

# 大強度陽子リングのビーム力学： 単粒子力学・空間電荷効果 — 入門編 —

## 1. 序論

J-PARC は、高エネルギー加速器研究機構と日本原子力研究開発機構が、茨城県東海村に共同で建設している MW 級の大強度陽子加速器施設であり、400 MeV (現状、181 MeV) リニアック、速い繰り返しの 3 GeV シンクロトロン (Rapid Cycling Synchrotron; RCS)、及び、50 GeV (現状、30 GeV) メインリングシンクロトロン (Main Ring; MR) の 3 基の加速器群から構成される。J-PARC 加速器は、2006 年 11 月から始まった低電流ビームによる一連の初期試験・調整を経て、2008 年 12 月より供用運転を開始した。その後は、2009 年 12 月より、本格的な大強度ビーム試験を開始し、以来、供用運転と並行して、ビーム出力の増強へ向けた各種試験・調整を精力的に展開している。

こうした状況を踏まえ、本講義では、大強度ビームの振る舞いを理解する上で必要なビーム力学の基礎、特に、RCS や MR で採用されている強収束型の陽子リングでのビーム運動に焦点を絞り、ビームの単粒子的振る舞いからビーム粒子間に作用する空間電荷力を取り入れた場合のビームの挙動などを広く議論する。又、本講義の後半部で、今までに、RCS で実際に行われてきたビーム出力の大強度化への取り組みを概説し、その中で得られた実験データや対応するシミュレーション結果を、本講義の前半部で得た理屈を使って解説する。

## 2. ベータトロン振動 (横方向振動)

加速器では、磁場の分布が与えられると、粒子のエネルギーに対応して、一定の閉じた軌道が存在する (閉軌道)。この加速器の設計軌道から外れた粒子が閉軌道の回りで行う振動をベータトロン振動と呼ぶ。本章では、先ず、ベータトロン

振動の運動方程式を導出し、最も基本的なベータトロン振動の線形近似解を求める。又、本章の後半部では、各種誤差磁場や非線形磁場成分を導入し、それらによって生じるベータトロン振動の不安定性 (共鳴現象) を議論する。

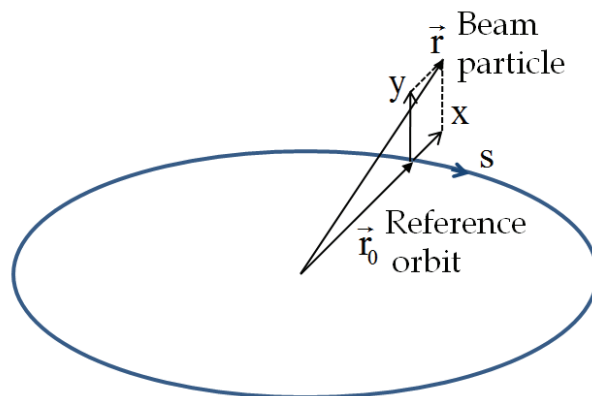


図 1：直交曲線座標系。

### 2.1. ベータトロン振動の運動方程式

本節では、電磁場中の荷電粒子のハミルトニアンから出発して、ベータトロン振動の運動方程式を導く。

電磁場中を運動する荷電粒子のハミルトニアンは、以下のように与えられる。

$$H_1 = e\phi + c[m^2c^2 + (\vec{P} - e\vec{A})^2]^{1/2} \quad (1)$$

此处で、 $e$  は電荷量、 $c$  は光速、 $m$  は粒子の静止質量、又、 $\phi$  はスカラーポテンシャル、 $\vec{A}$  はベクターポテンシャルであり、電磁場とは、

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \partial\vec{A}/\partial t, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (2)$$

という関係を持つ。又、式中の一般運動量  $\vec{P}$  は、荷電粒子の運動量  $\vec{p}$  とベクターポテンシャルの和

$$\vec{P} = \vec{p} + e\vec{A} \quad (3)$$

で与えられる。此处で、図 1 に示す様に、加速器の閉軌道を基準曲線に取った直交曲線座標系  $(x, y, s)$  への座標変換を行う。先に述べたように、ベータトロン振動は、閉軌道の回りの振動である為、こうした直交曲線座標系を導入し、基準曲線  $\vec{r}_0$  からの変位として運動を取り扱う。この直交曲線座標系の単位ベクトルは、

$$\vec{e}_s(s) = \frac{d\vec{r}_0(s)}{ds},$$

$$\bar{e}_x(s) = -\rho(s) \frac{d\bar{e}_s(s)}{ds}, \quad (4)$$

$$\bar{e}_y(s) = \bar{e}_s(s) \times \bar{e}_x(s)$$

となる。此処で、 $\rho(s)$ は、基準曲線の曲率半径を示す。以下の母関数

$$F_3(\bar{\mathbf{P}}, x, y, s) = -\bar{\mathbf{P}} \cdot (\bar{\mathbf{r}}_0 + x\bar{e}_x(s) + y\bar{e}_y(s)) \quad (5)$$

を用いて正準変換を行うと、 $(x, y, s)$ に正準共役な一般運動量は、

$$\begin{aligned} p_s &= -\partial F_3 / \partial s = (1 + x/\rho) \bar{\mathbf{P}} \cdot \bar{e}_s(s), \\ p_x &= -\partial F_3 / \partial x = \bar{\mathbf{P}} \cdot \bar{e}_x(s), \\ p_y &= -\partial F_3 / \partial y = \bar{\mathbf{P}} \cdot \bar{e}_y(s) \end{aligned} \quad (6)$$

となり、同様にベクターポテンシャルも

$$\begin{aligned} A_s &= (1 + x/\rho) \bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{e}_s(s), \\ A_x &= \bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{e}_x(s), \\ A_y &= \bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{e}_y(s) \end{aligned} \quad (7)$$

と変換すると、直交曲線座標系での新たなハミルトニアンは、

$$\begin{aligned} H_2(x, p_x, y, p_y, s, p_s; t) &= H_1 + \frac{\partial F_3}{\partial t} \\ &= e\phi + c[m^2c^2 + (p_x - eA_x)^2 \\ &\quad + (p_y - eA_y)^2 + \frac{(p_s - eA_s)^2}{(1 + x/\rho)^2}]^{1/2} \end{aligned} \quad (8)$$

となる。此処までは、時刻  $t$  を独立変数としてきたが、次は、基準軌道上の距離  $s$  を新たな独立変数として取り扱う。 $t$  の正準共役量は  $-H_2$  であるので、新たなハミルトニアンは、式(8)を  $-p_s$  について解くことにより、以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} H_3(x, p_x, y, p_y, t, -H_2; s) &= -p_s \\ &= -eA_s - (1 + \frac{x}{\rho}) \left[ \frac{(H_2 - e\phi)^2}{c^2} - m^2c^2 \right. \\ &\quad \left. - (p_x - eA_x)^2 - (p_y - eA_y)^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (9)$$

此処で、電場は無く、且つ磁場は静的で、設計軌道に対して平行な磁場成分を持たないという状況を考える。即ち、

$$\phi = 0, \quad A_x = A_y = 0 \quad (10)$$

と仮定する。この場合、式(9)は、 $t$  を含まないので、全エネルギー  $E = H_2$  は不変量となる。式(9)について、全運動量  $\mathbf{p} = (E^2/c^2 - m^2c^2)^{1/2}$  という関係を使い、 $p_x, p_y$  について 2 次の項までを考慮すると、

$$\begin{aligned} H_3(x, p_x, y, p_y; s) &= -eA_s \\ &\quad - p \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \left[1 - \left(\frac{p_x}{p}\right)^2 - \left(\frac{p_y}{p}\right)^2\right]^{1/2} \\ &\approx -eA_s - p \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \\ &\quad + p \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{p_x}{p}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{p_y}{p}\right)^2\right] \end{aligned} \quad (11)$$

となる。上記の独立変数  $s$  でのハミルトニアンから、ハミルトン方程式は、

$$\begin{aligned} x' &= dx/ds = \partial H_3 / \partial p_x, \\ p_x' &= dp_x/ds = -\partial H_3 / \partial x, \\ y' &= dy/ds = \partial H_3 / \partial p_y, \\ p_y' &= dp_y/ds = -\partial H_3 / \partial y \end{aligned} \quad (12)$$

と与えられる。

次に磁場について考える。直交曲線座標系での磁場の各成分は、

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{B}} &= \nabla \times \bar{\mathbf{A}} \\ &= \frac{1}{h_s} \left( \frac{\partial A_s}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial s} \right) \bar{e}_x \\ &\quad + \frac{1}{h_s} \left( \frac{\partial A_x}{\partial s} - \frac{\partial A_s}{\partial x} \right) \bar{e}_y \\ &\quad + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \bar{e}_s, \end{aligned} \quad (13)$$

$$h_s = 1 + x/\rho$$

となる。上式と式(10)の条件より、磁場の  $x, y$  成分は、

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{1}{1 + x/\rho} \frac{\partial A_s}{\partial y}, \\ B_y &= -\frac{1}{1 + x/\rho} \frac{\partial A_s}{\partial x} \end{aligned} \quad (14)$$

となり、式(11), (12), (14)から、 $x, y$  について 2 次の項までを考慮すると、ベータトロン振動の運動方程式は、以下のように求まる。

$$x'' - \frac{\rho+x}{\rho^2} = -\frac{B_y p_0}{B\rho p} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2,$$

$$y'' = \frac{B_x p_0}{B\rho p} \left(1 + \frac{y}{\rho}\right)^2 \quad (15)$$

式中の  $p_0$  は、基準軌道上を周回する粒子の運動量 (中心運動量)、又、 $B$  は、 $p_0=eB\rho$  を満たす偏向磁場であり、 $B\rho$  を中心運動量と等価な量として運動量リジディティと呼ぶ。

## 2.2. 磁場の多極展開

式(11)や(15)から更に議論を進める為に必要となる磁場の多極展開を本節で纏めておく。

式(10)の  $A_x=A_y=0$  を仮定した場合、磁場は、基準軌道  $s$  に垂直な成分のみを持つ。

$$\vec{B} = B_x(x, y)\vec{e}_x + B_y(x, y)\vec{e}_y \quad (16)$$

この場合、 $B_x, B_y$  は、 $A_s$  から式(14)を通して与えられる。この  $A_s$  は、 $1/\rho$  が微小な条件下で、

$$A_s = -B \cdot \text{Re} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b_n + ja_n)}{n+1} (x + jy)^{n+1} \right] \quad (17)$$

と展開できる。その場合、磁場は、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{B\rho} (B_y + jB_x) \\ &= \frac{1}{B\rho} \left( -\frac{\partial A_s}{\partial x} + j\frac{\partial A_s}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} (b_n + ja_n)(x + jy)^n, \quad (18) \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{Bn!} \left. \frac{\partial^n B_y}{\partial x^n} \right|_{x=y=0},$$

$$a_n = \frac{1}{Bn!} \left. \frac{\partial^n B_x}{\partial x^n} \right|_{x=y=0}$$

と表わせ、 $b_n$  が  $2(n+1)$  極磁場成分、 $a_n$  がそのねじれ磁場成分を示す。通常の加速器では、偏向作用を行う二極磁場 ( $b_0$ ) と収束作用を担う四極磁場 ( $b_1$ ) が主成分であり、その他の磁場成分は、誤差、若しくは、補正量として存在する。

## 2.3. ベータトロン振動の線形近似解

式(18)より、磁場  $B_x, B_y$  について、二極磁場 ( $b_0$ ) と四極磁場 ( $b_1$ ) のみ考慮する。

$$B_y = B + \frac{\partial B_y}{\partial x} \Big|_{x=0, y=0} x,$$

$$B_x = \frac{\partial B_y}{\partial x} \Big|_{x=0, y=0} y \quad (19)$$

上式を式(15)へ代入し、 $p=p_0$  と仮定して高次の微小量を省略すると、以下の運動方程式が得られる。

$$x'' + \left( \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{B\rho} \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) x = 0,$$

$$y'' - \frac{1}{B\rho} \frac{\partial B_y}{\partial x} y = 0 \quad (20)$$

上式は、ビーム粒子の線形近似による運動方程式であり、一般に、 $x, y$  を代表して  $\chi$  と書くと、

$$\chi'' + k(s)\chi = 0, \quad (21)$$

$$k(s) = \begin{cases} k_x(s) = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{B\rho} \frac{\partial B_y}{\partial x} & (\text{if } \chi = x), \\ k_y(s) = -\frac{1}{B\rho} \frac{\partial B_y}{\partial x} & (\text{if } \chi = y) \end{cases}$$

と表わせる。係数  $k(s)$  は、円形加速器の場合、ラティス構造の周期性  $L$  に従って、 $k(s)=k(s+L)$  の周期関数となる。このような周期係数を持ち、1次微分項を持たない2階微分方程式を Hill の方程式と呼ぶ。式(21)の一般解は、

$$\begin{aligned} \chi_1 &= w(s)e^{i\varphi(s)}, \\ \chi_2 &= w(s)e^{-i\varphi(s)} \quad (22) \end{aligned}$$

の線形結合

$$\chi = c_1 w(s)e^{i\varphi(s)} + c_2 w(s)e^{-i\varphi(s)} \quad (23)$$

となる。式(22)を式(21)に代入し、実部と虚部が共に0になるという条件から、以下の  $w, \varphi$  が満たすべき関係が導かれる。

$$w'' + k(s)w - 1/w^3 = 0, \quad (24)$$

$$\varphi' = 1/w^2 \quad (25)$$

式(24)は、エンベロープ方程式と呼ばれる。

次に、 $s=s_1$  での初期値が  $(\chi_1, \chi_1')$  の場合、 $s=s_2$  での  $(\chi_2, \chi_2')$  を与える関係を考える。この関係は、式(23)に初期値を入れて、 $c_1, c_2$  を決めることにより、以下のように求まる。

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \chi_2 \\ \chi_2' \end{pmatrix} &= M(s_2 | s_1) \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_1' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_1' \end{pmatrix}, \\
m_{11} &= (w_2 / w_1) \cos \varphi - w_2 w_1' \sin \varphi, \\
m_{12} &= w_1 w_2 \sin \varphi, \\
m_{21} &= -\frac{1 + w_1 w_1' w_2 w_2'}{w_1 w_2} \sin \varphi \\
&\quad - \left( \frac{w_1'}{w_2} - \frac{w_2'}{w_1} \right) \cos \varphi, \\
m_{22} &= (w_1 / w_2) \cos \varphi + w_1 w_2' \sin \varphi
\end{aligned} \tag{26}$$

上式の  $M(s_2 | s_1)$  を  $s_1$  から  $s_2$  への輸送行列と呼び、又、 $\varphi = \varphi(s_2) - \varphi(s_1)$  は、 $s_1$  から  $s_2$  までのベータatron振動の位相進みを示す。此処で、Twiss パラメータと呼ばれる新たな量

$$\beta(s) = w^2(s) \tag{27}$$

$$\alpha(s) = -w(s)w'(s) = -\beta'(s)/2$$

を導入すると、輸送行列は、

$$\begin{aligned}
m_{11} &= \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} (\cos \varphi + \alpha_1 \sin \varphi), \\
m_{12} &= \sqrt{\beta_1 \beta_2} \sin \varphi, \\
m_{21} &= -\frac{1 + \alpha_1 \alpha_2}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} \sin \varphi \\
&\quad + \left( \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} \right) \cos \varphi, \\
m_{22} &= \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} (\cos \varphi - \alpha_2 \sin \varphi)
\end{aligned} \tag{28}$$

と表わせる。

此処で、ベータatron振動の安定条件を議論する。式(28)より、ラティス構造の周期性  $L$  に従って、

$$\begin{aligned}
\beta(s) &= \beta(s+L), \\
\alpha(s) &= \alpha(s+L)
\end{aligned} \tag{29}$$

の周期条件がある場合の  $s$  から  $s+L$  までの輸送行列は、

$$M = \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu & \beta \sin \mu \\ -\gamma \sin \mu & \cos \mu - \alpha \sin \mu \end{pmatrix} \tag{30}$$

となる。此処で、

$$\gamma = (1 + \alpha^2) / \beta \tag{31}$$

と定義し、又、 $\mu$  は、一周期分の位相進みで、

$$\mu = \varphi(s+L) - \varphi(s) \tag{32}$$

である。又、式(30)より、 $k$  周期分の輸送行列は、

$$M^k = \begin{pmatrix} \cos k\mu + \alpha \sin k\mu & \beta \sin k\mu \\ -\gamma \sin k\mu & \cos k\mu - \alpha \sin k\mu \end{pmatrix} \tag{33}$$

となる。任意の初期条件から出発した粒子の振動が発散しない為には、行列要素が常に有限であることが必要となる。 $\mu$  が実数であれば、ベータatron振動が発散することはなく、振動の安定条件は、 $|\cos \mu| < 1$ 、即ち、

$$|\text{Tr } M(s+L | s)| < 2 \tag{34}$$

と与えられる。

最後に、ベータatron振動の一般解(23)を、Twiss パラメータを用いて書き直す。式(25)は、

$$\varphi'(s) = 1/\beta(s) \tag{35}$$

となり、これを積分することにより、ベータatron振動の位相進みは、始点を  $s=0$  に選ぶと、

$$\varphi(s) = \int_0^s \frac{ds}{\beta(s)} \tag{36}$$

と表わせ、ベータatron振動の一般解は、

$$\chi(s) = a \sqrt{\beta(s)} \cos \left( \int_0^s \frac{ds}{\beta(s)} + \xi \right) \tag{37}$$

と表記できる。此処で、 $a$  と  $\xi$  は、初期条件により決定される定数である。上記の通り、ベータatron振動は、加速器の磁場分布から決定されるベータ関数  $\beta(s)$  で特徴づけられ、関数  $\sqrt{\beta(s)}$ 、 $\varphi(s)$  によって、それぞれ振幅変調、位相変調された正弦波と見做すことができる。加速器一周あたりのベータatron振動の振動回数は、式(36)を加速器一周に亘り積分し、それを  $2\pi$  で割った

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \oint 1/\beta(s) ds \tag{38}$$

で与えられ、この量をベータatron振動数、若しくは、チューンと呼んでいる。

## 2.4. 各構成要素の輸送行列

本節では、各加速器要素の輸送行列を具体的に導く。

### 2.4.1 自由空間（ドリフト空間）

自由空間では、粒子は、力を受けずにまっすぐ進むので、その長さを  $L_d$  とすれば、輸送行列は、

$$M = \begin{pmatrix} 1 & L_d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (39)$$

となる。

### 2.4.2 二極電磁石（セクター型）

二極電磁石で、ビーム粒子の基準軌道と、その電磁石の磁極の端面が直角になっているものをセクター電磁石と呼ぶ。二極電磁石中の粒子の運動方程式は、式(21)から四極電磁石の効果を除いて、以下のように与えられる。

$$x'' + \frac{1}{\rho^2} x = 0, \quad (40)$$

$$y'' = 0$$

$y$  方向は自由空間と同じなので、輸送行列は、式(39)より、

$$M_y = \begin{pmatrix} 1 & \rho\phi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (41)$$

となる。此処で、 $\phi$  は、セクター電磁石の偏向角を示す。一方、 $x$  方向の一般解は、

$$x = A \cos \frac{s}{\rho} + B \sin \frac{s}{\rho} \quad (42)$$

となる。此処で、 $A$  と  $B$  は、任意の定数である。初期条件を、 $s=0$  で、 $(x, x')=(x_0, x'_0)$  とすると、任意の  $s$  での解は、

$$x = x_0 \cos \frac{s}{\rho} + x'_0 \rho \sin \frac{s}{\rho}, \quad (43)$$

$$x' = -\frac{x_0}{\rho} \sin \frac{s}{\rho} + x'_0 \cos \frac{s}{\rho}$$

となり、輸送行列は、

$$M_x = \begin{pmatrix} \cos \phi & \rho \sin \phi \\ -(1/\rho) \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (44)$$

と表わされる。

### 2.4.3 四極電磁石

四極電磁石内の粒子の運動方程式は、式(21)で  $1/\rho \rightarrow 0$  と置くことにより、

$$x'' + k_1 x = 0,$$

$$y'' - k_1 y = 0,$$

$$k_1 = \frac{1}{B\rho} \frac{\partial B_y}{\partial x} \quad (45)$$

となる。 $k_1 > 0$  と仮定すると、 $x$  方向は収束、 $y$  方向は発散の作用を持ち、式(45)の一般解は、

$$x = A_1 \cos(s\sqrt{|k_1|}) + B_1 \sin(s\sqrt{|k_1|}), \quad (46)$$

$$y = A_2 \cosh(s\sqrt{|k_1|}) + B_2 \sinh(s\sqrt{|k_1|})$$

となる。セクター電磁石の場合と同様の処置により、四極電磁石の輸送行列は、磁石の長さを  $L_m$  とすると、

$$M_x = \begin{pmatrix} \cos(\zeta) & (1/\sqrt{|k_1|}) \sin \zeta \\ -\sqrt{|k_1|} \sin \zeta & \cos \zeta \end{pmatrix},$$

$$M_y = \begin{pmatrix} \cosh(\zeta) & (1/\sqrt{|k_1|}) \rho \sinh \zeta \\ \sqrt{|k_1|} \sinh \zeta & \cosh \zeta \end{pmatrix},$$

$$\zeta = L_m \sqrt{|k_1|} \quad (47)$$

と与えられる。 $k_1 < 0$  の場合は、 $x$  方向が発散、 $y$  方向が収束となり、上の  $x$  方向と  $y$  方向の行列が入れ替わる。

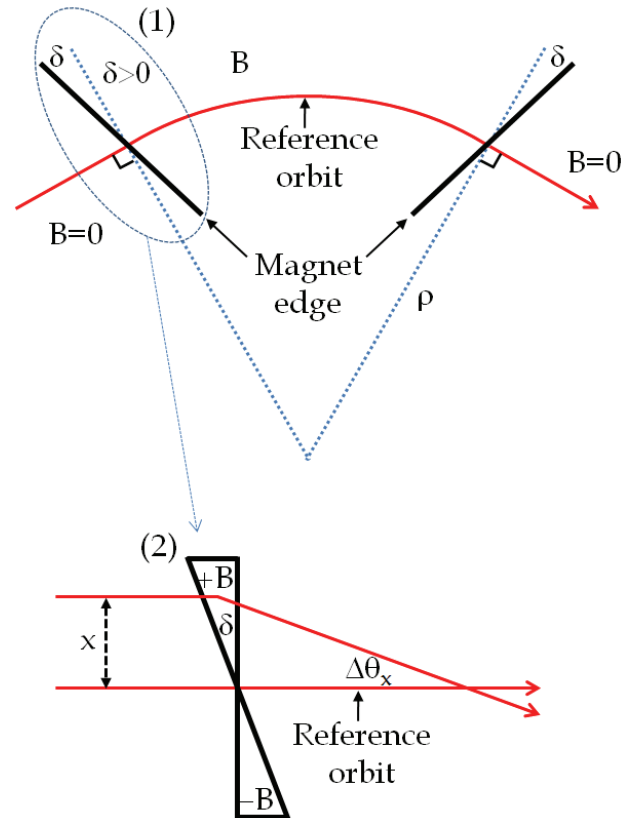


図2：エッジ収束（ $x$  方向）。

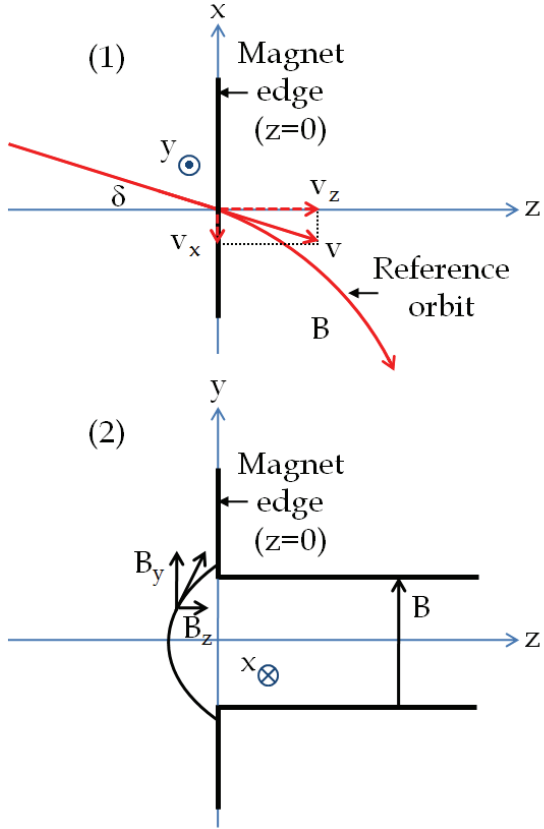


図3：エッジ収束（y方向）。

#### 2.4.4 エッジ収束

此処では、図2-(1)で示されるように、ビームの基準軌道と磁石端面の交差角が直角から $\delta$ だけずれた角度を持つ二極電磁石を考え、その磁極端面部の効果を考察する。

x方向については、この電磁石は、図2-(2)に示す二極磁場の符号が異なったりくさび型磁石とセクター電磁石の組み合わせと見做すことができ、基準軌道と並行にxの位置からくさび型電磁石へ入射した粒子の偏向角は、

$$\Delta\theta_x = \frac{\tan\delta}{\rho}x \quad (48)$$

となる。此処で、このくさび型磁石を薄いレンズとして扱う。つまり、レンズを通過した際に、位置の変位は無く、角度のみ変化すると近似する（薄レンズ近似）。その場合、薄レンズ前後の軌道は、

$$\begin{aligned} x &= x_0 \\ x' &= x'_0 - \frac{\tan\delta}{\rho}x \end{aligned} \quad (49)$$

という関係で結ばれるので、x方向の輸送行列は、

$$M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\tan\delta/\rho & 1 \end{pmatrix} \quad (50)$$

となる。

次に、y方向を考える。図3に示す通り、 $\delta \neq 0$ の時は $v_x \neq 0$ 、又、電磁石の端面近傍では、 $y \neq 0$ で $B_z \neq 0$ となるので、y方向には、ローレンツ力が作用する。y方向の運動方程式は、

$$dv_y = -\frac{ev_x}{m}B_z dt \quad (51)$$

となる。上式は、 $dz=v_z dt$ を用いると、

$$dv_y = -\frac{e}{m} \frac{v_x}{v_z} B_z dz \quad (52)$$

となり、又、 $v_x = -v_z \tan\delta$ を使って、

$$dv_y = \frac{eB_z}{m} \tan\delta dz \quad (53)$$

と表わされる。此処で、磁気スカラーポテンシャル $\phi_m$ を導入すると、 $\vec{B} = -\nabla\phi_m$ より、

$$B_z = -\frac{\partial\phi_m(x,y,z)}{\partial z} \quad (54)$$

又、 $z=-\infty$ で磁場は0、 $z=z_0$ で磁場はy方向に一定値Bを取ると仮定すると以下の関係を得る。

$$\begin{aligned} \phi_m(x,y,z_0) &= -B \cdot y, \\ \phi_m(x,y,-\infty) &= 0 \end{aligned} \quad (55)$$

式(53)~(55)より、磁石の端面を通過する際に生じるy方向の速度変化は、

$$\begin{aligned} \Delta v_y &= \int_{-\infty}^{z_0} \frac{eB_z}{m} \tan\delta dz \\ &= -\int_{-\infty}^{z_0} \frac{e}{m} \frac{\partial\phi_m(x,y,z)}{\partial z} \tan\delta dz \\ &= \left(\frac{eB}{m} \tan\delta\right)y \end{aligned} \quad (56)$$

となり、上式をvで割ることで、偏向角が、以下の様に求まる。

$$\begin{aligned} \frac{\Delta v_y}{v} &= \Delta\theta_y = \left(\frac{eB}{mv} \tan\delta\right)y \\ &= \frac{\tan\delta}{\rho}y \end{aligned} \quad (57)$$

上式より、磁石端面前後の軌道は、

$$y = y_0,$$



$$y' = y'_0 + \frac{\tan \delta}{\rho} y \quad (58)$$

という関係で結びつくので、 $y$  方向の輸送行列は、

$$M_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tan \delta / \rho & 1 \end{pmatrix} \quad (59)$$

となる。

式(50), (59)より、磁石端面の効果が、 $x$  方向と  $y$  方向で、収束・発散作用が逆となる四極電磁石と等価な関係を持つことがわかる。この収束効果をエッジ収束と呼ぶ。

## 2.5 Courant-Snyder 不変量

Hill の方程式(21)は、以下のハミルトニアンより導かれる。

$$H(\chi, \chi'; s) = \frac{1}{2} \chi'^2 + \frac{1}{2} k(s) \chi^2 \quad (60)$$

此処で、母関数

$$F_1(\chi, \varphi) = -\frac{\chi^2}{2\beta} \left( \tan \varphi - \frac{\beta'}{2} \right) \quad (61)$$

を使い、 $(\chi, \chi')$  から  $(\varphi, J)$  へ正準変換を行う。この新たな変数は、Action-Angle 変数と呼ばれる。

正準変換の関係式

$$\chi' = \frac{\partial F_1}{\partial \chi} = -\frac{\chi}{\beta} \left( \tan \varphi - \frac{\beta'}{2} \right), \quad (62)$$

$$J = -\frac{\partial F_1}{\partial \varphi} = \frac{\chi^2}{2\beta} \frac{1}{\cos^2 \varphi}$$

より、

$$\begin{aligned} \chi &= \sqrt{2\beta J} \cos \varphi, \\ \chi' &= -\sqrt{\frac{2J}{\beta}} (\sin \varphi + \alpha \cos \varphi) \end{aligned} \quad (63)$$

を得る。又、式(24)を、Twiss パラメータを用いて書き直した

$$\frac{1}{2} \beta'' + k \cdot \beta - \frac{1}{\beta} \left( 1 + \left( \frac{\beta'}{2} \right)^2 \right) = 0 \quad (64)$$

の関係を使うと、新たなハミルトニアンは、

$$H_4 = H + \frac{\partial F_1}{\partial s} = \frac{J}{\beta} \quad (65)$$

と表わせる。この系でのハミルトン方程式は、

$$\varphi' = \frac{\partial H_4}{\partial J} = \frac{1}{\beta}, \quad (66)$$

$$J' = -\frac{\partial H_4}{\partial \varphi} = 0$$

と与えられ、上式より、 $J$  が  $s$  に依らず一定であるという結果が導かれる。

此処で、Courant-Snyder 不変量と呼ばれる以下の量を定義する。

$$\begin{aligned} C(\chi, \chi') &= \frac{1}{\beta} (\chi^2 + (\beta \chi' + \alpha \chi)^2) \\ &= \gamma \chi^2 + 2\alpha \chi \chi' + \beta \chi'^2 \end{aligned} \quad (67)$$

上式に、式(63)を代入すると、

$$C(\chi, \chi') = 2J = \text{const.} \quad (68)$$

又、ベータatron振動の一般解(37)を代入すると、

$$C(\chi, \chi') = a^2 = \text{const.} \quad (69)$$

となり、不変量であることが示される。式(68), (69)は、ある場所  $s$  の  $(\chi, \chi')$  平面での粒子運動の軌跡を与え、一般に、図 4 に示される様な傾いた楕円を描き、その不変量は、その楕円の面積を  $\pi$  で割った値  $\varepsilon$  に等しい。

$$C(\chi, \chi') = \varepsilon = \frac{1}{\pi} \oint \chi' d\chi = \text{const.} \quad (70)$$

上式の  $\varepsilon$  は、ビームの広がり具合を表すもので、エミッタンスと呼ばれる。  $\varepsilon$  を使って、式(37)を書き直すと、

$$\chi(s) = \sqrt{\beta(s) \varepsilon} \cos \left( \int_0^s \frac{ds}{\beta(s)} + \xi \right) \quad (71)$$

となる。各点  $s$  でのベータatron振動の振幅は、磁場分布から決定されるベータ関数と初期条件から決定される定数であるエミッタンスから与えられる。加速器中を周回している粒子は、一般に、異なった初期値、即ち、様々な  $\varepsilon$  で分布するが、 $\varepsilon$  が最大の粒子が作る楕円を描けば、その他の粒子の軌跡は全てその楕円の中に入る。一般に、その楕円の面積をビームのエミッタンスと呼んでいる。

最後に、以下の新たな位相変数を定義しておく。

$$\begin{aligned} \chi &= \sqrt{2\beta J} \cos \varphi, \\ P_\chi &= \beta \chi' + \alpha \chi = -\sqrt{2\beta J} \sin \varphi \end{aligned} \quad (72)$$

上で述べた通り、 $(\chi, \chi')$  空間でのビーム粒子の運動の軌跡は、図 4 に示す様な楕円となるが、 $(\chi, -P_\chi)$  空間では、その楕円が、半径  $\sqrt{2\beta J}$  の円へ変換される。この位相変数は、 $s$  に依らずに、位相空間の粒子の軌跡を円で描写できる便利な規格化座標系を作るので、ビーム力学の解析過程でしばしば使用される。

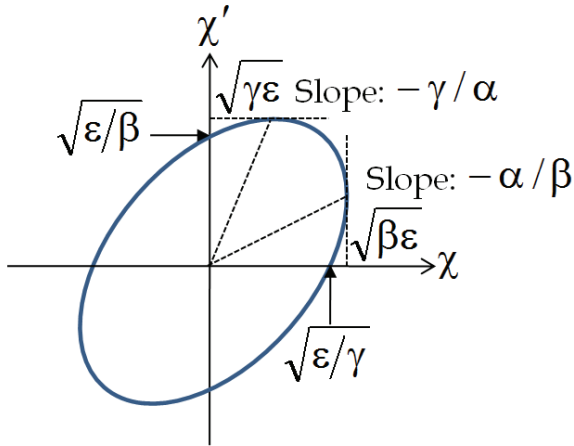


図 4:  $(\chi, \chi')$  位相空間でのビーム粒子の軌跡 (Courant-Snyder 楕円)。

## 2.6 ベータトロン振動の断熱減衰

本節では、ベータトロン振動が、加速と共にどのように変化するかを議論する。

振動系のパラメータが、振動周期に比べてゆっくりと変化する場合は、断熱近似が成立し、その作用積分は断熱不変量となる。正準変数として、位置  $\chi$  と運動量  $p_\chi = p\chi'$  を用いた場合、作用積分は、

$$I = \oint p_\chi d\chi = mc(\beta\gamma) \oint \chi' d\chi \quad (73)$$

となる。式中の  $(\beta\gamma)$  はローレンツファクターを示す。此处で、新しい量として、規格化エミッタンスと呼ばれる

$$\varepsilon_n = (\beta\gamma) \frac{\oint \chi' d\chi}{\pi} = (\beta\gamma)\varepsilon \quad (74)$$

を導入する。式(73)より、 $\varepsilon_n$  は、加速過程で不変量となり、前節で定義したエミッタンス  $\varepsilon$  と

$$\varepsilon = \frac{1}{(\beta\gamma)} \varepsilon_n \propto \frac{1}{p} \quad (75)$$

という関係を持つ。上式より、エミッタンスが、加速と共に  $(\beta\gamma)$  に反比例して減衰していくことが分かる。この現象を、ベータトロン振動の断熱減衰 (adiabatic damping) と呼ぶ。

## 2.7 誤差磁場のビームへの影響

此处までは、理想的な二極・四極磁場中のベータトロン振動を議論してきたが、実際の加速器では、電磁石の個体差や設置誤差等があり、ビーム粒子は、設計値とは異なった磁場の影響を受けて運動する。本節では、加速器磁場の主成分である二極磁場と四極磁場の誤差が存在した場合のビーム粒子の運動を議論する。

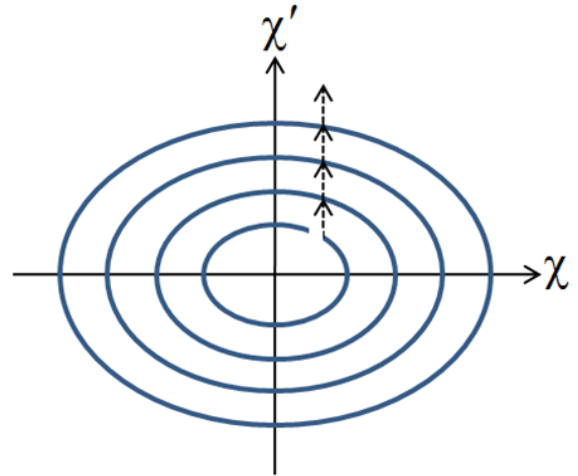


図 5: 整数共鳴条件を満たした場合の位相空間でのビーム粒子の軌跡。

### 2.7.1 二極誤差磁場の影響 (整数共鳴)

此处までは、閉軌道の回りで生じるベータトロン振動を取り扱ったが、此处では、閉軌道が論点となる。誤差磁場が存在しない時の閉軌道は、設計軌道と一致するが、二極磁場の誤差が存在すると、振動中心である閉軌道に歪みが生じ、ビーム粒子の運動は、その歪んだ閉軌道とその回りのベータトロン振動として描写される。

手始めに、設計軌道上の  $s=s_0$  に蹴り角  $\theta = \Delta B ds / B\rho$  の二極誤差磁場が存在すると仮定する。設計軌道を基準曲線に選んだ直交曲線座標系における  $s=s_0$  での歪んだ閉軌道の位相空間座



標を $(\chi_0, \chi'_0)$ とすると、閉軌道の条件は、以下のよう  
に与えられる。

$$\begin{pmatrix} \chi_0 \\ \chi'_0 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \chi_0 \\ \chi'_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix} \quad (76)$$

此処で、 $M$  は、誤差磁場の無い理想的な条件下での  
リング一周の輸送行列である。輸送行列(28)を用いて  
上式を解くと、 $s=s_0$ での閉軌道変形は、

$$\begin{pmatrix} \chi_0 \\ \chi'_0 \end{pmatrix} = \frac{\theta}{2 \sin \pi \nu} \begin{pmatrix} \beta_0 \cos \pi \nu \\ \sin \pi \nu - \alpha_0 \cos \pi \nu \end{pmatrix} \quad (77)$$

となる。又、任意の位置  $s$  での閉軌道変形は、 $s_0$   
から  $s$  への輸送行列  $M(s|s_0)$ を用いて、

$$\begin{pmatrix} \chi \\ \chi' \end{pmatrix}_{co} = M(s|s_0) \begin{pmatrix} \chi_0 \\ \chi'_0 \end{pmatrix},$$

$$\chi_{co}(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)\beta(s_0)}}{2 \sin \pi \nu} \times \theta(s_0) \cos(\pi \nu - |\varphi(s) - \varphi(s_0)|) \quad (78)$$

と表わせる。上式は、単一キック $\theta$ で生じる閉軌道  
変形の式となるが、実際の加速器では、誤差磁場は、  
周回軌道に沿って分布する。その場合の閉軌道変形は、  
式(78)をリング一周に亘り積分することで、

$$\chi_{co}(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)}}{2 \sin \pi \nu} \oint \sqrt{\beta(t)} \frac{\Delta B(t)}{B\rho} \times \cos(\pi \nu - |\varphi(s) - \varphi(t)|) dt \quad (79)$$

と与えられる。当然ながら、上式は、式(15)より  
導かれる誤差磁場がある場合の Hill の方程式

$$\chi'' + k(s)\chi = \frac{\Delta B}{B\rho}, \quad (80)$$

$$\Delta B = \begin{cases} -\Delta B_y & (\text{if } \chi = x), \\ \Delta B_x & (\text{if } \chi = y) \end{cases}$$

を満足する。

又、式(79)より、チューンが整数に近づくと、  
閉軌道変形が発散することが導かれる。こうした  
 $\nu = l$  (整数) となった際に生じる不安定性を整数  
共鳴と呼ぶ。この現象は、図 5 に示す様に、チュ  
ーンが共鳴条件を満たすと、二極キックの影響が  
ターン毎に積み上がる為が生じる。

## 2.7.2 四極誤差磁場の影響 (半整数共鳴)

収束作用を担う四極磁場に誤差が生じた場合  
には、チューンやベータ関数に影響が現れる。

四極誤差磁場 $\kappa(s)$ が存在する場合の Hill の方  
程式は、

$$\chi'' + (k(s) + \kappa(s))\chi = 0 \quad (81)$$

となる。二極誤差磁場の場合と同様に、手始めに  
 $s=s_1$ の微小領域に四極誤差磁場が存在すると仮定  
する。この誤差磁場の輸送行列は、式(47)に薄レ  
ンズ近似を行うと、

$$m(s_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\kappa(s_1) ds_1 & 1 \end{pmatrix} \quad (82)$$

と与えられる。この誤差磁場が存在する場合のリ  
ング一周分の輸送行列は、上式と誤差磁場が存在  
しない場合のリング一周分の輸送行列  $M_0$  より、

$$M(s_1) = M_0(s_1) m(s_1) \quad (83)$$

となり、誤差磁場により生じる位相進みの変化量  
は、 $\cos \mu = 1/2(\text{Tr } M)$ の関係より、

$$\cos \mu - \cos \mu_0 = \Delta(\cos \mu) = -\frac{\sin \mu_0}{2} \beta(s_1) \kappa(s_1) ds_1 \quad (84)$$

即ち、

$$\Delta \mu = \frac{1}{2} \beta(s_1) \kappa(s_1) ds_1 \quad (85)$$

となる。従って、誤差磁場によるチューンのシフ  
ト量は、

$$\Delta \nu = \frac{\Delta \mu}{2\pi} = \frac{1}{4\pi} \beta(s_1) \kappa(s_1) ds_1 \quad (86)$$

となり、又、誤差が全周に亘り分布している場合  
は、式(86)を  $s$  について積分することで、

$$\Delta \nu = \frac{\Delta \mu}{2\pi} = \frac{1}{4\pi} \oint \beta(s_1) \kappa(s_1) ds_1 \quad (87)$$

と与えられる。

次に、四極誤差磁場により生じるベータ関数変  
調を議論する。此処でも、 $s=s_1$ の微小領域に四極  
誤差磁場が存在すると仮定して議論を始める。先  
程は、 $s=s_1$ での1ターン輸送行列  $M(s_1)$ を求めた  
が、今回は、 $s=s_2$ での1ターン輸送行列  $M(s_2)$   
を求める。

$$M(s_2) = M(s_2 | s_1) m(s_1) M(s_1 | s_2) \quad (88)$$

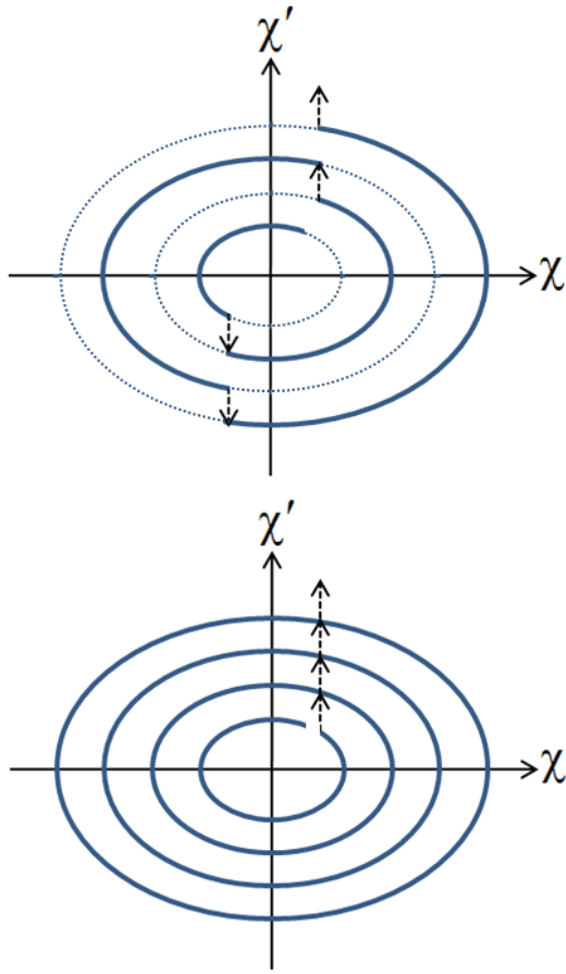


図 6: 半整数共鳴条件を満たした場合の位相空間でのビーム粒子の軌跡。上図は、チューンが半整数、下図は、整数の場合を示す。

此処で、行列要素(1,2)に関して、誤差磁場が存在しない場合の  $M_0(s_2)$  との差を取ると、

$$\Delta M_{12} = -\kappa_1 ds_1 \beta_1 \beta_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \times \sin(2\pi\nu_0 + \varphi_2 - \varphi_1) \quad (89)$$

となる。又、 $M_{12} = \beta \sin 2\pi\nu$  なので、

$$\Delta M_{12} = (\Delta\beta_2) \sin 2\pi\nu_0 + \beta_2 \cos 2\pi\nu_0 (2\pi\Delta\nu) \quad (90)$$

という関係も与えられ、式(86), (89), (90)より、誤差により生じるベータ関数の変化量は、

$$\frac{\Delta\beta_2}{\beta_2} = -\frac{1}{2 \sin 2\pi\nu_0} \times \kappa_1 ds_1 \beta_1 \cos 2(\pi\nu_0 - |\varphi_1 - \varphi_2|) \quad (91)$$

となり、リングに誤差が分布している場合は、

$$\frac{\Delta\beta(s)}{\beta(s)} = -\frac{1}{2 \sin 2\pi\nu_0} \oint \kappa(s_1) \beta(s_1) \times \cos 2(\pi\nu_0 - |\varphi(s_1) - \varphi(s)|) ds_1 \quad (92)$$

と与えられる。

又、式(92)から、チューンが整数、若しくは、半整数に近づいた場合にベータ関数の変調が発散することが導かれる。この現象は、 $2\nu = \ell$  の場合に起こるので、半整数共鳴と呼ばれている。図 6 に示す通り、整数共鳴の場合と同様に、ビーム粒子が共鳴条件を満たすと、四極キックの影響がターン毎に積み上がる。

## 2.8 分散関数

此処までは、中心運動量を持った粒子の運動を取り扱ってきたが、実際の加速器では、様々な運動量を持ったビーム粒子が周回しており、それぞれが、その運動量に従って異なった閉軌道を形成する。本節では、中心運動量から  $\delta = \Delta p/p$  だけ異なった運動量を持つ粒子の運動を論じてゆくが、一般に、偏向作用の無い鉛直方向  $y$  の運動は、一次近似の範囲で中心運動量を持つ場合の運動と同じなので、此処での議論は、水平方向  $x$  の運動に特化する。

運動量が  $\delta$  だけ離れた粒子に対する  $x$  方向の運動方程式は、式(15)の 2 次以上の項を省略すると、

$$x'' + \left(\frac{1}{\rho^2} + k_1(s)\right)x = \frac{\delta}{\rho},$$

$$k_1(s) = \frac{1}{B\rho} \frac{\partial B_y}{\partial x} \quad (93)$$

と与えられる。此処で、方程式(93)の解を、

$$x''_{\beta} + \left(\frac{1}{\rho^2} + k_1(s)\right)x_{\beta} = 0, \quad (94)$$

$$D'' + \left(\frac{1}{\rho^2} + k_1(s)\right)D = \frac{1}{\rho} \quad (95)$$

を満足する  $x_{\beta}(s)$  と  $D(s)\delta$  の線形結合

$$x = x_{\beta}(s) + D(s)\delta \quad (96)$$

として求め、粒子の運動を、 $\delta$ により生じる新たな閉軌道  $D(s)\delta$  とその回りのベータatron振動  $x_{\beta}(s)$  として取り扱う。式(95)は、

$$\frac{\delta}{\rho} \Rightarrow \frac{\Delta B}{B\rho}, \quad D\delta \Rightarrow \chi \quad (97)$$

と置き換えれば、二極磁場誤差が存在した場合の運動方程式(80)と一致する。言い方を変えれば、運動量変位 $\delta$ の影響を、

$$\frac{\Delta B}{B\rho} ds = \frac{\delta}{\rho} ds \quad (98)$$

という二極キックと見做すことができる為、閉軌道変形の式(79)に対し、(97)の置き換えを行うことにより、 $\delta$ を持つ粒子の閉軌道は、

$$D(s)\delta = \delta \frac{\sqrt{\beta_x(s)}}{2 \sin \pi \nu_x} \oint \frac{\sqrt{\beta_x(t)}}{\rho} \times \cos(\pi \nu_x - |\varphi(s) - \varphi(t)|) dt \quad (99)$$

と与えられる。 $D(s)$ は分散関数と呼ばれ、運動量変位によって生じる閉軌道変位を特徴づける。

## 2.9 色収差

前節では、運動量と閉軌道の関係を論じたが、運動量の違いにより、収束作用も変化する。この効果を色収差と呼ぶ。運動方程式(93)~(95)は、 $\delta$ について高次の微小量を省略しているため、色収差の効果を含んでいないが、高次の項を含めて水平・鉛直方向の閉軌道回りの振動の運動方程式を書き直すと、

$$\begin{aligned} x_\beta'' + \left( \frac{1}{\rho^2} + k_1(s) + \Delta k_x(s) \right) x_\beta &= 0, \\ y_\beta'' + (\Delta k_y(s) - k_1(s)) y_\beta &= 0, \\ \Delta k_x(s) &\approx \left( -\frac{2}{\rho^2} - k_1(s) \right) \delta = -\Delta k_x(s) \delta, \\ \Delta k_y(s) &\approx k_1(s) \delta = -\Delta k_y(s) \delta \end{aligned} \quad (100)$$

となる。即ち、 $\delta$ の影響は、 $\Delta k_{x,y}(s)$  という四極磁場の誤差と見做せ、 $\delta$ により生じるチューンのずれは、式(87)より、

$$\begin{aligned} \Delta v_x &= \left( -\frac{1}{4\pi} \oint \beta_x(s) \Delta k_x(s) ds \right) \delta, \\ \Delta v_y &= \left( -\frac{1}{4\pi} \oint \beta_y(s) \Delta k_y(s) ds \right) \delta \end{aligned} \quad (101)$$

となる。上式の括弧に現れる

$$\frac{d(\Delta v_x)}{d\delta} = -\frac{1}{4\pi} \oint \beta_x(s) \Delta k_x(s) ds,$$

$$\frac{d(\Delta v_y)}{d\delta} = -\frac{1}{4\pi} \oint \beta_y(s) \Delta k_y(s) ds \quad (102)$$

は、運動量変位で生じるチューンの変化を特徴づける量で、クロマチシティーと呼ぶ。

加速器中を周回するビーム粒子には運動量にばらつきがある為、クロマチシティーが0でない場合には、ビームの運動量分布に従ってチューンに広がりが生じてしまう。このチューンの広がり、ビーム運動の不安定要素となる様々な共鳴現象(2.7, 2.10節)を避けるという点で不利になる可能性もあり、その場合には、六極電磁石を用いてクロマチシティーを補正するのが一般的である。六極磁場は、式(18)より、

$$\frac{\Delta B_y}{B\rho} = \frac{k_2}{2} (x^2 - y^2), \quad (103)$$

$$\frac{\Delta B_x}{B\rho} = k_2 xy,$$

$$k_2 = (\partial^2 B_y / \partial x^2) |_{x=y=0} / B\rho$$

と表わせる。上式に、式(96)を代入し、閉軌道  $D(s)\delta$  とその周りのベータatron振動  $x_\beta(s)$  という系で、ビーム粒子の感じる磁場を表わすと、

$$\begin{aligned} \frac{\Delta B_y}{B\rho} &= \frac{k_2}{2} (x_\beta^2 - y_\beta^2) + (k_2 D\delta) x_\beta \\ &\quad + \frac{k_2}{2} D^2 \delta^2, \\ \frac{\Delta B_x}{B\rho} &= k_2 x_\beta y_\beta + (k_2 D\delta) y_\beta \end{aligned} \quad (104)$$

となる。つまり、六極電磁石は、運動量誤差 $\delta$ を持つビーム粒子に対して、等価的な四極磁場成分(上式右辺第二項)

$$\begin{aligned} \Delta k_x &= k_2 D\delta, \\ \Delta k_y &= -k_2 D\delta \end{aligned} \quad (105)$$

を持つと見做せ、この成分により生じるクロマチシティーは、

$$\begin{aligned} \frac{d(\Delta v_x)}{d\delta} &= \frac{1}{4\pi} \oint \beta_x(s) k_2(s) D(s) ds, \\ \frac{d(\Delta v_y)}{d\delta} &= -\frac{1}{4\pi} \oint \beta_y(s) k_2(s) D(s) ds \end{aligned} \quad (106)$$

となる。即ち、リング内の分散の存在する場所に六極電磁石を上手く配置することで、クロマチ

シティー補正が可能となり、補正後のクロマティシティーは、式(102), (106)より、

$$\begin{aligned}\frac{d(\Delta v_x)}{d\delta} &= -\frac{1}{4\pi} \oint [\beta_x(s)(\Delta k_x(s) \\ &\quad - k_2(s)D(s))] ds, \\ \frac{d(\Delta v_y)}{d\delta} &= -\frac{1}{4\pi} \oint [\beta_y(s)(\Delta k_y(s) \\ &\quad + k_2(s)D(s))] ds\end{aligned}\quad (107)$$

となる。

## 2.10 ベータトロン共鳴

既に 2.7 節で、整数・半整数共鳴について議論した通り、チューンがある条件を満たした時、急激に振動が不安定になる現象を共鳴と呼ぶ。実際の加速器では、主成分である二極磁場・四極磁場の誤差に加え、更に次数の高い磁場成分やねじれ成分を持った磁場が、誤差や補正量として存在する。高次磁場成分としては、前節で述べたクロマティシティー補正に使用する六極磁場が代表格として挙げられ、又、四極磁場や高次の磁場成分が電磁石の設置誤差等の原因で中心軸の回りに僅かでも回転していると、ねじれ成分を持った磁場が発生する。

こうした磁場成分は、ベータトロン振動に様々な影響を及ぼす。高次の磁場成分があると、ベータトロン振動が非線形振動となる。非線形振動は、振動の振幅がある一定値を超えると、急激に振動が不安定になるという特徴を持つ。又、四極磁場のねじれ成分や高次磁場が存在すると、x 方向と y 方向の振動が独立でなくなり、結合振動が出現する。この場合は、x 方向と y 方向の振動振幅が交換したり、又は、一方的に増大したりといった現象が起こる。こうした非線形振動や結合振動は、チューンが、

$$m v_x + n v_y = l \quad (m, n, l = \text{整数}) \quad (108)$$

という条件を満たした時に強く励起され、ベータトロン振動が不安定となる。こうした現象をベータトロン共鳴と呼ぶ。此処で、

$$q = |m| + |n| \quad (109)$$

は、共鳴の次数であり、2q 極磁場が q 次共鳴の主原因となる。又、l は、共鳴の原因となる磁場成

分の軌道上の分布をフーリエ展開した時の次数 (ハーモニクス) を示す。

本節では、一般の加速器で代表的な、ねじれ四極磁場成分によって誘起される線形結合共鳴と、六極磁場で励起される三次共鳴について詳細を議論する。

### 2.10.1 ねじれ四極磁場の影響 (線形結合共鳴)

ハミルトニアン(11)に対し、 $\mathbf{x}/\rho$ を微小量と見做し、又、 $\mathbf{p}=\mathbf{p}_0$  (中心運動量) と仮定する。又、そのハミルトニアンを  $\mathbf{p}_0$  で割って、定数項を省略し、

$$\begin{aligned}x' &= dx/ds \approx p_x / p_0, \\ y' &= dy/ds \approx p_y / p_0\end{aligned}\quad (110)$$

の置き換えを行う。又、 $A_s$  について、式(17)より、二極 ( $b_0$ )・四極磁場 ( $b_1$ ) とねじれ四極磁場 ( $a_1$ ) を考慮すると、ハミルトニアンは、以下のように表わされる。

$$\begin{aligned}H_3(\mathbf{x}, \mathbf{x}', y, y'; s) \\ = \frac{1}{2}(x'^2 + k_x x^2) + \frac{1}{2}(y'^2 + k_y y^2) \\ + Sk_1(xy),\end{aligned}\quad (111)$$

$$Sk_1 = -\frac{1}{B\rho} \left( \frac{\partial B_x}{\partial x} \right)$$

上式右辺の第一項・第二項が x 方向と y 方向の線形独立な振動を与える主要項で、第三項がねじれ四極磁場成分に由来する摂動項 (xy 結合項) である。

此処で、2.5 節で行った様に、母関数

$$\begin{aligned}F_1(x, y, \varphi_x, \varphi_y) \\ = -\frac{x^2}{2\beta_x} \left( \tan \varphi_x - \frac{\beta'_x}{2} \right) \\ - \frac{y^2}{2\beta_y} \left( \tan \varphi_y - \frac{\beta'_y}{2} \right)\end{aligned}\quad (112)$$

を用いて、Action-Angle 変数へ正準変換を行う。正準変数の変換式

$$\begin{aligned}p_x &= \frac{\partial F_1}{\partial x}, J_x = -\frac{\partial F_1}{\partial \varphi_x}, \\ p_y &= \frac{\partial F_1}{\partial y}, J_y = -\frac{\partial F_1}{\partial \varphi_y}\end{aligned}\quad (113)$$

つまり、

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt{2\beta_x J_x} \cos \varphi_x, \\
p_x &= -\sqrt{\frac{2J_x}{\beta_x}} (\sin \varphi_x - \alpha_x \cos \varphi_x), \\
y &= \sqrt{2\beta_y J_y} \cos \varphi_y, \\
p_y &= -\sqrt{\frac{2J_y}{\beta_y}} (\sin \varphi_y - \alpha_y \cos \varphi_y)
\end{aligned} \tag{114}$$

より、新たなハミルトニアンは、

$$\begin{aligned}
H_4(\varphi_x, J_x, \varphi_y, J_y; s) \\
&= H_3 + \frac{\partial F_1}{\partial s} \\
&= \frac{J_x}{\beta_x} + \frac{J_y}{\beta_y} + \sqrt{\beta_x \beta_y J_x J_y} \cdot \text{Sk}_1 \\
&\quad \times (\cos(\varphi_x - \varphi_y) + \cos(\varphi_x + \varphi_y))
\end{aligned} \tag{115}$$

となる。上式を更に、母関数

$$\begin{aligned}
F_2(\varphi_x, \varphi_y, \tilde{J}_x, \tilde{J}_y) \\
&= (\varphi_x - \int_0^s \frac{1}{\beta} ds + v_x \theta) \tilde{J}_x \\
&\quad + (\varphi_y - \int_0^s \frac{1}{\beta} ds + v_y \theta) \tilde{J}_y
\end{aligned} \tag{116}$$

を用いて正準変換を行う。此処で、 $\theta = s/R$  で、 $R$  は基準軌道の平均半径である。以下の変換式

$$\begin{aligned}
\phi_x &= \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{J}_x} = \varphi_x - \int_0^s \frac{1}{\beta_x} ds + v_x \theta \\
&= \varphi_x - \psi_x + v_x \theta, \\
J_x &= \frac{\partial F_2}{\partial \varphi_x} = \tilde{J}_x, \\
\phi_y &= \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{J}_y} = \varphi_y - \int_0^s \frac{1}{\beta_y} ds + v_y \theta \\
&= \varphi_y - \psi_y + v_y \theta, \\
J_y &= \frac{\partial F_2}{\partial \varphi_y} = \tilde{J}_y
\end{aligned} \tag{117}$$

より、新たなハミルトニアンは、

$$\begin{aligned}
H_5(\phi_x, J_x, \phi_y, J_y; s) \\
&= H_4 + \frac{\partial F_2}{\partial s} = \frac{v_x J_x}{R} + \frac{v_y J_y}{R} + V_{lc},
\end{aligned} \tag{118}$$

$$\begin{aligned}
V_{lc} &= \sqrt{J_x J_y} [\sqrt{\beta_x \beta_y} \cdot \text{Sk}_1 \\
&\quad \times (\cos(\varphi_x - \varphi_y) + \cos(\varphi_x + \varphi_y))]
\end{aligned}$$

となる。ねじれ四極成分に由来する  $V_{lc}$  の角括弧の中は、 $s$  の周期関数となり、その部分をフーリエ展開して表記すると、

$$\begin{aligned}
V_{lc} &= \frac{\sqrt{J_x J_y}}{2R} \sum_{\ell} (G_{1,-1,\ell} e^{j(\phi_x - \phi_y - \ell\theta + \xi)} + \text{c.c.}) \\
&\quad + \frac{\sqrt{J_x J_y}}{2R} \sum_{\ell} (G_{1,1,\ell} e^{j(\phi_x + \phi_y - \ell\theta + \xi)} + \text{c.c.})
\end{aligned} \tag{119}$$

となる。此処で、フーリエ係数  $G$  は、

$$\begin{aligned}
G_{1,-1,\ell} e^{j\xi} &= \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{\beta_x \beta_y} \cdot \text{Sk}_1 \\
&\quad \times e^{j(\psi_x - \psi_y - (v_x - v_y - \ell)\theta)} ds, \\
G_{1,1,\ell} e^{j\xi} &= \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{\beta_x \beta_y} \cdot \text{Sk}_1 \\
&\quad \times e^{j(\psi_x + \psi_y - (v_x + v_y - \ell)\theta)} ds
\end{aligned} \tag{120}$$

で与えられる。上式右辺の振動項は、 $v_x - v_y = \ell$ 、若しくは、 $v_x + v_y = \ell$  の近傍で遅い関数となり、その積分で示されるフーリエ係数  $G$  は、その条件下で有意な値をとり、ベータトロン振動に強く寄与する。 $v_x - v_y = \ell$  近傍で出現する現象を線形結合差共鳴、又、 $v_x + v_y = \ell$  近傍での不安定性を線形結合和共鳴と呼ぶ。

又、そのフーリエ係数  $G$  は、線形結合共鳴のソースであるねじれ四極磁場が、加速器の対称性  $P$  と同じ周期性を持って分布している場合は、 $\ell = nP$  ( $n$ :整数) という関係が成り立つ際に有意な値を持ち、 $\ell \neq nP$  の場合は  $0$  となるという特徴を持つ。 $\ell = nP$  の条件下では、各周期の積分への寄与が一方的に足しまれ、一般に、 $G$  は大きな値を持ち、ベータトロン振動に大きな影響をもたらす。この状況下で出現する共鳴を構造共鳴と呼ぶ。一方、共鳴のソース磁場が、加速器の対称性とは無関係にランダムに分布している場合、即ち、四極電磁石の設置誤差 (中心軸の回りの回転誤差) 等の場合には、一般に  $G$  の値は小さいが、全ての整数  $\ell$  で  $0$  以外の値を持つ。こうした共鳴を非構造共鳴と呼ぶ。このフーリエ係数  $G$  は、共



鳴の強度を示す量であり、共鳴の driving term と呼ばれる。以上の G の特徴は、線形結合共鳴だけでなく、以下の節で議論する三次共鳴等、全ての共鳴現象で成立する。

以下で、差共鳴と和共鳴の特徴を詳細に議論する。

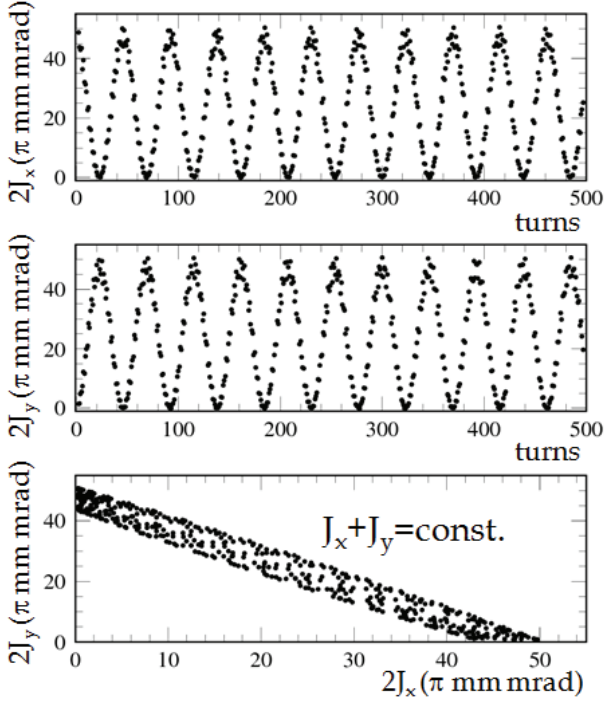


図 7 :  $\delta_1 = v_x - v_y - 1 \approx 0$  での単粒子トラッキングで得られた線形結合振動の様子。

#### <線形結合差共鳴>

上記の議論を考慮すると、ハミルトニアン(118)~(120)は、 $v_x - v_y = \ell$  近傍で、

$$\begin{aligned} H_6(\phi_x, J_x, \phi_y, J_y; \theta) \\ \approx v_x J_x + v_y J_y \\ + G_{1,-1,\ell} \sqrt{J_x J_y} \cos(\phi_x - \phi_y - \ell\theta + \xi) \end{aligned} \quad (121)$$

と近似される。此処で更に上式を、母関数

$$\begin{aligned} F_2(\phi_x, \phi_y, J_1, J_2) \\ = (\phi_x - \phi_y - \ell\theta + \xi) J_1 + \phi_y J_2 \end{aligned} \quad (122)$$

を用いて正準変換する。変換式

$$\phi_1 = \frac{\partial F_2}{\partial J_1} = \phi_x - \phi_y - \ell\theta + \xi,$$

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{\partial F_2}{\partial \phi_x} = J_1, \\ \phi_2 &= \frac{\partial F_2}{\partial J_2} = \phi_y, \\ J_y &= \frac{\partial F_2}{\partial \phi_y} = J_2 - J_1 \end{aligned} \quad (123)$$

より、新たなハミルトニアンは、

$$\begin{aligned} H_7(\phi_1, J_1, \phi_2, J_2; \theta) \\ = H_6 + \frac{\partial F_2}{\partial \theta} \\ = H_a + H_b, \end{aligned} \quad (124)$$

$$H_a = \delta_1 J_1 + G_{1,-1,\ell} \sqrt{J_1(J_2 - J_1)} \cos \phi_1,$$

$$H_b = v_y J_2,$$

$$\delta_1 = v_x - v_y - \ell$$

となる。上式は、 $\phi_2$  と  $\theta$  を含まないので、 $J_2$  と  $H_7$  は不変量となる。

$$\begin{aligned} H_a &= E = \text{const.}, \\ J_2 &= J_x + J_y = \text{const.} \end{aligned} \quad (125)$$

又、式(124)より、ハミルトン方程式は、

$$\begin{aligned} \dot{J}_1 &= G_{1,-1,\ell} \sqrt{J_1(J_2 - J_1)} \sin \phi_1, \\ \dot{\phi}_1 &= \delta_1 + G_{1,-1,\ell} \frac{J_2 - 2J_1}{2\sqrt{J_1(J_2 - J_1)}} \cos \phi_1 \end{aligned} \quad (126)$$

となり、上記の 2 式より、 $J_1$  についての運動方程式が導かれる。

$$\begin{aligned} \ddot{J}_1 + \lambda^2 J_1 &= \lambda^2 \bar{J}, \\ \lambda &= \sqrt{\delta_1^2 + G_{1,-1,\ell}^2}, \end{aligned} \quad (127)$$

$$\bar{J} = (2\delta_1 E + G_{1,-1,\ell}^2 J_2) / 2\lambda^2$$

此処で、 $\lambda$  は実数なので、上式は、

$$\begin{aligned} J_1 &= J_x \\ &= \sqrt{\bar{J}^2 - E^2 / \lambda^2} \cos(\lambda\theta + \zeta) + \bar{J} \end{aligned} \quad (128)$$

という振動解を与える。つまり、 $v_x - v_y = \ell$  近傍のビーム振動は、 $J_2 = J_x + J_y = \text{const.}$  という条件に従って、x 方向と y 方向のベータatron 振幅が交換し合い、その振幅交換のチューンが  $\lambda$  で与えられる。図 7 に、 $\delta_1 = v_x - v_y - 1 \approx 0$  で、 $J_x \neq 0$ 、 $J_y = 0$  という初期値で行った単粒子トラッキングの結果を示す。式(128)からも明らかであるが、

この場合は、初期値で与えた  $x$  方向の振幅が、完全に  $y$  方向へ移行する。

<線形結合和共鳴>

和共鳴の場合も、差共鳴と同様の手続きを行う。式(118)~(120)より、 $v_x + v_y = \ell$  近傍でのハミルトニアンは、

$$\begin{aligned} H_6(\phi_x, J_x, \phi_y, J_y; \theta) \\ \approx v_x J_x + v_y J_y \\ + G_{1,1,\ell} \sqrt{J_x J_y} \cos(\phi_x + \phi_y - \ell\theta + \xi) \end{aligned} \quad (129)$$

となる。次に、上式を、母関数

$$\begin{aligned} F_2(\phi_x, \phi_y, J_1, J_2) \\ = (\phi_x + \phi_y - \ell\theta + \xi) J_1 + \phi_y J_2 \end{aligned} \quad (130)$$

を用いて正準変換する。変換式

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{\partial F_2}{\partial J_1} = \phi_x + \phi_y - \ell\theta + \xi, \\ J_x &= \frac{\partial F_2}{\partial \phi_x} = J_1, \\ \phi_2 &= \frac{\partial F_2}{\partial J_2} = \phi_y, \\ J_y &= \frac{\partial F_2}{\partial \phi_y} = J_1 + J_2 \end{aligned} \quad (131)$$

より、ハミルトニアン(129)は、

$$\begin{aligned} H_7(\phi_1, J_1, \phi_2, J_2; \theta) \\ = H_6 + \frac{\partial F_2}{\partial \theta} \\ = H_a + H_b, \end{aligned} \quad (132)$$

$$H_a = \delta_1 J_1 + G_{1,1,\ell} \sqrt{J_1(J_2 + J_1)} \cos \phi_1,$$

$$H_b = v_y J_2,$$

$$\delta_1 = v_x + v_y - \ell$$

と変換される。上式は、 $\phi_2$  と  $\theta$  を含まないので、 $J_2$  と  $H_7$  は不変量となる。

$$H_a = E = \text{const.}, \quad (133)$$

$$J_2 = J_y - J_x = \text{const.}$$

差共鳴の場合には、 $J_x + J_y$  が運動の定数であったが、和共鳴では、 $J_y - J_x$  が不変量となる。即ち、和共鳴は、 $x$  方向と  $y$  方向のベータトロン振幅が、

際限なく増大するといった不安定性を導く。式(132)より、ハミルトン方程式は、

$$\begin{aligned} \dot{J}_1 &= G_{1,1,\ell} \sqrt{J_1(J_2 + J_1)} \sin \phi_1, \\ \dot{\phi}_1 &= \delta_1 + G_{1,1,\ell} \frac{J_2 + 2J_1}{2\sqrt{J_1(J_2 + J_1)}} \cos \phi_1 \end{aligned} \quad (134)$$

となり、上式より、 $J_1$  についての運動方程式は、

$$\begin{aligned} \ddot{J}_1 + \lambda^2 J_1 &= \lambda^2 \bar{J}, \\ \lambda &= \sqrt{\delta_1^2 - G_{1,1,\ell}^2}, \end{aligned} \quad (135)$$

$$\bar{J} = (2\delta_1 E + G_{1,1,\ell}^2 J_2) / 2\lambda^2$$

と与えられる。差共鳴の場合は、 $\lambda = \sqrt{\delta_1^2 + G_{1,-1,\ell}^2}$

が実数であった為、 $J_1$  は振動解となったが、和共鳴の場合、 $\lambda = \sqrt{\delta_1^2 - G_{1,1,\ell}^2}$  は、

$$|\delta_1| < G_{1,1,\ell} \quad (136)$$

の際に虚数となる。即ち、和共鳴の不安定性の条件は、式(136)で与えられ、その場合、ベータトロン振動の振幅は、 $J_y - J_x = \text{const.}$  という関係に従って指数関数的に増大する。

### 2.10.2 六極磁場の影響 (三次共鳴)

次に、加速器中に、六極磁場が存在する場合を考察する。この場合も、前節と同様の手続きを行う。 $A_s$  について、式(17)より、二極 ( $b_0$ )・四極磁場 ( $b_1$ ) と六極磁場 ( $b_2$ ) を考慮すると、式(111)に対応するハミルトニアンは、以下のように表わされる。

$$\begin{aligned} H_3(x, x', y, y'; s) \\ = \frac{1}{2}(x'^2 + k_x x^2) + \frac{1}{2}(y'^2 + k_y y^2) \\ + \frac{k_2}{6}(x^3 - 3xy^2), \end{aligned} \quad (137)$$

$$k_2 = \frac{1}{B\rho} \left( \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \right)$$

次に、母関数(112)と(116)を用いて正準変換を二回行うと、上式は、

$$\begin{aligned} H_5(\phi_x, J_x, \phi_y, J_y; s) \\ = H + \frac{\partial F_2}{\partial s} = \frac{v_x J_x}{R} + \frac{v_y J_y}{R} + V_3, \end{aligned} \quad (138)$$

$$V_3 = \frac{\sqrt{2}}{12} \sqrt{J_x^3} \sqrt{\beta_x^3} \cdot k_2 [\cos 3\varphi_x + 3 \cos \varphi_x] \\ - \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{J_x J_y^2} \sqrt{\beta_x \beta_y^2} \cdot k_2 [2 \cos \varphi_x \\ + \cos(\varphi_x + 2\varphi_y) + \cos(\varphi_x - 2\varphi_y)]$$

と変換される。前節での議論から察しがつく通り、六極磁場は、以下の共鳴を誘起する。

$$\begin{aligned} \cos 3\varphi_x &\rightarrow 3v_x = \ell, \\ \cos \varphi_x &\rightarrow v_x = \ell, \\ \cos(\varphi_x - 2\varphi_y) &\rightarrow v_x - 2v_y = \ell, \\ \cos(\varphi_x + 2\varphi_y) &\rightarrow v_x + 2v_y = \ell \end{aligned} \quad (139)$$

各現象を考察する為の手続きは、全て同様なので、此处では、六極磁場により励起される特徴的な三次共鳴  $3v_x = \ell$  と  $v_x - 2v_y = \ell$  について以下で詳細を検討する。

<  $3v_x = \ell$  共鳴 >

此处では、

$$V_3 = \sqrt{J_x^3} \left[ \frac{\sqrt{2}}{12} \sqrt{\beta_x^3} \cdot k_2 \cos 3\varphi_x \right] \quad (140)$$

に着目し、 $x$  方向の運動に出現する  $3v_x = \ell$  共鳴について議論する。先ず、 $s$  の周期関数である上式の角括弧の中をフーリエ展開する。

$$V_3 = \frac{\sqrt{J_x^3}}{2R} \sum_{\ell} (G_{3,0,\ell} e^{j(3\varphi_x - \ell\theta + \xi)} + \text{c.c.}), \quad (141)$$

$$G_{3,0,\ell} e^{j\xi} = \frac{\sqrt{2}}{24\pi} \oint \sqrt{\beta_x^3} \cdot k_2 e^{j(3v_x - (3v_x - \ell)\theta)} ds$$

上式において、 $3v_x = \ell$  近傍で有意な項のみ考慮すると、ハミルトニアンは、

$$H_6(\phi_x, J_x; \theta) \approx v_x J_x \quad (142)$$

$$+ G_{3,0,\ell} \sqrt{J_x^3} \cos(3\phi_x - \ell\theta + \xi)$$

と表わせる。此处で、 $G_{3,0,\ell}$  が、この 3 次共鳴の強度を示す driving term である。更に、母関数

$$F_2(\phi_x, J) = \left( \phi_x - \frac{\ell}{3}\theta + \frac{\xi}{3} \right) J \quad (143)$$

を用いて正準変換する。変換式

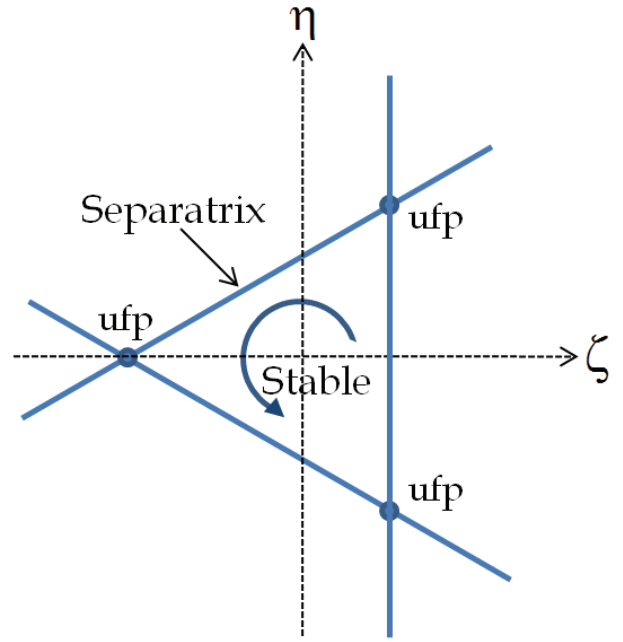


図 8 :  $3v_x = \ell$  共鳴のセパトリクス。

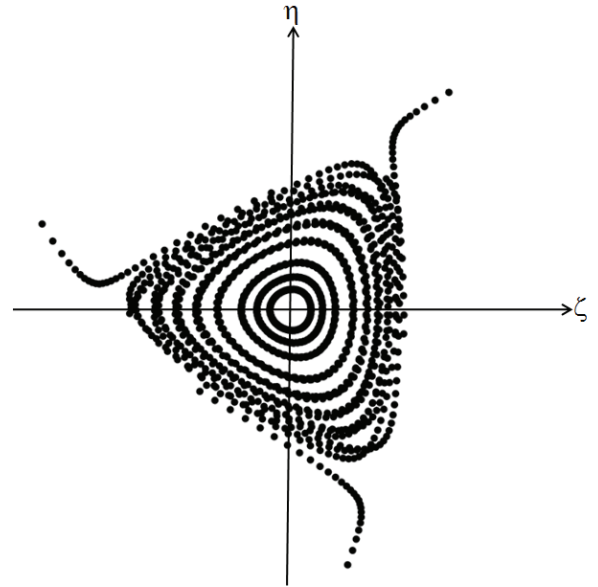


図 9 :  $3v_x=20$  近傍での単粒子トラッキングで得られたビーム粒子の軌跡。

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\partial F_2}{\partial J} = \phi_x - \frac{\ell}{3}\theta + \frac{\xi}{3}, \\ J_x &= \frac{\partial F_2}{\partial \phi_x} = J \end{aligned} \quad (144)$$

を用いて、ハミルトニアン(142)は、

$$H_7(\phi, J; \theta) = H_6 + \frac{\partial F_2}{\partial \theta} \quad (145)$$

$$= \delta J + G_{3,0,\ell} \sqrt{J^3} \cos 3\phi,$$

$$\delta = v_x - \frac{\ell}{3}$$

と変換される。上式は、 $\theta$ を含まないので、 $H_7$ は不変量となる。

$$\delta J + G_{3,0,\ell} \sqrt{J^3} \cos 3\phi = E = \text{const.} \quad (146)$$

式(145)より、ハミルトン方程式は、

$$\dot{J} = 3G_{3,0,\ell} \sqrt{J^3} \sin 3\phi, \quad (147)$$

$$\dot{\phi} = \delta + \frac{3}{2} G_{3,0,\ell} \sqrt{J} \cos 3\phi$$

と与えられ、 $J$ についての運動方程式は、

$$\ddot{J} + 9\delta^2 J - \frac{27}{2} G_{3,0,\ell}^2 J^2 = 9\delta E \quad (148)$$

となる。上式は、非線形振動を与える式であり、振幅がある一定値を超えた場合に、ビーム振動が不安定になるといった特徴を持つ。ビーム振幅の安定・不安定領域の境界（セパトリクス）は、ハミルトニアンが与える極大点（unstable fixed point; ufp）より求まる。ハミルトニアン(145)の ufp は、 $\delta H_7 = 0$ 、つまり、 $\dot{J} = 0$ 、 $\dot{\phi} = 0$  より、

$$J_{\text{ufp}} = \left( \frac{2\delta}{3G_{3,0,\ell}} \right)^2, \quad (149)$$

$$\phi_{\text{ufp}} = \begin{cases} 0, \pm 2\pi/3 & (\text{if } \delta/G_{3,0,\ell} < 0), \\ \pi, \pm \pi/3 & (\text{if } \delta/G_{3,0,\ell} > 0) \end{cases}$$

と与えられ、セパトリクスは、上の3つの極大点を通る式(146)の軌跡となる。

$$\delta J + G_{3,0,\ell} \sqrt{J^3} \cos 3\phi = E_{\text{ufp}} = \frac{\delta}{3} J_{\text{ufp}} \quad (150)$$

此処で上式を、規格化座標系

$$\zeta = \sqrt{\frac{J}{J_{\text{ufp}}}} \cos \phi, \quad \eta = \sqrt{\frac{J}{J_{\text{ufp}}}} \sin \phi \quad (151)$$

へ変換すると、

$$(2\zeta - 1)\left(\eta - \frac{1}{\sqrt{3}}(\zeta + 1)\right) \times \left(\eta + \frac{1}{\sqrt{3}}(\zeta + 1)\right) = 0 \quad (152)$$

となる。この座標系で、ufp は、

$$(\zeta, \eta)_{\text{ufp}} = (-1, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad (153)$$

となり、その ufp を通過する以下の3つの直線

$$\zeta = \frac{1}{2}, \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{3}}(\zeta + 1), \quad (154)$$

$$\eta = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\zeta + 1)$$

がセパトリクスを与える（図8）。このセパトリクスの外側に存在した場合、即ち、

$$J_{\text{ufp}} = \left( \frac{2\delta}{3G_{3,0,\ell}} \right)^2 < J, \quad (155)$$

$$|\delta| < \frac{3G_{3,0,\ell}}{2} J^{1/2}$$

の条件下で、ビーム振動が不安定となり、ビームの振幅は発散する。図9に、単粒子トラッキング計算の結果を示す。これは、様々な  $J$  に対するビーム粒子の軌跡であるが、 $J$  が  $J_{\text{ufp}}$  を越えた場合に、ビーム振幅が増大してゆく様子が見られる。実際、式(148)へ、 $K = J - J_{\text{ufp}}$ 、 $E = E_{\text{ufp}}$  を代入して得られるセパトリクス上の運動方程式

$$\ddot{K} - 3\delta^2 K - 6 \frac{\delta^2}{J_{\text{ufp}}} K^2 = 0 \quad (156)$$

は、右辺三番目の非線形項により、指数関数的な解を与える。

<  $v_x - 2v_y = \ell$  共鳴 >

次は、

$$V_3 = \sqrt{J_x J_y^2} \left[ -\frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{\beta_x \beta_y^2} k_2 \cos(\phi_x - 2\phi_y) \right] \quad (157)$$

に着目し、 $v_x - 2v_y = \ell$  共鳴を考える。この共鳴についても上と同様の手続きを行う。先ず、上式の角括弧の中をフーリエ展開する。

$$V_3 = \frac{\sqrt{J_x J_y^2}}{2R} \sum_{\ell} (G_{1,-2,\ell} e^{j(\phi_x - 2\phi_y - \ell\theta + \xi)} + \text{c.c.}),$$

$$G_{1,-2,\ell} e^{j\xi} = -\frac{\sqrt{2}}{8\pi} \oint \sqrt{\beta_x \beta_y^2} k_2 \times e^{j(\psi_x - 2\psi_y - (v_x - 2v_y - \ell)\theta)} ds \quad (158)$$

式(138), (158)より、 $v_x - 2v_y = \ell$  近傍でのハミルトニアンは、

$$H_6(\phi_x, J_x, \phi_y, J_y; \theta) \approx v_x J_x + v_y J_y + G_{1,-2,\ell} \sqrt{J_x J_y^2} \times \cos(\phi_x - 2\phi_y - \ell\theta + \xi) \quad (159)$$

となる。此処で、 $G_{1,-2,\ell}$  が、この3次共鳴の driving term である。更に上式を、母関数

$$F_2(\phi_x, \phi_y, J_1, J_2) = (\phi_x - 2\phi_y - \ell\theta + \xi)J_1 + \phi_y J_2 \quad (160)$$

を用いて正準変換する。正準変数の変換式

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{\partial F_2}{\partial J_1} = \phi_x - 2\phi_y - \ell\theta + \xi, \\ J_x &= \frac{\partial F_2}{\partial \phi_x} = J_1, \\ \phi_2 &= \frac{\partial F_2}{\partial J_2} = \phi_y, \\ J_y &= \frac{\partial F_2}{\partial \phi_y} = J_2 - 2J_1 \end{aligned} \quad (161)$$

より、ハミルトニアンは、

$$\begin{aligned} H_7(\phi_1, J_1, \phi_2, J_2; \theta) &= H_6 + \frac{\partial F_2}{\partial \theta} \\ &= H_a + H_b, \\ H_a &= \delta_1 J_1 + G_{1,-2,\ell} J_1^{1/2} (J_2 - 2J_1) \cos \phi_1, \\ H_b &= v_y J_2, \\ \delta_1 &= v_x - 2v_y - \ell \end{aligned} \quad (162)$$

と変換される。上式は、 $\phi_2$  と  $\theta$  を含まないので、 $J_2$  と  $H_7$  は不変量となる。

$$\begin{aligned} H_a &= E = \text{const.}, \\ J_2 &= 2J_x + J_y = \text{const.} \end{aligned} \quad (163)$$

この共鳴近傍の粒子運動では、 $2J_x + J_y$  が保存量となる。つまり、線形結合差共鳴の場合と同様の  $x$  方向と  $y$  方向の結合振動が導かれる。此処で、ハミルトニアン(162)の ufp を通過する粒子の軌

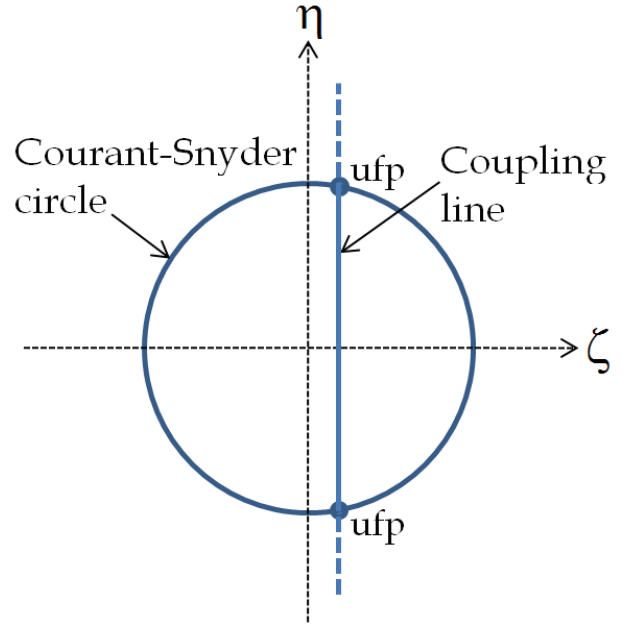


図 10:  $v_x - 2v_y = \ell$  近傍でのビーム粒子の軌跡。

跡から、結合振動が出現する条件を調査する。式(162)より、ハミルトン方程式は、

$$\begin{aligned} \dot{J}_1 &= G_{1,-2,\ell} J_1^{1/2} (J_2 - 2J_1) \sin \phi_1, \\ \dot{\phi}_1 &= \delta_1 + \frac{1}{2} G_{1,-2,\ell} J_1^{-1/2} (J_2 - 6J_1) \cos \phi_1 \end{aligned} \quad (164)$$

となる。又、ハミルトニアン(162)の ufp は、 $\dot{J}_1 = 0$ 、 $\dot{\phi}_1 = 0$  より、

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{J_2}{2}, \\ \phi_1 &= \pm \arccos\left(\frac{\delta_1}{G_{1,-2,\ell} \sqrt{2J_2}}\right) \end{aligned} \quad (165)$$

と与えられる。上記の ufp を通過する粒子の軌跡は、式(163)より、

$$\begin{aligned} \delta_1 J_1 + G_{1,-2,\ell} J_1^{1/2} (J_2 - 2J_1) \cos \phi_1 \\ = E_{\text{ufp}} = \frac{\delta_1}{2} J_2 \end{aligned} \quad (166)$$

で与えられ、以下の規格化座標系

$$\zeta = \sqrt{\frac{2J_1}{J_2}} \cos \phi_1, \quad \eta = \sqrt{\frac{2J_1}{J_2}} \sin \phi_1 \quad (167)$$

へ変換すると、

$$(1 - \zeta^2 - \eta^2)(1 - G_{1,-2,\ell} \sqrt{2J_2} \zeta / \delta_1) = 0 \quad (168)$$



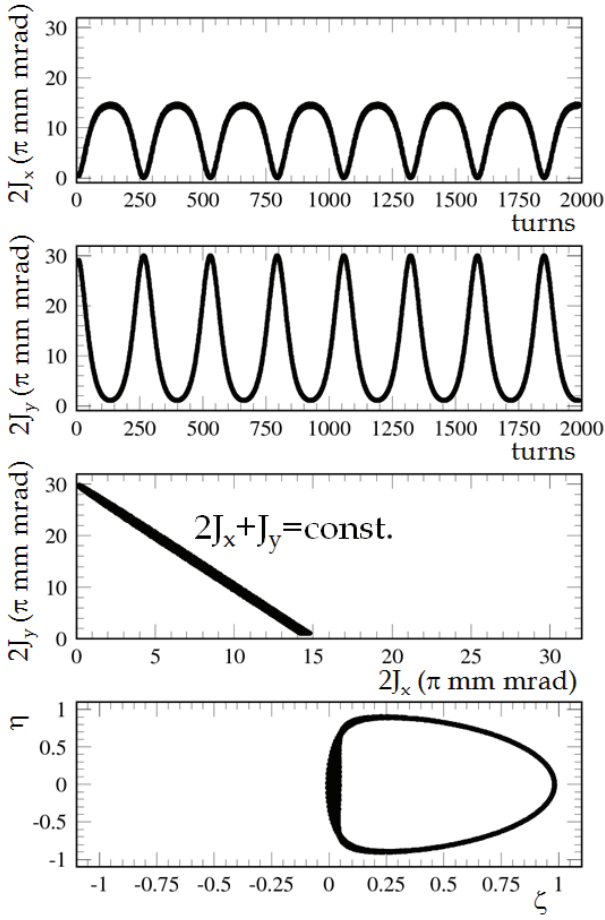


図 11:  $\delta_1 = v_x - 2v_y + 6 \approx 0$ での単粒子トラッキングで得られた非線形結合振動の様子。

となる。つまり、粒子の軌跡は、

$$\zeta^2 + \eta^2 = 1, \quad (169)$$

$$\zeta = \frac{\delta_1}{\sqrt{2J_2 G_{1,-2,\ell}}} \quad (170)$$

という円と直線で表わされ、その交点が **ufp** に対応する (図 10)。結合振動は、その **ufp** が存在する場合、つまり、上の円と直線が交わる条件下、

$$\left| \frac{\delta_1}{\sqrt{2J_2 G_{1,-2,\ell}}} \right| < 1, \quad (171)$$

$$|\delta_1| < \sqrt{2J_2 G_{1,-2,\ell}}$$

で発生する。その場合、粒子は、式(169)の円弧上で、**x** 方向の振幅が最大となる。

$$J_x = \frac{J_2}{2} \quad (172)$$

一方、**ufp** に到達し、式(170)の直線部に導かれると、その **x** 方向の振幅は、 $2J_x + J_y = \text{const.}$  の関係に従って、**y** 方向へ移行する。その際の **x** 方向の最小振幅は、 $\eta=0$  で、

$$J_x = \frac{\delta_1^2}{4G_{1,-2,\ell}^2} \quad (173)$$

となる。図 11 に、 $\delta_1 = v_x - 2v_y + 6 \approx 0$  で、 $J_x = 0, J_y \neq 0$  という初期値で行った単粒子トラッキングの結果を示す。この場合、式(170)は、 $\zeta \approx 0$  となるので、**x** 方向の振幅は、0 から  $J_2/2$  の範囲で振動する。

### 2.10.3 共鳴の補正

エミッタンス増大やビーム損失の原因となっている共鳴の次数とハーモニクスが既知であれば、共鳴の次数と同じ極を持つ補正磁石を使って、その共鳴を相殺することができる。此处では、**J-PARC RCS** での三次構造共鳴  $v_x - 2v_y = -6$  を例に挙げて、共鳴の補正手法を概説する。

**RCS** での三次共鳴のソースは、クロマティシティー補正に使用する六極電磁石と二極電磁石の磁場に内在する六極磁場成分である (詳細は、5.2 節)。六極電磁石の励磁量は、我々が設定すべきものであり、又、二極電磁石が作る六極磁場成分の強度についても、磁場測定によって定量評価されているので、それらが励起する  $v_x - 2v_y = -6$  共鳴の **driving term** は、式(158)を用いて簡単に計算できる。

$$G_{1,-2,-6} e^{j\zeta} = 1.032 + j0.082 \quad (174)$$

つまり、この **driving term** の実部と虚部が共に 0 となるように、共鳴補正用の六極電磁石を励磁すればよい。**RCS** では、将来、共鳴補正等を行う為に、各長直線部の両端 (図 18) に、補正電磁石を導入する為のスペースを残している。この 6 箇所のスペースに、上記の **driving term** を打ち消す為の六極電磁石を設置したと仮定すると、共鳴補正に必要な励磁量は、クロマティシティー補正用六極電磁石の磁場強度の 1/5 程度となる。図 12 に、

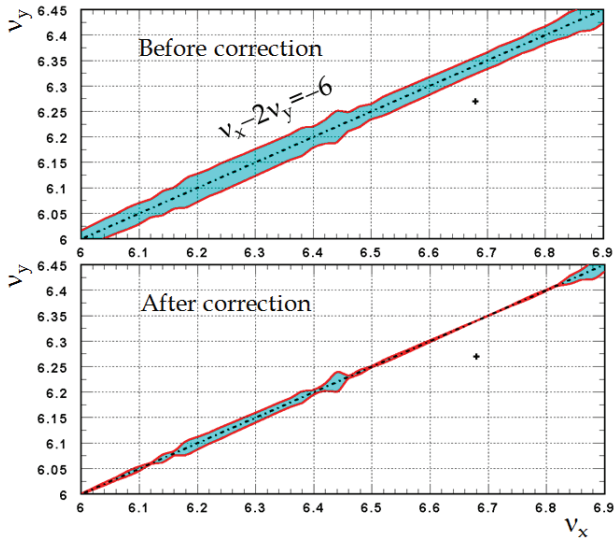


図 12: 共鳴補正前後での  $v_x - 2v_y = -6$  の共鳴幅。

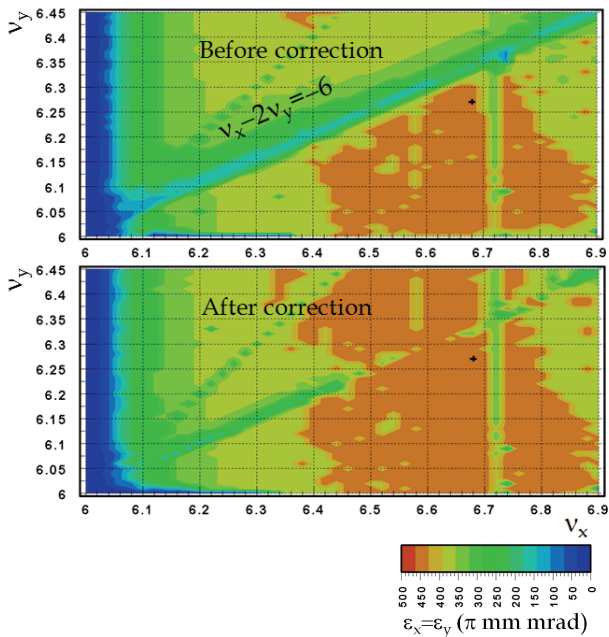


図 13: 単粒子トラッキングで得られた共鳴補正前後での各チューンにおける振動の安定領域の広さ。

共鳴補正前後での共鳴幅 (式(171)で与えられる結合振動が出現する領域) を、又、図 13 に、単粒子トラッキングで得られた結果を示す。後者の結果は、初期条件

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \epsilon_y, \\ x &= \sqrt{\epsilon_x / \gamma_x}, x' = 0, \end{aligned} \quad (175)$$

$$y = \sqrt{\epsilon_y / \gamma_y}, y' = 0$$

を持つ粒子が、フィジカルアパーチャ内で安定に 5000 ターンまで周回可能な初期エミッタンスの最大値 ( $\epsilon_x = \epsilon_y$ ) をプロットしたもので、各チューンでの振動の安定領域の広さを示す。此处で示した 2 つの結果は良く一致し、共鳴補正によって、共鳴幅が狭くなり、振動の安定領域が拡幅しているのが分かる。

### 3 シンクロトロン振動 (縦方向振動)

本章では、ビーム加速に伴って生じるシンクロトロン振動を概説する (縦方向運動の詳細は、田村氏のテキストを参照)。

ビーム加速は、軌道上に高周波加速空洞を設置し、その加速ギャップに、高周波電場を印加して周回毎に行う。此处で、磁場  $B$  に対して  $p = eB\rho$  を満たし、中心軌道上を周回する粒子を考える。加速ギャップに、この粒子の周回周波数に同期した周波数を持つ加速電場を印加した場合、この粒子と加速電場の位相は一致し続け、安定に加速される。こうした常に高周波と同調する粒子を同期粒子と呼ぶ。但し、実際のビーム粒子は、エネルギーにばらつきがあり、又、高周波電場に対する位相も一定ではない。こうした同期条件から外れた粒子は、同期粒子の回りを振動しながら加速されてゆく。こうした非同期粒子が、エネルギーと位相を軸に取った縦方向位相空間で行う振動をシンクロトロン振動と呼ぶ。本章では、シンクロトロン振動の安定性 (位相安定性の原理) に焦点を絞って議論する。

#### 3.1 周回周期の運動量依存性

本節では、シンクロトロン振動の安定性を議論する上で必要な知識となる周回周期の運動量依存性について説明する。前章で議論したように、ビーム粒子は、運動量に対して、それぞれ閉じた軌道を持つ。このような閉軌道を、それぞれの運動量を持つ粒子の平衡軌道と呼ぶ。

此处で、運動量  $p$  を持つ粒子の平衡軌道長を  $C$ 、又、運動量変位  $\Delta p$  に対する平衡軌道長のずれを  $\Delta C$  と置く。微小変位の場合、 $\Delta p$  と  $\Delta C$  の関係は、

$$\frac{\Delta C}{C} = \alpha \frac{\Delta p}{p} \quad (176)$$

と表わせる。上式の係数 $\alpha$ は、運動量圧縮係数と呼ばれ、加速器中の磁場分布により決定される定数である。次に、周回周期  $T$  と粒子の速度  $v$  の関係を考える。 $T=C/v$  より、それぞれの微小変位の関係を求めると、

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta C}{C} - \frac{\Delta v}{v} \quad (177)$$

となる。又、粒子の運動量と速度の間には、

$$\frac{\Delta p}{p} = \gamma^2 \frac{\Delta v}{v} \quad (178)$$

という関係が成り立つので、式(176)~(178)より、

$$\frac{\Delta T}{T} = \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2}\right) \frac{\Delta p}{p} = \eta \frac{\Delta p}{p} \quad (179)$$

という関係を得る。此処で、 $\gamma$ は、粒子の全エネルギーを静止エネルギーで規格化した量であり、 $\eta$ は、**phase slip factor** と呼ばれ、周回周期の運動量依存性を特徴づける値である。又、上式の括弧内が 0 となるエネルギー

$$\gamma_t = \sqrt{\frac{1}{\alpha}} \quad (180)$$

をトランジションエネルギーと呼ぶ。粒子のエネルギーが $\gamma_t$ よりも小さい時、即ち、式(179)の括弧が負の場合は、運動量の増加に対し、周回周期が短くなる。一方、粒子のエネルギーが $\gamma_t$ を上回った場合は、括弧の中が正となり、運動量増加に対し、周回周期が遅くなる。前者は、速度の増加率が軌道長の増加率を上回る為であり、一方、後者の場合は、エネルギーが高くなると粒子の速度が光速に近づく為に、運動量の増加に対する速度の応答が鈍るので、前者での関係が逆転する。又、粒子のエネルギーが $\gamma_t$ と一致した場合には、運動量が変わっても周回周期が変化しないという状況が出現する。

### 3.2 シンクロトロン振動の運動方程式

本節では、加速電場により生じる非同期粒子の位相振動とエネルギー振動を与える運動方程式を導く。

周回軌道上の $\theta=s/R=0$ の位置に、ギャップ間距離が微小な加速ギャップが存在すると仮定すると、 $s$ 方向の高周波電場は、デルタ関数を用いて、

$$\varepsilon(\theta, t) = \frac{V}{R} \delta(\theta) \sin(h\omega_s t + \phi_s) \quad (181)$$

と表わせる。 $\omega_s$ は同期粒子の周回周波数、即ち、此処では、高周波電場の周波数を $\omega_s$ の $h$  (整数: ハーモニックナンバー) 倍として扱う。又、 $R$ は、中心軌道の平均半径を示す。式(181)のデルタ関数は、 $2\pi$ の周期関数であるので、それをフーリエ展開すると、式(181)は、

$$\varepsilon(\theta, t) = \frac{V}{2\pi R} \sum_n [\sin(h\omega_s t + n\theta + \phi_s) + \sin(h\omega_s t - n\theta + \phi_s)] \quad (182)$$

となる。上式より、加速電場は、位相速度 $\pm h\omega_s/n$ を持つ様々な進行波の重ね合わせと解釈できる。これら進行波の中で加速に寄与するのは、中心軌道を周回する粒子と等しい位相速度を持った進行波である。従って、実効的な加速電場は、

$$\varepsilon = \frac{V}{2\pi R} \sin \phi, \quad (183)$$

$$\phi = h\omega_s t - h\theta + \phi_s$$

となる。

式(183)より、同期粒子が、 $t=0$ で、 $\theta=0$ に位置するギャップを通過した際に受ける加速電場は、

$$\varepsilon = \frac{V}{2\pi R} \sin \phi_s \quad (184)$$

となる。此処で、ベータトロン振動の振幅は小さく、粒子の軌道が中心面の近傍に存在している場合を想定し、粒子の運動量の時間的変化が、 $s$ 方向の電場のみに依存すると仮定すると、中心運動量 $p_s$ を持つ同期粒子の運動方程式は、

$$\frac{dp_s}{dt} = \frac{eV}{2\pi R} \sin \phi_s \quad (185)$$

となる。同期粒子の加速電場に対する位相 $\phi_s$ を同期位相と呼ぶ。先にも述べたように、同期粒子は、常に、加速電場に同調して同じ位相にあり、式(185)に従って加速される。一方、 $p_s$ から $\Delta p$ だけ離れた粒子の方程式は、

$$\frac{d(p_s + \Delta p)}{dt} = \frac{eV}{2\pi R} \sin \phi \quad (186)$$

となるので、式(185)と(186)の差をとることにより、 $\Delta p$  について、

$$\frac{d(\Delta p)}{dt} = \frac{eV}{2\pi R} (\sin \phi - \sin \phi_s) \quad (187)$$

という方程式を得る。更に、上式を、

$$\Delta E = v_s \Delta p \quad (188)$$

という関係を用いて書き直すと、エネルギー変位  $\Delta E$  について、

$$\frac{d(\Delta E / \omega_s)}{dt} = \frac{eV}{2\pi} (\sin \phi - \sin \phi_s) \quad (189)$$

という関係式を得る。

次に、位相について考える。此处で、同期位相からの変位

$$\Delta \phi = \phi - \phi_s$$

を導入すると、式(183)より、

$$\begin{aligned} \frac{d(\Delta \phi)}{dt} &= h\omega_s - h\dot{\theta} \\ &= -h(\omega - \omega_s) = -h\Delta\omega \end{aligned} \quad (190)$$

という関係が得られる。此处で、 $\omega$  は、非同期粒子の周回周波数、又、 $\Delta\omega = \omega - \omega_s$  は、同期粒子の周回周波数からのずれを示す。上式は、式(179)から導かれる

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_s} = -\eta \frac{\Delta p}{p_s} \quad (191)$$

と、運動量とエネルギーの微小変位の関係

$$\frac{\Delta p}{p_s} = \frac{1}{\beta_s^2} \frac{\Delta E}{E_s} \quad (192)$$

より、

$$\frac{d(\Delta \phi)}{dt} = h\eta \frac{\omega_s}{\beta_s^2} \frac{\Delta E}{E_s} \quad (193)$$

と表わせる。此处で、 $\beta_s$  は、同期粒子の速度を光速で規格化した値である。

式(189), (193)より、位相方向の振動方程式は、以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\beta_s^2 E_s}{\eta \omega_s^2} \frac{d(\Delta \phi)}{dt} \right) \\ = \frac{heV}{2\pi} (\sin \phi - \sin \phi_s) \end{aligned} \quad (194)$$

此处で、上式の左辺括弧内の係数が短い時間内で一定、即ち、係数が大幅に変化しない程度の短い時間のみを扱うと仮定すると、式(194)は、

$$\frac{E_s}{\eta \omega_0^2} \frac{d^2 \phi}{dt^2} = \frac{heV}{2\pi} (\sin \phi - \sin \phi_s) \quad (195)$$

と変形できる。此处で、 $\omega_0 = \omega_s / \beta_s$  は光速粒子の周回周波数である。上式は、非同期粒子が、同期位相  $\phi_s$  の回りで行う振動を記述する。位相が振動した場合には、式(193)より、エネルギーも中心エネルギー  $E_s$  の回りで振動することが分かる。以上の位相方向、エネルギー方向の振動をシンクロトロン振動という。

式(195)は、非線形振動を導く方程式であり、振動の安定性が振幅に依存するという特徴を持つ。此处では、こうした非線形振動を取り扱う前に、極小点 (stable fixed point; sfp) 近傍で、線形振動として近似可能な微小振動を先ず議論する。 $\Delta \phi = \phi - \phi_s$  を微小量と仮定すると、式(195)は、以下のような単振動を与える方程式となる。

$$\frac{d^2 \Delta \phi}{dt^2} - \frac{heV \eta \omega_0^2 \cos \phi_s}{2\pi E_s} \Delta \phi = 0 \quad (196)$$

この単振動の振動数は、

$$\Omega_s = \omega_0 \sqrt{-\frac{heV \eta \cos \phi_s}{2\pi E_s}} \quad (197)$$

となり、これをシンクロトロン振動数と呼ぶ。

### 3.3 シンクロトロン振動の安定性

本節では、式(195)より導かれる非線形振動を取り扱う。式(195)を積分することにより、エネルギー積分

$$\begin{aligned} \frac{E_s}{2\eta \omega_0^2} \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 \\ + \frac{heV}{2\pi} (\cos \phi + \phi \sin \phi_s) = C_1 \end{aligned} \quad (198)$$

を得る。上式より、位相振動は、下記のポテンシャルエネルギー  $U(\phi)$  の中の質量  $M$  を持つ質点の振動と等価であると解釈される。



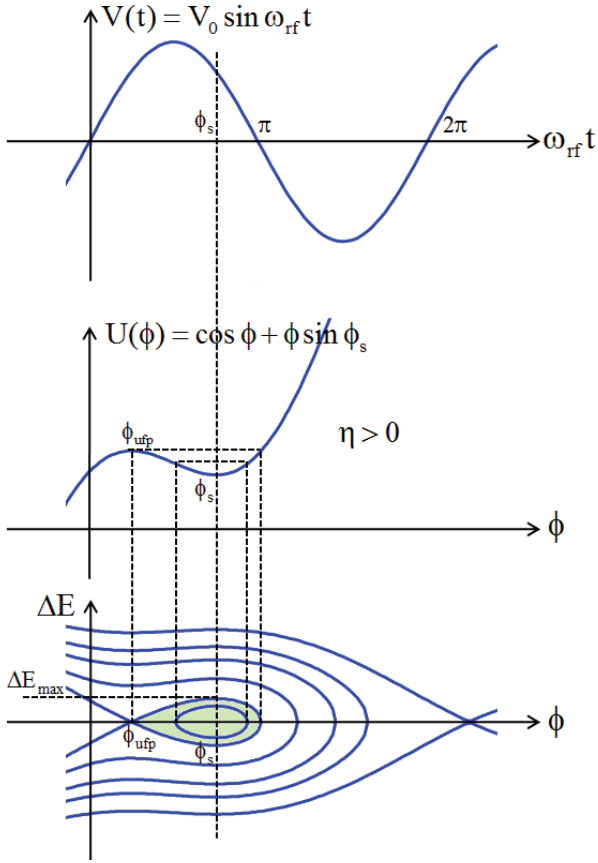


図 14：シンクロトロン振動のポテンシャルと縦方向位相面上でのビーム粒子の軌跡。

$$\begin{aligned}
 U(\phi) &= \pm \frac{heV}{2\pi} (\cos \phi + \phi \sin \phi_s), \\
 M &= \pm \frac{E_s}{\eta \omega_0^2}, \\
 \text{sign} &= \begin{cases} + \text{ if } \eta > 0, \\ - \text{ if } \eta < 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{199}$$

$\eta > 0$  の場合を考えると、式(193), (198)より、以下の関係を得ることができる。

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\frac{2\pi h \eta}{eV E_s \beta_s^2}} \Delta E \\
 = \pm \sqrt{2(C_0 - (\cos \phi + \phi \sin \phi_s))}, \tag{200}
 \end{aligned}$$

$$C_1 = (heV/2\pi)C_0$$

上式は、縦方向位相空間  $(\phi, \Delta E)$  上での粒子の軌跡を与える。図 14 で示されるように、式(200)は、定数  $C_0$  が、ある閾値以下の場合、閉じた軌跡を形成するが、それ以上の場合には、軌跡が閉じず

に不安定な状況が出現する。こうした非線形振動の安定・不安定領域の境界を示すセパトリクスは、ベータトロン振動の非線形共鳴を取り扱った場合と同様に、ポテンシャルエネルギー  $U$  が持つ  $\text{ufp}$  を通過する式(200)の軌跡で与えられる。ポテンシャルエネルギー  $U$  の極点は、 $dU/d\phi=0$  より、

$$\phi = \begin{cases} \phi_s \text{ (sfp)}, \\ \pi - \phi_s \text{ (ufp)} \end{cases} \tag{201}$$

と与えられる。 $\text{ufp}$  を通過する軌跡の  $C_0$  値は、 $\phi = \pi - \phi_s, \Delta E = 0$  を式(200)へ代入して、

$$C_0 = -\cos \phi_s + (\pi - \phi_s) \sin \phi_s \tag{202}$$

と与えられる。又、セパトリクス上の  $\Delta E$  の最大値は、式(202)を式(200)へ代入し、 $\phi = \phi_s$  と置くことにより、

$$\Delta E = 2 \sqrt{\frac{eV E_s \beta_s^2}{2\pi h \eta}} \sqrt{-\cos \phi_s + \left(\frac{\pi}{2} - \phi_s\right) \sin \phi_s} \tag{203}$$

となる。この  $\Delta E$  が、シンクロトロン振動が安定でありえる最大のエネルギー誤差となる。セパトリクスで囲まれた安定領域は、 $\text{rf bucket}$  と呼ばれ、式(203)で与えられる  $\text{rf bucket}$  の高さを、 $\text{bucket height}$  という。セパトリクスの面積は、 $\eta > 0$  の場合、 $\phi_s = \pi$  で最大となるが、この場合には、加速されるエネルギーは  $0$  となる ( $\text{stationary bucket}$ )。ビーム加速を伴わないストレージリングでは、こうした  $\text{stationary bucket}$  を使って、縦方向にビームをバンチ化させている。一方、 $\phi_s$  が  $\pi/2$  に近づくほど、1 ターンあたりのエネルギーゲインは増加するが、セパトリクスの面積は狭くなり、 $\phi_s = \pi/2$  で  $0$  となる。

以上では、主に、 $\eta > 0$ 、つまり、粒子のエネルギーが、トランジションエネルギーの上部に位置する場合について扱ったが、式(199)より、ポテンシャルエネルギー  $U$  の形状は、トランジションエネルギーの上部・下部に位置する場合で異なる。従って、シンクロトロン振動の安定領域も、トランジションエネルギーを境に変化する。図 15 に示す通り、それぞれ同期位相を、

$$\begin{aligned}
 0 < \phi_s < \pi/2 \quad (\text{if } \gamma < \gamma_t), \\
 \pi/2 < \phi_s < \pi \quad (\text{if } \gamma > \gamma_t)
 \end{aligned} \tag{204}$$



と選んだ場合に、 $\phi_s$ の回りに安定領域が出現する。この条件は、式(197)で与えられるシンクロトロン振動数が実数になる為の条件と一致する。強収束シンクロトンの場合、加速途中でトランジションエネルギーを通過することがあるが、その場合、シンクロトロン振動の安定領域は、トランジションエネルギーを境に、加速高周波の上昇部から下降部へとジャンプする。

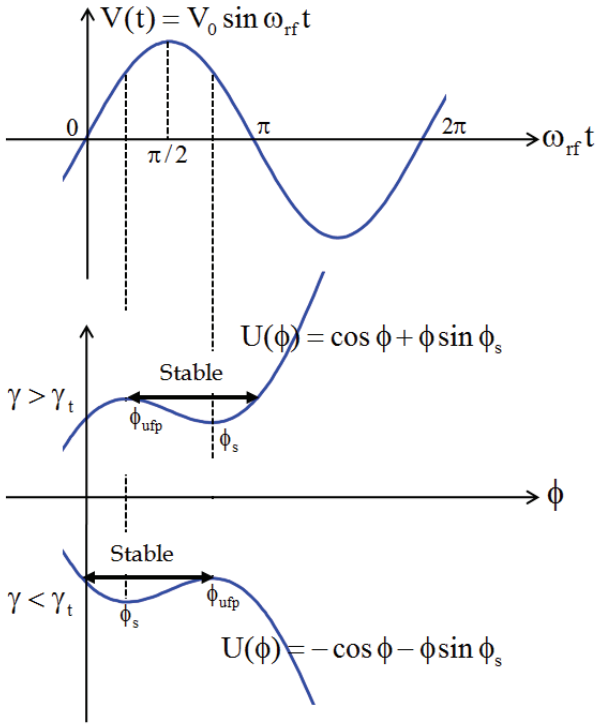


図 15:  $\gamma_t$  の上部・下部でのシンクロトロン振動のポテンシャル。

### 3.4 シンクロトロン振動の断熱減衰

本節では、3.1.1 節で議論した微小振動の場合を例に挙げて、シンクロトロン振動の断熱減衰を議論する。微小振動の式(196)を与えるハミルトニアンは、

$$H_s = \frac{\hbar\eta\omega_0^2}{2E_s} \left( \frac{\Delta E}{\omega_s} \right)^2 - \frac{eV \cos\phi_s}{4\pi} (\Delta\phi)^2 \quad (205)$$

と表わせる。此处で、 $(\Delta\phi, \Delta E/\omega_s)$  が正準変数となる。上記のハミルトニアンは、独立変数  $t$  を含まないので、 $H_s$  は不変量となる。

$$\frac{\hbar\eta\omega_0^2}{2E_s} \left( \frac{\Delta E}{\omega_s} \right)^2 - \frac{eV \cos\phi_s}{4\pi} (\Delta\phi)^2 = C_2 \quad (206)$$

上式の軌跡 (楕円) の面積である作用積分は、

$$I = \pi \sqrt{-\frac{8\pi E_s C_2^2}{\hbar e V \eta \omega_0^2 \cos\phi_s}} \quad (207)$$

となる。上式の  $C_2$  を式(206)へ代入すると、楕円の式は、

$$\begin{aligned} & \frac{\hbar\eta\omega_0^2}{2E_s} \left( \frac{\Delta E}{\omega_s} \right)^2 - \frac{eV \cos\phi_s}{4\pi} (\Delta\phi)^2 \\ &= \pm \frac{I}{\pi} \sqrt{-\frac{\hbar e V \eta \omega_0^2 \cos\phi_s}{8\pi E_s}}, \quad (208) \\ & \text{sign} = \begin{cases} + \text{ if } \eta > 0, \\ - \text{ if } \eta < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

となり、位相振幅の最大値 ( $\Delta E = 0$  の時の  $\Delta\phi$ )、エネルギー振幅の最大値 ( $\Delta\phi = 0$  の時の  $\Delta E$ ) は、

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{\max} &= \left( -\frac{2I^2}{\pi} \frac{\hbar\eta\omega_0^2}{eV E_s \cos\phi_s} \right)^{1/4} \\ \left( \frac{\Delta E}{E_s} \right)_{\max} &= \beta_s \left( -\frac{I^2}{2\pi^3} \frac{eV\omega_0^2 \cos\phi_s}{\hbar\eta E_s^3} \right)^{1/4} \quad (209) \end{aligned}$$

と与えられる。シンクロトロン振動の振幅は、上式に従って加速と共に減衰する。

## 4 空間電荷効果

前章迄は、ビーム粒子間の相互作用が無視できる状況を想定してきた。つまり、外部収束磁場が定める互いに独立な個々のビーム粒子の運動に着目し、ビーム運動を、それらの単なる重ね合わせとして扱ってきた。但し、ビーム強度が上がると、粒子間に作用するクーロン力の影響が顕著となり、上記のような独立粒子的な取り扱いでは、ビームの挙動を正しく表現できなくなる。こうした粒子間に働くクーロン力の影響により、ビーム粒子の運動が、ビーム強度やビーム分布に依存して変化する現象を空間電荷効果と呼ぶ。本章では、ベータトロン振動の安定性という観点から横方向の空間電荷力を計算し、ビームへの影響を調査する (大強度ビームでは、ビームを取り囲む様々な装置との電磁的な相互作用によって引き

起こされる各種不安定性も顕在化する。そうした現象は、菖蒲田氏のテキストで扱われる)。

#### 4.1 ラスレットチューンシフト

ビームは、同一荷電粒子の集合体である為、空間電荷力は、発散力として働き、電磁石系が作る収束力を打ち消す方向に作用する。その為、空間電荷力は、外部収束力から決まるチューン（ベアチューン）を下方へ変位させる。本節では、横方向の空間電荷力を計算し（縦方向については、一様分布とし、対称性から電場は生じないと仮定）、それにより生じるチューンシフトを導く。当然ながら、空間電荷力は、ビームの分布にも依存するので、分布の取り方により、チューンシフトの様相も異なる。本節では、横方向について、一様分布とガウス分布の場合を取り扱う。

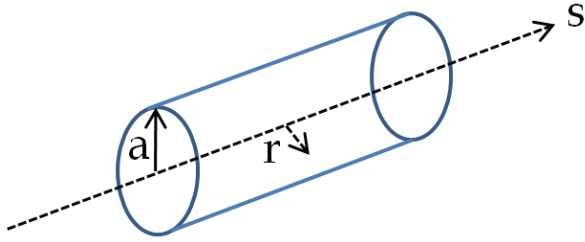


図 16 : 横方向に一様に分布し、進行方向に粒子線密度 $\lambda$ を持つ半径  $a$  の円柱ビーム。

##### 4.1.1 一様分布の場合 (KV 分布)

図 16 に示す半径  $a$  の円柱ビームを考え、粒子は、横方向に一様に分布していると仮定する。又、粒子の縦方向の線密度（単位長あたりの粒子数）を $\lambda$ とする。この円柱ビームが作るビーム内半径  $r$  位置での径方向の電場は、ガウスの法則から、

$$E_r = \frac{\lambda e}{2\pi\epsilon_0} \frac{r}{a^2} \quad (210)$$

と求まる。此処で、 $\epsilon_0$  は誘電率である。又、電流が作る  $s$  軸回りの回転方向の磁場は、アンペールの法則より、

$$B_\theta = \frac{\mu_0 \lambda e}{2\pi} \beta c \frac{r}{a^2} \quad (211)$$

となる。此処で、 $\mu_0$  は透磁率である。従って、電磁場(210), (211)が作る  $r$  位置でのローレンツ力は、 $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$  という関係を用いて、

$$\begin{aligned} \vec{F}_{sc} &= e(E_r - \beta c B_\theta) \vec{e}_r \\ &= \frac{\lambda e^2}{2\pi\epsilon_0} \frac{r}{a^2} (1 - \beta^2) \vec{e}_r \\ &= \frac{\lambda e^2}{2\pi\epsilon_0 \gamma^2} \frac{(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y)}{a^2} \end{aligned} \quad (212)$$

と与えられる。此処で、 $\beta, \gamma$  は、ローレンツファクターであり、 $\vec{e}_r$  は、径方向の単位ベクトルを示す。上式より、粒子が加速されて $\beta$ が 1 に近づくと、電流が作る磁場が電場の影響を相殺するので、空間電荷力による発散作用は弱まることがわかる。つまり、シンクロトロンなどでは、入射エネルギー領域で、空間電荷力が最も顕著となる。

ニュートンの運動方程式

$$m\gamma \frac{d^2\chi}{dt^2} = F_\chi \quad (213)$$

は、 $ds = \beta c dt$  より、

$$\beta^2 \gamma m c^2 \frac{d^2\chi}{ds^2} = F_\chi \quad (214)$$

となるので、空間電荷力は、以下のように、Hill の方程式に取り込まれる。

$$\chi'' + k(s)\chi = \frac{1}{\beta^2 \gamma m c^2} \times (\text{space charge force}) \quad (215)$$

式(215)より、空間電荷力(212)を含む Hill の方程式は、

$$\begin{aligned} \chi'' + k(s)\chi &= \frac{2\lambda r_p}{a^2 \beta^2 \gamma^3} \chi, \\ r_p &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2} \end{aligned} \quad (216)$$

となる。又、上式を与えるハミルトニアンは、

$$\begin{aligned} H_3(\chi, \chi'; s) &= \frac{1}{2} (\chi'^2 + k_x \chi^2) + \Delta H_{sc}, \\ \Delta H_{sc} &= -\frac{1}{2} \frac{2\lambda r_p}{a^2 \beta^2 \gamma^3} \chi^2 \end{aligned} \quad (217)$$

となる。此処で、 $r_p$  は陽子の古典半径である。式(216), (217)より、空間電荷力(212)の影響は、

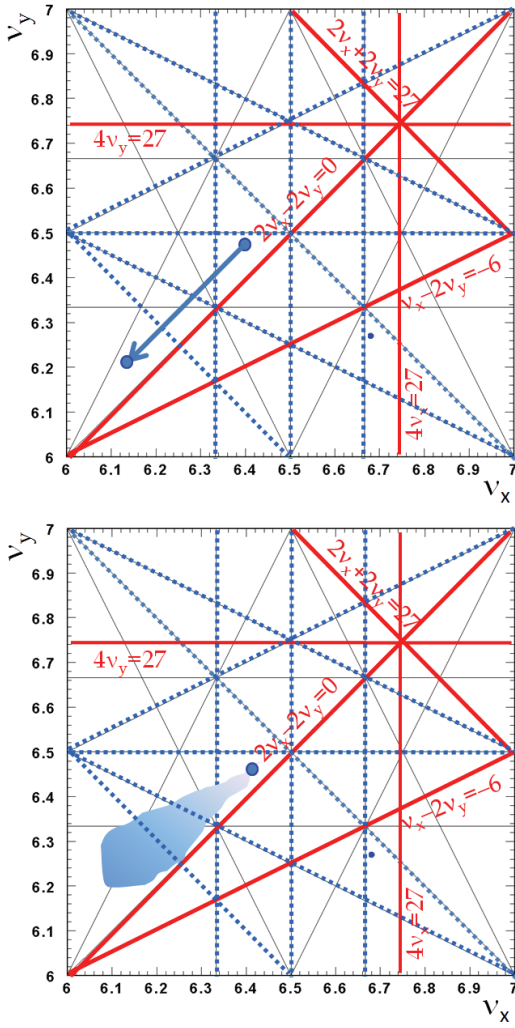


図 17：線形な空間電荷力によるラスレットチューンシフト（上図）。非線形力が加わると、チューンシフトは、ベータトロン振幅の関数となり、各粒子のチューンは、ベアチューンの下方に広がりを持つ（下図）。

$$\Delta\kappa = -\frac{2\lambda r_p}{a^2\beta^2\gamma^3} \quad (218)$$

という四極誤差磁場と見做せ、空間電荷力によるチューンシフトは、式(87)より、

$$\begin{aligned} \Delta v_x &= -\frac{1}{4\pi} \oint \beta_x \frac{2\lambda r_p}{a^2\beta^2\gamma^3} ds \\ &= -\frac{\lambda r_p R}{\beta^2\gamma^3\epsilon_x}, \end{aligned} \quad (219)$$

$$a = \sqrt{\beta_x \epsilon_x}$$

となる。

以上では、進行方向に一樣なビームを取り扱ってきたが、此処では、バンチ化されたビームについて考える。厳密に言えば、この計算は3次元の問題なので、式(219)のような二次元での取り扱いができない。但し、一般に、陽子ビームは、口径に対して非常に長いバンチ構造を持つので、進行方向の電場は無視でき、良い近似で二次元的取り扱いが可能となる。従って、空間電荷力は、式(212)で与えられると仮定し、進行方向の線密度へ \$s\$ 依存性を導入すれば良い。式(219)は、全粒子数 \$n\_t\$ とリング一周に亘る平均の線密度 \$\lambda\_{av}\$ との関係 \$n\_t = 2\pi R \lambda\_{av}\$、又は、バンチングファクター \$B\_f = (\text{平均電流} / \text{ピーク電流})\$ を導入すると、以下の様に表わせる。

$$\begin{aligned} \Delta v &= -\frac{n_t r_p}{2\pi\beta^2\gamma^3\epsilon} \frac{\lambda}{\lambda_{av}} \\ &= -\frac{n_t r_p}{2\pi\beta^2\gamma^3\epsilon} \frac{1}{B_f} \end{aligned} \quad (220)$$

上式で与えられる量を、狭義のラスレットチューンシフトと呼ぶ（真のラスレットチューンシフトは、ビームを取り巻く境界条件の効果を取り入れたもの）。

以上の解析より、横方向に一樣な粒子分布を仮定した場合、空間電荷力は、式(212)で与えられる線形力となり、全てのビーム粒子のチューンを、式(220)で与えられる同じ量だけ下方へ変位させることが示された（図 17 の上図）。

此処で、上で扱った二次元実空間で一樣な粒子分布が、位相空間でどのような分布関数になるかを考察しておく。二次元の実空間に対応する位相変数として、式(72)の規格化座標系 \$(x, P\_x, y, P\_y)\$ を選ぶ。実空間での対称性を考慮すると、位相空間での分布は、四次元の球面関数 \$f\$ となり、

$$\begin{aligned} \int_{x^2+P_x^2+y^2+P_y^2 \leq a^2} f([x^2+P_x^2+y^2+P_y^2]/a^2) dP_x dP_y \\ = \text{const.} \end{aligned} \quad (221)$$

という関係を満足する。以下の新たな変数

$$\begin{aligned} P_x &= r \cos \theta, \\ P_y &= r \sin \theta \end{aligned} \quad (222)$$

を用いると、式(221)は、

$$\int_{x^2+y^2+r^2<a^2} f([x^2+y^2+r^2]/a^2) r dr d\theta \quad (223)$$

$$= \text{const.}$$

となる。更に、以下の変数

$$q = r^2 \quad (224)$$

を導入すると、

$$\int_0^{a^2-x^2-y^2} f([x^2+y^2+q]/a^2) dq \quad (225)$$

$$= \text{const.}$$

となり、位相空間での分布関数は、以下のように、 $\delta$ 関数で与えられる。

$$f([x^2+y^2+q]/a^2) \quad (226)$$

$$= \text{const.} \cdot \delta([x^2+y^2+q]/a^2 - 1)$$

$$= \text{const.} \cdot \delta([x^2+P_x^2+y^2+P_y^2]/a^2 - 1)$$

又、上式は、Action-Angle 変数へ変換すると、

$$f(J_x, J_y) = \frac{4\lambda e}{\varepsilon^2} \delta\left(\frac{2J_x}{\varepsilon} + \frac{2J_y}{\varepsilon} - 1\right) \quad (227)$$

と表わされる。此処では、

$$a = \sqrt{\beta_{x,y} \varepsilon}, \quad (228)$$

$$\iint f(J_x, J_y) dJ_x dJ_y = \lambda e$$

という関係を使った。実空間での一様分布は、

Action-Angle 空間では、以下の直線

$$\frac{J_x}{\varepsilon} + \frac{J_y}{\varepsilon} = \frac{1}{2} \quad (229)$$

に沿った一様分布となる。この分布は、最初に提案した人の名を取って、K-V 分布と呼ばれる。

以上の議論では、半径  $a$  の円柱一様ビームを仮定したが、より一般化されたビームの断面が楕円

$$\frac{x^2}{a_x^2} + \frac{y^2}{a_y^2} = 1 \quad (230)$$

である場合の式を最後に纏めておく。楕円ビームの作る空間電荷力は、

$$\vec{F}_{sc} = \frac{\lambda e^2}{\pi \varepsilon_0 \gamma^2} \left( \frac{x}{a_x(a_x + a_y)} \vec{e}_x \right. \quad (231)$$

$$\left. + \frac{y}{a_y(a_x + a_y)} \vec{e}_y \right)$$

と与えられ、式(215)より、Hill の方程式は、

$$x'' + k_x(s)x = \frac{4\lambda r_p}{\beta^2 \gamma^3} \frac{1}{a_x(a_x + a_y)} x,$$

$$y'' + k_y(s)y = \frac{4\lambda r_p}{\beta^2 \gamma^3} \frac{1}{a_y(a_x + a_y)} y \quad (232)$$

となり、上式を与えるハミルトニアンは、

$$H_3(x, x', y, y'; s)$$

$$= \frac{1}{2}(x'^2 + k_x x^2) + \frac{1}{2}(y'^2 + k_y y^2)$$

$$+ \Delta H_{sc},$$

$$\Delta H_{sc} = -\frac{1}{2} \left( \frac{4\lambda r_p}{\beta^2 \gamma^3} \frac{1}{a_x(a_x + a_y)} \right) x^2$$

$$- \frac{1}{2} \left( \frac{4\lambda r_p}{\beta^2 \gamma^3} \frac{1}{a_y(a_x + a_y)} \right) y^2 \quad (233)$$

となる。又、Action-Angle 空間での分布関数は、

$$f(J_x, J_y)$$

$$= \frac{4\lambda e}{\varepsilon_x \varepsilon_y} \delta\left(\frac{2J_x}{\varepsilon_x} + \frac{2J_y}{\varepsilon_y} - 1\right) \quad (234)$$

と表わされる。ビーム断面が楕円の場合は、 $x$  方向と  $y$  方向で異なる空間電荷力を与えるが、それらは、ビーム断面が円の場合と同様に、線形力となる。

#### 4.1.2 ガウス分布の場合

次に、ガウス分布の場合を考える。以下の電荷密度分布

$$f(x, y) = \frac{\lambda e}{2\pi \sigma_x \sigma_y} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2}} \quad (235)$$

が作るローレンツ力は、

$$F_x = \frac{\lambda e^2}{2\pi \varepsilon_0 \gamma^2} \left( \frac{1}{\sigma_x(\sigma_x + \sigma_y)} x \right.$$

$$- \frac{1}{3!} \frac{2\sigma_x + \sigma_y}{\sigma_x^3(\sigma_x + \sigma_y)^2} x^3$$

$$- \frac{1}{2!} \frac{1}{\sigma_x \sigma_y (\sigma_x + \sigma_y)^2} xy^2 + \dots \left. \right),$$

$$F_y = \frac{\lambda e^2}{2\pi \varepsilon_0 \gamma^2} \left( \frac{1}{\sigma_y(\sigma_x + \sigma_y)} y \right.$$

$$- \frac{1}{3!} \frac{\sigma_x + 2\sigma_y}{\sigma_y^3(\sigma_x + \sigma_y)^2} y^3$$

$$-\frac{1}{2!} \frac{1}{\sigma_x \sigma_y (\sigma_x + \sigma_y)^2} x^2 y + \dots) \quad (236)$$

と与えられる。従って、式(215)の関係より、運動方程式は、

$$\begin{aligned} x'' + k_x(s)x &= \frac{F_x}{\beta^2 \gamma m c^2}, \\ y'' + k_y(s)y &= \frac{F_y}{\beta^2 \gamma m c^2} \end{aligned} \quad (237)$$

となり、ハミルトニアンは、以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} H_3(x, x', y, y'; s) &= \frac{1}{2}(x'^2 + k_x x^2) + \frac{1}{2}(y'^2 + k_y y^2) \\ &\quad + \Delta H_{sc}, \\ \Delta H_{sc} &= \frac{\lambda r_p}{\beta^2 \gamma^3 B_f} \left( -\frac{x^2}{\sigma_x (\sigma_x + \sigma_y)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{y^2}{\sigma_y (\sigma_x + \sigma_y)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\sigma_x + \sigma_y}{12\sigma_x^3 (\sigma_x + \sigma_y)^2} x^4 \right. \\ &\quad \left. + \frac{x^2 y^2}{2\sigma_x \sigma_y (\sigma_x + \sigma_y)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sigma_x + 2\sigma_y}{12\sigma_y^3 (\sigma_x + \sigma_y)^2} y^4 + \dots \right) \end{aligned} \quad (238)$$

此処では、 $\lambda \Rightarrow \lambda/B_f$ と置き換えた。つまり、上式の $\lambda$ は、リング一周に亘る平均の線密度を意味する。次に、式(114)を用いて Action-Angle 変数へ正準変換を行うと、新たなハミルトニアンは、

$$\begin{aligned} H_4(\varphi_x, J_x, \varphi_y, J_y; s) &= H_3 + \frac{\partial F_1}{\partial s} \\ &= \frac{J_x}{\beta_x} + \frac{J_y}{\beta_y} + \Delta H_{sc}, \\ \Delta H_{sc} &= \frac{\lambda r_p}{\beta^2 \gamma^3 B_f} \left( -\frac{2\beta_x J_x \cos^2 \varphi_x}{\sigma_x (\sigma_x + \sigma_y)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\beta_y J_y \cos^2 \varphi_y}{\sigma_y (\sigma_x + \sigma_y)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{2\sigma_x + \sigma_y}{3\sigma_x^3 (\sigma_x + \sigma_y)^2} \beta_x^2 J_x^2 \cos^4 \varphi_x \\ &+ \frac{2\beta_x \beta_y J_x J_y \cos^2 \varphi_x \cos^2 \varphi_y}{\sigma_x \sigma_y (\sigma_x + \sigma_y)^2} \\ &+ \frac{\sigma_x + 2\sigma_y}{3\sigma_y^3 (\sigma_x + \sigma_y)^2} \beta_y^2 J_y^2 \cos^4 \varphi_y + \dots) \end{aligned} \quad (239)$$

となる。ハミルトン方程式より、位相進みの変化は、

$$\frac{d\varphi_x}{ds} = \frac{\partial H_4}{\partial J_x}, \quad \frac{d\varphi_y}{ds} = \frac{\partial H_4}{\partial J_y} \quad (240)$$

となり、空間電荷力によるチューンシフトは、

$$\begin{aligned} \Delta v_x &= \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial \Delta H_{sp}}{\partial J_x} ds, \\ \Delta v_y &= \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial \Delta H_{sp}}{\partial J_y} ds \end{aligned} \quad (241)$$

で与えられる。

以下で、Action の次数ごとにチューンシフトを計算する。Action の一次の項については、

$$\begin{aligned} \Delta v_x &= -\frac{1}{2\pi} \oint \frac{\lambda r_p}{\beta^2 \gamma^3 B_f} \frac{2\beta_x \cos^2 \varphi_x}{\sigma_x (\sigma_x + \sigma_y)} ds \\ &= -\frac{n_t r_p \beta_x}{2\pi \beta^2 \gamma^3 B_f} \frac{1}{\sigma_x (\sigma_x + \sigma_y)} \end{aligned} \quad (242)$$

となり、 $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ の場合は、

$$\begin{aligned} \Delta v_x &= -\frac{n_t r_p \beta_x}{4\pi \beta^2 \gamma^3 B_f} \frac{1}{\sigma^2} \\ &= -\frac{n_t r_p}{4\pi \beta^2 \gamma^3 B_f} \frac{1}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (243)$$

と表わせる。一方、2次の項については、

$$\begin{aligned} \Delta v_x &= \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\lambda r_p}{\beta^2 \gamma^3 B_f} \left[ \frac{4\sigma_x + 2\sigma_y}{3\sigma_x^3 (\sigma_x + \sigma_y)^2} \beta_x^2 J_x \cos^4 \varphi_x \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\beta_x \beta_y J_x J_y \cos^2 \varphi_x \cos^2 \varphi_y}{\sigma_x \sigma_y (\sigma_x + \sigma_y)^2} \right] ds \\ &= \frac{n_t r_p}{2\pi \beta^2 \gamma^3 B_f} \left[ \frac{2\sigma_x + \sigma_y}{4\sigma_x^3 (\sigma_x + \sigma_y)^2} \beta_x^2 J_x \right. \end{aligned} \quad (244)$$



$$+ \frac{1}{2\sigma_x\sigma_y(\sigma_x + \sigma_y)^2} \beta_x\beta_y J_y]$$

となり、 $\sigma_x=\sigma_y=\sigma$ の場合は、

$$\begin{aligned} \Delta v_x &= \frac{n_t r_p}{2\pi\beta^2\gamma^3 B_f} \left[ \frac{3}{16\sigma^4} \beta_x^2 J_x + \frac{1}{8\sigma^4} \beta_x\beta_y J_y \right] \\ &= \frac{n_t r_p}{2\pi\beta^2\gamma^3 B_f} \left[ \frac{3}{16\epsilon^2} J_x + \frac{1}{8\epsilon^2} J_y \right] \end{aligned} \quad (245)$$

と表わせる。式(242), (244)では、以下の近似を使った。

$$\begin{aligned} \oint \cos^2 \varphi_x ds &\approx \pi R, \\ \oint \cos^4 \varphi_x ds &\approx 3\pi R/4, \\ \oint \cos^2 \varphi_x \cos^2 \varphi_y ds &\approx \pi R/2 \end{aligned} \quad (246)$$

粒子の分布が非一様になると、空間電荷力は、非線形力を持つようになり、チューンシフトの量は、ベータatron振幅の関数となる。一般に、分布の内側の粒子は、強い線形力を感じる為に大きなチューンシフトを起こすが、外側に行くにつれて粒子の受ける力は弱まり、チューンシフトも減少する。この様に、非一様分布になると、粒子集団としてのビームは、粒子毎に個別のチューンを持つようになり、チューンスペース上では、外部収束磁場で定義されるベアチューンの下方に広がりを持つようになる (図 17 の下図)。

## 4.2 チューンシフトとラティス共鳴

2章で論じた外部収束磁場が励起する共鳴 (ラティス共鳴) から離れた場所に、ベアチューンを設定しても、空間電荷効果によって各粒子のチューンは下方へ広がった領域を作るので、そのチューンスプレッドが共鳴線に掛った際に、粒子の運動が不安定になる可能性がある。本節では、共鳴源として、二極誤差磁場 (整数共鳴) と四極誤差磁場 (半整数共鳴) を仮定し、チューンシフトした粒子が各共鳴から受ける影響を議論する。

### 4.2.1 整数共鳴

整数共鳴の共鳴源として二極誤差磁場を含み、又、空間電荷力として線形な式(216)を考慮した場合の運動方程式は、以下のようになる。

$$\chi'' + k(s)\chi = \frac{k_{sc}}{a^2} (\chi - \bar{\chi}) + f(\theta), \quad (247)$$

$$k_{sc} = \frac{2\lambda r_p}{\beta^2 \gamma^3}$$

此处で、右辺の第一項が、線形な空間電荷力、第二項が、二極誤差磁場で位置 $\chi$ に依存しない。空間電荷力については、ビーム重心 $\bar{\chi}$ からの距離の関数として導入した。二極誤差磁場が存在する場合には、閉軌道変形が生じ、ビームの重心と座標の原点が一致しないので、空間電荷力を取り入れる際には、上記の取り扱いが必要となる。

式(247)を全ビーム粒子で平均化 (分布関数を掛けて積分) すると、ビーム重心 $\bar{\chi}$ についての運動方程式が求まる。

$$\bar{\chi}'' + k(s)\bar{\chi} = f(\theta) \quad (248)$$

上式より、空間電荷力は、ビーム重心の運動 (コヒーレント運動) へは寄与しないという結果が導かれる。次に、式(247)と(248)の差をとって、ビーム重心を基点にした運動方程式を導く。

$$(\chi - \bar{\chi})'' + k(s)(\chi - \bar{\chi}) = \frac{k_{sc}}{a^2} (\chi - \bar{\chi}) \quad (249)$$

上式より得られる結論は、ビーム重心を基点にした各粒子の運動 (インコヒーレント運動) には、二極誤差磁場の影響が現れないということである。つまり、空間電荷力によって下方へシフトしたチューン (インコヒーレントチューン) が整数に到達しても共鳴現象は発生しない。二極誤差磁場による整数共鳴は、コヒーレント運動のチューン (コヒーレントチューン) が整数になった時に発生し、その場合は、2.7 節で議論した通り、閉軌道の変形が発散する。

此处迄は、空間電荷力として線形力を仮定したが、上記の結論は、空間電荷力が非線形力の場合にも当てはまる。i 番目と j 番目の粒子間に働く空間電荷力を  $F_{sc\ ij}$  とすると、i 番目の粒子の運動方程式は、

$$\chi_i'' + k(s)\chi_i = \sum_j F_{sc\ ij} + f(\theta) \quad (250)$$

となり、上式を i で平均化し、又、 $F_{sc\ ij} = -F_{sc\ ji}$  というニュートンの第三法則を適用すれば、式(248)と同じコヒーレント運動の方程式を得る。又、先

程と同様に、インコヒーレント運動の方程式は、式(250)と(248)の差から、

$$(\chi_i - \bar{\chi})'' + k(s)(\chi_i - \bar{\chi}) = \sum_j F_{scij} \quad (251)$$

となる。この様に、一般化された空間電荷力に対しても、式(248), (249)と等価な運動方程式が導かれる。

#### 4.2.2 半整数共鳴

次に、共鳴源として、四極誤差磁場が存在すると仮定する。まずは、整数共鳴の場合と同様の考察を行う。四極磁場誤差を含み、又、式(216)の線形な空間電荷力を想定した場合の運動方程式は、

$$\chi'' + k(s)\chi = \frac{k_{sc}}{a^2}(\chi - \bar{\chi}) + f(\theta)\chi \quad (252)$$

となる。此処で、右辺の第二項が、四極誤差磁場に由来する項で位置 $\chi$ に比例する。上式より、式(248), (249)に相当する運動方程式が、以下のように導かれる。

$$\bar{\chi}'' + k(s)\bar{\chi} = f(\theta)\bar{\chi}, \quad (253)$$

$$\begin{aligned} (\chi - \bar{\chi})'' + k(s)(\chi - \bar{\chi}) \\ = \frac{k_{sc}}{a^2}(\chi - \bar{\chi}) + f(\theta)(\chi - \bar{\chi}) \end{aligned} \quad (254)$$

式(254)より、四極誤差磁場が、インコヒーレント運動へも寄与することが分かる。つまり、インコヒーレントチューンが、2.7節で得られた半整数共鳴条件を満たした場合に共鳴現象が出現し、ビーム運動が不安定になるという結論が導かれるが、この現象のより正確な理解を得るには、もう少し注意深い解析が必要となる。今までは、ビームサイズは与えられる量として空間電荷力を計算し、それを運動方程式に取り込んできたが、ベータ関数の変形を伴う半整数共鳴近傍では、ビームサイズが劇的に変化する。空間電荷力は、ビーム強度の関数であると共に、ビーム分布にも依存するので、その効果を取り込んだセルフコンシステントな解析が必須となる。

以下では、式(24)で示されたエンベロープ(ビームサイズ)方程式を用いた解析を説明する。まずは、空間電荷力を考慮した場合のエンベロープ方程式を導く。式(24)に対し、 $\sqrt{\epsilon_\chi}$ を掛け、

$\tilde{\chi} = w\sqrt{\epsilon_\chi}$ へ変換すると、ビームサイズ $\tilde{\chi}$ についての方程式を得る。

$$\tilde{\chi}'' + k(s)\tilde{\chi} - \frac{\epsilon_\chi^2}{\tilde{\chi}^3} = 0 \quad (255)$$

上式に対し、式(216)の線形な空間電荷力を考慮すると、

$$\tilde{\chi}'' + k(s)\tilde{\chi} - \frac{k_{sc}}{\tilde{\chi}} - \frac{\epsilon_\chi^2}{\tilde{\chi}^3} = 0 \quad (256)$$

となる。次に、 $k(s)$ の $s$ 依存性を排除する為に、

$$\eta = \tilde{\chi} / \sqrt{\epsilon_\chi \beta_\chi(s)}, \quad (257)$$

$$\phi = \int_0^s ds / (\beta_\chi v)$$

へ変換する。

$$\frac{d^2\eta}{d\phi^2} + v^2\eta = 2v\Delta v_{sc} + \frac{v^2}{\eta^3} \quad (258)$$

此処で、 $a = \sqrt{\epsilon_\chi \beta_\chi(s)}$ は、空間電荷の影響が無い場合のビームサイズ、つまり、 $\eta$ は、規格化されたビームサイズであり、又、 $\phi$ は、加速器を一周すると $2\pi$ だけ進む位相関数である。又、此処では、式(219)から導かれる以下の関係を使った。

$$2v\Delta v_{sc} = k_{sc} \frac{R^2}{a^2} \quad (259)$$

此処で、 $v$ はベアチューン、 $\Delta v_{sc}$ はラスレットチューンシフトの絶対値を表わし、又、この式を得る際、ベータ関数の平均値 $\beta_\chi = R/v$ を使ってその $s$ 依存性を置き換えた。 $\Delta v_{sc}/v \ll 1$ を仮定すると、誤差磁場が無い場合の方程式(258)は、以下の解を与える。

$$\eta = 1 + \frac{\Delta v_{sc}}{2v} \quad (260)$$

又、上式より、空間電荷力によるベータ関数の変化量は、

$$\Delta\beta_\chi = \beta_\chi \frac{\Delta v_{sc}}{v} \quad (261)$$

となる。

次に、式(258)へ四極誤差磁場を導入する。

$$\frac{d^2\eta}{d\phi^2} + v^2\eta = 2v\Delta v_{sc} + \frac{v^2}{\eta^3} + f(\theta)\eta \quad (262)$$

此処で、方程式(262)の解を、

$$\eta = 1 + \frac{\Delta v_{sc}}{2v} + \delta \quad (263)$$

と置いて、解(260)からの微小変位 $\delta$ についての方程式を作る。

$$\frac{d^2\delta}{d\phi^2} + (4v^2 - 6v\Delta v_{sc})\delta = f(\theta) \quad (264)$$

上式より、半整数共鳴の起こる条件は、

$$4v^2 - 6v\Delta v_{sc} = n^2 \quad (265)$$

となり、もう少し見栄え良く書くと、

$$v - \frac{n}{2} = \frac{3}{4}\Delta v_{sc} \quad (266)$$

と表わせる。上式は、空間電荷力によるチューンシフトが、ベアチューンと半整数までの距離の $4/3$ に達した時に半整数共鳴が出現することを示す。又、ビームが共鳴条件を満たした際には、ビームエンベロープ振動のチューン、つまり、コヒーレント四極振動が整数値を取る。

#### 4.2.3 高次共鳴

本節では、比較的容易に解析できる線形な空間電荷力を仮定して、一次元の取り扱いで、整数・半整数共鳴を議論した。この解析から、ビームが共鳴条件を満たした場合は、共鳴の次数 $m$ に対応する $2m$ 極のコヒーレント振動のチューンが整数に掛ることが分かった。整数共鳴の場合は、コヒーレント二極振動、即ち、ビーム重心（1次モーメント： $\langle \chi \rangle = \int \chi \cdot \rho d\chi d\chi', \dots$ ）振動のチューンが整数となり、半整数共鳴の場合は、コヒーレント四極振動、即ち、ビームエンベロープ（2次モーメント： $\langle \chi^2 \rangle = \int \chi^2 \cdot \rho d\chi d\chi', \dots$ ）振動のチューンが整数となる。此処で、 $\rho$ は、粒子の分布関数を示す。こうした関係は、三次共鳴など、高次の共鳴へも一般化される。例を挙げると、 $3v = \ell$ 共鳴の場合には、コヒーレント六極振動、つまり、3次モーメント（ $\langle \chi^3 \rangle = \int \chi^3 \cdot \rho d\chi d\chi', \dots$ ）振動のチューンが整数値を取ることになる。

又、共鳴条件についても、以下のように一般化される。

$$\frac{n}{m} = v - C_{mk}\Delta v_{sc} \quad (267)$$

	m=1	2	3	4	5
k=1	0				
2		3/4			
3	9/8		7/8		
4		17/16		59/64	
5	65/64		133/128		121/128

表 1：共鳴モード(m,k)に対する係数  $C_{mk}$

表 1 に、論文[10]の中で、一次元の取り扱いによって導出された $mv = \ell$ 共鳴の係数  $C_{mk}$  を纏めておく。此処で、共鳴モードを示すマトリックス(m,k)は、共鳴の driving term の次数（ $\sqrt{J^k} \sqrt{\beta^k} \cos m\phi$ ）に対応する。

#### 4.3 空間電荷力が誘起する共鳴

前節では、空間電荷効果によってチューンシフトした粒子がラティス共鳴から受ける影響を調査した。即ち、共鳴源として、外部収束力を仮定したが、本節では、空間電荷力それ自身が励起する共鳴に着目する。

粒子分布として、ガウス分布を仮定した場合、空間電荷力に由来する部分のハミルトニアンは、式(238)の $\Delta H_{sc}$ で与えられるが、再度、以下に書き下す。

$$\begin{aligned} \Delta H_{sc} = & \frac{\lambda r_p}{\beta^2 \gamma^3 B_f} \left( -\frac{x^2}{\sigma_x(\sigma_x + \sigma_y)} \right. \\ & - \frac{y^2}{\sigma_y(\sigma_x + \sigma_y)} \\ & + \frac{2\sigma_x + \sigma_y}{12\sigma_x^3(\sigma_x + \sigma_y)^2} x^4 \\ & + \frac{x^2 y^2}{2\sigma_x \sigma_y (\sigma_x + \sigma_y)^2} \\ & \left. + \frac{\sigma_x + 2\sigma_y}{12\sigma_y^3(\sigma_x + \sigma_y)^2} y^4 + \dots \right) \end{aligned} \quad (268)$$

一方、式(11)、(17)より、ラティスの四極から八極磁場成分迄をハミルトニアンで表わすと、

$$\begin{aligned}
H_{\text{mag}} &= \frac{1}{2!} \left( \frac{1}{B\rho} \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) (x^2 - y^2) \\
&+ \frac{1}{3!} \left( \frac{1}{B\rho} \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \right) (x^3 - 3xy^2) \\
&+ \frac{1}{4!} \left( \frac{1}{B\rho} \frac{\partial^3 B_y}{\partial x^3} \right) (x^4 - 6x^2y^2 + y^4)
\end{aligned} \tag{269}$$

となる。式(268), (269)の比較より、ガウス分布により作られる空間電荷力が、線形力である四極成分に加え、非線形な八極成分を含むことが分かる。又、式(268)を更に高次の項まで書き下すと、全ての偶数成分（四極、八極、十二極・・・）を含むことが分かる。4.1 節では、空間電荷力の線形力成分は、全ての粒子に対して、同じ量のチューンシフトを与える原因、一方の高次成分は、チューンシフトの振幅依存性からチューンスプレッドを作るソースとして取り扱ったが、当然ながら、空間電荷力の各成分は、ベータatron共鳴源としての側面も持つ。こうした共鳴は、全て構造共鳴（ $\ell = nP$ ）として出現するが、ラティスのベータ関数やビーム分布に変調が生じた場合には、ラティスの対称性  $P$  とは異なったハーモニック成分  $\ell$  でも共鳴が励起されることになる。こうした状況になると、空間電荷力により励起された共鳴に、チューンシフトしたビーム粒子が引っかかるという現象が現れる。こうした空間電荷力が励起する共鳴は、大強度加速器で顕在化し、到達可能なビーム強度に対して、究極的な制限を与えることになるが、特に、最低次の非線形力である八極成分の影響が大強度加速器では顕著となる。

以下で、その八極成分が誘起する四次共鳴の driving term を導いておく。導出の際の手続きは、2.10 節でのそれと同様である。先ず、ハミルトニアン(268)を、母関数(112)と(116)を用いて、正準変換を2回行う。新たなハミルトニアンは、

$$\begin{aligned}
\Delta H_{\text{sc}} &= \frac{\lambda r_p}{\beta^2 \gamma^3 B_f} (H_a + H_b + H_c), \\
H_a &= \frac{2\sigma_x + \sigma_y}{24\sigma_x^3 (\sigma_x + \sigma_y)^2} \beta_x^2 J_x^2 \\
&\times (\cos 4\varphi_x + 4\cos 2\varphi_x + 3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_b &= \frac{1}{4\sigma_x \sigma_y (\sigma_x + \sigma_y)^2} \beta_x J_x \beta_y J_y \\
&\times (\cos 2(\varphi_x + \varphi_y) + \cos 2(\varphi_x - \varphi_y) \\
&+ 2\cos 2\varphi_x + 2\cos 2\varphi_y + 2), \\
H_c &= \frac{\sigma_x + 2\sigma_y}{24\sigma_y^3 (\sigma_x + \sigma_y)^2} \beta_y^2 J_y^2 \\
&\times (\cos 4\varphi_y + 4\cos 2\varphi_y + 3),
\end{aligned} \tag{270}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_x &= \phi_x + \int_0^s \frac{1}{\beta_x} ds - v_x \theta \\
&= \phi_x + \psi_x - v_x \theta, \\
\varphi_y &= \phi_y + \int_0^s \frac{1}{\beta_y} ds - v_y \theta \\
&= \phi_y + \psi_y - v_y \theta
\end{aligned}$$

となる。上式より、以下の共鳴が励起されることが分かる。

$$\begin{aligned}
\cos 4\varphi_x &\rightarrow 4v_x = \ell, \\
\cos 4\varphi_y &\rightarrow 4v_y = \ell, \\
\cos 2(\varphi_y + \varphi_y) &\rightarrow 2v_x + 2v_y = \ell, \\
\cos 2(\varphi_y - \varphi_y) &\rightarrow 2v_x - 2v_y = \ell, \\
\cos 2\varphi_x &\rightarrow 2v_x = \ell, \\
\cos 2\varphi_y &\rightarrow 2v_y = \ell
\end{aligned} \tag{271}$$

此处では、以下の項に着目する。

$$\begin{aligned}
\Delta H_{\text{sc}} &= J_x^2 \left[ \frac{\lambda r_p}{\beta^2 \gamma^3 B_f} \frac{2\sigma_x + \sigma_y}{24\sigma_x^3 (\sigma_x + \sigma_y)^2} \right. \\
&\quad \left. \times \beta_x^2 \cos 4\varphi_x \right]
\end{aligned} \tag{272}$$

上式で励起される  $4v_x = \ell$  共鳴の driving term は、角括弧の中をフーリエ展開することで、

$$\begin{aligned}
\Delta H_{\text{sc}} &= \frac{J_x^2}{2R} \sum_{\ell} (G_{4,0,\ell}^{\text{sc}} e^{j(4\phi_x - \ell\theta + \xi)} + \text{c.c.}), \\
G_{4,0,\ell}^{\text{sc}} e^{j\xi} &= \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda r_p}{\beta^2 \gamma^3 B_f} \\
&\times \oint \frac{2\sigma_x + \sigma_y}{24\sigma_x^3 (\sigma_x + \sigma_y)^2} \beta_x^2 e^{j(4\psi_x - (4v_x - \ell)\theta)} ds
\end{aligned} \tag{273}$$

と表わされる。

こうした空間電荷力に由来する共鳴についても、2.10 節で述べた手法で共鳴補正を行うことができる。今の場合には、八極電磁石を使用するこ

とになるが、この八極電磁石が励起する  $4v_x = \ell$  の driving term は、上記と同様の手法で導くことができ、

$$G_{4,0,\ell}^{\text{mag}} e^{j\ell\theta} = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\beta_x^2}{48} \left( \frac{\partial^3 B_y}{\partial x^3} \right) e^{j(4\psi_x - (4v_x - \ell)\theta)} ds \quad (274)$$

と表わされる。つまり、式(274)で、式(273)の実部と虚部を打ち消すように、八極電磁石を励磁すれば良い。

## 5 大強度ビームへの道

J-PARC のような大強度加速器では、メンテナンスの自由度を十分に確保する為に、機器の放射化を最小限に抑え込む必要があり、ビーム強度の増強と共に生じるビーム損失の低減が最重要の研究課題となる。

本章では、J-PARC RCS を例に挙げて、今までに実際に行われてきたビーム損失の低減・ビームの大強度化への取り組みを概説し、その中で得られたビーム試験結果や対応するシミュレーション結果を、上で議論したビーム力学の基礎知識を使って解説する。

### 5.1 RCS の概要とビーム物理学上の課題

本題へ入る前に、先ず、RCS の概要とビーム強度を上げて行く際に想定されるビーム物理学上の課題について説明する。

表 2 に RCS の設計パラメータを示す。RCS は、ミュオン生成標的、及び、中性子生成標的へのビーム供給と、MR の入射器という二つの役割を担っている。RCS では、25 Hz という速い繰り返して陽子を 400 MeV から 3 GeV へと加速し、最終的には 1 MW という大出力でのビーム供給を目指している。但し、現在の入射エネルギーは 181 MeV であり、その低い入射エネルギーに対し、0.3 MW の出力を実現することが、現段階での目標となっている。

図 18 に示す様に、RCS は、周長 348.333 m の三回対称のラティス構造を持つ。各周期は、二つの 3-DOFO アークモジュールと分散の無い 3-DOFO 直線モジュールから成立ち、各直線モジ

ュールに、入射機器・コリメータ、出射機器、及び、加速空洞を配置している。此処で、DOFO は、水平方向に発散(D)作用を持つ四極電磁石と水平方向に収束(F)作用を持つ四極電磁石を組み合わせたラティスの基本セルを意味し、アークモジュールでは、O の部分に偏向作用を担う二極電磁石が入り、一方の直線モジュールでは、単なる自由空間となる。但し、各アークモジュールには、DOFO の O 部分に入るべき二極電磁石を抜いた特別なセル構造 (missing-bend cell) を作り、その領域の x 方向に約 6 m の分散を発生させている。こうした大きな分散を発生させることで、式(180)で与えられるトランジションエネルギーを 9 GeV 領域へと押し上げ、加速中でのトランジションエネルギー通過を回避している。又、その位置に設置した六極電磁石を使ってクロマティシティー補正を行っている。

Circumference	348.333 m
Super-period	3
Injection energy	400 MeV (181 MeV at present)
Extraction energy	3 GeV
Repetition	25 Hz
Ramping pattern	Sinusoidal
Harmonic number	2
Number of bunches	2
Output beam power	1 MW
Particles/pulse	$8.3 \times 10^{13}$
Transition energy	9.2 GeV
Momentum acceptance	$\pm 1\%$
Transverse paint area	$216\pi$ mm mrad
Collimator aperture	$324\pi$ mm mrad
Ring aperture	$486\pi$ mm mrad
Bunching factor (at injection)	0.4
Laslett tune shift (at injection)	-0.15

表 2 : RCS の設計パラメータ。



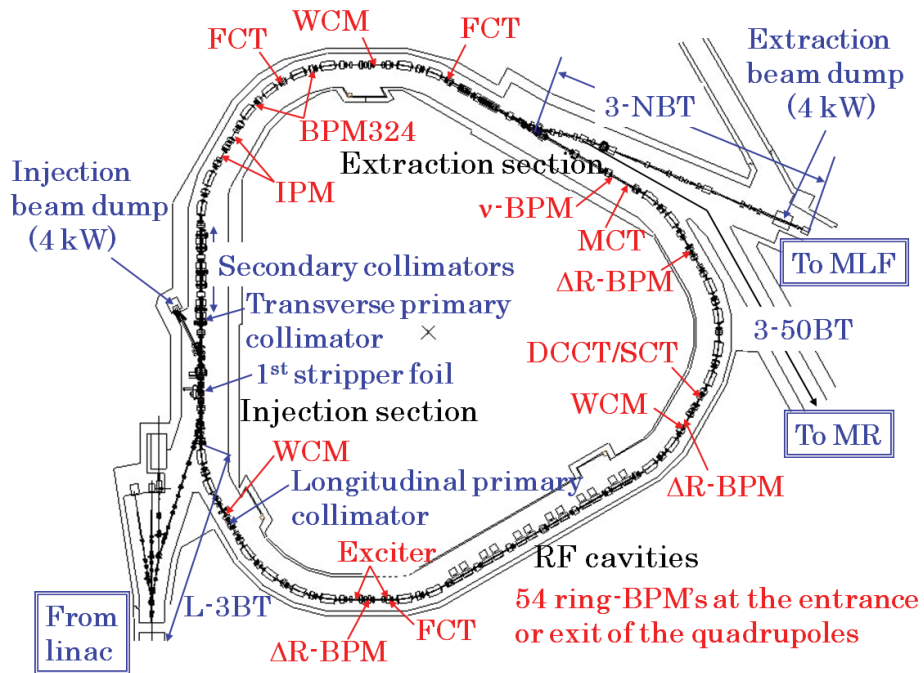


図 18 : RCS の機器配置図。

既に述べたように、RCS のような MW 級の大強度陽子加速器では、ビーム増強と共に生じるビーム損失の低減が、ビーム物理学上の最重要の研究課題となる。ビーム損失の原因は多様に存在するが、その中で、空間電荷力それ自身や、空間電荷力と周期的な外部収束力とが絡み合って生じる様々な共鳴現象が、エミッタンスの増大やビーム損失の主原因の一つに挙げられる。

RCS では、空間電荷効果を出来る限り緩和する為に、横・縦両方向でペイント入射を行う。このペイント入射は、位相空間の広い範囲に出来る限り一様に粒子を分布させて空間電荷密度を制御する、つまり、式(220)の分母に現れるビームエミッタンスとバンチングファクターを共に大きくさせることで、空間電荷効果を軽減させる手法であるが、後述する様に、その最適化はそう単純ではない。

又、RCS のような大強度加速器では、十分なフィジカルアパーチャの確保が必要不可欠となるが、一方で、大口径電磁石群によってもたらされる不利益も存在する。特に、RCS のようなコンパクトなマシンでは、どうしても電磁石の磁極長に

対する口径の比率が大きくなってしまふ。こうした場合、電磁石の出入り口に有意なフリンジ磁場が発生し、その磁場の非線形性（六極・八極磁場成分等）の影響が無視できない。

この様に、RCS は、空間電荷や磁場の非線形力が強くビームに寄与する非線形なマシンとして特徴づけられる。上で議論したように、非線形力が寄与すると、三次・四次などの高次共鳴が励起され、ビーム振動が非線形振動となる。つまり、ビーム粒子の振動の安定領域が振幅に依存し、ある一定値を超えるとビーム振動が急に不安定なるといった現象が顕在化する。上で述べたように、RCS では、空間電荷効果を軽減する手段として、ペイント入射を採用しているが、この手法では、原理的に大振幅を持つ粒子が増えるので、チューンの選択が悪いと、そうした大振幅粒子の非線形な振る舞いが問題となり、ペイント入射によってビーム損失が逆に増加する可能性もある。ペイント入射の能力を最大限に引き出すには、強い共鳴を避け、ビーム振動の安定領域を十分に確保しておくことが大前提となるが、非線形な空間電荷力で生じるチューンスプレッドの為に、その最

適化も単純ではない。こうした非線形な磁場や空間電荷力が絡み合うマシンでは、現象の理解も複雑になり、そのビーム調整には、研究的要素が多分に含まれる。兎も角、その調整の第一歩は、空間電荷力の寄与の少ない低電流ビームを用いて、実験・計算の両面からビームの単粒子的振る舞いをしっかりと押さえることであり、その後は、徐々にビーム電流を上げて行き、各効果の電流依存性を調べ、その都度、最適なパラメータを探索するといった地道な調整が必要となる。

## 5.2 低電流ビームを用いた各種調整・試験

前節で述べた通り、空間電荷効果の寄与が少ない低電流ビームの単粒子的振る舞いを通して、加速器の基本性能をしっかりと把握することが大強度ビーム実現への第一歩となる<sup>[12]</sup>。以上は、ベータ関数、チューン、分散関数、クロマチシティーといった光学系パラメータの調整、又、共鳴源となる電磁石系に内在する非線形磁場成分やリングに亘って分布する各種誤差磁場など、磁場の不完全性を同定して、そのビームへの影響を評価することと等価な意味を持つ。本節では、先ず、光学系パラメータの測定手法や調整結果を示し、その後で、RCSでの磁場の不完全性とそれらが励起する共鳴について解説する。

### 5.2.1 光学系パラメータの測定・調整

RCSでのビーム調整は、主に、以下の二つの運転モードから構成される。

- 181 MeV ストレージモード
- 3 GeV 加速モード

181 MeV ストレージモードは、ビーム加速を行わないストレージリングのような運転モードである。RCSでは、このストレージモードで、光学系等の基本パラメータの調整を先行して行い、その調整結果を使って、加速モードでの運転パラメータの初期値を構築するといった方針を採用している為、ビーム試験期間の約半分は、ストレージモードでの調整試験に割り当てられている。本小節では、ストレージモードで実施されている光学

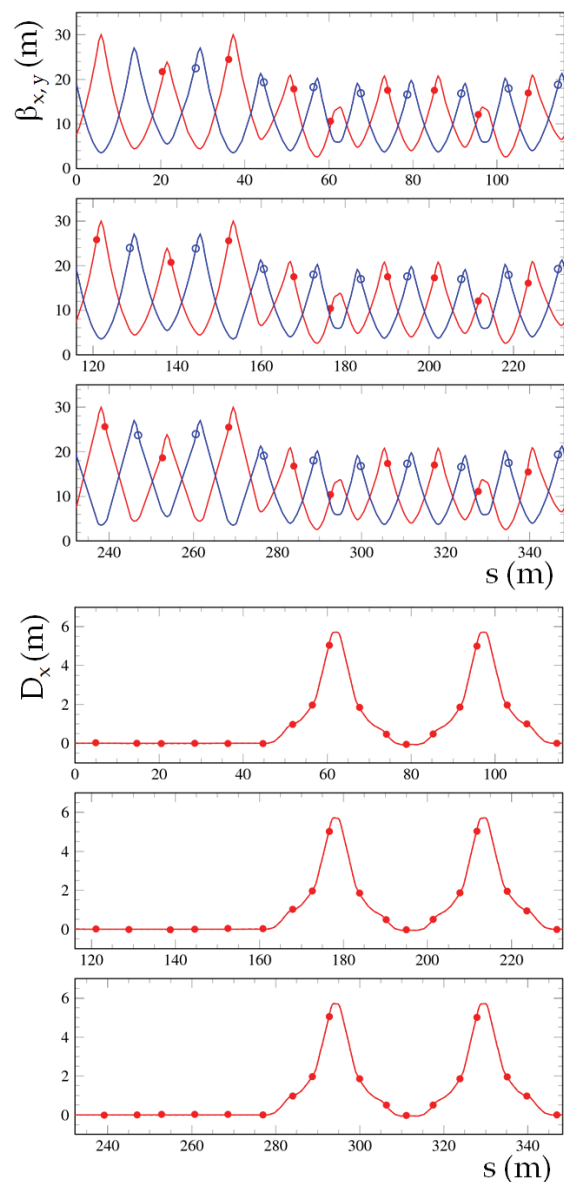


図 19：調整後のベータ関数（上図）と分散関数（下図）の実測値。●が x 方向、○が y 方向の実測結果であり、実線が設計値を示す。

系パラメータの測定手法やその調整について解説する。

先ずは、ベータ関数の測定について説明する。RCSでは、x 方向に収束作用を持つ各四極電磁石の隣に、x 方向の閉軌道補正の為に二極電磁石が、又、y 方向に収束作用を持つ各四極電磁石の隣に、y 方向の閉軌道補正の為にねじれ二極電磁石が、各 26 台配置されており、又、その各補正電磁石のギャップ中に、ビーム位置検出器 (BPM) が

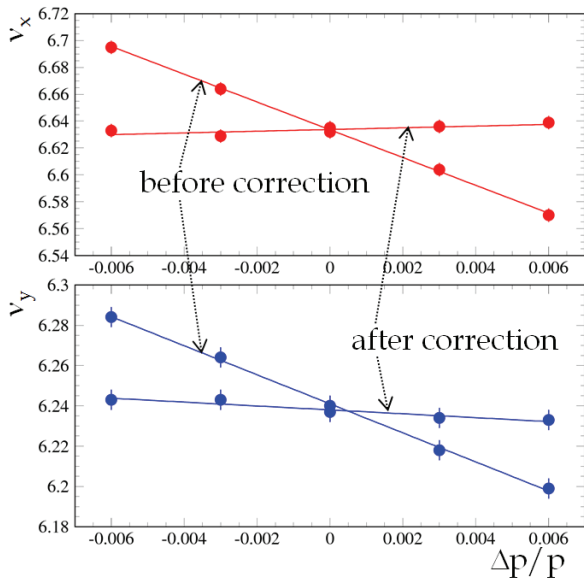


図 20 : クロマティシティーの測定結果。

設置されている。その為、補正電磁石とその中の BPM との位相差は 0 と見做すことができ、その関係を使うと、式(79)より、以下の式が導かれる。

$$\beta_x = 2 \tan(\pi v_x) \times \frac{\Delta\chi_{co}}{\Delta\theta_x} \quad (275)$$

RCS では、上式を利用して、補正電磁石の蹴り角に対する閉軌道の応答 ( $\Delta\chi_{co}/\Delta\theta_x$ ) とチューン ( $v_x$ ) という二つの測定量から各 BPM 位置でのベータ関数を導出している。チューンについては、BPM のターン毎の位置データの FFT スペクトル上で、周回周波数のサイドバンドとして観測される (詳細は、林氏のテキストを参照)。

次は、分散関数である。分散関数  $D_x$  は、式(99)より、

$$D_x = \frac{\Delta\chi_{co}}{(\Delta p/p_0)} \quad (276)$$

であるので、運動量変化に対する閉軌道の応答を、各 BPM 上で観測すれば、その傾きが分散関数となる。運動量については、式(179)から得られる

$$\frac{\Delta p}{p_s} = -\frac{1}{\eta} \frac{\Delta\omega}{\omega_s} \quad (277)$$

という関係を利用して、加速高周波の周波数を使って変化させる。

チューン、ベータ関数、分散関数の一連の測定を行い、設定値に対してずれが観測されれば、その補正が次の課題になる。RCS では、SAD<sup>[13]</sup>ベースで構築した RCS の計算モデルの四極電磁石の磁場強度を変数にして、最小二乗法で一連の測定結果を fit する。元々の四極電磁石の設定値と、上述の fitting で得られた四極電磁石の磁場強度の差分が補正量となる。その補正量は、±数%の範囲内であり、電流-磁場の関係式の誤差に由来すると考えられる。RCS では、この手法で、効率的な光学系パラメータの補正を実現させている。図 19 に、ベータ関数、分散関数の調整後の測定結果を示す。

光学系パラメータが決まった後は、クロマティシティーの測定・補正へ進むことになる。クロマティシティーは、式(102)より

$$C_x = \frac{\Delta v_x}{(\Delta p/p_0)} \quad (278)$$

となるので、上述の分散関数の測定と同様に、加速空洞の周波数をノブにして、運動量変位に対するチューンの応答を観測すれば、その傾きがクロマティシティーとなる。本章の導入で述べたように、RCS の主電磁石系には、有意な非線形磁場が存在している。特に、二極電磁石の磁場に内在する六極磁場成分が有意であり (後述)、その成分が、クロマティシティーへ寄与している為、そうした磁場の非線形性を正しく取り込んだ計算モデルを構築しないと、実測と計算で良い一致を得られない。後述するように、RCS の計算モデルには、実測磁場から評価した磁場の非線形性を取り込んでいるので、実測 ( $C_x/C_y = -10.3/-7.2$ ) と計算 ( $-10.4/-6.8$ ) が良く一致し、又、その計算モデルから得られたクロマティシティー補正に必要な六極電磁石の励磁量で十分な補正を実現させることができた。図 20 に、補正前後のクロマティシティーの測定結果を示す。

### 5.2.2 磁場の不完全性の同定

RCS での主だった磁場の不完全性のソースは、以下の通りである。

#### (a) 主電磁石磁場の非線形性

- (b) 電磁石の個体差
- (c) 電磁石の設置誤差
- (d) 出射ビームラインからの漏れ磁場
- (e) 入射バンプ電磁石のエッジ収束

最初の三つについては、磁場測定データや測量データから非線形磁場成分や誤差磁場が見積もられ、残りの二つについては、実際のビームを使って、その磁場強度を定量評価した。本節では、それらの評価手法とその結果を概説する。

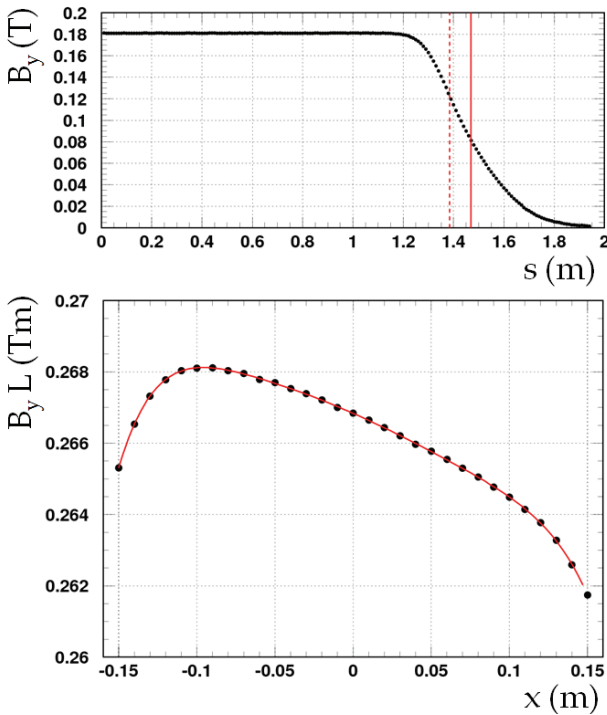


図 21：二極電磁石の磁場測定結果。上図が設計軌道  $s$  に沿った  $B_y$  ( $x=y=0$ ) 分布、下図が  $B_y$  を設計軌道に沿って積分した  $B_y L = \int B_y ds$  ( $y=0$ ) の  $x$  方向の分布。

### <非線形磁場成分>

電磁石系に内在する高次磁場成分については、トンネルへの設置前に実施した一連の磁場測定から得られた実測分布を用いて定量評価した。図 21 に、一例として二極電磁石の実測磁場分布を示す。上図は、設計軌道  $s$  に沿った  $B_y$  ( $x=y=0$ ) の分布であり、下図は、 $B_y$  を設計軌道に沿って積分した  $\int B_y ds$  ( $y=0$ ) の  $x$  方向の分布を示す。式(18)より、 $y=0$ 、又、ねじれ磁場成分は無いと仮定し

て  $a_n=0$  と置くと、 $B_y$  は、 $x$  の多項式となる。つまり、図 21 の下図の分布を、その多項式で fit すれば、各項の係数から多極磁場成分を見積れる。

一般に、電磁石の各磁場成分の強度は、設計軌道に沿って磁場の存在領域 ( $-L \sim L$ ) を積分した以下の形式で表わされる。

$$K_n = \frac{1}{B\rho} \int_{-L}^L \left( \frac{\partial^n B_y}{\partial x^n} \right) ds \quad (279)$$

此处で、 $K_n$  は、 $2(n+1)$  極磁場成分の強度を示す。RCS で最も強い非線形磁場のソースは、当然ながら、クロマティシティー補正用の六極電磁石 ( $|K_2| \sim 0.4 \text{ m}^{-2}$ ) であるが、二極電磁石の磁場に内在する六極磁場成分も、六極電磁石の 1/4 程度の強度を持つ。

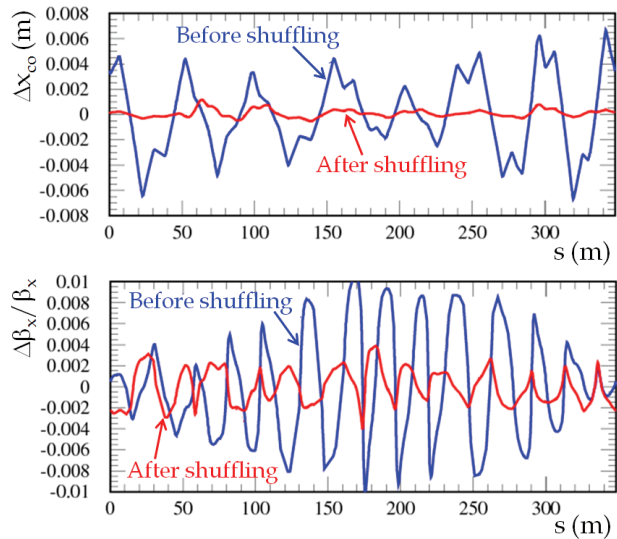


図 22：二極電磁石の shuffling 前後での閉軌道変形 (上図) と四極電磁石の shuffling 前後でのベータ関数変調 (下図) の計算結果。

### <電磁石の個体差>

RCS の主電磁石系は、24 台 (1 ファミリー) の二極電磁石と 60 台 (7 ファミリー) の四極電磁石から構成される。ファミリーごとに同一の電磁石となるが、それらは、製作誤差に起因した個体差、即ち、磁場強度のばらつきを持つ。磁場測定より、二極電磁石の個体差は  $\pm 8 \times 10^{-4}$ 、四極電磁石のそれは、ファミリー毎に異なるが、 $\pm 5 \times 10^{-4} \sim \pm 1 \times 10^{-3}$  であった。二極電磁石の個体差は、閉軌道



変形を引き起こし、四極電磁石の個体差は、ベータ関数の変調の原因となる。

閉軌道変形の式(78)から明らかなように、各二極電磁石の設置場所での位相進みと磁場のばらつきの組み合わせを上手く選ぶことで、個体差の影響を打ち消すことができる。RCS では、24 箇所の二極電磁石設置場所を、位相差が $\pi$ となるような組み合わせに分けることができ、その各組に同程度の誤差を持つ二極電磁石を割り振り、個体差による閉軌道変形を最小化した(図 22 の上図)。四極電磁石についても、式(92)に従って同様の shuffling を行い、ベータ関数の変調を最小化した(図 22 の下図)。

#### <電磁石の設置誤差>

電磁石の設置誤差も、誤差磁場の原因となる。電磁石設置後に行ったアライメント作業により、主電磁石系の x 方向、y 方向の位置誤差は、 $\pm 0.1$  mm 以下、又、s 軸回りの回転誤差は、 $\pm 0.1$  mm rad 以下へ抑え込まれた。これら設置誤差が作る閉軌道変形は、 $\pm 1.2$  mm、ベータ関数変調は、 $\pm 0.7\%$ と見積もられた。一方、線形結合の発生源となる四極電磁石の回転から生じるねじれ成分の影響は、次節で述べるとおり、この程度の回転誤差であれば、ビームへの影響は少ない。

#### <出射ビームラインからの漏れ磁場>

RCS の初期調整において、RCS 直下の出射ビームラインに設置された DC 電磁石(出射セプタム電磁石やその直後の二極電磁石等)の磁場がリングへ漏れ込み、その漏れ磁場が、閉軌道の変形や、半整数や線形結合和共鳴の強い発生源になっていることが発見された。この実験結果は、漏れ磁場中には、少なくとも、二極磁場成分に加え、有意な四極磁場成分とそのねじれ成分が存在していることを示唆する。

図 23 に示されるように、この漏れ磁場は、x 方向に $\pm 10$  mm、y 方向に $\pm 2$  mm の閉軌道変形を作る。この実測結果を、計算モデルで fit した結果、漏れ磁場中の二極磁場成分の強度は、

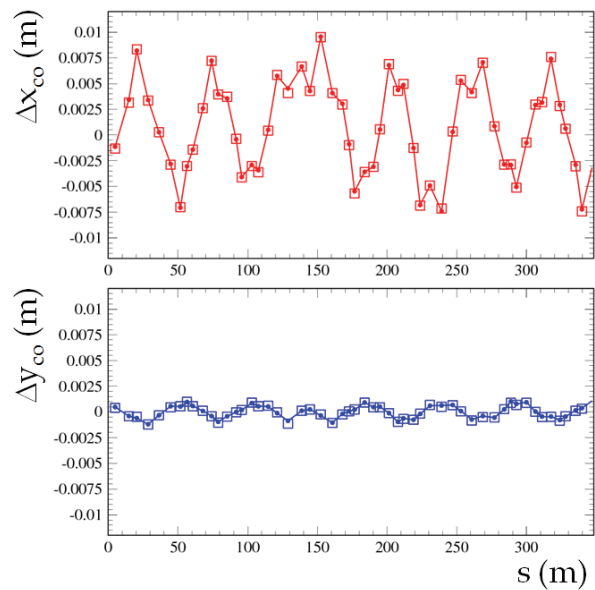


図 23 : 出射ビームラインからの漏れ磁場が作る閉軌道変形。●が実測値、□が計算値。

$K_0 = -0.00114$  rad、又、そのねじれ成分は、skew  $K_0 = -0.00012$  rad と見積もられた。

次は、漏れ磁場中の四極磁場成分である。四極磁場は、光学系パラメータ、つまり、チューン、ベータ関数、分散関数を変位させるので、出射ラインの電磁石群をオン・オフして、その変位量を実測することで、その磁場強度を見積もれる。結果は、 $K_1 = 0.0048 \text{ m}^{-1}$ で、四極電磁石の 1%程度の強度であった。

一方、そのねじれ成分については、xy 結合の観測からその強度を見積もることができる。式(18)、(80)より、ねじれ四極磁場を含む運動方程式は、

$$\begin{aligned} x'' + \left(\frac{1}{\rho^2} + k_1\right)x &= Sk_1 y, \\ y'' - k_1 y &= Sk_1 x, \end{aligned} \quad (280)$$

$$Sk_1 = \frac{1}{B\rho} \left( \frac{\partial B_x}{\partial x} \right)$$

となり、上式右辺により、x 方向と y 方向の運動が結合することが分かる。x 方向の閉軌道が $\Delta x_{co}$ だけ変位した場合は、y 方向には、 $Sk_1 \Delta x_{co}$ のねじれ二極キックが働き、y 方向の閉軌道にも変位が生じることになる。式(79)より、その y 方向に生じる閉軌道変形は、



$$\Delta y_{co}(s) = \frac{\sqrt{\beta_y(s)}}{2 \sin \pi \nu_y} \oint \sqrt{\beta_y(t)} (Sk_1 \Delta x_{co}) \times \cos(\pi \nu_y - |\varphi_y(s) - \varphi_y(t)|) dt \quad (281)$$

と表わせる。漏れ磁場中のねじれ四極磁場成分は、上式の関係を利用して見積もられた。図 24 に x 方向の閉軌道を変化させた時に生じる y 方向の閉軌道変位の実測結果を示す。この測定値を、計算モデルで fit した結果、ねじれ四極磁場の強度は、skew  $K_1 = -0.00112 \text{ m}^{-1}$  と見積もられた。

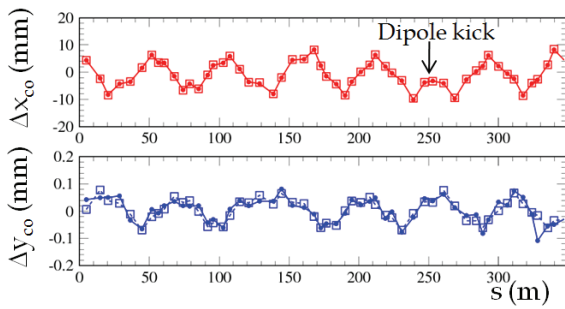


図 24 : x 方向の閉軌道を変化させた時に生じる y 方向の閉軌道変位。●が実測値、□が計算値。

#### <入射バンブ電磁石のエッジ収束力>

RCS では、マルチターン入射方式を採用しており、0.5 ms の入射時間でビームを積み上げて行く。そのビーム入射の際に、四台のパルス二極電磁石を使ってローカルバンブ軌道を形成するが、その間、ビームは、それらパルス電磁石の端面 (図 25 の点線で囲まれた端面) に対し傾いた軌道を作る。その際、2.4 節で議論したように、ビームは、それら端面領域で四極電磁石と等価なエッジ収束力を感じるようになる。このエッジ収束力の効果は、何れも、x 方向が発散、y 方向が収束となるが、x 方向については、二極電磁石が作る収束作用と相殺される。即ち、y 方向に残ったエッジ収束力が、局所的な誤差磁場として y 方向のビーム運動に影響を与える。

図 26 に、ローカルバンブ軌道が立っている場合と立っていない場合でのベータ関数の測定結果を示す。図で示される通り、y 方向のベータ関

数で大きな変調が観測されている。又、この変調に起因するチューン変位の測定結果は、 $(\Delta \nu_x, \Delta \nu_y) = (-0.002, 0.013)$  であった。以上のローカルバンブによって生じる光学系パラメータの変位量を、計算モデルのエッジ収束の強度を変数にして fit した結果、エッジ収束の強さは、端面あたり  $K_1 = -0.0033 \text{ m}^{-1}$  と見積もられ、式(50), (59)を使った計算結果と良く一致した。

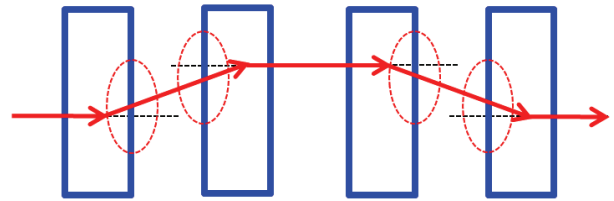


図 25 : ビーム入射の為のローカルバンブ軌道。

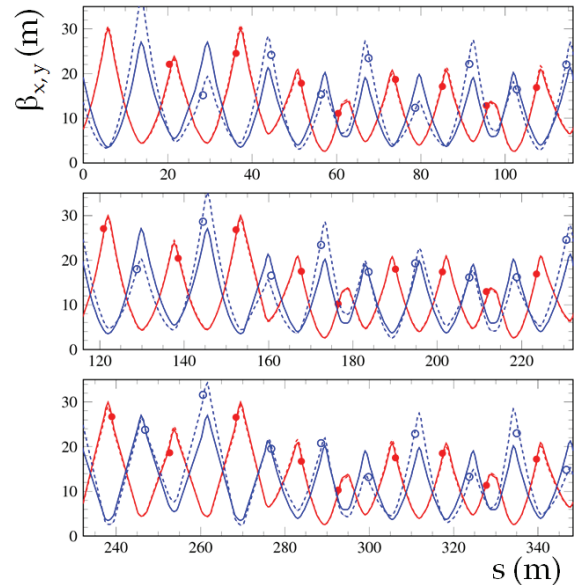


図 26 : 入射バンブ軌道が立っている時のベータ関数の実測値。●が x 方向、○が y 方向の実測結果であり、点線が計算結果を示す。実線は、入射バンブが立っていない時の計算値を示す。

#### 5.2.3 不完全磁場が励起する共鳴

本小節では、上で示された磁場の非線形性や各種誤差磁場を取り込んだ計算モデルを使って、それらが励起する共鳴を調査する。

図 27 に、単粒子トラッキングの結果を示す。この図は、2.10.3 小節の図 13 と同様の計算結果で、各チューンでの振動の安定領域の広さを色の濃淡で示したものであり、線状の色の薄い部分が共鳴線に相当する。図 27 の上段図は、5.2.2 小節で示した(a)~(c)を考慮した場合の計算結果である。この計算で、 $v=6\sim 7$  領域で観測された共鳴は、

$$\begin{aligned} v_x - 2v_y &= -6, \\ 4v_x &= 27, \\ 4v_y &= 27, \\ 2v_x - 2v_y &= 0, \\ 2v_x + 2v_y &= 27 \end{aligned} \quad (282)$$

といった三次・四次の構造共鳴であり、リングに沿ってシステマティックに分布するクロマティシティー補正用の六極磁場と二極電磁石の磁場に内在する六極磁場成分が一次、又は、二次の効果<sup>[14]</sup>で励起している共鳴群である。(b)と(c)に由来するランダムな四極誤差磁場やそのねじれ成分の影響は、半整数共鳴、線形結合共鳴、そして、様々な高次の非構造共鳴を励起し得るが、それらは有意な強度では観測されておらず、(b)と(c)のビームへの影響は少ない。つまり、機器配置の際の **shuffling** と高精度のアライメントにより(b)と(c)の影響は上手く最小化されたと結論づけられる。

図 27 の中段図は、(d)の漏れ磁場を更に取り込んだ場合の結果である。この漏れ磁場は、以下の非構造共鳴を付加的に励起する。

$$\begin{aligned} v_x + v_y &= 13, \\ 2v_x &= 13, \\ 2v_y &= 13, \\ 3v_x &= 19, \\ 3v_y &= 20 \end{aligned} \quad (283)$$

線形結合和共鳴は、漏れ磁場中のねじれ四極磁場成分によって、又、半整数共鳴は、四極磁場成分によって、それぞれ直接的に励起された共鳴である。一方の三次共鳴のソースは、システマティックに分布する六極磁場である。つまり、ラティスの対称性が完全に保たれていれば、式(141)で与えられる **driving term** の積分は 0 となり、こうした

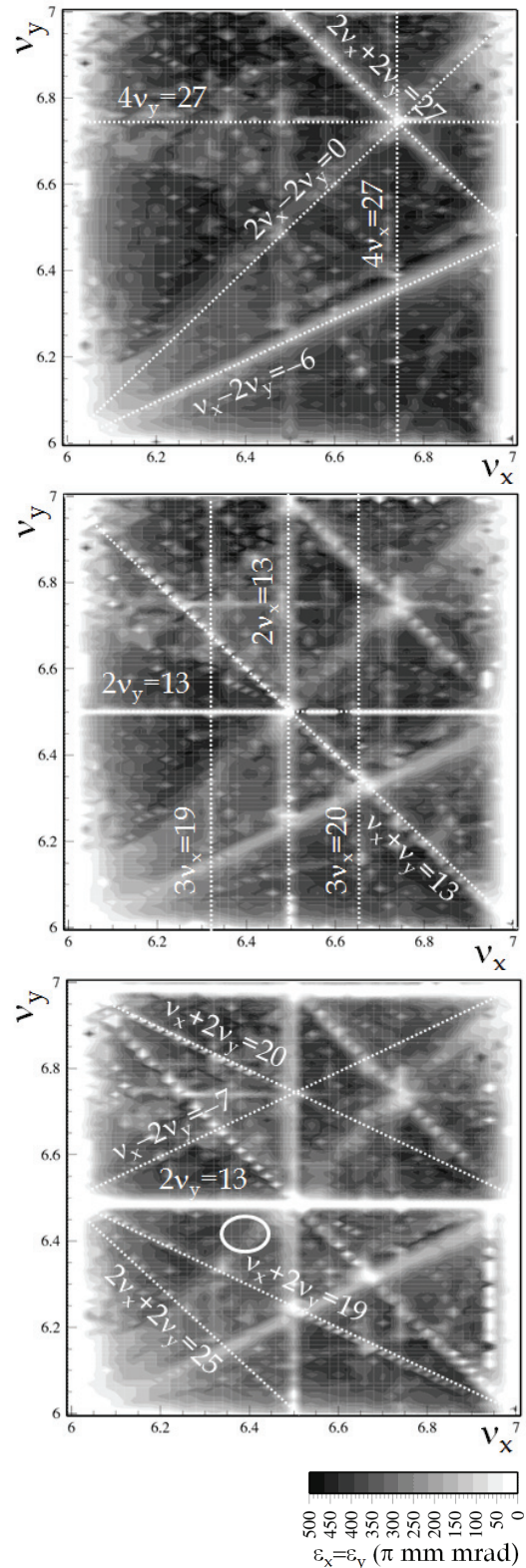


図 27 : 単粒子トラッキングで得られた各チューンにおける振動の安定領域の広さ。上段が 5.2.2 小節で示した(a)~(c)を含めた計算結果、中段が(a)~(d)、下段が(a)~(e)を取り込んだ場合の結果。

非構造共鳴が励起されることはない。但し、現状は、漏れ磁場中の四極誤差磁場によって、driving term 中のベータ関数や位相進みの対称性が歪められている為に、driving term の積分が 0 とはならず値が残る。つまり、この三次共鳴は、四極誤差磁場によって生じた加速器対称性の歪みを通して励起された非構造共鳴である。

図 27 の下段図は、更に、(e)を取り込んだ場合の計算結果である。前節で議論した通り、入射バンブ電磁石のエッジ収束力は、y 方向のベータ関数変調、つまり、y 方向の加速器対称性を歪める原因となり、

$$\begin{aligned} 2v_y &= 13, \\ v_x - 2v_y &= -7, \\ v_x + 2v_y &= 19, \\ v_x + 2v_y &= 20, \\ 2v_x + 2v_y &= 25 \end{aligned} \quad (284)$$

といった y 方向の運動と結びついた非構造共鳴が励起、又は、エンハンスされる。

以上の通り、誤差磁場の取り込み方によってチューンスペースの状況は一変する。RCS では、ビーム入射の為に、最初の 1 ms (ビーム入射 500  $\mu$ s、立下げ 500  $\mu$ s)、入射バンブ軌道を立ち上げるので、図 27 の下段図は、その間のチューンスペースに相当し、又、図 27 の中段図が、入射バンブ立下げ直後の状況に対応する。又、出射ラインからの漏れ磁場は、静磁場であるので、加速と共にその影響は減衰してゆく為、図 27 の中段図の状況は、ビーム加速に従って、図 27 の上段図の状況へ移行する。

こうした検討結果を基に、大強度ビーム加速に適したチューンを探索した。ビーム振幅が際限なく増大する和共鳴  $v_x + v_y = 13$ ,  $2v_x + 2v_y = 27$  を完全に回避する。又、半整数  $2v_{x,y} = 13$  や全ての高次のオーダーが共鳴条件を満たす整数ライン  $v_{x,y} = 6$  からは、インコヒーレントチューンスプレッドの幅を考慮して十分な距離を取る等の制限のもと、幾つかの候補地を見出し、それらを初期値にして、実際の大強度ビーム試験を行っ

た。現状は、主として、図 27 の下段の白丸領域で、各種大強度試験を実施している。

又、上記のような検討は、共鳴補正など、各種補正機器の導入を議論する際の基礎データにもなる。

### 5.3 大強度ビーム試験

前節で示した磁場の不完全性の定量評価やそれらが励起するラティス共鳴の調査等の基礎検討を経て、2009 年 12 月より、本格的な大強度ビーム試験を開始した。

入射エネルギーが 181 MeV である間の我々の当面の目標は、300 kW 出力を実現することである。この運転と、我々の最終目標である 400 MeV の入射エネルギーで 1 MW 出力という運転では、入射エネルギー領域での (ビーム強度/ $\beta^2\gamma^3$ ) 値がほぼ一致、つまり、両者の空間電荷効果は、ほぼ等価な関係となる。RCS でのビーム損失の許容範囲は、現状の 4 kW というコリメータの許容値で決まる。その 4 kW を、1 MW 運転時のビーム損失率に換算すると 3% (入射エネルギーで換算) となる。つまり、現状の 300 kW 運転時のビーム損失を、入射エネルギー領域のみで 3%以下に抑え込むことが、その後の 1 MW 出力実現への大きな試金石となる。

本節では、300 kW 相当のビームを用いて精力的に行ってきたペイント入射によるビーム損失低減について、実験データと対応するシミュレーション結果を交えて解説する。

#### 5.3.1 ペイント入射の概要

本題に入る前に、RCS で採用している横方向と縦方向のペイント入射について概説しておく (詳細は、原田氏と田村氏のテキストを参照)。

<横方向ペイント入射<sup>[15][16]</sup>>

図 28 に、横方向ペイント入射の概念図を示す。横方向ペイント入射では、入射期間中 (0.5 ms)、周回閉軌道と入射ビーム軌道の相対関係を、入射点で時間的に変位させてビームを横方向位相空間の広い範囲に分布させる。x 方向については、



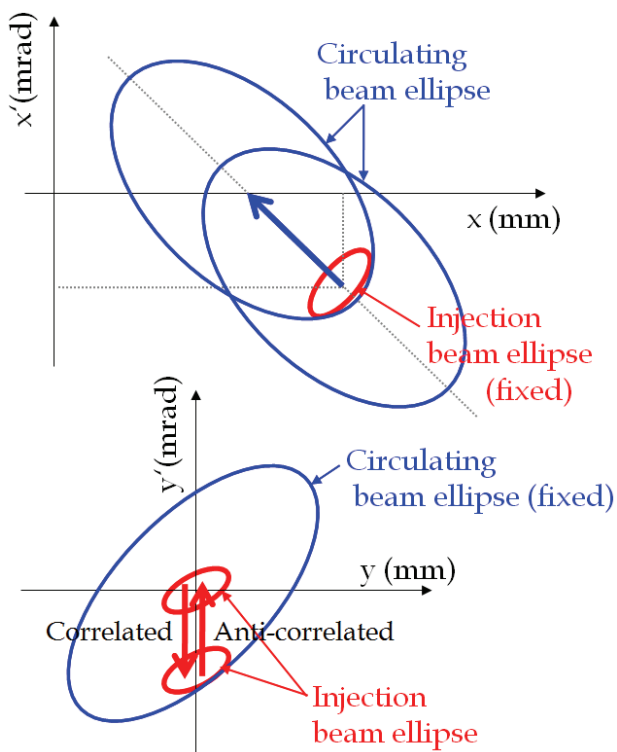


図 28：横方向ペイント入射の概念図。

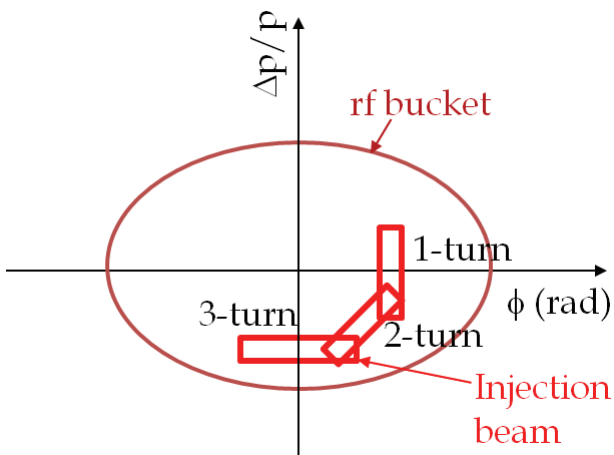


図 29：縦方向ペイント入射の概念図。

周回閉軌道の位置  $x$  と角度  $x'$  を時間的に制御して、周回ビームのビーム楕円の長軸上に沿って、その中心から外側へとビームをペイントする。一方、 $y$  方向については、入射点での入射ビームの角度  $y'$  を時間的に変化させて、周回ビームの楕円の  $y'$  軸上に沿ってビームをペイントする。 $y$  方向については、 $y'$  軸に沿って、ビーム楕円の中心から外側、若しくは、外側から中心という二通りの

ペイントが可能である。ペイントエミッタンス (ペイント範囲) を  $\epsilon_{ip}$  とすると、 $x$  方向ペイントと前者の  $y$  方向ペイントの組み合わせは、 $\epsilon_x - \epsilon_y = 0$  に沿った分布となり、**correlated paint** と呼ばれ、一方、後者の  $y$  方向ペイントを組み合わせさせた場合は、 $\epsilon_x + \epsilon_y = \epsilon_{ip}$  という関係となり、**anti-correlated paint** と呼ばれる。

#### <縦方向ペイント入射<sup>[17]</sup>>

図 29 に、縦方向ペイントの概念図を示す。縦方向ペイント入射では、入射期間中、加速空洞の周波数にオフセットを加えることで、位相空間の広い範囲にビーム粒子を分布させてゆく。この周波数オフセットは、式(277)より明らかな通り、運動量オフセットと等価である。その際、位相振動ポテンシャルの形状を平坦化させるための二倍高調波の重畳や、その二倍高調波成分の位相をスイープさせて、入射期間中の位相振動ポテンシャルの形状を動的に変化させる等の操作を組み合わせ、より効果的な縦方向の電荷密度制御を実現している。

#### 5.3.2 ペイント入射によるビーム損失低減<sup>[18]</sup>

2009年12月に、表3に示される様々なビーム強度やペイント入射のパラメータ (data-(1)~(10)) を用いて、系統的な大強度ビーム試験を実施した。図30に、その際に測定されたビーム損失量を示す。ペイント入射を行わないセンター入射 (位相空間の中心にビームを詰め込む) でのビーム損失 (data-(1)~(5)) は、主に空間電荷効果の最も厳しい入射エネルギー領域で検出され、その量は、ビーム強度 (60~300 kW 相当) に依存して 0.5~7% であった。300 kW 相当のビームの場合、ビーム損失量は 7% に達したが、data-(6)~(9) で示されるように、横方向のペイント入射 (ペイントエミッタンス:  $100\pi$  mm mrad / correlated paint) によって 5% へ改善し、更に、縦方向のペイント入射 (二倍高調波の振幅: 基本波の 80% / 2 倍高調波成分の位相スイープ:  $-80 \sim 0$  度 / 周波数オフセット:  $-0.2\%$  in  $\Delta p/p$ ) を組み合わせることで、最終的に、1% 以下のレベルに

Data ID	$I_{peak}$ (mA)	$L_{macro}$ (ms)	Chop (%)	$N_{bunch}$	$N_{part}$	Intensity (kW)	$\epsilon_{tp}$ ( $\pi$ mm mrad)	$V_{2nd}$ (%)	$\Delta\phi$ (deg)	$\Delta p/p$ (%)
data-(1)	15	0.1	56	2	$5.0 \times 10^{12}$	60	-	-	-	-
data-(2)	15	0.2	56	2	$1.0 \times 10^{13}$	120	-	-	-	-
data-(3)	15	0.3	56	2	$1.5 \times 10^{13}$	180	-	-	-	-
data-(4)	15	0.4	56	2	$2.0 \times 10^{13}$	240	-	-	-	-
data-(5)	15	0.5	56	2	$2.5 \times 10^{13}$	300	-	-	-	-
data-(6)	15	0.5	56	2	$2.5 \times 10^{13}$	300	100	-	-	-
data-(7)	15	0.5	56	2	$2.5 \times 10^{13}$	300	100	80	-80	-
data-(8)	15	0.5	56	2	$2.5 \times 10^{13}$	300	100	80	-80	-0.1
data-(9)	15	0.5	56	2	$2.5 \times 10^{13}$	300	100	80	-80	-0.2
data-(10)	15	0.5	56	2	$2.5 \times 10^{13}$	300	200	80	-80	-0.1

- $I_{peak} / L_{macro} / \text{Chop show}$   
peak current / macro-pulse length / chopper beam-on duty factor of the injection beam,
- $N_{bunch} / N_{part}$  are number of bunches / particles per pulse,
- $\epsilon_{tp}$  is the transverse painting emittance, and
- $V_{2nd} / \Delta\phi / \Delta p/p$  show  
amplitude of 2nd harmonic rf voltage (ratio to the fundamental one) /  
phase sweep of 2nd harmonic rf voltage relative to the fundamental one /  
momentum offset applied in the longitudinal painting.

表 3 : 大強度ビーム試験での入射ビーム条件・ペイント入射パラメータの一覧。

までビーム損失を低減させることに成功した。図 31 に、3 GeV 加速終了直後に出射ラインで測定した横方向の rms ビームサイズ、又、図 32 に、入射エネルギー近傍 (最初の 2 ms) でのバンチングファクターの測定結果を示す。横方向の rms ビームサイズは、ビーム強度に従って、又、横方向のペイント入射の導入によって広がるが、縦方向のペイント入射を導入すると一転して減少傾向を示す。これは、縦方向のペイント入射によって、バンチングファクターが改善されると共に、横方向の空間電荷力が軽減された為と解釈される。

### 5.3.3 シミュレーション<sup>[18]</sup>

図 30~32 には、各実験条件に従って実施したシミュレーションからの結果も合わせて載せているが、それらは、概ね一連の実験結果を再現している。此处で使用した `simpsons` (開発者: 町田慎二氏) と呼ばれるシミュレーションコードは、`particle-in-cell` 法という空間電荷力の計算手法を採用したビームトラッキングコードである<sup>[19]</sup>。このシミュレーションには、前節で述べた磁場の不完全性に加え、ビーム入射中に、入射ビームや周

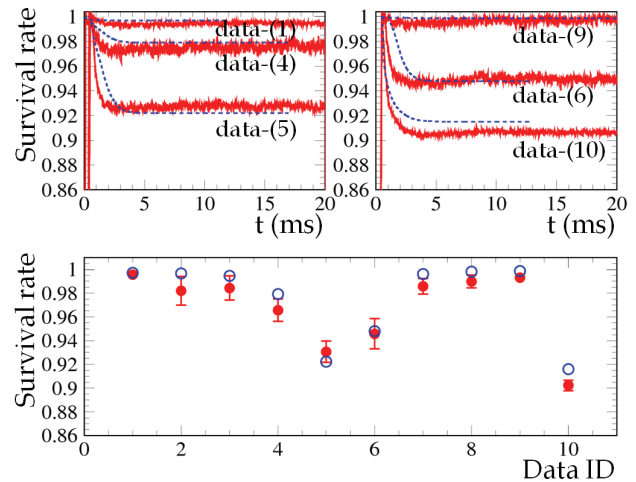


図 30 : 表 3 の各条件でのビームサバイバル率。実線と●が実測値、点線と○が計算値。

回ビームが荷電変換フォイルをヒットした際に起こる散乱現象も取り込まれた。以下に、シミュレーションに考慮された各種不完全性を、再度、纏めておく。

- 電磁石磁場の非線形性
- 入射バンブ電磁石のエッジ収束
- 電磁石の個体差、設置誤差



- (D) 出射ビームラインからの漏れ磁場
- (E) フォイル散乱

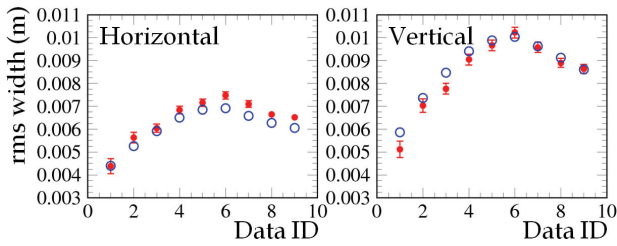


図 31 : 表 3 の各条件での取り出しビームの rms ビーム幅。●が実測値、○が計算値。

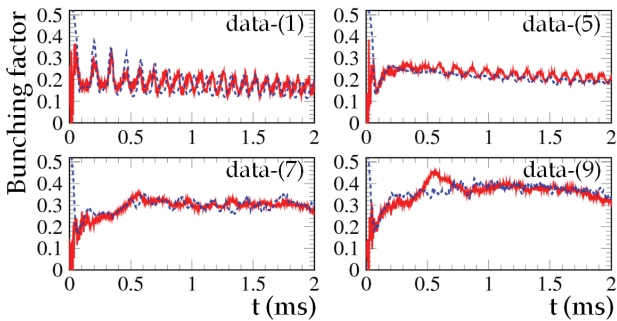


図 32 : 表 3 の各条件でのバンチングファクター。実線が実測値、点線が計算値。

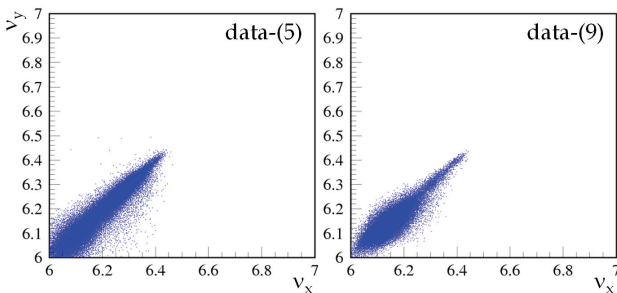


図 33: 表 3 の data-(5)と data-(9)でのインコヒーレントチューンシフトの計算結果。

図 33 は、300 kW のビーム強度を想定したシミュレーションで得られた入射終了直後のインコヒーレントチューンシフトで、左図がセンター入射 (data-(5))、右図がペイント入射 (data-(9)) の場合の計算結果である。ペイント入射によって、チューンシフト量は、 $-0.6$  から  $-0.4$  程度へ軽

減されている。又、図 34 に、入射終了後から 500 ターン分の横方向位相空間分布から求めたビームモーメントの FFT スペクトルを示す。上述の通り、ビームが共鳴条件を満たした場合には、その共鳴の次数に対応するビームモーメント振動のチューンが整数値を取る。センター入射の場合には、 $\langle x^2 \rangle$ ,  $\langle y^2 \rangle$ ,  $\langle x^3 \rangle$ ,  $\langle x^4 \rangle$ ,  $\langle x^2 y^2 \rangle$ ,  $\langle y^4 \rangle$  の各ビームモーメントのスペクトルの整数位置に有意なピークが出現しているが、ペイント入射によって、そのピーク強度が十分に軽減されていることが分かる。つまり、センター入射の場合には、そうしたビームモーメントの次数に対応する共鳴、特に、空間電荷力が強い発生源になり得る偶数次の共鳴 ( $2\nu_{x,y}=12$ ,  $4\nu_{x,y}=24$  等) がビーム損失へ大きく寄与し、又、そうした影響が、ペイント入射によって軽減されたことで、ビーム損失の低減につながったと解釈される。

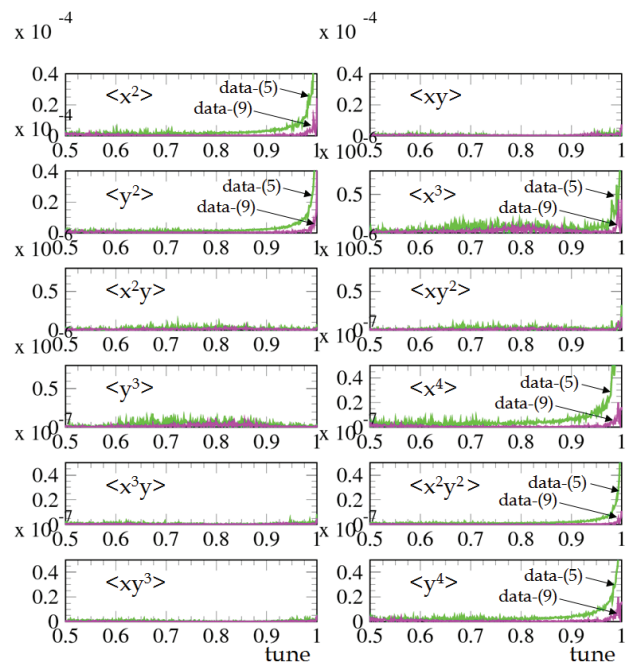


図 34 : 表 3 の data-(5)と data-(9)でのシミュレーション結果から求めたビームモーメントの FFT スペクトル。

図 35, 36 に、シミュレーションから得られた規格化エミッタンスの時間依存性を示す。此处では、上記の各種不完全性のエミッタンス増大への

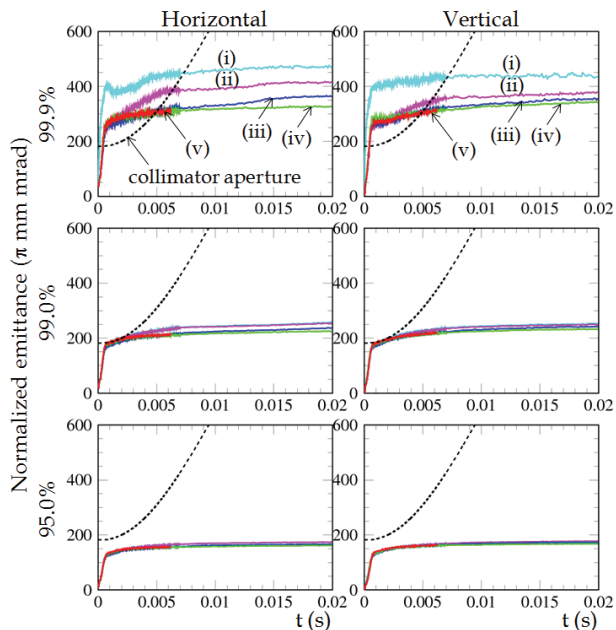


図 35 : 表 3 の data-(5)でのシミュレーションから得られた規格化エミッタンスの時間依存性。

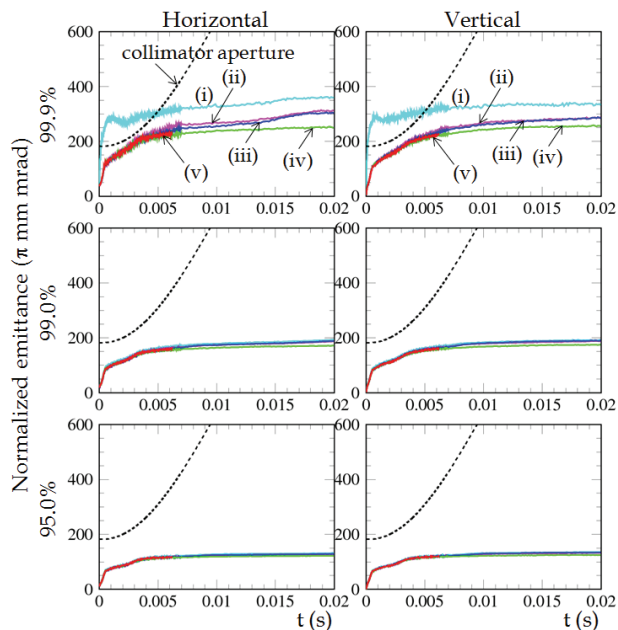


図 36 : 表 3 の data-(9)でのシミュレーションから得られた規格化エミッタンスの時間依存性。

寄与をそれぞれ調査する為に、以下の系統だった 5 つ組み合わせで不完全性を取り込んだ計算結果を併記している。

(i)  $\Rightarrow$  (A)~(E)

(ii)  $\Rightarrow$  (A)~(D)

(iii)  $\Rightarrow$  (A)~(C)

(iv)  $\Rightarrow$  (A)~(B)

(v)  $\Rightarrow$  (A)

又、そのエミッタンス増大の様子を詳細に観測する為に、この計算では、ビーム損失を定義するコリメータアパーチャを導入していない（図中の点線がコリメータリミットに相当する）。図 35 のセンター入射の場合（data-(5)）には、上記の共鳴現象に由来すると予想されるビーム積上げ過程から加速初期に亘る急激なエミッタンス増大、又、その後、漏れ磁場に起因する緩やかなエミッタンス増大が観測されている。図 36 のペイント入射導入時（data-(9)）の計算結果から明らかのように、上記のエミッタンス増大は、ペイント入射によって十分に軽減され、その際にコリメータリミットを越える粒子の殆どは、ビーム入射過程でのフォイル散乱で発生する大角度イベントに由来するものである。つまり、シミュレーションによる検討では、300 kW 運転時のビーム損失量は、概ね最小化できたと結論づけられる。

#### 5.4 今後の計画と課題

現状の RCS の供用運転時の出力ビームパワーは、120 kW であるが、本年の夏季メンテナンス期間に実施する幾つかのハードウェアの改善作業（フォイル散乱を最小化する為の小さな荷電変換フォイルの導入、クロマティシティー補正用六極電磁石電源のパターン電源化、等々）を経て、本年秋季以降から徐々にビームパワーを増強してゆく予定である。又、来年の夏季メンテナンス期間迄に、300 kW 出力での連続運転デモンストレーションを実現させることが、我々の当面の目標となっている。

又、現状の入射エネルギーで、更なる大強度化（ $\sim 600$  kW 相当）を目指したビーム試験も実施予定である。その際も、ビーム増強と共に増加する

ビーム損失の低減が課題となるが、その鍵を握るのが横方向のペイント入射である。現状は、300 kW 相当のビームに対し、ペイントエミッタンス  $100\pi$  mm mrad の横方向ペイント入射と縦方向ペイント入射の組み合わせで、ビーム損失を最小化させている。縦方向に関しては、設計通りのペイント入射が実現されているが、一方の横方向ペイント入射では、そのペイントエミッタンスは、設計値 ( $216\pi$  mm rad) の半分にも至っていない。図 33 に、インコヒーレントチューンシフトの計算結果を示したが、ペイント入射によって、そのチューンスプレッドが劇的に改善されていないのは、この小さなペイントエミッタンスに由来する（設計通りのペイント入射を実施すれば、チューンシフトスプレッドは、 $-0.2$  以下へ改善される）。図 30 の data-(10)が、300 kW 相当のビームに対して、設計通りの横方向ペイント入射を組み合わせさせた時のビーム損失の実測値と計算値であるが、この場合は、10%程度の大きなビーム損失が発生してしまう。図 37 に、その際のシミュレーションから得られた規格化エミッタンスの時間依存性を示す。此处では、図 35, 36 と同様に、5 つの組み合わせで各種不完全性を取り込んだ場合の計算結果を併記している。各結果の比較から明らかのように、入射バンブ軌道を立てた際に生じるエッジ収束と漏れ磁場が有意なエミッタンス増大を引き起こし、それがビーム損失の主原因になっていることが分かる。つまり、そうした四極誤差磁場によって加速器の対称性が歪められ、その結果として励起される各種非構造共鳴によって、ビーム振動の安定領域が狭められているのが、横方向ペイントエミッタンスのフレキシビリティに強い制限が掛っている主原因と考えられる。今後、300 kW 相当以上のビーム強度を目指す上で、横方向のペイントエミッタンスの拡幅が、その際に生じるビーム損失低減のための重要なノブになると予想される。上記の現象は、ベアチューンの選択にも強く依存するので、実験と計算の両面からチューンの最適化を図ることが第一の課題であるが、それと共に、加速器の対称性

を補正する新たな補正系（四極電磁石系）の導入を視野に入れた検討も進めている。

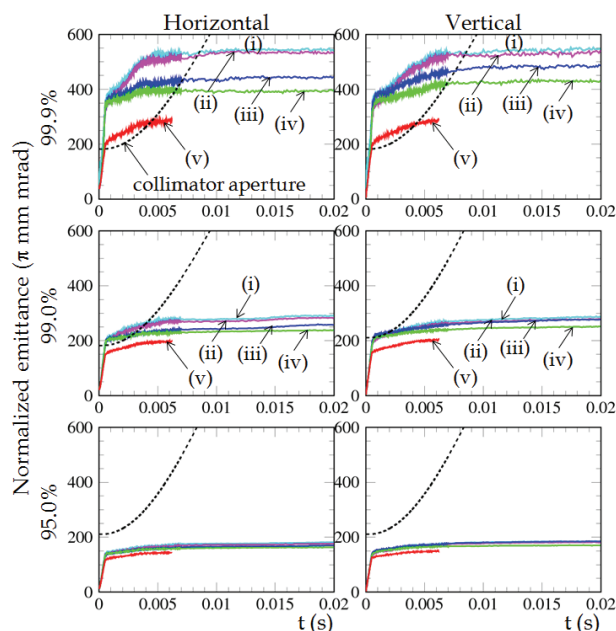


図 37: 表 3 の data-(10)でのシミュレーションから得られた規格化エミッタンスの時間依存性。

## 謝辞

本テキストの最後に紹介した一連の RCS ビーム試験は、RCS グループが中心となって行ったのですが、Linac、MR、MLF のターゲットグループ等、多くの方々の支援を受けて実現したものです。この場をお借りして、深い感謝の意を表します。又、今回、講師という貴重な機会を与えてくださった KEK の古屋貴章教授、山崎良成名誉教授へも深くお礼申し上げます。

## 参考文献

### 第 1~3 章

- [1] 大西幸喜, "単粒子力学入門", OHO'00 (2000).
- [2] 神谷幸秀, "加速器の原理 シンクロトロン及びストレージング", OHO'84 (1984).
- [3] M. Ellison, et al., Phys. Rev. E50, 4051 (1994).
- [4] S. Y. Lee, "Accelerator Physics", World Scientific.

[5] H. Wiedemann, "Particle Accelerator Physics II", Springer.

[6] 木原元央・亀井享、"加速器科学"、丸善.

#### 第 4 章

[7] 町田慎二、"空間電荷効果"、OHO'00 (2000).

[8] 町田慎二、"ラティス・空間電荷効果"、OHO'96 (1996).

[9] R. Baartman, "Betatron Resonances with Space Charge", AIP Conf. Proc. No. 448, p.56 (1998).

[10] F. Sacherer, "Transverse Space Charge Effects in Circular Accelerators", Lawrence Rad. Lab. Report UCRL-18454.

[11] F. Sacherer, "RMS Envelope Equations with Space Charge", IEEE Trans. Nucl. Sci., NS-18, No.3, p.1105 (1971).

#### 第 5 章

[12] H. Hotchi, et al., Phys. Rev. ST. Accel. Beams 12, 040402 (2009).

[13] SAD home page:  
<http://acc-physics.kek.jp/SAD/sad.html>.

[14] J. Liu, et al., "Fourth-Integral Resonance Study on Aladdin at SRC", Argonne Nat. Lab. LS Note 214.

[15] P.K. Saha, et al., Phys. Rev. ST. Accel. Beams 12 040403 (2009).

[16] H. Harada, KEK Report 2009-7.

[17] F. Tamura, et al., Phys. Rev. ST. Accel. Beams 12, 041001 (2009).

[18] H. Hotchi, et al., "High-Intensity Beam Operations in the J-PARC 3-GeV RCS", Proc. of IPAC10, MOPEC068 (2010).

[19] S. Machida and M. Ikegami, "Simulation of Space Charge in a Synchrotron", AIP Conf. Proc. No. 448, p.73 (1998).