

(2) $\mathbf{u} = \mathbf{u}_e$ として $\mathbf{A}$ を求める

$$\begin{aligned} & \int_V (\mathbf{u}_e (\Delta + k^2) \mathbf{A} - \mathbf{A} (\Delta + k^2) \mathbf{u}_e) dV \\ &= \int_S \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (4-5)$$

$$\begin{aligned} c \mathbf{A} \cdot \mathbf{e} &= - \int_V \mathbf{u}_e (\Delta + k^2) \mathbf{A} dV \\ &+ \int_S (\mathbf{u}_e \times \nabla \times \mathbf{A} + \mathbf{u}_e \nabla \cdot \mathbf{A} \\ &- \mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{u}_e - \mathbf{A} \nabla \cdot \mathbf{u}_e) \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (4-6)$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}_e = G \mathbf{e} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_e = \mathbf{e} \cdot \nabla G \\ \nabla \times \mathbf{u}_e = (\nabla G) \times \mathbf{e} \end{cases} \quad (4-7)$$

$$\begin{aligned} c \mathbf{A} \cdot \mathbf{e} &= - \int_V \mathbf{u}_e (\Delta + \kappa^2) \mathbf{A} dV \\ &+ \int_S \left[((\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{n}) \cdot G \mathbf{e} + G (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{e} \right. \\ &- (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) \cdot ((\nabla G) \times \mathbf{e}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{e} \cdot \nabla G) \left. \right] dS \end{aligned} \quad (4-8)$$

$$((\mathbf{n} \times \mathbf{A}) \times \nabla G) \cdot \mathbf{e}$$

$$\begin{aligned} c \mathbf{A} \cdot \mathbf{e} &= - \int_V G \mathbf{e} \cdot (\Delta + \kappa^2) \mathbf{A} dV \\ &+ \int_S \left[((\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{n} + \mathbf{n} \nabla \cdot \mathbf{A}) G \right. \\ &- (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) \times \nabla G - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) \nabla G \left. \right] \cdot \mathbf{e} dS \end{aligned} \quad (4-9)$$

(3) $\mathbf{u} = \mathbf{u}_r$ として $\nabla \times \mathbf{A}$ を求める

$$\begin{aligned} & \int_V (\mathbf{u}_r (\Delta + k^2) \mathbf{A} - \mathbf{A} (\Delta + k^2) \mathbf{u}_r) dV \\ &= \int_S \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (4-10)$$

$$\nabla \times \mathbf{u}_e = \nabla \times (G \mathbf{e}) \quad - \nabla \times (\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{e})$$

ここで左辺を整理するため

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b} \quad (4-11)$$

を利用して

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot (A \times (\delta(r-r')e)) \\ &= \delta(r-r')e \cdot \nabla \times A - A \nabla \times (\delta(r-r')e) \end{aligned} \quad (4-12)$$

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot (u_e \times ((\Delta + k^2)A)) \\ &= \nabla \times u_e \cdot (\Delta + k^2)A - u_e \cdot (\nabla \times (\Delta + k^2)A) \end{aligned} \quad (4-13)$$

また

$$\begin{aligned} \nabla \times \Delta A &= \nabla \times (\nabla \nabla \cdot - \nabla \times \nabla \times) A \\ &= -\nabla \times \nabla \times \nabla \times A \\ &= (\Delta - \nabla \nabla \cdot) \nabla \times A \\ &= \Delta \nabla \times A \end{aligned} \quad (4-14)$$

より

$$\nabla \times (\Delta + k^2)A = (\Delta + k^2) \nabla \times A \quad (4-15)$$

これらを代入して

$$\begin{aligned} & \int_V \delta(r-r')e \cdot \nabla \times A dV \\ &= -\int_V u_e \cdot ((\Delta + k^2) \nabla \times A) dV \\ &+ \int_S [\psi + A \times (\delta(r-r')e) \\ &- u_e \times ((\Delta + k^2)A)] \cdot n dS \end{aligned} \quad (4-16)$$

$$\begin{aligned} & c(\nabla \times A) \cdot e \\ &= -\int_V u_e \cdot ((\Delta + k^2) \nabla \times A) dV \\ &+ \int_S [((\nabla G) \times e) \times \nabla \times A + ((\nabla G) \times e) \nabla \cdot A \\ &- A \times (\nabla(e \cdot \nabla G) + (k^2 G + \delta(r-r'))e) \\ &+ A \times (\delta(r-r')e) - Ge \times ((\Delta + k^2)A)] \cdot n dS \end{aligned} \quad (4-17)$$

表面積分の項を整理するため
公式

$$\nabla \times \phi A = \nabla \phi \times A + \phi \nabla \times A \quad (4-18)$$

を利用して

$\phi = e \cdot \nabla G$ とすれば

$$\begin{aligned} & A \times \nabla(e \cdot \nabla G) \\ &= (e \cdot \nabla G) \nabla \times A - \nabla \times ((e \cdot \nabla G) \cdot A) \\ & \int_S [A \times \nabla(e \cdot \nabla G)] \cdot n dS \\ &= \int_S [(e \cdot \nabla G) \nabla \times A] \cdot n dS \\ &- \int_V \nabla \cdot (\nabla \times (e \cdot \nabla G) \cdot A) dV \end{aligned} \quad (4-19)$$

これを代入すると

$$\begin{aligned} & c(\nabla \times A) \cdot e \\ &= -\int_V u_e \cdot ((\Delta + k^2) \nabla \times A) dV \\ &+ \int_S [((\nabla G) \times e) \times \nabla \times A + ((\nabla G) \times e) \nabla \cdot A \\ &- (e \cdot \nabla G) \nabla \times A - Ge \times (\nabla \nabla \cdot - \nabla \times \nabla \times) A] \cdot n dS \end{aligned} \quad (4-20)$$

e で整理すると

$$\begin{aligned} & c(\nabla \times A) \cdot e \\ &= -\int_V Ge \cdot ((\Delta + k^2) \nabla \times A) dV \\ &+ \int_S [\{(\nabla \times \nabla \times - \nabla \nabla \cdot) A\} \times n \cdot G - (\nabla G \times n) \nabla \cdot A \\ &- (n \times \nabla \times A) \times \nabla G - ((\nabla \times A) \cdot n) \nabla G] \cdot e dS \end{aligned} \quad (4-21)$$

これは $\nabla \cdot A = 0$ の時 $\nabla \times A$ に対して(2)の結果と一致した。

5. Maxwell eq.

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} = -j\omega\mu H \quad (5-1)$$

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} = J_0 + (\sigma + j\epsilon\omega)E \quad (5-2)$$

$$\begin{aligned} \Delta E &= \nabla \nabla \cdot E - \nabla \times \nabla \times E \\ &= \nabla \frac{\rho}{\epsilon} + j\omega\mu J_0 + j\omega\mu(\sigma + j\epsilon\omega)E \end{aligned} \quad (5-3)$$

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{H} &= \nabla \nabla \cdot \mathbf{H} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} \\ &= -\nabla \times \mathbf{J}_0 + (\sigma + j\epsilon\omega) j\omega\mu \mathbf{H}\end{aligned}\quad (5-4)$$

$$k^2 = -(\sigma + j\epsilon\omega) j\omega\mu = \omega\mu(\omega\epsilon - j\sigma) \quad (5-5)$$

$$(\Delta + k^2) \mathbf{E} = \nabla \frac{\sigma}{\epsilon} + j\omega\mu \mathbf{J}_0 \quad (5-6)$$

$$(\Delta + k^2) \mathbf{H} = -\nabla \times \mathbf{J}_0 \quad (5-7)$$

これらの積分型は、式(4-9)の $\mathbf{A} = \mathbf{E}$ として $\mathbf{e}$ は自由に選べることから

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\int_V G \left(\nabla \frac{\rho}{\epsilon} + j\omega\mu \mathbf{J}_0 \right) dV \\ &\quad + \int_S \left[-jkz \mathbf{H} \times \mathbf{n} - (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \nabla G \right. \\ &\quad \left. - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \nabla G \right] dS\end{aligned}\quad (5-8)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= -\int_V G (-\nabla \times \mathbf{J}_0) dV \\ &\quad + \int_S \left[\left(\mathbf{J}_0 + j\frac{k}{z} \mathbf{E} \right) \times \mathbf{n} - (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \times \nabla G \right. \\ &\quad \left. - (\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}) \nabla G \right] dS\end{aligned}\quad (5-9)$$