

円形加速器の概略と
単粒子力学の基礎

1. 放射光源からの光	1
1. 導入.....	1
2. 蓄積リングから光を取り出す.....	1
2.1. 偏向電磁石.....	1
2.2. ウィグラー.....	2
2.3. 多極ウィグラー.....	3
2.4. アンジュレータ.....	5
2.5. 真空封止型短周期アンジュレータ.....	5
3. 光の波長域とパラメータ.....	7
3.1. 光束密度と全光束.....	8
3.2. 実効的な光束密度.....	8
3.3. 位相空間.....	9
3.4. 輝度.....	10
3.5. 回折限界.....	10
3.6. コヒーレントな部分.....	10
3.7. パルス幅とパルス間隔.....	11
3.8. 縦方向コヒーレント長と時間コヒーレンス.....	12
3.9. 可変偏光アンジュレータ.....	12
3.10. 光束密度の表式.....	13
2. 放射光源の概略	14
1. 入射器と蓄積リング.....	14
1.1. KEK つくばの電子陽電子加速器.....	14
1.2. 電子蓄積リングの構成.....	14
2. 入射器の構成.....	15
2.1. 入射器全体の構成.....	15
2.2. 電子銃.....	16
2.3. 粒子の発散角、ソレノイドによる集束.....	17
2.4. RF.....	17
2.5. バンチャー.....	18
2.6. LINAC パルスの時間構造.....	18
2.7. RF 源、立体回路.....	19
2.8. 空間電荷効果、断熱減衰.....	20
2.9. 加速管の数と加速勾配、ビームパワー.....	21
2.10. 振り分け偏向電磁石、BT.....	22
3. PF リングの構成.....	23
3.1. 全体の概略.....	23
3.2. ビームライン.....	23
3.3. チャンネル.....	24
3.4. 蓄積リングに必要な要素.....	24
3.5. 横方向と縦方向.....	25

3.6.	リングの DC 電磁石	26
3.7.	集束力、中心軌道、軌道周りの微小振動	26
3.8.	ヒルの方程式	27
3.9.	4 極電磁石による集束力	28
3.10.	強集束と位相安定性	28
3.11.	エネルギー収差	29
3.12.	振動数と共鳴振動	30
3.13.	ダイナミックアパーチャ、物理アパーチャ	32
3.14.	ビーム寿命	33
3.15.	色収差の補正	33
3.16.	入射	34
3.17.	放射減衰と放射励起	36
3.18.	RF 加速空洞	37
3.19.	位相安定性	40
3.20.	真空ダクト	43
3.21.	ビーム診断系	47
3.22.	フィードバックシステム	50
3.23.	制御系、安全系、タイミング系	51
3.24.	電気、水、圧空、空調	54
3.25.	シンクロトロン放射積分	57
3.26.	ビームサイズと色消しラティス	58
3.27.	放射光源の歴史と世代	59

3. ビーム力学の基礎.....61

1.	運動方程式とその解	61
1.1.	運動方程式	61
1.2.	電磁石の磁場	62
1.2.1.	2 次元の場合	62
1.2.2.	電磁石のギャップと磁場の強さ	63
1.3.	フロケーの定理と解の性質	64
1.3.1.	フロケーの定理	64
1.3.2.	方程式の解	65
1.3.3.	周期構造と波数空間	67
1.3.4.	位相空間の面積不変	68
1.4.	転送行列	69
1.4.1.	ドリフトスペース	69
1.4.2.	偏向電磁石	70
1.4.3.	集束型 4 極電磁石	70
1.4.4.	発散型 4 極電磁石	71
1.4.5.	矩形偏向電磁石	71
1.5.	ツイスパラメータとその性質	72
1.5.1.	ツイスパラメータの転送	72
1.5.2.	クーラン・シュナイダー不変量	74
1.5.3.	規格化運動量と規格化座標	75
1.5.4.	位相空間内の楕円の転送	75
1.6.	色収差と 6 極による補正	76

1.7.	分散による軌道長のずれ.....	77
1.8.	誤差キックによる軌道のずれ.....	78
1.8.1.	数学的準備.....	78
1.8.2.	CODの導出.....	79
2.	縦方向の粒子の運動.....	80
2.1.	周回時間と運動量偏差.....	80
2.2.	縦方向の振動.....	80
2.2.1.	微小振動としての解.....	81
2.2.2.	微小でない場合への解.....	81
3.	エミッタンスとバンチ長.....	83
3.1.	放射減衰.....	83
3.2.	放射励起.....	84
3.3.	最小エミッタンス条件.....	85
3.3.1.	H関数の積分の計算.....	86
3.3.2.	理論最小エミッタンスの場合.....	86
3.3.3.	DBAの場合.....	87
4.	付録.....	89
1.	ソレノイドとスキュー4極.....	89
1.1.	ソレノイドの磁場.....	89
1.1.1.	線形成分の簡単な導出.....	89
1.1.2.	高次を含むソレノイドの磁場.....	89
1.1.3.	3次元磁場に対する粒子の運動方程式.....	91
1.1.4.	ソレノイドに対する運動方程式.....	91
1.2.	転送行列の導出.....	91
1.2.1.	skew 4極の転送行列.....	92
1.2.2.	ソレノイドの転送行列.....	93
1.2.3.	ソレノイドの途中の座標.....	94
1.2.4.	ソレノイドの端の効果.....	94
2.	振幅依存チューンシフト.....	96
2.1.	調和振動子の運動方程式.....	96
2.2.	作用変数と角変数の導入.....	96
2.3.	調和振動子に対する摂動論.....	96
2.4.	2次と3次の項がある場合のハミルトニアン.....	98
2.5.	3次の場合の摂動による解.....	98
2.6.	2次の場合の摂動による解.....	98
2.7.	微分方程式を直に解く.....	99
2.7.1.	2次の場合.....	99
2.7.2.	3次の場合.....	100
2.8.	実際の加速器の場合のハミルトニアン.....	100
2.9.	実際の加速器の場合の摂動.....	101
2.10.	8極の振幅依存チューンシフト.....	102
2.11.	6極によるチューンシフト.....	102

3. 挿入光源の影響と転送行列	104
3.1. 水平偏光の場合	104
3.2. 一般化した場合	106
3.3. 一般化した場合の転送行列	107
3.4. 水平偏光の場合の非線形チューンシフト	108
3.5. トラッキングを行う場合の注意	108
4. 減衰のある強制振動の基礎	110
4.1. ビルボックス空洞の固有モード	110
4.1.1. 弦の振動	110
4.1.2. 電磁場の方程式と境界条件	110
4.1.3. TM モードの解	111
4.1.4. Q、U、P	111
4.1.5. TM モードの一般解	112
4.1.6. TE モードの一般解	112
4.2. 等価回路の導入	113
4.3. 減衰のある強制振動	113
4.3.1. 強制力のない減衰振動	113
4.3.2. 減衰のない強制振動	114
4.3.3. 減衰を伴う強制振動	115
4.3.4. 電流で駆動される LCR 共振回路	116
4.4. 反射と整合	118
4.4.1. 伝送線	118
4.4.2. 反射	119
4.4.3. 整合、開放と短絡	120
4.5. 等価回路による RF の取り扱い	120
4.6. ビーム負荷の補正	122
あとがき	125

1. 放射光源からの光

1. 導入

ビーム物理学的な内容に入る前に、導入として光源からの光と光源となる蓄積リングについて概略を述べる。この最初の章では、放射光源からの光について概略を述べる。現在では放射光源リングの技術はほぼ完成されたものであり、建設されたばかりの最新蓄積リングと同程度の性能の加速器の建設も、さほど困難なものではない。それは、放射光源に要求されてきたものが、どちらかと言えばある一面に関して突出した性能ではなく、どんな分野の誰でも容易に使用できる安定性と汎用性であったからかも知れない。まずこの章では、放射光の発生源と光のパラメータについて、導出はしないがその意味についてのみ順に述べる。

2. 蓄積リングから光を取り出す

荷電粒子が加速度運動をすると、光が発生する。粒子の運動方向と同じ向きに加速度に対して発生した光を制動放射、運動方向に垂直な向きの加速度の場合をシンクロトロン放射という。簡単に言えば、粒子の速さが急に変わった場合と、粒子が曲げられた場合とで、粒子を曲げて発生させたシンクロトロン放射を利用するのが放射光源である。シンクロトロン放射光の特長を以下にまとめる。

指向性 : 蓄積リングの場合、荷電粒子は電子または陽電子であり、エネルギーは数 GeV、すなわち、電子の速さは光速の 99.999……%で、ローレンツ因子 γ は数千、運動は相対論的な領域になる。相対論的な領域のシンクロトロン放射は、指向性が高く強い光になる。すなわち、ただ曲げただけでも、粒子の軌道の接線方向に集中した強い光が発生する。

偏光可変 : 光の偏光面は電子の運動面と一致する。水平方向に曲げれば水平偏光の光が、

垂直方向なら垂直偏光（鉛直偏光）、らせん運動させれば円偏光となる。

パルス光 : 蓄積リングの中の電子は、ある塊（バンチという）になって周回している。PFリングの場合、周長 187 m でバンチの数は最大で 312 個、バンチの長さは約 1 cm である。すなわち、リングの真空ダクトの中を、60 cm おきに 1 cm の長さの電子の塊が回っていることになる。バンチ毎に光が出るため、放射光は時間的には連続したフラッシュ光の様な感じになる。実際、試料の X 線フラッシュ撮影の為に、バンチの数を 1 個に減らして運転することもある。なお、PF リングでは試料の動きが 1 個のバンチの長さ 1 cm = 30 ps よりも早い場合には、画像はぼやけてしまう。

波長可変 : 偏向電磁石からの光は連続スペクトルであり、分光器を用いて必要な波長を抜き出して使うことができる。一方、挿入光源からの光は準単色的であるが、磁極のギャップを変えればある範囲で自由に波長を変えることができる。放射光源からの光は実験室における小型の光源よりも 5～6 桁以上も強い光であり、放射光源以外ではきわめて弱い光しか発生させられない波長領域も存在する。

このように、シンクロトロン放射光は他の光源からの光にない特徴をいくつも備えており、物性、生命など、多くの分野において非常に有用な光である。次に、蓄積リングから放射光を取り出す仕組みについて述べる。

2.1. 偏向電磁石

蓄積リングの場合、粒子の軌道を曲げて円形にする為に偏向電磁石を使うが、それがまずは光源となる。偏向電磁石からの光は、遠赤外領域から可視光、紫外、X 線までに渡る広い波長領域をカバーする連続なスペクトルをもつ。シンクロトロン放射の特長から、偏向電磁石からの光はビームのローレンツ因子の逆数 $\frac{1}{\gamma}$ [rad] の発散角内にはほぼ全てのエネルギーが集中する。PF の場合、

$$\gamma = \frac{E}{m_0 c^2} \approx \frac{2.5[\text{GeV}]}{511[\text{MeV}]} \approx 4900$$

であり、光の発散角は

$$\frac{1}{\gamma} = 0.2[\text{mrad}]$$

である。これは、簡単に言えば、垂直方向の光のサイズが、1 m 進むと 0.2 mm、10 m 下流で 2 mm になる、ということである。(実際にはもっと複雑である。) ちなみに、水平方向については偏向電磁石内の円弧軌道上で連続的に光が発生する為、光源点を選んで発散角を小さくすることは不可能である。PF リングの主偏向電磁石を図 1-1 に、電磁石の上半分を取り去り、ダクトが見える状態にした写真を図 1-2 に示す。

さて、偏向電磁石から発生する最も短い波長(高エネルギー)の光を臨界波長(臨界エネルギー $\hbar\omega_c$) という。臨界エネルギーは加速器のビームのエネルギーと偏向電磁石の曲率半径で決まる。PF リングの場合、曲率半径を

$$\rho = \frac{L}{\theta} = \frac{1.943[\text{m}]}{0.2244[\text{rad}]} = 8.66[\text{m}]$$

とすると、

$$\hbar\omega_c = \hbar \frac{3\gamma^3 c}{2\rho} \approx 4[\text{keV}]$$

となる。通常、リングの電磁石の配置から、主偏向電磁石の曲率半径を変更することは不可能である。従って、臨界波長よりも短い光が必要な場合、ビームのエネルギーを高くするしかないが、そうすると加速器全体が影響を受けるし、また、ビームのエネルギーは偏向電磁石の磁場の限界以上にはならない。リングの主偏向電磁石を光源として用いる場合、通常は低エネルギーのリングで波長の短い X 線を発生させることは困難である。

偏向電磁石から波長の短い X 線を発生させる仕組みとして、次にあげるウィグラーを使う方法と、主偏向電磁石のいくつかを超伝導電磁石に置き換える方法とがある。実際、アメリカの放射光源である ALS や、名古屋大学の放射光源では、リングの主偏向電磁石の内のいくつかを超伝導電磁石とし、強い磁場にすることで、低エネルギー

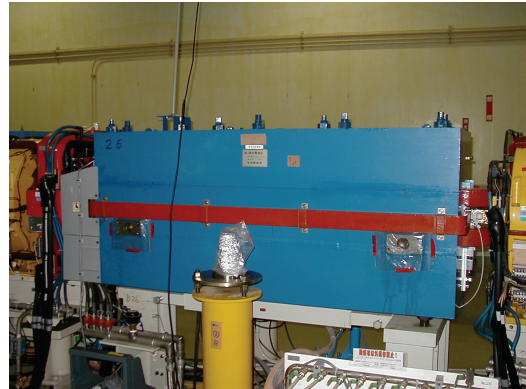


図 1-1 PF リング主偏向電磁石

通常

電磁石の上をどけた時

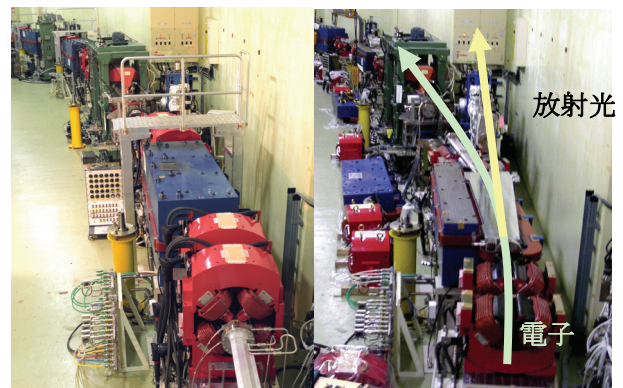


図 1-2 電子の軌道と放射光のビームライン

のビームで高いエネルギーの光を発生させる工夫がなされている。

2.2. ウィグラー

リングの主偏向電磁石の臨界エネルギーよりも高いエネルギーの光を発生させる為、ウィグラーが導入される。ウィグラーは蓄積リングの直線部に導入されるが、直線部とは、蓄積リングの中で電磁石などが配置されない隙間の部分のことである。昔の加速器では電磁石が隙間なく並べられ、全体を上から眺めるとほとんど円形であることが多かったが、最近の加速器では直線部こそが加速器の主役であり、軌道も多角形的になることが多い。直線部の、電磁石等がなく、別の装置が入られる隙間は、個々の加速器に依るが、短いもので 1 m、長いものでは 30 m 以上に及ぶ。放射光源ではそこに挿入光源が配置され、素粒子実験用の衝突型加速器では衝突点と検出器が配

置される。(後で述べるが、放射光を出すことで粒子が失ったエネルギーを加速によって注ぎ足すための加速装置 (RF 空洞) や、時間と共に失われていく蓄積ビームに新たに電子を注ぎ足す装置 (入射システム) なども直線部に配置される。)

逸れた話を元に戻す。ウィグラーはリングの主偏向電磁石の限界よりも短い波長の光を発生させるために導入されるが、直線部に配置されるため、強く曲げて直線から逸らした電子の軌道を、逆向きに曲げて直線上に戻す必要がある。すなわち、磁石の配置としては最低でも 3 極、 $+\theta/2$ 、 $-\theta$ 、 $+\theta/2$ の電磁石を並べなければいけない。この場合、電子の軌道は半サイン波形のように 1 回うねるだけとなる。ウィグラーから発生する光のスペクトルは、偏向電磁石と同様、連続スペクトルであり、臨界波長がより短い方向にシ



図 1-3 PF の超伝導垂直ウィグラー

フトしているだけである。PF の場合、垂直方向の超伝導電磁石を使ったウィグラーが導入されており、最大磁場は 4.8 T、臨界エネルギーは約 20 keV である (図 1-3)。

2.3. 多極ウィグラー

さて、ウィグラーの磁極の数をもっと増やしていったらどうなるであろうか。直線部の長さは有限であり、磁極の数を増やすと、それぞれの磁極の長さは必然的に短くなる。磁極の長さが短いと、大きな電磁石を使うことは難しくなり、永久磁石を並べてウィグラーを作ることになる。磁場としてはリングの主偏向電磁石よりも弱くなってしまふ一方、電子の軌道は「うねる」というよりも「蛇行」に近い状態となる (図 1-4)。電子が「蛇行」すると、個々の「うねり」毎に発生する光が干渉し、強めあう効果が生じてくる。すると、光の強さは格段に増大する。このような挿入光源を多極ウィグラーという。干渉効果で光が強めあうということは、逆に言えばウィグラーの周期と磁場によって、きちんと強めあえる光の波長が決まってしまうということである。多極ウィグラーから発生する光のスペクトルを見ると、干渉の効果により強めあうことができた光、すなわち、基本波とその高調波からなるピーク構造が見える。とはいえ、比較的磁場が強く、電子の軌道の振れ幅が大きい場合には、基本波の波長は長く、かつ、かなりの高次まで強度が弱くなることなく発生するため、スペクトルとしてはギザギザではあるが連続スペクトル的になる。

挿入光源では、磁場と周期が基本波の周波数や、電子の軌道の振れ角を決める。それらの特長を表すパラメータ K 値は、

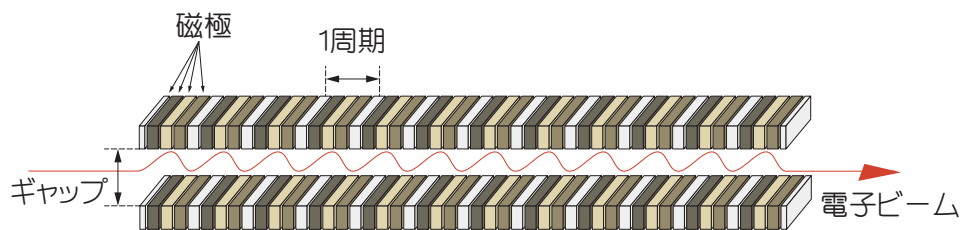


図 1-4 挿入光源と電子の軌道

$$K = \frac{eB_0\lambda_u}{2\pi m_0 c} = 93.4B_0\lambda_u$$

と書ける。ここで、 $B_0[T]$ はアンジュレータのピーク磁場、 $\lambda_u[m]$ は周期である。基本波（1次光）の波長 $\lambda_1[m]$ は、

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2} \right)$$

となる。エネルギーに直せば、

$$\hbar\omega_1 = 9.498 \left(\frac{E^2[GeV^2]}{\lambda_u(1+K^2/2)} \right)$$

である。干渉の効果で光の指向性もより強くなり、放射光の角度広がり

$$\frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{1+K^2/2}{nN}} = \sqrt{\frac{2\lambda_k}{L}} \equiv 2\sigma_p$$

となる。ここで、 n は光の次数、 N は挿入光源の周期数、 L は挿入光源の全長である。

多極ウィグラーでは、ギャップを閉じて磁場

が最も強い状態において、 $K \approx 10$ 程度になることが多い。その時、基本波の波長は長く（エネルギーは低く）、スペクトルはギザギザのほぼ連続スペクトルになる。ギャップを開いていくと磁場は弱くなってゆき、 K も減ってゆく。それに従い、基本波の波長は短く（エネルギーが高くなる）が、光の強さは弱くなってゆく。 $K \approx 1$ 程度になると、電子軌道の振れ角が十分に小さくなり、干渉効果が顕著な状態となる。その状態を、場合によっては多極ウィグラーの「アンジュレータモード」と呼ぶこともある。

図 1-5 に、例として PF の多極ウィグラー MPW13 のスペクトルを示す。MPW13 の周期は 18 cm、図に示した $K=5$ の時の 1 次光のエネルギーは 25 eV、 $K = 1.25$ の時は 194 eV となる。周期数は 25 周期、1 次光の角度広がり、 $K = 5$ の時が 0.15 mrad、 $K = 1.25$ の時が 0.05 mrad である。偏向電磁石では円弧軌道上で連続に光が発生する為、水平方向の発散角は実効的に大きくなっ

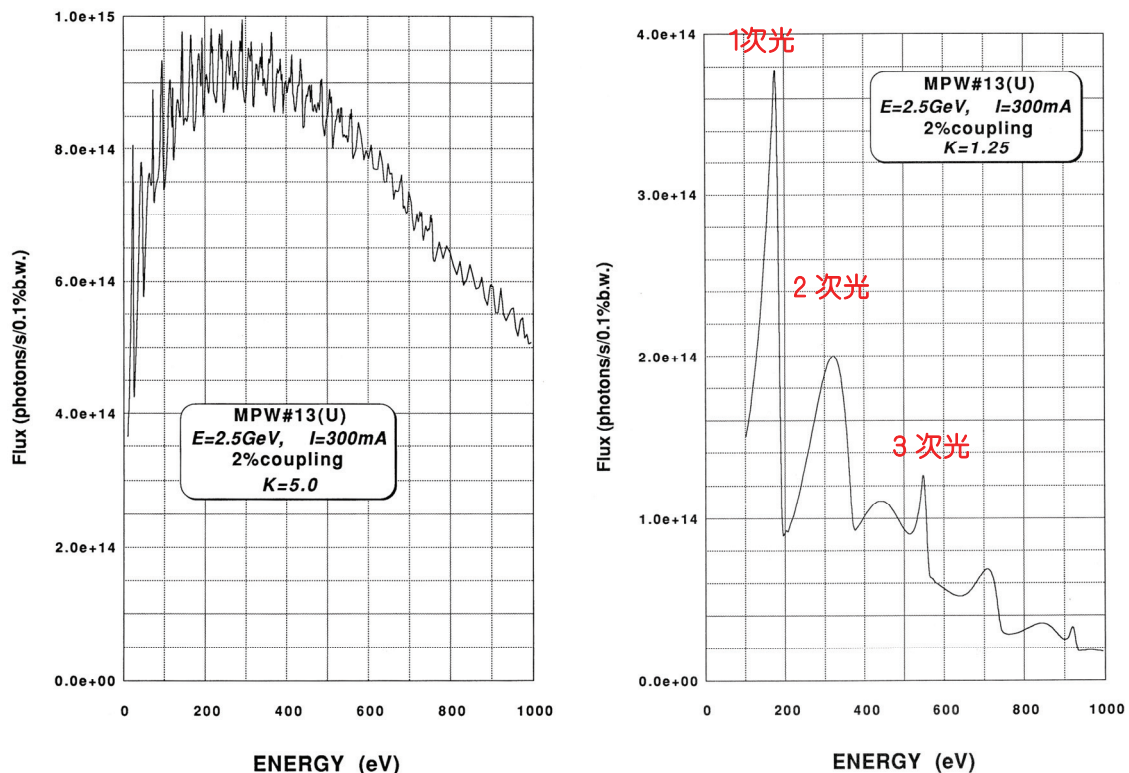


図 1-5 PF の MPW13 における、多極ウィグラー的なスペクトル ($K=5$) とアンジュレータ的なスペクトル ($K=1.25$)。光源のパラメータは現在の PF のパラメータではない。Flux (全光束) はアンジュレータからの放射光を全て取り込んだ場合の光子数。(出典は北村英男編集、『挿入光源ハンドブック』, KEK-89-24)

たが、挿入光源からの光の場合は水平、垂直量方向とも発散角が小さくなる。

2.4. アンジュレータ

光の干渉効果を最大限に生かす為、ギャップが最小（磁場最大）の状態では $K \approx 1$ 程度になるように設計した挿入光源をアンジュレータと呼ぶ。使用したい光のパラメータに従って最適になるように設計されたアンジュレータからの光の強さは、偏向電磁石やウィグラーからの光に比べて何桁も強くなる。また、スペクトルも準単色の線

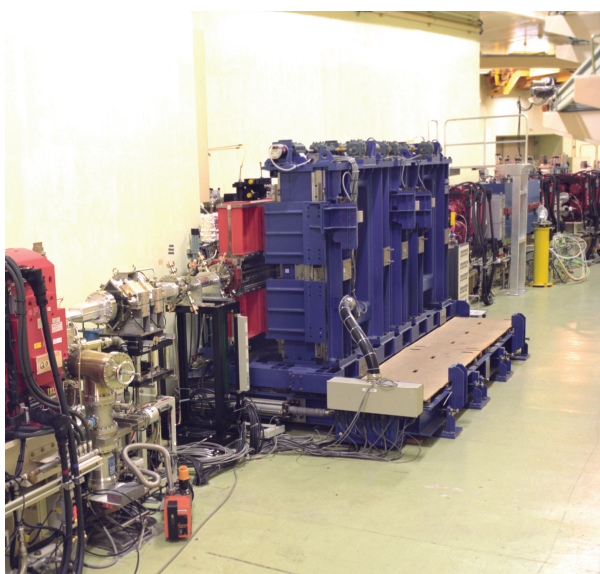
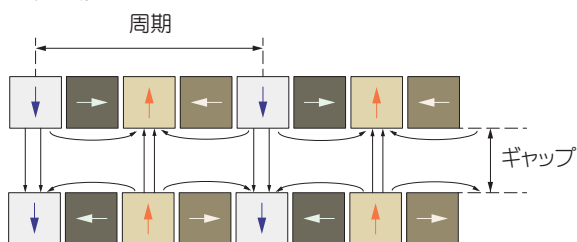


図 1-6 PF のアンジュレータ U02

(a) 通常の場合



(b) ギャップを変えずに周期を短くした場合

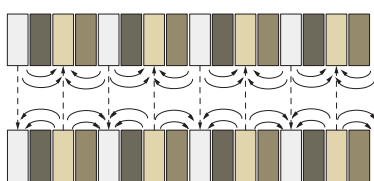


図 1-7 アンジュレータの磁極と磁力線

スペクトルである。高調波は、偶数次が弱く、奇数次が強く、それでも次数が上がって行くに従って光の強さが弱くなり、通常は基本波以外には3次、5次程度までしか使われない。

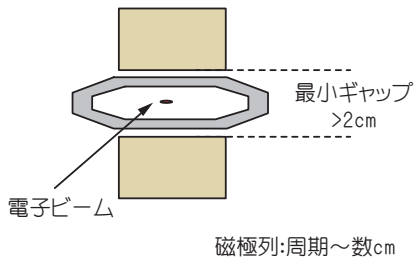
アンジュレータからの光の最も大きな特長は、光のスポットサイズが小さく、向きも揃っているということである。光は光源点から試料上まで届けなければいけないが、光のダクトの大きさは有限である。光のサイズや角度広がり大きいと、試料上には発生した光の一部しか届けることができない。一方で、アンジュレータ光はサイズも角度広がりも小さいため、光子を失うことなく試料上まで届けることができ、また、光学系を使って平行度を高めたり、スポットサイズをさらに小さくしたりすることができる。PF のアンジュレータ U02 の写真を図 1-6 に示す。

さて、アンジュレータ光のエネルギーについて考えてみる。2.5 GeV の PF リングでは、例えば挿入光源の磁場が 0.3 T、周期長を 5 cm とすると、 $K = 1.4$ 、 $\hbar\omega_1 = 600\text{eV}$ となる。この場合、5 次光を使うと 3keV 程度までの光は得られるが、このようなアンジュレータでは、もっと高エネルギーの光、例えば 10keV の光を出すことはできない。低エネルギーの中小規模放射光源で 10keV のアンジュレータ光を作るためには、アンジュレータの周期長を短くすることが必要である。ところが、アンジュレータの磁極の長さがそのギャップよりもあまりに短い場合、磁力線は上下磁極間ではなく、同じ磁極列の間で閉じてしまい、磁場が出なくなる（図 1-7）。そこで、真空封止型短周期アンジュレータが開発された。

2.5. 真空封止型短周期アンジュレータ

中小規模の低エネルギー放射光源において、10 keV 以上のアンジュレータ光を利用するためには、アンジュレータの周期を短くし、かつギャップをそれよりも閉じる必要がある。通常のアンジュレータの場合、磁極列は真空ダクトの外側に置かれるため、最小ギャップはビームの通る隙間と上下の真空ダクトの厚さよりも広い必要がある。その様な場合、ギャップの最小値はかなりの

(a) 通常のアンジュレータ



(b) 真空封止型アンジュレータ

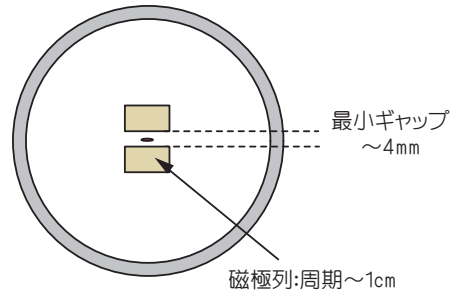


図 1-8 真空封止型アンジュレータの概念図



図 1-9 PF の真空封止型短周期アンジュレータ U17

工夫をしても例えば 2 cm 程度である。それよりもギャップを狭くしたい場合、磁極列を真空中に封入すれば、ビームの通る隙間ぎりぎりまで、例えば 4 mm 程度までギャップを閉じることができる。(図 1-8) そのようなアンジュレータを真空封止型短周期アンジュレータという。短周期アンジュレータが開発されたことにより、エネルギーの高いアンジュレータ光を使うのに、大規模な高エネルギー放射光源は不要になった。

PF の短周期アンジュレータ U17 の場合、周期長 $\lambda_u = 1.6\text{cm}$ 、最小ギャップは $g = 4.5\text{mm}$ 、その時のピーク磁場 $B_0 = 0.84\text{T}$ 、 $K = 1.27$ 、1 次光のエネルギーは $\hbar\omega_1 = 2.1\text{keV}$ である。ギャッ

プを開いて $K \sim 0.4$ 程度にすれば、3 次光ではあるが、10keV の光を使うことができる。

蓄積リングにおいて光を発生させる装置について述べたが、一覧を図 1-10 に、スペクトル領域と輝度の概略を図 1-11 にまとめる。最近の放射光源ではアンジュレータが主役であり、新たに

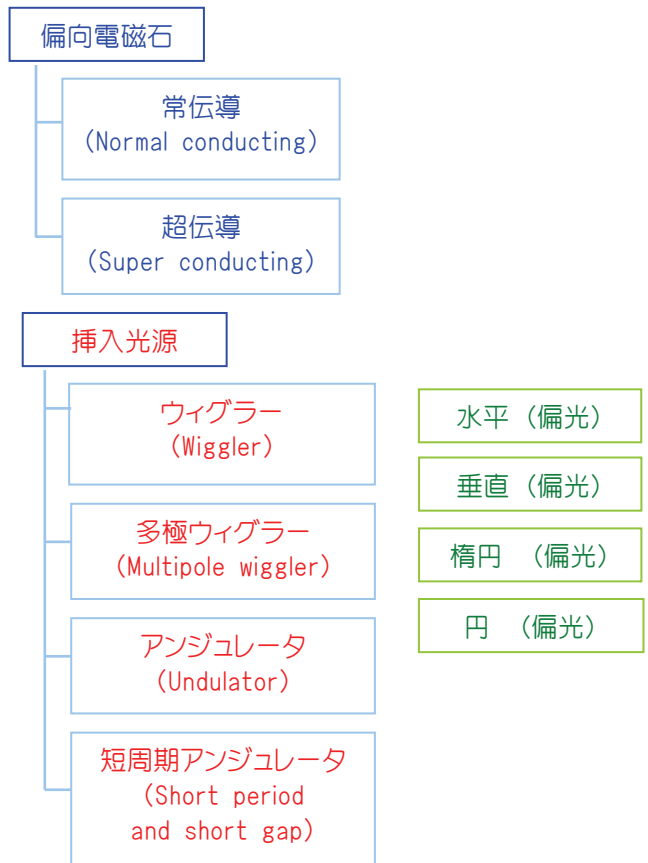


図 1-10 蓄積リングにおいて光を発生させる装置

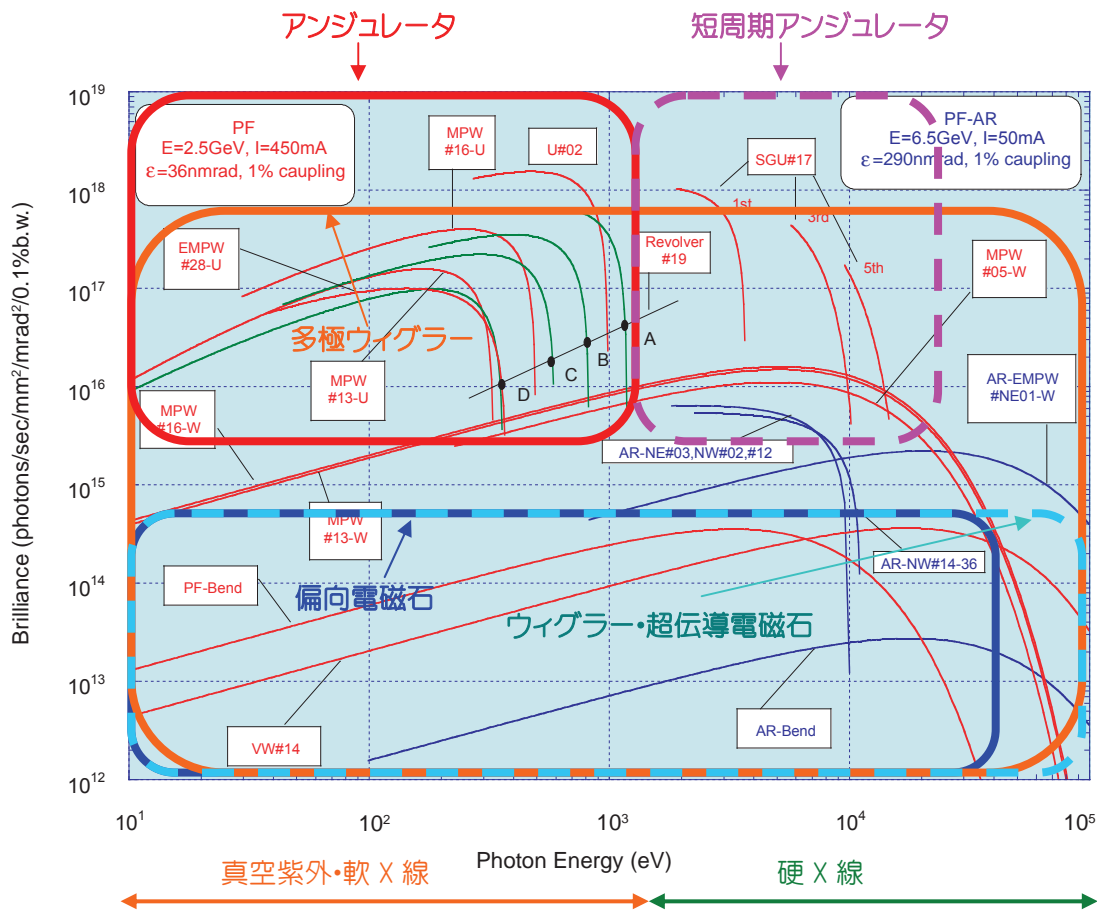


図 1-11 挿入光源と光のエネルギー領域、輝度 (PF リングの場合)

建設される光源では、加速器のパラメータはアンジュレータを前提に決められる。アンジュレータからの光の光束と輝度が大きくなることを目指して加速器が設計されるが、具体的にどのようなことか、次の項では光束と輝度について述べる。

3. 光の波長域とパラメータ

放射光源において利用される光のエネルギーは、およそ 1meV から 50keV 程度までの広い範囲に及ぶ。境界は曖昧ではあるが、各波長域の光には名前がつけられている。

THz、FIR 光 : 1meV 付近の光は、テラヘルツ光(THz)、遠赤外光(Far infrared, FIR)などと呼ばれ、今のところは放射光源以外に強力な光源はない。(半導体を使った光源などがあるが、弱い。)

可視光 : 目に見える光で、赤い光 (約 1.5eV、波長 800nm) ~ 青い光 (約 3eV、波長 400nm) である。

VUV : 真空紫外光 (vacuum ultraviolet, VUV) とは、波長の短い側の紫外光で、この領域には窒素分子や酸素分子の吸収帯 (~200nm、6eV 辺りまで) がある。光路を真空に保つ必要がある為、真空紫外という名がついている。

SX : 軟 X 線 (soft X-ray) とは、およそ数 keV までのエネルギーの低い、波長の長い側の X 線をいう。この領域の X 線は物質を透過しない。VUV・SX を使った代表的な実験は、物質や薄膜などの表面の電子状態や、分子の電子状態など、荷電子帯付近の電子の軌道や状態密度などを調べる実験である。

X : 硬 X 線 (hard X-ray) またはただ X 線と言った場合には、~10keV 以上の X 線を指す

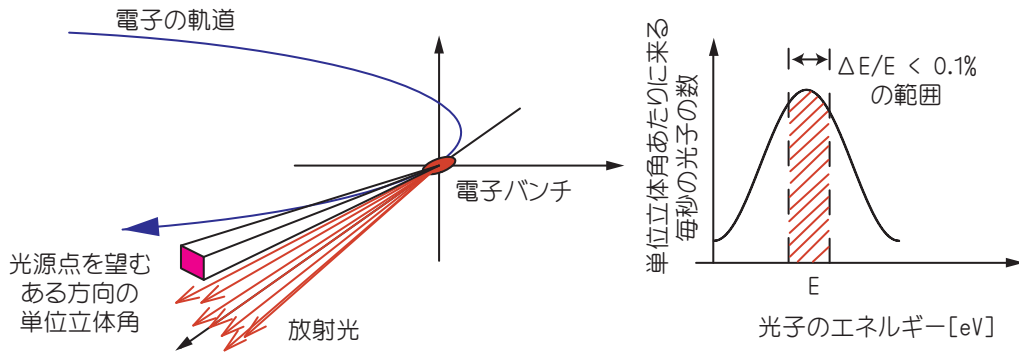


図 1-12 光束密度

ことが多い。物質透過率も高く、光は粒子として散乱されるような振る舞いとなる。主に物質や結晶の構造を調べる実験が代表的な実験である。

放射光のパラメータは、エネルギー、光束、輝度、パルス幅で決まる。各パラメータの数学的に正確な表式はさておき、まずはこれらの各パラメータが何かについて述べる。

3.1. 光束密度と全光束

光の強さは光子の数で表される。3次元の極座標系 (r, θ, φ) を考える。光源を望むある立体角 (θ, φ) において、毎秒飛んでくる光子の数を、0.1% のバンド幅で数えたものを、光束密度という。一般的に、

$$\left. \frac{d^2 P_k}{d\omega d\Omega} \right|_{\theta=0, \varphi=0} [\text{photons} / \text{s} / \text{mrad}^2 / 0.1\% \text{b.w.}]$$

で表す (図 1-12)。これを全立体角で積分したものを全光束といい、

$$\mathcal{F} = \left. \frac{dP_k}{d\omega} \right|_{\theta=0, \varphi=0} [\text{photons} / \text{s} / 0.1\% \text{b.w.}]$$

と書く。全光束はその光源から発生する全ての光子の数である。偏向電磁石やウィグラーの場合、光の発散角が大きく、全光束をビームラインに届けることはできない。実際に試料上に届く光子の数を見積もるには、光軸上の光束密度を使うのが便利である。

$$\left. \frac{d^2 P_k}{d\omega d\Omega} \right|_{\theta=0, \varphi=0} [\text{photons} / \text{s} / \text{mrad}^2 / 0.1\% \text{b.w.}]$$

挿入光源の場合も偏向電磁石の場合も、当然ながらその波長においてスペクトル強度があるかどうかに関わらず、任意の波長に対してこれらの値を計算することが可能である。しかしながら、挿入光源において興味あるのは大抵「 k 次光の強さ」であるため、よく使われるのは「 k 次光に対する軸上の光束密度」である。

ここで重要なのは、挿入光源の場合の、全光束に対する軸上の光束の比である。この比は、

$$\frac{\mathcal{F}}{\left. \frac{d^2 P_k}{d\omega d\Omega} \right|_{\theta=0, \varphi=0}} = \pi \frac{\lambda}{L} = 2\pi \sigma_{p'}^2$$

と書ける。ただし、 λ は考えている光 (k 次光) の波長、 L は挿入光源の全長、

$$\sigma_{p'} = \sqrt{\frac{\lambda}{2L}}$$

は、アンジュレータ光の角度広がりである。

3.2. 実効的な光束密度

前項の光束密度や全光束は、光源の角度広がりの効果を考えていない値である。実際の電子ビームには、電子の位置、進行方向、エネルギーのすべてにばらつきがある。ここでは、電子ビームの角度広がりの効果を考えて実効的な光束密度を求めてみる。

電子ビームにばらつきがあったとしても、全光束は変わらない。従って、最も簡単には、

$$\left. \frac{d^2 P_k}{d\omega d\Omega} \right|_{\theta=0, \varphi=0} = \frac{\mathcal{F}}{2\pi \sigma_{p'}^2}$$

において、光の発散角の部分で、電子の発散角との畳み込みに変えればよい。電子の水平、垂直方向の発散角をそれぞれ $\sigma_{x'}$ 、 $\sigma_{y'}$ とすると、

$$\sigma_{p'}^2 \rightarrow \Sigma_{x'} \Sigma_{y'} = \sqrt{\sigma_{x'}^2 + \sigma_{p'}^2} \sqrt{\sigma_{y'}^2 + \sigma_{p'}^2}$$

$$\mathcal{D} = \left. \frac{d^2 P_k}{d\omega d\Omega} \right|_{\theta=0, \phi=0, \text{effective}} = \frac{\mathcal{F}}{2\pi \Sigma_{x'} \Sigma_{y'}}$$

となる。これが実効的な光軸上の光束密度となる。光束密度という場合、理想的な場合の値と、実効的な値とがあるので注意が必要である。

3.3. 位相空間

ビームの位置や発散角の広がり表現するのに、位相空間での粒子の分布を特徴的に表す量を使う。位相空間とは、図 1-13 に示すように座標と運動量（発散角）で張られる空間である。

電子ビームの分布をガウス分布とした時、位置の分布の標準偏差を σ_x 、発散角の分布を $\sigma_{x'}$ とする。電子ビームの場合、ビームの広がり表すのにこれら標準偏差を径として作られる楕円の面積を使い、

$$\varepsilon = \frac{S}{\pi} = \sigma_x \sigma_{x'}$$

をエミッタンスという。通常の場合、単位は $[nm \cdot rad] = 10^{-9} [m \cdot rad]$ である。電子のエミッタンスは、後で述べるが、放射励起と放射減衰の平衡状態によって決まる値である。

光の場合、光束密度と同様に光軸付近の光を考える。光軸上に毎秒飛んでくる光子を、0.1% のバンド幅で位相空間にプロットし、その原点付近（光軸上）の粒子密度を使うのがもっとも便利である。だが、物理的にも数学的にも、その様な値

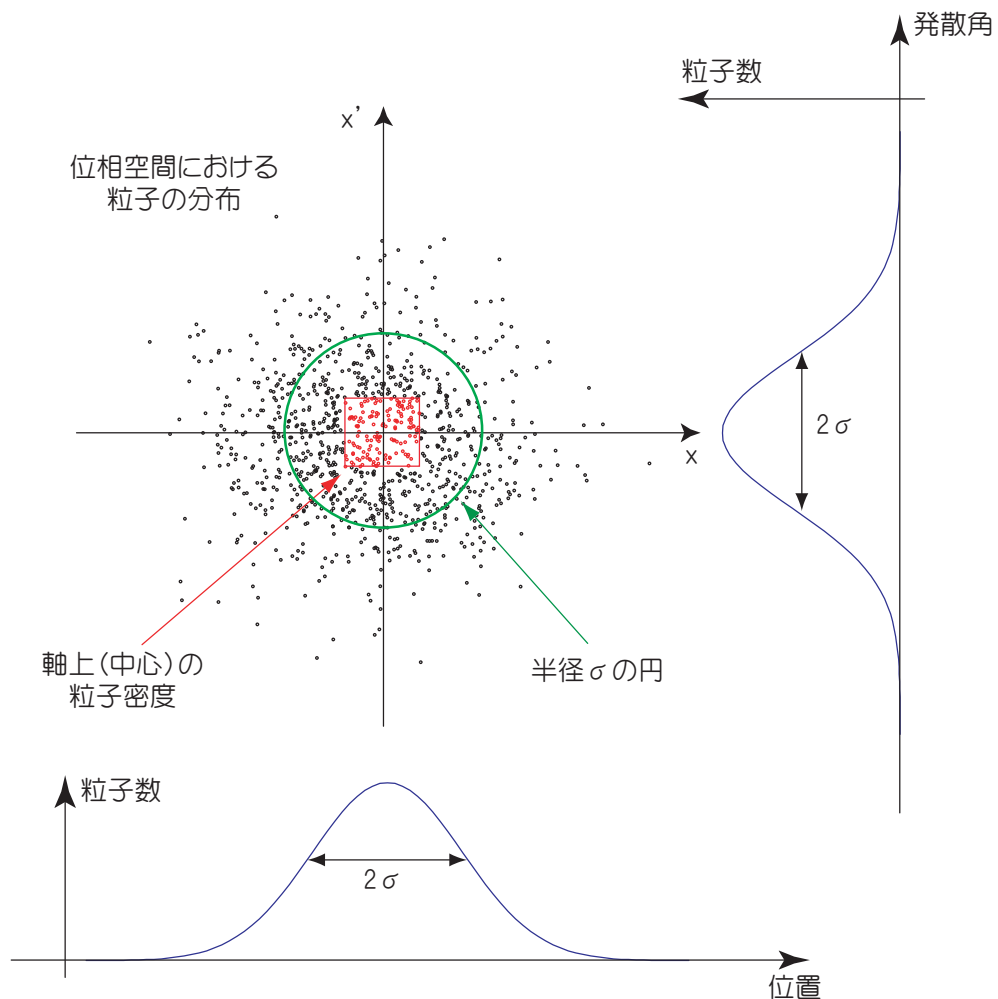


図 1-13 位相空間における分布の標準偏差と粒子密度

を正確に計算することは極めて困難である。そこで、多くの仮定の上で近似的に計算することにし、それを輝度という。

3.4. 輝度

光子密度は全光束を光の角度広がりで割った値であったが、それをさらに光のビームサイズで割って、輝度を求める。本当はきちんと積分を計算する必要があるが、結果だけを見ると、サイズで割っただけでもそれほど悪くない近似ではある。

ところで、光は回折現象の為に、ある大きさ以下に絞ったり、ピンホールでスポットサイズを小さくしたりすることができない。光子の波動関数の広がりともいえるその様な広がりを、光の固有エミッタンス ε_p という。

$$\varepsilon_p = \sigma_p \sigma_{p'} = \frac{\lambda}{4\pi}$$

である。従って、アンジュレータ光の光のサイズは、

$$\sigma_p = \frac{\varepsilon_p}{\sigma_{p'}} = \frac{\sqrt{\lambda L}}{4\pi}$$

となる。これは、角度広がりが $\sigma_{p'}$ のビームを、アンジュレータの中心まで飛ばした時に生じるビームサイズ $L/2 \sigma_{p'}$ と考えることもできる。

電子の水平、垂直方向のビームサイズをそれぞれ σ_x 、 σ_y とし、光源のサイズとして、光のサイズと畳み込みを取る。 $\Sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_p^2}$ 、

$\Sigma_y = \sqrt{\sigma_y^2 + \sigma_p^2}$ とすると、輝度は

$$\mathcal{B} = \frac{\mathcal{D}}{2\pi \Sigma_x \Sigma_y} = \frac{\mathcal{F}}{(2\pi)^2 \Sigma_x \Sigma_y \Sigma_x \Sigma_y}$$

$$[\text{photons} / \text{s} / \text{mm}^2 / \text{mrad}^2 / 0.1\% \text{b.w.}]$$

と書ける。

3.5. 回折限界

実効的な光束密度や輝度において、電子のビームサイズと光のビームサイズの寄与がほぼ同程度になった時を回折限界という。電子のエミッタンスが $1 \text{nm} \cdot \text{rad}$ の時、 100eV の光が回折限界

である。 $0.1 \text{nm} \cdot \text{rad}$ なら 1keV 、 $10 \text{pm} \cdot \text{rad}$ なら 10keV である。

さて、蓄積リングのエミッタンスは、放射励起と減衰の平衡で決まるが、放射励起は軌道が曲げられて放射光を発生する面内のみで生じる。従って、蓄積リングでは水平方向のエミッタンスは平衡である有限の値となるが、垂直方向のエミッタンスは垂直方向に軌道を曲げる挿入光源や、電磁石などの誤差の効果を見れば、ゼロとなる。蓄積リングのビームは水平につぶれたような扁平な形であり、垂直方向のビームサイズは水平方向に比べると極めて小さい。PFリングの場合、水平方向の電子のエミッタンスは $36 \text{nm} \cdot \text{rad}$ であり、 $\lambda = 460 \text{nm} (= 2.7 \text{eV})$ の青い可視光が回折限界となる。垂直方向のエミッタンスは、水平方向に対する比で表すことが多く、PFリングの場合は約 1% である。垂直方向のエミッタンスに対しては、 $\lambda = 4.6 \text{nm} (= 270 \text{eV})$ で回折限界に達する。ちなみに最も性能のよい蓄積リングの水平方向のエミッタンスはおおよそ $1 \text{nm} \cdot \text{rad}$ 、垂直方向はそれに対して 0.1% 程度である。蓄積リング型放射光源では、VUV・SX 光に対してはぎりぎり回折限界になっているが、X線に対しては水平方向の電子のエミッタンスのせいで光の質が悪化してしまっている状態である。

3.6. コヒーレントな部分

有限なサイズを持つ光源からの光の場合、一般に、その光源内の、大きさが波長程度の領域から発生する光子は、互いに位相が揃い、空間的にコヒーレントになる。位置でなく、角度広がりもきちんと考えると、光子の位相空間の中で、光の固有エミッタンスで決まる範囲内の光子が互いにコヒーレントということになる。

光軸上の位相空間の光子密度は輝度で与えられる為、輝度に光の固有エミッタンスをかければ、コヒーレントな光子の数となる。光軸上のコヒーレントな光束は、

$$\mathcal{F}_{\text{coh}} = \varepsilon_p \mathcal{B} [\text{photons} / \text{s} / 0.1\% \text{b.w.}]$$

となる。

例えば光のスポットサイズを回折限界（簡単には波長程度）まで小さく絞ろうとするならば、光はコヒーレントでなければならない。すなわち、回折限界の光のサイズに達するまでスリットなどで光を削ってゆくと、コヒーレントな部分しか残らないのである。

$$f = \frac{\mathcal{F}_{coh}}{\mathcal{F}}$$

を **coherent fraction** といい、全光束の中でコヒーレントである部分の割合を表す。FEL では 100% であるが、放射光源の場合、既存の最も性能のよい蓄積リングでも 0.1% あるかないかという程度である。

3.7. パルス幅とパルス間隔

放射光のパルス幅は、電子のバンチ長で決まる。バンチ長は、水平エミッタンス同様、放射励起と減衰の平衡で決まる。電子はおよそ光の速さで走っている為、バンチ長を σ_z とすると、パルス幅は

$$\tau_z = \frac{\sigma_z}{c} [\text{sec}]$$

となる。リングの周長を C とすると、電子の周回

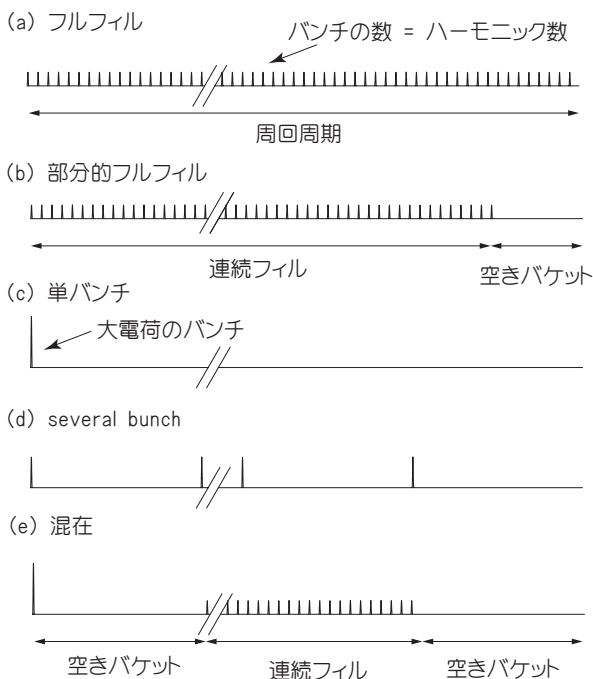


図 1-14 バンチパターン例

周波数は

$$f_{rev} = \frac{c}{C} [\text{Hz}]$$

である。単バンチ運転の場合、これがそのまま光のパルス繰り返し周波数となる。マルチバンチ運転の場合、周回軌道上のバンチの配置をフィルパターン (**filling pattern**) というが、光のパルス繰り返しはフィルパターンが反映される。リングに蓄積可能なバンチの最大数をハーモニック数 (**harmonic number**) h というが、最大数までバンチを蓄積して運転するフルフィル (**full filling**) 運転の場合、繰り返しは hf_{rev} ($= f_{RF}$) となる。フルフィルの場合、隣り合ったバンチの間隔はリング加速空洞の RF 源の周波数と同じになる。バンチパターンの例を図 1-14 に示す。

単バンチ運転の場合、ある程度大きな電流値で運転するためには、バンチあたりの電荷量を非常に大きくする必要があり、バンチ電荷を増やすと、ビームサイズの増大効果やビーム寿命の減少、不安定性の励起や真空ダクトの発熱など様々な現象が生じる。装置に対する負荷や、ビームパラメータの悪化を考えると、バンチ電荷はより小さい方が望ましい。ただし、完全なフルフィルの場合でも、航跡場の効果や残留ガスの効果、陽電子の場合は電子雲の効果などで不安定性が生じる可能性がある。ただし、連続フィルの場合、ある部分でバンチ間隔を空ければ不安定性を防げる可能性があり、例えば図 1-14 の部分的フィル (b) や **several bunch** (d) がそういった目的で使われる。単バンチ的な部分と連続フィルの部分の混在 (e) は、単バンチを望むユーザーと、大きな平均電流値を望むユーザーの要望を両立させる目的で使われることがある。

PF リングの場合、バンチ長は約 1 cm、パルス幅は 30 ps である。RF の周波数は 500.1 MHz、ハーモニック数 312 に対して、通常は不安定性抑制の為に 280 バンチか 300 バンチの連続フィルで、最大蓄積電流 450 mA で運転している。1 年に数週間だけ単バンチモードで運転を行うが、その場合、周長 187 m から、繰り返し周波数は 1.6 MHz となり、最大蓄積電流は 60 mA である。

3.8. 縦方向コヒーレント長と時間コヒーレンス

縦方向のコヒーレント長を、光の進行方向に距離をずらしてみた時に、光子同士の位相の差が変わらなると見なせる範囲とする。コヒーレント長は、バンド幅によって決まる。これは、周波数が違えば、距離によって位相の進み具合が変わる為、例えば周波数の違う2つの波を重ねてみると、進行方向のある点と別の点では2つの波の位相差は違う値になる。ただし、周波数の差が小さければ、進行方向の距離に対する位相差の変化は小さいだろうし、周波数が大きく違えば、距離に対する位相の進みも大きく違い、少し離れただけで位相の差は大きく変化するだろう。コヒーレント長 l_{coh} は、

$$l_{coh} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda/\lambda} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

となる。

ところで、アンジュレータ光は干渉効果を利用しているために線スペクトル的になっている。スペクトル形状は、ある中心周波数に対して

$$I(\Delta\omega) \propto \left(\frac{\sin\left(\pi N \frac{\Delta\omega}{\omega_c}\right)}{\pi N \frac{\Delta\omega}{\omega_c}} \right)^2$$

と、よくある形に書ける。ただし、 ω_c は考えている光の中心周波数、 N は挿入光源の周期数である。このスペクトルの幅はおおよそ、

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_c} \approx \frac{1}{N}$$

である。この値よりも分光器の分解能の方が遙かに小さい為、通常の場合、縦方向または時間方向のコヒーレンスは、分光器のエネルギー分解能で決まることになる。

3.9. 可変偏光アンジュレータ

挿入光源において電子を水平に蛇行運動させれば水平偏光の光が発生し、縦方向に蛇行させれば垂直偏光、螺旋運動させると円偏光となる。

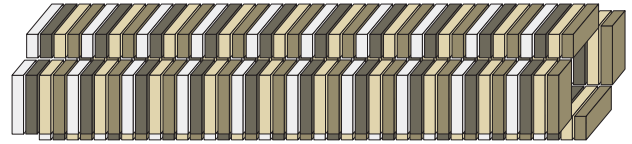
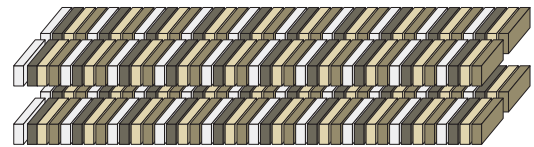


図 1-15 小貫型の磁極列

(a) 水平偏光時



(b) 楕円、円、垂直偏光時

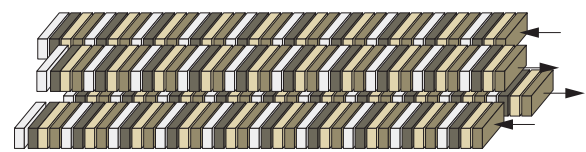


図 1-16 APPLE II 型
可変偏光アンジュレータ

垂直偏光や円偏光、楕円偏光のためには水平方向の磁場が必要である。

水平磁場を発生させる為、水平方向にも磁極を配置した例として、図 1-15 に小貫型と呼ばれる磁極列を示す。ただし、通常の蓄積リングでは入射を行う為には水平方向に広いアパーチャが必要である。それは、入射された電子ビームが蓄積されるまでの間に、水平方向に大振幅の振動を行いながら周回するという過程を経るからである。入射ビームは蓄積リングの中心軌道から水平方向に大きく離れた点に入射されるため、入射直後から大振幅で振動を始める。入射ビームは周回する内に放射減衰の効果で徐々に振幅を減らしてゆき、やがて蓄積される。入射を可能にするためには、水平方向に±数 cm の口径が必要である。仮に真空ダクトの内側に水平磁極列を配置したとしても、入射時はギャップを開かなければいけないし、その場合はトップアップ運転は不可能となる。そのような制約があるため、このタイプの挿入光源は水平磁極列はダクトの外側に配置され、ギャップをあまり閉じないような使い方をされることが多い。すなわち、低エネルギーの蓄積

リングで比較的周期長が長い挿入光源として用いられる。

入射の制約を回避するため、垂直方向の磁極列のみで水平磁場を発生させる挿入光源も数多く存在する。ここではその例として、図 1-16 に APPLE II 型の磁極列を示す。上下の磁極列を 2 つに割って、磁極列を 4 つとし、偏光を変える時はビーム進行方向に磁極をずらす操作が行われる。なお、APPLE II では、ビーム進行方向から見て互に対角になる磁極を同じ方向にずらすことになる (図の矢印)。このようなタイプの磁極列の場合、非線形磁場や端部磁場の影響が難しく、場合によってはビーム寿命や入射効率に影響を与えることがある。ただし、通常の水平偏光の挿入光源と同じく、周期長が短く、入射の為に特別な操作が必要ない挿入光源を作ることができる。

3.10. 光束密度の表式

最後に、光束密度と輝度の表式のみを示す。このテキストでは導出は行わない。電子ビームの角度広がり を考慮しない理想的な場合、光束密度は以下の式で与えられる。

$$\frac{d^2 P_k}{d\omega d\Omega} = \left(\frac{e^2 \gamma^2 \xi^2}{c \pi^2} \left(\frac{\sin\left(\frac{N\pi\omega}{\omega_0}\right)}{\frac{\omega}{\omega_1} - k} \right)^2 \times \left(\begin{array}{l} |2S_0\gamma\theta\cos\phi - K_y(S_1 + S_{-1})|^2 \\ + |2S_0\gamma\theta\sin\phi - K_x(S_1 - S_{-1})|^2 \end{array} \right) \right)$$

ただし、

$$\xi = k \left(1 + (\gamma\theta)^2 + \frac{K_x^2 + K_y^2}{2} \right)^{-1},$$

$$\omega_1 = 2\gamma^2 \omega_0 \left(1 + (\gamma\theta)^2 + \frac{K_x^2 + K_y^2}{2} \right)^{-1},$$

$$S_q = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left(\exp(i(k+2p+q)\delta) J_{k+2p+q}(X) J_p(Y) \right),$$

$$\tan \delta = \frac{K_x}{K_y} \tan \phi,$$

$$X = 2\xi\gamma\theta \sqrt{K_y^2 \cos^2 \phi + K_x^2 \sin^2 \phi},$$

$$Y = \xi \frac{K_y^2 - K_x^2}{4},$$

である。さらに、挿入光源の周期を λ_u として、 $\omega_0 = \frac{2\pi}{\lambda_u}$ 、 K_x と K_y は挿入光源の水平・垂直磁場の K 値、 θ と ϕ は光と電子ビームの進行方向のなす角度である。

軸上の光束密度は、

$$\left. \frac{d^2 P_k}{d\omega d\Omega} \right|_{\theta=0} = \frac{e^2 \gamma^2 \xi^2}{c \pi^2} G_k(K_x, K_y) \left(\frac{\sin\left(\frac{N\pi\omega}{\omega_0}\right)}{\frac{\omega}{\omega_1} - k} \right)^2$$

となる。ただし、

$$G_k(K_x, K_y) = \xi_0^2 \left(\begin{array}{l} K_y^2 \left(J_{\frac{k-1}{2}}(Y_0) - J_{\frac{k+1}{2}}(Y_0) \right)^2 \\ + K_x^2 \left(J_{\frac{k-1}{2}}(Y_0) + J_{\frac{k+1}{2}}(Y_0) \right)^2 \end{array} \right),$$

$$\xi_0 = k \left(1 + \frac{K_x^2 + K_y^2}{2} \right)^{-1}, \quad Y_0 = \xi \frac{K_y^2 - K_x^2}{4}$$

である。

2. 放射光源の概略

加速器は巨大な装置であり、部品の数も膨大である。一人で全てを行うことは不可能であるし、実際、加速器を専門とする研究者でも、加速器のある部分について専門としていることが多い。この章では、蓄積リング型の放射光源の全体像について、雑学的に広く浅く紹介したい。

まずは KEK 内の加速器の全体構成を述べた後、PF リングを例にとり、最上流の電子銃から入射器、PF リングまでをざっと紹介する。

1. 入射器と蓄積リング

1.1. KEK つくばの電子陽電子加速器

図 2-1 に KEK つくばキャンパスの航空写真を示す。

ATF : 国際リニアコライダー計画の為にダンプリング及び収束系の試験加速器。建物内に電子銃、線形加速器、入射路、蓄積リング、出射路、テストビームラインがある。

STF : 国際リニアコライダー計画の為に超伝導空洞試験加速器。

LINAC : PF、PF-AR、KEKB の LER と HER という 4 蓄積リングにビームを供給する入射器。LINAC は PF には 2.5 GeV の電子を、PF-AR には 3 GeV の電子を、HER には 8 GeV の電子を、LER には 3.5 GeV の陽電子を直接供給している。

KEKB : 8 GeV の電子蓄積リング(HER, high energy ring)、3.5 GeV の陽電子蓄積リング(LER, low energy ring)からなる衝突型加速器。同じトンネル内に 2 台の加速器が設置されており、衝突点には Belle という検出器が挿入されている。KEKB は 1999 年に建設された。なお、KEKB 以前には KEKB トンネル内には TRISTAN という衝突型加速器が存在した。30 GeV の電子-陽電子衝突加速器で、その時代、PF-AR は TRISTAN 用の加速入射リングとして用いられていた。

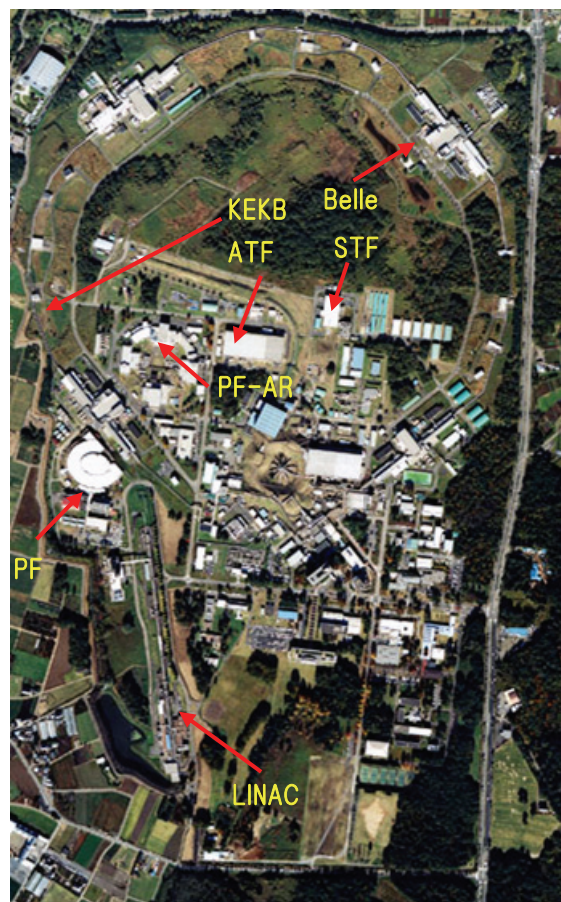


図 2-1 KEK つくばキャンパスの電子用電子加速器

PF : 2.5 GeV 電子リング。放射光利用専用の蓄積リング。本テキストの主役！

PF-AR : 6.5 GeV 電子蓄積リング。現在は常に単バンチ運転で、放射光利用運転のみ行っている。以前は TRISTAN 用の入射蓄積リングで、LINAC からの 2.5 GeV の電子と陽電子を 8 GeV まで加速し、TRISTAN へ入射していた。

1.2. 電子蓄積リングの構成

電子蓄積リングを運転するためには、入射器やビーム輸送路などが必要である。加速器全体としての放射光源の構成例を図 2-2 に示す。

最も簡単な例(a)は、ユーザー運転で使うエネルギーのビームを入射器から入射し、蓄積するというパターンである。リングのエネルギーと同じエネルギーの LINAC を、フルエネルギー (full energy) LINAC、入射をフルエネルギー入射とい

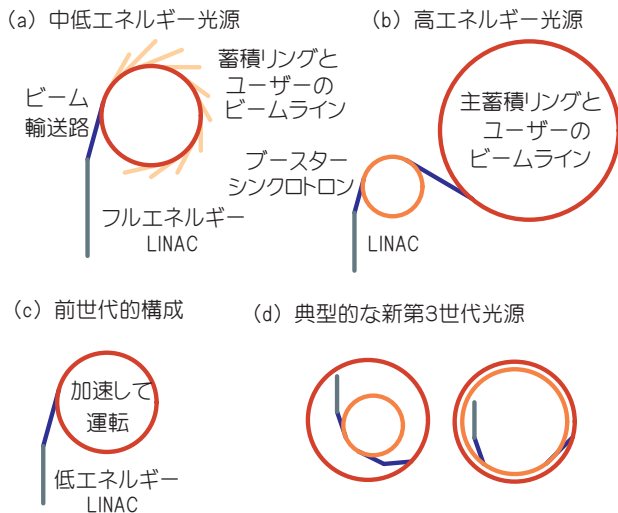


図 2-2 放射光源加速器の構成

(a)以外ではユーザービームラインは省略してある。

う。入射器が KEKB や PF-AR と共通であるが、PF リングもこの構成といえる。

高エネルギーの蓄積リングでは、フルエネルギー LINAC の設置が、建設及び運転費用や運転調整の難しさなどから避けられる場合がある。その様な場合、低エネルギー LINAC から入射加速用のブースターシンクロトロンに一旦ビームを入れ、加速してから主蓄積リングに入射を行う構成 (b) がとられる。例えば SPring8 はこの構成である。高エネルギー放射光源のみならず、最近の中低エネルギーの放射光源でも頻繁に採用されることが多いこの構成の利点は、主リングへ入射されるビームの質が向上し、安定に入射が行えるということである。エネルギーに依らず、LINAC は調整や安定的な運転が難しい。一発一発のビームのパラメータの揺らぎが大きく、また、そもそもビームサイズやエネルギー広がりも決して小さくはない。ブースターで一旦蓄積し、ビームのパラメータを放射励起と放射減衰の平衡状態から決まる値にリセットすることで、主リングへの入射が安定し、入射調整なども容易になる。(d) で示すように、世界各地で建設されている新第 3 世代放射光源でもこの構成が取られることが多い。DIAMOND は入射器とブースターを主リングの内側に配置したパターンであり、SLS はブース

ターを主リングと同じトンネル内に設置したパターンである。

フルエネルギーの LINAC が作れず、一方でブースターを作る費用や敷地がない場合によく行われる構成 (c) の場合、入射後に加速してエネルギーを上げてからユーザー運転が行われる。このような構成では、ビーム電流値が一定になるように頻繁に注ぎ足し入射を行うトップアップ運転が絶対に不可能である上に、低エネルギー入射の為にビーム不安定性が生じ、入射や加速自体が困難になる場合さえある。例えば PF-AR がこの構成であるが、PF-AR はそもそもトリスタンのブースターシンクロトロンであった。

2. 入射器の構成

2.1. 入射器全体の構成

蓄積リングを運転するためには入射器が必要である。ここでは、KEK の入射器を例にとり、入射器全体の構成を述べる。KEK にある電子陽電子線形加速器の平面図を図 2-3 に示す。

線形加速器の最も上流には電子銃がある。電子銃は電子ビームを生成する装置で、陰極に数百ボルトの電圧をかけ、接地電位の陽極に向けて電子を打ち出す。電子銃で作られた電子ビームは、ビームサイズや発散角のばらつきが大きく、バンチ長も長い。まずはソレノイドによる集束系でビームの損失を防ぎつつ、加速しながら速度差の効果でバンチ長を短くすることが行われる。この部分をバンチャーという。バンチャーを出た電子は、4 極電磁石で集束されながら、所定のエネルギーまで加速される。

余談であるが、陽電子ビームは電子ビームをターゲットに当てて生成する。KEK の電子陽電子加速器の場合も途中にタングステンで作られたターゲットがある。ターゲットは中心に穴が開けられており、電子モードの場合はビームは中央の穴を通り抜ける。また、TRISTAN の時代、LINAC は PF に 2.5GeV の電子、AR に 2.5GeV の電子と陽電子を供給していた。その時代、電子銃は「CT 電子銃」と呼ばれる電子銃のみであり、

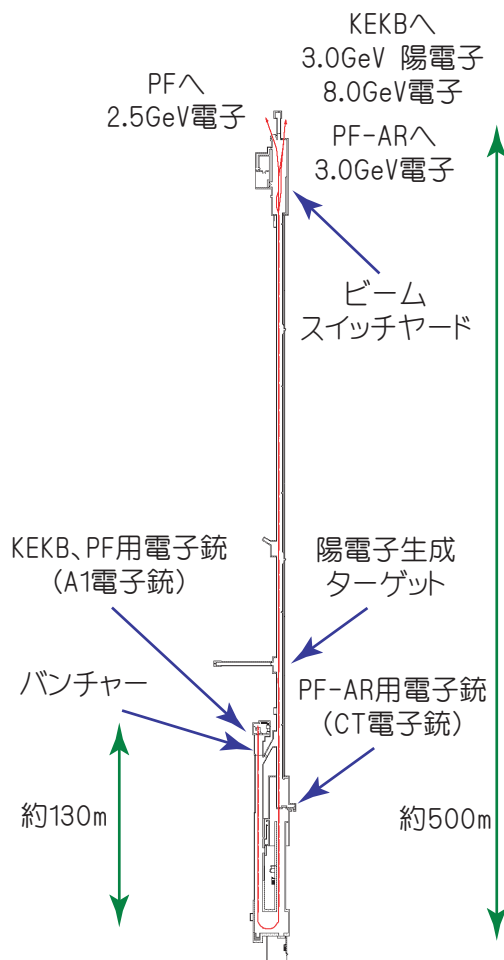


図 2-3 KEK 電子陽電子線形加速器

LINAC もそこが最上流であった。KEKB が建設された時、LINAC が延長された。敷地の問題から J の字になっているが、現在は KEKB、PF には最上流の「A1 電子銃」からの電子を加速して供給している。

2.2. 電子銃

KEK の LINAC の電子銃は DC 熱電子銃である。陰極を加熱し、熱エネルギーによって電子を真空中に引き出すのが熱電子銃である。その特長は、安定かつ効率的に大電流の電子ビームが出力でき、陰極の寿命も長いことである。短所は、高温の効果で発生した電子の運動量のばらつきが大きいことで、それを熱エミッタンスという。また、電子を打ち出すタイミング以外のタイミングで発生する電子ビームを暗電流というが、暗電流

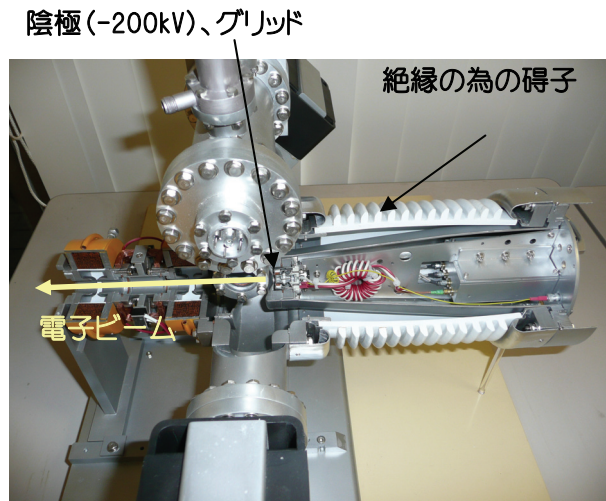


図 2-4 電子銃の模型



図 2-5 「A1 電子銃」付近の写真

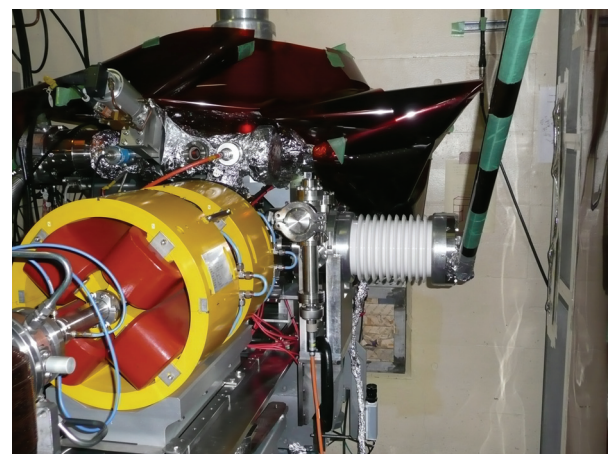


図 2-6 「CT 電子銃」



図 2-7 ソレノイドが巻かれた
初段の加速管

も比較的多い。電子銃の内部構造の分かる型の写真を図 2-4 に示す。碍子の襞には表面積を大きくして絶縁破壊を防ぐ目的がある。パルス幅やタイミングは、陰極とグリッド間にパルス電圧をかけて制御する。電子銃室の様子を図 2-5 に示す。電源の向こう側の柵の中から、左側に向かって電子ビームが打ち出される。PF-AR 用の CT 電子銃の写真を図 2-6 に示す。

なお、ERL では 500kV の光陰極電子銃が使われることになっている。陰極は加熱されず、大強度のレーザーを当てて電界の力で電子を引き出す。熱エミッタンスは小さく、また、レーザー光のサイズや強度分布を最適化することで、極低エミッタンスの電子ビームの生成が可能となる。

2.3. 粒子の発散角、ソレノイドによる集束

電子銃から出た電子は、発散角のばらつきが大きく、バンチ長も長い。発散角 θ は横方向の運動量を p_t 、縦方向の運動量を p_z として、

$$\theta = \arctan\left(\frac{p_t}{p_z}\right) \approx \frac{p_t}{p_z}$$

と書ける。発散角 θ を持つ粒子が Δz 進むと、中心軌道から横方向に $\theta\Delta z$ だけずれる。発散角のばらつきが大きいと、電子ビームは少し進んだだけでサイズが大きくなり、やがて電子がダクトに衝突して失われてしまう。ビームサイズ増大と電子の損失を防ぐために、電子銃を出た直後はソレノイ

ドが使われる。初段の加速管の周りに設置されたソレノイドの写真を図 2-7 に示す。

2.4. RF

高エネルギー加速器で粒子を加速するには、時間的に変動する電場が必要である。静電場の場合、静的な電位差が必要であるが、真空中でも大気圧下でも、電位差が大きくなると雷のように放電が起こる。タンクを作って SF_6 ガスを高圧封入すると放電しにくくなるが、それでも 5 MV 程度までがやっとである。さらに、円形加速器の場合、同じ場所を何度も通るため、静的な電位差で加速することは不可能である。

余談であるが、静電場を使って加速する低エネルギーの重イオン加速器には、タンデム型というのがある。イオン源で重粒子を負に帯電させておき、GND から例えば +5 MV まで静電場で加速する。その後、電位 +5 MV になっている中間点で周りの電子を剥ぎ取り、正に帯電させ、GND に向かって再び加速を行う。その様にするると 10 MV の重イオンビームを作ることができる。

RF はラジオ波、マイクロ波、極超短波などと呼ばれる、時間的に変動する電磁場である。LINAC でも蓄積リングも加速には RF が使われ、KEK の LINAC で使われている RF の周波数は

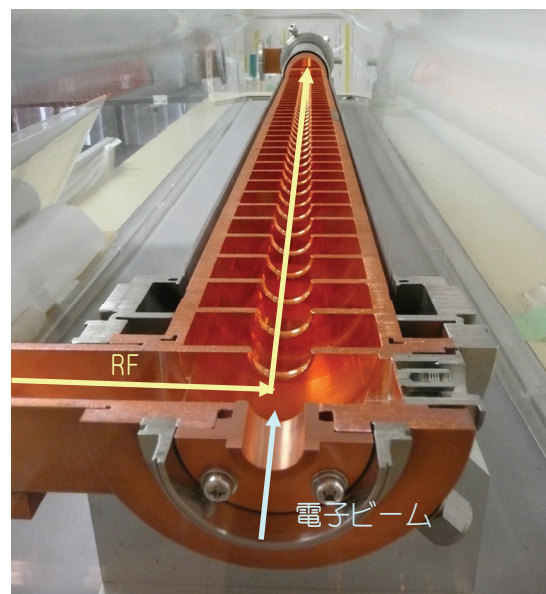


図 2-8 LINAC の加速管

2856 MHz (波長約 10.5cm)、蓄積リングではどこも約 500 MHz (波長約 60cm) である。RF は導体の空洞内に閉じこめられ、それを LINAC の場合は加速管、加速セル、リングの場合は RF 空洞、加速空洞という。電磁場の空洞における共振は、音波におけるバイオリンの弦や太鼓の膜での共振と同じである。例えば PF リングで使われている空洞の長さは RF の半波長で約 30cm である。空洞の中では、弦の場合の固定端に相当する定在波が立っており、空洞表面で垂直方向の電場はゼロとなる。一方、KEK の LINAC の場合、RF は進行波であり、加速管のセルの長さは 3セルで 1 波長となる約 33mm、それを $2/3\pi$ モードという。加速管を割って中が見えるようになった状態の写真を図 2-8 に示す。

なお、ERL の場合、RF 空洞はリングと同じ定在波空洞で、周波数は 3GHz (波長約 10cm) である。

2.5. バンチャー

RF は時間的に変動する電磁場であり、簡単にいえば、空洞の中で電圧は

$$V(t) = V_0 \sin(\omega t)$$

の様に正弦的に変化する。電子の打ち込まれるタイミングによって加速量が変わるのが RF による加速の特徴である。

ところで、電子銃から出た電子ビームのバンチ長はおよそ $2ns (= 60cm)$ である。これは 2856 MHz の 1 波長よりも長く、そのまま加速を始めると大半の電子は失われてしまう。その為、図 2-9 で示す様に最初は波長の長い RF を使い、バンチの前側の粒子を減速、バンチ後ろ側を加速する。電子ビームをそのまましばらく走らせると、前側の粒子は遅れ、後ろ側は追いつき、結果としてバンチ長が短くなる。それを SHB (sub harmonic buncher) という。KEK の LINAC では、主加速の前に SHB が 2 本、PB (Pre-buncher) が 1 本、Buncher が 1 本あり、合計 4 本の加速管でバンチングを行っている。バンチング前は電子のエネルギー 200 keV、バンチ長 2 ns であるが、バンチャ

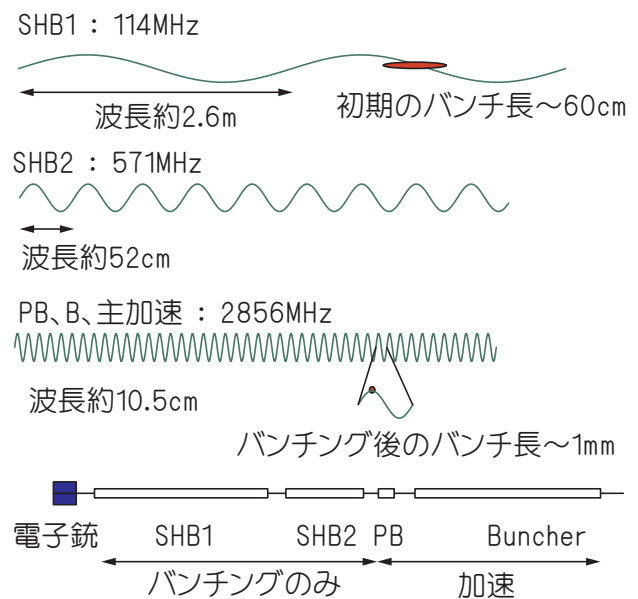


図 2-9 バンチャーと初段加速

一系の出口では、電子のエネルギーは 16 MeV、バンチ長約 1 mm (2~3ps) になっている。

ERL の場合、電子銃からの電子ビームのパルス幅は 10~20 ps、入射部でのバンチングにより約 1 ps まで短くなる。

2.6. LINAC パルスの時間構造

KEK の LINAC はパルス運転が基本であり、ビーム繰り返しは最大 50 Hz である。すなわち、加速管の中に RF を導入し、電子銃から電子ビームを打ち出して加速、加速が終わったら RF を切る、ということを 50Hz で繰り返す。LINAC の RF の時間構造を図 2-10 に示す。クライストロンで発生させた RF のパルス幅は 4 μs 、それを SLED (SLAC (Stanford Linear Accelerator Centre) energy doubler) で圧縮し、電圧を約 4 倍、パルス幅を 1 μs にする。この RF のパルスをマクロパルスという。加速管の中を伝わる RF パワーの速度、群速度は KEK の LINAC の場合、およそ光速の 1/100 である。従って、2m の加速管にパワーが満たされるまで、約 0.7 μs かかる。加速管の最上流にカップラーという RF を送り出す部分があり、RF はそこからさざ波の様に加速管を進んでゆく。途中のディスクや壁などによる反射波と進行波が重なり合い、定常状態になったとこ

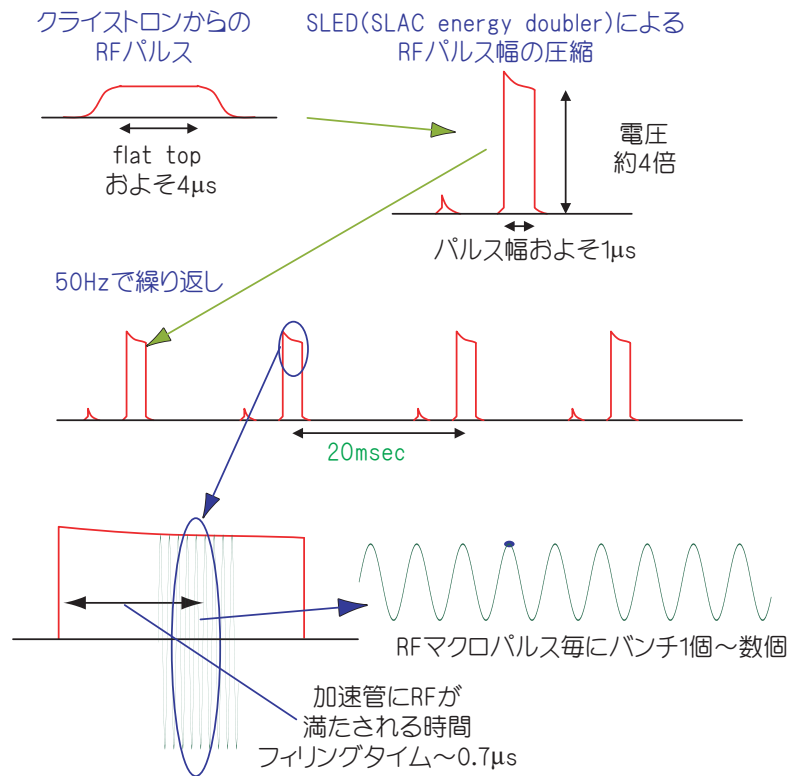


図 2-10 LINAC の RF パルスの時間構造

ろで電子バンチが通過する。マクロパルス毎にバンチの数は1個から数個であり、電荷は1~10 nC程度である。ビームと一緒に加速管を通過したRFは、最下流のカップラーから外に取り出され、水冷されているダミーロードという吸収体に吸収されて熱に変えられる。ところで、加速管は銅製であるが、RFを通すと内部の壁の抵抗によって発熱が生じる。また、ダミーロードの発熱もある。これらの発熱は非常に大きく、常伝導の加速管を用いる場合、加速管に常時RFを満たし、例えば2856 MHzで連続的に8 GeVのビームを出すことは不可能に近い。

ERLの場合、空洞は全て超伝導であり、空洞内には常時RFが満たされている。1.3 GHzのRFのピークには、全て電子バンチが載っており、電子ビームの繰り返しも1.3 GHzとなる。

2.7. RF源、立体回路

LINAC及び蓄積リングでは、RF源としてクライストロンが使われる。クライストロンは真空管の一種で、電子銃同様、電子を打ち出し、途中

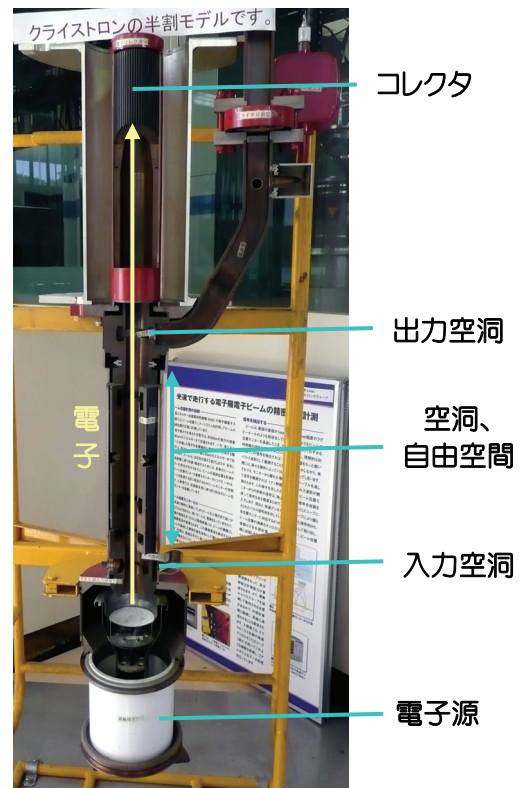


図 2-11 クライストロンの半割モデル



図 2-12 クライストロンギャラリー

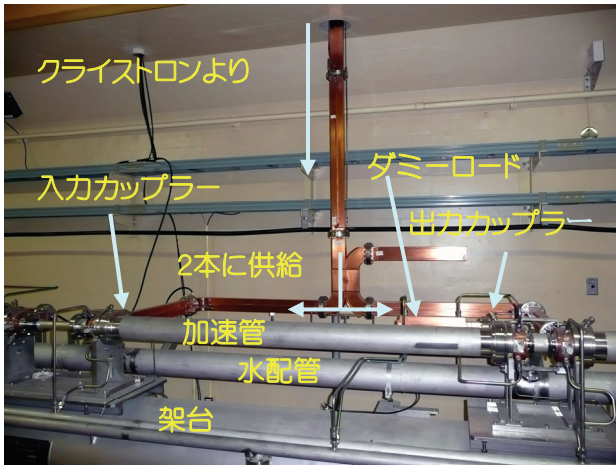


図 2-13 立体回路

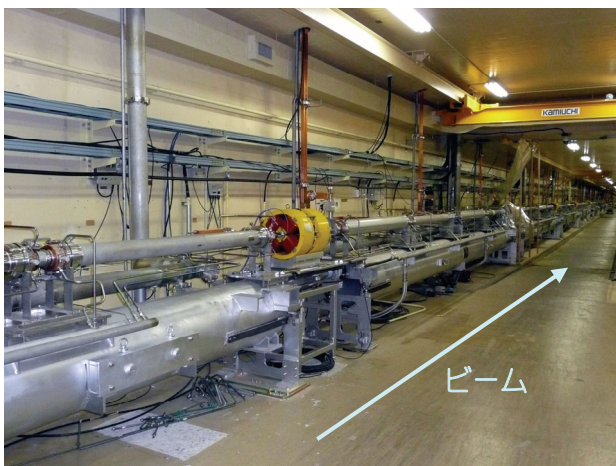


図 2-14 LINAC 本体

の入力空洞で LINAC 初段のバンチャー同様に速度変調をかける。速度変調をかけられた電子をし

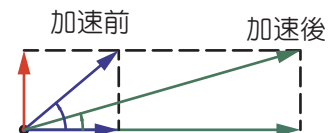
ばらく飛ばして密度変調に変え、出力空洞で RF を取り出す。電子と、出力空洞で取り出しきれなかったエネルギーは、コレクタで熱に変えられる。LINAC 地上部にはクライストロン及び電源が並んでおり、クライストロンギャラリーと呼ばれる (図 2-12)。

クライストロンで作られた RF は、導波管と呼ばれる矩形の中空の銅パイプを通して地下にある LINAC 本体の加速管まで届けられる。導波管で構成される RF 輸送路を、立体回路という (図 2-13)。LINAC 本体の写真を図 2-14 に示す。

2.8. 空間電荷効果、断熱減衰

電子ビームが電子銃を出た直後からバンチャーを出るあたりまで、低エネルギーの領域ではバンチ内の電子同士のクーロン斥力の効果が顕著である。それを空間電荷効果という。クーロン斥力は電子間距離の逆 2 乗に比例して弱くなるが、電子が相対論的領域まで加速されると、電子の静止系での電子間距離は、ローレンツ因子に従って増大する為、クーロン斥力はほとんど効かなくなる。ちなみに、実験室系で相対論的領域での空間電荷効果の抑制を記述すると、電子に働く電場と磁場とが打ち消しあう効果となる。空間電荷効果の抑制のためには、電子銃が高電圧である方が望ましく、また、低エネルギーの区間をできるだけ短くする様に初段の加速空洞を配置することが重要である。

電子の発散角 θ は $\theta \approx p_t / p_z$ と書けることを前に述べたが、電子を加速すると横方向の運動量 p_t は変化せず、縦方向の運動量 p_z のみが増大し、発散角が減少する。この効果を断熱減衰という (図 2-15)。断熱減衰で発散角が減少する効果により、電子のばらつきを位相空間の面積で表し



進行方向の運動量が増大するに従い、電子の発散角は減少する。

図 2-15 断熱減衰

た量、エミッタンスもローレンツ因子 $\gamma\beta$ に逆比例して減少する。電子銃や LINAC の性能を表す為にはエネルギーによって変化するエミッタンスを使うのは不便なことがあり、その場合、ローレンツ因子で規格化したエミッタンスが使われることがある。規格化エミッタンス、またはノーマライズドエミッタンス ε_n と、自然エミッタンス ε の関係は、

$$\varepsilon_n = \gamma\beta\varepsilon$$

である。

蓄積リングの入射器としての LINAC は、リング側で入射可能な範囲であれば、ビーム品質の悪化やパラメータの揺らぎはそれほど問題にならない。蓄積リングの場合、蓄積ビームのパラメータは入射ビームには依らず、蓄積リング側の性能、すなわち放射減衰と放射励起の平衡で決まる。どのような入射ビームであっても、蓄積されればパラメータはリング側で決まるパラメータにリセットされる。一方、ERL では、放射光による平衡状態を避ける為、入射部のパラメータ、ビーム輸送路のパラメータなど、上流側のビーム品質がそのまま下流側に伝わってゆく。蓄積リングの平衡状態よりも遙かに優れた品質のビームを作り出すため、ERL の入射部は非常に重要である。電子銃の電圧、集束の為のソレノイドの配置、バンチャーと初段加速空洞の配置などの最適化が、ERL 全体の性能そのものを決めてしまう。

2.9. 加速管の数と加速勾配、ビームパワー

KEK の LINAC では、2 m の加速管を 240 本使用している。全ての加速管を利用して 8 GeV まですべてを加速する場合、加速勾配は

$$8000/240/2 = 16.7[MV/m]$$

となる。実際には、あるクライストロンは不調だったり、予備として休ませてあったりする為、加速勾配は約 20 MV/m で運転が行われている。加速管 4 本に対して 1 本のクライストロンが接続されており、クライストロンの RF 出力パワーは 1 本あたり 50kW である。ところで、現状の LINAC のほぼ最大出力である、電荷 10 nC のバンチを

50 Hz の繰り返しで打ち出す場合、平均電流値は 500 nA となる。加速電圧をかけてパワーにすると、

$$10nC \times 50Hz \times 8GV = 4kW$$

に過ぎない。一方で LINAC が運転中の消費電力は約 3 MW である。消費パワーの中でビームに与えられる分は極僅かである。

ちなみに PF リングの場合、ユーザー運転時の初期電流値は 450 mA、ビームエネルギーは 2.5 GeV である。このビームを使い捨てとして作るためには、

$$450mA \times 2.5GV = 1125MW$$

の電力が必要となる。蓄積リングの場合、実際の蓄積ビームに 1125MW のパワーが蓄積されている訳ではない。例えば PF リングの場合、電子の周回周期は 1.6 MHz であり、1 バンチあたりの電荷量は約 1 nC、通常のユーザー運転では 280 バンチあるので、全電荷量は 280 nC に過ぎない。入射効率の問題もあるが、PF リングを周回する全ビームを作るためには、

$$1nC \times 25Hz \times 2.5GV = 63W$$

で 11 秒間運転するだけである。ちなみに実際の入射は電荷量はこの半分程度で、時間も 10 分程度かかっている。入射路途中や蓄積リング内での入射ビームの損失が避けられないからである。

ERL の場合、電荷 77pC で繰り返し 1.3 GHz のビームを超伝導 LINAC で作る。エネルギーを 100 MeV とすると、ビームに与えるパワーは

$$77pC \times 1.3GHz \times 100MV = 10MW$$

となる。ビームエネルギーが GeV の領域になると、パワーも GW の領域となる。消費電力や発熱、放射線の問題から、常に平均電流 100mA のビームを作り、どこかに捨て続けることは非常に困難である為、エネルギー回収が必須となる。エネルギーを回収を行えば、たとえ周回部のエネルギーが GeV 領域であっても、必要なエネルギーは入射部でビームに与えるエネルギーのみである。入射部のビームエネルギーを 10 MeV とすると、例えば

$$77pC \times 1.3GHz \times 10MV = 1MW$$

となる。ただし、この値は現状の LINAC の最大出力の 250 倍である。RF 源やカップラー、空洞など、入射部の全ての要素をこの 250 倍に耐え得る設計にしなければならず、また、ビームを捨てるビームダンプも同様である。

2.10. 振り分け偏向電磁石、BT

LINAC の終端にはビームスイッチヤードと呼ばれる振り分け部がある。ビームは PF、PF-AR、HER、LER という 4 つの蓄積リングへ続く BT (beam transport、ビーム輸送路) に振り分けられる。PF と他の 3 リングを振り分ける為の偏向電磁石の上から、振り分け部を見た写真を図 2-16 に示す。左側が PF へ続く BT、右側は PF-AR、HER、LER である。PF-BT の写真を図 2-17 に示す。電磁石は偏向電磁石を除いて空冷であり、蓄積リングものに比べて大きさが小さい。BT から PF リングまでの全景を図 2-18 に示す。BT の全長は約 181m、リングの



図 2-16 PF へのビーム振り分け



図 2-17 PF-BT 上流部分

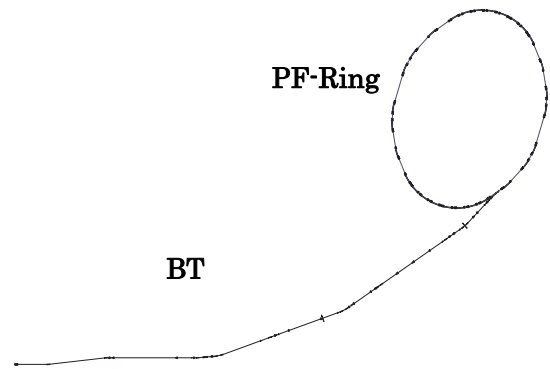


図 2-18 BT と PF リング

周長が 187 m であるので、それとほぼ同じ長さである。LINAC は地下、PF リングは地上にあるため、BT 途中には坂をあがってゆく部分もある。BT は真空やモニタ、電磁石に至るまで比較的安価に設計されている。1 日 1 度の入射時のみビームが通ればよいという時代はそれで十分であったが、top-up 入射を行う為には入射ビームの品質を維持し、入射効率を一定に保つ必要があり、BT の重要性は徐々に増してきている。

ここまでで LINAC の紹介を終える。重要だが全く述べられていない項目には、例えば Q 値、パワー損失、シャントインピーダンスといった RF の初歩、モニタ系、タイミング系、ビーム不安定性、各種フィードバックを含む制御系などがある。いずれもなくてはならない重要なトピックであり、LINAC を主題とした過去の OHO セミナーの教科書にはきちんと書かれている。

3. PF リングの構成

3.1. 全体の概略

PF リングはエネルギー2.5 GeV、周長 187 m の放射光専用の蓄積リングである。光源棟の全体図を図 2-19 に示す。PF には光源棟の他に電源棟があり、PF の電源、蓄積リングの主偏向電磁石、4 極及び6 極電磁石電源が設置されている。また、エネルギーセンターという建物もあり、LINAC 及び PF の為の空調や冷却水の為の設備が設置されている。

3.2. ビームライン

実験ホールの写真を図 2-20 に示す。典型的な X 線ビームラインの写真を図 2-21 に、VUV・SX ビームラインを図 2-22 に示す。X 線ビームラインの特徴は、ハッチで覆われていることである。X 線は空気中を透過するため、分光器など最終段の装置は大気中においても測定可能である。

また、ビームラインとリングの間の真空は、ベリリウム窓で切り離されている。一方、VUV・SX のビームラインはハッチがなく、光のダクトが直接見える状態である。X 線と異なり、VUV・SX のビームラインでは、光のダクトにおいても超高真空が要求され、また、リングと真空は繋がっている。



図 2-20 PF 実験ホール

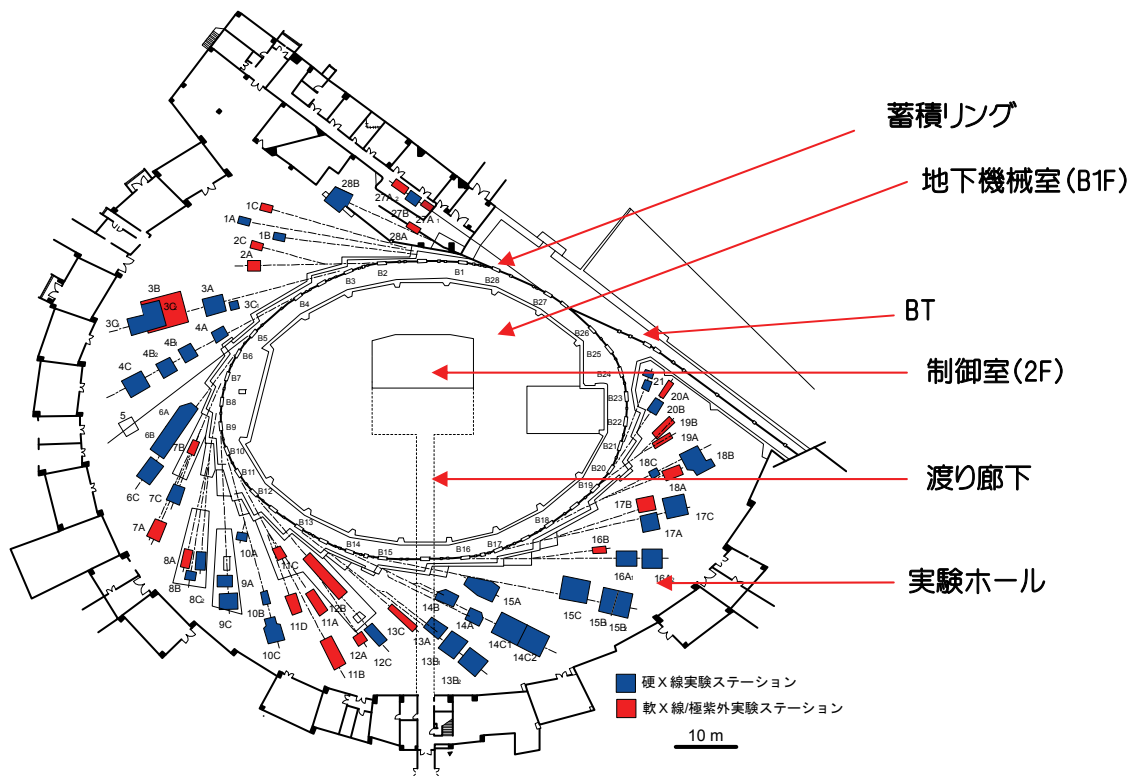


図 2-19 PF リング光源棟



図 2-21 典型的な X 線ビームライン



図 2-22 典型的な VUV・SX ビームライン



図 2-23 チャンネル部分

3.3. チャンネル

ユーザーのビームライン最上流の、リングと繋がっている基幹部をビームチャンネルという。PF リングのチャンネル部分の写真を図 2-23 に示す。光源からの広がりのある光の内、ユーザービームラインへ届ける部分を切り出し、余計な光を遮るのがチャンネルの役割である。また、ユーザー実験が安全に行える様に、安全インターロックも担っている。

3.4. 蓄積リングに必要な要素

加速器としての蓄積リングに必要な要素を適当に箇条書きとしてまとめてみる。

- ・ LINAC からのビームを入射するための入射システム。パルス偏向電磁石、パルスセプト電磁石、パルス電源。
- ・ 軌道を円形に閉じるための偏向電磁石、横方向に集束するための 4 極電磁石、エネルギー収差補正のための 6 極電磁石、軌道補正のためのステアリング電磁石、及び各電源。
- ・ 放射光を出して失ったエネルギーを補填するための加速空洞、カップラー、立体回路（導波管、サーキュレータ、ダミーロードなど）、クライストロンと電源、各種フィードバック制御を含むローレベル系。
- ・ 真空ダクト、真空ポンプ、真空モニタ、ダクトやベローを放射光から保護するアブソーバ、ダクトのつなぎ目（フランジやベロー）と、ビームから見て RF 的に凹凸をなくしてダクト内面を滑らかにするための RF コンタクト、ゲートバルブ、真空を開ける際のポートや粗引きセット。
- ・ 様々なハードウェアに対して、制御計算機、制御インターフェースとネットワーク、ソフトウェア。
- ・ 放射線安全などの安全系、LINAC との間やビームラインとの間、リングの各装置間に対するタイミング系。
- ・ ビーム診断系：BPM (beam position monitor、ビーム位置モニタ)、DCCT (DC current

transfer、蓄積電流値モニタ)、光干渉計(ビームサイズモニタ)、光ビーム位置モニタ、WCM(wall current monitor、壁電流モニタ、入射路途中のビームや、リングのフィルパターンの為のモニタ)、モニタ電極からの信号処理系(平均して精度を上げるか、瞬時測定で周波数を上げるか、また、ノイズの落とし方など色々な深いノウハウがある)、RFKO(RF knock-out、ビームを揺さぶるリボン状の電極、チューンを測るのに使う)。

- 不安定性抑制のためのフィードバックシステム、縦方向と横方向。ビーム振動を測定するピックアップ、信号処理系、ビームを蹴って振動抑制するためのキッカーと電源(RFアンプ)。
- 超伝導ウイグラー、圧縮冷凍機、電源。
- 挿入光源。
- 電源配線や各種信号配線のためのスペース、ケーブルダクト。
- 電力供給のための受電、変電、配電設備。
- 冷却水を、電磁石、RF、真空ダクト、ユーザーのビームライン、大規模な電源、空調設備など必要な部分に供給する為の水配管と熱交換機。別の建物になる場合は配管のためのトンネルなども必要。
- 加速器を設置する為の、放射線的に遮蔽され、地盤が安定したトンネル。ユーザーのための実験ホール……。

加速器には非常に多くの要素が必要であり、前にも述べたが多くの研究者、技術者、管理部門、委託業者が協力して建設、運転などを行っている。ここからはPFリングの各要素について簡単に紹介を行う。

3.5. 横方向と縦方向

ビーム力学において、縦方向”longitudinal”という、ビームの進行方向を指す。縦方向に垂直な方向、横方向”transverse”という、通常のリングでは上下方向である垂直”vertical”方向と、内外方向である水平”horizontal”方向を指す。ここでは、縦方向は”z”または”s”、垂直は”y”、水平

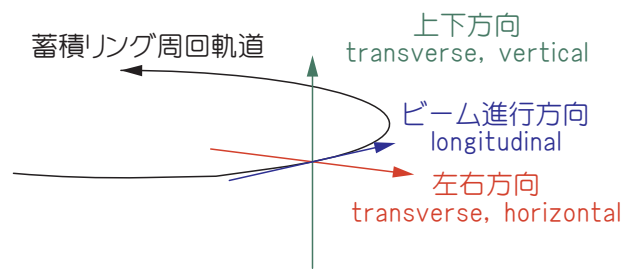


図 2-24 座標軸の名称



図 2-25 PF リングの 4 極電磁石



図 2-26 PF リングの 6 極電磁石

は”x”で表す。なお、文献によっては縦が”y”で垂直が”z”のこともある。

3.6. リングの DC 電磁石

蓄積リングの主要な DC 主電磁石には、偏向電磁石、4 極電磁石、6 極電磁石がある。偏向電磁石は粒子を曲げて周回軌道にする電磁石、4 極電磁石は粒子がダクトの中に留まるように集束する電磁石、6 極電磁石はエネルギー収差を補正する電磁石である。PF リングの 4 極電磁石の写真を図 2-25 に、6 極を図 2-26 に示す。4 極電磁石と 6 極電磁石の働きについて述べる前に、加速の中の粒子の運動について簡単に述べる。

3.7. 集束力、中心軌道、軌道周りの微小振動

真空ダクトと偏向電磁石だけを使っても、電子ビームは安定に周回しない。電子ビームを構成する電子には、運動の向きとエネルギーにばらつきがあり、ほとんど全ての電子は理想的な設計軌道上を真っ直ぐに飛んでいない。発散角を持った電子は、ずれた方向へ飛ぶので、何もしなければすぐにダクトの壁に当たってなくなってしまう。また、たとえ最初に全ての電子が理想的な軌道上を真っ直ぐ向いて飛び始めたとしても、電磁石には誤差がある。磁場の強さは完璧ではないし、偏向電磁石に傾きがあれば、水平磁場成分が生じてビームを垂直に蹴ってしまう。据え付け位置も完璧ではない。そこで、電子ビームに運動量のばらつきがあり、また、電磁石などに誤差がある場合でも電子ビームを蓄積リング内に留めて安定に周回させる為、集束力が必要となる。

集束力とは、重りについたバネの力と同じで、中心からずれた粒子を中心に引き戻す復元力

$$x'' = -kx$$

である。横方向には 4 極電磁石が線形の集束力を、縦方向には RF 空洞が非線形の集束力を与える。バネと重りのモデルの場合、重りには常に復元力が働くが、蓄積リングの場合、集束力のある要素は 4 極電磁石や RF 空洞に限られる。すなわち、粒子の周回軌道上の進行距離に応じて集束力の有無や強さが変化する。

$$x'' = -k(z)x$$

従って、粒子の振動は単振動、正弦振動ではなく、軌道上の距離に応じて振動の速さや振幅が変化

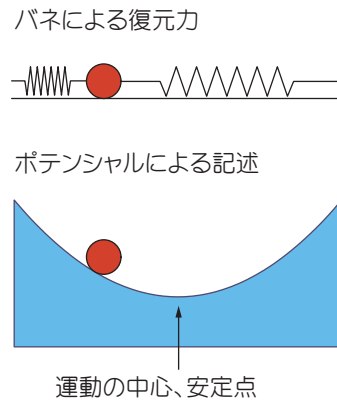


図 2-27 バネによる復元力

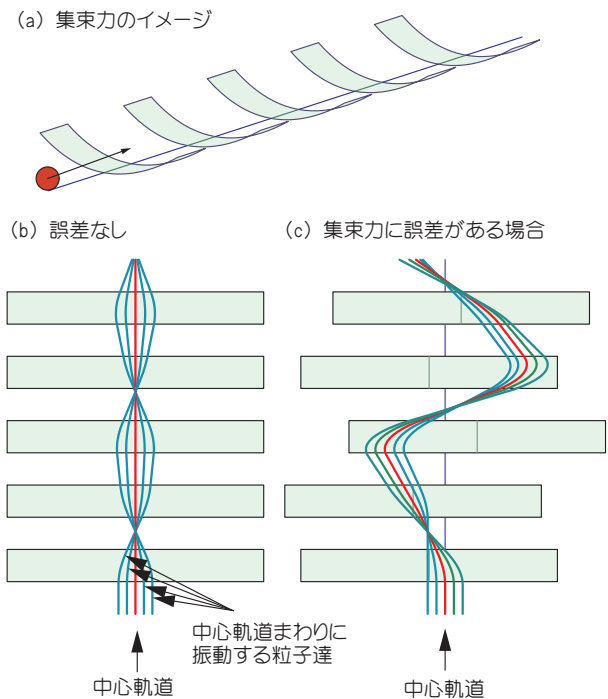


図 2-28 中心軌道とその周りの微小振動

する。加速器においてこの振動を、横方向はベータトロン (betatron) 振動、縦方向はシンクロトロン (synchrotron) 振動と呼ぶ。

蓄積リングを構成する全ての要素には誤差があり、設計上の中心と現実の粒子の運動の中心は異なる。ただし、誤差がある場合でも、集束力の作用でどこかに安定点、運動の中心が現れる。運動の中心とは、横方向にはベータトロン振動の中心軌道で、電磁石の内部のどこかを通過し、周回軌道となる軌道である。縦方向には、リングのある場所でビームを観測した時に、ビームの通過

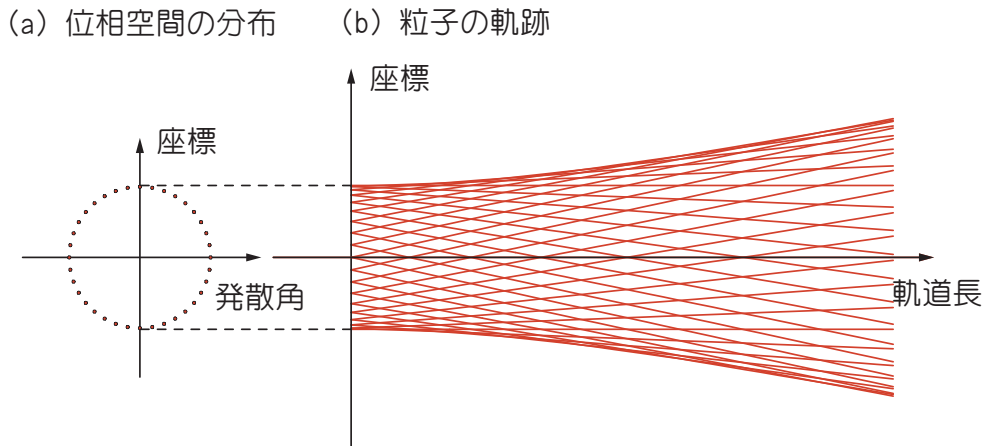


図 2-29 位相空間の粒子分布と、対応する粒子の軌跡

するタイミングである。誤差が大き過ぎると全ての振動が不安定になる場合もあるが、大抵の場合はどこかに運動の中心ができて、ばらつきのある電子達はその周りを振動することになる。横方向の中心軌道とベータatron振動のイメージを図 2-28 に示す。

3.8. ヒルの方程式

加速器における横方向のビームの運動方程式は、調和振動の方程式で、係数を時間的に変化させた様な方程式

$$x'' = k(s)x$$

である。現実の加速器の場合、電磁石には誤差があり、そのせいで復元力の中心が要素毎に変化したりする。通常は誤差の効果は分離して解く。解は中心軌道とその周りの微小振動として表される。なお、調和振動の場合は、変数は時間であるが、加速器の場合、中心軌道に沿った軌道長 $s[m]$ が変数となり、 $x' = dx/ds$ は中心軌道に対する粒子の進行方向の角度、すなわち発散角となる。

LINAC や BT の様に軌道が閉じていない場合、粒子の運動は軌道入口から順に辿って求めればよい。粒子が多数まとまって飛んでいることを考えると、まずは軌道入り口における粒子全体の位相空間での分布から、平均の位置と発散角を求める。図のイメージでは、それに従って入り口からボールを転がして軌道を観測、数学的には、そ

れを初座標として方程式を解けば中心軌道が求まる。

蓄積リングの場合、方程式の係数に周期性

$$x'' = k(s)x, \quad k(s+C) = k(s)$$

が加わる。4極電磁石による集束力は線形であるが、この様な方程式をヒルの方程式と呼ぶ。蓄積リングでも、例えば入射ビームの入射後1周の振る舞いを求めたい場合などには LINAC 同様に初座標に依存する解を求めるが、蓄積ビームの性質を調べる場合には周期解を求める必要がある。実際、蓄積リングの場合、ビームのパラメータは入射時のパラメータではなく、放射減衰と放射励起の平衡状態によって、すなわち、周期解によって決まる状態になる。中心軌道は、全ての誤差を含んだ状態で1周辿って元に戻る閉じた軌道である。

LINAC でも蓄積リングでも、粒子達全体の実空間の大きさであるビームサイズは、図 2-29 に示すように、単粒子の軌跡からは求めることはできない。図では位相空間においてある円周上に並ぶ粒子の、自由空間を進んだ場合の軌跡を示したが、ビームサイズはこの様な多数の軌跡に対する包絡線であり、ここでは軌道長の2乗に比例した放物線が包絡線となる。ヒルの方程式の解は位相及び振幅が変調された調和振動

$$x(s) \propto \sqrt{\beta(s)} \cos(\phi(s)), \quad \phi(z) = \int_0^s \frac{dz}{\beta(z)}$$

として書けるが、この振幅の変調を表す関数 $\beta[m]$ をベータatron関数と呼ぶ。(自由空間で

は β は放物線となる。) 集団としてのビームの大きさはこれに位相空間の面積 ε をかけ、

$$\sigma_x[m] = \sqrt{\beta\varepsilon}$$

となる。なお、通常はビームにエネルギーのばらつきがあるので、その影響も考慮する必要があり、後述するが $\sigma_x[m] = \sqrt{\beta\varepsilon + \left(\eta \frac{\sigma_\varepsilon}{E}\right)^2}$ となる。

3.9. 4極電磁石による集束力

横方向の集束力は4極電磁石によって与えられる。4極電磁石は電子ビームに対し、幾何光学におけるレンズと同じ作用を為すが、光の場合と異なり、水平方向に集束作用のある凸レンズ的であれば、垂直方向には発散作用のある凹レンズ的

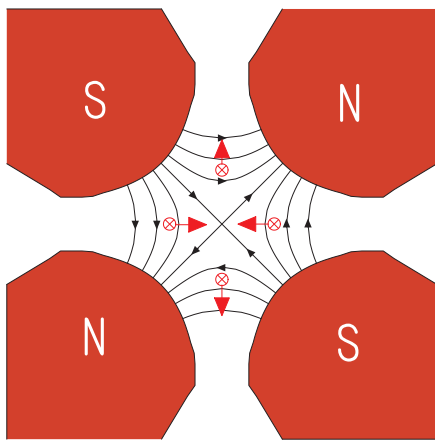


図 2-30 4極電磁石の断面形状

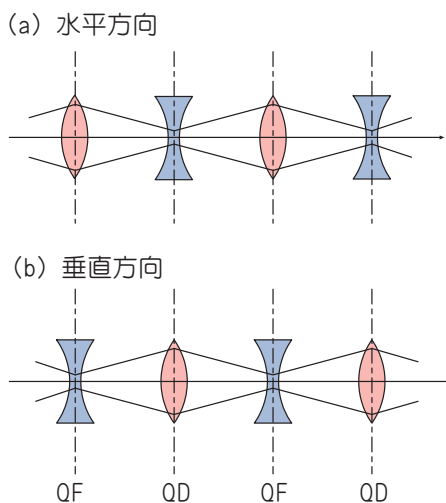


図 2-31 FODO 構造

になる。4極電磁石の断面を図 2-30 に示す。図の電磁石は水平方向にはビームを集束させ、垂直方向に発散させる。水平方向の働きが名前となり、集束極性(focusing)の4極電磁石という。SとNとを入れ替えた状態、すなわち、図をちょうど90度回して、水平と垂直を入れ替えた様な状態の電磁石を、発散(defocusing)という。レンズを並べてビームを転送する様子を、図 3-31 に示す。フォーカスとデフォーカスの4極を交互に並べる最も簡単な電磁石配置を、FODO 構造という。ビーム輸送路や衝突型加速器の円周部分などでよく採用される方式である。

3.10. 強集束と位相安定性

加速器において横方向の集束は4極電磁石によって与えられるが、強い発散と集束の4極電磁石を並べてビームを集束することを「強集束」の原理という。

強集束の原理が開発される以前、加速器に使われる電磁石は偏光電磁石のみであった。偏光電磁石は中心軌道を曲げるだけでなく、ビーム振動に対しては水平方向には弱い集束力として働く。偏光電磁石のみ並べただけでも、水平方向のビームの運動は安定にできる。その場合、別に垂直方向の集束力が必要で、初期は偏光電磁石端部の偶然な誤差磁場、さらに進むと端部の角度の工夫で水平方向の集束力を垂直方向に回すなどの工夫が為された。初期の加速器、特にサイクロトロンなどで、水平と垂直の集束力の和が一定という制限の下に作られた集束系を「弱集束」という。

偏光電磁石への工夫をさらに進めると、磁極に傾きをつけ、極端な場合は4極電磁石を半分に分ったような形の偏光電磁石にすると集束力を強くできる。そのような偏光電磁石を機能結合型、combined function magnet といい、機能結合型の偏光電磁石だけで FODO 構造を作ることができる。やがて、集束機能を偏光電磁石から分離し、4極電磁石が導入されることになる。なお、現在でもビームのエミッタンスを下げるために機能結合型の偏光電磁石が使われることがある。

縦方向の集束は RF 空洞によって与えられる。詳細は RF の項で述べるが、RF による縦方向の集束作用を「位相安定性」の原理という。強集束と位相安定性が、加速器のビーム力学を支える 2 大原理である。

3.11. エネルギー収差

相対論的領域まで加速されているため、電子の速さはほぼ光速であり、エネルギーが変化しても速さは変わらない。エネルギーによって変化するのは質量、運動量であり、高いエネルギーの電子は電磁石によって曲げられにくく、低いエネルギーの電子は多く曲げられる。この項ではエネルギー収差に伴う磁場による曲げられ方の違いから生じる効果について述べる。

偏光電磁石において、高いエネルギーの電子

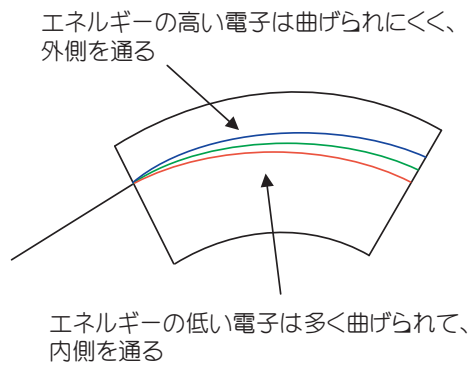


図 2-32 エネルギー分散

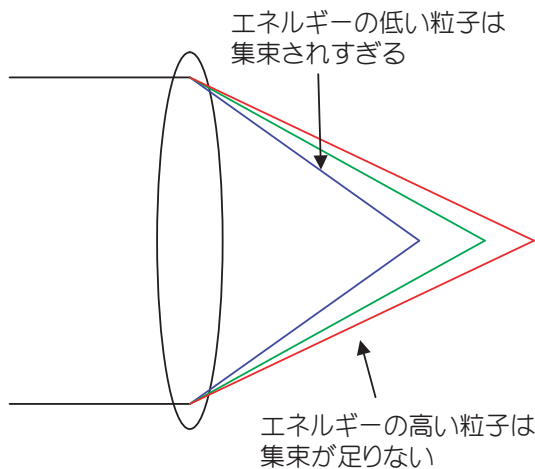


図 2-33 色収差

の曲げ角は少なく、低いエネルギーでは多くなる。集束力の作用でエネルギーのずれた電子も安定に周回できるが、中心軌道は変化する。エネルギーに依存した中心軌道の変化量を分散関数、**dispersion function** と呼ぶ (図 2-32)。通常はエネルギーのずれに線形な部分を $\eta[m]$ で表し、

$$\Delta x = \eta \frac{\Delta P}{P}$$

とする。ただし、 $\Delta P/P$ は運動量のずれである。元々の軌道にこれを足したものが、エネルギーがずれた粒子のベータatron振動の中心軌道となる。

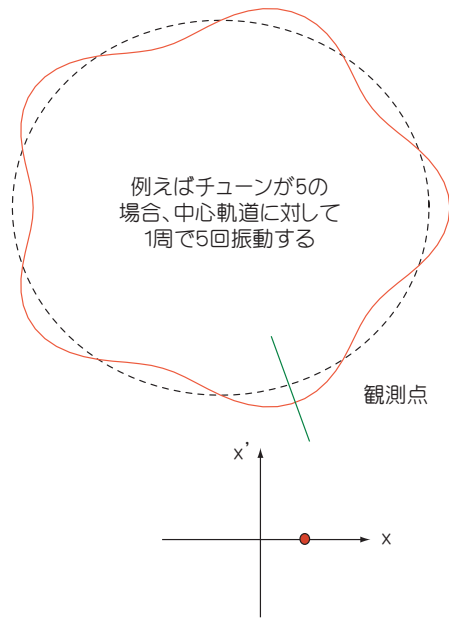
中心軌道の変化に伴い、軌道長も変化する。通常はエネルギーの高い、重い粒子は外側を通るために軌道長が長くなり、エネルギーの低い、軽い粒子は内側を通るために軌道長が短くなる。エネルギーによる軌道長の変化率をモーメントコンパクション (**momentum compaction factor**) という。分散と同様に、エネルギーに線形な項を α で表し、

$$\frac{\Delta C}{C} = \alpha \frac{\Delta P}{P}, \quad \alpha = \frac{1}{C} \oint_{\text{bend}} \frac{\eta}{\rho} ds$$

である。ここで、 C は周長、第 2 式の積分は全偏向電磁石内での積分で、 ρ は偏向電磁石の曲率半径である。(導出については、次章を参照。) 通常のリングでは重い粒子は外側を回ることから、 $\alpha > 0$ であるが、蓄積リングの集束系を工夫して $\alpha = 0$ や $\alpha < 0$ にすることもできる。

次に、エネルギー収差の、集束力に対する影響について述べる。4 極電磁石の集束力は、高いエネルギーの電子に対しては弱く、低いエネルギーの電子には強く働く。集束力の変化は、電子のベータatron振動に影響を与える。強く集束されれば、ビームはより激しく振動することになり、振動の包絡線は細く、リング 1 周の振動数は上昇する。逆に、集束が弱ければ、包絡線は太く、振動数は減少する。運動量のずれに対するベータatron振動数の変化を色収差という。線形部分に対する係数 ξ を、

(a) 整数チューンの時の粒子の軌道



(b) 半整数チューンの時の粒子の軌道

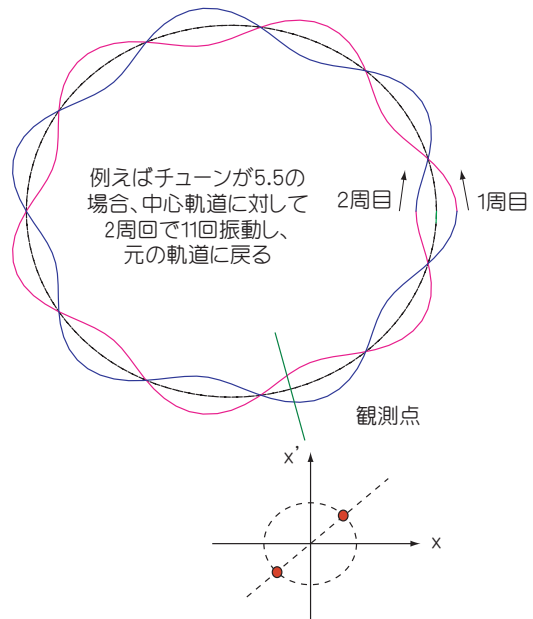


図 2-34 整数・半整数チューンにおける軌道例

$$\Delta\nu = \xi \frac{\Delta P}{P}, \quad \xi = -\frac{1}{4\pi} \int_{B,Q} K\beta ds$$

と書く。ここで、 $\Delta\nu$ はベータトロン振動数、 K は4極電磁石や偏向電磁石の集束力の強さを表し、

$$K = \frac{B'}{B\rho} [m^{-2}]$$

である。なお、この K を使うと4極電磁石内の運動方程式は $x'' = Kx$ と書ける。

3.12. 振動数と共鳴振動

蓄積リングを周回する粒子は、中心軌道の周りをベータトロン振動しながらまわっている。粒子の運動が完璧に

$$x'' = k(s)x$$

という線形の方程式で尽くされるなら、振動の大きさを $2J$ として、解は

$$x(s) = \sqrt{2J\beta(s)} \cos(\phi(s))$$

と書ける。数学的には、振幅がどんなに大きくてもこの解は正しい。また、振動数がどんな値であろうとも、解は解である。現実にはそうではない。

蓄積リングの軌道上の或る1点で、ベータトロン振動中の粒子を観測することを考える。振動数が整数の場合、粒子は周回毎に蓄積リング内の同じ場所を通過する為、観測される粒子の位置は一定である(図 2-34(a))。0.5、1.5、2.5……などを半整数というが、チューンが半整数の場合、粒子は2周回毎に同じ軌道に戻るの、或る点で観測すると、粒子は軸対称な2点間を周回毎に行ったり来たりする(図 2-34(b))。1/3、2/3……など、1/3の倍数の場合、3周毎に同じ軌道に戻るの、対称な3点を交互に行き来する。一方で、振動数が中途半端な値の場合、粒子はベータトロン関数で決まる最大振幅内の至る所をくまなく適当に通過して行く様に見えるだろう。

軌道上のその点で粒子に余計な力、例えば偏向電磁石の様に、通過する粒子を常に或る方向へ蹴る力、が働いた時を考える。振動数が整数の場合、周回毎に粒子は同じ方向に蹴られ、その方向の振幅が増大していく(図 2-35)。これは数学的には共鳴振動となり、減衰力項がなければ振幅は指数関数的に増大していく。次に、余計な力が4極電磁石の力の様に、中心軌道の右側と左側で力

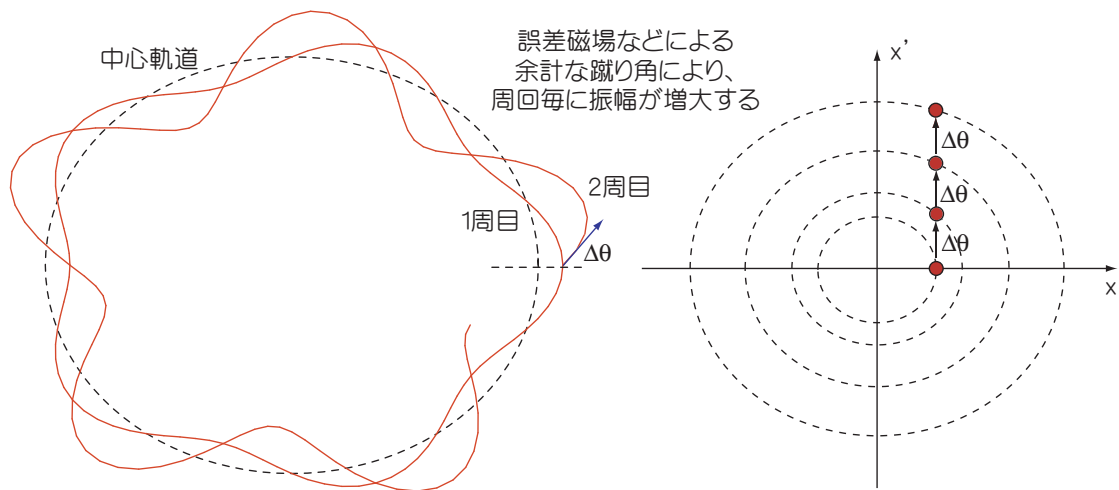


図 2-35 整数共鳴

の向きが反転する様な場合を考える。振動数が半整数の場合、粒子は中心軌道の右、左、右、左、……と軸対称な2点間を行き来するが、右側では右へ蹴られ、左側では左へ蹴られ、という共鳴が生じる。この場合も振幅は指数関数的に増大してゆく。直感的には明らかではないが、余計な力が6極電磁石的な蹴りの場合、振動数が1/3の倍数の時に共鳴振動となる。一方、ベータトロン振動数が中途半端な値の時、粒子にとってこれらの力は、周回毎にでたらめの方に蹴られているのと同じことで、協調的に働かず、共鳴にならない。例えば、偏向電磁石的な力は粒子の中心軌道を若干歪ませ、4極電磁石的な力は振動数を若干変化させ、6極電磁石的な力は、運動量偏差に対する応答を変化させるが、設計粒子に対しては線形の範囲では影響しない。従って、ベータトロン振動数は、できるだけ中途半端な値にしておくべきである。通常の場合、整数、半整数、1/3の倍数、1/4の倍数までを考え、それらから離れた値にしておけば十分である。

現実の加速器では、粒子には様々な不明な力が働いている。これらの力は、数学的にきちんと書けないのみならず、どこでどのような余計な力が働いているか、現実にはほとんど分からないまま加速器は運転されている。例えば、理想的に設計製造された電磁石でも、ビーム進行方向に磁極の

から磁場が裾を引くが、その影響をきちんと扱うことは困難である。電磁石の誤差については統計的に大きさの予測はできても、具体的にどの電磁石にいくつの誤差があるかを知ることはほぼ不可能である。また、RF加速空洞には、加速の為の電磁場だけでなく、余計な電場、高次モードが存在するし、場合によっては空洞の温度変化や振動による変形で時々刻々それらが変わることもある。さらに、蓄積ビームに働く力は、電磁石とRF空洞からの力だけではない。真空ダクトは金属製であり、内壁は導体である。ダクトの中を走る電子には、ダクト上に鏡面電荷がついて走る。ダクトに凹凸があると、鏡面電荷とビームとの間の場が変化し、ビームに力が働く。ダクトの凹凸が、空洞のような閉じた空間を作ると、そこに電磁場が長い時間残ってしまうこともある。このような電磁場を航跡場、ウェイクフィールドという。現実の加速器では、線形、非線形を問わず、余計な電磁場や航跡場による力が至る所に存在する。ベータトロン振動数を中途半端な値にし、空洞やダクトの形状などを工夫することで、高次モードや航跡場の振動数がベータトロン振動数に重ならないようにし、破壊的な共鳴振動が励起されないようにしているのである。

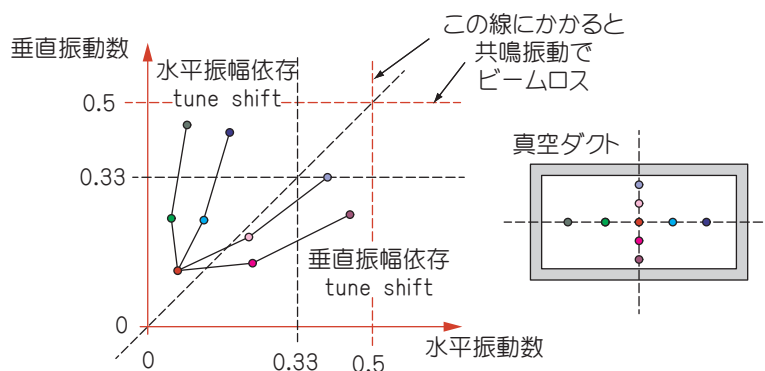


図 2-36 ダイナミックアパーチャと共鳴線概念

3.13. ダイナミックアパーチャ、物理アパーチャ

中心軌道付近の粒子に対して、設計上のベータトロン振動数を中途半端な値にすることが重要であるが、運動量のずれや、振動の振幅が大きい場合、ベータトロン振動数が変化する。それぞれ、運動量依存チューンシフト (momentum dependent tune shift)、振幅依存チューンシフト (amplitude dependent tune shift) というが、その効果で振動数が共鳴に引っかかる振動数になると、その運動量の粒子、その振幅の粒子は安定に周回できずに失われてしまう。逆に言えば、真空ダクトの中で粒子が安定に周回できる空間的な領域と運動量の範囲は、設計粒子の振動数から振幅または運動量偏差を増やしていき、共鳴に当たるまでの範囲、ということになる。概念を図 2-36 に示す。この安定領域をダイナミックアパーチャ (dynamic aperture、動力的口径) という。一方、真空ダクトによる物理的な口径をフィジカルアパーチャ (physical aperture、物理口径) という。ダイナミックアパーチャはフィジカルアパーチャよりも広ければ十分である。

蓄積リングの設計において最も重要なことは、十分に広いダイナミックアパーチャを確保することである。ダイナミックアパーチャが狭いと、入射が困難になり、また、蓄積ビーム寿命も短くなる。ダイナミックアパーチャを解析的に求める方法はなく、現在は様々な力を考慮した上で、粒子を計算上で数千～数万周回させてみて、途中で振幅がダクトの大きさを超えないか調べ

Time: 2006/11/09 12:12:24 I*τ : 836.2 [A·min]
 Beam Current: 411.9 [mA] Vacuum : 6.4E-8 [Pa]
 Life Time : 33.8 [hours] ∫ Idt : 1993.0 [A·h]

BL01 OPEN	BL02 OPEN	BL03 OPEN	BL04 OPEN
BL05 OPEN	BL06 OPEN	BL07 OPEN	BL08 CLOSE
BL09 OPEN	BL10 OPEN	BL11 OPEN	BL12 OPEN
BL13 OPEN	BL14 OPEN	BL15 OPEN	BL16 OPEN
BL17 CLOSE	BL18 OPEN	BL19 OPEN	BL20 OPEN
BL21 OPEN	BL22	BL23	BL24
BL25	BL26	BL27 OPEN	BL28 CLOSE

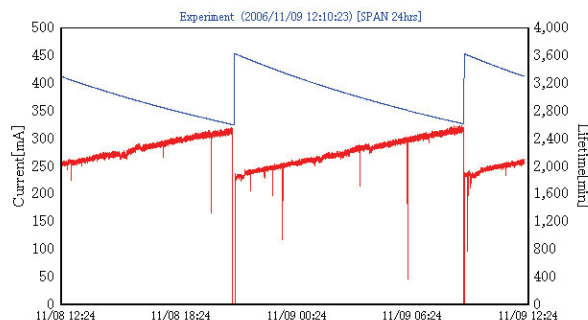


図 2-37 PF リングのある日の電流履歴

る方法が行われる。それを、粒子トラッキング (particle tracking) 計算という。計算においては、どの共鳴線が効くか調べると共に、どの様にすれば共鳴線が弱くなるか、振幅や運動量依存チューンシフトが小さくなるか、などを考えつつ、電磁石の値の最適化が行われる。整数共鳴と半整数共鳴はどうやっても逃れられないが、他の共鳴はリングの対称性や非線形力の配置の最適化で強さが変わる。蓄積リングの電磁石配置をラティスというが、ラティス設計の目的は、対称性や非線形力の配置、チューンを最適化して広いダイナミックアパーチャを確保することにある。

3.14. ビーム寿命

蓄積リングに蓄積された電流は、時間と共に減ってゆく。電流減少を指数関数

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

で記述したときの時定数 τ をビーム寿命という。PF リングのある日の運転の様子を図 2-37 に示す。この日は1日2回、朝9時と夜9時に入射が行われ、入射直後の電流値は450 mAである。それが12時間かけて約300 mAまで減少している。入射直後のビーム寿命は約30時間、電流が300 mAの 때가約41時間である。

蓄積リングの寿命は、量子寿命 (quantum lifetime) τ_q 、残留ガス散乱によるビーム損失 τ_g 、ビーム内散乱またはタウシェック効果によるビーム損失 τ_T 、の3つの効果によって決まる。

$$\tau = \sqrt{\tau_q^2 + \tau_g^2 + \tau_T^2}$$

量子寿命 : 粒子が放射光を出す過程は量子力学的な確率過程であり、確率的に非常に大きなエネルギーの放射光を発生させる場合がある。粒子はその反跳として非常に大きく蹴られ、真空ダクトに衝突して失われる。ただし、真空ダクトが非常に細い場合を除き、ビーム寿命に対するこの効果の寄与は無視できるほど小さい。

残留ガス散乱 : 粒子が真空中の残留ガスと衝突して失われることで決まる寿命。真空度が悪い場合や、リングのエミッタンスが大きい場合 (IBS が小さいので)、リングのエネルギーが大きい場合に主として寿命を決める。

ビーム内散乱 : ビーム内散乱 (intra-beam scattering, IBS) またはタウシェック効果 (Touscheck effect) とは、バンチ内でベータトロン振動している粒子同士が衝突し、横方向の運動量が縦方向の運動量に変わる効果である。ベータトロン振動のエネルギーが縦方向のエネルギーのズレへと変わること、粒子が運動量方向の安定領域から外れ、失われる。蓄積リングの場合、垂直方向はビームサイズが非常に小さく、ベータトロン振動の振幅及びエネルギーも小

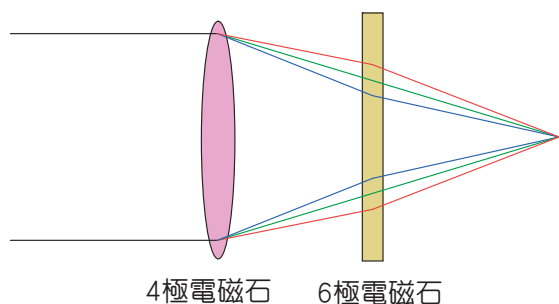
さい為、この効果は効かない。水平方向のベータトロン振動のみが寄与する。低エネルギーの蓄積リングの方が、もともと縦方向の運動量が小さいため、小さな変化にも敏感となる。また、エミッタンスの小さなビームほど散乱が起こりやすい。従って、高エネルギーのリングでもエミッタンスが非常に小さい場合は効くことがあるが、主に中低エネルギーの低エミッタンスリングで顕著である。ビーム内散乱による寿命を長くするためには、運動量方向にアパーチャが広いことが重要である。

PF リングの場合、改造や修理のためにリングの真空を空けて作業を行うと、直後は真空圧力、すなわち残留ガスが寿命を決める。運転を続けるとガスは減ってゆき、寿命は長くなっていく。これを焼き出し効果という。やがて、圧力が下がりきると、寿命は残留ガス散乱とタウシェック効果の両方によって決まるようになる。タウシェック効果による寿命が見えるまで焼き出しが進んだ状態では、垂直方向のビームサイズを増やしたりバンチ長を伸ばしたりすると、水平方向のIBSの頻度が減少し、寿命が長くなる。

3.15. 色収差の補正

横方向の物理的なアパーチャはダクトによって決まるが、縦方向はRF空洞の電圧によって決まる。縦方向の安定領域をRFバケツ (RF bucket) というが、領域の大きさをバケツハイト (bucket height) という。通常は $\frac{\Delta P}{P}$ で数%である。横方向のダイナミックアパーチャがダクトより広いことが望ましいのと同じく、縦方向もバケツハイトよりは大きいことが望ましい。その為には、色収差に伴う運動量依存チューンシフトを補正する必要がある。

色収差の補正 (図 2-38, 39) は、6極電磁石を使って行われる。一般に、 n 極電磁石の中をビームが通過する場合、軌道にズレがあると、ズレに比例した $n-1$ 極成分として働く。例えば、4極電磁石ではズレに比例した2極成分すなわち曲げ角が、6極電磁石ではズレに比例した4極成分すな



4極電磁石 6極電磁石

図 2-38 色収差補正

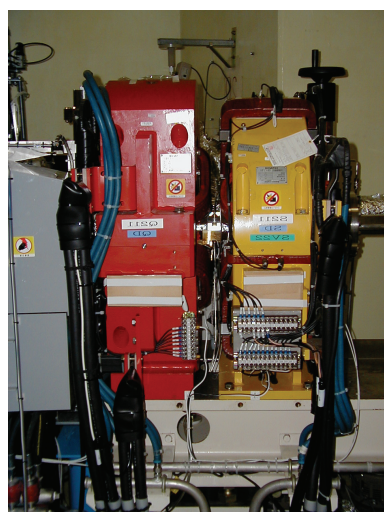


図 2-39 4 極電磁石と 6 極電磁石

わり集束力になる。6 極を分散関数のある部分に設置することで、分散関数の効果で運動量に比例した水平方向の軌道のズレが生じ、6 極電磁石の効果で軌道のズレ、すなわち運動量のズレに比例した集束力がビームに与えられ、エネルギーによる集束力の違いを補正することができる。

最近の放射光源においては、エミッタンスを下げるために強い集束力が用いられている。4 極電磁石が強ければ色収差も大きく、補正のための 6 極電磁石にも必然的に強い磁場が必要となる。6 極電磁石はリングに存在する最も大きな非線形力であり、強い非線形力は、多数の共鳴振動を励起し、振幅依存チューンシフトを劇的に増大させ、ダイナミックアパーチャを減少させる。対策として、分散関数のない部分に 6 極電磁石を設置し、共鳴やチューンシフトを打ち消すようにする最適化が行われ、その様な目的の 6 極電磁石をハ

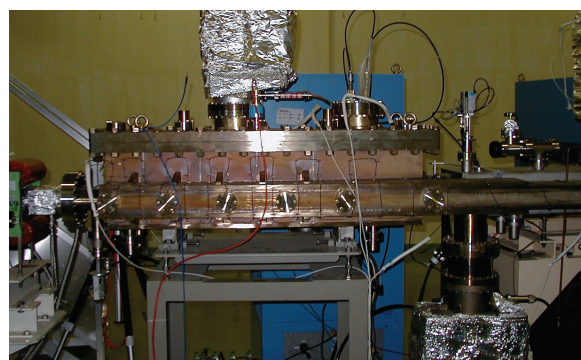


図 2-40 セプタム電磁石外観

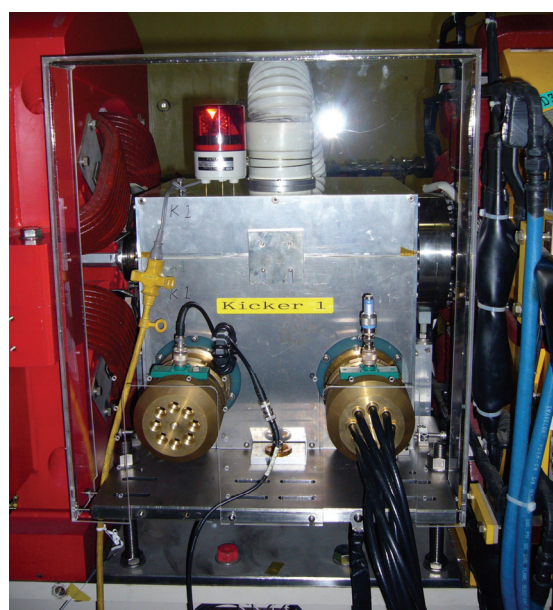


図 2-41 キッカー電磁石外観

ーモニック 6 極 (harmonic sextupole) という。6 極電磁石の最適化が、低エミッタンスの蓄積リングにおいてダイナミックアパーチャ確保の鍵となる。

ここまで、リングの DC 的な主電磁石及び横方向のビーム力学の概略を述べてきた。次は、パルス電磁石を用いた入射系について述べる。

3.16. 入射

入射器からのビームを蓄積リングへ打ち込み、蓄積することを入射という。入射にはセプタ

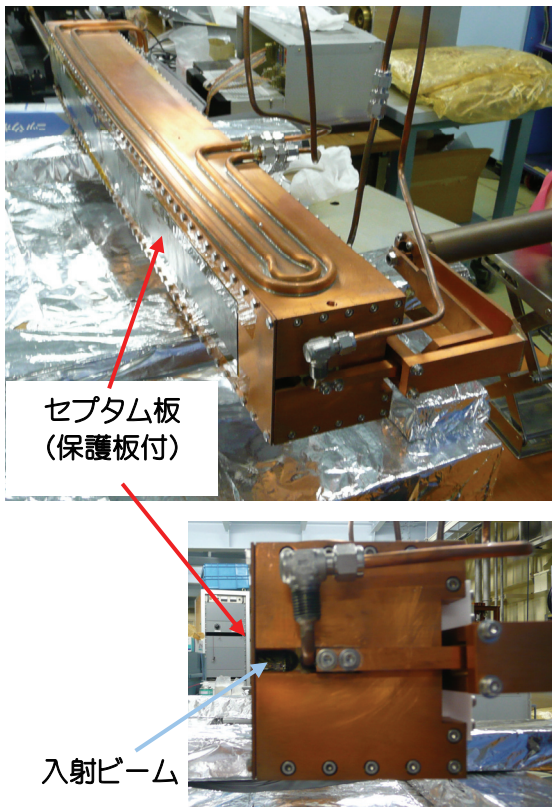
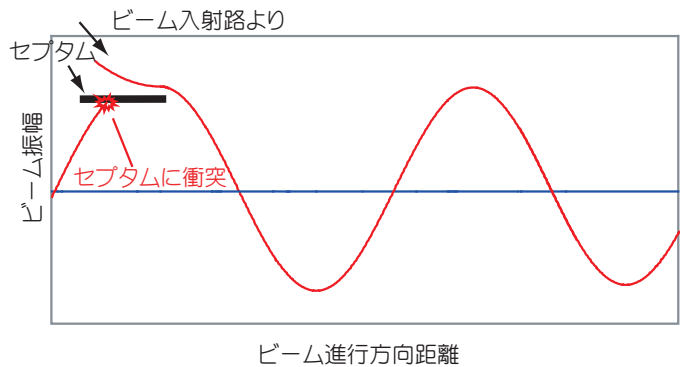


図 2-42 セプタム電磁石本体

ム電磁石 (図 2-40)、キッカー電磁石 (図 2-41) という 2 種類のパルス電磁石が用いられる。

セプタム電磁石はビーム輸送路最下流、すなわちリングとの境界に置かれる特殊な電磁石で、入射ビームの軌道と蓄積ビームの軌道の間は、セプタム板という金属板で仕切られている (図 2-42)。入射ビーム側で磁場をパルスの励磁すると、セプタム板上で渦電流が生じ、蓄積ビーム側には磁場が遮蔽される。セプタム電磁石はビーム輸送路の最後で、入射ビームの軌道を蓄積リングの軌道に沿った向きに向けるために使われる。蓄積後に入射ビームのベータトロン振動の振幅が最小になるようにセプタムの角度が決められるが、蓄積リングのパラメータによっては、入射ビームの軌道は蓄積リングの軌道と平行でない場合が最適になることもある。入射されたビームは、蓄積リングの軌道を中心軌道として、大振幅のベータトロン振動を始める。

(a) 蓄積ビームにバンプを立てないと……



(b) 通常の入射スキーム

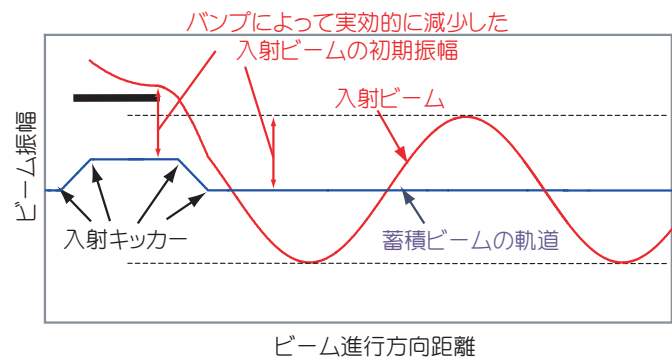


図 2-43 入射ビームの振動

入射ビームのベータトロン振動はセプタム板の外側から始まるため、周回して戻って来た入射ビームはセプタム板に内側から衝突して失われる (図 2-43-(a))。それを防ぐために、入射の瞬間だけ入射点において蓄積ビームの軌道を入射ビームに近づける操作が行われる (図 2-43-(b))。入射ビームのベータトロン振動の初期振幅は、入射ビームの位置と蓄積ビームの中心軌道との距離なので、一時的に蓄積ビームを入射ビームに近づけることで、振幅を減らすことができる。入射ビームが周回して戻って来た時には中心軌道は元の場所に戻っており、入射ビームはセプタム板の内側を通過することができる。入射点で蓄積ビームの軌道を入射の瞬間だけ移動させる、局所パルスバンプの為に使われるのがキッカー電磁石である。

パルス電磁石は DC 電磁石と異なり、渦電流の効果が顕著である。鉄芯にはフェライトの様に渦電流の効果が小さい材質 (図 2-44) か、絶縁さ

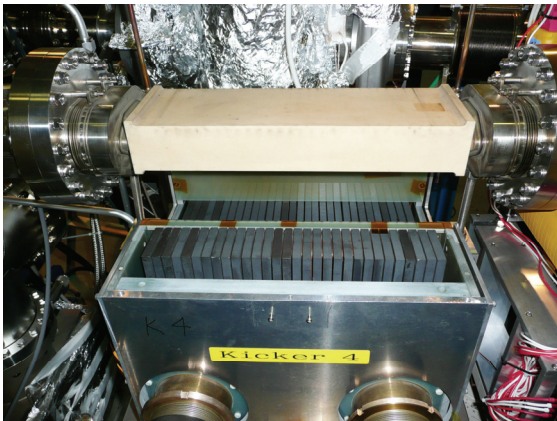


図 2-44 キッカー半割写真

れた薄い鉄板を重ねた様な積層鋼板構造にすることが必要である。また、金属製のダクトはセプタム板と同じで磁場を遮蔽する為、真空ダクトにもセラミック製のダクトを使う必要がある（図 2-45）。また、パルス磁石の場合、電源に対しては電氣的な抵抗値よりもインダクタンスの影響が顕著である。インダクタンスに周波数をかけたものが電圧になるが、通常、インダクタンスを下げるためにコイルの巻き数や断面積を小さく抑える。そうすると磁場を出すためには電流値を大きくする必要が生じる。インダクタンス、電流値、電源電圧のバランスでパラメータを最適化するが、通常は電流数千アンペア、電圧数十 kV になる。渦電流の効果は非常に厳しく、電磁石の周りに導体があると悉く帯電する為、接地の取り方も重要となる。

PF リングの入射点付近のラティスを図 2-46 に、写真を図 2-47 に示す。さて、入射ビームは大振幅のベータトロン振動をしながらリングを周回するが、放射減衰の効果で振幅が徐々に減ってゆき、やがて蓄積ビームと混じり合う。次の項では放射減衰と放射励起について述べる。

3.17.放射減衰と放射励起

蓄積リングを周回する電子の位相空間での広がり、すなわちエミッタンスは、放射減衰と放射励起の平衡状態によって決まる。また、入射ビームの振動や、パルス電磁石の誤差、航跡場などによって励起された蓄積ビームの振動も、放射減

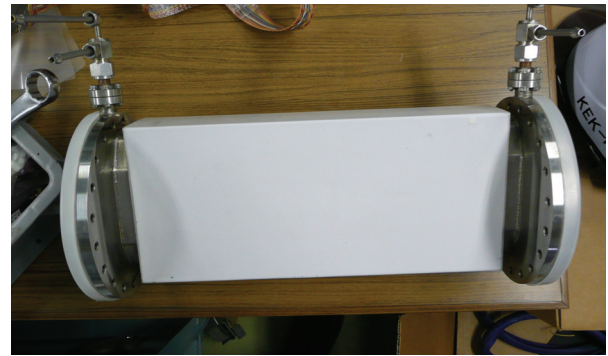


図 2-45 セラミックダクト

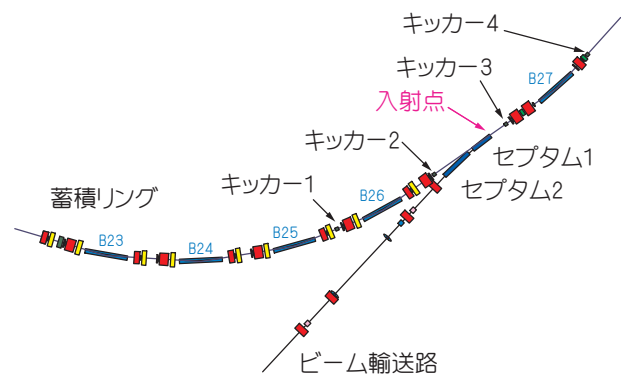


図 2-46 PF 入射点付近のラティス

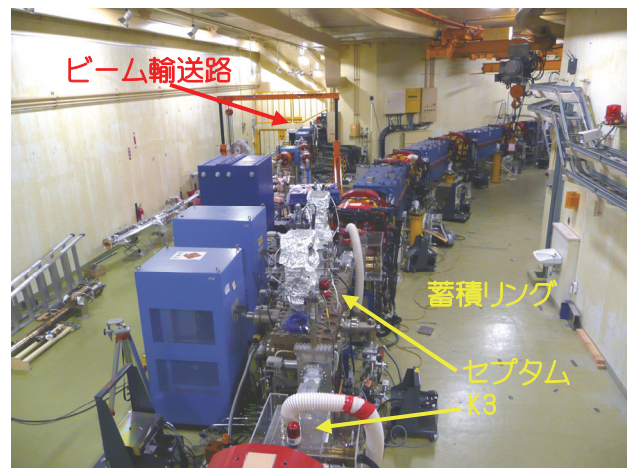
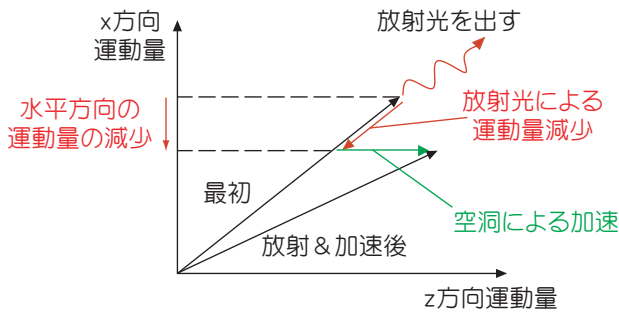


図 2-47 PF 入射点付近

衰の効果で減衰する。この項では放射減衰と放射励起について述べる。

粒子が放射光を出す（図 2-48-(a)）と、粒子の運動量が減少する。放射光は粒子の進行方向に放出されるので、ベータトロン振動している粒子

(a) 放射減衰



(b) 放射励起

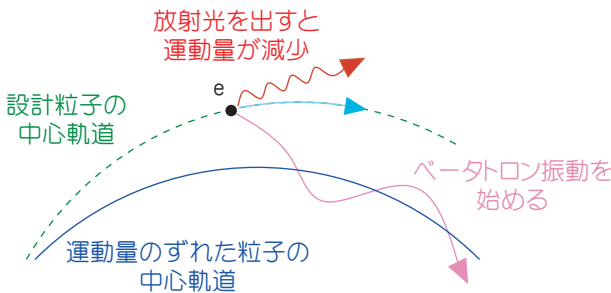


図 2-48 放射減衰と放射励起

に対しては、設計軌道に垂直な、ベータトロン振動の運動量が含まれる。放射光によって失われた運動量は RF 加速空洞による加速で補われるが、空洞が粒子に与える運動量は常に設計軌道に平行である。すなわち、放射光は余計な方向の運動量も持ち去るが、加速は常に望ましい方向に対して行われるため、放射光を出し、その分加速され……を繰り返すと、ベータトロン振動は減衰する。この効果を放射減衰という。

さて、放射光は偏向電磁石で軌道が曲げられた時に出るが、放射光を出して運動量とエネルギーが変化した粒子は、その瞬間から偏向電磁石での曲げられ方が変化する。すなわち、放射光を出してエネルギーが変わった瞬間から、粒子は分散関数で決まる軌道を中心にベータトロン振動を始める。この効果を放射励起という。

横方向の運動量が大きいかほど放射光の持ち去る余計な運動量も大きいため、放射減衰はベータトロン振動の振幅によって大きさが変わる。一方、放射励起はその時点の粒子のベータトロン振動の状況に依らない。従って、粒子の集団としての広がり ε を考えると、その減衰は

$$\varepsilon(t) = \varepsilon \exp\left(-\frac{2}{\tau}t\right)$$

と書ける。ここで、 τ は減衰時間である。励起の強さを G と書けば、時間変化の式は、

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{\tau}\varepsilon + G$$

となる。これを $d\varepsilon/dt = 0$ として解けば、平衡状態における自然エミッタンスが分かる。

蓄積リングに入射されたビームは、放射減衰によって振幅が減少し、やがて蓄積ビームと混じり合う。PF リングの水平方向の減衰時間は 7.8 ms である。すなわち、入射ビームが 12500 周すると振動の振幅が $1/e \approx 37\%$ に減少する。

入射ビームの振動の観測は、ビームの電荷が小さく、また、周回平均をとらずに観測する必要がある為に簡単ではない。また、入射ビームは入射直後は集団としてまとまっているが、蓄積リングを周回するに従ってばらばらになっていく。電気的なモニタにおいては、ビームの重心を測定することしかできないため、ビームがばらばらになるに従い、振動が急激に減少していく様に見える。これをビームのスミア(smear)という。ビームがスミアしてしまう場合でも、放射光を使ったモニタを使えば振動が観測できる。

横方向に関してはとりあえずここまでとし、次はビーム進行方向の運動と、その集束力を与える RF 加速空洞について述べる。

3.18. RF 加速空洞

粒子が放射光を出して失った分のエネルギーを注ぎ足す為、線形加速器と同じく、蓄積リングでも粒子を加速するのに RF 加速空洞が使われる。PF リングの加速空洞の写真を図 2-49 に示す。RF 源や立体回路は線形加速器と同様であるが、線形加速器に比べて周波数が 500.1 MHz と低いいため、導波管の大きさが大きい。PF リングのクライストロン(図 2-50)は、電子源が上部にあり、上から下に向けて電子が飛ぶ構造になっている。

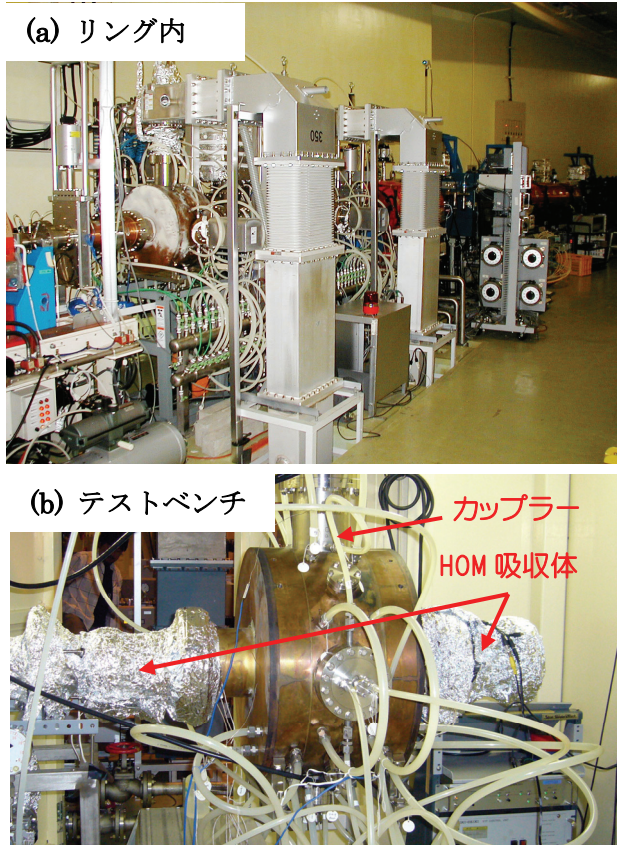


図 2-49 PF リングの RF 加速空洞

途中の空洞で密度変調し、取り出し空洞から RF が取り出されるという構造は同じである。周波数が低いので、導波管同様にクライストロンも大きい。RF 立体回路の一部を図 2-51 (次ページ) に示す。クライストロンから発生した RF は、導波管を通してリングの RF 空洞へと供給される。クライストロンの出力空洞の出口や、リング内の RF 空洞本体の入口など、導波管と空洞の間には結合器(カップラー、coupler)というアンテナ状の部品が取り付けられている。カップラーによって空洞内から RF が引き出され、また、空洞に RF が供給される。導波管は内部も含めて空気中であるが、空洞内は真空であり、カップラーがその境界になっている。カップラーの設計は、カップラー内のアンテナ構造の電磁場分布を計算し、発熱や放電の防止を考えつつ、真空をセラミックで仕切るという難しい作業である。

RF パワーの流れは、伝送線回路の理論を使って計算される。数学的には、電磁場をフーリエ

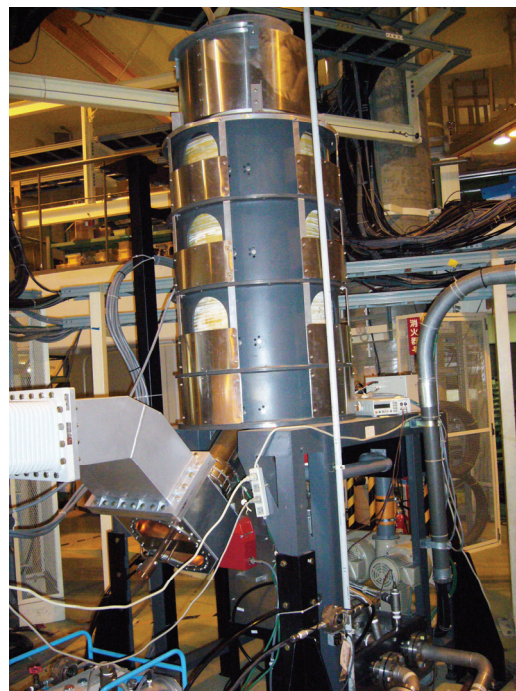


図 2-50 PF リングのクライストロン



図 2-52 カップラー部分の外観

変換して各モード毎に方程式を考えると、減衰のある強制振動の式となる。RF の各部は LCR 共振回路として考えることができ、回路と回路との間はトランスで結合されることとなる。等価回路の

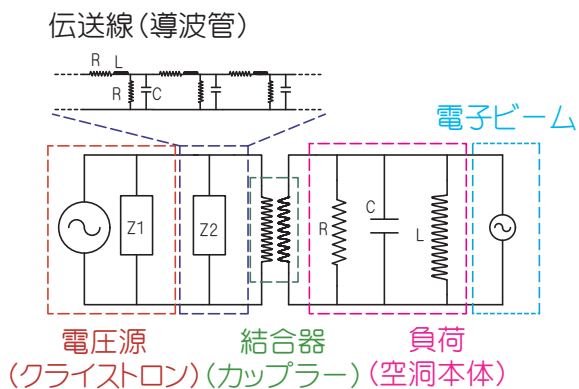


図 2-53 等価回路のイメージ

イメージを図 2-53 に示す。乾電池に豆電球、という感じの閉じた静的な回路と異なり、伝送線の回路で重要なのはインピーダンスの整合である。インピーダンスとは、電気的な抵抗値や容量、インダクタンスから決まる回路の定数で、負荷や結合器の定数がきちんと一致していないと、波は反射してしまい、きちんと伝わってゆかない。クライストロン、導波管、カップラーを通して空洞まで RF の波が伝わってゆくが、例えば電子ビームの状態が急激に変わると整合が取れなくなって RF が空洞内に供給されず、反射して戻ってくる。また、空洞自身の回路定数は、例えば空洞内にロ

ッドを出し入れする、空洞内のループアンテナを回転させるなどし、実効的に空洞の体積を変えることで電気的なキャパシタンスを変えるが、その整合がうまくいかない場合、RF が空洞に入ってゆかない。また、電子ビームも RF 空洞内に電磁場を誘起するが、その RF もカップラーを通じて上流側に伝わってゆく。空洞から出てくる RF パワーがクライストロンに戻ってゆかない為に、立体回路の途中にはサーキュレータが入れられている。サーキュレータは誘電体を使ったダイオードのような一方通行回路で、三つ叉の接続口に、クライストロン、RF 空洞、ダミーロードが接続される。クライストロン側から入った RF は常に空洞側へ抜け、空洞側から入った RF はクライストロン側へ戻ることなく、常にダミーロード側へ抜ける。サーキュレータによって、クライストロンが反射 RF から保護される。空洞側からの RF は、水冷されたダミーロードで熱に変えられる。

空洞やクライストロンなど、RF パワーの絡む回路をハイボル、高電圧回路と呼ぶ一方、それぞれの制御系をローレベル、低電圧回路と呼ぶ。PF の RF のローレベルはアナログモジュールで構成されている (図 2-54)。複数台の RF に対し、位相とパワー両方について、ビームの状態を見な

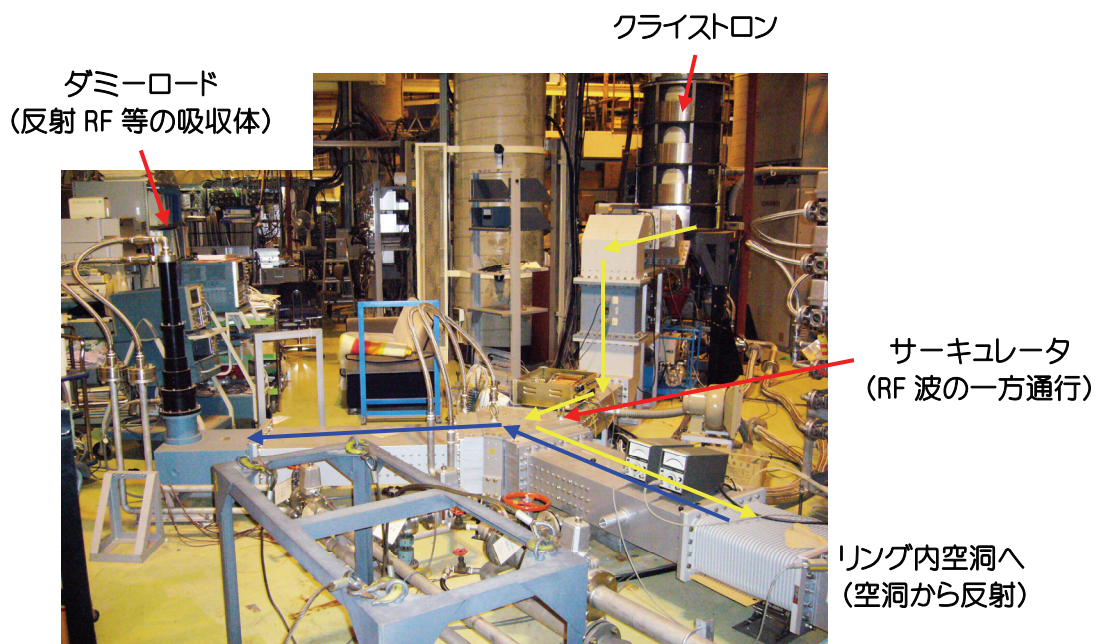


図 2-51 PF リングの RF 立体回路

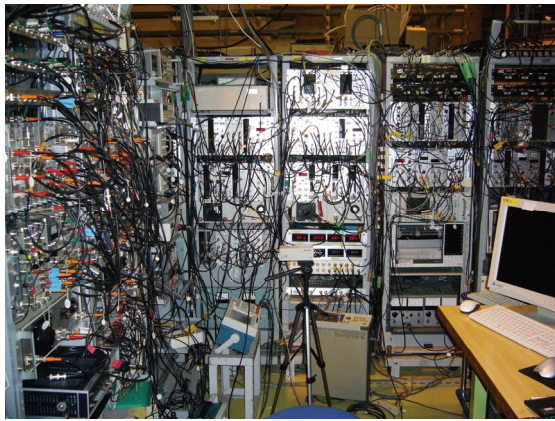


図 2-54 RF 制御系

がらフィードバック制御を行っている。詳細は省く。

空洞には電子ビームを加速する為の基本波だけでなく、高調波 (higher order mode、HOM) が存在し、電子ビームの不安定性の原因となる。ビーム不安定性を防ぐためには、空洞本体を HOM が立ちにくい設計にすると共に、立ってしまった HOM を速やかに除去する仕組みが必要である。PF リングでは、HOM ロード (load、負荷) として、空洞両脇に炭化珪素、SiC の幅広ダクトが接合されている (図 2-49 参照)。基本波はカットオフのために脇の SiC ダクトへは伝わらないが、HOM は波長が短いため、SiC ダクトに伝わり、そこで吸収される。HOM を脇に逃がし、吸収することでビーム不安定性が抑制される。他の HOM 対策としては、例えば空洞内の電磁場分布を考え、基本波の電場は弱いが高調波は強いという場所にカップラーを取り付け、HOM だけを空洞の外側に取り出すという仕組みが採用されることもある。

PF の場合、RF 空洞はリングに 4 台設置されており、それぞれにクライストロンが接続されている。PF の空洞は空洞毎に空間が 1 部屋しかなく、単セルと呼ばれる。一方、PF-AR の場合、空洞はリングに 6 台設置されているが、空洞本体内部は LINAC の加速管の様に多数に仕切られており、多セルである。PF-AR の場合、空洞 1 本の内部は、加速セルが 11 部屋、加速セルに RF パワーを伝えるための結合セルが 10 部屋の合計 21 セル

に分割されている。また、HOM 対策として、それぞれのセルに HOM 吸収用の結合器が取り付けられている。PF-AR 固有の問題ではあるが、セルが増えるとセル間の結合の効果で立ち得る HOM の数が劇的に増えるため、ビームへの影響は極めて大きい。

ERL では 9 セルの超伝導空洞が採用されることになっており、HOM 吸収体は PF リングのように両脇に取り付けられる予定である。また、真空を仕切りながら大電力を空洞に供給するカップラーであるが、ERL の場合、主加速空洞はエネルギー回収のためにパワーが少ないが、入射部の空洞では桁違いの大きなパワーを空洞に供給しなければならない為、カップラーの設計も難しい。

3.19. 位相安定性

ビームの縦方向の位置とは、リングのある場所でビームを観測した時の、RF の位相に対するビームのタイミングである。ビームに RF をかけるだけで、加速電圧と放射光による損失が釣り合う位相を中心に、粒子が集束される。この効果を位相安定性という。この項では位相安定性と縦方向のビームの運動の概略について述べる。

粒子が RF に到着するタイミングを変えるものは、粒子の軌道長の変化である。粒子のエネルギーが増えると、質量が増え、偏向電磁石で曲げられにくくなるため、外側の軌道を通るようになり、軌道長が伸びる (図 2-55-(a))。従って、ある周回に注目すると、エネルギーの高い粒子は RF への到着が遅れ、エネルギーの低い粒子は設計粒子よりも早く到着する。そこで、空洞内の電場は時間的に変化するが、電圧が徐々に下がっていくタイミングで粒子を加速すれば、早く到着した粒子は設計粒子よりも多く加速され、遅く到着した粒子は加速量が減り、どちらの粒子もエネルギーのズレが小さくなる (図 2-55-(b))。横方向のベータトロン振動の場合、座標と発散角で振動を記述するが、縦方向の場合、RF の位相またはタイミ

ングのズレと、エネルギーのズレになる。この振動をシンクロトロン振動という。

RF の集束力の線形部分だけを考え、位相とエネルギーのズレが小さい範囲で線形振動を考えると、周波数は

$$\Omega_s = \sqrt{\frac{\alpha h \omega_0^2 eV \cos \phi_0}{2\pi E}}$$

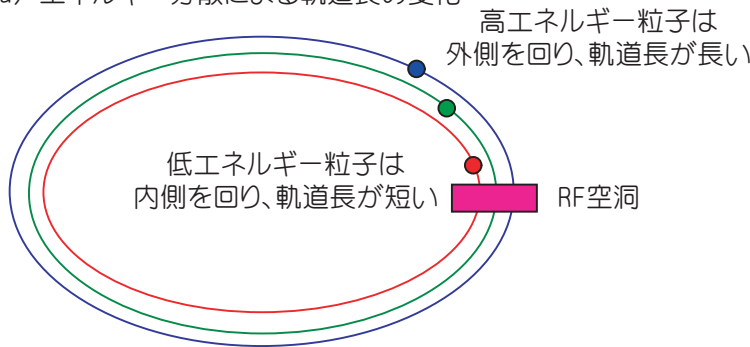
と書ける。ただし、 α はモーメントコンパクション、 h はハーモニック数、 ω_0 は粒子の周回角振動数、 V は RF のピーク電圧、 ϕ_0 は設計粒子の RF 位相で、周回のエネルギー損失 $U_0 = eV \sin \phi_0$ を満たす値、 E はビームのエネルギーである。また、リング周回の振動数に直すと、シンクロトロン振動数は

$$\nu_s = \sqrt{\frac{\alpha h e V \cos \phi_0}{2\pi E}}$$

となる。PF リングの場合、 $\alpha = 6.56 \times 10^{-3}$ 、 $h = 320$ 、 $eV = 1.7 \text{ MeV}$ 、 $E = 2.5 \text{ GeV}$ 、 $\phi_0 = 13.6^\circ$ で $\nu_s = 0.015$ である。1 周期の振動に約 70 周かかる。

RF 電圧は正弦的に変化するが、それを設計粒子の位相付近で線形近似せず、非線形のまま数学的に解くことができ、解は位相空間上の軌跡として与えられる。正弦振動、すなわち集束力が線形で振幅が正弦的に変化する振動の場合、軌跡は円である。振動の大きさが違ういくつかの粒子を重ね書きすると、図 2-56 の様な同心円になる。一方、シンクロトロン振動の場合、位置と運動量の代わりに、設計粒子に対するエネルギーのズレと RF 到着時間のズレが座標系を張る。集束力が正弦的な場合、軌跡は図 2-57 の様になる。軌跡が閉じている範囲に入っている粒子は安定であり、軌跡に沿って周回し続ける。安定領域の中心

(a) エネルギー分散による軌道長の変化



(b) タイミングによる加速の違い

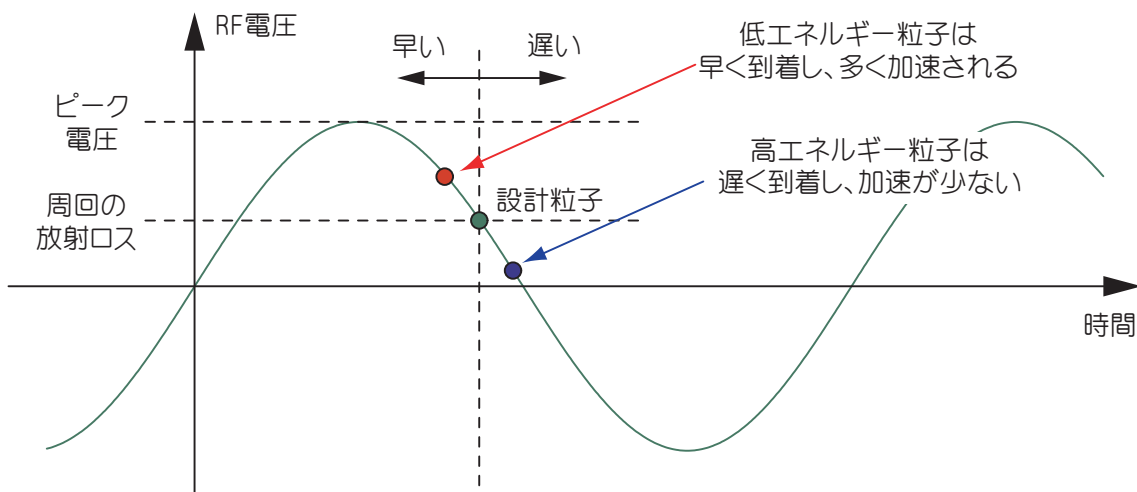


図 2-55 位相安定性

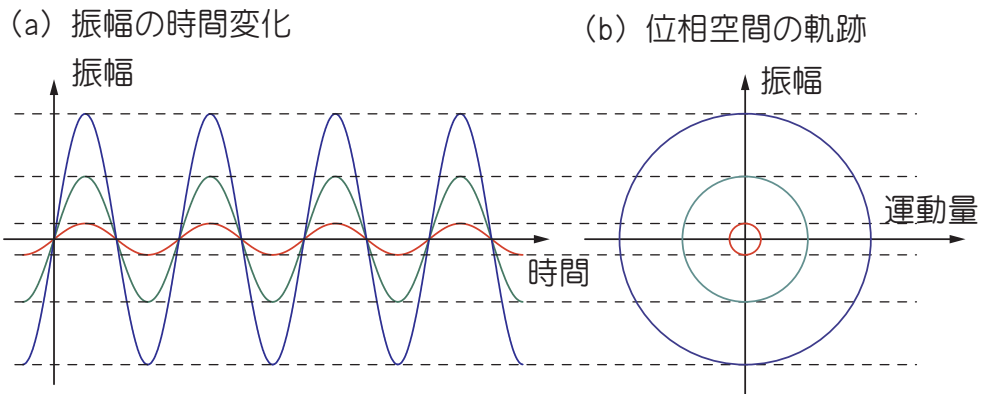


図 2-56 正弦振動の位相空間の軌跡

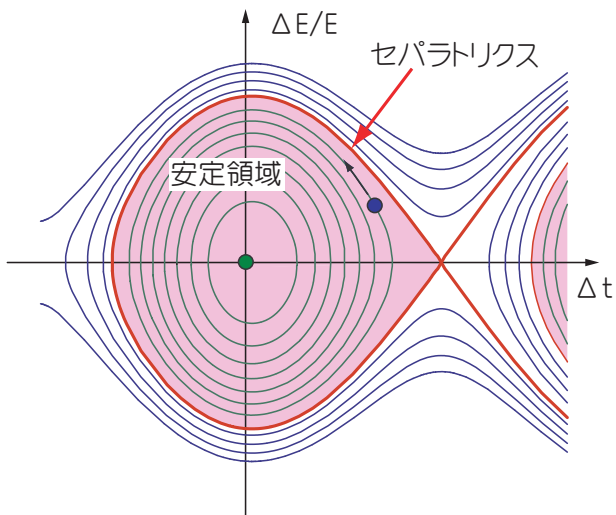


図 2-57 セパトリティクス

合、キッカー及びセパタムのタイミングが入射ビームに合っていたとしても、セパトリティクスから外れたビームは失われる。また、エネルギーのずれたビームが入射された場合も同様である。ずれが小さければセパトリティクス内の粒子は蓄積されるため、入射率が悪化するのみであるが、ともあれ、入射ビームの中心がセパトリティクスの中央に来るようにタイミング及び LINAC のエネルギーを調整することが重要である。

部分は同心円的であり、これを円だと近似することが線形近似に相当する。また、図には書いていないが、放射減衰の効果で振動は減衰してゆき、やがて放射励起との平衡で決まるエネルギー広がりとバンチ長の範囲に収まる。一方、不安定領域に入った粒子は、エネルギーのずれがどんどん増大してゆき、やがて失われる。安定領域と不安定領域の境界をセパトリティクスという。

入射ビームがセパトリティクスの外に来てしまった場合、ビームのエネルギーのずれは周回するに従って増大してゆく。分散関数の効果でエネルギーのずれは軌道のずれとなり、やがてビームはダクトに衝突して失われる。RF の位相に対して入射ビームの到着するタイミングがずれた場

3.20. 真空ダクト

蓄積リングにおいてビームを安定に周回させるため、真空系は非常に重要である。残留ガスが多いとビーム寿命が短いばかりでなく、様々な不安定性が励起され、明らかに真空によるものから、どう考えても真空と関係なさそうなものまで、ありとあらゆるものが不安定になる。

蓄積リングの真空は、残留ガス散乱によるビーム寿命を目安に、目標とする真空圧力を求め、それを実現するためのダクトの大きさとポンプの配置を決めることから始まる。排気のしやすさをコンダクタンスというが、リング各部のコンダクタンスと排気速度を与えると、リング1周の圧力分布が計算でき、ビーム寿命を見積もることができる。およその見積もりが済んだところで、具体的な機器配置を検討することとなる。

真空ダクトの例を図 2-58 に示す。まず、複数の真空ダクトを繋ぐには繋ぎ目が必要であり、接続面をフランジという。"flange"には帽子のつば、などという意味もある。フランジとフランジをあわせてボルトで留めるが、間にパッキンを挟んで空気が入らないようにする必要がある。超高真空用のパッキンには、純銅の輪であるガスケット

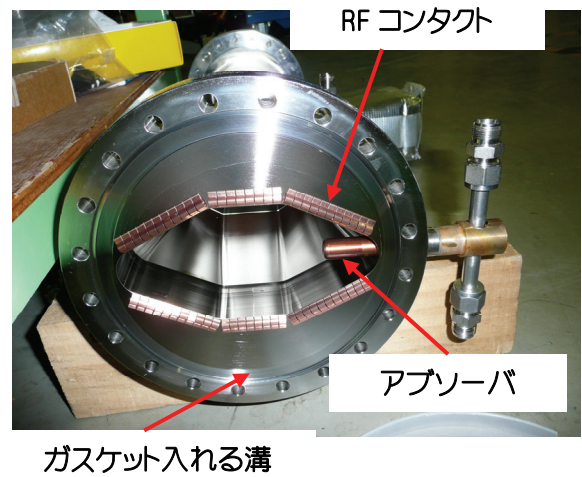


図 2-59 RF コンタクト付きフランジ



図 2-60 コンタクト付けスポット溶接の様子

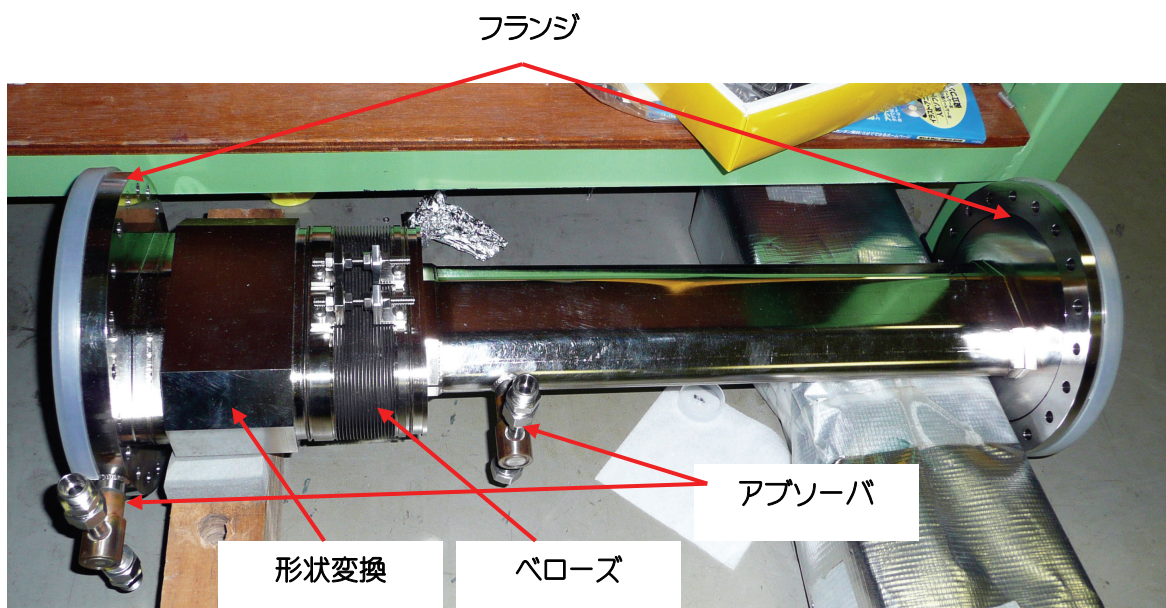


図 2-58 真空ダクトの例

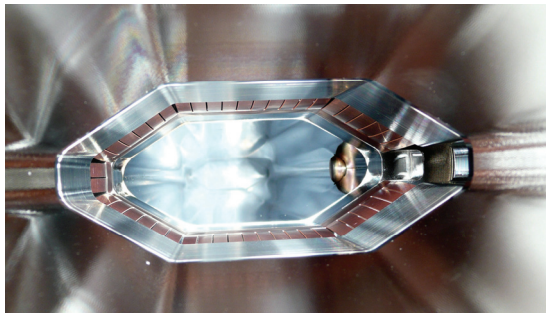


図 2-61 RF コンタクト付きの
ベローズの内側

トや、バネ入りで比較的複雑な構造のヘリコフレックスなど、何種類か存在する。基本的にはフランジでパッキンを押し潰す構造になっている。フランジ面に指紋をつけたりするとどんなに引いても真空がよくならないし、パッキンが触れる部分にほんの僅かな傷があるだけでも、空気が入り込む原因となる。真空中に空気が漏れ入ることを、真空漏れ、リークと呼ぶ。フランジを合わせてボルトで締める時も、何段階かに分けて上下左右を均等に締めていかないと、パッキンが平均的に潰れず、リークの原因となる。

次に、真空ダクト内を実際にビームが通過する時のことを考えてみる。フランジとフランジの間の隙間がビームに見えると、そこに航跡場が残る。ビーム不安定性の原因となるような共鳴性の場は立たないとしても、発熱の原因にはなる。局所的な発熱は金属の膨張変形を引き起こし、リークの原因となる。従って、フランジ繋ぎ目は RF 的には滑らかである必要がある。具体的には RF コンタクトという薄い銅板の爪 (図 2-59) を、フランジ片側のダクト周囲に溶接する (図 2-60)。そうすると、航跡場はカットオフに引っかかり、フランジの隙間に入り込んでいなくなる。

2本のダクトを繋ぐためにフランジを合わせるが、ダクト繋ぎ目にはいろいろな要因で力が加わる。ビームを蓄積するとそれだけでダクトの温度が上がるし、加減速しても温度が変わる。蓄積ビームを一気に失うことを、ビームダンプ、アポートなどと呼ぶが、大電流でビームダンプすると、さらに急激に温度が変わる。温度変化などによる力は、ダクトの繋ぎ目に集中してかかる為、

力を逃がす機構が必要である。薄い板を蛇腹にし、伸び縮みと上下左右のずれを吸収できる様にした部分をベローズという。”bellows”にはふいごという意味がある。ベローズもビームから見た時に RF 的に滑らかでなくてはならず、RF コンタクトが必要である (図 2-61)。フランジと異なり、ベローズの RF コンタクトはベローズが変形しても平気な設計である必要がある。電子は曲げられると放射光を出す、フランジやベローズに放射光が当たると、局所的かつ不均一に加熱され、リークの原因となるだけでなく、ひどい場合は RF コンタクトやベローズそのものが溶けてしまうこともある。ベローズやフランジを放射光から保護するためには、上流側にアブソーバ、放射光吸収体を挿入し、弱い部分はその影に入るようにする必要がある。アブソーバはダクト内面の突起であり、航跡場の影響も当然考えなければいけない。実際、光による発熱よりも航跡場による発熱の方が強くなってしまうこともある。

さて、真空装置において真空を悪化させる原因は、ダクトの内壁面や内部に存在するガス分子が放出されることである。真空ダクトをリングに導入する際には、予めリークチェックの他に、ダクト内壁面のガスを放出させる為、ポンプで引きながらダクトの温度を上げるベイキングという作業が行われる。ガスの急激な放出は主に温度上昇によるものであるが、温度上昇の原因は航跡場や放射光である。従って、航跡場が生じるところや放射光の当たる部分には、ポンプを設置しておくことが望ましい。フランジやベローズを保護する為のアブソーバの近くにはポンプが必要であるし、また、2本のダクトの断面形状が異なる場合、緩やかに繋ぐ方が航跡場の観点から望ましい為、形状変換という緩やかに断面形状が変わる接続ダクトを挿入するが、航跡場の影響がなくなるわけではなく、場合によっては冷却と排気ポンプが必要な程に発熱することもある。新しいダクトの場合、通常は或る程度ガスを出し切るまでの間、ビームを蓄積する度に真空が一時的に劇的に悪化する。また、航跡場はバンチ電荷やエミッタンスに依存する為、通常の数バンチ運転でダク

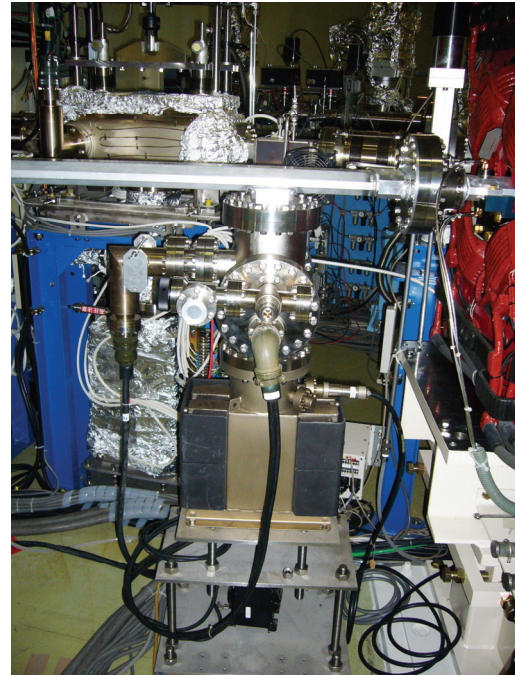


図 2-62 ゲッターの頭

トの枯れが進んだ状態であっても、単バンチ大電荷で運転すると再び真空が劇的に悪化することもある。ひどい場合にはダクトの凹凸面の航跡場が強い部分で、放電が生じることもある。放電により、ダクトの金属粒子が飛び散ってビームと衝突し、寿命が短くなるだけならともかく、セラミック部分を割ったり、ダクトを溶かしたりして非常に深刻な事態になることもある。たかがフランジひとつとっても非常に難しい。真空系は全てにおいて緻密で抜け目ない設計と、丁寧かつ慎重な扱いが要求される困難な分野である。

PF リングでは真空ポンプとして、チタンゲッターポンプ(getter pump、sublimation pump、図 2-62)、SIP (sputter ion pump 図 2-63)、DIP (distributed ion pump) などが主に使われている。チタンゲッターは、ゲッターを「焚いた」時のみ動作するポンプで、ダクト中にチタンを飛ばし、残留ガスをチタンと化学反応させ、一緒にダクト内壁に強力に吸着させるというポンプである。イオンポンプもチタンを飛ばしてガスをイオン化させるが、ポンプ内で電子を飛ばし、チタン陰極にぶつけてチタンを飛ばし、チタンによってイオン化したガスを電場で吸着させる仕組みになっている。SIP、DIP とともにイオンポンプであるが、SIP は独立した箱のようなポンプ、DIP は

(a) SIP 外観



(b) ポンプ内部のセル

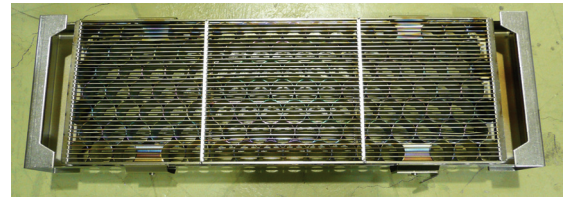


図 2-63 SIP



図 2-64 DIP のケーブル

ダクトの壁面に数 m に渡って取り付けられた長いポンプであり、PF リングでは偏向電磁石のダクト内に設置されている。ダクト端の DIP 用の高圧ケーブルの繋ぎ目を図 2-64 に示す。ゲッターは反応性のない希ガス (noble gas) は引けないが、



図 2-65 ゲートバルブや粗引きポート

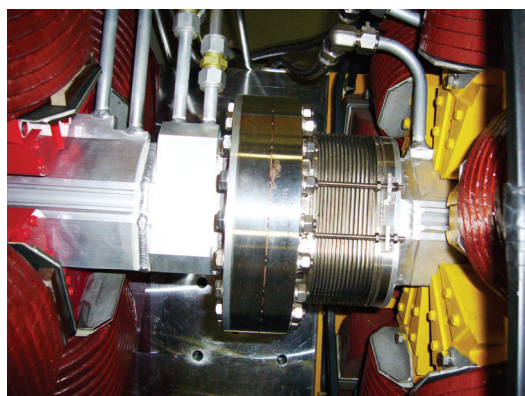


図 2-66 冷却水配管

イオンポンプは希ガスも引けるため、noble gas pump を略し、ノーブルポンプ（高貴なポンプ）ということもある。

リングに新しい機器を設置する場合や、真空系の維持管理の為に、時々リングの真空を破る必要が生じる。真空作業は通常は1ヶ月以上の長

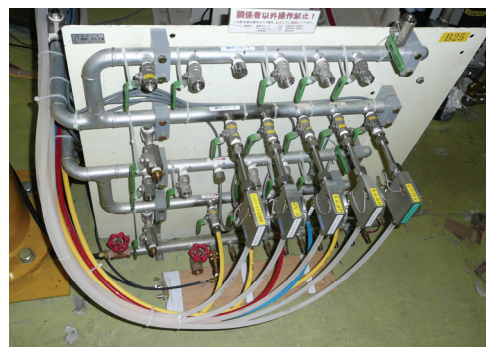


図 2-67 冷却水配管の分岐



図 2-68 配管作業の様子

期シャットダウン中に行われ、作業のための準備は、例えばダクトやアブソーバのチェックやベイクンクなどがあるが、半年から1年以上前から周到に行われるのが普通である。リングの真空を破ると、たとえ乾燥窒素で大気圧にしたとしても、運転開始時にはビームを蓄積してガス出しをする必要が生じる。真空を破る区間はできるだけ局所的に留めたい。そこで、コストの関係で最小限ではあるが、リングの所々に真空を仕切るためのゲートバルブや、真空を破る時、再び引く時の為のポンプ取り付け口などが設置されている（図 2-65）。

放射光や航跡場による発熱を冷却する為、ダクトやアブソーバの水配管も重要である。図 2-66 にダクトの水配管の例を示す。アブソーバ以外にも、4極電磁石内のダクトの放射光が当たる側である外側壁面には、冷却水配管が溶接されている。配管が2本あるのは、水の往きと帰りである。また、リングトンネル内には真空とチャンネルの

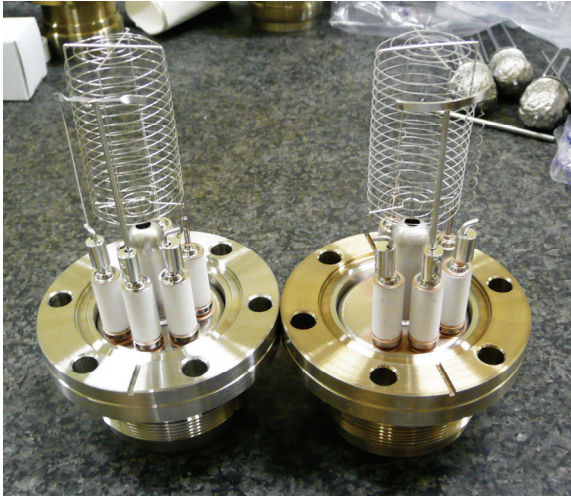


図 2-69 BA ゲージ

ための冷却水配管及び圧空配管の分岐板が所々に設置されている (図 2-67)。圧空とは、圧縮空気配管で、ゲートバルブなど、空気圧で動作する装置に圧力の高い空気を供給する為の配管である。冷却水配管の様子を図 2-68 に示す。

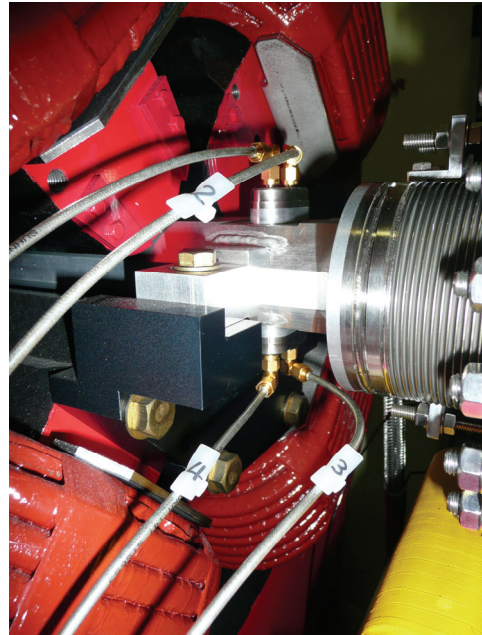
放射光や航跡場による発熱を監視する為、真空ダクトの至る所には温度計が取り付けられている。また、真空圧力を測定するためのゲージも数多く存在する。PF リングでは CCG(cold cathode ionization gauge、冷陰極電離真空計)、BA (Bayard-Albert gauge、図 2-69) 等の真空計が利用されている。いずれも電子を飛ばして残留ガスをイオン化させ、残留ガスイオンによる電流を測定する電離真空計である。

3.21. ビーム診断系

蓄積リングでは、ビーム電流値、ビームの位置、サイズ、チューンなど、ビームに関するパラメータを測定する装置が多数設置されている。様々なモニタがあるが、それぞれのモニタ毎に経験と知識、試行錯誤の蓄積があり、現在でも性能向上の為に多くの専門家が携わっている分野である。ここでは各モニタの詳細は完全に省き、紹介程度に留める。

リングの BPM (beam position monitor) の写真を図 2-70 に示す。BPM はダクトの中に対角 4 カ所に電極を設置し、ビームが通った時に誘起さ

(a) BPM 外観



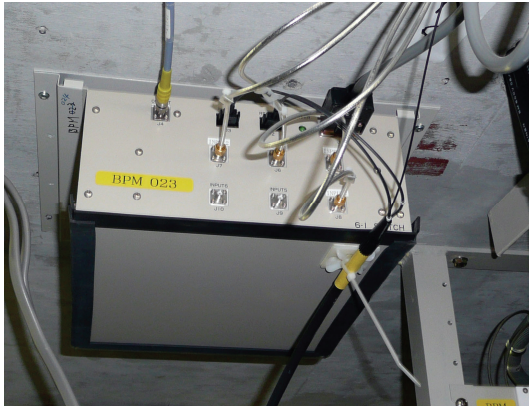
(b) BPM 電極



図 2-70 PF リングの BPM

れる電圧を測定する。電圧はビームと電極との距離に比例するため、電極間の電圧の足し引きでビームの位置が分かる。モニタの分解能をあげるためにはノイズを落とす為の高周波フィルターをかけ、信号を平均すればよい。例えば 0.1 秒程度の周期で COD が読めればよいとすると、平均化によってサブミクロンの分解能が得られる。一方、入射ビームや蓄積ビームのベータトロン振動を測定する場合、平均せずに周回毎に信号処理をする必要がある。そのような BPM をシングルパス (single pass BPM) と呼ぶことがある。基本

(a) 切換器



(b) 検波回路



図 2-71 BPM 信号処理系

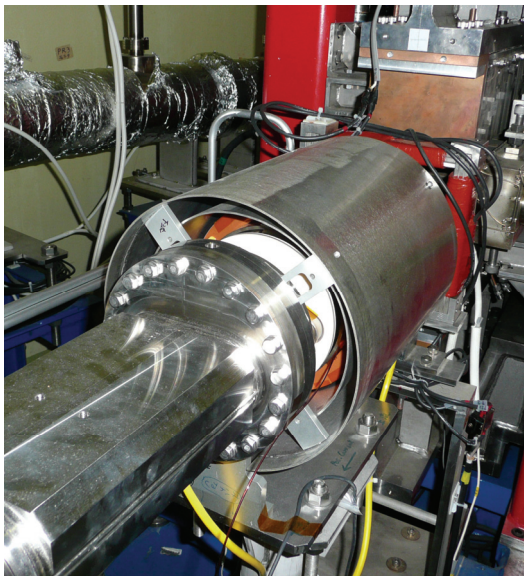


図 2-72 DCCT

からの信号をシングルパス用の処理系に繋がれば周回毎の測定が可能である。読み取り精度は $1\sim 10\mu\text{m}$ まで悪くなる。平均化するための信号処理系を図 2-71 に示す。4つの電極からの信号は、まず PF リング地下トンネルの天井に取り付けられた切り換え器を通る。切り換え器では4つの電極からの信号を時間差で切り換え、順に読んでいく。これらの信号はRF周波数と同じ、約500 MHzの帯域の信号である。次に、その信号を検波回路に通し、約10MHz程度まで平均化する。検波回路はBPM6箇所につき1台ずつ存在する。平均化した信号を最後にADCで読み、振幅に変換する。ビーム位置の絶対値に関しては、電気的な処理を多数含む為、BPM電極の設置精度の他、回路の電気的特性も重要となる。電子ビームを使ってこれらを同時に校正することができ、それをBBA (beam based alignment) という。

BPMの他にも様々なモニタが存在し、例えば、電流値を読むためのDCCT (DC current transfer、図 2-72)、シングルパスで電荷量を測定する壁電流モニタ (WCM、wall current monitor、図 2-73) などがリングに設置されている。一方、ビーム輸送路などにおいては、蛍光スクリーンにビームを当てて、それをカメラで観測するスクリーンモニタ (図 2-74) などよく使われる。スクリーンを出し入れする機構、中を照らす豆電球、像を写すカメラからなり、放射線保護のため、カメラは遮蔽の中に置かれる。

最後に、ベータトロンチューンの測定について述べる。まずは蓄積リングの軌道上のある場所で、ビーム位置を観測しているとする。チューンが整数の場合、ビームは周回毎に同じ場所を通るため、観測される信号は周回周波数と同じ周波数である。チューンが半整数の場合、ビームは中心軌道に対称な2点を交互に通過する為、観測される信号は2周回で1周期、すなわち周回周波数の半分の周波数となる。チューンの端数が $1/3$ の場合、ビームは3点を通過し、3周で1周期になる為、周回周波数の $1/3$ の周波数の信号が観測される。また、その場合、チューンが $2/3$ の場合と区

的には信号処理系の違いであるので、通常の電極

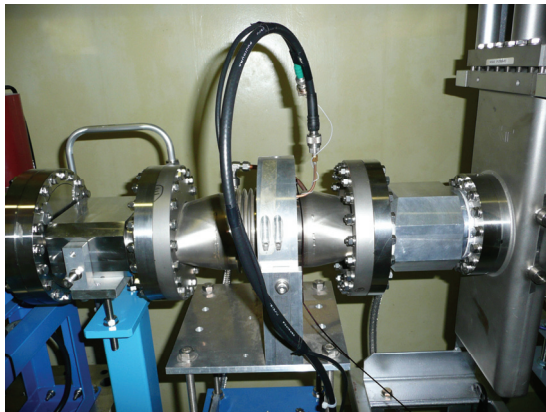


図 2-73 WCM

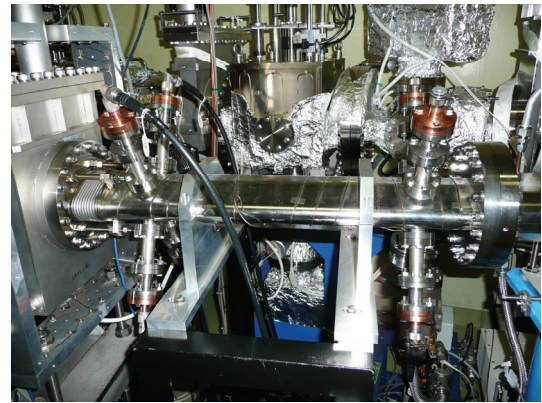


図 2-75 RFKO

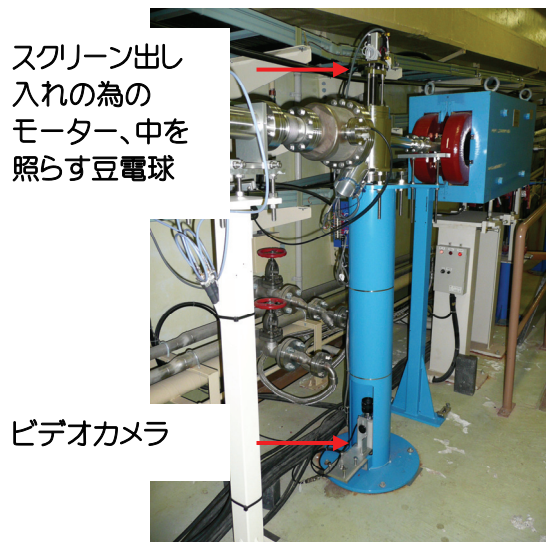


図 2-74 ビーム輸送路のスクリーンモニタ

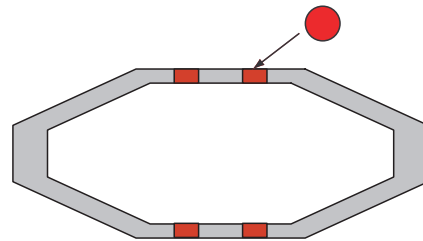
別することはできない。結局、ビームのベータトロン振動をある点で観測すると、ベータトロン振動の振動数の小数部分 $\tilde{\nu}_\beta$ に周回周波数 f_{rev} をかけた周波数、及びその折り返し周波数

$$f_{obs} = \begin{cases} \tilde{\nu}_\beta \times f_{rev} \\ (1 - \tilde{\nu}_\beta) \times f_{rev} \end{cases}$$

の信号が観測される。

PF リングの場合、周回周波数は 1.6 MHz、ベータトロン振動数は水平が 9.61、垂直が 5.27 であるので、水平は約 980 kHz または 620 kHz、垂直は約 430 kHz または 1170kHz となる。ストリップライン電極にこの振動数の信号を入れれば、ベータトロン振動を励起することができる。

(a) ボタン電極



(b) ストリップライン

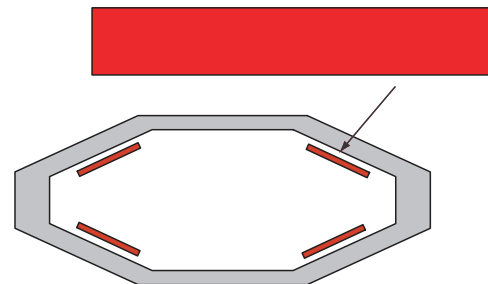


図 2-76 ボタン電極とストリップライン電極

ストリップライン (strip line) 電極 (図 2-75) はダクト内に設置された幅広のリボン状の電極 (図 2-74) で、BPM のボタン電極と同様、ビーム位置の測定にも使えるし、逆に RF 波を供給して振動を励起することもできる。励起する場合には、RFKO (RF knock out) と呼ぶこともある。チューンを測定する場合、RFKO に入れる信号の周波数をベータトロン振動近辺で掃引しながら、ビームに励起された振動のスペクトルを観測すれば、振動スペクトルのピークはベータトロン振動数の場所になる。真空が悪い場合や不安定性が強い

場合、また、入射中など、スペクトルの乱れが激しい場合には、手で振動数を変えながら光モニタでビームプロファイルを観測し、サイズが大きくなる場所を探するという方法もある。ちなみにビームを意図的にダンプさせる時、PF リングでは垂直方向のベータトロン振動を強力に励起し、ビームサイズを増大させてビームを落としている。

なお、ボタン電極及びストリップライン電極を上下左右に置かない理由は、放射光の為である。

3.22. フィードバックシステム

ダクトの凹凸や極端に狭い箇所、RF の HOM や残留ガスなど、ビーム不安定性の原因は数多くあり、全てを取り除くことは困難である。以前、PF リングでは、ユーザーに影響しないように不安定性を緩和する為、RF 位相変調によって実効的にバンチ長を長くする、バンチ間隔をあける、8 極電磁石で線形の振幅依存チューンシフトを与える、などの対策を行っていた。直線部増強の為の改造によってダクトの凹凸が大幅に減り、不安定性はかなり緩和されたが、まだ対策が必要である。RF 位相変調による縦方向振動は、光源点が色消しになっていない箇所にあるビームラインでは振動となって観測されるし、バンチ間隔をあけるためにはバンチ電荷を増やす必要があり、

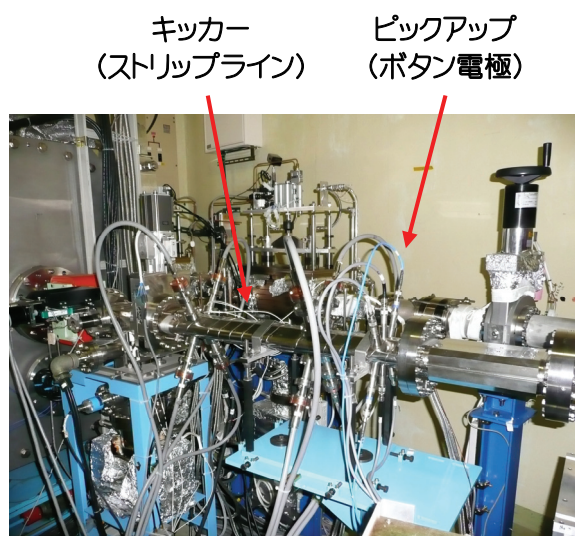


図 2-77 横方向 FB のピックアップとキッカー

ビーム寿命が短くなる。8 極電磁石の非線形性はダイナミックアパーチャを減少させ、入射効率の低下と入射ビーム損失に結びつく。そこで、PF リングでは横方向及び縦方向の不安定性に対するフィードバック (feedbackm、FB) システムが導入された。

詳細は完全に省き、装置の外観の紹介のみに留めるが、ビーム不安定性に対するフィードバックは、不安定性によって引き起こされたビーム振動をバンチ毎、周回毎に観測、振動を抑える為の力を瞬時に計算し、観測点の下流のどこかで各バンチを蹴って振動を抑制する、というシステムで



図 2-78 横方向 FB の為の RF アンプ

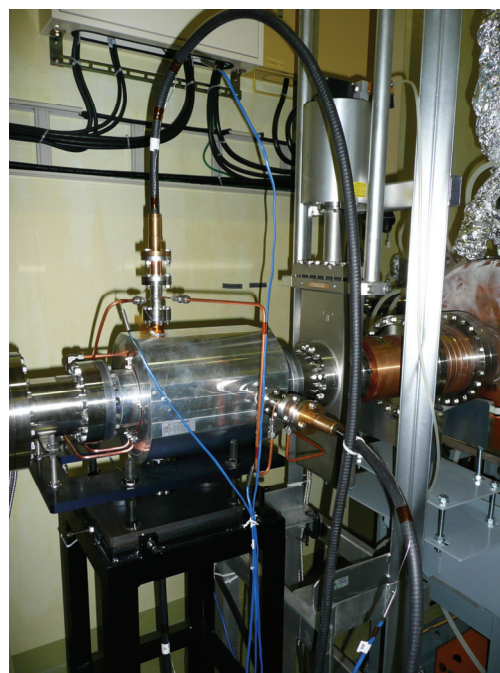


図 2-79 縦方向 FB 用のキッカー

ある。ビーム振動を観測するためのピックアップ、信号処理系、蹴るための電流を発生させるアンプなど、全てがバンチ間隔、すなわち RF 周波数以上の帯域を持っていることが必要である。

横方向、縦方向のフィードバックとも、振動のピックアップとしてはボタン電極が使われている。ビームを蹴るためのキッカーについては、横方向はストリップライン電極、縦方向は空洞である。横方向 FB のピックアップとキッカーを図 2-77 に、信号処理系と RF アンプを図 2-78 に示す。縦方向 FB のキッカーを図 2-79 に示す。

3.23. 制御系、安全系、タイミング系

装置を遠隔に制御する場合や、他の装置と組み合わせて制御する場合、特別な制御系が必要となる。制御全体のイメージを図 2-80 に示す。

例えば PF リングの電源の場合 (図 2-81)、電源本体には接点信号とアナログ電圧入力の為の端子が存在する。電源の入り切り及び状態確認は接点信号、電流設定はアナログ入力で行う。端子台の 1 番と 2 番を短絡したら電源 ON、電圧 0.1 V 入力したら電源電流 10A 出力、というイメージである。そして、接点信号や電圧信号を作るのは、CAMAC、VME といった規格のインターフェースボードである。CAMAC、VME とも、クレートという電源と信号やりとりのためのコネクタのついた箱があり、そこにインターフェースボード (モジュール) を挿して使う。モジュールには多くの種類があり、例えば電圧の読み書き、接点信号の読み書きなどが可能なモジュールを挿せば、電源制御には十分である。CAMAC や VME の便利な点は、CPU モジュールというボードコンピュータのモジュールがあり、クレートに複数挿したインターフェースボードを、CPU モジュールから指令することができる点である。CPU モジュールは計算機そのものであり、通常はネットワークに繋ぐことができる。ネットワークを通じて CPU モジュールに指令を出すのは、制御サーバまたは制御端末である。制御室に並んだ PC から GUI (graphic user interface) などを通じて、電源の ON/OFF や電流設定が行われる。過程を逆に辿る

と、端末上で電源の ON/OFF、電流設定などを行うと、ネットワーク上にその情報が投げられる。制御サーバを通す場合と、CPU モジュールが直接受ける場合があるが、情報は制御対象の機器に繋がった CPU モジュールによって受け取られる。CPU モジュールは情報を解釈し、各インターフェースボードに対し、決められた接点信号や電圧信号などを出す様に指令を出す。インターフェースボードから信号を受けて、電源が動く、ということになる。

制御のソフトウェアとして最近では EPICS が用いられることが多い。EPICS では、全ての制御はレコードと呼ばれる文字列で行われ、例えば電源 ON なら、"PFRMG:BPS:ON" のような文字列が対応する。EPICS では CPU モジュールを IOC と呼ぶが、IOC 上では文字列をネットワークから受け取るソフトウェアが動いており、各文字列が、インターフェースモジュールのどの様な信号に対応するかのデータベースがある。ネットワークを通じてレコードを受け取った IOC は、そのレコードに対応するインターフェースモジュールに、対応した指令を出すのである。例えば、"PFRMG:BPS:ON" なら、B 電源に繋がったインターフェースのある接点を閉じる指令、という感じである。一方、制御端末側では、レコードをネットワークに送出し、応答を受け取るソフトウェアを動かす必要がある。EPICS の特徴は、各機器に対応するレコードを、どの IOC が持っているか、制御端末側で知る必要がないということである。ネットワーク上にレコードを送出すると、ネットワーク (イーサネット) の仕様として情報は勝手にばらまかれるが、IOC 側が文字列自体を読んで自動的に自分の配下の機器に関する指令かどうか判別してくれるのである。

昔の制御端末の場合、CPU モジュール側ではどの端末から指令を受けるか指定し、端末側ではどの CPU に指令を出すか指定する必要があった。すなわち、CPU と端末は 1 対 1 対応であり、文字通りリモコンのような状態であった。それに比べると EPICS では、ネットワークにさえ繋がっ

ていれば、どのパソコンからも全ての機器を制御できる。非常に便利である。

PF リングでは他の装置の制御系もソフトウェアとしてはほとんど EPICS が採用されている。

ハードウェアとしては、CPU モジュールがパソコンに変わったり、OS が Linux や VxWorks、インターフェースが LAN-GPIB であったり、制御先の機器が直接ネットワーク制御可能であったり

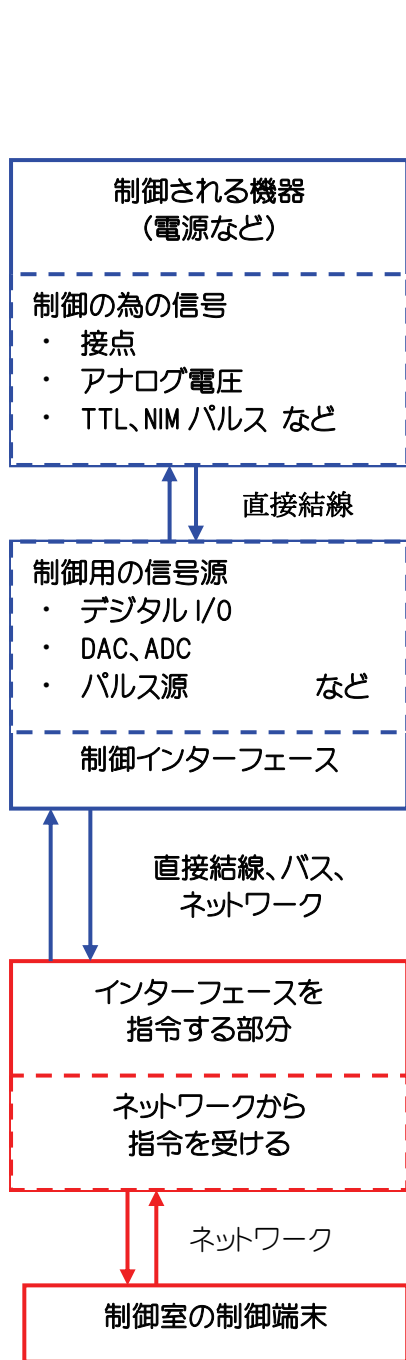


図 2-80 制御のイメージ

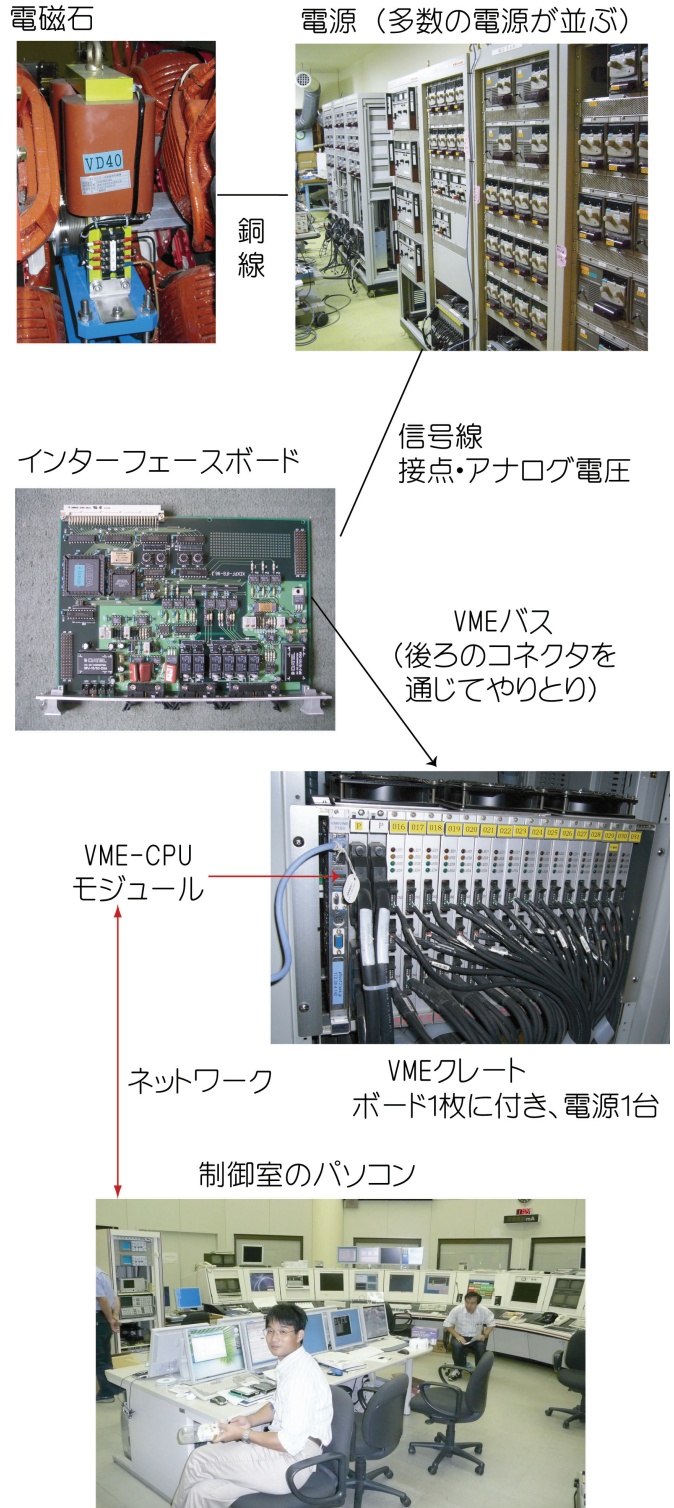


図 2-81 制御系の例

と、様々な場合があるが、根本的には電源制御と大きな差はない。

リングの運転に関しては、制御系の他にも安全系やタイミング系が必要である。

蓄積リング全体の安全系、インターロック系は、異常事態や故障の際にビームダンプさせ、人員や機器を保護したり、制御ミスをハード的に防止する為にある。例えば、入射効率が悪く、ビームロスが多い場合の警告や、発生した放射線量が規定値を超えた場合の入射停止、運転中にリングへ入ろうとした場合や、ビームラインに X 線が来ている時に防護ハッチを開けようとした時のビームダンプなどがある。また、入射中、蓄積中、ユーザー実験中、停止中など、状態を切り分けて制御の可能不可能を判断するのも安全系である。例えば、入射モードまたは top-up 状態でなければ入射器に入射要求は出せない、などである。リング全体のインターロックモジュールを図 2-82 に、放射線モニタを図 2-83 に示す。

タイミング系については、例えば入射の為に入射器とのタイミングをあわせる必要があるし、ビーム診断系にはビームのタイミングを必要とするものもあるが、蓄積リングの場合、光ファイバケーブルや BNC ケーブルでタイミング用のパルスを送れば十分である。

(a) 屋外の放射線モニタ



(b) 実験ホール内の放射線モニタ



図 2-83 放射線モニタ



図 2-82 インターロックモジュール

3.24. 電気、水、圧空、空調

蓄積リングのためには、電力、冷却水、建物なども必要である。PF 付近の建物図を図 2-84 に示す。

つくばキャンパスの受電設備はほぼキャンパス北端のつくば実験室付近にある。栃木の方から送電線で送られてきた電気は、中央受電棟で受電され、各施設へ送られる。例えば、電磁石及び RF 電源関係の受電設備は、PF 電源棟の裏にある(図 2-85)。電源棟裏の屋外の受電・変電設備から、電源棟内の盤へ送られ、そこからさらに電源棟内の電源や配電盤へ電気が送られる。なお、電源によっては AC6.6 kV や AC440 V を直接受電するものもある。また、分電盤に來ている端子には、3相 200V、単相 100V、200V、単相 3線 100/200V などの種類がある。

リング主電磁石や RF の電源はサイズがかなり大きく、PF リングではそれらの電源のみ電源棟という別の建物に設置されている。電源棟からリングへケーブルを引くために、地下に共同溝トンネルが存在する(図 2-86)。このトンネルは LINAC やエネルギーセンターとも通じており、冷却水などもここを通る。

PF リングの冷却水や空調設備は、エネルギーセンターから供給される冷水を使っている。エネルギーセンターでは冷凍機及び冷却塔を使って、常時 6℃ の冷水を作り、LINAC と PF とに供給している。エネルギーセンターの写真を図 2-87 に、冷凍機の写真を図 2-88 に示す。エネセンには 1 台 1 億と言われる冷凍機が 4 台設置されている。

エネセンから供給された冷水は、共同溝を通じて電源棟のポンプ室(図 2-89)へ来る。電源棟には冷却塔(図 2-90)と、エネセンからの冷水との熱交換機(図 2-91)があり、両者を使って温まった冷却水を冷やしている。冷却水を熱交換機と冷却塔へ送る割合は、冷却水の温まり具合やその日の気温などによって変わる。その割合を調整する弁を 3 方弁(図 2-92)という。3 方弁の調整が水温の安定度の鍵となる。リング冷却水は常に

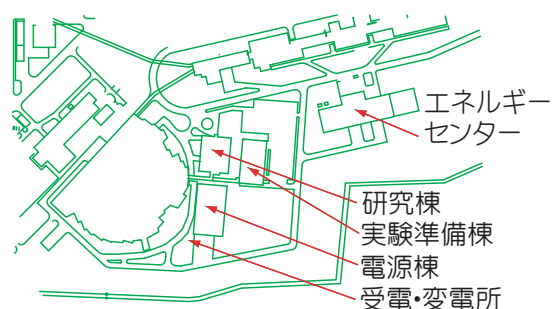


図 2-84 PF 付近の建物配置図



図 2-85 PF 電源棟の変電設備



図 2-86 地下ピット



図 2-87 PF エネセン



図 2-88 エネセンの冷凍機



図 2-91 電源棟の熱交換機



図 2-89 ポンプ室



図 2-92 3方弁



図 2-90 電源棟の冷却塔

25℃に保たれており、揺らぎは1℃以下に抑えられている。電源棟で作られた25℃の冷却水は再び共同溝を通過してリングへ向かう。

また、エネセンからは圧空も供給されている。圧縮空気はゲートバルブや真空装置の出し入れなど、様々な用途に用いられている。エネセン



図 2-93 エアータンク

で作られた圧縮空気は電源棟の空気タンクで一



図 2-94 リング直下の様子



図 2-95 空調機

端受け、それをリングに回している。空気タンクを図 2-93 に示す。

冷却水主配管、電源から電磁石への電源ケーブル、RF 電源からクライストロンへの高圧ケーブル、圧空などが共同溝を通過して電源棟からリング地下へ向かっている。冷却水や電磁石ケーブルなどはリングトンネル直下に配管やケーブルラックがある (図 2-94)。電源棟から電磁石まで、往復で 500m を超える距離があり、直径数 cm のケーブルや、直径 30cm 程の水配管を引き回すには、それなりの手間やコスト、場所が必要である。

(a) 実験ホールの空調



(b) リングトンネル内の空調

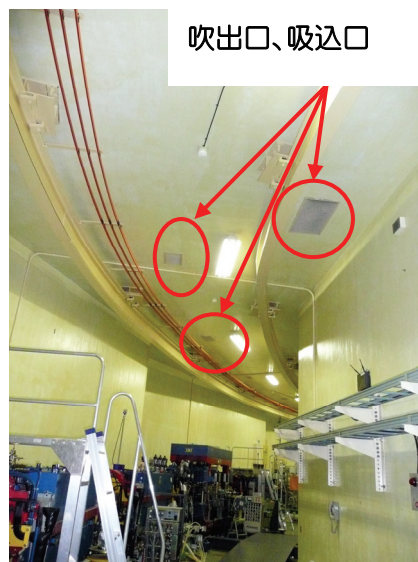


図 2-96 実験ホールとトンネルの空調

さて、リングの空調にもエネセンからの冷水を使うが、空調機は光源棟の最上階に設置されている (図 2-95)。空調の吹き出し口はトンネル天井に存在し、図 2-96 のようになっている。リング内及び実験ホール内は、冷却水温と同じく 25°C に保たれており、揺らぎはやはり 1 度以内に抑えられている。

冷却水やリングの空調は、運転に関して非常に重要な役割を占める。例えば RF 空洞の HOM は空洞の形状に非常に敏感であるが、空洞形状は冷却水温や空調の温度によって変化する。HOM



図 2-97 リングトンネル内のクレーン

による不安定性は調整によって避けられる場合もあるが、温度が安定しないといくら調整しても無駄である。ダクトの凹凸の影響も同様である。また、LINAC のビームについても、エネルギーや分散などのパラメータを安定させるためには、空調や冷却水温を安定させることが非常に重要である。蓄積リングの安定性の向上は、インフラ基盤の整備の重要性に気づき、それをきちんと行うようになってきたという点が非常に大きい。

リングの改造や機器の設置の際、トンネル内にクレーンがあるかどうかで作業の容易さが大きく変わる。PF リングの場合、リングトンネル、入射路、地下機械室、電源棟など、必要なところにはクレーンが設置されている。リングトンネル内のクレーンの様子を図 2-97 に示す。

電力、冷却水、空調、熱交換機やポンプ、ケーブルや水配管の引き回しなど、通常は表に出てこない設備も蓄積リングには必要不可欠であり、繰り返すが、安定な運転やビームの安定性にとってそれらは致命的である。

3.25. シンクロトロン放射積分

この項ではエミッタンス、エネルギー広がり、バンチ長など、放射励起と放射減衰の平衡で決まるパラメータに関して表式のみ与える。

シンクロトロン放射積分は、 ρ を偏向電磁石の曲率半径、 η を分散関数として、以下のように

与えられる。(括弧内は $\rho = const.$ 、逆ベンドなしで全て機能分離型の場合。)

$$I_1 = \int_{Bend^{内}} \frac{\eta}{\rho} ds \left(= \frac{1}{\rho} \int_{Bend^{内}} \eta ds \right)$$

$$I_2 = \int_{Bend^{内}} \frac{1}{\rho^2} ds \left(= \frac{2\pi\rho}{\rho^2} = \frac{2\pi}{\rho} \right)$$

$$I_3 = \int_{Bend^{内}} \frac{1}{|\rho^3|} ds \left(= \frac{2\pi}{\rho^2} \right)$$

$$I_4 = \int_{Bend^{内}} \frac{(1-2n)\eta}{\rho^3} ds \left(= \frac{1}{\rho^3} \int_{Bend^{内}} \eta ds \right)$$

$$I_5 = \int_{Bend^{内}} \frac{H}{|\rho^3|} ds \left(= \frac{1}{|\rho^3|} \int_{Bend^{内}} H ds \right)$$

ただし、 α 、 β をツイスパラメータとして、

$$H = \frac{1}{\beta} (\eta^2 + (\alpha\eta + \beta\eta')^2)$$

である。

モーメントコンパクションは、周長を C として、

$$\alpha = \frac{I_1}{C}$$

と与えられる。

周回のエネルギー損失は、 r_e を電子古典半径、 E をビームエネルギー、 m_0 を電子静止質量として、

$$U_0 = \frac{2r_e E^4}{3(m_0 c^2)^3} I_2$$

となる。

ビームのエネルギー広がり

$$C_q = \frac{55}{32\sqrt{3}} \frac{\hbar}{m_0 c}$$

として、

$$\sigma_E^2 = C_q \left(\frac{E}{m_0 c^2} \right)^2 \frac{I_3}{2I_2 + I_4}$$

であり、エミッタンスは

$$\varepsilon = C_q \left(\frac{E}{m_0 c^2} \right)^2 \frac{I_5}{I_2 - I_4}$$

となる。バンチ長は、シンクロトロン振動の周波数を Ω_s として

$$\sigma_l = \frac{c\alpha}{\Omega_s} \sigma_E / E$$

となる。

放射減衰による減衰時間は、

$$\tau_{x,E} [ms] = \frac{C[m]\rho[m]}{13.2J_{x,E}E^3[GeV]}$$

となる。ただし、 $J_x = 1 - \frac{I_4}{I_2}$ 、 $J_E = 2 + \frac{I_4}{I_2}$ は damping partition number である。

3.26. ビームサイズと色消シラティス

水平方向のビームサイズは以下の様に書ける。

$$\sigma_x = \sqrt{\varepsilon\beta + \left(\eta \frac{\sigma_E}{E}\right)^2}$$

例えば、 $\varepsilon = 1 \text{ nm} \cdot \text{rad}$ 、 $\beta = 10 \text{ m}$ ならば、エミッタンスのビームサイズへの寄与は $\sigma_x = 100 \mu\text{m}$ である。一方、 $\eta = 10 \text{ cm}$ 、 $\frac{\sigma_E}{E} = 1 \times 10^{-1}$ とすると、分散関数のエミッタンスへの寄与は $100 \mu\text{m}$ となり、ビームサイズは両方の寄与を合わせて $\sigma_x = 141 \mu\text{m}$ となる。ビームサイズを小さくする為には、分散関数を消すことが効果的であり、その様なオプティクスを色消し (achromat) という。

放射光源蓄積リングでよく採用される色消シラティスに DBA (double bend achromat)、TBA (triple bend achromat) がある。分散関数はエネルギーの違いによる、偏向電磁石での曲げられ方の違いで発生する為、その効果を消すには、最低でも偏向電磁石が2台必要 (図 2-98) である。DBA の場合、最低限の偏向電磁石2台毎に分散関

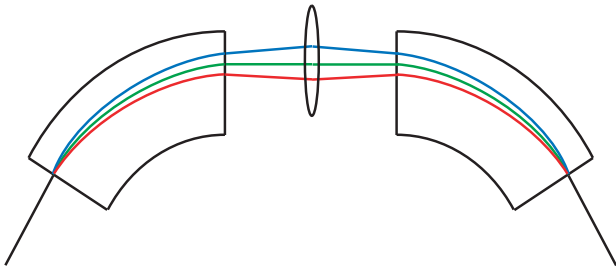


図 2-98 色消しの原理

数がゼロになっており、TBA の場合は3台毎である。それぞれの場合のオプティクスを図 2-97 に示す。

ところで、エミッタンスを小さくするためには、

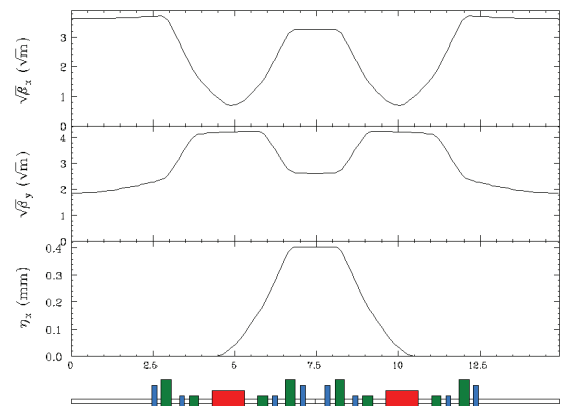
$$H = \frac{\eta^2 + (\beta\eta' + \alpha\eta)^2}{\beta}$$

の積分値、

$$\langle H \rangle_{\text{Bend}} = \frac{\int_{\text{Bend}^{1/3}} \left| \frac{H}{\rho^3} \right| ds}{\int_{\text{Bend}^{1/3}} \left| \frac{1}{\rho^3} \right| ds}$$

を小さくすればよい。偏向電磁石内の分散関数の最適化による、エミッタンスの最小値は以下で与

(a) DBA の典型的なオプティクス



(b) TBA の典型的なオプティクス

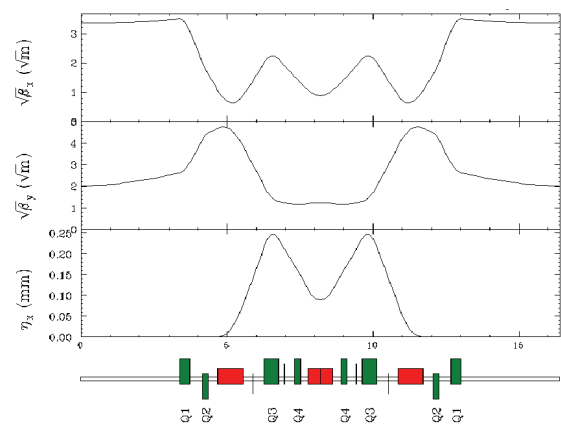


図 2-99 典型的な色消しオプティクス

えられる。

$$\varepsilon = \frac{1}{12\sqrt{15}} \frac{C_q}{J_x} \left(\frac{E}{m_0 c^2} \right)^2 \left(\frac{2\pi}{N} \right)^3.$$

ただし、 N は偏向電磁石の数である。色消しをせず、エミッタンスを下げるようなオプティクスを **TME** (theoretical minimum emittance) と呼ぶ。すなわち、エミッタンスを下げる為には、偏向電磁石を分割し、4極電磁石を使って分散関数を絞ることが必要である。ただし、**TME** の場合、色消しにはなっていないので、分散関数の影響でビームサイズは小さくない場合もある。そうやってしまっただけでは本末転倒である。なお、**DBA** の場合の最小値はその3倍で、

$$\varepsilon = \frac{1}{4\sqrt{15}} \frac{C_q}{J_x} \left(\frac{E}{m_0 c^2} \right)^2 \left(\frac{2\pi}{N} \right)^3.$$

となる。

3.27. 放射光源の歴史と世代

この章の最後として、放射光源の歴史について簡単に述べる。

放射光の存在が最初に注目されたのは、ビーム周回エネルギー損失においてであった。最初に放射光のエネルギーやスペクトルが計算されたのは、1944～45年頃のことである。放射光の最初の観測は、1948年、アメリカGE社の70 MeVシンクロトロンで行われた。放射光利用実験が最初に行われたのは1963年、アメリカ規格標準局の180 MeVシンクロトロンであった。その後、素粒子実験用のシンクロトロンにおいて、衝突実験の合間に放射光利用実験が行われるようになり、それを第1世代放射光源と呼ぶ。

第1世代のリングは衝突実験用であるため、ラティスは集束と発散の4極電磁石を繰り返した **FODO** 構造、正確には間に偏向電磁石を挟んで **FBDB** 構造が基本であった。入射系や **RF** 空洞を設置する為には直線部が必要であるが、**FBDB** から偏向電磁石を抜くことでその分の直線部を確保するのが一般的であり、そのような部分を **ミッシングベンド**(missing bend)セルといった。**PF-AR** はこのタイプである。

1975年、現在の西東京市にあった旧東京大学原子核研究所に世界初の放射光利用実験専用シンクロトロン、**SOR-Ring** が建設された。その後も続いて世界中に放射光利用の為の蓄積リングが続々と建設され、そのような蓄積リングを第2世代放射光源と呼ぶ。**SOR-Ring** の写真を図2-100に示す。放射光専用リングの特徴は、大電流と長時間の安定性を重要視している点である。衝突型リングの場合、入射器からビームを入射し、必要があれば加速してから衝突させれば目的が達せられる。ビーム蓄積時間は数秒～数分程度であり、当時の衝突実験リングはその間だけ安定であれば十分であった。一方、放射光源は大電流のビームを長時間にわたって蓄積し、ユーザーが連続的に実験を行うため、その間ずっと安定でなければならない。現在から見れば古い放射光源といえども、真空系や診断系、空洞など、全ての要素が大電流の蓄積と長時間の安定性に気を遣って作られている。また、第2世代の頃は必ずしも主体ではなかったが、挿入光源の開発もこの時代に始まった。

1983年の **PF** リング運転開始をはさんで、1993年、世界初の第3世代放射光源であるアメリカの **ALS** (advanced light source) が建設された。第3世代放射光源の特徴は、挿入光源の利用を前提に作られたリングということであり、低エミッタンス、色消し直線部などがその特徴である。**ALS** は **VUV**・**SX** 領域をターゲットにした低エネルギーのリングであったが、その後、**ESRF**、**APS**、

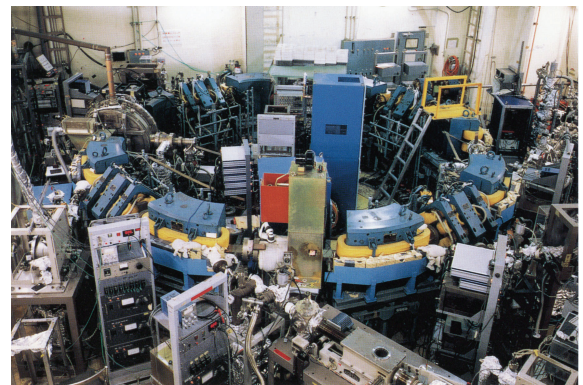


図 2-100 世界初の放射光専用リング
SOR-Ring

SPring8というX線をターゲットにした巨大な高エネルギー放射光源も建設された。

第3世代放射光源ではDBA、TBAなどの色消しセル構造が一般的である。低エミッタンスの為には強い集束力と色収差補正が要求されるが、そのせいで電磁石の小さな誤差がビームに大きな影響を与える。電磁石に限らず全ての要素について同じことが言える為、空調や冷却水などのインフラを含め、全てをきちんと作る必要がある。第3世代放射光源は蓄積リング型放射光源の完成形、電子ビームのパラメータとしてはほぼ性能の限界と考えられる。

2000年12月、「新」第3世代放射光源といわれるSLS (Swiss Light Source) が運転を開始した。新第3世代放射光源の特徴は、真空封止型アンジュレータなどを利用し、低エネルギーでありながらアンジュレータからのX線利用に主眼を置いたことである。SLSのビームのエネルギーはPFリングとほぼ同じ2.4 GeV、周長は100m長い288mである。真空封止型挿入光源のギャップを限界まで閉じるためには、ビーム不安定性や軌道の揺らぎがあってはならない。電子ビームのエミッタンスや電流値、カップリングなどの性能は通常の第3世代と大きく違うものではないが、ビーム不安定性の抑制や入射時や蓄積時のビーム軌道の安定性など、ビームが常に安定であることに重点が置かれている。第3世代よりもさらに安定性が追求されているのである。

2008年の現在、第3世代放射光源、新第3世代放射光源にない光の性質として、短パルス、コヒーレンス、という性質が求められている。蓄積リングでは放射減衰と放射励起の平衡で電子ビームのパラメータが決まる為、エミッタンスやパンチ長には限界がある。その限界を超える為に、LINACを基にしたX線領域の放射光源が提案されており、それがXFELとERLである。

3. ビーム力学の基礎

この章では、ビーム力学の基礎的内容について、最低限これだけは、という項目のみ抜粋して述べる。

1. 運動方程式とその解

1.1. 運動方程式

粒子の運動方程式

$$x'' = Kx \quad (1-1)$$

を求める。曲線座標系上で微分幾何と解析力学を駆使する方法もあるが、難しいので、高校の教科書レベルの式から始める。水平方向の粒子の運動方程式は、

$$\frac{d}{dt} p = \frac{mv^2}{r} - evB \quad (1-2)$$

と書ける。右辺第1項は向心力、第2項はローレンツ力である。粒子の質量を、何周かする程度の間は一定 $m(t) = \text{const.}$ と見做すと、

$$\frac{d}{dt} p = m \frac{d}{dt} v. \quad (1-3)$$

変数を時間から軌道長 $vt = s$ へ変換する。向心力の中心を原点とすると、極座標における同径方向の距離 r が座標となり、方程式は

$$mv^2 \frac{d^2}{ds^2} r = \frac{mv^2}{r} - evB. \quad (1-4)$$

従って、

$$p \frac{d^2}{ds^2} r = \frac{p}{r} - eB \quad (1-5)$$

となる。ここまでは厳密な式である。磁場の誤差や運動量のずれ（運動量偏差）を考慮し、

$$\begin{aligned} p &\rightarrow p_0 + \Delta p \\ B &\rightarrow B_0(r) + \Delta B \end{aligned} \quad (1-6)$$

とおく。方程式は

$$\frac{d^2}{ds^2} r = \frac{1}{r} - \frac{e(B_0(r) + \Delta B)}{p_0 + \Delta p} \quad (1-7)$$

となる。曲率半径の設計値を ρ とし、 $r = \rho + x$ と展開。磁場もこの付近で展開すると、

$$B_0(r) = B_0(\rho) + \frac{\partial B_0}{\partial r}(r - \rho) + \dots \quad (1-8)$$

右辺第1項は偏向電磁石の磁場、第2項は4極電磁石の磁場勾配に対応する。また、偏向電磁石による曲げの力と向心力の釣り合いの式から、

$$\frac{mv_0^2}{\rho} = ev_0 B_0(\rho). \quad (1-9)$$

すなわち、

$$\frac{1}{\rho} = \frac{eB_0}{p_0} \quad (1-10)$$

である。また、 $\rho \gg x$ より、

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho + x} = \frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^{-1} \approx \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{x}{\rho}\right) \quad (1-11)$$

なので、方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} r = x'' &= \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{x}{\rho}\right) \\ &\quad - \frac{e}{p_0 + \Delta p} (B_0 + B'x + \dots + \Delta B) \end{aligned} \quad (1-12)$$

となる。磁場にかかる最初の項の逆数、 $\frac{p_0}{e} = B_0 \rho$

を magnetic rigidity という。ちなみに、この値を数値的に求めるには、

$$B_0 \rho = \frac{E[\text{GeV}]}{0.3} \quad (1-13)$$

という簡単な式がある。さて、 $\frac{\Delta p}{p_0} = \delta$ とおき、

$\delta \ll 1$ を使うと、

$$\frac{1}{p_0 + \Delta p} = \frac{1}{p_0} \left(\frac{1}{1 + \delta}\right) \approx \frac{1}{p_0} (1 - \delta) \quad (1-14)$$

となる。偏向電磁石の項に対しては近似式を適用して展開し、4極電磁石の項は分母に δ を残したまま扱うことにすると、(1-10)式より、偏向電磁石の最初の項は向心力の最初の項とキャンセルされる。4極電磁石の項について、

$$\frac{e}{p_0} B' = \frac{B'}{B_0 \rho} = K \quad (1-15)$$

とおく。また、 $\Delta B \Delta p$ など高次の項は落とすことにする。展開して線形の項のみ整理すると、方程式は

$$x'' = -\frac{x}{\rho^2} - \frac{\delta}{\rho} - \frac{K}{1+\delta}x - \frac{\Delta B}{B_0\rho} \quad (1-16)$$

となる。この線形の方程式が基本となる。

$$\dot{y} = f(t)y + g(t) \quad (1-17)$$

の解は、 $\dot{y}_s = f(t)y_s + g(t)$ を満たす適当な特別解と、 $\dot{y}_h = f(t)y_h$ を満たす一般的な斉次解との和で書ける。すなわち、

$$\frac{d^2}{dt^2}(y_h + y_s) = f(t)(y_h + y_s) + g(t) \quad (1-18)$$

である。

同様にして粒子の運動方程式を解くことを考える。加速器の場合、必ずしも綺麗に分離できるわけではないが、 $-\frac{\delta}{\rho}$ に対する特別解を $x_\delta = \eta\delta$ とし、 $-\frac{\Delta B}{B_0\rho}$ に対する特別解を x_{COD} 、斉次解を x_β と書くと、解は

$$x = x_\beta + x_\delta + x_{COD} \quad (1-19)$$

で与えられ、これを方程式に代入すれば、斉次解はベータトロン振動の方程式

$$x_\beta'' = -\frac{x_\beta}{\rho^2} - \frac{K}{1+\delta}x_\beta \quad (1-20)$$

となり、 $\frac{1}{1+\delta}$ は色収差を表す。最初の定数項に

対する特別解は、分散関数

$$\eta'' = -\frac{\eta}{\rho^2} - K\eta - \frac{1}{\rho} \quad (1-21)$$

となり、最後の特別解が COD (closed orbit distortion)

$$x_{COD}'' = -\frac{x_{COD}}{\rho^2} - Kx_{COD} - \frac{\Delta B}{B_0\rho} \quad (1-22)$$

となる。ただし、線形項のみを考える為、分散関数と COD の式では色収差項は省かれる。

これらの方程式を個別の電磁石に対して解く前に、まずは電磁石の磁場を考えることにする。

1.2. 電磁石の磁場

この項では電磁石と磁場の関係について述べる。2次元のラプラス方程式で通常の偏向電磁石、4極、6極電磁石などの磁場を求めた後、実際の電磁石のギャップと磁場の関係について述べる。

1.2.1. 2次元の場合

真空中では、 $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$ なので、磁場はスカラーポテンシャル φ を使い、 $\vec{B} = \vec{\nabla} \varphi$ と書ける。

スカラーポテンシャルはラプラス方程式

$$\Delta \varphi = 0 \quad (1-23)$$

を満たす。

$$\varphi = R(r)\Theta(\theta) \quad (1-24)$$

とにおいて、変数分離する。

$$\begin{cases} \frac{d^2}{d\theta^2} \Theta = -m^2 \Theta \\ \left[\frac{1}{r} \left(\frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \right) - \frac{m^2}{r^2} \right] R = 0. \end{cases} \quad (1-25)$$

従って、上の式より

$$\Theta = e^{im\theta} \quad (1-26)$$

ここで、

$\theta \rightarrow \theta + 2\pi$ で不変なので、 m は整数である。下の式より

$$\begin{aligned} R &= ar^n + br^{-n} \quad n \neq 0 \\ R &= R \ln r + B \quad n = 0. \end{aligned} \quad (1-27)$$

ただし、原点で正則でなければいけない為、下の式や r^{-n} の項は不適当。よって、解は

$$\varphi = \sum_{n=1} r^n (A_n \sin n\theta + B_n \cos n\theta) \quad (1-28)$$

となる。 A_n を normal 成分、 B_n を skew 成分と呼ぶ。ポテンシャルを磁場に直すと、

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \varphi = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \varphi \quad (1-29)$$

より、

$$B_r = \sum_{n=1} nr^{n-1} (A_n \sin n\theta + B_n \cos n\theta) \quad (1-30)$$

$$B_\theta = \sum_{n=1} nr^{n-1} (A_n \cos n\theta - B_n \sin n\theta)$$

となる。円筒座標からデカルト座標 x 、 y に変換する為に、

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (1-31)$$

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} \quad (1-32)$$

を使う。

$n=1$ の時は偏向電磁石成分で、

$$\begin{cases} B_x = B_1 \\ B_y = A_1, \end{cases} \quad (1-33)$$

skew は垂直 Bend、normal は普通の水平 Bend である。

$n=2$ の時は4極電磁石成分で、

$$\begin{cases} B_x = 2r(A_2 \sin \theta + B_2 \cos \theta) \\ \quad = 2A_2 y + 2B_2 x \\ B_y = 2r(A_2 \cos \theta - B_2 \sin \theta) \\ \quad = 2A_2 x - 2B_2 y, \end{cases} \quad (1-34)$$

$n=3$ が6極電磁石成分である。

$$\begin{cases} B_x = 3r^2(A_3 \sin 2\theta + B_3 \cos 2\theta) \\ \quad = 6A_3 xy + 3B_3(x^2 - y^2) \\ B_y = 3r^2(A_3 \cos 2\theta - B_3 \sin 2\theta) \\ \quad = 3A_3(x^2 - y^2) - 6B_3 xy. \end{cases} \quad (1-35)$$

高次成分は、

$$A_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial r^{n-1}} B_\theta \right) \Bigg|_{\theta=0} \quad (1-36)$$

$$B_n = -\frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial r^{n-1}} B_\theta \right) \Bigg|_{\theta=\frac{\pi}{n}}$$

となる。

1.2.2. 電磁石のギャップと磁場の強さ

電磁石のギャップと磁場の関係を求める。電磁石の断面を図3-1に示す。図は4極電磁石であるが、normal 成分の一般の n 極電磁石の場合を考える。スカラーポテンシャルは

$$\varphi = Ar^n \sin n\theta \quad (1-37)$$

と書ける。ここで、アンペールの法則より、

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} \quad (1-38)$$

ただし、 \vec{j} は電流密度である。これを積分すると、

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (1-39)$$

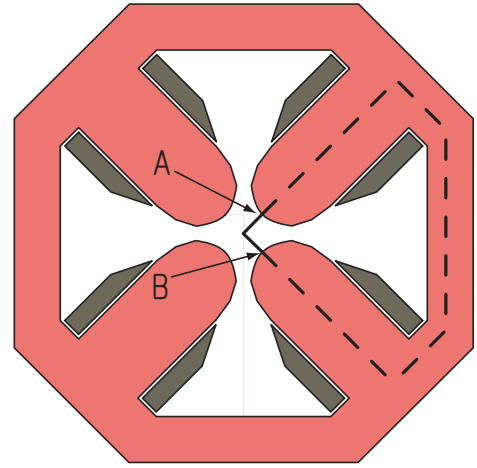


図3-1 4極電磁石の断面

磁場の線積分は、その積分路内側を通る全電流に等しいということになる。線積分を図に示した経路上で計算する。真空中の透磁率を μ_0 、鉄心中を μ とすると、

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{\mu_0} \int_{A点}^{B点} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \frac{1}{\mu} \int_{B点}^{A点} \vec{B} \cdot d\vec{l} \quad (1-40)$$

となるが、鉄心中では $\mu \rightarrow \infty$ と考え、空気中の透磁率は真空と等しいとする。鉄心内の積分はゼロ、ギャップ間の線積分は、ポテンシャル(1-28)を使って、

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{\mu_0} (\varphi(A) - \varphi(B)) \quad (1-41)$$

と書ける。断面を通る電流はコイルの電流値 $I[A]$ にコイル毎の巻き数 N をかけた値の2本分で、

$$\int \vec{j} \cdot d\vec{S} = 2NI \quad (1-42)$$

となる。A点では $\theta = \frac{\pi}{2n}$ 、B点では $\theta = -\frac{\pi}{2n}$ であり、電磁石のポア径を $R[m]$ とすると、

$$\frac{1}{\mu_0} (\varphi(A) - \varphi(B)) = \frac{2AR^n}{\mu_0} = 2NI \quad (1-43)$$

となる。従って、

$$\varphi = \frac{\mu_0 NI}{R^n} r^n \sin n\theta \quad (1-44)$$

となり、磁場は、

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial r^{n-1}} B_\theta \Bigg|_{\theta=0} = \frac{n! \mu_0 NI}{R^n} \quad (1-45)$$

となる。

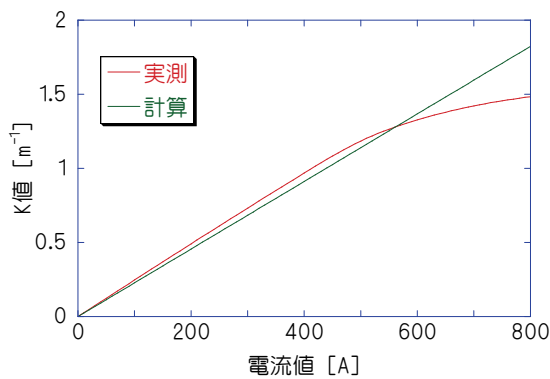


図 3-2 励磁曲線の例

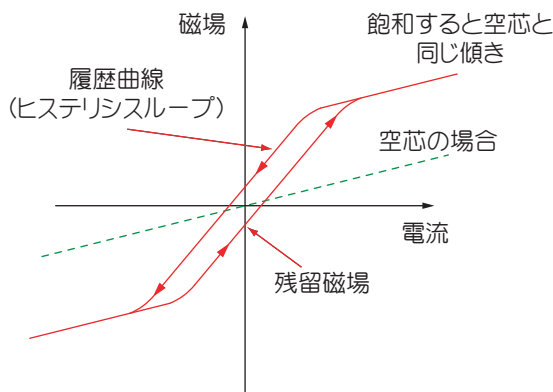


図 3-3 概念的励磁曲線

例えば PF リングの偏向電磁石の場合、磁極の間隔は $2R = 70\text{mm}$ 、コイルは上下の合計で 48 ターン、電流は最大 1500A である。空気中の透磁率を真空中と等しい値

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [\text{H}/\text{m}] \quad (1-46)$$

とすると、上の式より、磁場は約 1.3T となる。4 極電磁石の場合、ボア径は $R = 35\text{mm}$ 、コイルは磁極あたり 23 ターン、電流は最大 800A である。式に当てはめると、磁場勾配は約 $38\text{T}/\text{m}$ となるが、実際には磁場に飽和が見られ、 $30\text{T}/\text{m}$ 程度になる。PF の電磁石の励磁曲線の例を図 3-2 に示す。縦軸は $\frac{B'L}{B_0\rho} [\text{m}^{-1}]$ である。現実の電磁石では

磁極両端からビーム進行方向に離れて行くに従い、磁場が緩やかに減衰する。端部の漏れ磁場というが、裾を引く距離はおおよそ磁極ギャップと同じ程度である。計算値では電磁石中心の磁場の強さに磁極の長さをかけるが、現実の電磁石では漏

れ磁場の分だけ磁場（勾配）の積分値は大きくなる。一方、大電流の場合、現実の磁場は飽和が見られる。電磁石の磁場が鉄心によって強められるのは、鉄のスピンの揃う為であるが、揃いきってしまうとそれ以上磁場が強められなくなる。磁場の強さと電流の関係をかなり概念的に書けば、図 3-3 のようになる。図 3-2 の励磁曲線吾は、図 3-3 の右上象限にあたる部分で $0 \sim 800\text{A}$ のループを描かせ、電流上昇方向の時に測定した磁場である。加速器運転時は電磁石を必ず同じループに乗せて励磁する必要があり、それを電磁石の初期化という。

1.3. フロケーの定理と解の性質

偏向電磁石と 4 極電磁石、ドリフトスペース（電磁石のない自由空間）が並んだ場合の粒子の運動方程式は、

$$x'' = Kx \quad (1-47)$$

と書ける。ただし、 K は軌道長によって変化する為、それを露わに書けば、方程式は $x'' = K(s)x$ である。ただし、蓄積リングの場合、周回すれば元の場所に戻るなので、周長を C として、

$$K(s+C) = K(s) \quad (1-48)$$

という周期条件がある。この項ではこの方程式の解の性質を調べ、解が

$$x = A\sqrt{\beta} \cos\left(\int \frac{ds}{\beta} + \delta\right) \quad (1-49)$$

の様な形に書けることを示す。なお、 β の方程式は与えられるが、具体的な計算にはその方程式は解かない。代わりに転送行列を用いるが、それを順に述べる。

1.3.1. フロケーの定理

$x'' = K(s)x$ は、周期的な係数の 2 階の線形微分方程式（ヒルの方程式と呼ぶ）であるが、その解は、以下の性質を持つ。

周期性 : まず、 $y(s)$ が解であれば、 $y(s+C)$ も解になる。 $y(s)$ は方程式を満たすので、

$$y''(s) = K(s)y(s) \quad (1-50)$$

$s \rightarrow s+C$ と変えても、方程式は満たされる。
 $y''(s+C) = K(s+C)y(s+C)$ (1-51)

$K(s+C) = K(s)$ より、
 $y''(s+C) = K(s)y(s+C)$ (1-52)

よって、 $y(s+C)$ も解であることが示された。

線形性 : $y_1(s)$ 、 $y_2(s)$ を独立した 2 解とすると、他の全ての解はこの 2 解の線形結合で書ける。ある解を $y_a(s)$ とする。この解の初期条件を $y_1(s)$ 、 $y_2(s)$ を使って書けば、

$$\begin{aligned} y_a(0) &= ay_1(0) + by_2(0) \\ y'_a(0) &= ay'_1(0) + by'_2(0) \end{aligned} \quad (1-53)$$

と書ける。方程式は線形なので、ある解の和や差も解になる。従って、当然

$$ay_1(s) + by_2(s) \quad (1-54)$$

も解になるが、この解は初期条件が y_a に等しいので、 y_a そのものである。よって、

$$y_a(s) = ay_1(s) + by_2(s) \quad (1-55)$$

と書けることが示された。

フロケーの定理 : 周期条件を満たす構造内の振動は、同じ周期条件を持つ振幅関数と位相に分解できる。すなわち、方程式の解は、

$$z(s) = F(s)\exp(ks) \quad (1-56)$$

と書け、 F は

$$F(s+C) = F(s) \quad (1-57)$$

という周期性を持つ様にできる。これを示す。

$y_1(s)$ 、 $y_2(s)$ を独立した 2 解とすると、周回後の $y_1(s+C)$ 、 $y_2(s+C)$ はその線形結合で書ける。

$$\begin{pmatrix} y_1(s+C) \\ y_2(s+C) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{pmatrix} \quad (1-58)$$

行列 M の固有値を λ_1 、 λ_2 、対応する固有ベクトルを \vec{v}_1 、 \vec{v}_2 とする。すなわち、

$$\begin{aligned} M(\vec{v}_1 \ \vec{v}_2) &= (\lambda_1 \vec{v}_1 \ \lambda_2 \vec{v}_2) \\ &= \begin{pmatrix} v_{1x} & v_{2x} \\ v_{1y} & v_{2y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1-59)$$

従って、 $MV = V\Lambda \leftrightarrow M = V\Lambda V^{-1}$ であり、

$$\vec{y}(s+C) = V\Lambda V^{-1}\vec{y}(s) \quad (1-60)$$

と書ける。ここで、

$$V^{-1}\vec{y}(s) \equiv \vec{z}(s) \quad (1-61)$$

とおけば、

$$\vec{z}(s+C) = \Lambda\vec{z}(s) \quad (1-62)$$

すなわち、

$$z_1(s+C) = \lambda_1 z_1(s) \quad (1-63)$$

$$z_2(s+C) = \lambda_2 z_2(s)$$

とできる。 $\lambda = \exp(\nu)$ とおけば、

$$z_1(s+C) = e^{\nu_1} z_1(s) \quad (1-64)$$

$$z_2(s+C) = e^{\nu_2} z_2(s)$$

と書けたことになる。そこで、 $k = \frac{\nu}{C}$ とおいて、

$$z(s) = F(s)\exp\left(\frac{\nu}{C}s\right) \quad (1-65)$$

としてみる。

$$z(s+C) = e^{\nu} z(s)$$

$$\leftrightarrow e^{\frac{\nu}{C}(s+C)} F(s+C) = e^{\nu} e^{\frac{\nu}{C}s} F(s) \quad (1-66)$$

$$\leftrightarrow F(s+C) = F(s)$$

従って、 $z(s) = e^{\frac{\nu}{C}s} F(s)$ 、 $F(s+C) = F(s)$ なる解があることが示された。

1.3.2. 方程式の解

粒子の運動方程式の解が、 $z(s) = e^{\frac{\nu}{C}s} F(s)$ 、 $F(s+C) = F(s)$ と書けることを示したが、これをさらに詳しく調べてゆく。周回後に振動の大きさが指数関数的に変化することは、振動の減衰または発散を意味する。蓄積リングの周期解には ν が虚数になる解が適当であり、

$$\nu_1 = i\mu \quad (1-67)$$

とおき、露わに書くことにする。ただし、数学的には振動数に実数成分があり、発散する場合も解である。ここで、 $F(s)$ を極形式で書き直し、

$$F(s) = |F(s)|e^{i\phi(s)} = \omega(s)e^{i\phi(s)} \quad (1-68)$$

とする。 $\omega(s) > 0$ であり、トウイスパラメータで書けば $\omega(s) = \sqrt{\beta}$ である。極形式を使うと解は、

$$z(s) = e^{i\frac{\mu}{C}s} \omega(s) e^{i\phi(s)} \quad (1-69)$$

$$= \omega(s) e^{i\left(\phi(s) + \frac{\mu}{C}s\right)} \equiv \omega(s) e^{i\varphi(s)}$$

となる。

$$\omega(s+C) = \omega(s) \quad (1-70)$$

であり、

$$\varphi(s+C) = \varphi(s) + \mu(2\pi m) \quad (1-71)$$

である。

また、 $z(s)$ の複素共役を $\tilde{z}(s)$ とすると、 K は実数なので、

$$\tilde{z}''(s) = \tilde{K}(s)\tilde{z}(s) \quad (1-72)$$

$$= K(s)\tilde{z}(s)$$

より、 $\tilde{z}(s)$ も解となる。

$z(s)$ をもとの方程式に代入し、 ω と φ の方程式を求める。

$$z(s) = \omega(s) e^{i\varphi(s)} \text{ より、}$$

$$z' = \omega' e^{i\varphi} + i\varphi' \omega e^{i\varphi}, \quad (1-73)$$

$$z'' = \omega'' e^{i\varphi} + 2i\varphi' \omega' e^{i\varphi} - \varphi'^2 \omega e^{i\varphi} + i\varphi'' \omega e^{i\varphi}. \quad (1-74)$$

代入して、

$$\omega'' + 2i\varphi' \omega' - \varphi'^2 \omega + K\omega + i\varphi'' \omega = 0. \quad (1-75)$$

実部と虚部に分ければ、

$$\omega'' + K\omega - \varphi'^2 \omega = 0 \quad (1-76)$$

$$2\varphi' \omega' + \varphi'' \omega = 0.$$

虚部の方程式は、

$$\left(\varphi' \omega^2\right)' = 0 \leftrightarrow \varphi' \omega^2 = \text{const}. \quad (1-77)$$

と書ける。そこで、

$$\varphi' \omega^2 = 1 \quad (1-78)$$

とおく。後で関連づけるが、 $\varphi' = \frac{1}{\beta}$ 、従って、

$$\varphi = \int \frac{ds}{\beta} \text{ となる。}$$

さて、実際に粒子の初期座標を与えた場合の解を、 $z(s)$ 、 $\tilde{z}(s)$ を使って書く。任意の解は、

$$x = az + b\tilde{z} \quad (1-79)$$

$$p = x' = az' + b\tilde{z}'$$

と書ける。軌道上のある位置で、

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x(s_0) \\ p(s_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z(s_0) & \tilde{z}(s_0) \\ z'(s_0) & \tilde{z}'(s_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (1-80)$$

$$= X_0 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

とすると、周回後は

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x(s_0+C) \\ p(s_0+C) \end{pmatrix} \quad (1-81)$$

$$= \begin{pmatrix} z(s_0+C) & \tilde{z}(s_0+C) \\ z'(s_0+C) & \tilde{z}'(s_0+C) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= X_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

従って、

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = X_0^{-1} \vec{x}_0 = X_1^{-1} \vec{x}_1 \quad (1-82)$$

$$\leftrightarrow \vec{x}_1 = X_1 X_0^{-1} \vec{x}_0$$

となる。1 周の運動を表す行列を M とすれば、

$$M = X_1 X_0^{-1} \quad (1-83)$$

となる。具体的にこれを求める。

$$z = \omega e^{i\varphi}, \quad \tilde{z} = \omega e^{-i\varphi}, \quad (1-84)$$

$$z' = \omega' e^{i\varphi} + i\varphi' \omega e^{i\varphi}, \quad \tilde{z}' = \omega' e^{-i\varphi} - i\varphi' \omega e^{-i\varphi},$$

$$\omega(s+C) = \omega(s), \quad \omega'(s+C) = \omega'(s), \quad (1-85)$$

$$\varphi(s+C) = \varphi(s) + \mu, \quad \varphi'(s+C) = \varphi'(s) + \frac{\mu}{L} \quad (1-86)$$

$$= \varphi'(s)$$

などから、

$$M = \begin{pmatrix} z(s_0+C) & \tilde{z}(s_0+C) \\ z'(s_0+C) & \tilde{z}'(s_0+C) \end{pmatrix} \quad (1-87)$$

$$= \frac{1}{\det X_0} \begin{pmatrix} \tilde{z}'(s_0) & -\tilde{z}(s_0) \\ -z'(s_0) & z(s_0) \end{pmatrix}.$$

ここで、

$$\det X_0 = z(s_0)\tilde{z}'(s_0) - \tilde{z}(s_0)z'(s_0) \quad (1-88)$$

$$= -2i\varphi'\omega^2 = -2i$$

である。結局、

$$M = \begin{pmatrix} \cos \mu - \omega \omega' \sin \mu & \omega^2 \sin \mu \\ -\frac{1 + \omega^2 \omega'^2}{\omega^2} \sin \mu & \cos \mu + \omega \omega' \sin \mu \end{pmatrix} \quad (1-89)$$

となる。なお、 $\phi' \omega^2 = 1$ を使った。

任意の解は

$$x = a \omega e^{i\phi} + b \omega e^{-i\phi} \quad (1-90)$$

と書ける。定数を振幅と初期位相に直し、

$$x = A \omega(s) \cos(\phi(s) + \delta_0) \quad (1-91)$$

とする。微分すると、

$$x' = A \omega' \cos(\phi(s) + \delta_0) + \frac{A}{\omega} \sin(\phi(s) + \delta_0) \quad (1-92)$$

と書ける。包絡線関数 ω は必ず正であるが、それを

$$\omega = \sqrt{\beta} \quad (1-93)$$

と書く。さらに、 β の微分をとって、

$$\beta' = (\omega^2)' = 2\omega\omega' = -2\alpha \quad (1-94)$$

とおく。最後に、

$$\frac{1 + \omega^2 \omega'^2}{\omega^2} = \frac{1 + \alpha^2}{\beta} \equiv \gamma \quad (1-95)$$

と書く。これら α 、 β 、 γ をツイスパラメータという。ツイスパラメータを使うと、周回の転送行列は

$$M = \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu & \beta \sin \mu \\ -\gamma \sin \mu & \cos \mu - \alpha \sin \mu \end{pmatrix} \quad (1-96)$$

と書ける。また、(1-111)と(1-113)より、

$$\omega'' + K\omega - \phi'^2 \omega = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\beta}'' + K\sqrt{\beta} - \frac{1}{\sqrt{\beta}^3} = 0 \quad (1-97)$$

となる。この方程式を包絡線の方程式 (envelope equation) という。空間電荷効果などの解析には、この方程式が基本となる。

解も書き直してみると、

$$x = A\sqrt{\beta(s)} \cos(\phi(s) + \delta_0), \quad (1-98)$$

$$\begin{aligned} x' &= A \frac{-\alpha(s)}{\sqrt{\beta(s)}} \cos(\phi(s) + \delta) \\ &\quad + A \frac{1}{\sqrt{\beta(s)}} \sin(\phi(s) + \delta) \\ &= -A\sqrt{\gamma} \sin(\phi(s) + \delta') \end{aligned} \quad (1-99)$$

となる。

集団としてのビームの運動を考えると、例えば \cos や \sin は ± 1 の範囲であるので、ビームの最大振幅、最大発散角は $A\sqrt{\beta}$ や $A\sqrt{\gamma}$ だということができる。後で述べるが、1 粒子の運動を解くことで、位相空間における集団としてのビームの振る舞いが分かる。

1.3.3. 周期構造と波数空間

フロケーの定理は物性などではブロッホの定理として知られる定理と同じである。ブロッホの定理では、方程式はシュレディンガー方程式、解は、結晶など周期構造の周期を波数とする平面波となる。

結晶の場合、結晶格子の間隔が狭くなると、波数空間すなわち逆格子の間隔は長くなる。加速器の場合、格子に当たるものは電磁石の並びで、それをラティスという。ここで、周回のラティスが、ある小さな単位構造に分解できる場合を考える。そのような単位構造をセルというが、通常の加速器のラティスは、「セル」の繰り返しで作られていることが多い。これを結晶の場合と同様に考えてみると、周回ラティスを何分割かしたセルが周期構造の最小単位になっているのであれば、逆空間では波数の間隔はその分だけ拡大されることになる。

加速器内の粒子の振動の安定領域、すなわちダイナミックアパーチャは、共鳴振動によって決まるが、セル構造をとるラティスの場合、共鳴はセル構造の効果で弱められる。例えば、1 周のラティスが 2 セルでできている場合を 2 回対称と呼ぶが、強い共鳴線の間隔は周回内に小さな周期構造がない場合の 2 倍間隔になる。10 セルなら 10 倍間隔である。どんなセル構造でも整数や半整数共鳴は避けられないが、高次の共鳴はこの拡大効

果によってかなり弱めることができる為、通常の加速器ではセル構造が重要となる。逆に、様々な誤差や非線形力に対して、セルとしての周期性を保つことが、安定領域の維持に繋がる。ところで、元々強かった1セルに対する共鳴線は拡大先でも強いままである。そのような共鳴線を構造共鳴線と呼ぶ。例えば、周回ラティスが10セルで構成されている時、周回チューンが10になる整数共鳴は、1セルのチューンが1になる場合に相当するが、非常に強い。10/2 = 5の倍数の半整数共鳴、10/3の倍数の3次共鳴なども非常に強力であり、共鳴線上だけでなく、その近くの振動数になっただけでも運動が不安定になる。なお、振動が不安定になる振動数の幅をストップバンドという。

中小エネルギーの第3世代光源の場合、DBAやTBA構造が1セルとなり、セル長は直線部の長さに依るが目安としては20 m程度、周期数は通常10以上で、従って周長は200 m以上となる。

1.3.4. 位相空間の面積不変

解析力学による正しい位相空間の定義は、例えば N 個の粒子の3次元空間での運動の場合、 $3N$ 次元の空間になる。運動は $3N$ 次元の空間上の1点の軌跡を追うことに相当する。位相空間の面積の不変という場合、いくつかの異なった初期条件から始まる複数の運動状態の時間変化を追跡することに相当する。加速器においては解析力学における正しい意味での位相空間の不変も成立するが、1粒子の位相空間に、全粒子の位置と座標を書き込んだような意味での位相空間の面積も保存する。すなわち、厳密に線形の運動方程式の安定解に従って加速器を周回する限り、何周回っても粒子全体の集合としてのビームサイズと発散角の統計的分散の様子は変わらない。

現実の加速器では、安定な平衡状態であれば、包絡線関数が歪むことはあるにせよ、ビームサイズは周回ごとに不変と思ってよい。ただし、例えば航跡場の影響に依る不安定性が起きた場合などはビームサイズがばたつくことがあるし、入射時など、蓄積ビームに振動が励起された場合も放射減衰で変化する。また、粒子間の相互作用や粒

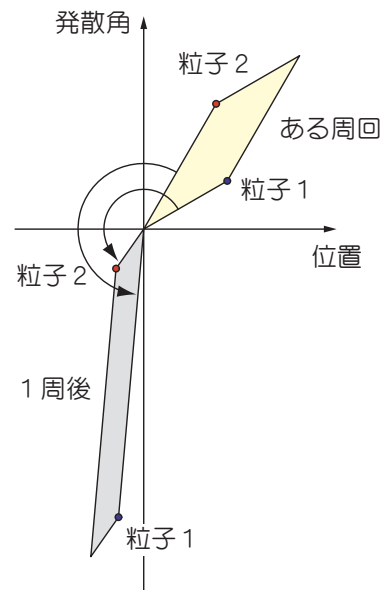


図 3-4 位相空間内の 2 粒子

子間の衝突がある場合も、1粒子空間に全粒子押し込めた位相空間の面積は保存しない。入射器最上流部の、粒子間のクーロン斥力による空間電荷効果が顕著な部分でも、ビームサイズは増大してゆく。

1粒子の位相空間上に押し込めた2個の粒子、粒子1と粒子2を考える(図3-4)。それぞれの粒子のある周回の座標を、

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= (x_1, x'_1), \\ \vec{x}_2 &= (x_2, x'_2) \end{aligned} \quad (1-100)$$

とする。周回の転送行列を M とし、1周後の座標を

$$\begin{aligned} \tilde{\vec{x}}_1 &= M\vec{x}_1 = (\tilde{x}_1, \tilde{x}'_1), \\ \tilde{\vec{x}}_2 &= M\vec{x}_2 = (\tilde{x}_2, \tilde{x}'_2) \end{aligned} \quad (1-101)$$

と書く。位相空間において、粒子1ベクトルと粒子2ベクトルの張る領域の面積は、それらのベクトルの外積で書くことができ、

$$\begin{aligned} W &= |\vec{x}_1 \times \vec{x}_2| = x_2 x'_1 - x'_2 x_1, \\ \tilde{W} &= |\tilde{\vec{x}}_1 \times \tilde{\vec{x}}_2| = \tilde{x}_2 \tilde{x}'_1 - \tilde{x}'_2 \tilde{x}_1 \end{aligned} \quad (1-102)$$

である。

まず、 $x'' = Kx$ を使うと、

$$\frac{dW}{ds} = x'_2 x''_1 - x''_2 x'_1 = x'_2 K x_1 - K x_2 x'_1 = 0 \quad (1-103)$$

である。従って、軌道上のどこかまで進んだ場合でも、1周進んだ場合でも、位相空間の面積は不変であることが分かる。ある周回と、1周後についてこれを適用してみる。周回の転送行列を、

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{と} \text{おいて書き直せば、}$$

$$\begin{aligned} \tilde{W} &= \tilde{x}_2 \tilde{x}'_1 - \tilde{x}'_2 \tilde{x}_1 \\ &= (ax_2 + bx'_2)(cx_1 + dx'_1) \\ &\quad - (cx_2 + dx'_2)(ax_1 + bx'_1) \\ &= (ad - bc)(x_2 x'_1 - x'_2 x_1) \\ &= \det M \cdot W \end{aligned} \quad (1-104)$$

である。従って、

$$\det M = 1 \quad (1-105)$$

でなければならない。

さて、 M の固有値を λ_1 、 λ_2 、対応する固有ベクトルを \vec{v}_1 、 \vec{v}_2 とする。任意の粒子の座標は \vec{v}_1 、 \vec{v}_2 の線形結合で書け、

$$\vec{x} = A\vec{v}_1 + B\vec{v}_2 \quad (1-106)$$

となる。この粒子の N 周後の座標は、

$$M^N \vec{x} = A\lambda_1^N \vec{v}_1 + B\lambda_2^N \vec{v}_2 \quad (1-107)$$

である。解が安定であるためには、

$$|\lambda| \leq 1 \quad (1-108)$$

でなければならない。ところで、行列の固有方程式

$$\begin{aligned} \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1 \lambda_2 &= 0 \\ \leftrightarrow \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc &= 0 \end{aligned} \quad (1-109)$$

と $\det M = 1$ より、

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1 \quad (1-110)$$

である。従って、片方の固有値を $\lambda_1 = e^{i\mu}$ とおくと、もう片方は $\lambda_2 = e^{-i\mu}$ となる。ただし、数学的には μ は虚数でも複素数でもよい。周回の転送行列の具体的な形から、

$$a + d = \lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr}M = 2 \cos \mu \quad (1-111)$$

となるが、 $|\lambda| \leq 1$ という安定条件を課すと、 μ は実数でなければならない。

すなわち、数学的には解は振幅の指数関数的な増大や減少を含むが、周回のベータトロンチューンを実数と限定することで、それらを排除できるともいえる。

1.4. 転送行列

前項では方程式の解が包絡線と変調された振動で書けることを述べたが、具体的に包絡線や位相の進みなどは与えられていない。包絡線方程式は、解くにはあまりに難しい。そこで、加速器では、要素毎に方程式を解いて、行列の形にまとめ、それを掛け合わせて周回の運動を求めるといふ手法がとられる。要素（電磁石やドリフトスペース）毎に、

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{\text{出口}} = M_{\text{ある要素}} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{\text{入り口}} \quad (1-112)$$

なる行列を求め、それをその要素の転送行列という。リング1周分の要素の転送行列（～数百個？）を掛け合わせれば、入り口の座標に対して周回後の座標が分かる（それが前項の M ）。ただし、結局のところ、1周分どころか1セル分でも手計算では難しかりう。

転送行列を調べると、各要素内の粒子の運動だけでなく、ツイスパラメータ、すなわち、ビームサイズやチューンなど、様々なビームパラメータの変化が分かる。また、ある要素の強さを変えた時のビームの応答なども分かる。この項では、各要素の転送行列を実際に求める。

1.4.1. ドリフトスペース

電磁石などのない空間では、

$$x'' = 0 \quad (1-113)$$

となる。この方程式の解は、

$$x = As + B \quad (1-114)$$

であり、 A と B は積分定数である。転送行列を求めるためには、積分定数を初座標と初発散角で書かなければいけない。 $s=0$ の時、 $x=x_0$ 、 $x'=x'_0$ とすると、 $x'(0)=A=x'_0$ 、 $x(0)=B=x_0$ 、すなわち $x(s)=x_0+sx'_0$ 、 $x'(s)=x'_0$ となり、行列に直せば、垂直方向も含め、

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}, \quad (1-115)$$

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$$

となる。

分散関数についても同様に、

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \eta'_0 \end{pmatrix} \quad (1-116)$$

である。

1.4.2. 偏向電磁石

偏向電磁石中の粒子の運動方程式は、

$$x'' = -\frac{x}{\rho^2}. \quad (1-117)$$

解は

$$x = A \cos \frac{s}{\rho} + B \sin \frac{s}{\rho}, \quad (1-118)$$

$$x' = -\frac{A}{\rho} \sin \frac{s}{\rho} + \frac{B}{\rho} \cos \frac{s}{\rho}.$$

積分定数を初期条件に書き換えると、 $A = x_0$ 、

$B = \rho x'_0$ となる。従って、

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{\rho} & \rho \sin \frac{s}{\rho} \\ -\frac{1}{\rho} \sin \frac{s}{\rho} & \cos \frac{s}{\rho} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \quad (1-119)$$

となる。

なお、垂直方向については何も力が働かないため、ドリフトスペースと同じである。

分散関数の場合、方程式は

$$\eta'' = -\frac{\eta}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} \quad (1-120)$$

となる。特別解は

$$\eta = \rho, \quad (1-121)$$

斉次解は

$$\eta = A \cos \frac{s}{\rho} + B \sin \frac{s}{\rho} \quad (1-122)$$

である。足しあわせて一般解は

$$\eta = A \cos \frac{s}{\rho} + B \sin \frac{s}{\rho} + \rho \quad (1-123)$$

$$\eta' = -\frac{A}{\rho} \sin \frac{s}{\rho} + \frac{B}{\rho} \cos \frac{s}{\rho}$$

となる。積分定数を初期条件に書き換えると、 $A = \eta_0 - \rho$ 、 $B = \rho \eta'_0$ 、従って、

$$\eta = \eta_0 \cos \frac{s}{\rho} + \rho \eta'_0 \sin \frac{s}{\rho} + \rho \left(1 - \cos \frac{s}{\rho} \right), \quad (1-124)$$

$$\eta' = -\frac{\eta_0}{\rho} \sin \frac{s}{\rho} + \eta'_0 \cos \frac{s}{\rho} + \sin \frac{s}{\rho}$$

となる。分散関数にエネルギーのずれをかけたものが実際の軌道偏差になる。実際の軌道偏差を行列で書けば、

$$\begin{pmatrix} \eta \delta \\ \eta' \delta \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{bend} & \rho \left(1 - \cos \frac{s}{\rho} \right) \\ 0 & \sin \frac{s}{\rho} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_0 \delta \\ \eta'_0 \delta \\ \delta \end{pmatrix} \quad (1-125)$$

と書ける。紙面横幅の都合で、 M_{bend} は(1-119)の2行2列の偏向電磁石の転送行列である。

1.4.3. 集束型4極電磁石

集束型4極電磁石の方程式は、 $K > 0$ として、

$$x'' = -Kx \quad (1-126)$$

である。偏向電磁石と見比べ、 $\frac{1}{\rho} \rightarrow \sqrt{K}$ とすればよい。従って転送行列は

$$F = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{K}s & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin \sqrt{K}s \\ -\sqrt{K} \sin \sqrt{K}s & \cos \sqrt{K}s \end{pmatrix} \quad (1-127)$$

となる。分散関数についても転送行列は同じである。集束型4極電磁石内の垂直方向の運動方程式は $y'' = +Ky$ であり、これに対する解は次項で述べる発散型4極電磁石の水平方向の場合と等しい。

ここで、集束力 $KL = \frac{B'L}{B\rho} [m^{-1}]$ を保ったまま、電磁石の長さをゼロにする近似を考えよう。その

ような近似を薄レンズ近似という。 KL を露わに書いた転送行列は、

$$F = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{KL} & L\frac{\sin\sqrt{KL}}{\sqrt{KL}} \\ -KL\frac{\sin\sqrt{KL}}{\sqrt{KL}} & \cos\sqrt{KL} \end{pmatrix} \quad (1-128)$$

であり、これで $L \rightarrow 0$ とすると、

$$F_{thin} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -KL & 1 \end{pmatrix} \quad (1-129)$$

となる。

1.4.4. 発散型 4 極電磁石

次に、発散型 4 極電磁石の方程式を考える。

$$K > 0 \text{ として、} \quad x'' = Kx. \quad (1-130)$$

上の式で $\sqrt{K} \rightarrow i\sqrt{K}$ と置き換える。

$$\cos i\theta = \cosh \theta \quad (1-131)$$

$$-i \sin i\theta = \sinh \theta$$

より、

$$D = \begin{pmatrix} \cosh\sqrt{K}s & \frac{1}{\sqrt{K}}\sinh\sqrt{K}s \\ \sqrt{K}\sinh\sqrt{K}s & \cosh\sqrt{K}s \end{pmatrix} \quad (1-132)$$

となる。分散関数についても同じである。薄レンズ近似では、

$$D_{thin} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ KL & 1 \end{pmatrix} \quad (1-133)$$

となる。

ちなみに、方程式を解く時、解を

$$x = Ae^{\sqrt{K}s} + Be^{-\sqrt{K}s} \quad (1-134)$$

とおき、 $A = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{x'_0}{\sqrt{K}}\right)$ 、 $B = \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{x'_0}{\sqrt{K}}\right)$ から求めることもできる。

4 極電磁石について整理すると、

集束型 4 極電磁石：

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix} \quad (1-135)$$

発散型 4 極電磁石内：

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix} \quad (1-136)$$

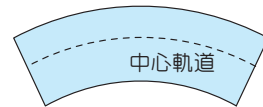
となる。

1.4.5. 矩形偏向電磁石

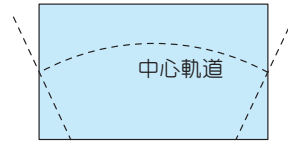
偏向電磁石は電子の軌道から考えると扇形（セクター（sector）型、図 3-5-(a)）が自然な形であるが、実際に電磁石を製作することを考えると、矩形（レクタングラー（rectangular）型、図 3-5-(b)）の方が作り易いし精度も出る。従って、蓄積リングの偏向電磁石は多くが矩形である。

偏向電磁石の転送行列を見ると、水平方向は集束 4 極電磁石と同じであり、水平方向には集束力として働いている。運動方程式から分かるが、向心力の分母における曲率半径の違いが集束力の源であり、すなわち、中心軌道の外側から偏向電磁石に入った粒子は電磁石内の軌道長が長く、内側から入ったら短い、軌道長が長いとより多く曲げられる為に外側から内側へ向かって中心軌道に近づき、短いと曲げが足りないのでやはり粒

(a) 扇形の偏向電磁石



(b) 矩形の偏向電磁石



(c) 矩形の偏向電磁石端

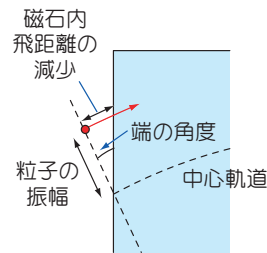


図 3-5 矩形偏向電磁石

子は内側から外側へ中心軌道に近づく。偏向電磁石が矩形の場合、この条件が崩れる。図 3-5(c)に示すが、偏向電磁石端の、設計軌道の角度に対する角度を φ 、考える粒子の振幅を x 、偏向電磁石内の飛距離の減少分を Δl とすると、図より、

$$\tan \varphi = \frac{\Delta l}{x} \quad (1-137)$$

従って、曲げ角の減少分は

$$\frac{\Delta l}{\rho} = \frac{x \tan \varphi}{\rho} \quad (1-138)$$

曲げ角減少分が振幅に比例するため、発散型 4 極電磁石と同じ効果となる。すなわち、

$$x' = x'_0 + \frac{x \tan \varphi}{\rho} \quad (1-139)$$

行列は、

$$M_{edge,x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\tan \varphi}{\rho} & 1 \end{pmatrix} \quad (1-140)$$

となる。水平には発散力であるが、この効果をエッジフォーカス (edge focus) という。

さて、扇形偏向電磁石内では垂直方向はドリフトスペースと同じであったが、矩形電磁石の場合、電磁石端で垂直方向に集束力が生じる。扇形の場合、電磁石端の角度は軌道と垂直の為、漏れ磁場の方向はビーム進行方向 z と垂直方向 y のみとなり、水平方向成分はない。従って、垂直方向に力は働かない。矩形電磁石の場合、端の角度と粒子の進行方向が違ふ為、設計軌道に対して水平な磁場成分があることになり、それは垂直方向の力となる。垂直方向の集束力の強さは、水平方向の発散力の強さと等しく、

$$M_{edge,y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\tan \varphi}{\rho} & 1 \end{pmatrix} \quad (1-141)$$

となる。エッジフォーカスという名前の由来は垂直方向の集束力であり、初期の加速器では、偶然の誤差によるものを含め、このエッジの力を使って垂直方向の集束力を得ていた為である。

なお、矩形という場合、端の角度は偏向電磁石の曲げ角を θ とすると $\frac{\theta}{2}$ になっている場合が矩

形である。端の集束力や発散力を生かすため、台形や逆向き台形の電磁石も存在する。

1.5. トウイスパラメータとその性質

1.5.1. トウイスパラメータの転送

転送行列を加速器の全要素について求め、掛け合わせれば、求めた場所を始点として周回の転送行列が計算できる。その行列を周回の転送行列

$$M = \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu & \beta \sin \mu \\ -\gamma \sin \mu & \cos \mu - \alpha \sin \mu \end{pmatrix} \quad (1-142)$$

と比較すれば、その場所のトウイスパラメータを求めることができる。トウイスパラメータは 1 粒子の運動だけでなく、ビームの全体としての運動を知る為の重要なパラメータである為、加速器の各点においてそれを求めるのがビーム光学の最初の計算となる。

加速器 1 周のトウイスパラメータが知りたい場合、要素毎にそこを始点に周回の転送行列をかけても求まるが、転送行列を使ってトウイスパラメータを転送して求めることもできる。図 3-6 のように、蓄積リングのある要素 1 を始点とした 1 周の転送行列を M_1 、ある要素 2 を始点とした 1 周の転送行列を M_2 、要素 1 から要素 2 までの転送行列を M_{12} とする。要素 1 を始点に 1 周して要素 2 にたどり着く様な転送を考える。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{2,N+1} &= M_{12} M_1 \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{1,N} \\ &= M_2 M_{12} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{1,N} \end{aligned} \quad (1-143)$$

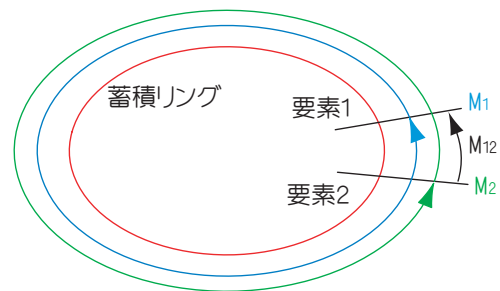


図 3-6 周回の転送行列と要素間の転送行列

従って、

$$M_2 = M_{12} M_1 M_{12}^{-1} \quad (1-144)$$

と書ける。ところで、周回の転送行列(1-131)は、 I を単位行列、

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \quad (1-145)$$

として、

$$M = I \cos \mu + J \sin \mu \quad (1-146)$$

と書ける。また、 $M_{12} I_1 M_{12}^{-1} = I$ である。よって、

$$J_2 = M_{12} J_1 M_{12}^{-1} \quad (1-147)$$

より、

$$M_{12} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \quad (1-148)$$

として、

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ -\gamma_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\gamma_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}^{-1} \quad (1-149)$$

となる。ここで、

$$\det M = 1 \quad (1-150)$$

より、

$$m_{11} m_{22} - m_{12} m_{21} = 1,$$

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{pmatrix}. \quad (1-151)$$

よって、(1-138)を具体的に計算すると、

$$(1,1)成分は \quad (m_{11} m_{22} + m_{12} m_{21}) \alpha_1 - m_{12} m_{22} \gamma_1 - m_{21} m_{11} \beta_1, \quad (1-152)$$

$$(1,2)成分は \quad -2m_{11} m_{12} \alpha_1 + m_{11}^2 \beta_1 + m_{12}^2 \gamma_1, \quad (1-153)$$

$$(2,1)成分は \quad 2m_{11} m_{12} \alpha_1 + m_{11}^2 \beta_1 + m_{12}^2 \gamma_1, \quad (1-154)$$

$$(2,2)成分は \quad -(m_{11} m_{22} + m_{12} m_{21}) \alpha_1 + m_{12} m_{22} \gamma_1 + m_{21} m_{11} \beta_1 \quad (1-155)$$

となる。これも行列で書けば、

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \quad (1-156)$$

$$T = \begin{pmatrix} m_{11} m_{22} + m_{12} m_{21} & -m_{21} m_{11} & -m_{12} m_{22} \\ -2m_{11} m_{12} & m_{11}^2 & m_{12}^2 \\ -2m_{21} m_{22} & m_{21}^2 & m_{22}^2 \end{pmatrix} \quad (1-157)$$

と書ける。

ドリフトスペースの場合にこれを具体的に求めてみよう。

$$M = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1-158)$$

より、

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -s \\ -2s & 1 & s^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1-159)$$

従って、

$$\beta_2 = \beta_1 - 2s\alpha_1 + s^2\gamma_1, \quad (1-160)$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 - s\gamma_1,$$

$$\gamma_2 = \gamma_1$$

となる。 $\beta(s)$ を平方完成させると、

$$\beta_2 = \gamma_1 \left(s - \frac{\alpha_1}{\gamma_1} \right)^2 + \beta_1 - \frac{\alpha_1^2}{\gamma_1} \quad (1-161)$$

となるが、これは、 $s_0 = \frac{\alpha_1}{\gamma_1}$ で $\beta(s)$ が極小値

$$\beta_0 = \beta_1 - \frac{\alpha_1^2}{\gamma_1} \text{をとることを示している。} \quad (1-162)$$

式より、この点では、 $\alpha_0 = 0$ 、従って $\gamma_0 = \frac{1}{\beta_0}$ と

なる。これらを使えば、

$$\beta(s) = \frac{(s - s_0)^2}{\beta_0} + \beta_0 \quad (1-163)$$

となることが分かる。すなわち、 $s = s_0$ を中心に放物線となり、中心で β を小さく絞れば、上下流での β の増大は急激になり、 β を大きな値に留めておけば、上下流のビームサイズの変化は緩やかになる、ということを示している。挿入光源を設置する直線部では、挿入光源中央で必要以上にビームサイズを小さくすると、端の方でのビームサイズが大きくなる。また、真空封止型短周期小ギ

ャップ挿入光源の場合、磁極列にビームが当たるのを防ぐために垂直方向の β をかなり絞る必要があるが、上下流でのビームサイズの増大を考えると、全長はそれほど長くはできない。なお、それでも長い挿入光源が必要な場合、磁極列の途中に4極電磁石を入れてビームを絞り直しなが、離れた磁極列間の位相をあわせるという難しい調整が必要になる。全く制限がない場合のオプティクス設計の目安、絞りすぎず緩すぎず、は、例えば直線部全長の半分 $\beta_{\min} = \frac{L}{2}$ などとする必要がある。そうすると、例えば直線部全長が10 m なら、 β は中央で5 m、両端で10 mとなる。

1.5.2. クーラン・シュナイダー不変量

ビーム内の粒子を1粒子の位相空間に押し込めた場合の位相空間の面積不変を示したが、この項では、具体的に面積がどう書けるかについて述べる。

ある粒子について、運動方程式の解は、

$$\begin{aligned} x &= A\sqrt{\beta} \cos(\varphi + \delta) \\ x' &= A \frac{-\alpha}{\sqrt{\beta}} \cos(\varphi + \delta) \\ &\quad + A \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sin(\varphi + \delta) \\ &= -A\sqrt{\gamma} \sin(\varphi + \delta') \end{aligned} \tag{1-164}$$

と書ける。従って、

$$\begin{aligned} \cos(\varphi + \delta) &= \frac{x}{A\sqrt{\beta}} \\ \sin(\varphi + \delta) &= -\frac{\sqrt{\beta}}{A} \left(x' + \frac{\alpha}{\beta} x \right) \end{aligned} \tag{1-165}$$

と、 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ より、

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{\beta} \left(x^2 + (\beta x' + \alpha x)^2 \right) \\ &= \gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2 = \text{const.} \end{aligned} \tag{1-166}$$

となる。この量は、よく文字 W 、 $2J$ 、 ε などで表されるが、クーラン・シュナイダー不変量 (Courant-Snyder invariant) という。ここでは、ある初期座標を与えた1粒子に対してベータトロ

ン振動の大きさを表す量であり、軌道上の場所に依らず、周回に依らず、一定となる。

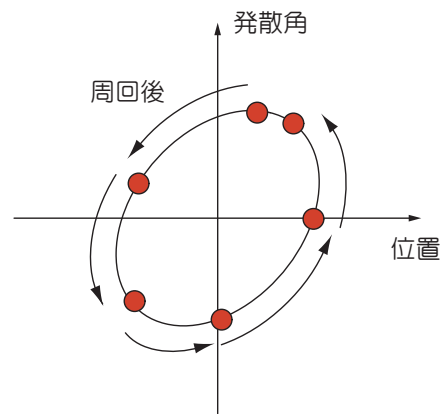
$\alpha = 0$ の時を考えると、この楕円は軸と直交している。その時、楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{\beta} + \beta x'^2 = \varepsilon \tag{1-167}$$

となる。従って、楕円の面積は、 $\pi\varepsilon$ である。これは軌道上の場所に依らず、周回に依らず、この値となる。

さて、軌道上のある場所で、1粒子の座標を位相空間上に書いていく。ある粒子が位相空間上で1周後にどこにくるかという写像をポアンカレ

(a) 1粒子の軌跡



(b) 楕円とツイスパラメータ

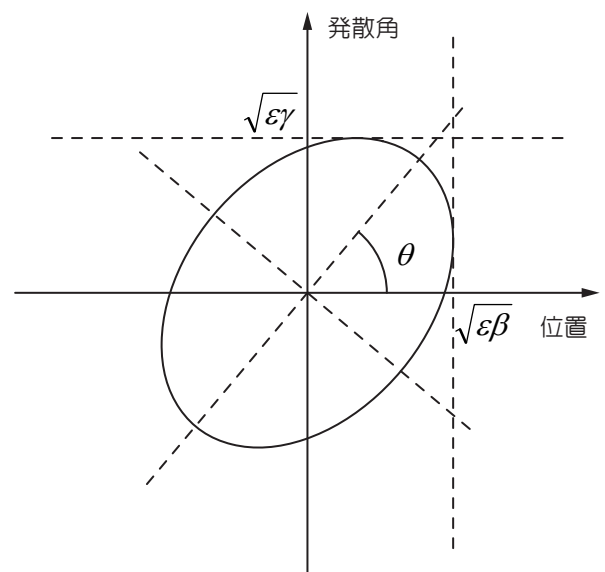


図 3-7 位相空間における軌跡

マップ(Poincare map)、グラフとしての重ね書きをポアンカレプロット(Poincare plot)という。チューンが整数や半整数など不適當な場合でなければ、1粒子の座標は(1-166)式の示す傾いた楕円上に散らばる(図3-7(a))。この楕円の最大値は、(1-164)を見れば明らかのように

$$\begin{aligned} x &\leq \sqrt{\varepsilon\beta}, \\ x' &\leq \sqrt{\varepsilon\gamma} \end{aligned} \quad (1-167)$$

である。なお、(1-166)を x 、 x' の2次方程式として解き、判別式で実数解を持つ範囲としても同じことが分かる。すなわち、

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\gamma} (\alpha x' \pm \sqrt{\varepsilon\gamma - x'^2}), \\ x' &= \frac{1}{\beta} (\alpha x \pm \sqrt{\varepsilon\beta - x^2}) \end{aligned} \quad (1-168)$$

より、

$$\begin{aligned} \varepsilon\gamma - x'^2 &\geq 0, \\ \varepsilon\beta - x^2 &\geq 0. \end{aligned} \quad (1-169)$$

軸の回転角については、座標を回転してクロスタームを消すことで分かる。

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = R(-\theta) \begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \cos \theta - X' \sin \theta \\ X \sin \theta + X' \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1-170)$$

を代入し、

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2 \\ &= (\gamma \cos^2 \theta + \alpha \sin 2\theta + \beta \sin^2 \theta) X^2 \\ &\quad + (\gamma \sin^2 \theta - \alpha \sin 2\theta + \beta \cos^2 \theta) X'^2 \\ &\quad + ((\beta - \gamma) \sin 2\theta + 2\alpha \cos 2\theta) X X' \end{aligned} \quad (1-171)$$

より、

$$\begin{aligned} (\beta - \gamma) \sin 2\theta + 2\alpha \cos 2\theta &= 0 \\ \Leftrightarrow \tan 2\theta &= -\frac{2\alpha}{\beta - \gamma} \end{aligned} \quad (1-172)$$

を満たす。

さて、ビームを構成する粒子達のベータトロン振動の大きさはある範囲で統計的に分布しており、位相は適当に散らばっている。従って、粒子全体のベータトロン振動の大きさに対して統計的な分散を考え、それをエミッタンス ε とすれ

ば、粒子の集合全体としてのビームの位相空間での振る舞いが分かる。なお、1粒子に対して振動の大きさというときは $2J$ 、 W などと書き、ビームを構成する粒子全体の統計量を考えるときは ε と書くことが多い。クーランシュナイダー不変量は、ビーム全体の位相区間の面積が、軌道上の位置と周回に依らずに常に一定であるということを示す。楕円の短軸や長軸の長さや傾きは、トゥイスパラメータで与えられる為、トゥイスパラメータでビーム全体の変化が追えることとなる。ビーム光学はトゥイスパラメータが基本である。

1.5.3. 規格化運動量と規格化座標

位相空間の楕円は、

$$\frac{1}{\beta} (x^2 + (\beta x' + \alpha x)^2) = \varepsilon \quad (1-173)$$

なので、

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{\sqrt{\beta}}, \\ P &= \frac{\beta x' + \alpha x}{\sqrt{\beta}} \end{aligned} \quad (1-174)$$

と規格化すると、位相空間の楕円は円になる。また、ベータトロン振動は、

$$\begin{aligned} X(s) &= \sqrt{\varepsilon} \cos(\varphi(s) + \delta), \\ P(s) &= \sqrt{\varepsilon} \sin(\varphi(s) + \delta) \end{aligned} \quad (1-175)$$

と書ける。

例えば、入射点では入射ビームの初期振幅 x はセプタムの壁と蓄積ビームのバンプによって幾何学的に決まるが、 x' についてはセプタムの蹴り角である程度の自由度がある。その場合、セプタムの蹴り角を調整し、 $\beta x' + \alpha x = 0$ を満たす蹴り角にすれば、 $P = 0$ となって入射ビームのベータトロン振動の大きさは最小となる。

1.5.4. 位相空間内の楕円の転送

粒子の集団としてのビーム全体は、位相空間の1本の楕円で表現できる。この項では、ドリフトスペースと4極電磁石による楕円の転送について述べる。

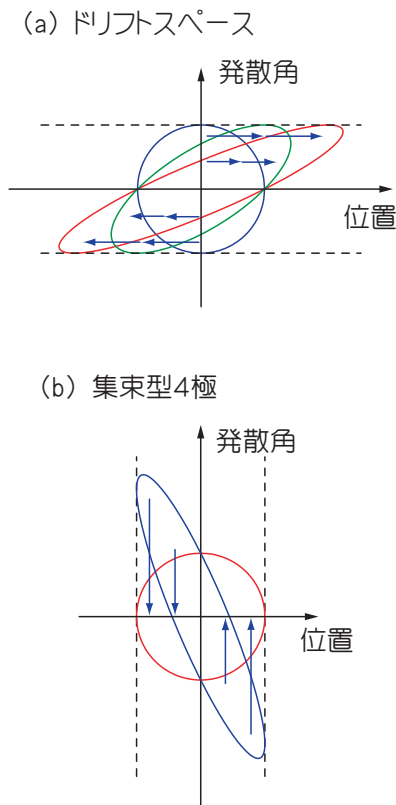


図 3-8 位相空間の楕円の転送

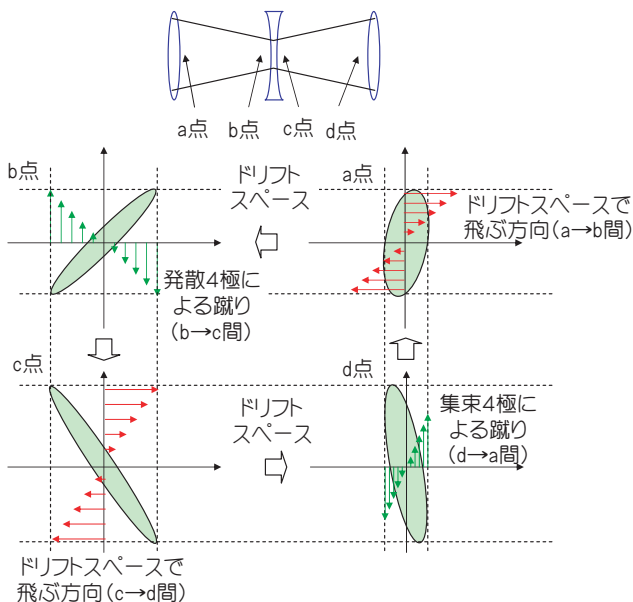


図 3-9 FODO セルの例

図 3-8 に、ドリフトスペースと 4 極電磁石が位相空間の楕円を転送する様子を示す。ドリフトスペースでは、粒子の発散角は変わらず、距離に比例して位置のみが変化してゆく為、楕円は右に伸びてゆく。薄レンズ近似の 4 極電磁石の場合、粒子の位置は変化せず、発散角のみが変化する。どちらの場合も楕円の面積は不変である。図 3-9 に FODO 構造の場合の例を示す。

理想的な場合の設計粒子に対する解析はここまでとし、次に、誤差やエネルギー偏差がある場合の扱いについて述べる。

1.6. 色収差と 6 極による補正

4 極電磁石における粒子の運動方程式は

$$\delta = \frac{\Delta p}{p_0} \quad (1-176)$$

として、

$$x'' = \frac{K}{1 + \delta} x = (K - K\delta)x \quad (1-177)$$

と書ける。すなわち、エネルギー偏差に伴い、集束力が変化する。これは、集束型 4 極電磁石に対して弱い発散型 4 極を付け加え、発散型に対して弱い集束型を付け加えることと同じである。まずは、リングのある場所に余計な小さな 4 極成分が加わった場合の周回の転送行列の変化について調べる。

リングのある場所に薄レンズ近似の弱い 4 極

$$M_{\Delta K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Delta K & 1 \end{pmatrix}$$

(1-178)

が加わったとすると、その場所の周回の転送行列

$$M = \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu & \beta \sin \mu \\ -\gamma \sin \mu & \cos \mu - \alpha \sin \mu \end{pmatrix} \quad (1-179)$$

は

$$M \rightarrow MM_{\Delta K} \quad (1-180)$$

と変化する。書き下せば、

$$MM_{\Delta K} = \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu & & \beta \sin \mu \\ -\Delta K \beta \sin \mu & & \\ -\gamma \sin \mu - \Delta K \begin{pmatrix} \cos \mu \\ -\alpha \sin \mu \end{pmatrix} & \cos \mu - \alpha \sin \mu & \end{pmatrix} \quad (1-180)$$

となる。対角の和をとると、
 $TrMM_{\Delta K} = 2 \cos \mu - \Delta K \beta \sin \mu \quad (1-181)$

となる。ここで、
 $\cos(\mu + \Delta\mu) = \cos \mu \cos \Delta\mu - \sin \mu \sin \Delta\mu \quad (1-182)$

に対し、 $\Delta\mu$ の 1 次までとる。
 $\cos \Delta\mu = 1 - \frac{\Delta\mu^2}{2} \dots \approx 1 \quad (1-183)$

$$\sin \Delta\mu = \Delta\mu - \frac{\Delta\mu^3}{3!} + \dots \approx \Delta\mu$$

より、
 $\cos(\mu + \Delta\mu) = \cos \mu - \Delta\mu \sin \mu \quad (1-184)$
 $= \cos \mu - \frac{\Delta K \beta}{2} \sin \mu.$

従って、チューンシフトは
 $\Delta\mu = \frac{\Delta K \beta}{2} \quad (1-185)$
 となる。

エネルギー偏差による集束力の変化は、
 $\Delta K = -K\delta$
 である。従って、全周の 4 極電磁石に対してこれ
 を足しあわせれば、エネルギーが変化した時のベ
 ータatron振動の振動数の変化が求まる。

$$\Delta\mu = \int_0^Q -\frac{K\beta}{2} ds \delta \quad (1-186)$$

これは[rad]単位なので、チューンに直して、
 $\Delta\nu = -\frac{1}{4\pi} \int_0^Q K\beta \delta ds \quad (1-187)$

係数を色収差といい、
 $\Delta\nu = \xi \frac{\Delta p}{p_0}, \quad (1-188)$

$$\xi = -\frac{1}{4\pi} \int_0^Q K\beta ds$$

となる。

6 極電磁石を使って色収差の補正を行うこ
 とが可能である。normal の 6 極電磁石の磁場は、
 $A_3 = \frac{1}{6} B''$ として、

$$\begin{cases} B_x = 6A_3xy \\ B_y = 3A_3(x^2 - y^2) \end{cases} \quad (1-189)$$

と書ける。従って、運動方程式は $\lambda = \frac{B''}{2B_0\rho}$ とし

て、
 $x'' = -\lambda(x^2 - y^2) \quad (1-190)$
 $y'' = 2\lambda xy$

となる。分散関数のある場所に 6 極電磁石が置か
 れている場合、6 極電磁石内の粒子の軌道は、
 $x = x_\beta + \eta\delta \quad (1-191)$

となる。代入すると、
 $x''_\beta = -\lambda((x_\beta + \eta\delta)^2 - y_\beta^2) \quad (1-192)$
 $y''_\beta = 2\lambda(x_\beta + \eta\delta)y_\beta$

展開して x_β 、 y_β について線形項のみ残すと、
 $x''_\beta = -2\lambda\eta\delta x_\beta \quad (1-193)$
 $y''_\beta = 2\lambda\eta\delta y_\beta$

となる。6 極電磁石が運動量偏差に比例した集束
 力として働くことが分かる。
 $\Delta\mu_x = -\lambda\eta_x\delta\beta_x \quad (1-194)$
 $\Delta\mu_y = \lambda\eta_x\delta\beta_y$

6 極電磁石も考慮すると、色収差は
 $\xi_x = -\frac{1}{4\pi} \int_0^Q K\beta_x ds - \frac{1}{2\pi} \int_S \lambda\eta_x\delta\beta_x ds \quad (1-195)$

$$\xi_y = \frac{1}{4\pi} \int_0^Q K\beta_y ds + \frac{1}{2\pi} \int_S \lambda\eta_x\delta\beta_y ds$$

となる。これがゼロになるように 6 極を決めれ
 ば、運動量偏差に伴うチューンのずれが補正さ
 れ、それを色収差補正と呼ぶ。

1.7. 分散による軌道長のずれ

粒子の中心軌道が設計軌道から変化すると、
 周回の軌道長も変化する。運動量がずれた粒子の
 軌道のずれは分散関数であるが、その軌道のずれ

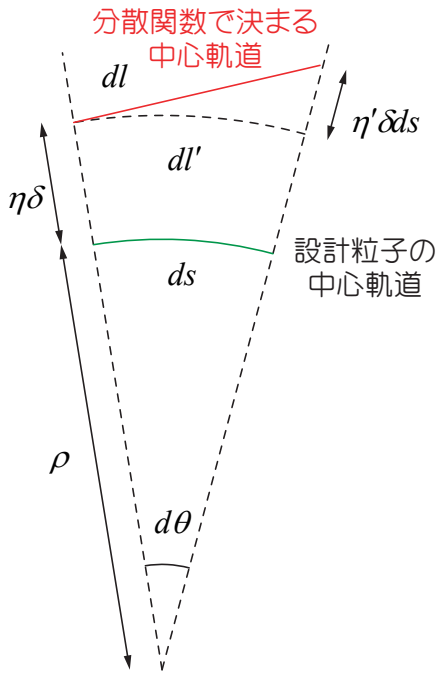


図 3-10 分散関数に伴う軌道長の変化

による軌道長変化を、モーメントコンパクションという。

曲率半径 ρ の無限小の長さの軌道上で、分散関数による軌道長の変化を求める (図 3-10)。設計粒子の軌道長は、

$$ds = \rho d\theta \quad (1-196)$$

である。分散関数による軌道の軌道長は、

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{(dl')^2 + (\eta'\delta ds)^2} \\ &= \sqrt{(\rho + \eta\delta)^2 d\theta^2 + (\eta'\delta ds)^2} \\ &= \sqrt{\left(1 + \frac{\eta\delta}{\rho}\right)^2 + (\eta'\delta)^2} ds \\ &\approx \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2\eta\delta}{\rho} + \frac{(\eta\delta)^2}{\rho^2} + (\eta'\delta)^2\right)\right) ds \\ &\approx \left(1 + \frac{\eta\delta}{\rho}\right) ds. \end{aligned} \quad (1-197)$$

従って、運動量に線形の変化は曲率半径の有限な部分、すなわち偏向電磁石内でのみ生じる。1 周の軌道長変化は、

$$\Delta C = \int_B \frac{\eta}{\rho} ds \cdot \delta \quad (1-198)$$

となる。運動量偏差に対する周長偏差の比をとって、モーメントコンパクションファクター (momentum compaction factor) は、

$$\frac{\Delta C}{C} = \alpha \frac{\Delta p}{p_0}, \quad (1-199)$$

$$\alpha = \frac{1}{C} \int_B \frac{\eta}{\rho} ds \cdot \delta$$

となる。

1.8. 誤差キックによる軌道のずれ

磁場誤差がある場合、粒子の運動方程式は

$$x'' = \Delta\theta \quad (1-200)$$

であるが、軌道上のある部分に蹴りがあるとすると、方程式は

$$x'' = K(s)x + f(s) \quad (1-201)$$

となる。これを解く。

1.8.1. 数学的準備

最初に数学的準備として、

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik\theta}}{\nu^2 - k^2} = \frac{\pi}{\nu \sin(\pi\nu)} \cos \nu(\theta \mp \pi) \quad (1-202)$$

であることを示す。ただし、 $0 \leq \theta$ の場合に負の符号、 $\theta < 0$ の時に正の符号とする。

以下の複素積分を考える。

$$I = \oint \frac{1}{\nu^2 - k^2} \frac{e^{i\theta z}}{e^{2\pi i z} - 1} dz \quad (1-203)$$

積分路として無限に大きな矩形をとると、ジョルダンの補助定理により、この積分はゼロである。

留数定理により、積分は

$$\frac{I}{2\pi i} = \text{Res} \left[\frac{1}{\nu^2 - k^2} \frac{e^{i\theta z}}{e^{2\pi i z} - 1} \right] = 0 \quad (1-204)$$

と書ける。前項、 $\frac{1}{\nu^2 - k^2}$ に対する留数は、

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2\nu} \frac{e^{i\theta\nu}}{e^{2\pi i\nu} - 1} + \frac{1}{2\nu} \frac{e^{i\theta\nu}}{e^{-2\pi i\nu} - 1} \\ &= -\frac{1}{2i} \frac{\cos \nu(\theta - \pi)}{\nu \sin(\pi\nu)} \end{aligned} \quad (1-205)$$

であり、後項、 $\frac{e^{i\theta}}{e^{2\pi z} - 1}$ に対しては、

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik\theta}}{\nu^2 - k^2}. \quad (1-206)$$

これらを足せばゼロであるので、

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik\theta}}{\nu^2 - k^2} = \frac{\pi}{\nu \sin(\pi\nu)} \cos \nu(\theta \mp \pi) \quad (1-207)$$

が示された。

1.8.2. COD の導出

方程式

$$x'' + K(s)x + f(s) = 0 \quad (1-208)$$

を解く。蹴りがない場合、解は

$$x = \sqrt{\varepsilon\beta} \cos(\varphi + \delta), \quad (1-209)$$

$$\varphi = \int \frac{ds}{\beta}$$

である。規格化した座標

$$X = \frac{x}{\sqrt{\beta}} \quad (1-210)$$

を使い、ベータトロン振動の位相に関しては、フーリエ変換するため、1 周で 2π 進む様な規格化した位相の進み

$$\phi = \frac{\varphi}{\nu} = \frac{1}{\nu} \int \frac{ds}{\beta} \quad (1-210)$$

を使う。蹴りがない場合、

$$X = \sqrt{\varepsilon} \cos(\nu\phi + \delta) \quad (1-211)$$

である。運動方程式を書き直すと、

$$(\sqrt{\beta}X)'' + K\sqrt{\beta}X = f \quad (1-212)$$

となる。ここで、

$$X' = \frac{dX}{d\phi} \phi' = \frac{1}{\nu\beta} \frac{dX}{d\phi} \quad (1-212)$$

と、包絡線の方程式

$$\sqrt{\beta}'' = -K\sqrt{\beta} + \frac{1}{\beta\sqrt{\beta}} \quad (1-213)$$

を使うと、方程式は以下のように書ける。

$$\frac{1}{\nu^2\beta\sqrt{\beta}} \frac{d^2X}{d\phi^2} + \frac{1}{\beta\sqrt{\beta}} X = f \quad (1-214)$$

$$\leftrightarrow \frac{d^2X}{d\phi^2} + \nu^2 X = \nu^2\beta\sqrt{\beta}f$$

ここで、 X 、 β 、 f は変数 ϕ の関数で、リング周回で周期的なので、周期 2π である。各関数をフーリエ変換して、

$$X(\phi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}_k e^{ik\phi}, \quad (1-215)$$

$$F(\phi) = \beta\sqrt{\beta}f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{F}_k e^{ik\phi}$$

となる。逆変換は、

$$\tilde{X}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\phi) e^{-ik\phi} d\phi, \quad (1-216)$$

$$\tilde{F}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\phi) e^{-ik\phi} d\phi.$$

方程式に代入し、

$$\frac{d^2X}{d\phi^2} + \nu^2 X = \nu^2\beta\sqrt{\beta}f \quad (1-217)$$

$$\leftrightarrow -k^2 \tilde{X}_k + \nu^2 \tilde{X}_k = \tilde{F}_k.$$

よって、

$$\begin{aligned} X(\phi) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{F}_k}{\nu^2 - k^2} e^{ik\phi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\phi') \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(\phi-\phi')}}{\nu^2 - k^2} d\phi' \end{aligned} \quad (1-218)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{F(\phi') \frac{\pi}{\nu \sin(\pi\nu)}}{\cos \nu(\phi - \phi' - \pi)} \right) d\phi'.$$

変数を元に戻すと、

$$x(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)}}{2 \sin(\pi\nu)} \int_s^{s+C} \left(\frac{\sqrt{\beta(s_1)} f(s_1)}{\cos(\varphi(s) - \varphi(s_1) - \pi)} \right) ds_1 \quad (1-219)$$

となる。

軌道上のある場所 $s = s_1$ に薄レンズの蹴り $\Delta\theta$ を入れた場合、発生する COD は

$$x_{\text{COD}}(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)\beta(s_1)}}{2 \sin(\pi\nu)} \cos(\pi\nu - |\varphi(s) - \varphi(s_1)|) \Delta\theta \quad (1-220)$$

となる。

ここまでで横方向のビームの運動に関する話を終える。次章では縦方向、RF 空洞による位相安定性について述べる。

2. 縦方向の粒子の運動

2.1. 周回時間と運動量偏差

この章では縦方向の粒子の運動について考える。相対論的な電子の場合、

$$E = \sqrt{m_0 c^2 + (cp)^2} \approx cp \quad (2-1)$$

であり、

$$\frac{dp}{p} = \frac{dE}{E} \quad (2-2)$$

としてよい。例えば PF リングでは、エネルギーは 2.5 GeV で、運動量は 2.49999989... GeV/c であり、区別せずともほぼ問題ない。

低エネルギーの場合や重粒子の場合は状況が異なる。エネルギーは [MeV]、運動量は [MeV/c] と単位もきちんと書いて区別する必要がある。例えば電子のエネルギー 10 MeV の場合、運動量は 9.97 MeV/c となる。(2-2)式もよい近似ではなくなる。

粒子が周回するのにかかる時間は、周長を $C[m]$ 、粒子の進行方向の速さを $v[m/s]$ として、

$$t = \frac{C}{v} \quad (2-3)$$

である。周長の時間変化を考慮しながら微分して、

$$\begin{aligned} dt &= \frac{dC}{v} - \frac{Cdv}{v^2} \\ &\leftrightarrow \frac{dt}{t} = \frac{dC}{C} - \frac{dv}{v}. \end{aligned} \quad (2-4)$$

ここで、ローレンツ因子を導入する。

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (2-5)$$

$$\leftrightarrow \frac{d\gamma}{\gamma} = (\gamma^2 - 1) \frac{d\beta}{\beta}.$$

ここで、

$$\begin{aligned} E &= \gamma m_0 c^2 \\ p &= \gamma m_0 v \end{aligned} \quad (2-6)$$

より、

$$\frac{dp}{p} = \frac{dE}{E} + \frac{dv}{v} = \frac{d\gamma}{\gamma} + \frac{d\beta}{\beta} = \gamma^2 \frac{d\beta}{\beta}. \quad (2-7)$$

従って、

$$\frac{dv}{v} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{dp}{p}, \quad (2-8)$$

$$\frac{dC}{C} = \alpha \frac{dp}{p}$$

より、

$$\frac{dt}{t} = \frac{dC}{C} - \frac{dv}{v} = \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right) \frac{dp}{p} \quad (2-9)$$

となる。この式は、低エネルギーの状態でエネルギーが増えた時、速さが速くなる効果と、重くなって大回りになって周長が伸びる効果のどちらが効くかという式である。

重粒子の場合、

$$\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad (2-10)$$

をトランジションガンマ transition γ という。粒子を加速してエネルギーを増やしていくと、トランジションエネルギーを超えた段階で RF の安定位相が 180 度変化する。すなわち、縦方向の安定性を失わないためには加速途中で RF の位相を跳ばす必要がある。

ERL の入射器周辺など、ビームのエネルギーが低い場合、バンチ長を議論する際に分散関数の積分で求まるモーメントムコンパクション的な値を使うことがあるが、速さの変化の効果も無視できない。

2.2. 縦方向の振動

電子のエネルギーは超相対論的とし、

$$\frac{dp}{p} = \frac{dE}{E} \quad (2-11)$$

を使い、速さの変化も無視する。

$$\frac{dt}{t} = \alpha \frac{dE}{E}. \quad (2-12)$$

設計粒子の RF 到着時間を τ_0 とし、そこからの差を考える。ある粒子が RF に着く時間の、設計粒子との差を、

$$\Delta t = -(\tau - \tau_0) = -\Delta\tau \quad (2-13)$$

とする。 $\Delta\tau > 0$ の時、粒子は設計粒子よりも早いタイミングで RF に到着し、 $\Delta\tau < 0$ の時は遅れて着くことになる。

リング周回の放射光によるエネルギー損失を $U_0[\text{MeV}/\text{rev}]$ とすると、それを補う為に、RF 電圧と位相は、

$$eV \sin \phi_0 = U_0 \quad (2-14)$$

でなければならない。ここで、 $V[\text{MV}]$ は RF のピーク電圧である。また、

$$q = \frac{1}{\sin \phi_0} = \frac{eV}{U_0} \quad (2-15)$$

を overvoltage factor という。さて、タイミングのずれた粒子が余計に得るエネルギーは、

$$\begin{aligned} \delta E &= eV(\tau) - U_0 = eV(\tau) - eV(\tau_0) \\ &= eV(\tau) - eV_0 \end{aligned} \quad (2-16)$$

である。周回毎に RF の場所で一気にこのエネルギー変化が生じる。

実際の力は時間に対して離散的であるが、振動自体が何周回もかけてゆっくり行われる為、時間的になだらかにしてしまう。周回周期を $T[\text{sec}]$ として、

$$\frac{dE}{dt} = \frac{eV(\tau) - eV_0}{T} \quad (2-17)$$

とする。設計粒子のエネルギーのずれはゼロなので、

$$\frac{d\Delta E}{dt} = \frac{eV(\tau) - eV_0}{T} \quad (2-18)$$

とできる。

2.2.1. 微小振動としての解

時間差やエネルギーのずれが大きくないとすると、電圧の時間微分をとって、

$$eV(\tau) - eV = e\dot{V}(\tau_0)\Delta\tau \quad (2-19)$$

と書ける。ただし、 $V(t) = V \sin(\omega_{RF}t)$ より、

$$e\dot{V}(\tau_0) = \omega_{RF}eV \cos(\phi_0) \quad (2-20)$$

である。ここで、

$$\frac{d\Delta E}{dt} = \frac{e\dot{V}}{T}\Delta\tau, \quad (2-21)$$

$$\frac{d\Delta\tau}{dt} = -\alpha \frac{\Delta E}{E} \quad (2-22)$$

より、

$$\frac{d^2\Delta\tau}{dt^2} = -\alpha \frac{1}{E} \frac{d\Delta E}{dt} = -\frac{\alpha e\dot{V}}{TE}\Delta\tau \quad (2-23)$$

これは調和振動子の式であり、振動数は

$$\begin{aligned} \Omega_s &= \sqrt{\frac{\alpha e\dot{V}}{TE}} \\ &= \sqrt{\frac{\alpha \omega_{RF} eV \cos(\phi_0)}{TE}} \end{aligned} \quad (2-24)$$

となる。縦方向の振動をシンクロトロン振動と呼び、この周波数をシンクロトロン周波数という。ちなみに、リングの周回角振動数と RF の角周波数との関係は、ハーモニック数を h として、

$$\omega_{RF} = h\omega_{rev} = h \frac{2\pi}{T} \quad (2-25)$$

なので、

$$\Omega_s = \sqrt{\frac{\alpha h \omega_{rev}^2 eV \cos(\phi_0)}{2\pi E}} \quad (2-26)$$

とも書ける。また、これを周回あたりの振動数に直すと、

$$\nu_s = \frac{\Omega_s}{2\pi} T = \sqrt{\frac{\alpha h eV \cos(\phi_0)}{2\pi E}} \quad (2-27)$$

となり、これをシンクロトロン振動数という。

2.2.2. 微小でない場合への解

時間差やエネルギーのずれが大きい場合、

$$eV(\tau) - U_0 = eV \sin(\omega_{RF}\tau) - U_0 \quad (2-28)$$

としたまま解く必要がある。方程式は

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} = -\frac{\alpha}{TE}(eV(\tau) - U_0) \quad (2-29)$$

となる。これは、時間(t)に依らず、位置(τ)のみに依存するポテンシャルの中での運動と同じである。両辺に $\frac{d\tau}{dt}$ をかけて積分すると、左辺は

$$\int \frac{d\tau}{dt} \frac{d^2\tau}{dt^2} dt = \frac{1}{2} \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 \quad (2-30)$$

となり、右辺は

$$\int -\frac{\alpha}{TE}(eV(\tau)-U_0)\frac{d\tau}{dt} dt$$

$$= -\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\alpha}{TE}(eV(\tau)-U_0)d\tau \quad (2-31)$$

$$\equiv -\Phi(\tau)$$

となる。従って、

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 + \Phi(\tau) = const. \quad (2-32)$$

と書ける。積分を計算すれば、

$$\Phi(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\alpha}{TE}(eV(\tau)-U_0)d\tau$$

$$= \frac{\alpha}{TE} \int_{\tau_0}^{\tau} (eV \sin(\omega_{rf}\tau) - U_0) d\tau \quad (2-33)$$

$$= \frac{\alpha}{TE} \left(-\frac{eV}{\omega_{rf}} [\cos \omega_{rf}\tau]_{\tau_0}^{\tau} - [U_0\tau]_{\tau_0}^{\tau} \right)$$

$$= \frac{\alpha eV}{2\pi h E} \left(\cos \varphi_0 - \cos \varphi - \frac{\varphi - \varphi_0}{q} \right)$$

となる。ポテンシャル中の運動になぞらえると、

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 \quad (2-34)$$

が運動エネルギーに対応し、

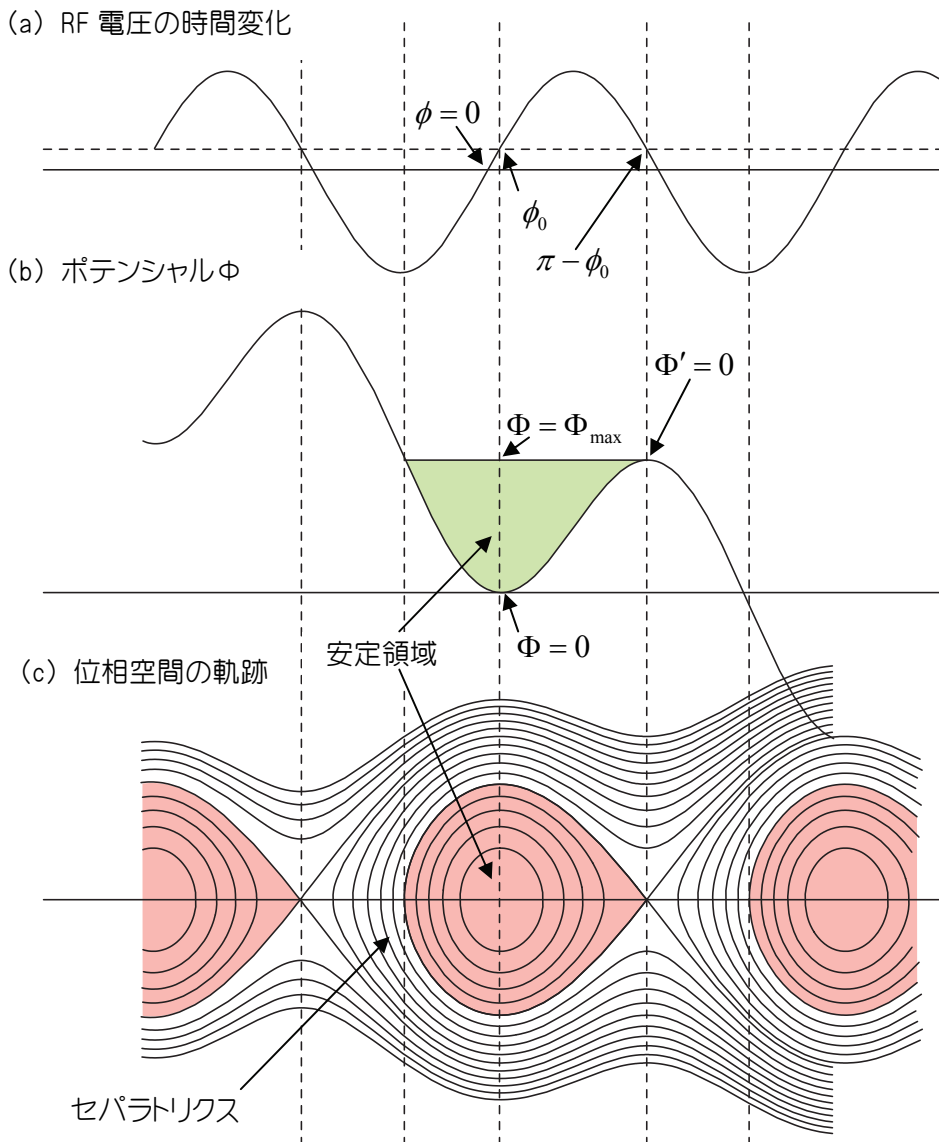


図 3-11 セパトリクス

$$\Phi(\tau) \quad (2-35)$$

がポテンシャルエネルギー、

$$\Phi_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 + \Phi(\tau) \quad (2-36)$$

がエネルギーの総和である。

さて、振動が安定な最大の部分では、図から明らかなように、

$$\Phi'(\tau_1) = 0 \quad (2-37)$$

である。

$$\begin{aligned} \Phi'(\tau_1) &= eV(\tau_1) - U_0 \\ &= eV(\sin \phi_1 - \sin \phi_0) = 0 \end{aligned} \quad (2-38)$$

より、

$$\phi_1 = \pi - \phi_0 \quad (2-39)$$

となる。これから、

$$\begin{aligned} \Phi_{\max} &= \frac{\alpha e V}{2\pi h E} \left(\begin{array}{c} \cos \phi_0 - \cos(\pi - \phi_0) \\ -\frac{\pi - 2\phi_0}{q} \end{array} \right) \\ &= \frac{\alpha e V}{2\pi h E} \left(2 \cos \phi_0 - \frac{1}{q} \arccos\left(\frac{1}{q}\right) \right) \\ &= \frac{\alpha U_0}{\pi h E} \left(\sqrt{q^2 - 1} - \arccos\left(\frac{1}{q}\right) \right) \end{aligned} \quad (2-40)$$

となる。ここで、

$$F(q) = 2 \left(\sqrt{q^2 - 1} - \arccos\left(\frac{1}{q}\right) \right) \quad (2-41)$$

を energy aperture function という。安定なエネルギーのずれの最大値は、

$$\left(\frac{\Delta E_{\max}}{E} \right) = \frac{2}{\alpha^2} \Phi_{\max} = \frac{U_0}{\pi \alpha h E} F(q) \quad (2-42)$$

となり、これをバケットハイトという。

3. エミッタンスとパンチ長

3.1. 放射減衰

粒子の出す放射光による単位時間あたりの放射パワーは、

$$P \propto E^2 B^2 \quad (3-1)$$

である。ここで、 E は粒子のエネルギー、 B は偏光電磁石の磁場の強さである。粒子のエネルギーがずれても、偏向電磁石の磁場は変わらず、分散関数によって偏向電磁石内の飛距離が変わるだけである。なお、設計粒子のエネルギーを変えた場合の関係式は磁場も一緒に変えることを想定し、放射パワーはエネルギーの 4 乗に比例する。エネルギーのずれを想定した場合の周回の放射ロス、粒子のエネルギーの 2 乗に比例し、

$$\begin{aligned} U \propto E^2 \leftrightarrow U = AE^2 \\ \leftrightarrow \Delta U = 2AE\Delta E \leftrightarrow \frac{\Delta U}{U} = 2 \frac{\Delta E}{E} \end{aligned} \quad (3-2)$$

エネルギーの高い粒子はより沢山のエネルギーを失い、エネルギーの低い粒子は少ししかエネルギーを失わない。粒子のエネルギーのずれ ΔE に対する放射ロスの大きさ U の変化は、この式より、設計粒子のエネルギーに近いところで、

$$\begin{aligned} \frac{\Delta U}{U_0} = 2 \frac{\Delta E}{E_0} \leftrightarrow \frac{dU}{dE} = 2 \frac{U_0}{E_0} \\ \leftrightarrow U = U_0 + 2 \frac{U_0}{E_0} \Delta E \end{aligned} \quad (3-3)$$

と書ける。エネルギーが ΔE ずれると、放射ロスが $2 \frac{U_0}{E_0} \Delta E$ だけ増える。従って、シンクロトロン

振動の方程式 $\frac{d\Delta E}{dt} = \frac{e\dot{V}}{T} \Delta \tau$ にこれを加え、周回

あたりを単位時間あたりに直し、

$$\frac{d\Delta E}{dt} = \frac{e\dot{V}}{T} \Delta \tau - 2 \frac{U_0}{TE_0} \Delta E \quad (3-4)$$

となる。 $\frac{d\Delta \tau}{dt} = -\alpha \frac{\Delta E}{E}$ より、

$$\begin{aligned}\frac{d^2\Delta\tau}{dt^2} &= -\frac{\alpha}{E} \frac{d\Delta E}{dt} \\ &= -\frac{\alpha}{E} \left(\frac{e\dot{V}}{T} \Delta\tau - 2 \frac{U_0}{TE_0} \Delta E \right)\end{aligned}\quad (3-5)$$

となる。この式に $\frac{\Delta E}{E} = -\frac{1}{\alpha} \frac{d\Delta\tau}{dt}$ を代入し、振動の式にすると、方程式は

$$\frac{d^2\Delta\tau}{dt^2} + \frac{2U_0}{E_0T} \frac{d\Delta\tau}{dt} + \Omega_s^2 \Delta\tau = 0 \quad (3-6)$$

と書ける。これは減衰振動の方程式であり、解は

$$\Delta\tau \propto \exp\left(-\frac{t}{\tau_\varepsilon}\right) \exp(\pm i\Omega_s t) \quad (3-7)$$

と書ける。減衰の時定数は

$$\tau_\varepsilon = \frac{E_0T}{U_0} \quad (3-8)$$

となる。これを、シンクロトロン振動の放射減衰時間という。

横方向の場合、発散角は

$$x' = \frac{p_x}{p_z} \quad (3-9)$$

と書けるが、放射で運動量が減少して、その分だけ加速されて、という過程で発散角は

$$x' = \frac{p_x}{p_z + \Delta p} = \frac{p_x}{p_z} \left(1 - \frac{\Delta p}{p_z}\right) \quad (3-10)$$

だけ減少する。 x は変わらないまま、 x' がこれだけ減るので、エミッタンスの減少量も、

$$\varepsilon_x \rightarrow \varepsilon_x \left(1 - \frac{\Delta p}{p_z}\right) \quad (3-11)$$

となる。周回あたりの加速量は、

$$\frac{\Delta p}{p_z} = \frac{\Delta E}{E} = \frac{U_0}{E_0} \quad (3-12)$$

であるため、単位時間あたりにすると、 $\frac{U_0}{TE_0}$ とな

る。従って、

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{U_0}{TE_0} \varepsilon_x \quad (3-14)$$

となる。この方程式の解は、

$$\varepsilon \propto \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (3-15)$$

であり、時定数は

$$\tau = \frac{E_0T}{U_0} \quad (3-16)$$

である。ビームサイズは $\sqrt{\varepsilon}$ に比例するため、エミッタンスではなく、振幅の減衰時間は

$$\tau_x = \frac{2E_0T}{U_0} \quad (3-17)$$

となる。これをベータトロン振動の減衰時間という。

ちなみに、縦方向と横方向を比べると、

$$\tau_x = \tau_y = 2\tau_\varepsilon \quad (3-18)$$

となる。

3.2. 放射励起

放射光は量子力学的に放出されるため、放射光を出すことで粒子のエネルギーは統計的にばらつく。粒子の出す放射パワーの平均値は周回のエネルギーロスに等しくなるが、全ての粒子が均等にエネルギー損失しない。それを計算するためには、光子のエネルギーでなく、エネルギーの 2 乗平均を計算する必要がある。

偏光電磁石からの全ての放射光が特徴的に臨界エネルギー

$$u_c = \hbar \frac{3\gamma^3 c}{2\rho} = \frac{3}{2} \frac{\hbar E_0 \gamma^2}{\rho mc} \quad (3-19)$$

だとしてみる。周回の放射パワーをこれで割って、粒子が周回あたりに出す光子数は、およそ

$$N = \frac{U_0}{u_c} \quad (3-20)$$

である。従って、周回あたりに出す光子のエネルギーの 2 乗平均は、

$$\langle Nu^2 \rangle_{rev} = \frac{U_0}{u_c} u_c^2 = U_0 u_c \quad (3-21)$$

となる。単位時間あたりに直して、

$$\langle Nu^2 \rangle = \frac{U_0}{T} u_c \quad (3-22)$$

である。ちなみに、もっとまじめな計算を行うと、この値は

$$\langle Nu^2 \rangle = \frac{55}{24\sqrt{3}} \frac{U_0}{T} u_c \quad (3-23)$$

と書ける。ここからはこの値を使う。

放射光を出すことで、エネルギーのずれの 2 乗平均が、単位時間あたりこの値で増大してゆくことになるので、すなわち、

$$\frac{d\langle(\Delta E)^2\rangle}{dt} = \frac{55}{24\sqrt{3}} \frac{U_0}{T} u_c \quad (3-24)$$

である。放射減衰との平衡を考えると、

$$\Delta E \propto \exp\left(-\frac{t}{\tau_\varepsilon}\right) \quad (3-25)$$

より、

$$(\Delta E)^2 \propto \exp\left(-\frac{2t}{\tau_\varepsilon}\right) \quad (3-26)$$

従って、平衡状態を考えると

$$\frac{d\langle(\Delta E)^2\rangle}{dt} = -\frac{2}{\tau_\varepsilon} \langle(\Delta E)^2\rangle + \frac{55}{24\sqrt{3}} \frac{U_0}{T} u_c = 0 \quad (3-27)$$

よって、

$$\begin{aligned} \langle(\Delta E)^2\rangle &= \frac{\tau_\varepsilon}{2} \cdot \frac{55}{24\sqrt{3}} \frac{U_0}{T} u_c \\ &= \frac{55}{64\sqrt{3}} \frac{\hbar E_0^2 \gamma^2}{\rho mc} \end{aligned} \quad (3-28)$$

従って、エネルギー広がり

$$\sigma_\varepsilon^2 = \left(\frac{\Delta E}{E_0}\right)^2 = \frac{55}{64\sqrt{3}} \frac{\hbar \gamma^2}{\rho mc} \quad (3-29)$$

となる。

時間広がり直すと、

$$\sigma_\tau = \langle(\Delta \tau)^2\rangle = \left(\frac{\alpha}{\Omega_s}\right)^2 \left(\frac{\Delta E}{E_0}\right)^2 \quad (3-30)$$

である。従って、バンチ長は

$$\sigma_l^2 = c \sigma_\tau = \frac{c \alpha}{\Omega_s} \frac{\sigma_\varepsilon}{E_0} \quad (3-31)$$

となる。

さて、横方向については、分散関数がゼロでない場所でエネルギー u の光子を放出したとすると、放出時に電子の位置と傾きは変化しないが、

エネルギーが変わったことにより、中心軌道が分散関数で表される軌道へと変化する。すなわち、

$$\Delta x = \Delta x_\beta + \eta \left(-\frac{u}{E_0}\right) = 0, \quad (3-32)$$

$$\Delta x' = \Delta x'_\beta + \eta' \left(-\frac{u}{E_0}\right) = 0$$

となり、中心軌道がずれてベータatron振動の初期振幅と初期発散角が与えられたのと同じことになる。エミッタンス増大の効果は、クーラン・

シュナイダー不変量から、

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon &= \gamma \Delta x^2 + 2\alpha \Delta x \Delta x' + \beta \Delta x'^2 \\ &= (\gamma \eta^2 + 2\alpha \mu \eta' + \beta \eta'^2) \left(\frac{u}{E_0}\right)^2 \end{aligned} \quad (3-33)$$

となる。ここで、

$$H(s) = \gamma \eta^2 + 2\alpha \mu \eta' + \beta \eta'^2 \quad (3-34)$$

とおく。従って、

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E_0^2} \langle H \rangle \langle Nu^2 \rangle \quad (3-35)$$

となる。放射減衰の効果を入れて、

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{U_0}{TE_0} \varepsilon_x + \frac{1}{E_0^2} \langle H \rangle \langle Nu^2 \rangle = 0 \quad (3-36)$$

より、

$$\varepsilon_x = \frac{55}{32\sqrt{3}} \frac{\hbar}{mc} \frac{\gamma^2}{\rho} \langle H \rangle \quad (3-37)$$

ただし、

$$\langle H \rangle = \frac{1}{2\pi\rho} \int_{Bend} H ds \quad (3-38)$$

である。

3.3. 最小エミッタンス条件

蓄積リングのエミッタンスは偏向電磁石の中の分散関数の最適化によって決まる。ここでは、蓄積リングにおいてエミッタンスが最小になる条件と、その時のエミッタンスについて、色消し条件を外して理論最小にする場合と、DBA の場合の 2 通りについて述べる。

3.3.1. H 関数の積分の計算

まずは $\langle H \rangle = \frac{1}{2\pi\rho} \int_{\text{Bend}} H ds$ の計算について述べる。偏向電磁石入り口での分散関数とその微分を η_1 、 η'_1 、ある曲げ角 $\theta = \frac{s}{\rho}$ まで進んだ時の値を η_2 、 η'_2 とする。分散関数の方程式の解より、

$$\eta_2 = \eta_1 \cos \theta + \eta'_1 \rho \sin \theta + \rho(1 - \cos \theta), \quad (3-39)$$

$\eta'_2 = -\eta_1 \frac{1}{\rho} \sin \theta + \eta'_1 \cos \theta + \sin \theta$

である。一方、トゥイスパラメータについては、偏向電磁石入り口の値を β_1 、 α_1 、 γ_1 、途中の値を β_2 、 α_2 、 γ_2 とすると、

$$\beta_2 = \beta_1 \cos^2 \theta - 2\alpha_1 \rho \sin \theta \cos \theta + \gamma_1 \rho^2 \sin^2 \theta,$$

$$\alpha_2 = \beta_1 \frac{1}{\rho} \sin \theta \cos \theta + \alpha_1 (1 - 2 \sin^2 \theta) - \gamma_1 \rho \sin \theta \cos \theta,$$

$$\gamma_2 = \beta_1 \frac{1}{\rho^2} \sin^2 \theta - \frac{2}{\rho} \alpha_1 \sin \theta \cos \theta + \gamma_1 \cos^2 \theta \quad (3-40)$$

となる。従って、積分は

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\rho} \int_0^L H ds \\ &= \left[\begin{aligned} &2\eta\eta'\theta_0 + 2\eta'\rho(\sin\theta_0 - \theta_0) \\ &+ 2(\eta - \rho)(1 - \cos\theta_0) + \frac{\rho}{2}(1 - \cos 2\theta_0) \end{aligned} \right] \alpha \\ &+ \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} &\theta_0 + 2\eta'^2\theta_0 - \frac{1}{2}\sin 2\theta_0 \\ &+ 4\eta'(1 - \cos\theta_0) \end{aligned} \right] \beta \\ &+ \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} &2\eta^2\theta_0 + 4\eta\rho(\sin\theta_0 - \theta_0) \\ &+ \rho^2 \left(3\theta_0 - 4\sin\theta_0 + \frac{1}{2}\sin 2\theta_0 \right) \end{aligned} \right] \gamma \\ &\equiv A(\eta, \eta')\alpha + B(\eta')\beta + C(\eta)\gamma \end{aligned} \quad (3-41)$$

となる。ただし、添字 1 は外し、偏向電磁石の曲げ角を θ_0 とした。この積分を、各条件に従って計算する。

3.3.2. 理論最小エミッタンスの場合

色消し条件を外して、理論最小にする場合について解を求める。オプティクスによって最適化可能なパラメータは、 α 、 β 、 η 、 η' である。まずはトゥイスパラメータ α 、 β について、

$$\frac{\partial I}{\partial \beta} = B(\eta') - C(\eta) \frac{1 + \alpha^2}{\beta^2} = 0, \quad (3-42)$$

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = A(\eta, \eta') - 2C(\eta) \frac{\alpha}{\beta} = 0$$

従って、

$$\beta = -\frac{2C(\eta)}{A(\eta, \eta')} \alpha,$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{\frac{C(\eta)}{B(\eta')}}}{\sqrt{\left(-\frac{2C(\eta)}{A(\eta, \eta')}\right)^2 - \frac{C(\eta)}{B(\eta')}}} \quad (3-43)$$

となる。一方、

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial \eta} &= (2\eta'\theta_0 + 2(1 - \cos\theta_0))\alpha \\ &+ (2\eta\theta_0 + 2\rho(\sin\theta_0 - \theta_0))\gamma \\ &\equiv D\alpha + E\gamma = 0, \end{aligned} \quad (3-44)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial \eta'} &= (2\eta\theta_0 + 2\rho(\sin\theta_0 - \theta_0))\alpha \\ &+ (2\eta'\theta_0 + 2(1 - \cos\theta_0))\beta \\ &\equiv E\alpha + D\beta = 0. \end{aligned}$$

より、 η 、 η' を求めることで、 α と β の値も決まる。方程式を行列で書くと、

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix} = \vec{0} \quad (3-45)$$

となるが、

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \alpha^2 - \beta\gamma = 1 \neq 0 \quad (3-46)$$

より、

$$\begin{aligned} D &= 2\eta'\theta_0 + 2(1 - \cos\theta_0) = 0, \\ E &= 2\eta\theta_0 + 2\rho(\sin\theta_0 - \theta_0) = 0 \end{aligned} \quad (3-47)$$

となる。従って、エミッタンスが最小になるためには、

$$\eta = \rho \left(1 - \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} \right) \quad (3-48)$$

$$\eta' = \frac{1}{\theta_0} (\cos \theta_0 - 1) \quad (3-49)$$

でなければならないことが分かる。なお、分散関数の方程式の解に代入すると、偏向電磁石の中央では、

$$\eta_c = \rho \left(1 - \frac{2}{\theta_0} \sin \frac{\theta_0}{2} \right), \quad \eta'_c = 0, \quad (3-50)$$

$$\beta_c = 2 \sqrt{\frac{C(\eta_c)}{2\theta_0 - \sin 2\theta_0}},$$

$$\alpha_c = 0$$

となっていることが分かる。分散関数とベータトロン関数は偏向電磁石中央を中心に対称になる。

薄レンズ近似を使うと、

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{6} \rho \theta_0^2, \\ \eta' &= -\frac{1}{2} \theta_0, \\ A &= -\frac{1}{12} \rho \theta_0^4, \\ B &= \frac{1}{12} \theta_0^3, \\ C &= \frac{1}{45} \rho^2 \theta_0^5, \\ \alpha &= \sqrt{15}, \\ \beta &= \frac{8}{\sqrt{15}} \rho \theta_0, \\ \gamma &= \frac{2\sqrt{15}}{\rho \theta_0} \end{aligned} \quad (3-51)$$

より、

$$I = \frac{1}{12\sqrt{15}} \rho \theta_0^4 \quad (3-52)$$

となる。リング全体の偏向電磁石の数を N とすると、

$$\theta_0 = \frac{2\pi}{N} \quad (3-53)$$

より、

$$\langle H \rangle_{one-bend} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{12\sqrt{15}} \rho \left(\frac{2\pi}{N} \right)^4 \quad (3-54)$$

となる。全偏向電磁石では、

$$\langle H \rangle_{all-bend} = \frac{1}{12\sqrt{15}} \left(\frac{2\pi}{N} \right)^3 \quad (3-55)$$

となるので、エミッタンスは

$$\varepsilon = \frac{1}{12\sqrt{15}} \frac{C_q \gamma^2}{J_x} \left(\frac{2\pi}{N} \right)^3 \quad (3-56)$$

となる。

3.3.3. DBA の場合

同様の計算を DBA の場合に対して行う。

DBA では色消し条件により、偏向電磁石入り口で

$$\eta = 0, \quad \eta' = 0 \quad (3-57)$$

である。積分は大幅に簡単となり、

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta_0) - 2(1 - \cos \theta_0) \right) \rho \alpha \\ &\quad + \frac{1}{4} (2\theta_0 - \sin 2\theta_0) \beta \\ &\quad + \frac{\rho^2}{4} (6\theta_0 - 8\sin \theta_0 + \sin 2\theta_0) \gamma \\ &\equiv A\alpha + B\beta + C\gamma, \end{aligned} \quad (3-58)$$

となる。ツイスパラメータで微分した結果は変わらないので、

$$\beta = -\frac{2C}{A} \alpha,$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{\frac{C}{B}}}{\sqrt{\left(-\frac{2C}{A} \right)^2 - \frac{C}{B}}} \quad (3-59)$$

である。分散関数については、初期値ゼロから転送すればよいので、

$$\eta = \rho (1 - \cos \theta_0), \quad (3-60)$$

$$\eta' = \sin \theta_0$$

となる。

薄レンズ近似をすると、

$$\begin{aligned}
A &= -\frac{1}{4}\rho\theta_0^4, \\
B &= \frac{1}{3}\theta_0^3, \\
C &= \frac{1}{20}\rho^2\theta_0^5,
\end{aligned}
\tag{3-61}$$

$$\alpha = \sqrt{15},$$

$$\beta = \frac{6}{\sqrt{15}}\rho\theta_0,$$

$$\gamma = \frac{8\sqrt{15}}{3\rho\theta_0}$$

より、

$$I = \frac{1}{4\sqrt{15}}\rho\theta_0^4,$$
(3-62)

$$\langle H \rangle_{all-bend} = \frac{\rho}{4\sqrt{15}} \left(\frac{2\pi}{N} \right)^3$$

$$\varepsilon = \frac{1}{4\sqrt{15}} \frac{C_q \gamma^2}{J_x} \left(\frac{2\pi}{N} \right)^3.$$
(3-63)

となる。これは理論最小の場合の3倍の値である。

4. 付録

この章では、トピックとしていくつかの内容を取り上げて述べる。それぞれに特に関連があるわけではなく、また、ERLにとって重要というわけでもない。

1. ソレノイドとスクュー4極

ソレノイドとスクュー4極の磁場、運動方程式、転送行列について述べる。

1.1. ソレノイドの磁場

1.1.1. 線形成分の簡単な導出

ソレノイドの磁場を求めるためには磁場のビーム進行方向成分の影響を考える必要があり、3次元のラプラス方程式を解く必要がある。ただし、最低次のみでよい場合、解を適当に仮定すれば簡単な漸化式で磁場を求めることができる。

3次元のデカルト座標でラプラス方程式は以下のように書ける。

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \varphi + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \varphi = 0. \quad (\text{A1-1})$$

ここで、スカラーポテンシャルを

$$\varphi = \sum_{n,m>0} A_{nm}(z) \frac{x^n}{n!} \frac{y^m}{m!} \quad (\text{A1-2})$$

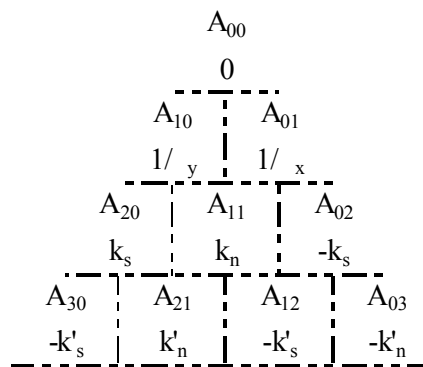
とおいて、方程式に代入する。式は $A_{20} + A_{02}$

$$+ \sum_{n,m>0} \begin{pmatrix} A_{n+2,m}(z) \\ + A_{n,m+2}(z) \\ + A''_{n,m}(z) \end{pmatrix} \frac{x^n}{n!} \frac{y^m}{m!} = 0 \quad (\text{A1-3})$$

と書ける。従って、漸化式

$$A_{n+2,m}(z) + A_{n,m+2}(z) + A''_{n,m}(z) = 0 \quad (\text{A1-4})$$

が成り立つ。 A_{00} はソレノイド項、 A_{10} と A_{01} は偏向電磁石、 A_{20} 、 A_{11} 、 A_{02} は4極電磁石、 A_{30} 、 A_{21} 、 A_{12} 、 A_{03} は6極電磁石である。



漸化式より、

$$A''_{00} + A_{02} + A_{20} = 0. \quad (\text{A1-5})$$

対称性を考えて、

$$A_{02} = A_{20} = -\frac{1}{2} A''_{00}. \quad (\text{A1-6})$$

従って、ポテンシャルは

$$\varphi = A_{00} - \frac{1}{4} A''_{00} (x^2 + y^2) \quad (\text{A1-7})$$

となり、ソレノイドの磁場は

$$B_z = A'_{00},$$

$$B_r = -\frac{1}{2} A''_{00} r = -\frac{1}{2} B'_z r, \quad (\text{A1-8})$$

$$B_\varphi = 0$$

となる。

1.1.2. 高次を含むソレノイドの磁場

3次元のラプラス方程式を円筒座標で解く。方程式は、

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \varphi + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \varphi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \varphi = 0. \quad (\text{A1-9})$$

ソレノイドなので、軸対称として、

$$\varphi = \varphi(r, z) = \sum_n a_n(z) r^n \quad (\text{A1-10})$$

と展開する。各項を展開してみると、

$$\varphi = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3 + a_4 r^4 + \cdots a_n r^n + \cdots, \quad (\text{A1-11})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \varphi = 2a_2 + 6a_3 r + 4 \cdot 3a_4 r^2 + \cdots n(n-1)a_n r^{n-2} + \cdots, \quad (\text{A1-12})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \varphi = \frac{1}{r} a_1 + 2a_2 + 3_3 r + 4a_4 r^2 + \cdots n a_n r^{n-2} + \cdots, \quad (\text{A1-13})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \varphi = a_0'' + a_1'' r + a_2'' r^2 + a_3'' r^3 + \cdots a_n'' r^n + \cdots \quad (\text{A1-14})$$

となる。方程式に代入すると、漸化式は

$$a_{n-2}'' + n^2 a_n'' = 0. \quad (\text{A1-15})$$

最初の項は、

$$a_0'' + 4a_2 = 0 \quad (\text{A1-16})$$

である。原点で正則なので、 $\frac{1}{r} a_1 = 0$ 、よって、

$a_1 = 0$ でなければならない。従って、奇数次の項は全てゼロとなり、偶数次しか残らない。順に書き下せば、

$$a_2 = -\frac{1}{2^2} a_0'', \quad (\text{A1-17})$$

$$a_4 = -\frac{1}{4^2} a_2'' = -\frac{1}{4^2} \left(-\frac{1}{2^2} a_0'' \right)'' \quad (\text{A1-18})$$

$$= +\frac{1}{4^2} \frac{1}{2^2} a_0''^{(4)},$$

$$a_6 = -\frac{1}{6^2} a_4'' = \frac{1}{6^2} \frac{1}{4^2} a_2''^{(4)} \quad (\text{A1-19})$$

$$= -\frac{1}{6^2} \frac{1}{4^2} \frac{1}{2^2} a_0''^{(6)},$$

⋮

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} a_0''^{(2n)}, \quad n=1,2,3,\dots \quad (\text{A1-20})$$

そして、奇数次はゼロである。

$$a_{2n+1} = 0 \quad n=0,1,2,3,\dots \quad (\text{A1-21})$$

従って、ポテンシャルは

$$\varphi = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{r}{2} \right)^{2n} a_0''^{(2n)} \quad (\text{A1-22})$$

となる。すなわち、

$$\varphi = a_0 - \frac{r^2}{4} a_0''^{(2)} + \frac{r^4}{64} a_0''^{(4)} - \frac{1}{6^2 2^6} a_0''^{(6)} + \cdots \quad (\text{A1-23})$$

$$-\frac{1}{6^2 2^6} a_0''^{(6)} + \cdots$$

ここで、 $a_0' = b_0$ とおく。

$$B_z = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{r}{2} \right)^{2n} b_0^{(2n)}, \quad (\text{A1-24})$$

$$B_r = \sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{((n-1)!)^2} \left(\frac{r}{2} \right)^{2n-1} b_0^{(2n-1)}.$$

デカルト座標系に直せば、

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_r \\ B_\theta \equiv 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_r \cos \theta \\ B_r \sin \theta \end{pmatrix} \quad (\text{A1-25})$$

より、

$$\begin{cases} B_z = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{r}{2} \right)^{2n} b_0^{(2n)} \\ B_x = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \frac{r^{2n}}{2^{2n+1}} b_0^{(2n+1)} \cdot x \\ B_y = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \frac{r^{2n}}{2^{2n+1}} b_0^{(2n+1)} \cdot y \end{cases} \quad (\text{A1-26})$$

となる。

低次の部分を書き出してみると、スカラーポテンシャルについては、

$$\varphi = a_0 - \frac{r^2}{4} a_0''^{(2)} + \frac{r^4}{64} a_0''^{(4)} - \frac{r^6}{6^2 2^6} a_0''^{(6)} + \frac{r^8}{8^2 2^8} a_0''^{(8)} + \cdots \quad (\text{A1-27})$$

円筒座標での横方向の磁場は、

$$B_z = b_0 - \frac{r^2}{4} b_0^{(2)} + \frac{r^4}{64} b_0^{(4)} - \frac{r^6}{6^2 2^6} b_0^{(6)} + \frac{r^8}{8^2 2^8} b_0^{(8)} + \cdots, \quad (\text{A1-28})$$

$$B_r = -\frac{r}{2} b_0^{(1)} + \frac{r^3}{16} b_0^{(3)} - \frac{r^5}{6 \cdot 2^6} b_0^{(5)} + \frac{r^7}{8 \cdot 2^8} b_0^{(7)} + \cdots.$$

デカルト座標 x 、 y に直すと、

$$B_x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}b_0^{(1)} + \frac{r^2}{16}b_0^{(3)} - \frac{r^4}{6 \cdot 2^6}b_0^{(5)} \\ + \frac{r^6}{8 \cdot 2^8}b_0^{(7)} + \dots \end{pmatrix} x, \quad (\text{A1-29})$$

$$B_y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}b_0^{(1)} + \frac{r^2}{16}b_0^{(3)} - \frac{r^4}{6 \cdot 2^6}b_0^{(5)} \\ + \frac{r^6}{8 \cdot 2^8}b_0^{(7)} + \dots \end{pmatrix} y.$$

ベクトルポテンシャルは

$$A_x = -x \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}b_0 + \frac{r^2}{16}b_0^{(2)} - \frac{r^4}{6 \cdot 2^6}b_0^{(4)} \\ + \frac{r^6}{8 \cdot 2^8}b_0^{(6)} + \dots \end{pmatrix}, \quad (\text{A1-30})$$

$$A_y = y \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}b_0 + \frac{r^2}{16}b_0^{(2)} - \frac{r^4}{6 \cdot 2^6}b_0^{(4)} \\ + \frac{r^6}{8 \cdot 2^8}b_0^{(6)} + \dots \end{pmatrix}$$

となる。なお、 $A_z = 0$ 、 $\frac{\partial}{\partial x} r^{2n} = nr^{2(n-1)}2x$ に注意すれば、磁場はベクトルポテンシャルから求めることもできる。

1.1.3. 3次元磁場に対する粒子の運動方程式

前項では垂直方向磁場、磁場勾配及び誤差磁場があるときの運動方程式を求めたが、ここでは、水平方向、垂直方向、進行方向の3方向の磁場がある場合の運動方程式を求める。

ローレンツ力は以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y B_z - v_z B_y \\ v_z B_x - v_x B_z \\ v_x B_y - v_y B_x \end{pmatrix}. \quad (\text{A1-31})$$

従って、運動方程式は

$$\frac{d}{dt} p_x = \frac{mv_z^2}{r} + ev_y B_z - ev_z B_y, \quad (\text{A1-32})$$

$$\frac{d}{dt} p_y = ev_z B_x - ev_x B_z$$

となる。3章の最初と同じ近似を使うと、

$$x'' = \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{x}{\rho} \right) + \frac{1}{B\rho} y' B_z - \frac{1}{B\rho} B_y, \quad (\text{A1-33})$$

$$y'' = \frac{1}{B\rho} B_x - \frac{1}{B\rho} x' B_z$$

が求める運動方程式である。水平方向の偏向電磁石成分を除けば、

$$x'' = \frac{1}{B\rho} y' B_z - \frac{1}{B\rho} B_y, \quad (\text{A1-34})$$

$$y'' = \frac{1}{B\rho} B_x - \frac{1}{B\rho} x' B_z$$

となる。

1.1.4. ソレノイドに対する運動方程式

前項の $b_0 = B_s$ と書き換え、 $g = -\frac{B_s}{2B\rho}$ とお

く。線形な運動方程式は、

$$x'' + 2gy' + g'y = 0, \quad (\text{A1-35})$$

$$y'' - 2gx' - g'x = 0$$

となる。3次までの高次を含めると以下の通り。

$$x'' = \left(-2g + \frac{1}{2}g''(x^2 + y^2) \right) y' - \left(g' - \frac{1}{8}g^{(3)}(x^2 + y^2) \right) y, \quad (\text{A1-36})$$

$$y'' = \left(2g - \frac{1}{2}g''(x^2 + y^2) \right) x' + \left(g' - \frac{1}{8}g^{(3)}(x^2 + y^2) \right) x.$$

1.2. 転送行列の導出

あまり使わないが、**skew** とソレノイドの転送行列を求める。両者とも、運動としては水平垂直の結合となり、行列も4行4列となる。運動に結合があると、水平垂直の運動が物理的な水平垂直軸の座標系では分離できなくなる。あくまで2方向の独立した振動として扱いたい場合は座標系を取り直せば分離することが可能だが、軌道上の各点で座標軸の方向を変化させることが必要で、すなわち、固有振動に対する固有座標系は、軌道長に応じて回転してゆく。トゥイスパラメー

タはその座標軸への包絡線なので、物理的な上下左右方向へは、射影をとる必要がある。

ここでは、参考として skew 4 極電磁石とソレノイドの転送行列を求める。

1.2.1. skew 4 極の転送行列

skew の強さを $B_x = -B'y$ 、 $B_y = B'x$ とする

と、 $q = \frac{B'}{B\rho}$ として、運動方程式は

$$\begin{aligned} x'' &= -qy, \\ y'' &= -qx \end{aligned} \quad (\text{A1-37})$$

となる。これを解く。

独立な解が 4 つあるはずである。normal の 4 極の場合から類推して、 \cos 、 \sin 、 \sinh 、 \cosh をとり、以下のように解を仮定する。

$$\begin{aligned} x &= a \cos \sqrt{qs} + \frac{b}{\sqrt{q}} \sin \sqrt{qs} \\ &\quad + c \cosh \sqrt{qs} + \frac{d}{\sqrt{q}} \sinh \sqrt{qs}, \\ y &= A \cos \sqrt{qs} + \frac{B}{\sqrt{q}} \sin \sqrt{qs} \\ &\quad + C \cosh \sqrt{qs} + \frac{D}{\sqrt{q}} \sinh \sqrt{qs}. \end{aligned} \quad (\text{A1-38})$$

微分して、

$$\begin{aligned} x' &= -a\sqrt{q} \sin \sqrt{qs} + b \cos \sqrt{qs} \\ &\quad + c\sqrt{q} \sinh \sqrt{qs} + d \cosh \sqrt{qs}, \\ y' &= -A\sqrt{q} \sin \sqrt{qs} + B \cos \sqrt{qs} \\ &\quad + C\sqrt{q} \sinh \sqrt{qs} + D \cosh \sqrt{qs}. \end{aligned} \quad (\text{A1-39})$$

さらに微分する。方程式の右辺は、

$$\begin{aligned} x'' &= -aq \cos \sqrt{qs} - b\sqrt{q} \sin \sqrt{qs} \\ &\quad + cq \cosh \sqrt{qs} + d\sqrt{q} \sinh \sqrt{qs}, \end{aligned} \quad (\text{A1-40})$$

左辺は、

$$-qy = -q \left(A \cos \sqrt{qs} + \frac{B}{\sqrt{q}} \sin \sqrt{qs} + C \cosh \sqrt{qs} + \frac{D}{\sqrt{q}} \sinh \sqrt{qs} \right) \quad (\text{A1-41})$$

となる。

これが等しくなる為には、 $A=a$ 、 $B=b$ 、 $C=-c$ 、 $D=-d$ でなければならない。従って、 $\sqrt{qs} = \theta$ において、解は

$$\begin{aligned} x &= a \cos \theta + \frac{b}{\sqrt{q}} \sin \theta \\ &\quad + c \cosh \theta + \frac{d}{\sqrt{q}} \sinh \theta, \\ y &= a \cos \theta + \frac{b}{\sqrt{q}} \sin \theta \\ &\quad - c \cosh \theta - \frac{d}{\sqrt{q}} \sinh \theta \end{aligned} \quad (\text{A1-42})$$

と書ける。初期条件を求めるため、 $\theta=0$ を代入すると、 $x_0 = a+c$ 、 $x'_0 = b+d$ 、 $y_0 = a-c$ 、 $y'_0 = b-d$ となり、従って、 $a = \frac{x_0 + y_0}{2}$ 、 $b = \frac{x'_0 + y'_0}{2}$ 、 $c = \frac{x_0 - y_0}{2}$ 、 $d = \frac{x'_0 - y'_0}{2}$ となる。

結局、

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{\cos \theta + \cosh \theta}{2} & \frac{\sin \theta + \sinh \theta}{2\sqrt{q}} \\ -\frac{\sqrt{q}(\sin \theta - \sinh \theta)}{2} & \frac{\cos \theta + \cosh \theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (\text{A1-43})$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} \frac{\cos \theta - \cosh \theta}{2} & \frac{\sin \theta - \sinh \theta}{2\sqrt{q}} \\ -\frac{\sqrt{q}(\sin \theta + \sinh \theta)}{2} & \frac{\cos \theta - \cosh \theta}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{A1-44})$$

として、転送行列は

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix} = M_{skew} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \\ y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2 & M_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \\ y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix} \quad (\text{A1-45})$$

となる。

通常の 2 行 2 列の集束 4 極電磁石の転送行列 F 、発散 4 極電磁石 D との関係調べる。まずは座標を、回転の式

$$\begin{aligned}
\tilde{x} &= x \cos \varphi + y \sin \varphi, \\
\tilde{x}' &= x' \cos \varphi + y' \sin \varphi, \\
\tilde{y} &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi, \\
\tilde{y}' &= -x' \sin \varphi + y' \cos \varphi
\end{aligned} \tag{A1-46}$$

を使って回転させる。2次元の回転行列は、

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi & 0 \\ 0 & \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} \tag{A1-47}$$

である。 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ として、45度の回転は、

$$R(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & I \\ -I & I \end{pmatrix} \tag{A1-48}$$

と書ける。これを使うと、

$$R(-45^\circ) M_{skew} R(45^\circ) = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} \tag{A1-49}$$

$$R(45^\circ) M_{skew} R(-45^\circ) = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \tag{A1-50}$$

と書ける。

skew 4極は結局は normal 4極を 45度傾けたものという当然の結果となった。

1.2.2. ソレノイドの転送行列

ソレノイド内の粒子の運動方程式は、

$$x'' + 2gy' + g'y = 0, \tag{A1-51}$$

$$y'' - 2gx' - g'x = 0$$

である。これを解いて転送行列を求める。

$$f = x + iy \tag{A1-52}$$

とおくと、方程式は

$$f'' - 2igf' - ig'f = 0. \tag{A1-53}$$

ここで、 $\tilde{f} = fe^{-i\theta(s)}$ とおく。

$$f = \tilde{f}e^{i\theta(s)},$$

$$f' = \tilde{f}'e^{i\theta} + i\theta'\tilde{f}e^{i\theta}, \tag{A1-54}$$

$$f'' = \tilde{f}''e^{i\theta} + 2i\theta'\tilde{f}'e^{i\theta} + i\theta''\tilde{f}e^{i\theta} - \theta'^2\tilde{f}e^{i\theta}$$

を方程式に代入して、

$$\begin{aligned}
\tilde{f}'' + (2i\theta' - 2ig)\tilde{f}' \\
+ (i\theta'' - \theta'^2 + 2g\theta' - ig')\tilde{f} = 0.
\end{aligned} \tag{A1-55}$$

ここで、

$$\theta(s) = \int_0^s g(s) ds \left(= \int_0^s \frac{-B_s(s)}{2B\rho} ds \right) \tag{A1-56}$$

とすると方程式が簡単になる。 $\theta' = g$ 、 $\theta'' = g'$ より、

$$\tilde{f}'' + g^2\tilde{f} = 0. \tag{A1-57}$$

従って、

$$\begin{pmatrix} \tilde{f} \\ \tilde{f}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos gs & \frac{1}{g} \sin gs \\ -g \sin gs & \cos gs \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{f}_0 \\ \tilde{f}'_0 \end{pmatrix} \tag{A1-58}$$

これはすなわち、normal 集束4極の水平転送行列 F を使って、

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{x}' \\ \tilde{y} \\ \tilde{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{x}'_0 \\ \tilde{y}_0 \\ \tilde{y}'_0 \end{pmatrix} \tag{A1-59}$$

と書けることを意味する。座標の回転

$$\begin{aligned}
(\tilde{x} + i\tilde{y}) &= (x + iy)e^{-i\theta(s)} \\
&= (x + iy)(\cos \theta + i \sin \theta)
\end{aligned} \tag{A1-60}$$

を考え、また、始点では座標は重なっている ($\tilde{x}_0 = x_0$ など) ことにより、転送行列は

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix}_1 = R(-\theta) \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{x}' \\ \tilde{y} \\ \tilde{y}' \end{pmatrix}_1 \tag{A1-61}$$

$$= R(-\theta) \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \\ y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$$

となる。書き下せば、

$$M_1 = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \frac{\sin 2\theta}{2g} \\ -\frac{g \sin 2\theta}{2} & \cos^2 \theta \end{pmatrix}, \tag{A1-62}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sin 2\theta}{2} & -\frac{1}{g} \sin^2 \theta \\ g \sin^2 \theta & -\frac{\sin 2\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{A1-63}$$

として、

$$M_{solenoid} = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ -M_2 & M_1 \end{pmatrix} \quad (\text{A1-64})$$

となる。これは、出入り口における端の効果も含めた、ソレノイド全体の転送行列である。ソレノイドの長さを L とすると、 $\theta = \theta(L) = gL$ の時以外はこの行列は適用できない。

1.2.3. ソレノイドの途中の座標

skew もソレノイドも、2行2列の4極の行列を回転させたものであるが、skew は回転角が45度と固定であるのに対し、ソレノイドの場合は回転角度は軌道長に依存する。その為、ソレノイド内部の座標を得るためには、発散角に対して回転行列部分の微分も考慮に入れる必要がある。すなわち、

$$(\tilde{x}' + i\tilde{y}') = (x' + iy')e^{-i\theta(s)} - i\theta'(x' + iy')e^{-i\theta(s)} \quad (\text{A1-65})$$

から、途中までの座標と発散角に対する回転行列を求める必要がある。

$$\tilde{R}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi & 0 \\ -g \sin \varphi & \cos \varphi & g \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi & 0 \\ -g \cos \varphi & -\sin \varphi & -g \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (\text{A1-66})$$

この行列で回すと、途中までの座標が分かり、

$$\tilde{M}_1 = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \frac{\sin 2\theta}{2g} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A1-67})$$

$$\tilde{M}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sin 2\theta}{2} & -\frac{1}{g} \sin^2 \theta \\ g & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A1-68})$$

として、

$$M_{inside} = \tilde{R}(-\theta) \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{M}_1 & \tilde{M}_2 \\ -\tilde{M}_2 & \tilde{M}_1 \end{pmatrix} \quad (\text{A1-69})$$

となる。ちなみに、 $s=0$ とすると、入り口の端の効果を取り出すことができる。

$$M_{入口} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & g & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -g & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A1-70})$$

である。ちなみに、出口は符号が逆で、

$$M_{出口} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ g & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A1-71})$$

である。内部の行列から全体の行列を求めるには出口の効果をかける必要があり、

$$M_{全体} = M_{出口} M_{内部}(s=L) \quad (\text{A1-72})$$

となる。 $M_{出口} \tilde{R}(-\theta) = R(-\theta)$ である。

1.2.4. ソレノイドの端の効果

ソレノイドの磁束は、長いソレノイドの内部では、ビーム進行方向を向いており、端の方は同型方向に曲がって外へ出て行く。ソレノイドの中央から無限遠まで、半径 r の円筒を考え、その円筒に対する磁束の出入りを考える (図 A1-1)。ソレノイド中央の断面で円筒内に進入する磁束の和は、円筒側面から同径方向に出て行く磁束の和に等しくなるはずである。すなわち、

$$\int_0^\infty 2\pi r B_r dz + \pi r^2 B_s = 0 \quad (\text{A1-73})$$

従って、ソレノイド端付近の外向きの磁束をまとめたものは、

$$\int_0^\infty B_r dz = -\frac{1}{2} r B_s \quad (\text{A1-74})$$

となる。磁場と力が直交することと、その向きを考えると、端における蹴りは

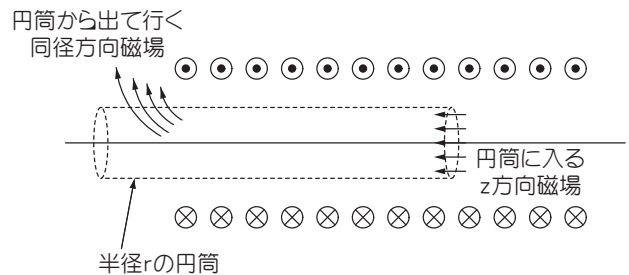


図 A1-1 ソレノイドの磁場

$$\Delta x' = -\frac{B_r \sin \theta}{B\rho} = -\frac{B_s}{2B\rho} y, \quad (\text{A1-75})$$

$$\Delta y' = \frac{B_r \cos \theta}{B\rho} = \frac{B_s}{2B\rho} x$$

となる。

ソレノイドの最後として、端と内部を分けて転送行列を考えてみる。

ソレノイド磁場の方向をどちら向きにするかによるが、入り口で転送行列が(1-187)式に、出口で(1-188)式になる場合を考える。すなわち、入り口で

$$\Delta x' = gy, \quad (\text{A1-76})$$

$$\Delta y' = -gx,$$

出口で

$$\Delta x' = -gy, \quad (\text{A1-77})$$

$$\Delta y' = gx$$

という場合である。

内部の運動方程式は、

$$\begin{aligned} x'' - 2gy' &= 0, \\ y'' + 2gx' &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A1-78})$$

となる。これを解いてみる。もう1回微分して、

$$\begin{aligned} x''' + 2gy'' &= x''' + 4g^2 x' = 0, \\ y''' + 2gx'' &= y''' + 4g^2 y' = 0. \end{aligned} \quad (\text{A1-79})$$

これを積分して、

$$\begin{aligned} x'' + 4g^2 x &= a, \\ y'' + 4g^2 y &= b. \end{aligned} \quad (\text{A1-80})$$

積分定数に対する特解は $x = \frac{a}{4g^2}$ 、 $y = \frac{b}{4g^2}$ なの

で、斉次解を足して、一般解は

$$x = A \cos 2gs + B \sin 2gs + \frac{a}{4g^2}, \quad (\text{A1-81})$$

$$y = C \cos 2gs + D \sin 2gs + \frac{b}{4g^2}.$$

これを微分して方程式に代入する。

$$\begin{aligned} x' &= -2gA \sin 2gs + 2gB \cos 2gs, \\ y' &= -2gC \sin 2gs + 2gD \cos 2gs, \end{aligned} \quad (\text{A1-82})$$

$$x'' = -4g^2 A \cos 2gs - 4g^2 B \sin 2gs, \quad (\text{A1-83})$$

$$y'' = -4g^2 C \cos 2gs - 4g^2 D \sin 2gs.$$

方程式に代入して

$$x'' = 2gy' \leftrightarrow$$

$$4g^2 (A \cos 2gs + B \sin 2gs) \quad (\text{A1-84})$$

$$= 4g^2 (C \sin 2gs - D \cos 2gs)$$

従って、 $A = -D$ 、 $B = C$ である。

$$x = A \cos 2gs + B \sin 2gs + \frac{a}{4g^2}, \quad (\text{A1-85})$$

$$y = B \cos 2gs - A \sin 2gs + \frac{b}{4g^2},$$

$$x' = -2gA \sin 2gs + 2gB \cos 2gs, \quad (\text{A1-86})$$

$$y' = -2gB \sin 2gs - 2gA \cos 2gs.$$

$s = 0$ を代入し、初期条件を求めると、

$$x_0 = A + \frac{a}{4g^2}, \quad y_0 = B + \frac{b}{4g^2}, \quad x'_0 = 2gB,$$

$y'_0 = -2gA$ となる。従って、 A 、 B 、 a 、 b を消して、

$$\begin{aligned} x &= -\frac{y'_0}{2g} \cos 2gs + \frac{x'_0}{2g} \sin 2gs \\ &\quad + x_0 + \frac{y'_0}{2g}, \end{aligned} \quad (\text{A1-87})$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{x'_0}{2g} \cos 2gs + \frac{y'_0}{2g} \sin 2gs \\ &\quad + y_0 - \frac{x'_0}{2g}, \end{aligned}$$

$$x' = y'_0 \sin 2gs + x'_0 \cos 2gs, \quad (\text{A1-88})$$

$$y' = -x'_0 \sin 2gs + y'_0 \cos 2gs.$$

従って、転送行列は

$$M_{\text{inside}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sin 2gs}{2g} & 0 & \frac{1 - \cos 2gs}{2g} \\ 0 & \cos 2gs & 0 & \sin 2gs \\ 0 & -\frac{1 - \cos 2gs}{2g} & 1 & \frac{\sin 2gs}{2g} \\ 0 & -\sin 2gs & 0 & \cos 2gs \end{pmatrix} \quad (\text{A1-89})$$

$$M_{\text{全体}} = M_{\text{出口}} M_{\text{内部}} M_{\text{入口}} \quad (\text{A1-90})$$

とした行列は、(1-181)、(1-189)に等しくなる。

2. 振幅依存チューンシフト

微分方程式を適当な摂動で解くと、永年項が生じる。永年項とは時間発展に比例して増大してゆく項である。正準摂動法を使うと永年項の発生を防ぐことができる。まずは調和振動子に対して摂動の説明を行った後、実際の蓄積リングにおける6極電磁石及び8極電磁石について振幅依存チューンシフトを導出する。

2.1. 調和振動子の運動方程式

調和振動子の方程式は

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\leftrightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0, \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{A2-1})$$

運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2, \quad (\text{A2-2})$$

ポテンシャルエネルギーは

$$U = \frac{1}{2} kx^2 \quad (\text{A2-3})$$

である。ラグランジアンは

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2, \quad (\text{A2-4})$$

ラグランジュの運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} + kx = 0, \quad (\text{A2-5})$$

ハミルトニアンは、 $q = x, p = m\dot{x}$ として、

$$H = pq - L = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} kq^2, \quad (\text{A2-6})$$

ハミルトンの運動方程式は

$$\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} - \frac{p}{m} = 0, \quad (\text{A2-7})$$

$$\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} = \dot{p} + kq = 0,$$

従って、結局、

$$\dot{q} + kq = 0 \quad (\text{A2-8})$$

となる。

2.2. 作用変数と角変数の導入

調和振動子のハミルトニアンの変数を、正準変換を使って、物理的な座標と運動量から、角変数と作用変数とに変換する。最初のハミルトニアンは、

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2. \quad (\text{A2-9})$$

$(q, p) \rightarrow (\theta, J)$ への母関数は、

$$F(q, \theta, t) = -\frac{m\omega}{2} q \tan \theta \quad (\text{A2-10})$$

であり、この母関数は元の座標変数、新しい座標変数を含む。従って、

$$dF = pdq - Jd\theta + (H' - H)dt \quad (\text{A2-11})$$

より、新しい運動量変数は、

$$J = -\frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{m\omega}{2} \left(\frac{q}{\cos \theta} \right)^2, \quad (\text{A2-12})$$

従って、

$$q = \sqrt{\frac{2J}{m\omega}} \cos \theta \quad (\text{A2-13})$$

元の運動量変数は

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = -\sqrt{2Jm\omega} \sin \theta \quad (\text{A2-14})$$

新しいハミルトニアンは

$$H' = H + \frac{\partial F}{\partial t} = H = J\omega \quad (\text{A2-15})$$

運動方程式は

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial J} = \omega, \quad (\text{A2-16})$$

$$\dot{J} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$$

となる。作用変数は一定、角変数は角速度 ω で増大してゆく。すなわち、

$$J = J_0 = \text{const.}, \quad (\text{A2-17})$$

$$\theta = \theta_0 + \omega t$$

である。

2.3. 調和振動子に対する摂動論

角変数と作用変数を使ったハミルトニアンに、小さな高次項が付け加わった場合に近似解を

求める方法について述べる。調和振動子のハミルトニアンを $H_0(\varphi, J)$ として、

$$H(\varphi, J) = H_0(\varphi, J) + \varepsilon V(\varphi, J) \quad (\text{A2-18})$$

なるハミルトニアンが与えられたとする。この時、正準変換 $(\varphi, J) \rightarrow (\tilde{\varphi}, \tilde{J})$ によって、新しいハミルトニアンが

$$\tilde{H}(\tilde{\varphi}, \tilde{J}) = \tilde{H}(\tilde{\varphi}) \quad (\text{A2-19})$$

と作用変数のみを含むように書ければ、この運動は解けたことになる。具体的には、

$$\tilde{H}(\tilde{\varphi}) = H_0(\tilde{J}) + \varepsilon \langle V_1(\tilde{J}) \rangle + \varepsilon^2 \langle V_2(\tilde{J}) \rangle + \dots \quad (\text{A2-20})$$

と書くことが目標である。ただし、 $\langle \rangle$ は平均することを表す。

変換の母関数を

$$F = F(\varphi, \tilde{J}) = \varphi \tilde{J} + \varepsilon \chi_1(\varphi, \tilde{J}) + \varepsilon^2 \chi_2(\varphi, \tilde{J}) + \dots \quad (\text{A2-21})$$

とする。元の座標と新しい運動量でかかれた母関数である。従って、

元の運動量は

$$J = \frac{\partial F}{\partial \varphi} = \tilde{J} + \varepsilon \frac{\partial \chi_1}{\partial \varphi} + \varepsilon^2 \frac{\partial \chi_2}{\partial \varphi} + \dots, \quad (\text{A2-22})$$

新しい座標は

$$\tilde{\varphi} = \frac{\partial F}{\partial \tilde{J}} = \varphi + \varepsilon \frac{\partial \chi_1}{\partial \tilde{J}} + \varepsilon^2 \frac{\partial \chi_2}{\partial \tilde{J}} + \dots \quad (\text{A2-23})$$

と書ける。これらをハミルトニアンに代入して、

$$\begin{aligned} H(\varphi, J) &= H_0(\varphi, J) + \varepsilon V(\varphi, J) \\ &= H_0\left(\varphi, \tilde{J} + \varepsilon \frac{\partial \chi_1}{\partial \varphi} + \varepsilon^2 \frac{\partial \chi_2}{\partial \varphi} + \dots\right) \\ &\quad + \varepsilon V\left(\varphi, \tilde{J} + \varepsilon \frac{\partial \chi_1}{\partial \varphi} + \varepsilon^2 \frac{\partial \chi_2}{\partial \varphi} + \dots\right), \end{aligned} \quad (\text{A2-24})$$

展開する。第1項は

$$\begin{aligned} &= H_0(\varphi, \tilde{J}) + \frac{\partial H_0}{\partial \tilde{J}} \cdot \left(\varepsilon \frac{\partial \chi_1}{\partial \varphi} + \varepsilon^2 \frac{\partial \chi_2}{\partial \varphi} + \dots \right) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 H_0}{\partial \tilde{J}^2} \cdot \left(\varepsilon \frac{\partial \chi_1}{\partial \varphi} + \varepsilon^2 \frac{\partial \chi_2}{\partial \varphi} + \dots \right)^2, \end{aligned} \quad (\text{A2-25})$$

第2項は、

$$\begin{aligned} &= \varepsilon V(\varphi, \tilde{J}) + \frac{\partial \varepsilon V}{\partial \tilde{J}} \cdot \left(\varepsilon \frac{\partial \chi_1}{\partial \varphi} + \varepsilon^2 \frac{\partial \chi_2}{\partial \varphi} + \dots \right) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \varepsilon V}{\partial \tilde{J}^2} \cdot \left(\varepsilon \frac{\partial \chi_1}{\partial \varphi} + \varepsilon^2 \frac{\partial \chi_2}{\partial \varphi} + \dots \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{A2-26})$$

従って、

$$\begin{aligned} H(\varphi, J) &= \\ &(\varepsilon \text{ について } 0 \text{ 次の項は、}) \\ &H_0(\tilde{J}) \end{aligned} \quad (\text{A2-27})$$

(1次項は、)

$$+ \varepsilon \left(\frac{\partial H_0}{\partial \tilde{J}} \cdot \frac{\partial \chi_1}{\partial \varphi} + V \right) \rightarrow \varepsilon \langle V \rangle \quad (\text{A2-28})$$

(2次項は)

$$\begin{aligned} &+ \varepsilon^2 \left(\frac{\partial H_0}{\partial \tilde{J}} \cdot \frac{\partial \chi_2}{\partial \varphi} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 H_0}{\partial \tilde{J}^2} \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{\partial V}{\partial \tilde{J}} \cdot \frac{\partial \chi_1}{\partial \varphi} \right) \\ &\rightarrow \varepsilon^2 \langle V_2 \rangle \end{aligned} \quad (\text{A2-29})$$

となるようにしたい。

1次の式より、

$$\begin{aligned} &\varepsilon \left(\frac{\partial H_0}{\partial \tilde{J}} \cdot \frac{\partial \chi_1}{\partial \varphi} + V \right) \\ &= \varepsilon \langle V \rangle + \varepsilon \left(\frac{\partial H_0}{\partial \tilde{J}} \cdot \frac{\partial \chi_1}{\partial \varphi} + V - \langle V \rangle \right) \end{aligned} \quad (\text{A2-30})$$

より、 χ_1 を決める。

$$\chi_1 = - \int \frac{V - \langle V \rangle}{\frac{\partial H_0}{\partial \tilde{J}}} d\varphi. \quad (\text{A2-31})$$

同様にして、2次の式は、

$$V_2 = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 H_0}{\partial \tilde{J}^2} \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{\partial V}{\partial \tilde{J}} \cdot \frac{\partial \chi_1}{\partial \varphi} \quad (\text{A2-32})$$

として、

$$\frac{\partial H_0}{\partial \tilde{J}} \cdot \frac{\partial \chi_2}{\partial \varphi} + V_2 - \langle V_2 \rangle = 0 \quad (\text{A2-33})$$

より χ_2 が決まる。2次までの摂動を計算する場合、 $\langle V_2 \rangle = \int V_2 d\varphi$ を計算すれば十分で、 χ_2 を求める必要はない。

2.4. 2次と3次の項がある場合のハミルトニアン

簡単のため

$$x'' + x = 0,$$

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + p^2) \quad (\text{A2-34})$$

とする。6 極電磁石に対応する、2 次の項がある場合、

$$x'' + x = \varepsilon x^2,$$

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + p^2) - \frac{1}{3}\varepsilon x^3 \quad (\text{A2-35})$$

8 極電磁石に対応する、3 次の項がある場合、

$$x'' + x = \varepsilon x^3,$$

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + p^2) - \frac{1}{4}\varepsilon x^4 \quad (\text{A2-36})$$

である。作用変数と角変数に変換すると、

$$x = \sqrt{2J} \cos \varphi, \quad (\text{A2-37})$$

$$p = -\sqrt{2J} \sin \varphi,$$

より、

$$\cos^3 \varphi = \frac{1}{4}(\cos 3\varphi + 3 \cos \varphi) \quad (\text{A2-38})$$

$$\cos^4 \varphi = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{8} \cos 4\varphi$$

を使って、6 極の場合、

$$H = J - \frac{\sqrt{2}}{6} J \sqrt{J} \varepsilon (\cos 3\varphi + 3 \cos \varphi) \quad (\text{A2-39})$$

8 極の場合、

$$H = J - J^2 \varepsilon \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{8} \cos 4\varphi \right) \quad (\text{A2-40})$$

となる。

2.5. 3次の場合の摂動による解

運動方程式に 3 次項、すなわち 8 極に対応する場合の方が容易なので、そちらから解く。

$$\begin{aligned} \langle V \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -J^2 \varepsilon \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{8} \cos 4\varphi \right) d\varphi \\ &= -\frac{3}{8} \varepsilon J^2 \end{aligned} \quad (\text{A2-41})$$

従って、

$$\tilde{H} = J - \frac{3}{8} \varepsilon J^2 \quad (\text{A2-42})$$

ハミルトンの運動方程式 $\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial J}$ より、これを J

で微分したのが新しい振動数となる。振動数は、

$$\nu = \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial J} = 1 - \frac{3}{4} \varepsilon J \quad (\text{A2-43})$$

となる。振幅を $a = \sqrt{2J}$ と書けば、

$$\Delta \nu = -\frac{3}{8} \varepsilon a^2 \quad (\text{A2-44})$$

となる。

2.6. 2次の場合の摂動による解

6 極に対応する場合について解く。1 次ではチューンシフトが出ないため、6 極の場合、1 次の母関数である χ_1 をきちんと求め、2 次まで摂動する必要がある。

$$\begin{aligned} H &= J - \frac{\sqrt{2}}{6} J^{\frac{3}{2}} \varepsilon (\cos 3\varphi + 3 \cos \varphi) \\ &= \left(\tilde{J} + \varepsilon \frac{\partial \chi_1}{\partial \varphi} \right) \\ &\quad - \frac{\sqrt{2}}{6} \left(\tilde{J} + \varepsilon \frac{\partial \chi_1}{\partial \varphi} \right)^{\frac{3}{2}} \varepsilon (\cos 3\tilde{\varphi} + 3 \cos \tilde{\varphi}) \end{aligned} \quad (\text{A2-45})$$

ここで、 $\tilde{J} \gg \varepsilon \frac{\partial \chi_1}{\partial \varphi}$ として、

$$\left(\tilde{J} + \varepsilon \frac{\partial \chi_1}{\partial \varphi} \right)^{\frac{3}{2}} \approx \tilde{J}^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{3\varepsilon}{2\tilde{J}} \frac{\partial \chi_1}{\partial \varphi} \right) \quad (\text{A2-46})$$

とする。

0 次は

$$\tilde{H} = \tilde{J}. \quad (\text{A2-47})$$

1 次は

$$V = -\frac{\sqrt{2}}{6} \tilde{J}^{\frac{3}{2}} \varepsilon (\cos 3\tilde{\varphi} + 3 \cos \tilde{\varphi}) \quad (\text{A2-48})$$

として、

$$\langle V \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V d\tilde{\varphi} = 0 \quad (\text{A2-49})$$

よって、新しいハミルトニアンに 1 次の項は加わらない。また、母関数の 1 次項は

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial \varphi} + V - \langle V \rangle = 0 \quad (\text{A2-50})$$

$$\leftrightarrow \chi_1 = -\int V d\tilde{\varphi}$$

となる。

2次は、

$$\frac{\partial \chi_2}{\partial \varphi} - \frac{\sqrt{2}}{6} \tilde{J}^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{3\varepsilon}{2\tilde{J}} \frac{\partial \chi_1}{\partial \varphi} \cdot \varepsilon (\cos 3\tilde{\varphi} + 3\cos \tilde{\varphi}) \quad (\text{A2-51})$$

(A2-50)より、 $\frac{\partial \chi_1}{\partial \varphi} = -V$ なので、

$$V_2 = -\frac{1}{12} \varepsilon^2 J^2 (\cos 3\tilde{\varphi} + 3\cos \tilde{\varphi}) \quad (\text{A2-52})$$

よって、平均して

$$\langle V_2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_2 d\varphi = -\frac{5}{12} \varepsilon^2 J^2 \quad (\text{A2-53})$$

となる。

$$\tilde{H} = J - \frac{5}{12} \varepsilon^2 J^2 \quad (\text{A2-54})$$

より、

$$\nu = 1 - \frac{5}{6} \varepsilon^2 J \quad (\text{A2-55})$$

$$\leftrightarrow \Delta \nu = -\frac{5}{12} \varepsilon^2 a^2$$

となる。

2.7. 微分方程式を直に解く

最後に、微分方程式を直に摂動で解いてみる。振幅依存チューンシフトを仮定しないと、解に永年項が現れることを示す。解は外力に対する特解のみを示し、斉次解は省く。

2.7.1. 2次の場合

6極に対応する2次の場合の $x'' + x = \varepsilon x^2$ を解く。まず、振動数は一定だとして、解を

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots \quad (\text{A2-56})$$

と展開する。方程式に代入して、

$$x_0'' + \varepsilon x_1'' + \varepsilon^2 x_2'' + \dots + x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots = \varepsilon (x_0^2 + 2\varepsilon x_0 x_1 + \varepsilon^2 (x_1^2 + 2x_0 x_2) + \dots) \quad (\text{A2-57})$$

整理すると、0次は

$$x_0'' + x_0 = 0 \leftrightarrow x_0 = a \cos s. \quad (\text{A2-58})$$

1次は

$$x_1'' + x_1 = x_0^2 = a^2 \cos^2 s \quad (\text{A2-59})$$

$$\leftrightarrow x_1 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{6} \cos 2s.$$

もともと1次の段階では振幅依存チューンシフトは出ないので、ここまでは解ける。2次は、

$$x_2'' + x_2 = 2x_0 x_1 = \frac{5}{6} a^3 \cos s - \frac{1}{6} a^3 \cos 3s \quad (\text{A2-60})$$

$$\leftrightarrow x_2 = \frac{5a^3}{12} s \cos s + \frac{a^3}{48} \cos 3s.$$

右辺第1項の s に比例する項を永年項という。この項があると、振幅は時間発展とともにどんどん増大してゆくが、実際はそうならないのでこの解は誤りである。

永年項を防ぐには、振動数の変化を考慮に入れればよい。すなわち、

$$\tilde{s} = \omega s, \quad (\text{A2-61})$$

$$\omega = 1 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots$$

と変数変換を考える。方程式に代入すると、

$$\begin{aligned} & (1 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots)^2 (x_0'' + \varepsilon x_1'' + \varepsilon^2 x_2'' + \dots) \\ & + x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots = \\ & \varepsilon (x_0^2 + 2\varepsilon x_0 x_1 + \varepsilon^2 (x_1^2 + 2x_0 x_2) + \dots) \end{aligned} \quad (\text{A2-62})$$

0次は

$$x_0'' + x_0 = 0 \leftrightarrow x_0 = a \cos \tilde{s}. \quad (\text{A2-63})$$

1次は

$$x_1'' + x_1 + 2\omega_1 x_0'' = x_0^2 \quad (\text{A2-64})$$

となるが、永年項は出ないため、

$$\omega_1 = 0 \quad (\text{A2-65})$$

でよい。解は、

$$x_1 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{6} \cos 2\tilde{s}. \quad (\text{A2-66})$$

2次は、

$$x_2'' + x_2 + 2\omega_2 x_0'' = 2x_0 x_1 \quad (\text{A2-67})$$

これは、

$$x_2'' + x_2 = 2\omega_2 a \cos \tilde{s} + \frac{5}{6} a^3 \cos \tilde{s} - \frac{1}{6} a^3 \cos 3\tilde{s} \quad (\text{A2-68})$$

と書けるが、右辺の外力の項に、 $\cos \tilde{s}$ 、 $\sin \tilde{s}$ の項があると永年項が出るため、これがゼロになるように ω_2 を決めればよい。従って、

$$\omega_2 = -\frac{5}{12}a^2 \quad (\text{A2-69})$$

これは振幅依存チューンシフトを表し、正準摂動によって求めたものと一致する。2次の解は

$$x_2 = \frac{1}{48}a^3 \cos 3\tilde{s}. \quad (\text{A2-70})$$

ここまでを全て含めると、解は

$$x = a \cos \left(\left(1 - \frac{5}{12}\varepsilon^2 a^2 \right) s \right) + \frac{\varepsilon a^2}{2} - \frac{\varepsilon a^2}{6} \cos \left(2 \left(1 - \frac{5}{12}\varepsilon^2 a^2 \right) s \right) + \frac{\varepsilon^2 a^3}{48} \cos \left(3 \left(1 - \frac{5}{12}\varepsilon^2 a^2 \right) s \right) \quad (\text{A2-71})$$

となる。

2.7.2. 3次の場合

8極に対応する3次の場合も同様である。

$$(1 + \varepsilon\omega_1 + \dots)^2 (x_0'' + \varepsilon x_1'' + \dots) + x_0 + \varepsilon x_1 + \dots = \varepsilon (x_0^3 + 3\varepsilon x_0^2 x_1 + \dots) \quad (\text{A2-72})$$

0次は

$$x_0'' + x_0 = 0 \leftrightarrow x_0 = a \cos \tilde{s}. \quad (\text{A2-73})$$

1次は

$$x_1'' + x_1 = -2\omega_1 x_0'' + x_0^3 = \left(2a\omega_1 + \frac{3a^3}{4} \right) \cos \tilde{s} + \frac{a^3}{4} \cos 3\tilde{s} \quad (\text{A2-64})$$

永年項を防ぐためには、

$$\omega_1 = -\frac{3}{8}a^2 \quad (\text{A2-65})$$

としなければならない。

$$x_1 = -\frac{a^3}{32} \cos 3\tilde{s}. \quad (\text{A2-66})$$

解は、

$$x = a \cos \left(\left(1 - \frac{3}{8}\varepsilon a^2 \right) s \right) - \frac{\varepsilon a^3}{32} \cos \left(3 \left(1 - \frac{3}{8}\varepsilon a^2 \right) s \right) \quad (\text{A2-67})$$

となる。

2.8. 実際の加速器の場合のハミルトニアン

加速器の場合に、角変数と作用変数への変換を行う。加速器のハミルトニアンは、

$$H = \frac{1}{2}K(s)x^2 + \frac{1}{2}p^2 \quad (\text{A2-68})$$

であり、運動方程式は

$$x' = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad (\text{A2-69})$$

$$p' = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

変数は

$$x = \sqrt{2\beta J} \cos \left(\int \frac{ds}{\beta} + \delta_0 \right), \quad (\text{A2-70})$$

$$p = x' = -\sqrt{\frac{2J}{\beta}} \left(\begin{array}{l} \sin \left(\int \frac{ds}{\beta} + \delta_0 \right) \\ + \alpha \cos \left(\int \frac{ds}{\beta} + \delta_0 \right) \end{array} \right) \quad (\text{A2-71})$$

である。作用変数と角変数 $(x, p) \rightarrow (\varphi, J)$ への変換を考える。母関数は、

$$F = -\frac{x^2}{2\beta} \left(\tan \left(\varphi + \int \frac{ds}{\beta} - \frac{\nu}{R}s \right) + \alpha \right) \quad (\text{A2-72})$$

より、変数間の関係は、

$$J = -\frac{\partial F}{\partial \varphi},$$

$$p = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad (\text{A2-73})$$

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial F}{\partial s}.$$

運動方程式は

$$J' = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \varphi}, \quad (\text{A2-74})$$

$$\varphi' = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial J}$$

となる。 p と J の表式を計算すると、 $\varphi = \frac{\nu}{C}s + \delta_0$

を使って、

$$J = -\frac{x^2}{2\beta} \frac{1}{\cos^2\left(\int \frac{ds}{\beta} + \delta_0\right)}, \quad (\text{A2-75})$$

$$p = -\frac{x}{\beta} \left(\tan\left(\varphi + \int \frac{ds}{\beta} - \frac{\nu}{C} s\right) + \alpha \right)$$

となる。変換後の新しいハミルトニアンは

$$\tilde{H} = \frac{\nu}{C} J \quad (\text{A2-76})$$

となる。さらに $s = C\theta$ と変数変換して、

$$\tilde{H}(\varphi, J, \theta) = \nu J \quad (\text{A2-77})$$

となる。

2.9. 実際の加速器の場合の摂動

実際の加速器に対する摂動について書き下す。ハミルトニアンは

$$H(\varphi_x, \varphi_y, J_x, J_y, \theta) = H_0(J_x, J_y) + \varepsilon V(\varphi_x, \varphi_y, J_x, J_y, \theta) \quad (\text{A2-78})$$

母関数は

$$F(\varphi_x, \varphi_y, \tilde{J}_x, \tilde{J}_y, \theta) = \varphi_x \tilde{J}_x + \varphi_y \tilde{J}_y + \varepsilon \chi(\varphi_x, \varphi_y, \tilde{J}_x, \tilde{J}_y, \theta) \quad (\text{A2-79})$$

各変数の関係は、

$$\begin{aligned} J_x &= \tilde{J}_x + \frac{\partial}{\partial \varphi_x} \varepsilon \chi, \\ J_y &= \tilde{J}_y + \frac{\partial}{\partial \varphi_y} \varepsilon \chi, \\ \tilde{\varphi}_x &= \varphi_x + \frac{\partial}{\partial \tilde{J}_x} \varepsilon \chi, \\ \tilde{\varphi}_y &= \varphi_y + \frac{\partial}{\partial \tilde{J}_y} \varepsilon \chi, \\ \tilde{H} &= H + \varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (\text{A2-80})$$

代入すると、

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= H_0\left(\tilde{J}_x + \frac{\partial \varepsilon \chi}{\partial \varphi_x}, \tilde{J}_y + \frac{\partial \varepsilon \chi}{\partial \varphi_y}\right) \\ &+ \varepsilon V\left(\varphi_x, \varphi_y, \tilde{J}_x + \frac{\partial \varepsilon \chi}{\partial \varphi_x}, \tilde{J}_y + \frac{\partial \varepsilon \chi}{\partial \varphi_y}, \theta\right) \\ &+ \varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (\text{A2-81})$$

6極の為、 ε の 2 次まで展開する。

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= H_0(\tilde{J}_x, \tilde{J}_y) \\ &+ \varepsilon \left(V(\varphi_x, \varphi_y, \tilde{J}_x, \tilde{J}_y, \theta) + \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial H_0}{\partial \tilde{J}_x} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi_x} + \frac{\partial H_0}{\partial \tilde{J}_y} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi_y} \right) \\ &+ \varepsilon^2 \left(\frac{\partial V}{\partial \tilde{J}_x} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi_x} + \frac{\partial V}{\partial \tilde{J}_y} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi_y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 H_0}{\partial \tilde{J}_x^2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \varphi_x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 H_0}{\partial \tilde{J}_x \partial \tilde{J}_y} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi_x} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi_y} + \frac{\partial^2 H_0}{\partial \tilde{J}_y^2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \varphi_y} \right)^2 \right] \right). \end{aligned} \quad (\text{A2-82})$$

摂動後のハミルトニアンから、角変数と軌道長の両方の変数を消すことが目的であるため、ポテンシャルの平均は、角変数と周回の両方についてとる。

$$\begin{aligned} \langle V(\tilde{J}_x, \tilde{J}_y) \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} V(\varphi_x, \varphi_y, \tilde{J}_x, \tilde{J}_y, \theta) d\varphi_x d\varphi_y d\theta \end{aligned} \quad (\text{A2-83})$$

8極に対する 1 次までの摂動では、ここまでの計算で十分である。6極に対する 2 次までの摂動では、1 次の χ を求める必要がある。 χ の方程式は、

$$\begin{aligned} V(\varphi_x, \varphi_y, \tilde{J}_x, \tilde{J}_y, \theta) - \langle V(\tilde{J}_x, \tilde{J}_y) \rangle \\ + \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \frac{\partial H_0}{\partial \tilde{J}_x} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi_x} + \frac{\partial H_0}{\partial \tilde{J}_y} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi_y} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A2-84})$$

これを求めるため、フーリエ変換する。

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{k_x, k_y, p}(\tilde{J}_x, \tilde{J}_y) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi_x \int_0^{2\pi} d\varphi_y \int_0^{2\pi} d\theta \\ &\quad \cdot \left(V(\varphi_x, \varphi_y, \tilde{J}_x, \tilde{J}_y, \theta) - \langle V(\tilde{J}_x, \tilde{J}_y) \rangle \right) \\ &\quad \cdot e^{-i(k_x \varphi_x + k_y \varphi_y - p\theta)} \\ \tilde{\chi}_{k_x, k_y, p}(\tilde{J}_x, \tilde{J}_y) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi_x \int_0^{2\pi} d\varphi_y \int_0^{2\pi} d\theta \\ &\quad \cdot \chi(\varphi_x, \varphi_y, \tilde{J}_x, \tilde{J}_y, \theta) e^{-i(k_x \varphi_x + k_y \varphi_y - p\theta)}.\end{aligned}\tag{A2-85}$$

従って、

$$\begin{aligned}V(\varphi_x, \varphi_y, \tilde{J}_x, \tilde{J}_y, \theta) - \langle V(\tilde{J}_x, \tilde{J}_y) \rangle \\ = \sum_{k_x=-\infty}^{\infty} \sum_{k_y=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \tilde{V}_{k_x, k_y, p}(\tilde{J}_x, \tilde{J}_y) e^{-i(k_x \varphi_x + k_y \varphi_y - p\theta)} \\ \chi(\varphi_x, \varphi_y, \tilde{J}_x, \tilde{J}_y, \theta) \\ = \sum_{k_x=-\infty}^{\infty} \sum_{k_y=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \chi_{k_x, k_y, p}(\tilde{J}_x, \tilde{J}_y) e^{-i(k_x \varphi_x + k_y \varphi_y - p\theta)}\end{aligned}\tag{A2-86}$$

方程式に代入すると、 k_x, k_y, p 成分は

$$\tilde{V} - ip\tilde{\chi} + v_x ik_x \tilde{\chi} + v_y ik_y \tilde{\chi} = 0\tag{A2-87}$$

となる。従って、

$$\tilde{\chi}_{k_x, k_y, p} = \frac{i\tilde{V}}{v_x k_x + v_y k_y - p}\tag{A2-88}$$

より、蹴りに対する COD 導出の際に使ったのと同じ、級数と余弦の関係(1-207)を使うと、

$$\begin{aligned}\chi(\varphi_x, \varphi_y, \tilde{J}_x, \tilde{J}_y, \theta) \\ = \sum_{k_x=-\infty}^{\infty} \sum_{k_y=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{i\tilde{V}_{k_x, k_y, p}(\tilde{J}_x, \tilde{J}_y) e^{i(k_x \varphi_x + k_y \varphi_y - p\theta)}}{k_x v_x(\tilde{J}_x) + k_y v_y(\tilde{J}_y) - p}\end{aligned}\tag{A2-89}$$

となる。

2.10.8 極の振幅依存チューンシフト

8 極電磁石のポテンシャルは、

$$V = \frac{1}{4} K_3 (x^4 - 6x^2 y^2 + y^4),\tag{A2-90}$$

ここで、

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{2J_x \beta_x} \cos \varphi_x, \\ y &= \sqrt{2J_y \beta_y} \cos \varphi_y.\end{aligned}\tag{A2-91}$$

である。代入して、

$$\begin{aligned}2(x^4 - 6x^2 y^2 + y^4) \\ = J_x^2 \beta_x^2 (3 + \cos 4\varphi_x + 4 \cos 2\varphi_x) \\ - J_x J_y \beta_x \beta_y \left(\begin{aligned} &12 \\ &+ 12 \cos 2\varphi_x + 12 \cos 2\varphi_y \\ &+ 6 \cos 2(\varphi_x - \varphi_y) \\ &+ 6 \cos 2(\varphi_x + \varphi_y) \end{aligned} \right) \\ + J_y^2 \beta_y^2 (3 + \cos 4\varphi_y + 4 \cos 2\varphi_y)\end{aligned}\tag{A2-92}$$

平均化する為、定数項以外は効かない。

$$\langle V \rangle = \frac{K_4}{96\pi} \left(\begin{aligned} &3J_x^2 \int_0^{2\pi} \beta_x^2 d\theta \\ &- 12J_x J_y \int_0^{2\pi} \beta_x \beta_y d\theta \\ &+ 3J_y^2 \int_0^{2\pi} \beta_y^2 d\theta \end{aligned} \right)\tag{A2-93}$$

2.11.6 極によるチューンシフト

ポテンシャルは

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{6} K' (x^3 - 3xy^2) \\ &= \frac{1}{6\sqrt{2}} K' \sqrt{J_x \beta_x}^3 (\cos 3\varphi_x + 3 \cos \varphi_x) \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{2}} K' \sqrt{J_x \beta_x} J_y \beta_y \left(\begin{aligned} &2 \cos \varphi_x \\ &+ \cos(\varphi_x + 2\varphi_y) \\ &+ \cos(\varphi_x - 2\varphi_y) \end{aligned} \right).\end{aligned}\tag{A2-94}$$

ポテンシャルの 1 次の平均はゼロである。

$$\langle V \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} V d\varphi_x d\varphi_y d\theta = 0.\tag{A2-95}$$

従って、 \tilde{V} は V そのものであり、 χ は

$$\begin{aligned}\chi(\varphi_x, \varphi_y, \tilde{J}_x, \tilde{J}_y, \theta) \\ = \sum_{k_x=-\infty}^{\infty} \sum_{k_y=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{iV_{k_x, k_y, p}(\tilde{J}_x, \tilde{J}_y) e^{i(k_x \varphi_x + k_y \varphi_y - p\theta)}}{k_x v_x(\tilde{J}_x) + k_y v_y(\tilde{J}_y) - p}\end{aligned}\tag{A2-96}$$

で与えられる。これを計算するために、

$$V' = f(\theta) \cos(n\varphi_x + m\varphi_y)\tag{A2-97}$$

とおくと、

$$V_{k_x, k_y, p}(\tilde{J}_x, \tilde{J}_y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi_x \int_0^{2\pi} d\varphi_y \int_0^{2\pi} d\theta \cdot (f(\theta) \cos(n\varphi_x + m\varphi_y) e^{-i(k_x\varphi_x + k_y\varphi_y - p\theta)}) \quad (\text{A2-98})$$

なので、 $V_{n,m,p}$ と $V_{-n,-m,p}$ の項のみが残り、その 2 項に対して、

$$\begin{aligned} \chi &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta' \left(\frac{ie^{ip(\theta'-\theta)} f(\theta') e^{i(n\varphi_x + m\varphi_y)}}{(n\nu_x + m\nu_y) - p} + \frac{ie^{ip(\theta'-\theta)} f(\theta') e^{-i(n\varphi_x + m\varphi_y)}}{-(n\nu_x + m\nu_y) - p} \right) \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} d\theta' f(\theta') \frac{\sin \left(\begin{array}{c} n\varphi_x + m\varphi_y \\ + (n\nu_x + m\nu_y) \\ \times (\theta' - \theta - \pi) \end{array} \right)}{\sin(n\nu_x + m\nu_y)\pi} \quad (\text{A2-99}) \end{aligned}$$

となる。ポテンシャルは 5 項あるが、それぞれ $(n,m) = (3,0), (1,0), (1,0), (1,2), (1,-2)$ である。ここで、式を簡単にするために、

$$\frac{\sin \left(\begin{array}{c} n\varphi_x + m\varphi_y \\ + (n\nu_x + m\nu_y) \\ \times (\theta' - \theta - \pi) \end{array} \right)}{\sin(n\nu_x + m\nu_y)\pi} = s(n,m), \quad (\text{A2-100})$$

$$\frac{\cos \left(\begin{array}{c} n\varphi_x + m\varphi_y \\ + (n\nu_x + m\nu_y) \\ \times (\theta' - \theta - \pi) \end{array} \right)}{\sin(n\nu_x + m\nu_y)\pi} = c(n,m)$$

とおく。

$$\begin{aligned} \chi &= -\frac{1}{6\sqrt{2}} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} d\theta' K' \sqrt{J_x \beta_x}^3 (s(3,0) + 3s(1,0)) \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} d\theta' K' \sqrt{J_x \beta_x} J_y \beta_y \times (2s(1,0) + s(1,2) + s(1,-2)) \quad (\text{A2-101}) \end{aligned}$$

となる。ハミルトニアン の 2 次 の 項 から 2 次 の ポテンシャル平均を求める必要があるが、

$$\frac{\partial H_0}{\partial \tilde{J}_x} = \nu_x = \text{const.}, \quad \frac{\partial H_0}{\partial \tilde{J}_y} = \nu_y = \text{const.} \quad (\text{A2-102})$$

より、後半部分は全てゼロ、

$$\varepsilon^2 \left(\frac{\partial V}{\partial \tilde{J}_x} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi_x} + \frac{\partial V}{\partial \tilde{J}_y} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi_y} \right) \equiv V_2 \quad (\text{A2-103})$$

の部分のみ考えればよい。平均をとって、

$$\langle V_2 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} V d\varphi_x d\varphi_y d\theta$$

が求める解である。それぞれを順に計算してゆく。

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial J_x} &= \frac{1}{4\sqrt{2}} K' \sqrt{J_x} \sqrt{\beta_x}^3 (\cos 3\varphi_x + 3\cos \varphi_x) \\ &\quad - \frac{1}{4\sqrt{2}} K' \sqrt{\frac{\beta_x}{J_x}} J_y \beta_y \left(\begin{array}{c} 2\cos \varphi_x \\ + \cos(\varphi_x + 2\varphi_y) \\ + \cos(\varphi_x - 2\varphi_y) \end{array} \right), \\ \frac{\partial V}{\partial J_y} &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} K' \sqrt{J_x \beta_x} \beta_y \left(\begin{array}{c} 2\cos \varphi_x \\ + \cos(\varphi_x + 2\varphi_y) \\ + \cos(\varphi_x - 2\varphi_y) \end{array} \right) \quad (\text{A2-104}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi_x} &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} d\theta' K' \sqrt{J_x \beta_x}^3 (c(3,0) + c(1,0)) \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} d\theta' K' \sqrt{J_x \beta_x} J_y \beta_y \times (2c(1,0) + c(1,2) + c(1,-2)) \quad (\text{A2-105}) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial \varphi_y} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} d\theta' K' \sqrt{J_x \beta_x} J_y \beta_y \times (c(1,2) - c(1,-2))$$

掛け合わせて積分をとるが、

$$\int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos m\theta = \begin{cases} 0 & \text{for } m \neq n \\ \pi & \text{for } m = n \end{cases} \quad (\text{A2-106})$$

なので、結局、 \cos 中の位相の係数が同じ組み合わせしか残らない。 $\frac{\partial V}{\partial \tilde{J}_x} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi_x}$ 中の、 $c(1,0)$ に対す

る掛け算のみ、クロスタームが生じる。

$$\frac{\cos \left(\begin{array}{c} (n\nu_x + m\nu_y) \\ \times (\theta' - \theta - \pi) \end{array} \right)}{\sin(n\nu_x + m\nu_y)\pi} = c'(n,m) \quad (\text{A2-107})$$

と書くと、

$$\begin{aligned}
D_x &= -\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\theta}^{\theta+2\pi} d\theta' \\
&\quad \cdot \frac{1}{64\pi} K'(\theta) \sqrt{\beta_x(\theta)}^3 K'(\theta') \sqrt{\beta_x(\theta')}^3 \\
&\quad \cdot (c'(3,0) + 3c'(1,0)) \\
D_{xy} &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\theta}^{\theta+2\pi} d\theta' \\
&\quad \cdot \left(\begin{aligned} &3K'(\theta) \sqrt{\beta_x(\theta)}^3 K'(\theta') \sqrt{\beta_x(\theta')} \beta_y(\theta') \\ &+ K'(\theta) \sqrt{\beta_x(\theta)} \beta_y(\theta) K'(\theta') \sqrt{\beta_x(\theta')}^3 \end{aligned} \right) \\
&\quad \cdot \frac{1}{32\pi} c'(1,0) \\
&\quad - \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\theta}^{\theta+2\pi} d\theta' \\
&\quad \cdot \frac{1}{8} K'(\theta) \sqrt{\beta_x(\theta)} \beta_y(\theta) K'(\theta') \sqrt{\beta_x(\theta')} \beta_y(\theta') \\
&\quad \cdot (c'(1,2) - c'(1,-2)) \\
D_y &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\theta}^{\theta+2\pi} d\theta' \\
&\quad \cdot -\frac{1}{64\pi} K'(\theta) \sqrt{\beta_x(\theta)} \beta_y(\theta) K'(\theta') \sqrt{\beta_x(\theta')} \beta_y(\theta') \\
&\quad \cdot (4c'(1,0) + c'(1,2) + c'(1,-2))
\end{aligned} \tag{A2-108}$$

として、

$$\langle V' \rangle = D_x J_x^2 + D_{xy} J_x J_y + D_y J_y^2 \tag{A2-109}$$

と書ける。従って、

$$\Delta v_x = 2D_x J_x + D_{xy} J_y \tag{A2-110}$$

$$\Delta v_y = D_{xy} J_x + 2D_y J_y$$

となり、これが振幅依存チューンシフトとなる。

3. 挿入光源の影響と転送行列

水平偏光の挿入光源では、ビームは水平面内を蛇行するが、ビームオプティクスに対しては、それは集束力となる。この章では挿入光源の集束力と、ソレノイドや skew よりさらに使わないと思われるが、転送行列を求める。

3.1. 水平偏光の場合

水平偏光の挿入光源の磁場は、

$$B_x = 0,$$

$$B_y = B_0 \cosh ky \cos kz,$$

$$B_z = -B_0 \sinh ky \sin kz$$

と書ける。ただし、 B_0 は垂直方向のピーク磁場、

λ_u を挿入光源の周期長として $k = \frac{2\pi}{\lambda_u}$ はその波数

である。電磁気学の法則より、垂直磁場を正弦的に変化させると、正弦的なビーム進行方向の磁場成分が必ず生じる。この磁場を運動方程式に代入するが、粒子の運動を、中心軌道とその周りのベータatron振動とに分割する (図 A3-1)。

$$x = x_{CO} + x_{\beta}, \tag{A3-1}$$

$$y = y_{CO} + y_{\beta}.$$

運動方程式

$$x'' = \frac{1}{B\rho} (y' B_z - B_y) \tag{A3-2}$$

$$y'' = \frac{1}{B\rho} (-x' B_z)$$

と磁場を見比べ、中心軌道は

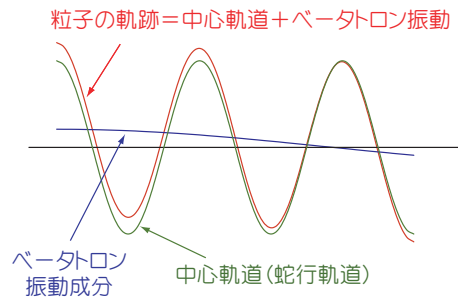


図 A3-1 挿入光源中の軌道

$$\begin{aligned}
x''_{CO} &= \frac{1}{B\rho} (-B_y(x_{CO}, y_{CO}, z)) \\
&= -\frac{1}{\rho} \cosh ky_{CO} \cos kz, \quad (A3-3)
\end{aligned}$$

$$y''_{CO} = \frac{1}{B\rho} (B_x(x_{CO}, y_{CO}, z)) = 0$$

とできる。すなわち、水平面内の蛇行軌道である。水平方向のベータatron振動項を u 、垂直方向を v と書くことにすると、

$$x'' + \eta'_x \delta = u'' + \eta''_u \delta - \frac{1}{\rho} \cosh kv \cos kz, \quad (A3-4)$$

$$y'' + \eta'_y \delta = v'' + \eta''_v \delta.$$

積分して、

$$x' + \eta'_x \delta = u' + \eta'_u \delta - \frac{1}{\rho k} \cosh kv \sin kz, \quad (A3-5)$$

$$y' + \eta'_y \delta = v' + \eta'_v \delta.$$

さらに積分し、

$$x + \eta_x \delta = u + \eta_u \delta - \frac{1}{\rho k^2} \cosh kv \cos kz, \quad (A3-6)$$

$$y + \eta_y \delta = v + \eta_v \delta$$

である。運動方程式に代入すると、

$$\begin{aligned}
u'' + \eta''_u \delta - \frac{1}{\rho} \cosh kv \cos kz \\
&= \frac{1}{\rho} \left(\begin{array}{l} -(v' + \eta'_v \delta) \sinh k(v + \eta_v \delta) \sin kz \\ -\cosh k(v + \eta_v \delta) \cos kz \end{array} \right), \\
v'' + \eta''_v \delta \\
&= -\frac{1}{\rho} \left(\begin{array}{l} u' + \eta'_u \delta - \frac{1}{\rho k} \cosh kv \sin kz \\ \cdot \sinh k(v + \eta_v \delta) \sin kz \end{array} \right) \quad (A3-7)
\end{aligned}$$

となる。ここで、中心軌道に対応する、軌道長に対して速く変化する振動を落とし、ゆっくりしたベータatron振動のみ取り出す。 z に関して平均をとると、

$$\begin{aligned}
\overline{\sin kz} &= \overline{\cos kz} = 0, \\
\overline{\sin^2 kz} &= \overline{\cos^2 kz} = \frac{1}{2} \quad (A3-8)
\end{aligned}$$

より、水平方向は、

$$\begin{aligned}
\overline{u'' + \eta''_u \delta - \frac{1}{\rho} \cosh ky_{CO} \cos kz} &= \overline{u'' + \eta''_u \delta} \\
&= \frac{1}{\rho} \left(\begin{array}{l} -(v' + \eta'_v \delta) \sinh k(v + \eta_v \delta) \sin kz \\ -\cosh k(v + \eta_v \delta) \cos kz \end{array} \right) = 0. \quad (A3-9)
\end{aligned}$$

すなわち、

$$u'' + \eta''_u \delta = 0. \quad (A3-10)$$

従って、水平方向にはドリフトスペースと同じである。垂直方向は、左辺は

$$\overline{v'' + \eta''_v \delta} = v'' + \eta''_v \delta \quad (A3-11)$$

となり、右辺は

$$\begin{aligned}
&\overline{-\frac{1}{\rho} \left(u' + \eta'_u \delta - \frac{1}{\rho k} \cosh kv \sin kz \right) \cdot \sinh k(v + \eta_v \delta) \sin kz} \\
&= -\frac{1}{2\rho^2 k} (\cosh kv \sinh k(v + \eta_v \delta)) \\
&= -\frac{1}{2\rho^2 k} (\cosh kv (\sinh kv + k\eta_v \delta \cosh kv + \dots)) \\
&= -\frac{1}{4\rho^2 k} \sinh 2kv - \frac{1}{2\rho^2} \eta_v \delta \quad (A3-12)
\end{aligned}$$

より、ベータatron振動の運動方程式は

$$v'' = -\frac{1}{4\rho^2 k} \sinh 2kv,$$

$$\eta''_v = -\frac{1}{2\rho^2} \eta_v$$

となる。 $v \ll 1$ として線形化すると、

$$\sinh 2kv \approx 2kv$$

となるので、

$$v'' = -\frac{1}{2\rho^2} v \quad (A3-13)$$

である。水平偏光の挿入光源では、垂直方向の正弦磁場により、水平方向に中心軌道が蛇行し、軌道周りの振動に関しては、蛇行軌道に対しては何も力は働かず、ドリフトスペースと同じになる。一方で垂直方向には進行方向磁場と水平蛇行運動により、集束力が生じる。

3.2. 一般化した場合

挿入光源の磁場を一般化してみる。

$$\begin{aligned}
 B_x &= B_{0y} \left(\frac{k'_y}{k_y} \right) \sinh k'_y x \sinh k_y y \cos kz \\
 &\quad + B_{0x} \cosh k_x x \cosh k'_x y \sin kz, \\
 B_y &= B_{0y} \cosh k'_y x \cosh k_y y \cos kz \\
 &\quad + B_{0x} \left(\frac{k'_x}{k_x} \right) \sinh k_x x \sinh k'_x y \sin kz, \\
 B_z &= B_{0y} \left(\frac{k}{k_y} \right) \cosh k'_y x \sinh k_y y \sin kz \\
 &\quad + B_{0x} \left(\frac{k}{k_x} \right) \sinh k_x x \cosh k'_x y \cos kz,
 \end{aligned} \tag{A3-14}$$

と書ける。ここで、 B_{0x} は水平方向のピーク磁場、 B_{0y} は垂直方向のピーク磁場、 k_x 、 k'_x 、 k_y 、 k'_y は磁場の水平方向変化と垂直方向変化を考慮するための波数であり、マックスウェル方程式から、 $k^2 = k_x^2 + k'_x{}^2 = k_y^2 + k'_y{}^2$ を満たす。

水平偏光の場合と同様に、磁場の式より、中心軌道を

$$\begin{aligned}
 x_{CO} &= \frac{1}{\rho_y k^2} \cosh k'_y x_\beta \cosh k_y y_\beta \cos kz \\
 &\quad + \frac{1}{\rho_x k^2} \left(\frac{k'_x}{k_x} \right) \sinh k_x x_\beta \sinh k'_x y_\beta \sin kz, \\
 y_{CO} &= -\frac{1}{\rho_y k^2} \left(\frac{k'_y}{k_y} \right) \sinh k'_y x_\beta \sinh k_y y_\beta \cos kz \\
 &\quad - \frac{1}{\rho_x k^2} \cosh k_x x_\beta \cosh k'_x y_\beta \sin kz.
 \end{aligned} \tag{A3-15}$$

とする。座標を中心軌道とその周りのベータatron振動に分離する。運動方程式に代入し、 z 方向に平均し、遅いベータatron振動の成分のみ取り出すと、方程式は

$$\begin{aligned}
 x'' &= -\frac{k'_y}{4\rho_y^2 k^2} \sinh 2k'_y x + \frac{k'_x{}^2}{4\rho_x^2 k^2 k_x} \sinh 2k_x x \\
 &\quad - \frac{k'_y}{4\rho_y^2 k_y^2} \sinh 2k'_y x \sinh^2 k_y y \\
 &\quad - \frac{1}{4\rho_x^2 k_x} \sinh 2k_x x \cosh^2 k'_x y \\
 &\quad - \frac{y'}{\rho_x \rho_y k} \frac{k'_x k'_y}{k_x k_y} \sinh k'_y x \sinh k_y y \\
 &\quad \quad \cdot \sinh k_x x \sinh k'_x y \\
 &\quad + \frac{y'}{\rho_x \rho_y k} \cosh k'_y x \cosh k_y y \\
 &\quad \quad \cdot \cosh k_x x \cosh k'_x y \\
 y'' &= -\frac{k'_x}{4\rho_x^2 k^2} \sinh 2k'_x y + \frac{k'_y{}^2}{4\rho_y^2 k^2 k_y} \sinh 2k_y y \\
 &\quad - \frac{1}{4\rho_y^2 k_y} \cosh^2 k'_y x \sinh 2k_y y \\
 &\quad - \frac{k'_x}{4\rho_y^2 k_x^2} \sinh^2 k_x x \sinh 2k'_x y \\
 &\quad + \frac{x'}{\rho_x \rho_y k} \frac{k'_x k'_y}{k_x k_y} \sinh k'_y x \sinh k_y y \\
 &\quad \quad \cdot \sinh k_x x \sinh k'_x y \\
 &\quad - \frac{x'}{\rho_x \rho_y k} \cosh k'_y x \cosh k_y y \\
 &\quad \quad \cdot \cosh k_x x \cosh k'_x y.
 \end{aligned} \tag{A3-16}$$

となる。線形化すると、

$$\begin{aligned}
 x'' &= -\left(\frac{k'_y{}^2}{2\rho_y^2 k^2} + \frac{k_x^2}{2\rho_x^2 k^2} \right) x + \frac{y'}{\rho_x \rho_y k} \\
 &\equiv -a_x x + by', \\
 y'' &= -\left(\frac{k'_x{}^2}{2\rho_x^2 k^2} + \frac{k_y^2}{2\rho_y^2 k^2} \right) y - \frac{x'}{\rho_x \rho_y k} \\
 &\equiv -a_y y - bx'.
 \end{aligned} \tag{A3-17}$$

である。

3.3. 一般化した場合の転送行列

方程式は

$$\begin{aligned} x'' + a_x x - by' &= 0, \\ y'' + a_y y + bx' &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A3-18})$$

である。これをラプラス変換を使って解く。

$$\begin{aligned} L(x) &= X, \\ L(x') &= \tilde{s}X - x_0, \end{aligned} \quad (\text{A3-19})$$

$$\begin{aligned} L(x'') &= \tilde{s}X - \tilde{s}^2 X - \tilde{s}x_0 - x'_0 \\ \tilde{s}^2 X - \tilde{s}x_0 - x'_0 + a_x X - b(\tilde{s}Y - y_0) &= 0 \\ \tilde{s}^2 Y - \tilde{s}y_0 - y'_0 + a_y Y + b(\tilde{s}X - x_0) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A3-20})$$

となる。行列で書くと、

$$\begin{pmatrix} \tilde{s}^2 + a_x & -b\tilde{s} \\ b\tilde{s} & \tilde{s}^2 + a_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{s}x_0 + x'_0 - by_0 \\ \tilde{s}y_0 + y'_0 + bx_0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A3-21})$$

左辺の行列の行列式は、

$$\alpha = \frac{1}{2}(a_x + a_y + b^2), \quad (\text{A3-22})$$

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - a_x a_y}$$

とおいて、

$$\det = (\tilde{s}^2 + \alpha + \beta)(\tilde{s}^2 + \alpha - \beta) \quad (\text{A3-23})$$

である。従って、

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{\det} \begin{pmatrix} (\tilde{s}^3 + (a_y + b^2)\tilde{s})x_0 \\ + (\tilde{s}^2 + a_y)x'_0 + (-ba_y)y_0 + (b\tilde{s})y'_0 \end{pmatrix}, \\ Y &= \frac{1}{\det} \begin{pmatrix} (ba_x)x_0 + (-b\tilde{s})x'_0 \\ + (\tilde{s}^3 + (a_x + b^2)\tilde{s})y_0 + (\tilde{s}^2 + a_x)y'_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A3-24})$$

となる。

転送行列 M を成分毎に書き下す。行列の (1,1)成分は X に対する x_0 の係数で、

$$M(1,1) = \frac{(\tilde{s}^3 + (a_y + b^2)\tilde{s})}{\det} \quad (\text{A3-25})$$

である。これを逆変換する。

$$L^{-1}\left(\frac{\tilde{s}}{\tilde{s}^2 + \omega^2}\right) = \cos \omega s, \quad (\text{A3-26})$$

$$L^{-1}\left(\frac{\omega}{\tilde{s}^2 + \omega^2}\right) = \sin \omega s$$

を使う。

$$\begin{aligned} M(1,1) &= \frac{(\tilde{s}^3 + (a_y + b^2)\tilde{s})}{\det} \\ &= \frac{\alpha + \beta - (a_y + b^2)}{2\beta} \frac{\tilde{s}}{\tilde{s}^2 + (\alpha + \beta)} \\ &\quad + \frac{\beta - \alpha + (a_y + b^2)}{2\beta} \frac{\tilde{s}}{\tilde{s}^2 + (\alpha - \beta)} \\ &= \frac{\alpha + \beta - (a_y + b^2)}{2\beta} \cos(\sqrt{\alpha + \beta}s) \\ &\quad + \frac{\beta - \alpha + (a_y + b^2)}{2\beta} \cos(\sqrt{\alpha - \beta}s) \end{aligned} \quad (\text{A3-27})$$

となる。同じようにして1行目の各成分を求める。

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \sqrt{\alpha + \beta}, \\ \kappa_2 &= \sqrt{\alpha - \beta}, \end{aligned} \quad (\text{A3-28})$$

$$\kappa_3 = a_y + b^2,$$

$$\kappa_4 = a_x + b^2$$

として、

$$M(1,1) = \frac{1}{2\beta} \begin{pmatrix} (\kappa_1^2 - \kappa_3)\cos \kappa_1 s \\ -(\kappa_2^2 - \kappa_3)\cos \kappa_2 s \end{pmatrix}, \quad (\text{A3-29})$$

$$M(1,2) = \frac{1}{2\beta} \begin{pmatrix} \frac{\kappa_1^2 - a_y}{\kappa_1} \sin \kappa_1 s \\ -\frac{\kappa_2^2 - a_y}{\kappa_2} \sin \kappa_2 s \end{pmatrix}, \quad (\text{A3-30})$$

$$M(1,3) = \frac{ba_y}{2\beta} \begin{pmatrix} \frac{\sin \kappa_1 s}{\kappa_1} - \frac{\sin \kappa_2 s}{\kappa_2} \end{pmatrix}, \quad (\text{A3-31})$$

$$M(1,4) = \frac{-b}{2\beta} (\cos \kappa_1 s - \cos \kappa_2 s) \quad (\text{A3-32})$$

となる。2行目は1行目の各成分を s で微分すればよい。

$$M(2,1) = \frac{1}{2\beta} \begin{pmatrix} \kappa_2(\kappa_2^2 - \kappa_3)\sin \kappa_2 s \\ -\kappa_1(\kappa_1^2 - \kappa_3)\sin \kappa_1 s \end{pmatrix}, \quad (\text{A3-33})$$

$$M(2,2) = \frac{1}{2\beta} \begin{pmatrix} (\kappa_1^2 - a_y)\cos \kappa_1 s \\ -(\kappa_2^2 - a_y)\cos \kappa_2 s \end{pmatrix}, \quad (\text{A3-34})$$

$$M(2,3) = \frac{ba_y}{2\beta} (\cos \kappa_1 s - \cos \kappa_2 s), \quad (\text{A3-35})$$

$$M(2,4) = \frac{b}{2\beta} (\kappa_1 \sin \kappa_1 s - \kappa_2 \sin \kappa_2 s). \quad (\text{A3-36})$$

3行目と4行目は、1行目と2行目において、位置も含めて $x \rightarrow y$ と置き換えればよい。

$$M(3,1) = -\frac{ba_x}{2\beta} \left(\frac{\sin \kappa_1 s}{\kappa_1} - \frac{\sin \kappa_2 s}{\kappa_2} \right), \quad (\text{A3-37})$$

$$M(3,2) = \frac{b}{2\beta} (\cos \kappa_1 s - \cos \kappa_2 s), \quad (\text{A3-38})$$

$$M(3,3) = \frac{1}{2\beta} \left(\frac{(\kappa_1^2 - \kappa_4) \cos \kappa_1 s}{-(\kappa_2^2 - \kappa_4) \cos \kappa_2 s} \right), \quad (\text{A3-39})$$

$$M(3,4) = \frac{1}{2\beta} \left(\frac{\frac{\kappa_1^2 - a_x}{\kappa_1} \sin \kappa_1 s}{-\frac{\kappa_2^2 - a_x}{\kappa_2} \sin \kappa_2 s} \right), \quad (\text{A3-40})$$

$$M(4,1) = -\frac{ba_x}{2\beta} (\cos \kappa_1 s - \cos \kappa_2 s), \quad (\text{A3-41})$$

$$M(4,2) = -\frac{b}{2\beta} (\kappa_1 \sin \kappa_1 s - \kappa_2 \sin \kappa_2 s), \quad (\text{A3-42})$$

$$M(4,3) = \frac{1}{2\beta} \left(\frac{\kappa_2 (\kappa_2^2 - \kappa_4) \sin \kappa_2 s}{-\kappa_1 (\kappa_1^2 - \kappa_4) \sin \kappa_1 s} \right), \quad (\text{A3-43})$$

$$M(4,4) = \frac{1}{2\beta} \left(\frac{(\kappa_1^2 - a_x) \cos \kappa_1 s}{-(\kappa_2^2 - a_x) \cos \kappa_2 s} \right). \quad (\text{A3-44})$$

3.4. 水平偏光の場合の非線形チューンシフト

水平方向に磁場一様な水平偏光の挿入光源におけるベータatron振動の運動方程式は、

$$y'' = -\frac{1}{4\rho^2 k} \sinh 2ky \quad (\text{A3-45})$$

である。ポテンシャルを使って書けば、

$$y'' = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\cosh 2ky}{8\rho^2 k^2} \right) \quad (\text{A3-46})$$

と書ける。長さ L の挿入光源に対し、薄レンズでこの力が働くとすると、

$$V(y) = -\frac{L\delta(s)}{8\rho^2 k^2} \cosh 2ky \quad (\text{A3-47})$$

と書ける。前章の摂動によると、

$$\Delta v_y = \frac{\partial V}{\partial J} \quad (\text{A3-48})$$

と書けるはずである。これを計算する。

$$y = \sqrt{2J\beta} \cos \varphi \quad (\text{A3-49})$$

を代入し、

$$\begin{aligned} \langle V(J) \rangle &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \\ &\quad \frac{L\delta(s)}{8\rho^2 k^2} \cosh(2k\sqrt{2J\beta} \cos \varphi) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{L}{8\rho^2 k^2} \right) \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \\ &\quad \cdot \cosh(2k\sqrt{2J\beta} \cos \varphi) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{L}{8\rho^2 k^2} \right) I_0(2k\sqrt{2J\beta}). \end{aligned} \quad (\text{A3-50})$$

ここで、 $I_n(z)$ は n 次の変形ベッセル関数である。

微分して、

$$\begin{aligned} \Delta v_y &= \frac{\partial}{\partial J} \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{L}{8\rho^2 k^2} \right) I_0(2k\sqrt{2J\beta}) \\ &= -\frac{L}{4\pi\rho^2} \frac{I_1(2k\sqrt{2J\beta})}{2k\sqrt{2J\beta}} \end{aligned} \quad (\text{A3-51})$$

となる。ちなみに

$$\frac{I_1(z)}{z} = \frac{1}{2} + \frac{z^2}{16} + \frac{z^4}{384} + \dots \quad (\text{A3-52})$$

と展開できることを使えば、

$$\Delta v_y = -\frac{1}{4\pi} \frac{L}{2\rho^2} \quad (\text{A3-53})$$

となり、線形化した集束力による場合に帰着する。

3.5. トラッキングを行う場合の注意

解析的に線形化して転送行列を使わず、磁場の式をそのまま蹴りとして入れ、トラッキングをすることも可能である。その際、運動方程式は

$$x'' = -f_x(x, y) + g(x, y)y', \quad (\text{A3-54})$$

$$y'' = -f_y(x, y) - g(x, y)x'$$

となるが、これを発散角の差分方程式に直す。 x_1 、

y_1 、 x'_1 、 y'_1 を蹴る前の座標と発散角、 x_2 、 y_2 、

x'_2 、 y'_2 を蹴った後として、

$$\begin{aligned} x'_2 - x'_1 &= -f_x(x_1, y_1) + g(x_1, y_1)y'_1, \\ y'_2 - y'_1 &= -f_y(x_1, y_1) - g(x_1, y_1)x'_1 \end{aligned} \quad (\text{A3-55})$$

とすると前章の永年項と同様、蹴る度に振動の大きさが増大する。1次元の場合は周回の転送行列の固有値が1を超えることに対応するが、多次元の場合、それを symplectic でなくなるという。すなわち、non-symplectic な写像では、誤差が位相空間の位相方向でなく、同径方向に蓄積してゆく。写像を symplectic とし、誤った振幅増大を防ぐには、

$$\begin{aligned} x'_2 - x'_1 &= -f_x(x_1, y_1) + g(x_1, y_1) \frac{y'_1 + y'_2}{2}, \\ y'_2 - y'_1 &= -f_y(x_1, y_1) - g(x_1, y_1) \frac{x'_1 + x'_2}{2} \end{aligned} \quad (\text{A3-56})$$

としなければならない。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{g(x_1, y_1)}{2}\right)^2} \\ &\cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{g(x_1, y_1)}{2} \\ -\frac{g(x_1, y_1)}{2} & 1 \end{pmatrix} \\ &\cdot \begin{pmatrix} x'_1 - f_x(x_1, y_1) + \frac{g(x_1, y_1)}{2} y'_1 \\ y'_1 - f_y(x_1, y_1) - \frac{g(x_1, y_1)}{2} x'_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A3-57})$$

一般化した挿入光源の場合、

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{k'_y}{4\rho_y^2} \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k_y^2} \sinh^2 k_y y \right) \sinh 2k'_y x \\ &+ \frac{1}{4\rho_x^2 k_x} \left(\cosh^2 k'_x y - \frac{k_x'^2}{k^2} \right) \sinh 2k_x x \end{aligned} \quad (\text{A3-58})$$

$$\begin{aligned} f_y &= \frac{k'_x}{4\rho_x^2} \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k_x^2} \sinh^2 k_x y \right) \sinh 2k'_x x \\ &+ \frac{1}{4\rho_y^2 k_y} \left(\cosh^2 k'_y y - \frac{k_y'^2}{k^2} \right) \sinh 2k_y x \end{aligned} \quad (\text{A3-59})$$

$$g = \frac{1}{\rho_x \rho_y k} \begin{pmatrix} \cosh k'_y x \cosh k_y y \\ \cosh k_x x \cosh k'_y y \\ -\frac{k'_x k'_y}{k_x k_y} \sinh k'_y x \sinh k_y y \\ \sinh k_x x \sinh k'_y y \end{pmatrix} \quad (\text{A3-60})$$

である。

4. 減衰のある強制振動の基礎

減衰のある強制振動について述べる。例えば、RF を電氣的な等価回路で記述すると、それは減衰のある強制振動となる。ここでは各種概念について、詳細は省いて紹介のみ行う。RF や導波管の場合、電磁場は固有モードの重ね合わせで書ける。各固有モードは減衰のある強制振動として記述でき、電氣的には LCR 回路における共振と等価になる。ここでは、例としてまず力学の場合について解き、次に電流で駆動される LCR 回路の場合を解く。RF を扱う場合、回路は閉じた回路ではなく、パワーが回路を流れてゆく様な、伝送線という概念が必要になる。そこで、伝送線と整合という概念を簡単に述べ、最後に等価回路による RF の扱いについて述べる。

4.1. ピルボックス空洞の固有モード

4.1.1. 弦の振動

2次元の場合を考える前に、1次元の簡単な例として弦の振動を考える。とはいえ、物理的に弦を記述することはそれほど単純ではない。弦を微小な部分に区切り、弦の変位が小さいとして、張力の垂直方向成分のみ取り出すと、方程式は

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (\text{A4-1})$$

と書ける。ただし、 T を弦の張力、 μ を線密度として、 $v = \sqrt{T/\mu}$ は弦の上の進行波の速度である。

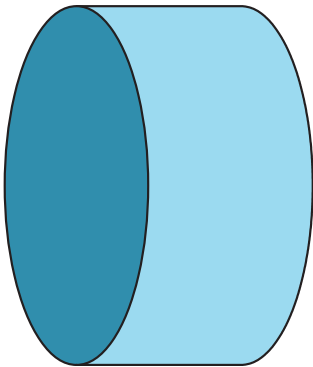


Fig. A4-1 ピルボックス型空洞

この方程式を解くと、

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad \omega_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} v \quad (\text{A4-2})$$

として、

$$f(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x\right) + b_n \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x\right) \right) \cos(\omega_n t) \quad (\text{A4-3})$$

となる。位置のみに注目すると、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \sin\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) + b_n \cos\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) \right) \quad (\text{A4-4})$$

であり、境界条件により、固定端の場合は \sin の項のみとなり、解放端の場合は \cos の項のみとなる。

1次元の弦の場合は \sin 、 \cos となるものが、空洞の場合は 2次元でベッセル関数となる。次の項でそれを示す。

4.1.2. 電磁場の方程式と境界条件

ピルボックス(pillbox)とは、薬のケースのことで、円筒形の最も簡単な形状 (図 A4-1) のことである。ピルボックス壁面における電磁場の境界条件は、

電場：接線方向の電場は連続、すなわち、

$$E_{1t} = E_{2t} \leftrightarrow \frac{D_{1t}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_2} \quad (\text{A4-5})$$

かつ、垂直方向の電束密度の差は表面電荷に等しく、

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \leftrightarrow \epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} = \rho_s \quad (\text{A4-6})$$

となる。

磁場：接線方向の磁場の差は表面電流に等しく、

$$\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s \leftrightarrow H_{1t} - H_{2t} = J_s \quad (\text{A4-7})$$

かつ、垂直方向の磁束密度は連続で、

$$B_{1n} = B_{2n} \leftrightarrow \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n} \quad (\text{A4-8})$$

となる。

空洞内を真空とすると、電磁場は波動方程式

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{A4-9})$$

を満たす。スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャル

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (\text{A4-10})$$

を使い、ローレンツゲージ

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (\text{A4-11})$$

をとると、波動方程式は以下のように書き直せる。

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (\text{A4-12})$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}.$$

空洞内部には電荷や電流はない為、

$$\rho = 0, \quad \vec{J} = 0 \quad (\text{A4-13})$$

である。

4.1.3. TM モードの解

空洞の長さを $L[m]$ 、半径を $R_c[m]$ 、ビーム進行方向を z とし、空洞は $0 \leq z \leq L$ に置かれているとする。粒子を加速する為には、縦方向、 z 方向に電場、横方向、すなわちビーム軸に巻き付くような回転方向に磁場が立つようなモードの電磁場が必要である。このようなモードを、TM (transverse magnetic) モードという。縦方向の磁場がゼロ $H_z = 0$ の下で、円筒座標系での波動方程式は、

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A4-14})$$

となる。

まず始めに、角度方向には対称で、 z 方向に依存しない解を求めてみる。すなわち、

$$E_z = R(r) \cos(\omega t) \quad (\text{A4-15})$$

となるような解である。方程式に代入すると、

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{\omega^2}{c^2} R = 0 \quad (\text{A4-16})$$

となるが、これはベッセル関数の方程式である。

$$E_z = E_0 J_0(k_r r) \cos(\omega t), \quad (\text{A4-17})$$

$$B_\theta = -\frac{E_0}{c} J_1(k_r r) \sin(\omega t)$$

が解である。ここで、スキンドープス(skin depth)は薄いとして、空洞内面の壁表面で電場の垂直方向成分がゼロになるという境界条件を課す。すなわち、 $r = R_c$ で $E_z = 0$ 、すなわち

$$J_0(k_r R_c) = 0 \quad (\text{A4-18})$$

でなければならない。ベッセル関数のゼロ点は、 $J_0(x) = 0 \leftrightarrow x = 2.405, 5.520, 8.645 \dots$

$$(\text{A4-19})$$

などを与えられるが、動径方向に節のない、波数が最小となる次数を考えれば、

$$k_r R_c = 2.405 \quad (\text{A4-20})$$

となる。振動数は

$$\omega = ck_r = \frac{2.405c}{R_c} \quad (\text{A4-21})$$

である。このモードを TM₀₁₀ モードという。1次元の弦の場合に sin であったものが、2次元ではベッセル関数 J_0 になることが分かる。

4.1.4. Q、U、P

空洞に関して重要なパラメータを定義する。空洞内の最大蓄積エネルギーを U 、単位時間あたりに空洞内壁の電氣的な抵抗で熱に変わるエネルギー損失を P とする。空洞の共振の強さを表す Q 値 (quality factor) を、

$$Q = \frac{\omega U}{P} \quad (\text{A4-22})$$

で定義する。

なお、ピルボックス型の場合、解析的に計算できて、

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{空洞内}} \vec{E}^2 d\tau = \frac{\pi \epsilon_0 L R_c^2}{2} E_0^2 J_1^2(2.405),$$

$$P = \frac{R_s}{2} \int_{\text{空洞壁上}} H^2 dS$$

$$= \pi R_c R_s \frac{\epsilon_0}{\mu_0} E_0^2 (L + R_c) J_1^2(2.405) (L + R_c)$$

$$(\text{A4-23})$$

となる。ここで、空洞内壁の電気伝導度を σ として、高周波に対する表面抵抗

$$R_s = \sqrt{\frac{\mu_0 \omega}{2\sigma}} \quad (\text{A4-24})$$

を使った。

4.1.5. TM モードの一般解

角度 θ 方向の節の数を m 、原点を除く動径 r 方向の節の数を n 、縦方向の周期数の2倍、すなわち縦方向が半波長の何倍かを p で表すことにする。TMモードの一般解は、

$$E_z = E_0 J_m(k_{mn} r) \cos(m\theta) \cos\left(\frac{p\pi}{L} z\right) \cos(\omega t)$$

$$E_r = -\frac{p\pi}{L} \frac{R_c}{x_{mn}} E_0 J'_m(k_{mn} r) \cdot \cos(m\theta) \sin\left(\frac{p\pi}{L} z\right) \cos(\omega t)$$

$$E_\theta = \frac{p\pi}{L} \frac{mR_c^2}{x_{mn}^2 r} E_0 J_m(k_{mn} r) \cdot \sin(m\theta) \sin\left(\frac{p\pi}{L} z\right) \cos(\omega t)$$

$$B_z = 0$$

$$B_r = \frac{mR_c^2}{x_{mn}^2 r c^2} E_0 J_m(k_{mn} r) \cdot \sin(m\theta) \cos\left(\frac{p\pi}{L} z\right) \sin(\omega t)$$

$$B_\theta = \frac{R_c}{x_{mn} c^2} E_0 J'_m(k_{mn} r) \cdot \cos(m\theta) \cos\left(\frac{p\pi}{L} z\right) \sin(\omega t)$$

(A4-25)

と書ける。ただし、 x_{mn} は以下のように与えられる。

	n=1	n=2	n=3
m=0	2.405	5.52	8.654
m=1	3.832	7.016	10.173
m=2	5.136	8.417	11.62

また、

$$k_{mn} = \frac{x_{mn}}{R_c}, \quad (\text{A4-26})$$

$$\omega = c \sqrt{k_{mn}^2 + k_z^2} = c \sqrt{k_{mn}^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2}$$

である。

4.1.6. TEモードの一般解

同様にして、TEモードの一般解は、

$$B_z = B_0 J_m(k_{mn} r) \cos(m\theta) \sin\left(\frac{p\pi}{L} z\right) \cos(\omega t)$$

$$B_r = \frac{p\pi}{L} \frac{R_c}{y_{mn}} B_0 J'_m(k_{mn} r) \cdot \cos(m\theta) \cos\left(\frac{p\pi}{L} z\right) \cos(\omega t)$$

$$B_\theta = -\frac{p\pi}{L} \frac{mR_c^2}{y_{mn}^2 r} B_0 J_m(k_{mn} r) \cdot \sin(m\theta) \cos\left(\frac{p\pi}{L} z\right) \cos(\omega t)$$

$$E_z = 0$$

$$E_r = -\frac{mR_c^2}{y_{mn}^2 r} B_0 J_m(k_{mn} r) \cdot \sin(m\theta) \sin\left(\frac{p\pi}{L} z\right) \sin(\omega t)$$

$$E_\theta = \frac{R_c}{y_{mn}} B_0 J'_m(k_{mn} r) \cdot \cos(m\theta) \sin\left(\frac{p\pi}{L} z\right) \sin(\omega t)$$

(A4-27)

となる。 y_{mn} は以下のように与えられる。

	n=1	n=2	n=3
m=0	3.832	7.016	10.174
m=1	10.841	5.331	8.536
m=2	3.054	6.706	9.97

同じく、

$$k_{mn} = \frac{y_{mn}}{R_c}, \quad (\text{A4-28})$$

$$\omega = c \sqrt{k_{mn}^2 + k_z^2} = c \sqrt{k_{mn}^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2}$$

である。

4.2. 等価回路の導入

ベクトルポテンシャルを使って、固有モード展開する。

$$\vec{A} = \sum_n q_n(t) \vec{A}_n(\vec{r}) \quad (\text{A4-29})$$

各モードは、ヘルムホルツの方程式

$$\nabla^2 \vec{A}_n + \left(\frac{\omega_n}{c}\right)^2 \vec{A}_n = 0 \quad (\text{A4-30})$$

を満たす。マックスウェル方程式

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} \quad (\text{A4-31})$$

に代入し、両辺に $\int_{\text{空洞内}} d\tau \vec{A}_m \cdot$ を作用させて積分

すると、直交条件

$$\int_{\text{空洞内}} \vec{A}_m \cdot \vec{A}_n d\tau = 2\delta_{mn} \frac{U_m}{\epsilon_0} \omega_m^2 \quad (\text{A4-32})$$

より、

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\int \vec{J} \cdot \vec{A}_n d\tau}{\int \vec{A}_n^2 d\tau} \quad (\text{A4-33})$$

となる。空洞内壁のエネルギーロスの項を入れれば、

$$\ddot{q}_n + \frac{\omega_n}{Q} \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\int \vec{J} \cdot \vec{A}_n d\tau}{\int \vec{A}_n^2 d\tau} \quad (\text{A4-34})$$

となり、すなわち、これは減衰のある強制振動の式である。RF は、各モード毎に LCR 共振回路を等価回路として扱うことができる。なお、モード毎に回路定数は異なる値となる。

4.3. 減衰のある強制振動

RF の等価回路を解く前に、力学の場合と簡単な回路の場合を準備として考えてみる。

4.3.1. 強制力のない減衰振動

減衰のある単振動の方程式は、

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \quad (\text{A4-35})$$

である。振動のエネルギーの減衰時間を

$$\gamma = \frac{b}{m} \quad (\text{A4-36})$$

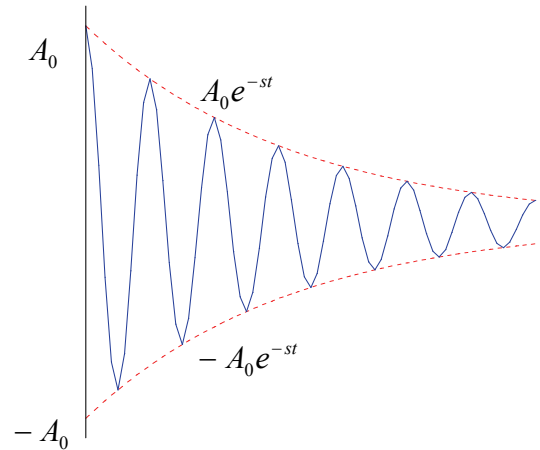


図 A4-2 減衰振動

減衰のない時の角振動数を

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{A4-37})$$

とすると、方程式は

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (\text{A4-38})$$

となる。この方程式を解く。解として複素関数

$$z = A_0 \exp i(pt + \alpha) \quad (\text{A4-39})$$

を仮定し、実際の解はその実部 $x = \text{Re}(z)$ だとする。また、 α と p は複素数とする。方程式に代入すると、

$$-p^2 + i\gamma p + \omega_0^2 = 0 \quad (\text{A4-40})$$

となる。

$$p = \omega + is$$

と実部と虚部に分解し、方程式も実部と虚部に分ける。 ω と s は実数とする。方程式は

$$s^2 - \omega^2 + \omega_0^2 - s\gamma = 0 \quad (\text{A4-41})$$

$$-2\omega s + \omega\gamma = 0$$

となり、従って、

$$s = \frac{\gamma}{2}, \quad (\text{A4-42})$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

となり、解は

$$x = A_0 e^{-st} \cos(\omega t + \alpha) \quad (\text{A4-43})$$

となる。この解は、振幅が指数関数的に減衰する振動を表している (図 A4-2)。また、振動のエネルギーは振幅の2乗なので、

$$E = \frac{k}{2} A^2 = \frac{k}{2} A_0^2 e^{-2\gamma t} \propto e^{-\gamma t} \quad (\text{A4-44})$$

と、時定数 γ で減衰する。

方程式と解を ω_0 と $Q = \frac{\omega_0}{\gamma}$ で書き直すと、

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (\text{A4-45})$$

$$\leftrightarrow x = A_0 \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q} t\right) \cos(\omega t + \varepsilon)$$

ただし、

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad (\text{A4-46})$$

となる。図 A4-3 にいくつかの Q に対する振動の様子を示す。 Q が大きい場合、減衰の効果が小さく、振動が長く続くことが分かる。

4.3.2. 減衰のない強制振動

次に、減衰のない強制振動について考える。

方程式は

$$m\ddot{x} + kx = F \cos \omega t \quad (\text{A4-47})$$

である。斉次解は単振動であるので、特別解を求

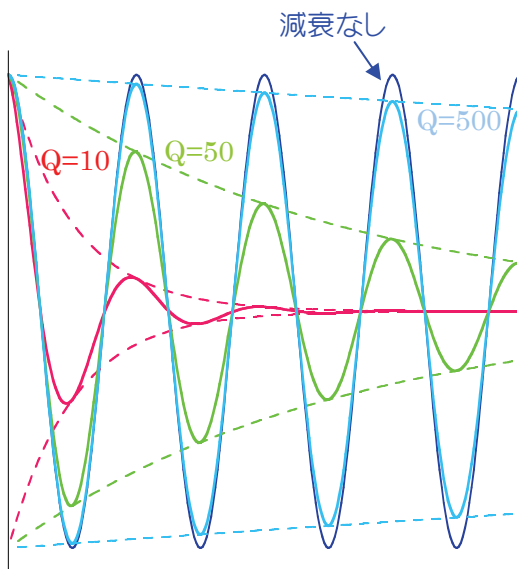


図 A4-3 減衰と Q 値

める。前項と同様に $z = A_0 \exp i(pt + \alpha)$ 、強制力も $\tilde{F} = Fe^{\omega t}$ とおいて代入する。 α と p は実数であるとする。実部と虚部に分けた方程式は、

$$\omega_0^2 - p^2 = \frac{F}{mA_0} \cos((\omega - p)t - \alpha) \quad (\text{A4-48})$$

$$0 = \frac{F}{mA_0} \sin((\omega - p)t - \alpha)$$

となる。下の虚部の式より、 $p = \omega$ 、

$$\sin \alpha = 0 \quad (\text{A4-49})$$

上の実部の式より

$$\omega_0^2 - \omega^2 = \frac{F}{mA_0} \cos(\alpha) \quad (\text{A4-50})$$

となる。 $\cos \alpha = \pm 1$ のどちらかであり、

$$\omega_0 > \omega \rightarrow \alpha = 0, \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{F}{mA_0} \quad (\text{A4-51})$$

$$\omega_0 < \omega \rightarrow \alpha = \pi, \quad \omega^2 = \omega_0^2 + \frac{F}{mA_0}$$

となる。

$$A = \frac{F}{m \omega_0^2 - \omega^2} \quad (\text{A4-52})$$

である。完全解は、

$$x = A_0 \cos(\omega_0 t + \delta) + \frac{F}{m} \left| \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \right| \cos(\omega t)$$

となる。強制力の振動数が系の振動数より速い場合に振動の位相が反転する様子の例を、図 A4-4 に示す。紐に付けた重りを手に持ってゆっくり揺らすと、揺らした方向に重りが振動するが、左右

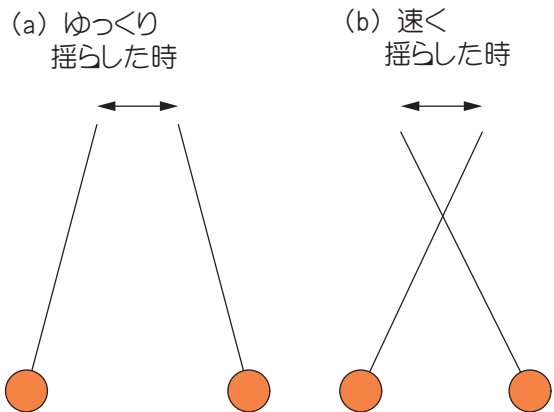


図 A4-4 強制力の振動数と位相の反転

に速く動かすと、手の動きと重りの動きは逆になる。

4.3.3. 減衰を伴う強制振動

減衰のある強制振動の方程式は、

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F \cos \omega t \quad (\text{A4-53})$$

である。この方程式を解く時、初期状態から始めて過渡現象として解を求めることもできるが、ここでは、十分に時間が経ち、初期値の影響が減衰によって消え、減衰と強制振動が釣り合った定常状態になった後の解を求めることとする。振動数は強制振動の振動数に等しいが、振動の位相が遅れているという仮定を置く。すなわち、解を

$$z = A_0 \exp i(\omega t - \delta) \quad (\text{A4-54})$$

とおく。仮定から、 ω と δ は実数とする。方程式は、

$$\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F}{m} e^{i\omega t} \quad (\text{A4-55})$$

解を代入して、

$$\omega_0^2 - \omega^2 = \frac{F}{mA_0} \cos \delta \quad (\text{A4-56})$$

$$\omega\gamma = \frac{F}{mA_0} \sin \delta$$

これは、ベクトル的に書くと図 A4-5 の様になる。従って、定常状態の振幅と位相の遅れは、

$$A(\omega) = \frac{\frac{F}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}} \quad (\text{A4-57})$$

$$\tan \delta = \frac{\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

となる。 Q を使って書けば、

$$A(\omega) = \frac{F}{m\omega_0^2} \frac{\frac{\omega_0}{\omega}}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}}} \quad (\text{A4-58})$$

$$\tan \delta = \frac{\frac{1}{Q}}{\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}}$$

である。

ちなみに、強制振動の振動数を変化させた場合の、定常状態での振幅は、

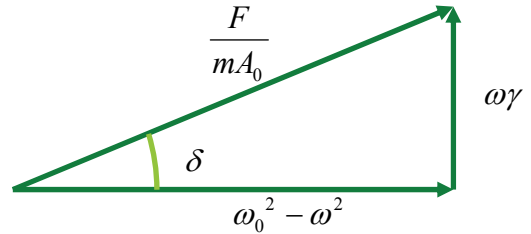


図 A4-5 強制力と振動の位相関係

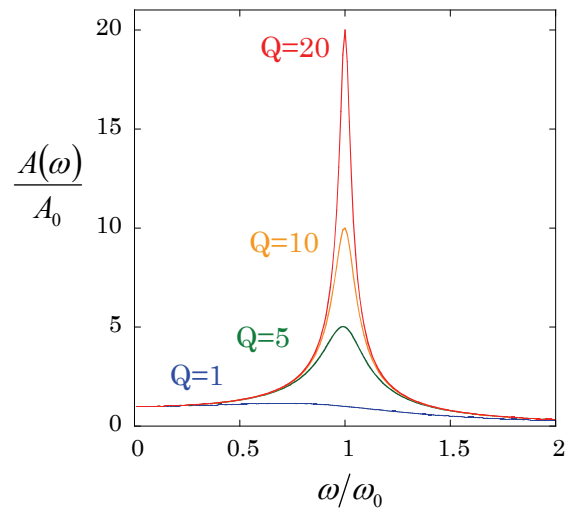


図 A4-6 Q 値と振幅

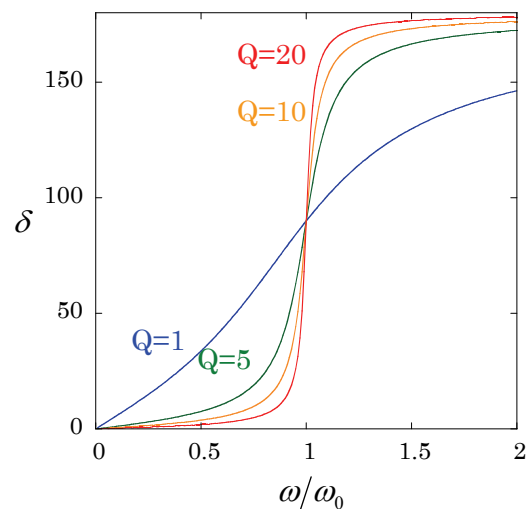


図 A4-7 Q 値と位相遅れ

$$\frac{dA}{d\omega} = 0 \leftrightarrow \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad (\text{A4-59})$$

で最大値

$$A_{\max} = \frac{F}{m} \frac{Q}{\omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \quad (\text{A4-60})$$

をとる。なお、

$$Q < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{A4-61})$$

の場合、系の振動数が遅すぎて外力の速さに系がついていかない様な場合に相当するが、スペクトルにピークはなく、外力の振動数の増加に従って振幅は単調に減少する。いくつかの Q において、外力の振動数に対する定常状態の振幅を図 A4-6 に、位相遅れを図 A4-7 に示す。

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \approx 1 \quad (\text{A4-62})$$

の時に最大振幅

$$\frac{A_{\max}}{A_0} = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \approx Q \quad (\text{A4-63})$$

をとることが分かる。

Q が大きい場合、共鳴によって励起される振動の振幅は非常に大きくなる。例えば、強制力がある時間の間だけ働き、振動が励起され、その後、働かなくなって振動が減衰する、という様な現象を考えた場合、 Q が大きいと共鳴によって大きな振動が励起され、強制力が切れた後もなかなか減衰せずに長く残る。

完全解は、減衰振動の式を足し合わせて、

$$x = A_0 \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \cos(\omega t + \varepsilon) + \frac{F}{m\omega_0^2} \frac{\frac{\omega_0}{\omega}}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}}} \cos(\omega t - \delta) \quad (\text{A4-64})$$

となる。

4.3.4. 電流で駆動される LCR 共振回路

電流で駆動される LCR 共振回路 (図 A4-8) を考える。各要素の電流と電圧の式

$$I = I_R + I_C + I_L, \quad (\text{A4-65})$$

$$V = L \frac{dI_L}{dt} = RI_R = \frac{Q}{C}, \quad (\text{A4-66})$$

$$I_C = \frac{dQ}{dt}$$

より、方程式は

$$\dot{I} = \frac{V}{L} + \frac{\dot{V}}{R} + C\ddot{V} \quad (\text{A4-67})$$

となる。この方程式は V について強制力のある減衰振動になっており、力学との違いは強制力が電流の微分であるという点のみである。方程式を書き換えて、

$$\ddot{V} + \frac{1}{RC}\dot{V} + \frac{1}{LC}V = \frac{\dot{I}}{C} \quad (\text{A4-68})$$

である。ここで、

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

$$U = \frac{1}{2}CV_0^2,$$

$$P = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{R},$$

$$Q = \frac{\omega_0 U}{P} = \omega_0 RC$$

を使えば、

$$\ddot{V} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{V} + \omega_0^2 V = \frac{\dot{I}}{C} \quad (\text{A4-70})$$

となる。

方程式を解く為に

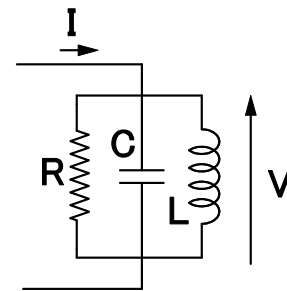


図 A4-8 LCR 共振回路

$$I = I_0 e^{i\omega t}, \quad (A4-71)$$

$$V = V_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$$

とおいて代入する。

$$\omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\omega \omega_0}{Q} = i \frac{I_0}{CV_0} \omega e^{-i\varphi} \quad (A4-72)$$

位相関係を図に示すと図 A4-9 の様になる。デチューニングファクター(detuning factor)

$$y = Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \quad (A4-73)$$

を導入すると、

$$\tan(-\varphi) = -\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\frac{\omega \omega_0}{Q}} = y, \quad (A4-74)$$

$$V_0 = \frac{RI_0}{\sqrt{1+y^2}} = RI_0 \cos \varphi$$

となる。従って、解は

$$I = I_0 e^{i\omega t}, \quad (A4-75)$$

$$V = \frac{RI_0}{\sqrt{1+y^2}} e^{i(\omega t + \varphi)} = RI_0 \cos \varphi e^{i(\omega t + \varphi)}$$

となる。すなわち、デチューンされると、大きさが $\cos \varphi$ 倍となり、位相が φ ずれるということになる。

力学の場合と異なり、

$$\frac{dV}{d\omega} = 0 \leftrightarrow \omega = \omega_0 \quad (A4-76)$$

で共鳴が起こる。また、周波数は L と C で決まるため、抵抗値が変化しても、 Q は変化するが共振周波数は変化しない。

ここで、インピーダンス(impedance)を導入する。インピーダンスの定義は、

$$V = ZI \quad (A4-77)$$

となる Z で、複素数として一般化した抵抗のようなものである。この LCR 回路のインピーダンスは、

$$e^{i\varphi} = \frac{1-iy}{\sqrt{1+y^2}} \quad (A4-78)$$

を使って、

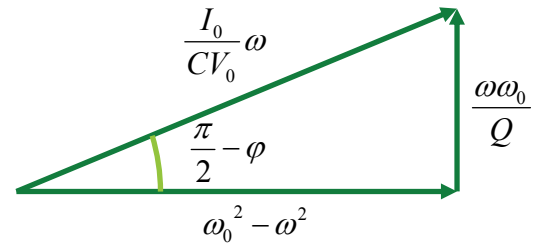


図 A4-8 LCR 回路の位相関係

$$Z = \frac{R \cdot e^{i\varphi}}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{R}{1+iy} \quad (A4-79)$$

と書ける。 $\omega = \omega_0$ の共鳴上 (on-resonance) の場合、 $y = 0$ で $Z = R$ となる。共鳴状態にいる場合、抵抗の効果のみを考えればよいことが分かる。また、インピーダンスの逆数をアドミッタンス(admittance)という。一般化した電気容量のような値であるが、

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1+iy}{R} \quad (A4-80)$$

となる。

ちなみに、インピーダンスをフーリエ変換した値

$$W(t) = \int Z(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (A4-81)$$

を航跡場ポテンシャル (wake potential) という。LCR 回路の場合を計算すると、

$$W(t) = \frac{\omega_0 R}{Q} e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\cos(\omega_1 t) - \frac{1}{\tau \omega_1} \sin(\omega_1 t) \right) \quad (A4-82)$$

となる。ただし、

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}, \quad (A4-83)$$

$$\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$$

である。ウェイクポテンシャルは、系にデルタ関数的な電流

$$I(t) = q \delta(t) \quad (A4-84)$$

を加えた時の電圧の応答

$$V(t) = W(t)q \quad (A4-85)$$

を表すグリーン関数ということもできる。

4.4. 反射と整合

4.4.1. 伝送線

RF 源まで考えた場合、等価回路は閉じた回路ではなく、パワーが流れて行くような回路、すなわち伝送線概念が必要になる。同軸ケーブル、フィーダー線、導波管など、全て伝送線である。ここでは、伝送線という概念の紹介を目的として、話の流れのみ、辿る。なお、伝送線の理論は戦時中にレーダーや通信などを行う目的で発展したものである。RF 空洞と同様、伝送線上で電磁場の方程式を解き、固有モード分解し、等価回路を導入すると、まずは図 A4-9(a)のような離散的にインピーダンスが存在する回路となる。添字の **s** と **p** は **shunt** と **parallel** であるが、どちらも訳すと並列である。(直列は **series**。) 各ブロック毎に電圧と電流を考え、差分方程式を立てて連続極限をとる。パワーの流れる方向(添字 **s**)の単位長さあたりの抵抗成分を R 、インダクタンスを L 、パワーに対して並列(添字 **p**)な電気容量成分を C 、抵抗成分を G と書くと、伝送線上の各部分の電流 i と電圧 v は、伝送線上の距離 z と時間 t

の関数として、

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = RGv + (RC + LG) \frac{\partial v}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (\text{A4-86})$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = RGi + (RC + LG) \frac{\partial i}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

という方程式を満たすことが示される。

入力が正弦波の場合、すなわち

$$v = Ve^{i\omega t}, \quad (\text{A4-87})$$

$$I = Ie^{i\omega t}$$

という場合、方程式は結局、

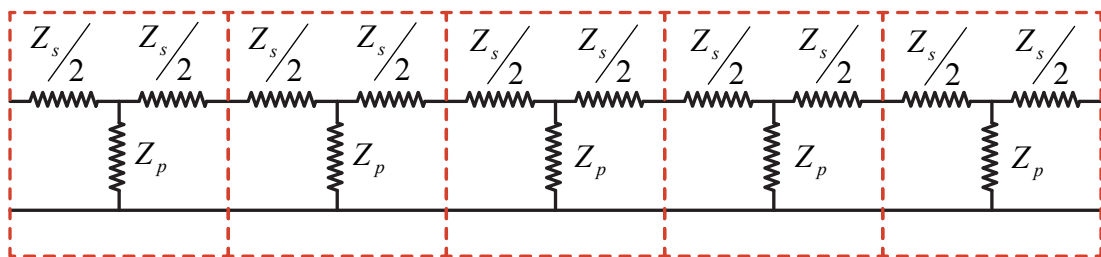
$$\frac{dV}{dz} = -ZI, \quad (\text{A4-88})$$

$$\frac{dI}{dz} = -YV$$

となる。すなわち、伝送線は全体をまとめて1つのインピーダンスまたはアドミタンスで扱うことができる。RF 源に伝送線を繋ぐと、RF 源からはインピーダンスが1個ぶら下がったことと等価である。実際は伝送線の先に RF 空洞が繋がるが、空洞も1個のインピーダンスとして扱える。

方程式を組み合わせると、

(a) インピーダンスの連続としての伝送線



(b) 伝送線上の各ブロックを流れる電流と電圧

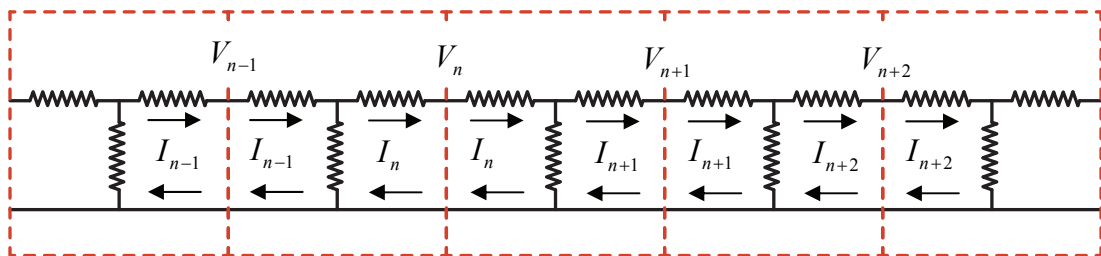


図 A4-9 伝送線の等価回路

$$\frac{d^2V}{dz^2} = \gamma^2 V, \quad (\text{A4-89})$$

$$\frac{d^2I}{dz^2} = \gamma^2 I$$

という波動方程式が得られる。 γ を伝送線の伝搬定数といい、具体的な回路を示さないのであまり意味はないが、

$$\gamma = \sqrt{(R+i\omega L)(G+i\omega C)}$$

である。この実部を減衰定数、虚部を位相定数という。方程式の解は

$$V = V_1 e^{-\gamma z} + V_2 e^{\gamma z}, \quad (\text{A4-90})$$

$$I = \frac{1}{Z} (V_1 e^{-\gamma z} - V_2 e^{\gamma z})$$

となり、すなわち、右向きの波と左向きの波の重ね合わせとなる。

例えば矩形の導波管内の電磁波の場合、電場が水平方向、磁場が垂直方向とすると、方程式は

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} = \gamma^2 E_x, \quad (\text{A4-91})$$

$$\frac{d^2 H_y}{dz^2} = \gamma^2 H_y$$

となることが示される。ただし、

$$\gamma = \sqrt{i\omega\mu(\sigma + i\omega\varepsilon)}, \quad (\text{A4-92})$$

$$Z = \frac{i\omega\mu}{\gamma}$$

である。導波管中の透磁率、誘電率、表面抵抗などを使ったが、詳細は触れない。

4.4.2. 反射

伝送線はまとめて1個のインピーダンスとして扱える。インピーダンス Z_c の伝送線の終端を、インピーダンス Z_l で終端したとする (図 A4-10)。

$$\text{伝送線は無損失} \quad G=0, R=0 \quad (\text{A4-93})$$

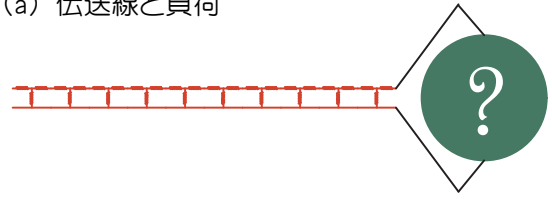
$$\text{とする。伝搬定数は} \quad \gamma = i\omega\sqrt{LC} \quad (\text{A4-94})$$

であり、減衰は生じない。

$$\beta = \omega\sqrt{LC} \quad (\text{A4-95})$$

とおけば、

(a) 伝送線と負荷



(b) 等価回路

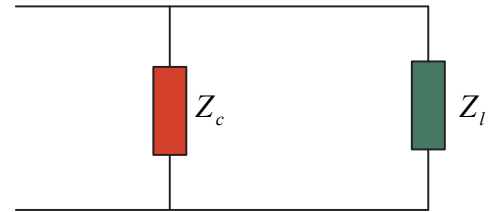


図 A4-10 伝送線と負荷の等価回路

$$V = V_1 e^{-i\beta z} + V_2 e^{i\beta z}, \quad (\text{A4-96})$$

$$I = \frac{1}{Z} (V_1 e^{-i\beta z} - V_2 e^{i\beta z})$$

となる。

伝送線を伝わる方向、入射波が V_1 、伝送線を戻ってくる方向、反射波が V_2 である。入射波と反射波の振幅の比

$$\Gamma = \frac{V_2}{V_1} \quad (\text{A4-97})$$

を反射係数という。終端部分を原点 $z=0$ とすれば、

$$Z_l = \frac{V(0)}{I(0)} = \frac{V_1 + V_2}{\frac{1}{Z_c}(V_1 - V_2)} = Z_c \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} \quad (\text{A4-98})$$

より、

$$\Gamma = \frac{Z_l - Z_c}{Z_l + Z_c} \quad (\text{A4-99})$$

となる。入力電力は

$$P_+ = \frac{|V_1|^2}{Z_c} \quad (\text{A4-100})$$

反射電力は

$$P_- = \frac{|V_2|^2}{Z_c} = P_+ \Gamma^2 \quad (\text{A4-101})$$

である。一般の場合、 Γ は複素数であり、反射によって振幅と位相の両者が変化する。

4.4.3. 整合、開放と短絡

$Z_l = Z_c$ の場合、反射係数はゼロであり、反射が起こらない。この状態を整合が取れているという。整合が取れている場合、伝送線の長さに依らず、終端部分の無負荷端子電圧 $V(0)$ は変化しない。また、反射がないことを、伝送線が無限に長いと見なすこともできる。50ΩのBNCケーブルに50Ωの終端抵抗をつけた場合、インピーダンス整合がとれた状態になる為、信号の反射が起こらない。無限に長いBNCケーブルを繋いだのと同じである。なお、整合が取れている場合、入射電力が一定であれば負荷に最大の電力を送り込んでいる状態となる。

RFなどでサーキュレータで反射波を逃がす場合、RF源側から導波管を見ると、反射がない為、常に整合状態となっているように見える。

終端に何も繋いでいない、開放端の場合、すなわち $Z_l = \infty$ の場合、反射係数は1であり、全反射となる。

$$I(0) = 0, \quad (A4-102)$$

$$V_1 = V_2 = \frac{V_l}{2}$$

であり、

$$V(z) = V_l \cos \beta z, \quad (A4-103)$$

$$I(z) = i \frac{V_l}{Z_c} \sin \beta z$$

となる。すなわち、伝送線上で、

$$z = 0, \frac{n\lambda}{2} \quad (A4-104)$$

の時、

$$I = 0, |V| = V_{\max} = 2V_l \quad (A4-105)$$

で開放状態、

$$z = \frac{n\lambda}{4}, \frac{3n\lambda}{4} \quad (A4-106)$$

の時、

$$V = 0, |I| = I_{\max} = \frac{2V_l}{Z_c} \quad (A4-107)$$

で短絡状態となる。短絡状態になっている伝送線の断面上を、**detuned short**面という。導波管の場合、導波管の進行方向に対して垂直な成分の電場がゼロ、磁場が最大になっている面である。

終端を短絡した場合、すなわち $Z_l = 0$ の場合、反射係数は-1であり、やはり全反射となる。 $V(0) = 0,$

$$V_1 = -V_2 \quad (A4-108)$$

$$I(0) = I_l = \frac{2V_l}{Z_c}$$

であり、

$$V(z) = iZ_c I_l \sin \beta z, \quad (A4-109)$$

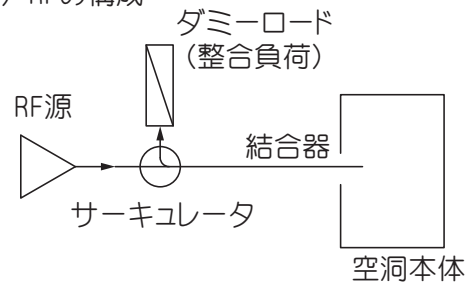
$$I(z) = I_l \cos \beta z$$

となる。伝送線上で短絡状態と開放状態が $\frac{\lambda}{4}$ 毎に繰り返されるのは同じであるが、場所が入れ替わる。

4.5. 等価回路によるRFの取り扱い

RF系の構成と等価回路を図A4-11に示す。RF源から出たRFは、導波管、サーキュレータ、

(a) RFの構成



(b) 等価回路

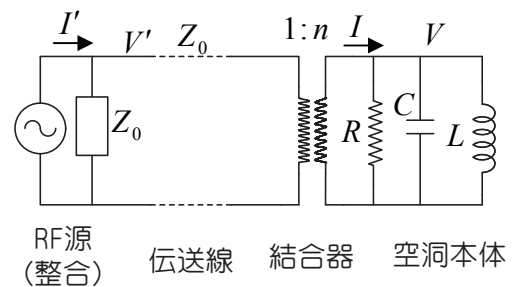


図 A4-11 RF の等価回路

導波管を通り、結合器を介して空洞に供給される。空洞から反射があったとしても、サーキュレータがダミーロードに逃がしてしまうので、空洞側から見た回路と RF 源から見た回路は一致しない。

導波管のインピーダンスを Z_0 とおく。反射が一切ないため、RF 源からは、結合器を通して見た空洞のインピーダンスは整合されたインピーダンス Z_0 に見える。一方、空洞からは結合器を通じて見た導波管のインピーダンス Z_0 が見えているが、空洞のインピーダンス Z_c と一致しない場合、RF は反射する。

導波管のインピーダンスを Z_0 、RF は導波管終端の LCR 共振回路として、結合器は $1:n$ のトランスとして扱う。結合器を通さないで見た値にはダッシュをつけることにする。すなわち、

$$V = nV', \quad (A4-110)$$

$$I = \frac{I'}{n}$$

であり、空洞のインピーダンスは

$$Z_c = \frac{V}{I} = n^2 \frac{V'}{I'} = n^2 Z'_c \quad (A4-111)$$

である。LCR 共振回路として要素毎に見ると、

$$Z_c = \frac{1}{i\omega C + \frac{1}{i\omega L} + \frac{1}{R}}, \quad (A4-112)$$

$$Z'_c = \frac{1}{n^2} \frac{1}{i\omega C + \frac{1}{i\omega L} + \frac{1}{R}}$$

である。蓄積エネルギーとパワー損失は、

$$U = \frac{n^2 C V'^2}{2}, \quad (A4-113)$$

$$P_c = \frac{n^2 V'^2}{2R}$$

となる。導波管によるパワー損失は、

$$P_{ex} = \frac{V'^2}{2Z_0} \quad (A4-114)$$

である。ただし、RF 源の周波数と RF 空洞の周波数は一致しており、共鳴上 (on-resonance) にあるとする。その場合、共振回路は抵抗だけと思ってもよく、その抵抗値を Z_0 とする。空洞による

パワー損失に対する Q_0 を unloaded Q という。外部 (導波管) によるパワー損失に対する Q_{ex} を external Q、両者の損失を考えた Q_L を loaded Q という。それぞれ、

$$Q_0 = \frac{\omega_0 U}{P_c} = \omega_0 R C, \quad (A4-113)$$

$$Q_{ex} = \frac{\omega_0 U}{P_{ex}} = \omega_0 n^2 Z_0 C,$$

$$Q_L = \frac{\omega_0 U}{P_c + P_{ex}} = \frac{1}{\frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{ex}}}$$

となる。また、結合定数を

$$\beta = \frac{P_{ex}}{P_c} = \frac{Q_c}{Q_{ex}} = \frac{R}{n^2 Z_0} \quad (A4-114)$$

とする。

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1 + \beta}{Q_0} \quad (A4-115)$$

が成り立つ。 $\beta < 1$ の場合、 $P_{ex} < P_c$ 、 $Q_{ex} > Q_c$ で弱結合 (under coupled)、 $\beta > 1$ の場合、 $P_{ex} > P_c$ 、 $Q_{ex} < Q_c$ で強結合 (over coupled)、 $\beta = 1$ の場合、 $P_{ex} = P_c$ 、 $Q_{ex} = Q_c$ で critically coupled という。

RF 源から空洞側を見ると、サーキュレータの為に反射が戻って来ない為、導波管と空洞は常に整合が取れているように見える。それは、 $\beta = 1$ で空洞と RF 源の周波数が等しい on-resonance 場合、すなわち結合器を通して空洞と導波管の整合が取れている場合に相当するが、まずは実際にそのような場合について扱う。サーキュレータなしでも反射波は存在しない場合、空洞自身も単なる抵抗と見なすことができ、整合終端負荷は導波管と同じ Z_0 、流れる電流は $\frac{I}{2}$ である。導波管で

消費されるパワーと空洞で消費されるパワーは等しく、

$$P_+ = \frac{1}{2} Z_0 \left(\frac{I'}{2} \right)^2 = \frac{Z_0 I'^2}{8} \quad (A4-115)$$

となる。

実際の整合状態にかかわらず、反射波はサーキュレータで逃がされるため、RF 源は常にこの

パワーを出し続けることになる。従って、空洞側に供給される電流とパワーは on-resonance の場合、常に、

$$I = \frac{I'}{n} = I' \sqrt{\frac{\beta Z_0}{R}}, \quad (A4-116)$$

$$P_+ = \frac{Z_0 I'^2}{8} = \frac{R I^2}{8\beta}$$

となる。

次に、空洞側から見た場合、反射がある場合について考える。空洞側から見ると、導波管の抵抗は

$$n^2 Z_0 = \frac{R}{\beta} \quad (A4-117)$$

であり、これが空洞の抵抗値と並列に存在することになる。導波管と空洞をあわせた合成抵抗は

$$\frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{\beta}{R}} = \frac{R}{1 + \beta} \quad (A4-118)$$

である。従って、電圧は

$$V = \frac{R}{1 + \beta} I = \sqrt{P_+ r_s} \frac{2\sqrt{\beta}}{1 + \beta} \quad (A4-119)$$

となる。ここで、空洞のシャントインピーダンス

$$r_s = \frac{V^2}{P} = \frac{R}{2} \quad (A4-120)$$

を使った。反射係数は

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{\frac{R}{n^2} - Z_0}{\frac{R}{n^2} + Z_0} = \frac{\beta - 1}{\beta + 1} \quad (A4-121)$$

であり、結合器で跳ね返されるパワーは

$$P_- = P_+ \Gamma^2$$

となる。従って、実際に空洞に供給されるパワーは、

$$P_c = P_+ - P_- = P_+ \frac{4\beta}{(1 + \beta)^2} \quad (A4-122)$$

となる。当然ながら、これは整合状態 $\beta = 1$ で最大となる。

4.6. ビーム負荷の補正

ビームが存在する場合、ビームは RF 源と同様に空洞内に電圧を発生させる。位相を含めて、

ビームからの電圧と、RF 源からの電圧の和が空洞に生じる電圧となるが、RF 源からそれを見ると、整合状態ではなくなってしまう。ビーム有りて反射のない状態にする為には、RF 源の周波数を空洞の共振周波数からずらし、かつ、結合定数を最適化する必要がある。ここでは、ビームの影響を補正する為のデチューン及び結合定数の最適化について述べる。

減衰のある強制振動項で述べたとおり、外力の周波数と系の共振周波数が違う場合、外力と系に生じる振動との間には位相差と大きさの差が生じる。空洞の周波数を ω_0 、外力である RF 源の周波数を ω とする。空洞内に立つ電場の周波数は外力と同じ ω であり、これがマスターオシレータからの周波数である。RF 源からの電流を

$$i_g = i_{0g} e^{i\omega t} \quad (A4-123)$$

とする。空洞の電圧は、(A4-75)に結合器の影響を考慮して、

$$V = \frac{R}{1 + \beta} \frac{i_{0g}}{\sqrt{1 + y^2}} e^{i(\omega t + \varphi)} \quad (A4-124)$$

となる。デチューニングファクターは

$$y = Q_L \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \quad (A4-125)$$

位相差は

$$\tan \varphi = -y \quad (A4-126)$$

となる。

デチューンなし $\beta = 1$ の時のビームの作る空洞電圧を V_{br} 、RF 源の作る空洞電圧を V_{gr} 、空洞内部の電圧の和を

$$\vec{V}_{cr} = \vec{V}_{gr} + \vec{V}_{br} \quad (A4-127)$$

とする。デチューン角を φ とし、デチューンした後のビームの作る空洞電圧を V_b 、RF 源の作る空洞電圧を V_g 、空洞内部の電圧の和を

$$\vec{V}_c = \vec{V}_g + \vec{V}_b \quad (A4-128)$$

とする。ビーム電流 $-i_b$ を横軸にし、各電圧の位相と大きさを書いた図をフェーザダイアグラム (図 A4-12) という。加速位相を ϕ とする。ビ

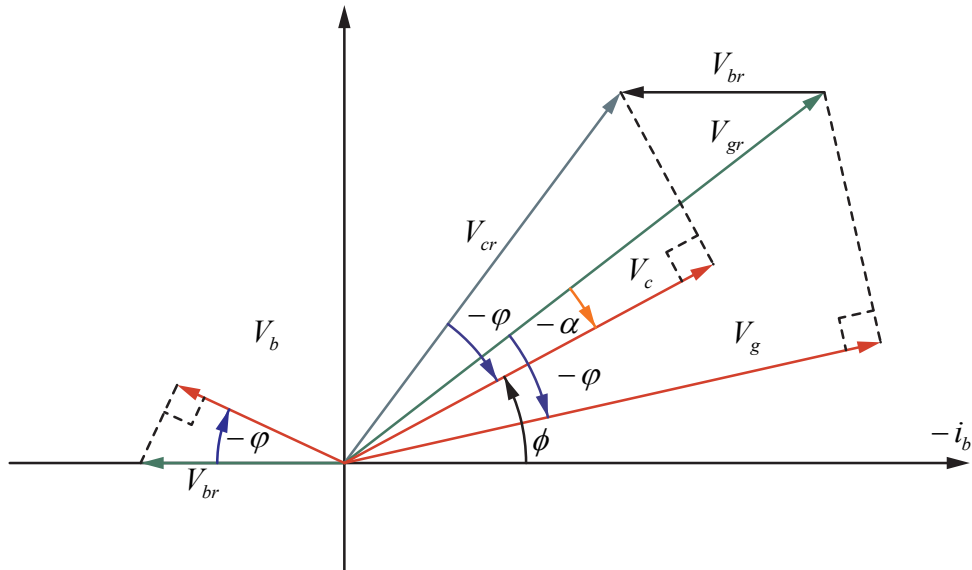


図 A4-12 フェーザーダイアグラム

ームの感じる加速電圧は、 $V_c \cos \phi$ である。各電圧を複素数として書くことにすると、デチューン後の電圧は大きさが $\cos \phi$ 倍、位相が ϕ ずれるので、

$$V_g = (V_{gr} \cos \phi) e^{i\phi}, \quad (A4-129)$$

$$V_c = (V_{cr} \cos \phi) e^{i\phi}$$

と書ける。一方、

$$V_{gr} = \sqrt{P_+ r_s} \frac{2\sqrt{\beta}}{1+\beta} \quad (A4-130)$$

より、

$$P_+ = \frac{(1+\beta)^2}{4\beta r_s} V_{gr}^2 \quad (A4-131)$$

となる。ここで、各ベクトルを V_c に平行な成分と垂直な成分に分けて考える。

$$V_{gr} \cos \alpha = V_{cr} \cos \phi - V_{br} \cos(\pi - \phi), \quad (A4-132)$$

$$V_{gr} \sin \alpha = V_{cr} \sin \phi + V_{br} \sin(\pi - \phi)$$

より、

$$\tan \alpha = \frac{V_{cr} \sin \phi + V_{br} \sin \phi}{V_{cr} \cos \phi + V_{br} \cos \phi} \quad (A4-133)$$

となる。また、

$$V_{gr} = \frac{V_{cr} \cos \phi + V_{br} \cos \phi}{\cos \alpha} \quad (A4-134)$$

より、

$$P_+ = \frac{(1+\beta)^2}{4\beta r_s} \left(\frac{V_{cr} \cos \phi + V_{br} \cos \phi}{\cos \alpha} \right)^2 \quad (A4-135)$$

より、これが最小になるのは、

$$\alpha = 0 \quad (A4-136)$$

の時である。この場合をオプティマムチューニング (optimum tuning) という。この時、

$$V_{gr} \sin \alpha = V_{cr} \sin \phi + V_{br} \sin \phi = 0 \quad (A4-137)$$

より、デチューン角は

$$\sin \phi = -\frac{V_{br} \sin \phi}{V_{cr}} = -\frac{V_{br} \sin \phi}{V_c} \cos \phi \quad (A4-138)$$

従って、

$$\tan \phi = -\frac{V_{br} \sin \phi}{V_c} \quad (A4-139)$$

を満たす。この時を optimum detuning という。通常、 $\phi > 0$ なので、 $\phi < 0$ 、すなわち、空洞の共振周波数を RF 源の周波数よりも低くしておくことになる。電流が増加するに従い、その差も大きくしていく必要がある。また、

$$P_c = \frac{V_c^2}{r_s}, \quad (A4-140)$$

$$P_b = i_b V_c \cos \phi$$

より、

$$\begin{aligned}
P_+ &= \frac{(1+\beta)^2}{4\beta r_s} (V_c + V_{br} \cos \phi)^2 \\
&= \frac{(1+\beta)^2}{4\beta} P_c^2 \left(1 + \frac{P_b}{P_c(1+\beta)} \right)^2
\end{aligned}
\tag{A4-141}$$

従って、

$$\frac{\partial P_+}{\partial \beta} = 0 \leftrightarrow \beta = 1 + \frac{P_b}{P_c}
\tag{A4-142}$$

の時に P_+ が最小となる。この時の結合を、

optimum coupling という。反射は

$$P_r = P_+ - P_b - P_c
\tag{A4-143}$$

であるが、optimum tuning かつ optimum coupling の時、ゼロとなる。

図書室のページよりダウンロード可能。
現 LINAC の佐藤さんから、学生時代に教えて頂いた参考文献。

- [5] 赤井 和憲, “RF システム”, OHO’94 「Bファクトリーの加速器」

このテキストは残念ながらダウンロードできない様であるが、OHO’04 「Bファクトリーと加速器の基礎」の阿部哲郎, 「高周波加速入門」が同じように優れたテキストである。

付録 4 章の参考文献は、

- [1] A.P.フレンチ著, 平松 惇, 安福 精一監訳, 「MIT 物理 振動・波動」, 培風館, 1986/11
学部時代に読んだ初歩的な本だが、とても分かり易かった。
- [2] 三輪 進, 「高周波電磁気学」, 東京電機大学出版局, 1992/09
厚い長い本は嫌! というわけで、各項目が数ページにまとめられている本を選んだ。ダイジェスト的にぱらぱら読むのには向いていると思う。
- [3] Thomas Wrangler, “Principles of RF Linear Accelerators”, Wiley, 1998/04
東大物性研の学生時代に、指導教官の神谷先生、中村先生、高木さん、現 J-PARC の小関さん、LINAC の佐藤さん (学生時代の先輩) とやったゼミの教科書だった。当時は「LINAC なんて……」と思っていた (熱意もない、大変よくない学生でした) が、今になって思うと、非常に有り難いゼミでした。すみませんでした。
- [4] Perry B. Wilson, “KEK lectures on beam loading and impedance problems in e+ e- storage rings”, KEK-ACCELERATOR-79-7

あとがき

今年の OHO の主題は ERL である。加速器科学の将来は、蓄積リングではなく、線形加速器にあるのかも知れない。実際、放射光源は蓄積リングを光源とした第3世代から、線形加速器をもとにした第4世代、FEL や ERL へと進みつつある。シンクロトロン放射の平衡状態による、エミッタンスとバンチ長の限界を突破できない限り、次世代放射光は線形加速器となろう。また、素粒子原子核分野においても、話題は超高ルミノシティの電子・陽電子蓄積リングから、超高エネルギーの線形加速器へと進みつつある。レプトンのフレイバー物理の次は、新粒子探しということだろうか。ハドロン加速器では J-PARC や LHC など、新しい蓄積リングが建設、運転開始されているが、電子・陽電子の蓄積リングの将来は必ずしも明るいものではないかも知れない。

このテキストには分量制限がないとはいえ、紙面と時間の大半を無駄なことに費やした様な気がする……最初に光の話、次に、蓄積リングを広く浅く雑談、その後に本題であるビーム力学、最後に、過去のテキストに載っていないような話題を扱う……、予定であったが、1ヶ月以上前から書き始めたにも関わらず、予想以上に手間取り、満足に書けなかった。毎年の著者に共通する後悔と思うが、基礎としてきちんと書かねばならない内容はもっとある。書けなかった、もしくはごまかした(!) 内容の多さが、極めて残念である。ちなみに、過去の OHO のテキストは名著ばかりで、ビーム力学の基礎も数年毎に与えられている。それらを読めば、加速器科学のエキスパートになれる！

参考文献

本文中では参考文献に言及しなかったが、テキストを書くにあたって参照した文献について、ここに並べる。

挿入光源と光のパラメータについて

- [1] Richard P. Walker, “Insertion Devices: Undulators and Wigglers”, Proc. of “CERN

Accelerator School: Synchrotron radiation and free electron lasers”, 1996, CERN 98-04

新しい教科書ではないが、光束や輝度についてきちんと書かれている。かつて、様々な会合で輝度や光束の意味についての混乱を目にする機会があったが、こんなに古いテキストにきちんと書かれているのは驚きであった。2008年現在、CERNのサイトからダウンロード可能。

http://documents.cern.ch/cgi-bin/setlink?base=cernrep&categ=Yellow_Report&id=98-04

- [2] Pascal Elleaume, “Insertion Devices”, Proc. of “CERN Accelerator School: Synchrotron radiation and free electron lasers”, 2003, CERN 2005-012

テキストもすばらしいが、講義資料もダウンロードでき、それもすばらしい。挿入光源の光束や輝度のみならず、実際の電子ビームに対してどのようになるかについて、シミュレーションや測定結果も交えて解説してある。2008年現在、CERNのサイトからダウンロード可能。

<http://cas.web.cern.ch/cas/BRUNNEN/lectures.html>

- [3] 土屋 公央, “挿入型光源”, 1993年 OHO セミナー「光源用加速器と放射光用ビームライン」

世の中に挿入光源の光について扱ったテキストは数多くあるが、だいたいの教科書は積分の式を載せて、あとは結果だけを書いてある。最初から最後まで式をとばさずに書いたものは、これしかないのではないかと思うくらい、とても貴重なテキスト。OHOのページからダウンロード可能。

- [4] 北村 英男 編集, “放射光実験施設 挿入光源ハンドブック('90)”, KEK Report 89-24 1990

北村氏が挿入光源について、神谷先生がそのビームへの影響について要約した内容が冒頭についている。また、パラメータは古いですが、実際の挿入光源の光束や輝度の詳細について公開されている貴重な本。2008年現在、KEK 図書室の文献のページからダウンロードできる。

ビーム力学

- [5] 神谷 幸秀, “加速器の原理 シンクロトロン及びブストレージング”, 1984年 OHO セミナー「高エネルギー加速器入門」

神谷先生は筆者が大学1年の時からの恩師であり、物理に限らず、何から何まで、神谷先生に教わったので今があると思っている。が、最初にビーム物理学を真面目に勉強しようと思った大学4年の時、天邪鬼な筆者としては、恩師のテキストは避けようと思った(誠にすみません)。そこで、他のテキストを読んでみた……が、さっぱりであった。色々悪あがきして最後に神谷先生のテキストを読み始めたときの、その爽快感といったら……毎年の OHO で参照されているが、やはりビーム物理の最初は、これしかないと思う。

- [6] 神谷 幸秀, “コメント”, 挿入光源とビーム力学研究会 OHP 集, 1992年4月, (残念ながら出版されていない)

ワークショップの開催中、夜に思いついて書いたコメントとしてのトラペダさうである。本テキストの挿入光源のビームへの影響は、神谷先生の一晩の思いつきの域を出ていない……のだ!

- [7] 小林 幸則, “電子ストレージリング(II-ビームの性質”, 1993年 OHO セミナー「光源用加速器と放射光用ビームライン」

直属の上司である小林さんは何でもすぐ謙遜するが、古典力学の摂動を簡単に解説したテキストは、これが最善と思う。小林さんにも色々大変お世話になっています。ありがとうございます。これからもよろしく願いいたします。

- [8] 船越 義裕, “電子貯蔵リングにおけるビームダイナミクスの基礎”, 1994年 OHO セミナー「Bファクトリーの加速器」

ビーム物理の基礎、誤差の扱いや影響など、とてもしっかり書かれている。このくらいしっかり書いてみたかった……!

- [9] 生出 勝宣, “ビーム力学入門”, JLC-FFIR92 研究会講義録・研究報告集, KEK Proceedings 93-6 (1993)

シンプレクティックについて、カオスや安定性について書かれている。Proc.は図書室

のページからダウンロードできないが、生出さんのテキストは2008年現在、KEKBのページからダウンロード可能。

http://www-acc.kek.jp/kek/Commissioning_in_PDF/beam_dynamics.pdf

- [10] 大貫 義郎、吉田 春男、「力学」(現代物理学叢書)、岩波書店、(2001年6月)

加速器では粒子の安定性が重要な話題であるが、シンプレクティックということや、非線形を含む力学問題が解けるかどうかということについて、後半(吉田)に書かれている。関係ないが、筆者が最初にシンプレクティックという言葉聞いたのは、学部最後の1998年3月、理研の主催した第8回冬の学校「加速器におけるビーム物理」での講義で、吉田氏が講師だった。

- [11] Shyh-Yuan Lee, “Accelerator Physics”, World Scientific, 2004

- [12] Helmut Wiedemann, “Particle Accelerator Physics”, Springer; 3rd edition (June 12, 2007)

参照文献。何でも書いてある。加速器の教科書といえば、ヴィーデマンかリーか、という感じ。

- [13] 本田 融, “放射光源リングの概要”, 放射光利用基礎講習会テキスト, 2005年9月

ユーザー向けの講習会のテキストで、本田さん以外は実験とビームラインの話。光源の基礎として必要な内容が、とてもよくまとまっている。真空グループの本田さんにも、色々お世話になっています。ありがとうございます。

その他、宣伝

- [14] 羽島 良一 他編集, “コンパクト ERL の設計研究報告書”, KEK Report 2007-7 / JAEA Research 2008-032

- [15] Workshop SAD2006

<http://acc-physics.kek.jp/SAD/SAD2006/Doc/program.html>

ありがとうございました。