

ビームの受けるインピーダンスとビームの不安定性の理論

菅蒲田義博

JAEA, Japan Atomic Energy Agency,

2-4 Shirakata Shirane, Tokaimura, Nakagun, Ibaraki 319-1195, JAPAN

平成 22 年 8 月 16 日

はじめに

この講義は、加速器の中をまわるビームの安定性についての理論について纏めたものである。表題のインピーダンスとは、ビームを加速器の中を回る電流だとイメージして、ビームが(電流が)加速器と相互作用して、加速器の各構成要素(加速空洞、キッカー、チェンバーなど)を通過する度に抵抗(インピーダンス)を受けるといった意味である。

ビームが不安定になるというのは、ビームがリングの中を周回することで、インピーダンスの効果がビームに蓄積され、ビームが序々に揺らされ、振動が大きくなり最終的にチェンバーの壁にぶつかって(或はRFのパケツからはみ出て)、ビームが加速器の中に安定して存在できなくなるといった意味である。

話の内容としては、インピーダンス(ビームが受ける加速器との電磁相互作用)の定式化(第I部)、コースティングビーム(塊になっていない加速器全周にわたって存在するビーム)の不安定性の理論の定式化(第II部の第4章)、マルチバンチビーム(RFによって塊にされたビームが複数リングにある状態)の不安定性の理論の定式化(第II部の第5章)と進み、Japan Proton Accelerator Research Complex (J-PARC)[1]でのインピーダンス及びビームの不安定性についての研究の紹介(第III部)という具合に進めようと思う。

インピーダンスとはいわば、加速器の構成要素とビームとの相互作用なので、これが定式化ができないと、ビームの振る舞いについても記述できないのはすぐ判ると思う。一般にインピーダンスは大きければ、それだけビームは不安定になりやすく、各加速器要素のインピーダンスの総和はインピーダンスの上限を超えないように管理される(Keil-Schnell criterion)[2, 3]。

インピーダンスが判ると、ビームの振る舞いが解析できるようになるが、その際、基本となる方程式が、Vlasov方程式[4]とよばれるものである(第II部の第3章)。これをもとに、コースティングビームの場合、マルチバンチビームの場合のビームの振動の増加率(growth rate)の定式化が行われる。これにより、ビームが安定に存在できるオペレーションの条件(チューンやクロマテシティ等の選び方)やKeil-Schnell criterionが導出できる。

この分野を勉強するに当たっての参考文献であるが、英語の教材としては、Chaoの"Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators"[5]が有名である。過去のOHOにも優れたテキストが数多い。この講義録を書くに当たっては、鈴木敏郎氏の"ビームの不安定性の理論"[6]及び、陳栄浩氏の"大強度陽子ビームの不安定性"[7]をかなり参考にさせてもらった。

補足しておく、虚数単位のconventionとして、理学系は i を工学系は j を使う($-i = j$)傾向があるが、この講義録では、 j を使うことにした。又第I部で導入されるウェイク関数は引数が負の時零になるようにとった(因果率がある為、ビームが構成要素を通過して初めて電磁場が誘起される。その時間軸の取り方のこと。)。そのため、他の講義録と比較する際は少し注意が必要である。

最後に、この講義録の第 III 部で述べる J-PARC でのインピーダンス及びビームの不安定性の研究成果のことであるが、まず、陳栄浩氏及び筒井裕士氏が大強度陽子加速器プロジェクトの研究を初期の段階 (JHF) から行ってきたており、その礎を築いたことは記しておかなくてはならないと思う [8]。現在、J-PARC では陳栄浩氏をリーダーに Impedance Instability Group[9] ができており、私を含め、外山毅氏、高田耕治氏、大見和史氏、飛山真理氏、帯名崇氏、栗本佳典氏が研究活動している。今回紹介する内容もその共同研究によるところが多い。ここに敬意と感謝の意を表したいと思う。

第I部

ビームが加速器の構成要素から受けるイン ピーダンスの理論

第 I 部では、ビームが加速器から受けるインピーダンスの話をする。それを定式化する準備として、まず、ビームのウェイク (航跡場) 関数というのを導出する (第 1 章のセクション 1.1)。この際、縦方向と横方向のウェイク力を関連づける有名な Panofsky-Wenzel theorem[10] が導出される。その後、ビームの受けるインピーダンスの概念を導入し、ウェイク関数とインピーダンスがフーリエ変換で結びつくことを示す (第 1 章のセクション 1.2)。

第 2 章では、代表的なインピーダンス (空間電荷インピーダンスと抵抗性チェンバーのインピーダンス) を導出した後 (第 2 章のセクション 2.1 及び 2.2)、最後に、インピーダンスの導出法や最近の研究成果を紹介することにする (第 2 章のセクション 2.3 及び 2.4)。

第1章 インピーダンスとウェイク関数

この章では、ビームのインピーダンスを定式化する準備として、ビームのウェイク (航跡場) 関数というのを導出する。この際、縦方向と横方向のウェイク力を関連づける Panofsky-Wenzel theorem[10] が導出される。その後、ビームの受けるインピーダンスとウェイク関数がフーリエ変換で関連づけられる事を示す。

1.1 ビームの感じるウェイク関数

金属パイプで囲まれたチェンバーの内部を走っているビームを考えることにする。この時、荷電粒子の塊 (ビーム) からは、電気力線が金属パイプに向かって走っており、金属パイプの表面には鏡像電荷が走っている。金属パイプが完全導体でできたスムーズな物であれば、鏡像電荷はビームとともにスムーズにチェンバーの表面を流れるので、電磁場はビームの周りに $1/\gamma$ 程度の領域にとどまる [5]

今、完全導体の金属パイプの一部に段差があったとする。すると、鏡像電流はその段差に従って向きを変えることになる。この時に電磁波が放出されることになる。この電磁場は、粒子が通過した後も段差の付近にとどまって、やがて時間と共に減衰することになる。

以上は一つの例であるが、このようにビームが加速器の構成要素と相互作用することで放出される電磁場のことをウェイク場 (航跡場) と呼ぶ。(これは、ちょうど船が海を航行している時、船のあとに航跡が残る。この航跡のイメージを、残された電磁場と結びつけて名付けられた)。後でわかるように、このウェイク場とインピーダンスはフーリエ変換で結びつく表裏一体の関係になっている。

このような状況を考えるのに、どのようにしたらよいか、鈴木敏郎氏の講義録 [11] に従って定式化を試みることにする。今、チェンバーの中心を原点にとって、円筒座標系 (r, θ, s) を考えたとする。電荷 q をもった速度 $c\beta$ の $(r_0, 0, s)$ にあるビームの電荷密度 ρ 及び電流密度 \vec{j} は

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{q}{r_0} \delta(r - r_0) \delta_p(\theta) \delta(s - c\beta t) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{I_m \cos m\theta}{\pi r_0^{m+1} (1 + \delta_{m0})} \delta(r - r_0) \delta(s - \beta ct),\end{aligned}\tag{1.1}$$

$$\vec{j} = c\beta\rho\vec{s},\tag{1.2}$$

のように書ける。ここで、 \vec{s} は s 方向の単位ベクトル、 $\delta_p(\theta)$ は 2π の周期をもつ周期的な δ 関数で通常の δ 関数とは区別される。また、 I_m は m 番目のモーメントで

$$I_m = qr_0^m, \quad (1.3)$$

で定義される。

横方向のウェイク力は、横方向に働くローレンツ力 \vec{F} :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (1.4)$$

を s で (縦方向に) 積分した量で定義される。但し、時間については、ビームに同期して積分をする必要があることから、

$$\vec{F}(r, \theta, z) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} ds \vec{F}(r, \theta, s, t = \frac{s+z}{v}), \quad (1.5)$$

となる。ただし、 $v = c\beta$ 。 L は積分区間で注目している構造物よりも十分長くないといけない。積分した結果、 \vec{F} は (r, θ, z) のみの関数となる。

式 (1.5) をベクトルポテンシャルで書き換えることを考える。すると、式 (1.5) は

$$\begin{aligned} \vec{F}(r, \theta, z) &= q \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} ds \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right) - q \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} ds \vec{\nabla} \Phi \\ &= q \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} ds \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla}(vA_s) - v \frac{\partial \vec{A}}{\partial s} \right) - q \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} ds \vec{\nabla} \Phi \\ &= q \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} ds \left(\vec{\nabla}(vA_s) - v \frac{d\vec{A}}{ds} \right) - q \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} ds \vec{\nabla} \Phi \\ &= qv \left(\vec{A}(-\frac{L}{2}) - \vec{A}(\frac{L}{2}) \right) + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} ds \vec{\nabla} A_s - q \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} ds \vec{\nabla} \Phi, \end{aligned} \quad (1.6)$$

と書き換えられる。

今、 $z = L/2$ と $z = -L/2$ で周期境界条件を課したとすると、第 1 項は消える。(もし、構造物が周期構造を持たない場合、 L は ∞ にとればよい。) $\vec{F}(r, \theta, z)$ のうち横方向の成分のみに注目すると、

$$\vec{F}_\perp(r, \theta, z) = qv \nabla_\perp \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} ds A_s - q \nabla_\perp \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} ds \Phi. \quad (1.7)$$

と纏まる。

一方、縦方向のウェイク力 \bar{F}_\parallel は

$$\bar{F}_\parallel = -q \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} ds \frac{\partial \Phi}{\partial s} - q \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} ds \frac{\partial A_s}{\partial t} = -q \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} ds \frac{d\Phi}{ds} + \frac{q}{v} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} ds \frac{\partial \Phi}{\partial t} - q \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} ds \frac{\partial A_s}{\partial t}, \quad (1.8)$$

と定義できる。

同様に、 $s = L/2$ と $s = -L/2$ で周期境界条件を課すと、

$$\bar{F}_{\parallel} = -qv \frac{\partial}{\partial z} \int_{-L/2}^{L/2} ds A_s + q \frac{\partial}{\partial z} \int_{-L/2}^{L/2} ds \Phi, \quad (1.9)$$

と計算できる。

式 (1.7) と (1.9) を比較すると、縦方向のウェイク力と横方向のウェイク力は関連づけられて、

$$\nabla_{\perp} \bar{F}_{\parallel} = -\frac{\partial}{\partial z} \bar{F}_{\perp}, \quad (1.10)$$

という表式を得ることができる。この関係式は Panofsky-Wenzel theorem と呼ばれている [10]。

今、 A_s, Φ は共に波動方程式を満たすので、 $A_s - \Phi/v$ について波動方程式 $(\partial^2/\partial t^2 - \Delta)(A_s - \Phi/v) = 0$ を考える。 $A_s - \Phi/v$ は

$$A_s - \frac{\Phi}{v} \propto \int d\omega e^{j\omega t - j\frac{\omega}{c\beta}s} \cos m\theta (\tilde{A}_s(\omega) - \frac{\tilde{\Phi}(\omega)}{v}), \quad (1.11)$$

の形をもつので、波動方程式は、

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{m^2}{r^2} - \frac{k^2}{\gamma^2} \right] (\tilde{A}_s(\omega) - \frac{\tilde{\Phi}(\omega)}{v}) = 0 \quad (1.12)$$

のように書かれ、 $r = 0$ で well-defined な解は $I_m(kr/\gamma)$ に比例することが判る。但し、 $I_m(x)$ は変形ベッセル関数、 $k = \omega/c\beta$ 、 γ はローレンツ因子。

今、 r の小さいところで展開すると、

$$I_m\left(\frac{kr}{\gamma}\right) \propto \left(\frac{kr}{\gamma}\right)^m \quad (1.13)$$

となり、 \bar{A}_s は

$$\bar{A}_s - \frac{\bar{\Phi}}{v} = \int_{-L/2}^{L/2} (A_s - \frac{\Phi}{v}) ds = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{I_m}{v} W_m(z) r^m \cos m\theta, \quad (1.14)$$

のような関数 $W_m(z)$ を導入できる。

式 (1.14) を式 (1.7) と (1.9) に代入すると、縦方向と横方向のウェイク力は、 $W_m(z)$ という一つの関数を使って、

$$\bar{F}_{\parallel}(r, \theta, z) = -q \sum_{m=0}^{\infty} I_m W'_m(z) r^m \cos m\theta, \quad (1.15)$$

$$\vec{\bar{F}}_{\perp}(r, \theta, z) = q \sum_{m=0}^{\infty} I_m W_m(z) m r^{m-1} (\hat{r} \cos m\theta - \hat{\theta} \sin m\theta), \quad (1.16)$$

のように記述できる (但し、この I_m は式 (1.3) のことで変形ベッセル関数ではない。)。ここで、' は d/dz を示す。

$W_m(z)$ は横方向のウェイク関数、 $W'_m(z)$ は縦方向のウェイク関数と呼ばれる。

1.2 ビームの受けるインピーダンス

電磁波のエネルギー放出はビームのエネルギーの損失に寄因すると考えられるので、もしビームを $I_0 e^{j\omega t - jks}$ ので表せる電流だと考えると抵抗を感じることになる。このようなビームの受ける抵抗がビームのインピーダンスとよばれる。

今、パンチされたビームが $I(\tau)$ で与えられたとすると、そのフーリエ変換は、

$$I(\omega) = \int \frac{d\tau}{2\pi} I(\tau) e^{-j\omega\tau} \quad (1.17)$$

で与えられる。一方、ビームの先頭から z だけ遅れて走る粒子の受ける電圧 $V(z)$ は

$$V(z) = \int_{-\infty}^{\infty} ds E_z(s, t = \frac{s+z}{v}) \quad (1.18)$$

で与えられる。これのフーリエ変換は

$$V(\omega) = \int \frac{dz}{2\pi v} V(z) e^{-j\omega \frac{z}{v}}, \quad (1.19)$$

となる。これらを使って縦方向のインピーダンスは

$$V(\omega) = -Z_L I(\omega) \quad (1.20)$$

と定義される [7]。

今、ウェイクをたてるビームとして式 (1.1)-(1.2) で与えられるものを考えたとすると、式 (1.15) より、 $V(z) = -qW'_0(z)$ これをフーリエ変換して、 $I(\omega) = q/2\pi$ で割ると、

$$Z_L(\omega) = \int \frac{dz}{v} W'_0(z) e^{-j\omega \frac{z}{v}}, \quad (1.21)$$

つまり、ウェイクのフーリエ変換がインピーダンスになる。この逆変換から、ウェイク関数はインピーダンスを使って、

$$W'_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} Z_L(\omega) e^{j\omega t}, \quad (1.22)$$

と書ける。 $W'_0(t)$ は実でなくてはいけないので、 $Z_L^*(\omega) = Z_L(-\omega)$ の関係が導ける。

これとは別に横方向のインピーダンスというものもある。これはビームがチェンバーの中心軸から外れていた場合の効果について表すもので、今、中心軸からビームが r_0 だけずれていたとすると、

$$V_T(\omega) = jZ_T(\omega) \cdot r_0 I(\omega) \quad (1.23)$$

と定義される。同様にして、

$$V_T(z) = -I_1 W_1(z), \quad (1.24)$$

$$r_0 I(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int dr r d\theta \sum_{m=0}^{\infty} r_0 \cos \theta \frac{I_m \cos m\theta}{\pi r_0^{m+1} (1 + \delta_{m0})} \delta(r - r_0) = \frac{1}{2\pi} I_1 \quad (1.25)$$

を使うと、横方向インピーダンスの表式：

$$Z_T(\omega) = j \int \frac{dz}{v} W_1(z) e^{-j\omega \frac{z}{v}}, \quad (1.26)$$

が得られる。

これを時間領域にフーリエ変換したものは横方向ウェイク関数とよばれ、横方向インピーダンスを使って、

$$W_1(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} j Z_T(\omega) e^{j\omega t}, \quad (1.27)$$

で与えられる。 $W_1(t)$ は実でなくてはいけないので、 $-Z_T^*(\omega) = Z_T(-\omega)$ の関係が導ける。縦方向のインピーダンスとは、関係式が異なるので注意が必要である。

第2章 インピーダンスの公式と導出法

この章では典型的なインピーダンスである空間電荷効果のインピーダンスや抵抗性チェンバーのインピーダンスの公式を導出をする。その後、最近の研究成果の例として、抵抗性インサート（短い抵抗性パイプ）のインピーダンスの性質やインピーダンスの数値計算法の進展について紹介する。

2.1 空間電荷効果のインピーダンス

まず、空間電荷効果のインピーダンス

$$\frac{Z_L(n\omega_0)}{n} = -j \frac{Z_0}{2\beta\gamma^2} (1 + 2 \log \frac{a}{\sigma}), \quad (2.1)$$

$$Z_T = -j \frac{Z_0 R}{\beta^2 \gamma^2} \left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{a^2} \right), \quad (2.2)$$

を導出することにする [5, 12]。但し、 R はリングの平均半径、 Z_0 は自由空間のインピーダンスで、 $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi(\Omega)$ 、 $2\pi/\omega_0$ がビームがリングを一周する時間、 n は自然数、 a はチェンバーの半径、 σ はビームの半径である。

まず縦方向のインピーダンスを求める事にする。計算を進める上で、式 (1.1)-(1.2) で与えられるビームに対するマクスウェル方程式の一般解が必要になるので、付録 A で導出しておいた。式 (A.12) を使って、半径 σ で電流密度が $j_z = \beta c(1 - \Theta(r - \sigma))e^{-jks}/(\pi\sigma^2)$ のビームが完全導体のパイプで覆われたチェンバーを通った場合に励起される E_z を求める事にする。チェンバーの表面で $E_z = 0$ という条件を使うとビームの内部 ($r \leq \sigma$) の E_z は、

$$E_z = \frac{jcZ_0}{\pi\gamma\sigma^2} \left(\frac{1}{\bar{k}} - \sigma I_0(\bar{k}r) K_1(\bar{k}\sigma) \right) e^{-jks} - \frac{jcZ_0}{\pi\sigma\gamma} I_1(\bar{k}\sigma) K_0(\bar{k}a) \frac{I_0(\bar{k}r)}{I_0(\bar{k}a)} e^{-jks}, \quad \text{for } r \leq \sigma, \quad (2.3)$$

ビームの外部 ($r \geq \sigma$) の E_z は、

$$E_z = \frac{jcZ_0}{\pi\gamma\sigma} I_1(\bar{k}\sigma) K_0(\bar{k}r) e^{-jks} - \frac{jcZ_0}{\pi\sigma\gamma} I_1(\bar{k}\sigma) K_0(\bar{k}a) \frac{I_0(\bar{k}r)}{I_0(\bar{k}a)} e^{-jks}, \quad \text{for } r \geq \sigma, \quad (2.4)$$

と求めることができる。但し、 $I_n(z), K_n(z)$ は n 次の変形ベッセル関数、 $k = \omega/c\beta$ 、 $\bar{k} = k/\gamma$ 。

縦方向のインピーダンス Z_L はビームの断面積での E_z の平均をビーム電流で割ったものなので、長さが \mathcal{L} の完全導体のチェンバーのインピーダンスは

$$Z_L = -\frac{jZ_0}{\beta\pi\sigma^2k} \left(1 - \frac{2K_0(\bar{k}a)I_1^2(\bar{k}\sigma)}{I_0(\bar{k}a)} - 2I_1(\bar{k}\sigma)K_1(\bar{k}\sigma) \right) \mathcal{L}, \quad (2.5)$$

となる。これが、縦方向の空間電荷効果のインピーダンスの非相対論も含めた表式である [13, 14]。

今、周波数 $\omega = n\omega_0$ とし、(但し、 \mathcal{L} はリングの周長 $2\pi R$ にとった。)。 γ が非常に大きいとして変形ベッセル関数を展開すると、式 (2.1) が再現される。このように虚数単位 j に比例する部分の符号が負であるインピーダンスを電気回路理論との類推からキャパシティブなインピーダンスと呼ぶ。

次に横方向のインピーダンスを求める。縦の場合と同様にして電流密度が $j_z = q\beta c\delta(r - r_b) \cos \theta e^{-jks}/\pi r_b$ で与えられるものを考える。この時軸方向の電場は

$$E_z = i_1 \frac{jkcZ_0I_1(\bar{k}r_b)}{\pi r_b\gamma^2} \left(K_1(\bar{k}r) - K_1(\bar{k}a) \frac{I_1(\bar{k}r)}{I_1(\bar{k}a)} \right) \cos(\theta - \theta_b) e^{-jks} \quad \text{for } r > r_b, \quad (2.6)$$

$$E_z = i_1 \frac{jkcZ_0I_1(\bar{k}r)}{\pi r_b\gamma^2} \left(K_1(\bar{k}r_b) - K_1(\bar{k}a) \frac{I_1(\bar{k}r_b)}{I_1(\bar{k}a)} \right) \cos(\theta - \theta_b) e^{-jks} \quad \text{for } r < r_b, \quad (2.7)$$

で与えられる。但し、 $i_1 = qr_b$ 。 Panofsky-Wenzel theorem(式 (1.10)) [5, 10] を使うと、横方向の力を求めることができ、横方向インピーダンスについても

$$Z_T = \frac{RkZ_0}{j\beta r_b\gamma^3} \left(K_1(\bar{k}r_b) - \frac{I_1(\bar{k}r_b)}{I_1(\bar{k}a)} K_1(\bar{k}a) \right), \quad (2.8)$$

という表式がえられる。 γ が非常に大きいとして変形ベッセル関数を展開し、 r_b を零に近づけると、よく知られた式 (2.2) が再現できる。

2.2 縦方向に長い抵抗性チェンバーのインピーダンス

次に、電気伝導率が σ_c で与えられる材質でできた長さが g のパイプで囲まれたチェンバーを考える。パイプの動径方向の厚み t がスキンドープスに比べて十分大きく、かつパイプの半径 a に比べて、スキンドープスが十分小さい場合は、よく知られた。

$$Z_{L,W} = gZ_0 \sqrt{\frac{2\omega}{cZ_0\sigma_c} \frac{1+j}{4\pi a}}, \quad (2.9)$$

$$Z_{T,W} = gc \sqrt{\frac{Z_0\omega\sigma_c}{2c} \frac{1+j}{\pi\sigma_c\omega a^3}}, \quad (2.10)$$

が得られることが判る。

より、一般的な厚み t のパイプのインピーダンスの導出から始めることにする。このパイプの内部 ($a < r < a+t$) に励起される電磁場は

$$E_z = e^{-jks} (C_1(k)I_0(\nu_2 r) + C_2(k)K_0(\nu_2 r)), \quad (2.11)$$

$$H_\theta = \frac{\sigma}{\nu_2} e^{-jks} (C_1(k)I_1(\nu_2 r) - C_2(k)K_1(\nu_2 r)). \quad (2.12)$$

と書ける。パイプの外側 ($a+t < r$) では、

$$E_z = D_1(k)e^{-jks} K_0(\bar{k}r), \quad (2.13)$$

$$H_\theta = -\frac{j\beta\gamma}{Z_0} D_1(k)e^{-jks} K_1(\bar{k}r), \quad (2.14)$$

で与えられる。但し、 $\nu_2 = \sqrt{k^2 + jk\beta Z_0 \sigma_c}$ 。

式 (A.12)-(A.13) と式 (2.11)-(2.14) の連続条件から、各々の未知数 $A(k), C_1(k), C_2(k), D_1(k)$ は求まる。この方法による電磁場の計算方法は field matching 法と呼ばれている [15]。

前節と同様に、重ね合わせの原理を使って半径 σ で電流密度が $j_z = \beta_c(1 - \Theta(r - \sigma))e^{-jks}/(\pi\sigma^2)$ のビームがチェンバーを通った場合を考えることにする。それに対する縦方向のインピーダンスを求めた後、空間電荷効果のインピーダンス式 (2.5) を除くと、厚みが t のパイプの電気伝導率が σ_c のパイプのインピーダンスが求まる。それは、

$$Z_L = -\frac{jZ_0 g \bar{k}}{2\pi\beta\gamma} \left(\frac{K_0(\bar{k}a)}{I_0(\bar{k}a)} + C_3 \right), \quad (2.15)$$

と表される [16]。但し、

$$C_3 = \frac{[\sigma_c Z_0 K_0(\bar{k}a)I_1(\nu_2 a) + j\beta\gamma\nu_2 K_1(\bar{k}a)I_0(\nu_2 a)]\alpha - \sigma_c Z_0 K_0(\bar{k}a)K_1(\nu_2 a) + j\beta\gamma\nu_2 K_1(\bar{k}a)K_0(\nu_2 a)}{[-\sigma_c Z_0 I_0(\bar{k}a)I_1(\nu_2 a) + j\beta\gamma\nu_2 I_1(\bar{k}a)I_0(\nu_2 a)]\alpha + \sigma_c Z_0 I_0(\bar{k}a)K_1(\nu_2 a) + j\beta\gamma\nu_2 I_1(\bar{k}a)K_0(\nu_2 a)}, \quad (2.16)$$

$$\alpha = \frac{\sigma_c Z_0 K_1(\nu_2(a+t))K_0(\bar{k}(a+t)) - j\beta\gamma\nu_2 K_0(\nu_2(a+t))K_1(\bar{k}(a+t))}{\sigma_c Z_0 I_1(\nu_2(a+t))K_0(\bar{k}(a+t)) + j\beta\gamma\nu_2 I_0(\nu_2(a+t))K_1(\bar{k}(a+t))}. \quad (2.17)$$

ここで、パイプの厚み t を無限大にもっていったとすると、

$$Z_L = \frac{jZ_0 g \bar{k}}{2\pi\beta\gamma} \left(\frac{K_0(\bar{k}a)}{I_0(\bar{k}a)} - \frac{\beta\gamma\nu_2 K_0(\nu_2 a)K_0'(\bar{k}a) + jK_0(\bar{k}a)K_0'(\nu_2 a)Z_0\sigma_c}{\beta\gamma\nu_2 K_0(\nu_2 a)I_0'(\bar{k}a) + jI_0(\bar{k}a)K_0'(\nu_2 a)Z_0\sigma_c} \right), \quad (2.18)$$

特にスキンドープ $\delta = \sqrt{2/\mu_0\omega\sigma_c}$ に比べてチェンバーの半径 a が十分大きいとすると、ベッセル関数を漸近式で近似することで、よく知られた抵抗性チェンバーのインピーダンスの式 (2.9) を再現することができる [5, 12]。

ここインピーダンスの物理的意味は、ビームがチェンバーを走ることによって生じた壁電流が受ける抵抗と解釈できる。今、パイプの厚み t が無限大の時、壁電流ははおよそ、スキンドープ δ の部分を流れていると考えてよい。そうだとすると、壁電流が受ける抵抗は

$$Z_{wall} = \frac{g}{\pi\sigma_c((a+\delta)^2 - a^2)}, \quad (2.19)$$

とかける。これは、式を変形していくと、式 (2.9) の実部そのものである。

また、式 (2.9) の虚部は、空間電荷のインピーダンスと違ってインダクティブである (虚数単位 j に比例する部分の符号が正)。これは、抵抗性チェンバーの内部に蓄えられる磁場の時間変化の影響だと解釈できる。ビームがチェンバーの軸上を通過すると、パイプの部分 (面積は $g \times \delta$ で与えられる。) には、 $I_0/2\pi a$ の磁場が横切る。この磁場の時間変化がインピーダンスに寄与するとかんがえると、

$$Z_{Mg} = j\omega\mu_0 \frac{\delta g}{2\pi a} = jZ_0 \frac{g}{2\pi a} \sqrt{\frac{2\omega}{cZ_0\sigma_c}}, \quad (2.20)$$

となる。式 (2.21) と式 (2.19) の虚部を比較すると、ファクター 2 の違いで一致することが判る [7]。

さて、パイプの厚み t を小さくしていくと、スキンドープの方が、チェンバーの厚みより大きくなり、インピーダンスは減衰するようになる。実際、この時のインピーダンスは、

$$Z_L = \frac{e^{\sqrt{2j}t/\delta} - e^{-\sqrt{2j}t/\delta}}{e^{\sqrt{2j}t/\delta} + e^{-\sqrt{2j}t/\delta}} g Z_0 \sqrt{\frac{2\omega}{cZ_0\sigma_c}} \frac{1+j}{4\pi a}, \quad (2.21)$$

で与えられ、厳密式である式 (2.18) をよく近似する [17]。

縦方向のインピーダンスの導出と同様の方法で横方向のインピーダンスも求められる (付録 B 参照)。厚みが t の最も一般的な横方向のインピーダンスの式は

$$Z_T = \frac{jgZ_0\bar{k}^2 K_1(\bar{k}a) E_2(\alpha_2 - 1)}{4\pi\beta\gamma^2 I_1(\bar{k}a)} \quad (2.22)$$

で与えることができる [18]。但し、 E_2, α_2 は 4 つの未知数 $\alpha_2, \eta_2, E_2, G_2$ に対して以下の連立方程式:

$$\frac{(\nu_2^2 - \bar{k}^2)}{\bar{k}\beta a \nu_2} E_2(1 - \alpha_2) + \left(\nu_2 \frac{I_1'(\bar{k}a)}{I_1(\bar{k}a)} - \bar{k} \frac{K_1'(\nu_2 a)}{K_1(\nu_2 a)} \right) G_2 - \left(\nu_2 \frac{I_1'(\bar{k}a)}{I_1(\bar{k}a)} - \bar{k} \frac{I_1'(\nu_2 a)}{I_1(\nu_2 a)} \right) G_2 \eta_2 = 0, \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} & \left(\beta \nu_2 \frac{I_1'(\bar{k}a)}{I_1(\bar{k}a)} + j \frac{Z_0 \sigma_c}{\gamma} \frac{K_1'(\nu_2 a)}{K_1(\nu_2 a)} \right) E_2 - \left(\beta \nu_2 \frac{I_1'(\bar{k}a)}{I_1(\bar{k}a)} + j \frac{Z_0 \sigma_c}{\gamma} \frac{I_1'(\nu_2 a)}{I_1(\nu_2 a)} \right) E_2 \alpha_2 \\ & + \frac{(\nu_2^2 - \bar{k}^2)}{\nu_2 \bar{k} a} G_2(1 - \eta_2) = -\beta \nu_2 \left(\frac{K_1'(\bar{k}a)}{K_1(\bar{k}a)} - \frac{I_1'(\bar{k}a)}{I_1(\bar{k}a)} \right), \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(\bar{k}^2 - \nu_2^2)}{\bar{k}\nu_2\beta(a+t)} \frac{K_1(\nu_2(a+t))}{K_1(\nu_2 a)} E_2 - \frac{(\bar{k}^2 - \nu_2^2)}{\bar{k}\nu_2\beta(a+t)} \frac{I_1(\nu_2(a+t))}{I_1(\nu_2 a)} E_2 \alpha_2 \\ & + \left(\bar{k} \frac{K_1'(\nu_2(a+t))}{K_1(\nu_2 a)} - \nu_2 \frac{K_1(\nu_2(a+t))}{K_1(\nu_2 a)} \frac{K_1'(\bar{k}(a+t))}{K_1(\bar{k}(a+t))} \right) G_2 \\ & - \left(\bar{k} \frac{I_1'(\nu_2(a+t))}{I_1(\nu_2 a)} - \nu_2 \frac{I_1(\nu_2(a+t))}{I_1(\nu_2 a)} \frac{K_1'(\bar{k}(a+t))}{K_1(\bar{k}(a+t))} \right) G_2 \eta_2 = 0, \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} & - \left(\nu_2 \beta \frac{K_1'(\bar{k}(a+t))}{K_1(\bar{k}(a+t))} \frac{K_1(\nu_2(a+t))}{K_1(\nu_2 a)} + j \frac{Z_0 \sigma_c}{\gamma} \frac{K_1'(\nu_2(a+t))}{K_1(\nu_2 a)} \right) E_2 \\ & + \left(\nu_2 \beta \frac{K_1'(\bar{k}(a+t))}{K_1(\bar{k}(a+t))} \frac{I_1(\nu_2(a+t))}{I_1(\nu_2 a)} + j \frac{Z_0 \sigma_c}{\gamma} \frac{I_1'(\nu_2(a+t))}{I_1(\nu_2 a)} \right) E_2 \alpha_2 \\ & + \frac{(\bar{k}^2 - \nu_2^2)}{\nu_2 \bar{k}(a+t)} \frac{K_1(\nu_2(a+t))}{K_1(\nu_2 a)} G_2 - \frac{(\bar{k}^2 - \nu_2^2)}{\nu_2 \bar{k}(a+t)} \frac{I_1(\nu_2(a+t))}{I_1(\nu_2 a)} G_2 \eta_2 = 0, \end{aligned} \quad (2.26)$$

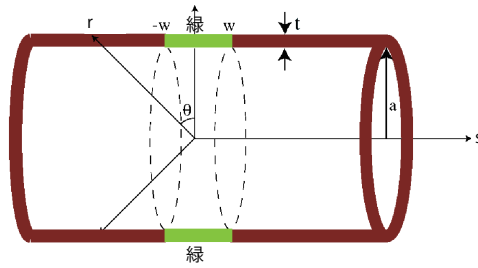


図 2.1: 抵抗性 (電気伝導率 σ_c) のパイプ (インサート) の部分を緑 (長さ $g = 2w$) で示した。両端は完全導体 (茶色) で挟まれている。

を解いて求めなくてはならない。この場合もスキンドープスがチェンバーの半径より十分小さい場合には、式は簡略化され、式 (2.10) を再現することが判る。

横方向の場合も縦方向の時と同じ壁電流による解釈ができて、横方向のインピーダンスはおよそ

$$Z_T = \frac{2\beta c}{\omega(a + \delta)^2} (Z_{wall} + j \frac{Z_{Mg}}{2}), \quad (2.27)$$

で近似できる。但し、厚み t が小さくなると状況はかわり、スキンドープスがパイプの厚みを越えたところから、(つまり、低周波側では、) インピーダンスの実部は $1/\omega$ で増加するようになる。これは、縦方向と違って横方向に関しては、スキンドープスがチェンバーの厚み t を越えたところでも、壁電流がパイプの中を流れようとする為である (しかし、インピーダンスは無敵大になるわけではなく、周波数 f が十分小さい、具体的には $3c/4\pi Z_0 \sigma_c t a$ 以下になると radiation dominant になり、インピーダンスは零に向かって減衰するようになることが判っている。[13])

2.3 縦方向に短い抵抗性パイプで囲まれたチェンバー (抵抗性インサート) のインピーダンス

今までは、完全導体のチェンバーのインピーダンス (空間電荷効果のインピーダンス) と抵抗性チェンバーのインピーダンスを分けて考えてきた。実際、チェンバーの半径 a に比べてチェンバーが十分長い場合には、このように独立に取り扱って問題ない。

一方で、抵抗性パイプに相当する部分がチェンバーの半径 a に比べて、短い場合のインピーダンス (図 2.1 参照) の評価が問題になることもある。例えば、2 次電子の放出を抑えるために TiN コーティングされたセラミッ

クブレイクのインピーダンスの評価をしようと思ったりすると [19, 20]、短い抵抗性のパイプ (TiN コーティング部) を完全導体で挟んだ場合のインピーダンスを評価しなくてはいけなくなる [13]。この問題は数値的に解こうとしてもあまりうまくいかない。それは、メッシュサイズをスキンドepsに比べて十分細かく取らなくてはならないからである。実際の物質の電気伝導率は $10^7/\Omega\text{m}$ 程度あるので注目する周波数領域でスキンドepsは極めて小さく、数値計算でこの問題を解くのは実際上不可能である [21]。

実際のインピーダンスの計算は複雑なので、付録 C にまわして結果だけを示すと、この時、縦方向のインピーダンスは

$$Z_{insert,L} \simeq \frac{4Z_0 I_1^2(\bar{k}\sigma) e^{-jkz_0}}{j\beta\gamma\sigma^2 a \bar{k}^3 I_0^2(\bar{k}a) \left(Y_{pole} + Y_{cut} - \frac{\pi\sqrt{jk\beta Z_0}(\sigma_c + j\frac{k\beta\epsilon'}{Z_0})}{k^2\beta^2 w} \tanh \sqrt{jk\beta Z_0}(\sigma_c + j\frac{k\beta\epsilon'}{Z_0})t \right)}, \quad (2.28)$$

横方向インピーダンスは

$$Z_{T,insert} \simeq -\frac{jZ_0 I_1(\bar{k}r_b) e^{-jkz_0}}{\beta\gamma r_b a k I_1^2(\bar{k}a) \left(-\frac{\pi\sqrt{jk\beta Z_0}\sigma_c}{k^2\beta^2 w} \tanh \sqrt{jk\beta Z_0}\sigma_c t + Y'_{pole} + Y'_{cut} \right)}, \quad (2.29)$$

と書かれことが判る。但し、インサートの長さは g で与えられ、 z_0 は $-g/2 < z_0 < g/2$ を満たす。

$$Y_{pole} = -\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\pi a (2 - e^{-j\frac{b_s}{a}(z+w)} - e^{j\frac{b_s}{a}(z-w)})}{w b_s^2}, \quad (2.30)$$

$$Y_{cut} = -\frac{1}{w\pi(a+t)} \int_0^{\infty} d\zeta \frac{2 - e^{-j(z+w)\sqrt{k^2\beta^2 + \frac{\zeta}{(a+t)^2}} - e^{j(z-w)\sqrt{k^2\beta^2 + \frac{\zeta}{(a+t)^2}}}{\zeta \left(k^2\beta^2 + \frac{\zeta}{(a+t)^2} \right) H_0^{(1)}(e^{j\frac{\pi}{2}}\sqrt{\zeta}) H_0^{(2)}(e^{j\frac{\pi}{2}}\sqrt{\zeta})} \simeq \frac{2(1-j)}{\sqrt{k\beta w}}, \quad (2.31)$$

$$Y'_{pole} = \sum_{s=1}^{\infty} \left[-\frac{\pi a (2 - e^{-j\frac{b'_{1,s}}{a}(z+w)} - e^{j\frac{b'_{1,s}}{a}(z-w)})}{w b_{1,s}^2} + \frac{\pi a J_1(j'_{1,s}) (2 - e^{-j\frac{b'_{1,s}}{a}(z+w)} - e^{j\frac{b'_{1,s}}{a}(z-w)})}{k^2\beta^2 a^2 w j_{1,s}'^2 J_1''(j'_{1,s})} \right] - \frac{\pi H_1^{(2)}(h'_{1,0}) (2 - e^{-j\frac{d'_{1,0}}{a+t}(z+w)} - e^{j\frac{d'_{1,0}}{a+t}(z-w)})}{k^2\beta^2 (a+t) w h_{1,0}'^2 H_1''^{(2)}(h'_{1,0})} + \frac{\pi (2 - e^{-jk\beta(z+w)} - e^{jk\beta(z-w)})}{w k^2\beta^2} \left(\frac{H_1^{(2)}(h'_{1,0})}{(a+t) h_{1,0}'^2 H_1''^{(2)}(h'_{1,0})} - \frac{1}{2a} \right), \quad (2.32)$$

$$Y'_{cut} = -\frac{1}{\pi(a+t)w} \int_0^{\infty} d\zeta \frac{(2 - e^{-j(z+w)\sqrt{k^2\beta^2 + \frac{\zeta}{(a+t)^2}} - e^{j(z-w)\sqrt{k^2\beta^2 + \frac{\zeta}{(a+t)^2}})}{\zeta \left(k^2\beta^2 + \frac{\zeta}{(a+t)^2} \right) H_1^{(1)}(e^{j\frac{\pi}{2}}\sqrt{\zeta}) H_1^{(2)}(e^{j\frac{\pi}{2}}\sqrt{\zeta})} + \int_0^{\infty} d\zeta \frac{(e^{-j(z+w)k\beta} + e^{j(z-w)k\beta} - e^{-j(z+w)\sqrt{k^2\beta^2 + \frac{\zeta}{(a+t)^2}} - e^{j(z-w)\sqrt{k^2\beta^2 + \frac{\zeta}{(a+t)^2}})}{k^2\beta^2 (a+t) \pi w \zeta^2 H_1'^{(1)}(e^{j\frac{\pi}{2}}\sqrt{\zeta}) H_1^{(2)}(e^{j\frac{\pi}{2}}\sqrt{\zeta})} \simeq 4 \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{2jkw}} + \frac{-2 + 4\sqrt{1 + 2jk\beta w} \sinh^{-1} \frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2k\beta w}} + e^{-j(z+w)k\beta} + e^{j(z-w)k\beta}}{k^2\beta^2 (a+t)^2 \sqrt{1 + 2jk\beta w}}, \quad (2.33)$$

$b_s^2 = k^2\beta^2 a^2 - j_{0,s}^2$, $j_{0,s}$ は $J_0(z)$ の s 番目の零点。 $H_m^{(1)}(z)$ は第一種ハンケル関数。 b_s は、 $j_{0,s} > k\beta a$ に対して、 $-j\beta_s$ で与えられる。 $b_{1,s} = \sqrt{k^2\beta^2 a^2 - j_{1,s}^2}$, $b'_{1,s} = \sqrt{k^2\beta^2 a^2 - j_{1,s}'^2}$, $d'_{1,0} = \sqrt{k^2\beta^2 a^2 - h_{1,0}'^2}$, $j_{n,s}$ は、

$J_n(z)$ の s 番目の零点、 $j'_{1,s}$ は、 $J'_1(z)$ の s 番目の零点、 $h'_{1,0} = 0.501184 + j0.643545$ は $H_1^{(2)}(z)$ の零番目の零点。
 $b'_{1,s}$ は $j_{1,s}^2 > k^2 \beta^2 a^2$ の時、 $-j\sqrt{j_{1,s}^2 - k^2 \beta^2 a^2}$ で与えられる。

ここで、 $t = 0$ のインピーダンスを特にギャップのインピーダンスと読んで [14]、縦方向に対しては

$$Z_{L,gap} = \frac{4Z_0 I_1^2(\bar{k}\sigma) e^{-jks}}{j\beta\gamma\sigma^2 a \bar{k}^3 I_0^2(\bar{k}a) (Y_{pole} + Y_{cut})}, \quad (2.34)$$

横方向に対しては

$$Z_{T,gap} \simeq -\frac{jZ_0 I_1(\bar{k}r_b) e^{-jkz_0}}{\beta\gamma r_b a k I_1^2(\bar{k}a) (Y'_{pole} + Y'_{cut})}, \quad (2.35)$$

と書く事にする (このインピーダンスの議論を古くは Sacherer がレファレンス [22] でしているが、「変位電流の効果が無視できる」等の誤った前提で議論がされているので注意が必要である。)

インサートのインピーダンス $Z_{L,insert}, Z_{T,insert}$ の特徴を表 2.1 に纏めた。ここでインピーダンスを特徴づけるパラメータが 6 つ現れる。一つが厚みに関するパラメータ t_{min} で

$$t_{min} = \left(\frac{4g}{\pi^2 Z_0^3 \sigma_c^3}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad (2.36)$$

で与えられる。残りの 5 つのパラメータは周波数に関するもので、

$$f_\delta = \frac{c}{\pi Z_0 \sigma_c t^2}, \quad (2.37)$$

$$f_L = \frac{3c}{4\pi Z_0 \sigma_c t a}, \quad (2.38)$$

$$f_D = \sqrt{\frac{c^2 Z_0 \sigma_c}{2\pi^2 g}}, \quad (2.39)$$

$$f_c = \frac{\sigma_c^2 Z_0^2 t^2 c}{4\pi g}, \quad (2.40)$$

$$f_r = \left(\frac{gc^3}{4\pi^3 Z_0^2 \sigma_c^2 a^4 t^2}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.41)$$

で与えられる。

一般に (無限の周期構造を持たない) 単体のキャビティのインピーダンスは、diffraction theorem を満たさなくてはならないことが知られている [23]。これは、高周波側において、縦方向インピーダンスは $1/\sqrt{\omega}$ 、横方向インピーダンスに関しては $1/\omega^{\frac{3}{2}}$ で減衰しなくてはならないとうものである。まず、指摘しておきたいのは、今回のインサート (両端を完全導体で挟まれており、これは広い意味の単体の”キャビティ”と見なせる) のインピーダンスはこの定理を満たしているということである。厚みが t_{min} 以上の場合は $f \gg f_D$ の周波数で t_{min} 以下の場合には、 $f \gg f_c$ でこの定理に従って減衰するようになる。典型的な形状の場合、この周波数はおよそ数 THz 程度で、一般的な周波数領域で、 $t > t_{min}$ のインサートを考える限り、インピーダンスは抵抗性インピーダンス $Z_{L,RW}, Z_{T,RW}$ で十分近似できることが判る。

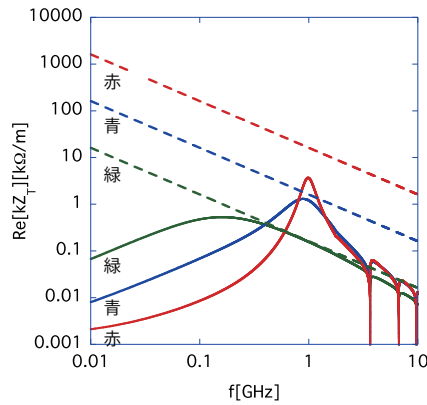


図 2.2: 厚みが $t \ll t_{min}$ を満たすインサートの場合の横方向インピーダンス。緑と緑の点線はインサートの厚みが 1 nm の時、青と青の点線の場合はインサートの厚みが 100 pm の時、赤と赤の点線の場合はインサートの厚みが 10 pm の時を表している。実線が真値で、点線は仮想的にインピーダンスが $\beta_{cg}/2\pi^2 f a^3 \sigma_c t$ で与えられる (つまり、壁電流がすべてインサートを流れたと仮定した場合のインピーダンス) と考えたものである。但し、チェンバーの半径 $a = 5\text{cm}$, インサートの長さ $g = 8\text{ mm}$, 電気伝導率 $\sigma_c = 6 \times 10^6/\Omega\text{ m}$ とした。

さて、このインサートのインピーダンスの振る舞いとして、特に面白いのは、厚みを薄くしていった時の振る舞いである。スキンドepsが厚みを超えるような周波数領域になっても、壁電流はインサートを流れ続け、典型的には数 nm になって初めて放射場の影響が優勢になる。これは、インピーダンスの言葉で言えば、低周波がわで、スキンドepsを超えると縦方向インピーダンスは一定になり、横方向インピーダンスは $1/\omega$ で増加するようになるということである。特に厚みに対して $1/t$ の依存性をもつことが重要で、TiN コーティングはインピーダンスをさげるという観点から数 nm は欲しいということが判る。

インサートのインピーダンスが、壁電流優勢の形になるか放射場優勢の形になるかは、ビームが放出するエネルギーの形をどちらの形にしたら、ビームにとってよりエネルギーを失いにくくなるかという観点からきまる。図 2.2 にインピーダンスの実部を示したが、インサートの厚みが薄くなっても、壁電流の形でエネルギーをロスした方がビームにとって特な限り (つまり、放射場の形でエネルギーを放出したと仮定した場合に比べて、エネルギー損失が小さい限り)、壁電流優勢のインピーダンスになる。インサートの厚みが極めて薄くなって、壁電流の

形でエネルギーをロスする方が、放射場として放出するよりも損する様になると、インピーダンスは放射場優勢の形をとるようになる。

2.4 インピーダンスの数値計算法の最近の進展

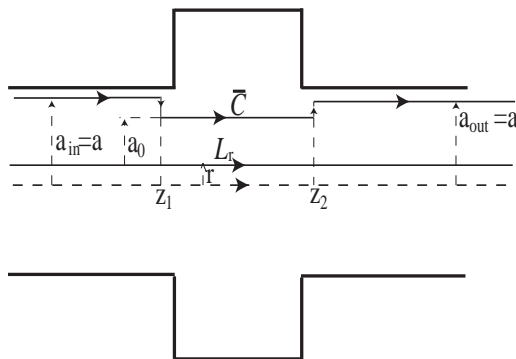


図 2.3: チェンバーの両端が同じ場合の積分路。

加速器の構造物の（材質ではなく、）形状からくるインピーダンスを評価する場合、形状が簡単な場合は、解析的に評価できるが、例えば、ベローズのようにそれが複雑な構造を持つ場合 ABCI や GdfdL など数値計算コードを使って求める場合も多い [24, 25]。しかし、通常、単体の構造物のインピーダンスを求めるので、ビームは無窮遠方から無窮遠方へ去り、インピーダンスの計算に現れる数値積分の積分路は無窮大になる。

図 2.3 のように、もしも、両端のチェンバーの半径が同じで軸対称の構造体が（内側ではなく、）外側に突き出ているような場合は、積分路として、両端のチェンバーの表面にそって $-\infty$ から ∞ まで積分する積分路を選ぶことができる（ビーム軸上でなぜ積分しなくてよいのかという疑問が出るかもしれない。実は、ビームが相対論的な場合 Stokes の定理を使うことで、積分路をチェンバーの表面に変更できることが証明できる。）。この時は、チェンバーの表面上では、 $E_s = 0$ なので、実際上そのインピーダンスは構造体が存在する部分だけの有限積分で評価できる。

しかし、構造体がビーム軸に向かって内側に突き出ているような場合（アイリス、コリメータ等） E_s の s 軸方向の積分は、単純には突起部をさけてチェンバーの内側にとらなくてはならない。すると、この積分は無窮積分にならざるをえない。これは、実用上は計算時間とメモリーを消費するため現実的ではない。

Napoly は、これを積分路を図 2.3 の \bar{C} の様に変形することで、インピーダンスの源が両端が同じチェンバーで挟まれているかぎり、この無窮積分を有限化にできることを示した [26]。長年、チェンバーの両端が異なる場合について積分路をどのように有限化するかが課題になっていたが、最近この場合も図 2.4 のような積分路 \bar{C} を考えれば有限にできることが証明された [27]。この積分方法は、数値計算コード ABCI で実用化されている。

Z の種類	厚み、周波数の条件		相対論的ビーム	非相対論的ビーム	
Z_L	任意		$Z_{L,insert}$		
	$\frac{t}{t_{min}} > 2^{\frac{1}{2}}\pi^{\frac{3}{4}}$	$f < f_\delta$	$\frac{g}{2\pi a\sigma_c t}$ for $\Re[Z_L]$		
		$f_\delta < f \ll f_D$	$Z_{L,RW}$	$\frac{g}{\pi\sigma_c((a+\delta)^2 - a^2)}$ for $\Re[Z_L]$	
		$f \gg f_D$	$\frac{(1-j)2Z_0\sqrt{g}}{2\pi a I_0^2(ka)\sqrt{\beta\pi k}}$		
	$1 < \frac{t}{t_{min}} < 2^{\frac{1}{2}}\pi^{\frac{3}{4}}$	$f < f_D$	$\frac{g}{2\pi a\sigma_c t}$ for $\Re[Z_L]$		
		$f \gg f_D$	$\frac{(1-j)2Z_0\sqrt{g}}{2\pi a I_0^2(ka)\sqrt{\beta\pi k}}$		
	$\frac{t}{t_{min}} \ll 1$	$f \ll f_c$	$\frac{g}{2\pi a\sigma_c t}$ for $\Re[Z_L]$		
		$f > f_c$	$Z_{L,gap}$		
	Z_T	任意		$Z_{T,insert}$	
		$\frac{t}{t_{min}} > 2^{\frac{1}{2}}\pi^{\frac{3}{4}}$	$f \ll f_L$	$Z_{T,gap}$	
$f_L < f < f_\delta$			$\frac{\beta cg}{2\pi^2 f a^3 \sigma_c t}$ for $\Re[Z_T]$		
$f_\delta < f \ll f_D$			$Z_{T,RW}$	$\frac{\sqrt{j}k\beta Z_0 g I_1(kr_b)}{2\gamma\pi r_b a \sqrt{\sigma_c} I_1^2(ka)}$	
$f \gg f_D$			$\frac{(1-j)Z_0\sqrt{kg}}{8\sqrt{2}\beta\gamma^2 a I_1^2(ka)}$		
$1 < \frac{t}{t_{min}} < 2^{\frac{1}{2}}\pi^{\frac{3}{4}}$		$f \ll f_L$	$Z_{T,gap}$		
		$f_L < f < f_D$	$\frac{\beta cg}{2\pi^2 f a^3 \sigma_c t}$ for $\Re[Z_T]$		
		$f \gg f_D$	$\frac{(1-j)Z_0\sqrt{kg}}{8\sqrt{2}\beta\gamma^2 a I_1^2(ka)}$		
$\frac{t}{t_{min}} < 1$		$f_r < f \ll f_c$	$\frac{\beta cg}{2\pi^2 f a^3 \sigma_c t}$ for $\Re[Z_T]$		
		$(f \ll f_r) \cup (f_c < f)$	$Z_{T,gap}$		

表 2.1: インサートの厚み t と周波数条件 f を変えた時の抵抗性インサートのインピーダンス: a はチェンバーの半径, g はインサートの長さ, c は光速, $Z_0 (= 120\pi)$ は自由空間のインピーダンス, σ_c はインサートの電気伝導, $\delta (= \sqrt{c/\pi Z_0 f \sigma_c})$ はスキンドープス, $f_\delta, f_L, f_D, f_c, f_r$ は周波数に関するパラメータで各々 $f_\delta = c/\pi Z_0 \sigma_c t^2$, $f_L = 3c/4\pi Z_0 \sigma_c t a$, $f_D = \sqrt{c^2 Z_0 \sigma_c / 2\pi^2 g}$, $f_c = \sigma_c^2 Z_0^2 t^2 c / 4\pi g$, $f_r = (g c^3 / 4\pi^3 Z_0^2 \sigma_c^2 a^4 t^2)^{1/3}$ で与えられる。 t_{min} はインサートの厚みに関するパラメータで $t_{min} = (4g/\pi^2 Z_0^3 \sigma_c^3)^{1/4}$ 。

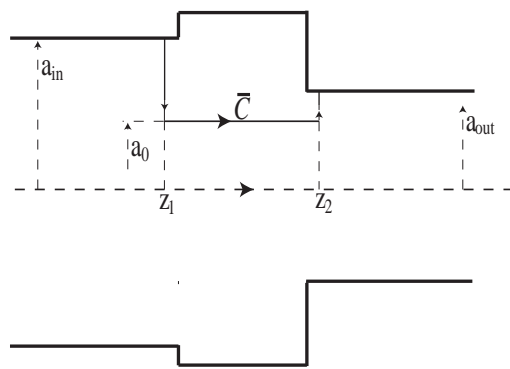


図 2.4: チェンバーの両端が異なる場合の積分路。

第II部

ビームの不安定性の理論

第 I 部では (加速空洞やチェンバーといった) 環境体がビームに与える影響がインピーダンスで記述できることをしめした。第 II 部では、ビームのインピーダンスを入力にビームの不安定性の議論を始めることにする。この講義では、陽子ビームに話を限定するので、電子ビームのような放射光の効果は考慮しない。従って、基礎になる方程式は Fokker-Planck 方程式ではなく [28]、Vlasov 方程式になる [4]。

そこで、まず、Vlasov 方程式を導出した後 (第 3 章)、この方程式を使って、コースティングビーム及びバンチされたビームのビーム振動の増加率を求めることにする (第 4 章及び第 5 章)。

第3章 Vlasov 方程式

この章ではビームの不安定性の理論を定式化する際の基本となる Vlasov 方程式 (式 (3.18)) の導出を行う。それは、厳密には、BBGKY 階層構造 (式 (3.16)-(3.17)) を近似したものであることが明らかにされる。

3.1 BBGKY 階層構造

Vlasov 方程式とは、6次元の位相空間 (μ -空間) で粒子の集団運動について記述した方程式である。これを導出する為、まず N 粒子系のハミルトニアン H_N を書く事にする。但し、独立変数は加速器にそった位置 s にとることにする。

$$H_N = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\vec{p}_i^2}{2} + U(q_i) \right) + \sum_{i < j=1}^N \Phi_{i,j}, \quad (3.1)$$

ここで、 $\Phi_{i,j}$ はクーロン相互作用、 $U(q_i)$ はポテンシャルエネルギー。

今 $6N$ 次元 (Γ -空間) での分布関数を D_N と書くことにする。これは、

$$\int d\vec{q}_i d\vec{p}_i D_N(\vec{q}_i, \vec{p}_i, s) = 1, \quad (3.2)$$

になるように規格化されているものとする。これは、独立変数 s に依らずなりたつから、連続方程式：

$$\frac{\partial D_N}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial \vec{q}_i} (\vec{q}'_i D_N) + \frac{\partial}{\partial \vec{p}_i} (\vec{p}'_i D_N) = 0, \quad (3.3)$$

が成り立つ。ここで、 $'$ は s による微分を表す。

これを書き換えると、

$$\frac{\partial D_N}{\partial s} + \left(\frac{\partial \vec{q}'_i}{\partial \vec{q}_i} + \frac{\partial \vec{p}'_i}{\partial \vec{p}_i} \right) D_N + \frac{\partial D_N}{\partial \vec{q}_i} \vec{q}'_i + \frac{\partial D_N}{\partial \vec{p}_i} \vec{p}'_i = 0, \quad (3.4)$$

が得られる。ここで、ハミルトン方程式を使うと第2項は零になり、最終的に

$$\frac{\partial D_N}{\partial s} + \{D_N, H_N\} = 0, \quad (3.5)$$

と纏まる。これが Liouville 方程式と呼ばれるものである。但し、 $\{, \}$ は Poisson 括弧で

$$\{D_N, H_N\} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial D_N}{\partial \vec{q}_i} \frac{\partial H_N}{\partial \vec{p}_i} - \frac{\partial D_N}{\partial \vec{p}_i} \frac{\partial H_N}{\partial \vec{q}_i} \right], \quad (3.6)$$

で定義される。

ここで、縮約された k 体分布関数 f_k を

$$f_k = \frac{1}{(N-k)!} \int D_N d\vec{q}_{k+1} d\vec{p}_{k+1} \dots d\vec{q}_N d\vec{p}_N, \quad (3.7)$$

で定義する。以後、Lashmor-Davies に従って [29]、この縮約された k 体分布関数 f_k に対して BBGKY(Bogoliubov, Born, Green, Kirkwood, and Yvon[30]) hierarchy という連立方程式の階層構造を導出することにする。結論から言うと、これを 1 体分布関数だけで表せるように最低次で打ち切ったものが Vlasov 方程式である。

式 (3.5) はハミルトニアンを使うと

$$\frac{\partial D_N}{\partial s} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial D_N}{\partial \vec{q}_i} \vec{p}_i - \sum_{i=1}^N \frac{\partial D_N}{\partial \vec{p}_i} \frac{\partial U(q_i)}{\partial \vec{q}_i} - \sum_{i=1}^N \frac{\partial D_N}{\partial \vec{p}_i} \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial \vec{q}_i} = 0, \quad (3.8)$$

と書ける。これを $\vec{q}_{k+1}, \vec{p}_{k+1}, \dots, \vec{q}_N, \vec{p}_N$ について積分すると、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial s} \int D_N d\vec{q}_{k+1} d\vec{p}_{k+1} \dots d\vec{q}_N d\vec{p}_N + \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \frac{\partial D_N}{\partial \vec{q}_i} d\vec{q}_{k+1} d\vec{p}_{k+1} \dots d\vec{q}_N d\vec{p}_N \\ & - \sum_{i=1}^N \int \frac{\partial U(q_i)}{\partial \vec{q}_i} \frac{\partial D_N}{\partial \vec{p}_i} d\vec{q}_{k+1} d\vec{p}_{k+1} \dots d\vec{q}_N d\vec{p}_N - \sum_{i=1}^N \int \sum_{j=1, i \neq j}^N \frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial \vec{q}_i} \frac{\partial D_N}{\partial \vec{p}_i} d\vec{q}_{k+1} d\vec{p}_{k+1} \dots d\vec{q}_N d\vec{p}_N = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

これから式 (3.9) の各項について纏めていくことにする。まず、式 (3.9) の第 2 項は、式 (3.7) を使うと

$$\begin{aligned} & \sum_i^N \int \vec{p}_i \frac{\partial D_N}{\partial \vec{q}_i} d\vec{q}_{k+1} d\vec{p}_{k+1} \dots d\vec{q}_N d\vec{p}_N = \sum_{i=1}^k \int \vec{p}_i \frac{\partial D_N}{\partial \vec{q}_i} d\vec{q}_{k+1} d\vec{p}_{k+1} \dots d\vec{q}_N d\vec{p}_N \\ & + \sum_{i=k+1}^N \int \vec{p}_i \frac{\partial D_N}{\partial \vec{q}_i} d\vec{q}_{k+1} d\vec{p}_{k+1} \dots d\vec{q}_N d\vec{p}_N = \sum_{i=1}^k \vec{p}_i \frac{\partial}{\partial \vec{q}_i} f_k (N-k)!. \end{aligned} \quad (3.10)$$

ここで、 D_N は積分の境界面で零になることを使った。

次に式 (3.9) の第 3 項をみると、

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \int \frac{\partial U(q_i)}{\partial \vec{q}_i} \frac{\partial D_N}{\partial \vec{p}_i} d\vec{q}_{k+1} d\vec{p}_{k+1} \dots d\vec{q}_N d\vec{p}_N \\ & = \sum_{i=1}^k \frac{\partial U(q_i)}{\partial \vec{q}_i} \int \frac{\partial D_N}{\partial \vec{p}_i} d\vec{q}_{k+1} d\vec{p}_{k+1} \dots d\vec{q}_N d\vec{p}_N + \sum_{i=k+1}^N \int \frac{\partial U(q_i)}{\partial \vec{q}_i} \frac{\partial D_N}{\partial \vec{p}_i} d\vec{q}_{k+1} d\vec{p}_{k+1} \dots d\vec{q}_N d\vec{p}_N \\ & = \sum_{i=1}^k \frac{\partial U(q_i)}{\partial \vec{q}_i} \frac{\partial f_k}{\partial \vec{p}_i} (N-k)!. \end{aligned} \quad (3.11)$$

ここでも、 D_N は積分の境界面で零になることを使った。

最後に式 (3.9) の第 4 項は、

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \int \sum_{j=1, i \neq j}^N \frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial \vec{q}_i} \frac{\partial D_N}{\partial \vec{p}_i} d\vec{q}_{k+1} d\vec{p}_{k+1} \dots d\vec{q}_N d\vec{p}_N \\
= & \sum_{i=1}^k \sum_{j=1, j \neq i}^k \frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial \vec{q}_i} \frac{\partial f_k}{\partial \vec{p}_i} (N-k)! + \sum_{i=1}^k \int \sum_{j=k+1}^N \frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial \vec{q}_i} \frac{\partial D_N}{\partial \vec{p}_i} d\vec{q}_{k+1} d\vec{p}_{k+1} \dots d\vec{q}_N d\vec{p}_N \\
& + \sum_{j=1}^k \sum_{i=k+1}^N \int \frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial \vec{q}_i} \frac{\partial D_N}{\partial \vec{p}_i} d\vec{q}_{k+1} d\vec{p}_{k+1} \dots d\vec{q}_N d\vec{p}_N \\
& + \sum_{j=k+1, j \neq i}^N \sum_{i=k+1}^N \int \frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial \vec{q}_i} \frac{\partial D_N}{\partial \vec{p}_i} d\vec{q}_{k+1} d\vec{p}_{k+1} \dots d\vec{q}_N d\vec{p}_N \\
= & \sum_{i=1}^k \sum_{j=1, j \neq i}^k \frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial \vec{q}_i} \frac{\partial f_k}{\partial \vec{p}_i} (N-k)! + \sum_{i=1}^k \int \sum_{j=k+1}^N \frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial \vec{q}_i} \frac{\partial D_N}{\partial \vec{p}_i} d\vec{q}_{k+1} d\vec{p}_{k+1} \dots d\vec{q}_N d\vec{p}_N. \tag{3.12}
\end{aligned}$$

となる。ここでも、 D_N は積分の境界面で零になることを使った。但し、式 (3.12) の第 2 項はさらに、

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^k \int \sum_{j=k+1}^N \frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial \vec{q}_i} \frac{\partial D_N}{\partial \vec{p}_i} d\vec{q}_{k+1} d\vec{p}_{k+1} \dots d\vec{q}_N d\vec{p}_N \\
= & \sum_{i=1}^k \left[\int \frac{\partial \Phi_{i,k+1}}{\partial \vec{q}_i} \frac{\partial}{\partial \vec{p}_i} D_N d\vec{q}_{k+2} d\vec{p}_{k+2} \dots d\vec{q}_N d\vec{p}_N \right] d\vec{q}_{k+1} d\vec{p}_{k+1} \dots \\
& + \sum_{i=1}^k \left[\int \frac{\partial \Phi_{i,N}}{\partial \vec{q}_i} \frac{\partial}{\partial \vec{p}_i} D_N d\vec{q}_{k+1} d\vec{p}_{k+1} \dots d\vec{q}_{N-1} d\vec{p}_{N-1} \right] d\vec{q}_N d\vec{p}_N, \tag{3.13}
\end{aligned}$$

と書き換えられる。ここで、 D_N が変数の入れ替えに対して対称であることを使うと、式 (3.9) の第 4 項は、さらに

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \int \sum_{j=1, i \neq j}^N \frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial \vec{q}_i} \frac{\partial D_N}{\partial \vec{p}_i} d\vec{q}_{k+1} d\vec{p}_{k+1} \dots d\vec{q}_N d\vec{p}_N \\
= & \sum_{i=1}^k \sum_{j=1, j \neq i}^k \frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial \vec{q}_i} \frac{\partial f_k}{\partial \vec{p}_i} (N-k)! + \sum_{i=1}^k \int d\vec{q}_{k+1} d\vec{p}_{k+1} \frac{\partial \Phi_{i,k+1}}{\partial \vec{q}_i} \frac{\partial f_{k+1}}{\partial \vec{p}_i} (N-k)!, \tag{3.14}
\end{aligned}$$

となる。

最終的に式 (3.9) は

$$\frac{\partial f_k}{\partial s} + \sum_{i=1}^k \int \vec{p}_i \frac{\partial}{\partial \vec{q}_i} f_k - \sum_{i=1}^k \frac{\partial U(q_i)}{\partial \vec{q}_i} \frac{\partial f_k}{\partial \vec{p}_i} - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1, j \neq i}^k \frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial \vec{q}_i} \frac{\partial f_k}{\partial \vec{p}_i} = \sum_{i=1}^k \int d\vec{q}_{k+1} d\vec{p}_{k+1} \frac{\partial \Phi_{i,k+1}}{\partial \vec{q}_i} \frac{\partial f_{k+1}}{\partial \vec{p}_i}, \tag{3.15}$$

と纏まる。

式 (3.15) を詳しくみると、

$$\frac{\partial f_1}{\partial s} + \vec{p}_1 \frac{\partial}{\partial \vec{q}_1} f_1 - \frac{\partial U(q_1)}{\partial \vec{q}_1} \frac{\partial f_1}{\partial \vec{p}_1} = \int d\vec{q}_2 d\vec{p}_2 \frac{\partial \Phi_{1,2}}{\partial \vec{q}_1} \frac{\partial f_2}{\partial \vec{p}_1}, \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial s} + \int \vec{p}_1 \frac{\partial}{\partial \vec{q}_1} f_2 + \int \vec{p}_2 \frac{\partial}{\partial \vec{q}_2} f_2 - \frac{\partial U(q_1)}{\partial \vec{q}_1} \frac{\partial f_2}{\partial \vec{p}_1} - \frac{\partial U(q_2)}{\partial \vec{q}_2} \frac{\partial f_2}{\partial \vec{p}_2} \\ - \frac{\partial \Phi_{1,2}}{\partial \vec{q}_1} \frac{\partial f_2}{\partial \vec{p}_1} - \frac{\partial \Phi_{2,1}}{\partial \vec{q}_2} \frac{\partial f_2}{\partial \vec{p}_2} = \int d\vec{q}_3 d\vec{p}_3 \left(\frac{\partial \Phi_{1,3}}{\partial \vec{q}_1} \frac{\partial f_3}{\partial \vec{p}_1} + \frac{\partial \Phi_{2,3}}{\partial \vec{q}_2} \frac{\partial f_3}{\partial \vec{p}_2} \right), \end{aligned} \quad (3.17)$$

...

のように 縮約された k 体分布関数 f_k に対して BBGKY hierarchy と呼ばれる階層構造をもっており、厳密には、無限の方程式を解かなくてはならない。

N 粒子の集団を 6 次元 (\vec{q}, \vec{p}) の位相空間 (μ -空間) の 1 体分布関数 $f(= f_1)$ だけで表せるように、最低次で打ち切ると、

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial s} + \{f, H\} = 0, \quad (3.18)$$

となり、これが Vlasov 方程式と呼ばれるものである。但し、ハミルトニアン H は一体のハミルトニアン H_1 で与えられる。

第4章 コースティングビームの不安定性

この章では、Vlasov 方程式 (式 (3.18)) を元にコースティングビーム (バンチしていないビーム) の安定性の理論を展開する。それは、ビーム不安定性の波長がバンチ長に比べて短かったり、振動の増大時間がシンクロトロン振動数に比べて速い場合は、単バンチビームは、コースティングビームでよく近似できるためである。これによって単バンチビームが安定である十分条件が Keil-Schnell criterion (式 (4.28) 及び (4.82)) によって与えられることが判る [2, 3]。

4.1 縦方向のビーム不安定性

コースティングビームなので、独立変数として時間 t を取る事にする。ビームの縦方向を記述する正準変数として、

$$\theta = \frac{s}{R}, W = 2\pi \int_{E_0}^E \frac{dE}{\omega}, \quad (4.1)$$

を選ぶ。但し、 R はリングの平均半径、 s はリングの位置を特定する変数、 ω はビームを構成する粒子の回転周波数、 $E - E_0 = \epsilon$ はビームのエネルギー幅。

ビームの分布関数を g とすると、Vlasov 方程式は、

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial g}{\partial W} \dot{W} = 0, \quad (4.2)$$

で与えられる。今、変数を W からエネルギー幅 ϵ に変える事を考える。この時エネルギー幅 ϵ は小さいとして、周回周波数は一定の ω_0 で近似できるとすると、式 (4.2) は

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial \theta} \omega + \frac{\partial g}{\partial \epsilon} \dot{\epsilon} = 0, \quad (4.3)$$

となる。

今、粒子の分布関数は、非摂動項と摂動項を使って

$$g = g_0(\epsilon) + \sum_{n \neq 0} g_{1,n} e^{j(\Omega_n t - n\theta)}, \quad (4.4)$$

とかけるとする。ここで、 $g_0(\epsilon)$ は非摂動項なので、エネルギー幅 ϵ のみに依存し、 θ, t には依らない。

ここで運動方程式を使うと、縦方向のエネルギー変化は、(単純なエネルギーロスの部分は無視することにする
と、) ウェイクを入力に

$$\dot{\epsilon} = -\frac{e^2\omega_0}{2\pi} \int_{-\infty}^t dt' c\beta W_0'(t-t') \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \sum_{n \neq 0} g_{1,n} e^{j(\Omega_n t' - n\theta)}, \quad (4.5)$$

と書ける。ここで、 $W_0'(t)$ が $t < 0$ で零であることを使って、積分の上限を t から ∞ に変えると、縦方向インピーダンス Z_L を使って

$$\dot{\epsilon} = -\frac{e^2\omega_0^2 R}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \sum_{n \neq 0} Z_L(\Omega_n) g_{1,n} e^{j(\Omega_n t - n\theta)}, \quad (4.6)$$

と書き換えられる。ここで、摂動項の位相速度 $R\Omega_n/n$ は粒子の速度 v で近似できるとすると、

$$\dot{\epsilon} = -\frac{e\omega_0}{2\pi} \sum_{n \neq 0} Z_L(n\omega_0) I_n e^{j(\Omega t - n\theta)}, \quad (4.7)$$

となる。但し、 I_n は平均電流で

$$I_n = eR\omega_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon g_{1,n}, \quad (4.8)$$

で与えられる。

式 (4.3) に式 (4.4) と式 (4.7) を代入して線形近似すると、各モード n につき、

$$g_{1,n} = -j \frac{e\omega_0 Z_L(n\omega_0) I_n \frac{\partial g_0}{\partial \epsilon}}{2\pi(\Omega - n\omega)}, \quad (4.9)$$

が得られる。

ここで、ビームのエネルギーは $E = E_0 + \epsilon$ と展開できたので、回転周波数についても、

$$\omega(E) = \omega_0 + k_0 \epsilon, \quad (4.10)$$

$$k_0 = \left. \frac{d\omega}{dE} \right|_{E=E_0} = -\frac{\omega_0 \eta}{\beta^2 E_0}, \quad (4.11)$$

と展開できる。但し、

$$p = mc\beta\gamma, E_0 = mc^2\gamma, \frac{\delta C}{C} = \alpha_p \frac{\delta p}{p}, \quad (4.12)$$

を使った。但し、 α_p は momentum compaction factor(付録 D 参照。)。

式 (4.11) を式 (4.9) に代入し、 ϵ で積分し、式 (4.8) を使うと、

$$1 = -j \frac{e^2\omega_0^2 Z_L(n\omega_0)}{2\pi} R \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \frac{\frac{\partial g_0}{\partial \epsilon}}{(\Omega - n(\omega_0 + k_0 \epsilon))}, \quad (4.13)$$

これが分散関係式と呼ばれるものである。

簡単の為、例えば非摂動部の分布関数： $g_0(\epsilon)$ として、

$$g_0(\epsilon) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{N_b}{2\pi R(2\Delta)} (\Theta(\epsilon + \Delta) - \Theta(\epsilon - \Delta)), \quad (4.14)$$

(4.14) のような、エネルギー幅を持たないビームを考えることにする。但し、 N_b はビームの粒子数である。すると、ビームの縦方向の分布に関する growth rate τ^{-1} は

$$\tau^{-1} = -\Im[\Omega] = \mp \frac{ne\omega_0 \sqrt{N_b}}{2\pi\sqrt{2}} \Im[(1+j) \sqrt{\frac{k_0 Z_L(n\omega_0)}{n}}], \quad (4.15)$$

と求められる。

インピーダンスに実部があると、 k_0 の符号によらず必ずビームは不安定になる。(これはチェンバーの抵抗が源なので resistive wall instability と呼ぶこともある。)

次に Z_L として純虚数の場合を考えてみる。

$$Z_L = j\omega Z_{im}. \quad (4.16)$$

この時、ビームが安定になるか不安定になるかは、 k_0 の符号 (つまりスリッページ因子 η の符号) 及び、インピーダンスの形による。第 II 部で記した様に、 $Z_{im} > 0$ をインダクティブ、 $Z_{im} < 0$ の場合をキャパシティブなインピーダンスと呼ぶ事にすると、 $\eta < 0$ の時は、キャパシティブなインピーダンスが安定になり、 $\eta > 0$ の時はインダクティブなインピーダンスが安定になることが判る。それ以外の時、ビームは不安定になるが、このようなビーム不安定性のことを negative mass instability と読んでいる [31]。(便宜上インピーダンスの形は ωZ_{im} としたが、インピーダンスの符号のみが問題になり、周波数依存性はここまでの議論では問題にならない。)

陳栄浩氏の講義録 [7] にこの不安定性に関する直観的な説明がなされているので、引用することにする。この不安定の特徴は、インピーダンスの虚部が引き起こしている点である。そこで、式 (1.22) を使ってウェイクの言葉に直すと、

$$W = Z_{im} \delta'(t), \quad (4.17)$$

となる。(ただし、 Z_{im} は一定とし、符号は正の場合のみ考えることにする。)

実際はこれの符号を変えたものがビームにかかる電圧になるので、 δ' 関数を少しなまして考えることにすると、 t が小さい (前方の粒子が) 減速の方向に、(後方の粒子が) 加速の方向に力を受けることになる。(つまり、ビームをつぶす方向に行く。) 今、slippage factor が負の状態を考えると、付録 D で説明したように、加速された粒子はより前方に、減速された粒子はより後方に行く。(今の場合、ビームをつぶす方向に行く。slippage factor が負の加速器) で、インダクティブなウェイクがビームを不安定にするのはこのためである。

一般的には、インピーダンスには、実部も虚部も存在する。その意味でエネルギー幅（運動量幅）のないビームは、常に不安定性である（運動量幅が狭くなることで引き起こされる不安定性を microwave instability と呼ぶ。）。一方で、ビームにエネルギー幅がある時は、ビームは安定になることがある。これが Landau damping [32] と呼ばれるもので、式 (4.13) の積分路を定義することで説明される。次にこれを見ていくことにする。

4.2 縦方向インピーダンスに対する Keil -Schnell criterion

今、運動量の半値全幅 (FWHM) として Δp を導入すると、回転周期の半値全幅 $2S$ は

$$2S = -\eta\omega_0\left(\frac{\Delta p}{p}\right), \quad (4.18)$$

で与えられる。そこで、エネルギー幅 ϵ を規格化して、

$$x = \frac{k_0\epsilon}{S}, \quad (4.19)$$

という x に変数変換することになると、式 (4.13) は

$$1 = -\text{sgn}(\eta)(U + jV) \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\frac{\partial \tilde{g}_0}{\partial x}}{(x - x_1)}, \quad (4.20)$$

となる。但し、

$$U + jV = j \frac{2I_c Z_L(n\omega_0)}{\pi n |\eta| \left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2 \frac{E_0}{e}}, \quad (4.21)$$

$$I_c = \frac{N_b e \omega_0}{2\pi}, \quad (4.22)$$

$$x_1 = \frac{\Omega - n\omega_0}{nS}, \quad (4.23)$$

$$\tilde{g}_0(x) = 2\pi R \frac{S}{N_b k_0} g_0(\epsilon), \quad (4.24)$$

で、 $\tilde{g}_0(x)$ は

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \tilde{g}_0(x) = 1, \quad (4.25)$$

と規格化してある。

今、ビームの摂動項は時間とともに増大していくという描像をかんがえたとなると、最初零だった摂動項は $e^{\delta t}$ (但し、 $\delta > 0$) という形を持つはずである。従って、初期値問題を考えると Ω は $\Omega - j0$ で置き換えられるべきである。これは、 Ω が実軸上にある時は、積分路はその上側を通らなくてはならないと定義するもので (今、虚数単位として j を使っている。)、 Ω が複素数の場合には、解析接続の考え方から、積分路は複素平面上で常に、極の上側を通ると一般化される (図 4.1 参照。)。

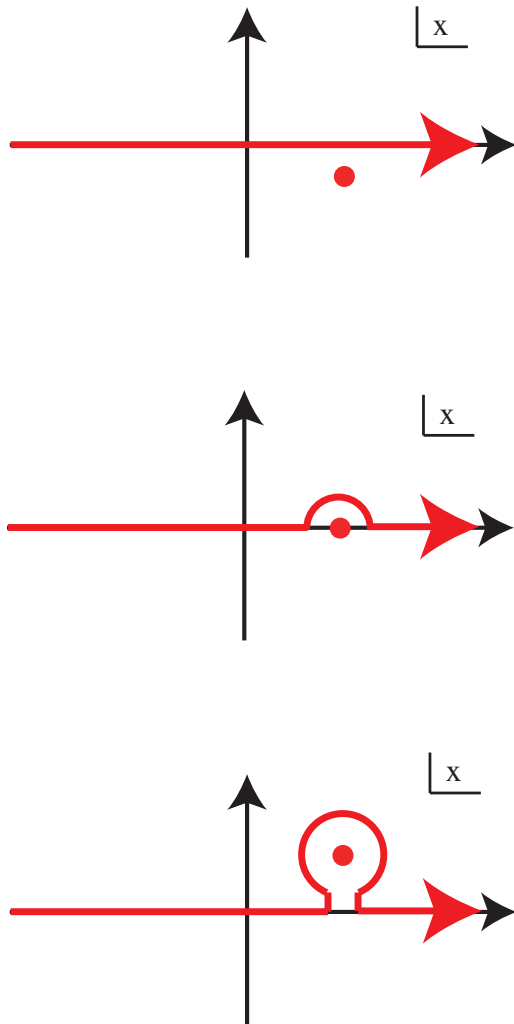


図 4.1: ランダウ積分路 (j を虚数単位にを使った Formalism で slippage factor $\eta < 0$ の時)

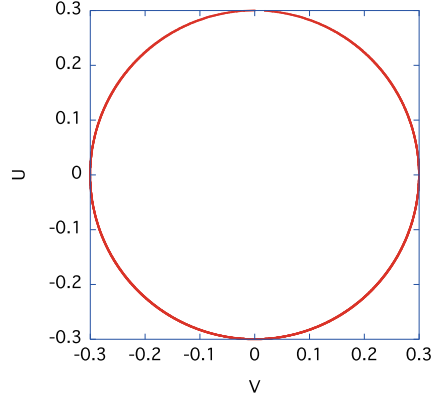


図 4.2: 縦方向のビーム不安定性に関する stability diagram.

あとは、これを計算して、 $\Im[x_1] > 0$ の場合がビームが安定になると考えてよいが、例えば、ビームのエネルギーが $k_0 > 0$ (つまり、 $\eta < 0$) を満たし、 $\tilde{g}_0(x)$ が

$$\tilde{g}_0 = \frac{8\sigma}{3\pi}(1 - \sigma^2 x^2)^{\frac{3}{2}}, \quad (4.26)$$

で与えられる場合を考えてみる。但し、 $|x| < 1/\sigma, \sigma^2 = 5/6$ 。

特に、 $\Im[x_1] = 0$ の場合に、 $\Re[x_1]$ を $-1/\sigma$ から $1/\sigma$ まで振って、計算結果を U, V 平面で示した結果が、図 4.2 である。具体的に計算してみると、 $\Im[x_1] > 0$ の領域は、図 4.2 の線で囲まれる内側にくることが判る。従って、ビームが安定である条件は、

$$|U + jV| = \left| \frac{2I_c Z_L(n\omega_0)}{\pi n |\eta| \left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2 \frac{E_0}{e}} \right| \leq 0.3, \quad (4.27)$$

となる。これを単バンチビームの criterion に一般化すると、

$$\left| \frac{Z_L(n\omega_0)}{n} \right| \leq F \cdot \frac{|\eta| \beta^2 E_0 / e}{I_p} \left(\frac{\Delta p}{p} \right)_{FWHM}^2, \quad (4.28)$$

と書き換えられる。但し、 $I_p (= I_c / B_f)$ はピーク電流、 $FWHM$ は Full width half maximum (半値全幅) の意味である。ここで、 F はフォーム因子と呼ばれるもので、ビームの定常分布をどのように仮定するかによる。このような、ビームの stability diagram は様々な分布で調べられており、 F は一般的に 1 くらいと考えてよいこ

とが判っている [33]。インピーダンスに対する条件式 (4.28) が、縦方向のインピーダンスに対する Keil-Schnell criterion と呼ばれるものである。

4.3 横方向ビーム不安定性

後で判るように、横方向のビームの不安定性を議論するには、シンクロトロン運動といった縦方向の運動の効果も重要である。従って、Vlasov 方程式を考える際にも縦方向を含めた最低 4 次元の位相空間の議論が不可欠である。今、ビームの縦方向横方向 4 次元の位相空間の分布関数を $\Psi(t, \theta, W, x, P_x)$ と書く事にする。すると、Vlasov 方程式は

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \dot{\theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \dot{W} \frac{\partial \Psi}{\partial W} + \dot{x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \dot{P}_x \frac{\partial \Psi}{\partial P_x} = 0, \quad (4.29)$$

となる。但し、ここでも独立変数は t にとることとした。

ここで、

$$\begin{aligned} x &= r_x \cos \varphi, \\ P_x &= -m\gamma\nu_\beta\omega r_x \sin \varphi, \\ \theta &= \frac{s}{R} = \omega t, \\ \varphi &= \nu_\beta\omega t, \end{aligned} \quad (4.30)$$

で表せる極座標を導入する。ここで、 ν_β は摂動項まで含めたチューンである。

ウェイクの効果を考える為に、半径 σ の円筒ビームが x 方向に Δ だけ変異した場合の摂動について考えると、その体積密度 $\rho(t)$ は

$$\rho(t) = \frac{N_b}{\pi\sigma^2} \frac{e\Delta}{2\pi R} \cos \varphi \delta(r - \sigma) e^{j\Omega t - jn\theta}. \quad (4.31)$$

横方向のウェイクは、過去の時間の dipole を拾うので、横方向のウェイクとインピーダンスの関係式 (式 (1.26)) を使うと

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{e}{2\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' c\beta W_1(t - \tau') \int_0^{\infty} r dr \oint d\theta \rho(\tau') r \cos \varphi, \\ &= -ec\beta j Z_T(\Omega) N_b \frac{e\Delta}{4\pi^2 R^2} e^{j\Omega t - jn\theta}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

のように書ける。

縦方向には一様なビームを考えるので、縦横の運動方程式は

$$\begin{aligned}\dot{P}_x &= \dot{P}_{x0} - ec\beta j Z_T(\Omega) \frac{e\Delta}{4\pi^2 R^2} e^{j\Omega t - jn\theta}, \\ \dot{W} &= 0\end{aligned}\tag{4.33}$$

と書ける。

4次元の位相分布関数 Ψ は、

$$\psi = \psi_0(W, r_x) + \psi_1(W, r_x, \phi) e^{j(\Omega t - n\theta)},\tag{4.34}$$

のように非摂動部と摂動部に分けられるとすると、式 (4.29) に代入して、極座標を使うことで、線形近似ができて、

$$j(\Omega - n\omega)\psi_1(W, r_x, \phi) + \nu_\beta\omega \frac{\partial\psi_1}{\partial\phi} + \frac{ec\beta j Z_T(\Omega) N_b e\Delta}{4\pi^2 R^2 m\gamma\nu_\beta\omega} \frac{\partial\psi_0}{\partial r_x} \sin\phi = 0,\tag{4.35}$$

と書ける。 ψ_1 の ϕ 依存性は $e^{j\phi}$ と $e^{-j\phi}$ の重ね合わせで書けるので、式 (4.35) は

$$\psi_1 = \frac{ec\beta Z_T(\Omega) N_b e\Delta}{j4\pi^2 R^2 m\gamma\nu_\beta\omega [(\Omega - n\omega)^2 - \nu_\beta^2\omega^2]} \frac{\partial\psi_0}{\partial r_x} (\nu_\beta\omega \cos\phi - j(\Omega - n\omega) \sin\phi),\tag{4.36}$$

と解ける。

ψ_1 を使って双極子モーメントをもとめると、

$$\int r_x^2 \cos\phi \psi_1 dr_x d\phi dW e^{j\Omega t - jn\theta} = \frac{ec\beta Z_T(\Omega) N_b e\Delta}{j4\pi R^2 m\gamma} \int \frac{\partial\psi_0}{\partial r_x} \frac{r_x^2 dr_x dW}{[(\Omega - n\omega)^2 - \nu_\beta^2\omega^2]} e^{j\Omega t - jn\theta},\tag{4.37}$$

と書ける。一方、式 (4.31) を使うと、

$$\int \rho(t) r^2 \cos\phi dr d\phi = N_b \frac{e\Delta}{2\pi R} e^{j\Omega t - jn\theta},\tag{4.38}$$

と書けるので、式 (4.37) と式 (4.38) を等値すると、

$$1 = \frac{e^2 N_b c \beta Z_T(\Omega)}{j8\pi^2 R^2 m\gamma} \int \frac{r_x^2 h'(r_x) f(W) dr_x dW}{[(\Omega - n\omega)^2 - \nu_\beta^2\omega^2]},\tag{4.39}$$

が得られる。これが、横方向の場合の分散関係式である。但し、 ψ_0 は

$$\psi_0 = \frac{e N_b h(r_x) f(W)}{4\pi^2 R},\tag{4.40}$$

で与えられ、 $f(W)$ 、 $h(r_x)$ は各々

$$\int_{-\infty}^{\infty} dW f(W) = 1,\tag{4.41}$$

$$\int_0^{\infty} dr_x r_x h(r_x) = 1,\tag{4.42}$$

のように規格化されている。

ここで、セクション 4.1 での縦方向のビーム安定性の議論にならって、まず、

$$h(r_x) = \frac{2(1 - \Theta(r_x - \sigma))}{\sigma^2}, \quad (4.43)$$

$$f(W) = \delta(W), \quad (4.44)$$

のようにエネルギー幅がないビームを考えると、式 (4.39) は

$$\Omega = (n \pm \nu_\beta)\omega_0 \pm j \frac{e^2 N_b c \beta Z_T ((n \pm \nu_\beta)\omega_0)}{8\pi^2 R^2 m \gamma \nu_\beta \omega_0}, \quad (4.45)$$

と解ける。式 (4.45) から、 $\Re[Z_T]$ がビームの growth に寄与し、 $\Omega = (n - \nu_\beta)\omega_0$ が growth するモードであることが判る。

ここで、縦の時と異なるのは、横方向の不安定性を引き起こしているのが、(結合モード不安定性を無視する限り、) インピーダンスの実部のみであるということである。

4.4 横方向インピーダンスに対する Keil -Schnell criterion

縦方向のインピーダンスの時のように Landau damping についての議論を行うことにする。そこで、Hubner ら [34] に従って、式 (4.39) を書き換えることにする。まず、変数を W から運動量 p に変更し、

$$\tilde{f}(\Delta p) = \frac{2\pi c f(\frac{2\pi c \Delta p}{\omega \beta})}{\omega \beta}, \quad (4.46)$$

という関数を定義する。さらに、

$$\begin{aligned} \frac{1}{[(\Omega - n\omega)^2 - \nu_{\beta 0}^2 \omega^2]} &= \frac{1}{2\nu_\beta \omega} \left[\frac{1}{\Omega - (n + \nu_\beta)\omega} - \frac{1}{\Omega - (n - \nu_\beta)\omega} \right] \\ &\simeq \frac{1}{2\nu_\beta \omega_0} \left[\frac{1}{\Omega - (n + \nu_\beta)\omega} - \frac{1}{\Omega - (n - \nu_\beta)\omega} \right], \end{aligned} \quad (4.47)$$

という近似式を使うと、式 (4.39) は

$$1 = (U + jV)(J_+ - J_-), \quad (4.48)$$

と書き換えられる。但し、

$$J_\pm = \int \frac{r_x^2 h'(r_x) \tilde{f}(p) dr_x dp}{2(\Omega - (n \pm \nu_\beta)\omega)}, \quad (4.49)$$

$$U + jV = \frac{e^2 N_b c \beta Z_T(\Omega)}{j\nu_\beta \omega_0 8\pi^2 R^2 m \gamma}. \quad (4.50)$$

ここから、積分について調査する都合上 J_{\pm} を2段階に渡って変形する。まず、ベータトロンチューン ν_{β} と回転周波数 ω からビーム振幅 r_x^2 依存性、及び、運動量依存性を取り出すために、

$$\nu_{\beta} = \nu_{\beta 0} + r_x^2 \frac{\partial \nu_{\beta}}{\partial r_x^2} + (p - p_0) \frac{\partial \nu_{\beta}}{\partial p}, \quad (4.51)$$

$$\omega = \omega_0 + r_x^2 \frac{\partial \omega}{\partial r_x^2} + (p - p_0) \frac{\partial \omega}{\partial p}, \quad (4.52)$$

と摂動展開することにする。すると、式 (4.49) は

$$J_{\pm} \simeq \frac{1}{\Psi_p^{\pm}} \int \frac{r_x^2 h'(r_x) \tilde{f}(p) dr_x dp}{(\Omega - (n \pm \nu_{\beta 0})\omega_0) / \Psi_p^{\pm} - r_x^2 \Psi_a^{\pm} / \Psi_p^{\pm} - (p - p_0)}, \quad (4.53)$$

と書き換えられる。但し、

$$\Psi_a^{\pm} = (n \pm \nu_{\beta 0}) \frac{\partial \omega}{\partial r_x^2} \pm \omega_0 \frac{\partial \nu_{\beta}}{\partial r_x^2}, \quad (4.54)$$

$$\Psi_p^{\pm} = (n \pm \nu_{\beta 0}) \frac{\partial \omega}{\partial p} \pm \omega_0 \frac{\partial \nu_{\beta}}{\partial p}. \quad (4.55)$$

さらに、振幅幅と運動量幅に関して、

$$h(\delta_a) = \frac{h(0)}{2}, \quad (4.56)$$

$$\tilde{f}(\pm \delta_p + p_0) = \frac{\tilde{f}(p_0)}{2}, \quad (4.57)$$

を満たすような δ_a, δ_p を導入する。さらに、積分変数を r_x, p から

$$y = \frac{r_x^2}{\delta_a^2}, \quad (4.58)$$

$$x = \frac{(p - p_0)}{\delta_p}, \quad (4.59)$$

を満たす y, x に変数変換すると、式 (4.53) は

$$J_{\pm} = \frac{1}{\Psi_p^{\pm} \delta_p} \int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{H'(y) y \tilde{F}(x)}{\frac{(\Omega - (n \pm \nu_{\beta 0})\omega_0)}{\delta_p \Psi_p^{\pm}} - \frac{\Psi_a^{\pm} \delta_a^2}{\Psi_p^{\pm} \delta_p} y - x}, \quad (4.60)$$

に変形できる。但し、 $H(y), \tilde{F}(x)$ は

$$H(y) \equiv \frac{h(r_x(y)) \delta_a^2}{2}, \quad (4.61)$$

$$\tilde{F}(x) \equiv \tilde{f}(p(x)) \delta_p, \quad (4.62)$$

で定義され、これは、

$$H(1) = \frac{H(0)}{2}, \quad (4.63)$$

$$\tilde{F}(\pm 1) = \frac{\tilde{F}(0)}{2}, \quad (4.64)$$

$$\int_0^\infty H(y)dy = 1, \quad (4.65)$$

$$\int_{-\infty}^\infty \tilde{F}(x)dx = 1, \quad (4.66)$$

を満たす。式 (4.60) を使って式 (4.48) を書き換えると、チューンスブレッドや周波数幅に与える効果が、ビームの運動量幅が支配的かビーム内の粒子の振動の振幅の粒子間の違いからくる効果が支配的かによって、

$$1 = (U + jV) \left(\frac{I_+}{\Psi_p^+ \delta_p} - \frac{I_-}{\Psi_p^- \delta_p} \right), \quad (4.67)$$

(但し、

$$I_\pm = \int_0^\infty dy \int_{-\infty}^\infty dx \frac{H'(y)y\tilde{F}(x)}{x_1^\pm - \eta^\pm y - x}, \quad (4.68)$$

$$x_1^\pm = \frac{(\Omega - (n \pm \nu_{\beta 0})\omega_0)}{\delta_p \Psi_p^\pm}, \quad (4.69)$$

$$\eta^\pm = \frac{\Psi_a^\pm \delta_a^2}{\Psi_p^\pm \delta_p^2}. \quad (4.70)$$

)

もしくは、

$$1 = (U + jV) \left(\frac{I_+}{\Psi_a^+ \delta_a^2} - \frac{I_-}{\Psi_a^- \delta_a^2} \right), \quad (4.71)$$

(但し、

$$I_\pm = \int_0^\infty dy \int_{-\infty}^\infty dx \frac{H'(y)y\tilde{F}(x)}{x_1'^\pm - y - x/\eta^\pm}, \quad (4.72)$$

$$x_1'^\pm = \frac{(\Omega - (n \pm \nu_{\beta 0})\omega_0)}{\delta_a^2 \Psi_a^\pm}, \quad (4.73)$$

) になる。

今、ビームの運動量幅の効果が支配的なビームを考えることにする。 $(n - \nu_{\beta 0})\omega_0$ が growth するモードと判っているので、 I_- の項が支配的と考え、

$$1 = -(U' + jV') \text{sgn}(\Psi_p^-) I_-, \quad (4.74)$$

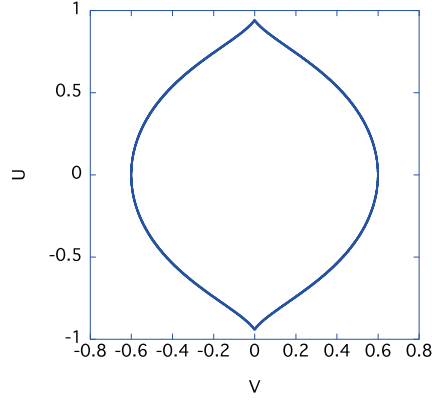


図 4.3: 横方向のビーム不安定性に関する stability diagram

のダイアグラムを考えれば十分である。但し、

$$U' = \frac{U}{|\Psi_p^-| \delta_p}, \quad (4.75)$$

$$V' = \frac{V}{|\Psi_p^-| \delta_p}. \quad (4.76)$$

ベータトロン振幅による広がり为零の場合を考えると、

$$I_- = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\tilde{F}(x)}{x - x_1}. \quad (4.77)$$

$\tilde{F}(x)$ として、

$$\tilde{F}(x) = \frac{3}{4\sqrt{2}} \left(1 - \frac{x^2}{2}\right), \quad (4.78)$$

で与えられるビームの場合を考えると、stability diagram は図 4.3 のようになり、

$$|U' + jV'| = \left| \frac{eI_c Z_T(\Omega) 2\pi}{(-(n - \nu_{\beta 0}) \frac{\omega_0 \eta}{\beta^2 p_0} - \omega_0 \nu_{\beta 0} \frac{\xi}{p_0}) \delta_p \nu_{\beta 0} \omega_0^3 2Rm\gamma} \right| < 0.6, \quad (4.79)$$

がビームが安定である条件だと判る。ここで、 ξ は

$$\xi = \frac{1}{\nu_{\beta}} \frac{d\nu_{\beta}}{d\delta}, \quad (4.80)$$

で定義されるクロマティシティと呼ばれる量で4極電磁石の収束力がエネルギーによって異なることから生ずるベータトロン振動数の幅の事である。(補足：クロマティシティの定義には、 $\xi = d\nu_\beta/d\delta$ の様に ν_β を押し込める場合もあるので注意が必要である。)

式 (4.79) を書き換えると、

$$|Z_T((n - \nu_{\beta 0})\omega_0)| < 1.2\pi \frac{mc^2\gamma}{e} |(n - \nu_{\beta 0})\eta + \nu_{\beta 0}\xi\beta^2| \frac{\nu_{\beta 0}}{I_c R} \frac{2\delta_p}{p_0}, \quad (4.81)$$

がインピーダンスに対する条件式となる。

一般に横方向インピーダンスに対する Keil-Schnell criterion は、相対論的なビームに対して、フォーム因子 F を使って

$$|Z_{x,y}((n - \nu_{\beta 0x,y})\omega_0)| < 4 \frac{E_0}{e} \frac{\nu_{\beta 0x,y}}{I_p R} \left(\frac{\Delta p}{p}\right)_{FWHM} \cdot F S_{x,y}, \quad (4.82)$$

で与えられることが知られている [22]。但し、K. Y. Ng[35] にならって、 $S_{x,y} = |(n - \nu_{\beta 0x,y})\eta + \nu_{\beta 0x,y}\xi_{x,y}|$ と置いた。この時 (dp/p) 依存性を見ると、横方向に対しては1乗で効いており、式 (4.28) とは異なることを指摘しておくことにする。

第5章 マルチバンチビームの不安定性

この章では、リングの中でマルチバンチしたビームの振動の増加率の定式化を行う。セクション 5.1 では鈴木敏郎氏、陳栄浩氏、佐藤康太郎氏の論文 [36] に従って、縦方向の公式 (式 (5.52)) を導き、セクション 5.2 では鈴木敏郎氏、陳栄浩氏の講義録 [6, 7] に従って、横方向の Sacherer の公式 (式 (5.131))[22, 37] を導くことにする。

5.1 縦方向のビーム不安定性

Vlasov 方程式を用いてバンチ列の増加率を求める式を求めることにする。 M 個のパケツの内の n 番目のバンチの位相空間での分布を $\Psi_n(s, \tau, \delta)$ と書く事にする。Vlasov 方程式は

$$\frac{\partial \Psi_n}{\partial s} + \tau' \frac{\partial \Psi_n}{\partial \tau} + \delta' \frac{\partial \Psi_n}{\partial \delta} = 0, \quad (5.1)$$

となる。但し、独立変数はリング上の位置 s にとり、 τ は、 s での微分を表す。単粒子の運動方程式は

$$\tau' = -\frac{\eta}{\beta c} \delta, \quad (5.2)$$

$$\delta' = \frac{\beta c \nu_{s0}^2}{\eta R^2} \tau - \frac{eV(s, \tau)}{2\pi R \beta^2 E_0}, \quad (5.3)$$

と書ける。ここで、 V は縦方向のウェイクによる電圧。

ここで、縦と横の座標 (τ, δ, y, p_y) を

$$\tau = r_s \cos \phi_s, \quad (5.4)$$

$$\delta = \frac{\beta c \nu_{s0}}{\eta R} r_s \sin \phi_s, \quad (5.5)$$

を使って、極座標 (r_s, ϕ_s) に変換する。式 (5.1) で与えられる Vlasove 方程式は

$$\frac{\partial \Psi_n}{\partial s} + \frac{\nu_{s0}}{R} \frac{\partial \Psi_n}{\partial \phi_s} - \frac{eV(s, \tau)}{2\pi R \beta^2 E_0} \frac{\partial \Psi_n}{\partial \delta} = 0, \quad (5.6)$$

に変更される。ビームの平衡分布は、 r_s のみに依存する。

次に小さい摂動を考える。分布関数 Ψ_n は、

$$\Psi_n = g_0(r_s) + g_1(r_s, \phi_s) e^{j\nu(\frac{s}{R} - \frac{2\pi n}{M}) - j\frac{2\pi \mu n}{M}}, \quad (5.7)$$

と書ける。ここで μ は結合バンチモードで、0 から $M - 1$ まで動く。

式 (5.7) を式 (5.6) に代入して、摂動に対して線形化すると、

$$(j\nu g_1 + \nu_{s0} \frac{\partial g_1}{\partial \phi_s}) e^{j\nu(\frac{s}{R} - \frac{2\pi n}{M})} e^{-j\frac{2\pi\mu n}{M}} - \frac{e\eta R V(s, \tau)}{2\pi\beta^3 c E_0 \nu_{s0}} \sin \phi_s \frac{dg_0}{dr_s} = 0, \quad (5.8)$$

が得られる。

一方、 V を定式化しておく必要がある。位置 s で観測される n 番目のバンチによって引き起こされるビーム電流は、

$$e e^{j\nu(\frac{s}{R} - \frac{2\pi n}{M})} e^{-j\frac{2\pi\mu n}{M}} \int_{-\infty}^{\infty} d\delta g_1(r_s, \phi_s) = e e^{j\nu(\frac{s}{R} - \frac{2\pi n}{M})} e^{-j\frac{2\pi\mu n}{M}} \rho(\tau), \quad (5.9)$$

と書ける。

縦方向の電圧 V は、現在よりも前に周回したビームが引きおこしたすべてのウェイクを足し上げたものなので、

$$V = e \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \rho(\tau') \sum_{n'=0}^{M-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\nu(\frac{s}{R} - \frac{2\pi n'}{M} - 2\pi k) - j\frac{\nu\beta_0 \xi \omega_0 \tau'}{\eta}} e^{-j\frac{\mu 2\pi n'}{M}} \times W_0'((\tau' - \tau)\beta c + kC_0 + \frac{(n' - n)C_0}{M}), \quad (5.10)$$

と書く事ができる。

式 (1.22) を式 (5.10) に代入して、Poisson の和公式 [5] :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jkx} = 2\pi \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi p), \quad (5.11)$$

を使うと、

$$V = \frac{e}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \rho(\tau') \sum_{n'=0}^{M-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega Z_L(\omega) e^{j\nu(\frac{s}{R} - \frac{2\pi n'}{M} - 2\pi k) + j\omega(\tau' - \tau + kT_0 + \frac{(n' - n)T_0}{M})} e^{-j\frac{\mu 2\pi n'}{M}} \\ = \frac{e e^{j\nu(\frac{s}{R} - j\frac{2\pi\nu n}{M})}}{T_0} \sum_{n'=0}^{M-1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} Z_L(\omega_0(\nu + p)) e^{-j\omega_0(\nu + p)\tau} e^{j\frac{2\pi p(n' - n)}{M}} e^{-j\frac{2\pi\mu n'}{M}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \rho(\tau') e^{j(\nu\omega_0 + p\omega_0)\tau'}, \quad (5.12)$$

が得られる。

$\rho(\tau)$ のフーリエ変換: $\tilde{\rho}(\omega)$ を

$$\tilde{\rho}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{2\pi} \rho(\tau) e^{j\omega\tau}, \quad (5.13)$$

で定義することになると、式 (5.12) は

$$V = \frac{2\pi e e^{j\nu(\frac{s}{R} - j\frac{2\pi\nu n}{M})}}{T_0} \sum_{n'=0}^{M-1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} Z_L(\omega_0(\nu + p)) e^{-j\omega_0(\nu + p)\tau} e^{j\frac{2\pi p(n' - n)}{M}} e^{-j\frac{2\pi\mu n'}{M}} \tilde{\rho}(\nu\omega_0 + p\omega_0), \quad (5.14)$$

と書き換えられる。

式 (5.14) を式 (5.8) に代入すると、

$$j\nu g_1 + \nu_{s0} \frac{\partial g_1}{\partial \phi_s} - \frac{e^2 \eta}{2\pi \beta^2 E_0 \nu_{s0}} \sin \phi_s \frac{dg_0}{dr_s} e^{j \frac{2\pi \mu n}{M}} \\ \times \sum_{n'=0}^{M-1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} Z_L(\omega_0(\nu+p)) e^{-j\omega_0(\nu+p)r_s \cos \phi_s} e^{j \frac{2\pi p(n'-n)}{M}} e^{-j \frac{2\pi \mu n'}{M}} \tilde{\rho}(\nu\omega_0 + p\omega_0) = 0, \quad (5.15)$$

が得られる。但し、式 (5.4) を使った。

ここで、

$$\lambda = \frac{\nu}{\nu_{s0}}, \quad (5.16)$$

とおき、両辺に $e^{j\lambda\phi_s}$ を掛けて、 ϕ_s についてループ積分を行う。 $g_1(r_s, \phi_s)$ は ϕ_s に対して周期的なので、

$$g_1(r_s, \phi_s) = \frac{e^2 \eta}{\beta^2 E_0 \nu_{s0}^2} \frac{dg_0(r_s)}{dr_s} e^{j \frac{2\pi \mu n}{M}} \sum_{n'=0}^{M-1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} Z_L(\omega_0(\nu+p)) e^{j \frac{2\pi p(n'-n)}{M}} e^{-j \frac{2\pi \mu n'}{M}} \tilde{\rho}(\nu\omega_0 + p\omega_0) \\ \times \frac{e^{-j\lambda\phi_s}}{e^{j2\pi\lambda} - 1} \int_{\phi_s}^{\phi_s+2\pi} \frac{d\phi'_s}{2\pi} e^{j\lambda\phi'_s} \sin \phi'_s e^{-j\omega_0(\nu+p)r_s \cos \phi'_s}, \quad (5.17)$$

が得られる。

$$e^{-jx \cos \phi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} j^{-m} J_m(x) e^{jm\phi}, \quad (5.18)$$

$$J_{m-1}(z) + J_{m+1}(z) = \frac{2m}{z} J_m(z), \quad (5.19)$$

を使うと、積分が実行できて、

$$g_1(r_s, \phi_s) = -\frac{j e^2 \eta}{2\pi \beta^2 E_0 \nu_{s0}^2} \frac{1}{r_s} \frac{dg_0}{dr_s} e^{j \frac{2\pi \mu n}{M}} \sum_{n'=0}^{M-1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{Z_L(\omega_0(\nu+p))}{\omega_0(\nu+p)} e^{j \frac{2\pi p(n'-n)}{M}} e^{-j \frac{2\pi \mu n'}{M}} \tilde{\rho}(\nu\omega_0 + p\omega_0) \\ \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{m}{m-\lambda} (-j)^m J_m(\omega_0(\nu+p)r_s) e^{-jm\phi_s}, \quad (5.20)$$

となる。

$g_1(r_s, \phi_s)$ は ϕ_s に関して周期的なので、

$$g_1(r_s, \phi_s) = \sum_{-\infty}^{\infty} R_m(r_s) e^{-jm\phi_s}, \quad (5.21)$$

と展開できる。ここで、 m をシンクロトロンモードと呼ぶ。式 (5.13) を使うと、 $\tilde{\rho}((p+\nu)\omega_0)$ は

$$\tilde{\rho}((p+\nu)\omega_0) = \int \frac{d\tau}{2\pi} e^{j(p+\nu)\omega_0\tau} \int_{-\infty}^{\infty} d\delta g_1(r_s, \phi_s), \quad (5.22)$$

と計算でき、式 (5.4), (5.5) と (5.21) を使うと、

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}((p+\nu)\omega_0) &= \frac{\beta c \nu s_0}{\eta R} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int \frac{d\phi_s dr_s r_s}{2\pi} e^{-jm\phi_s + j(p+\nu)\omega_0 r_s \cos \phi_s} R_m(r_s) \\ &= \frac{\beta c \nu s_0}{\eta R} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-j)^{-n} \int_0^{\infty} dr'_s r'_s J_n((p+\nu)\omega_0 r'_s) R_n(r'_s),\end{aligned}\quad (5.23)$$

となる。式 (5.21) と (5.23) を式 (5.20) に代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{(m-\lambda)}{m} R_m(r_s) &= -\frac{j e^2 c}{2\pi \beta E_0 \nu s_0 R} \frac{dg_0}{r_s dr_s} M \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{Z_L(\omega_0(\nu+\mu+Mp))}{\omega_0(\nu+\mu+Mp)} \\ &\times J_m(\omega_0(\nu+\mu+Mp)r_s) (-j)^m \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-j)^{-n} \int_0^{\infty} dr'_s r'_s J_n(\omega_0(\nu+\mu+Mp)r'_s) R_n(r'_s).\end{aligned}\quad (5.24)$$

が得られる。これを (縦方向の) Sacherer の積分方程式と呼ぶ。

式 (5.24) は、

$$\frac{m+\lambda}{m} R_{-m}(r) = \frac{m-\lambda}{m} R_m(r), \quad (5.25)$$

の関係を満たすので、 R_m に関数形は m の正負に関して、ファクター分のぞいて同じと考えてよい。そこで、 $R_m(r)$ を

$$R_m(r_s) = W(r_s) \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(m)} f_k^{(|m|)}(r_s), \quad (5.26)$$

のように展開する。但し、 $f_k^{(|m|)}(r)$ は直交関数系で、重み関数 $W(r)$ を使って、

$$\int_0^{\infty} W(r) f_k^{(|m|)}(r) f_l^{(|m|)}(r) r dr = \delta_{k,l}, \quad (5.27)$$

を満たす。ここで、さらに重み関数 $W(r)$ が

$$W(r_s) = C \frac{1}{r_s} \frac{dg_0(r_s)}{dr_s}, \quad (5.28)$$

で与えられるものとする。但し、 C は規格化定数である。

式 (5.24) に式 (5.26) を代入して直交関係を使うと、

$$\frac{m-\lambda}{m} a_h^{(m)} = -\frac{j e^2 c M}{2\pi \beta E_0 \nu s_0 R C} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} M_{nl}^{mh} a_l^{(n)}, \quad (5.29)$$

但し、

$$M_{nl}^{mh} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{Z_L(\omega_0(\nu+Mp+\mu))}{\omega_0(\nu+Mp+\mu)} (-j)^{m-n} I_{mh}(\omega_0(\nu+Mp+\mu)) I_{nl}(\omega_0(\nu+Mp+\mu)), \quad (5.30)$$

$$I_{nl}(\omega_0(\nu+p)) = \int_0^{\infty} dr_s r_s W(r_s) f_l^{(|n|)}(r_s) J_n(\omega_0(\nu+p)r_s). \quad (5.31)$$

ここで、 $g_0(r)$ として、

$$g_0(r_s) = \frac{N_b \eta R}{2\pi \beta c \nu_{s0} \sigma_\tau^2} e^{-\frac{r_s^2}{2\sigma_\tau^2}}, \quad (5.32)$$

の Gaussian beam を考える。すると、重み関数 $W(r)$ は

$$W(r_s) = C' e^{-\frac{r_s^2}{2\sigma_\tau^2}}, \quad (5.33)$$

但し、

$$C' = -C \frac{N_b \eta R}{2\pi \beta c \nu_{s0} \sigma_\tau^4}. \quad (5.34)$$

この重み関数を使うと、式 (5.27) の直交関係は

$$C' \sigma_\tau^2 \int_0^\infty e^{-x} f_k^{(|m|)}(x) f_l^{(|m|)}(x) dx = \delta_{k,l}, \quad (5.35)$$

と書き換えられる。但し、

$$x = \frac{r^2}{2\sigma_\tau^2}. \quad (5.36)$$

式 (5.24) から、 $R_m(r)$ は r の小さいところで r^m に比例することが判るので、 $f_k^{(|m|)}(x)$ として

$$f_k^{(|m|)}(x) = x^{\frac{|m|}{2}} g_k^{(|m|)}(x), \quad (5.37)$$

とおくことにする。すると、式 (5.34) は

$$C' \sigma_\tau^2 \int_0^\infty e^{-x} x^{|m|} g_k^{(|m|)}(x) g_l^{(|m|)}(x) dx = \delta_{k,l}, \quad (5.38)$$

と書き換えられる。これは、一般化された Laguerre 多項式 $\{L_k^{(|m|)}\}$ と同じ直交関係：

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{|m|} L_k^{(|m|)}(x) L_l^{(|m|)}(x) dx = \frac{(|m|+l)!}{l!} \delta_{k,l}, \quad (5.39)$$

を満たすので、

$$g_k^{(|m|)}(x) = \sqrt{\frac{l!}{(|m|+l)! C' \sigma_\tau^2}} L_k^{(|m|)}(x), \quad (5.40)$$

が得られる。ここで、 $C \sigma_\tau = 1$ を満たすように C を決めると、

$$C = -\frac{2\pi \beta c \nu_{s0} \sigma_\tau^2}{N_b \eta R}, \quad (5.41)$$

となり、

$$f_k^{(|m|)}(r) = \left(\frac{r}{\sqrt{2}\sigma_\tau}\right)^{|m|} \sqrt{\frac{l!}{(|m|+l)!}} L_k^{(|m|)}\left(\frac{r^2}{2\sigma_\tau^2}\right), \quad (5.42)$$

が得られる。

ここで、式 (5.30) の行列の成分を計算することにする。まず、 n が正の場合について考える。この時、 I_{nl} は

$$\begin{aligned} I_{nl}(\omega_0(\nu + p)) &= \int_0^\infty dr_s r_s \frac{e^{-\frac{r_s^2}{2\sigma_\tau^2}}}{\sigma_\tau^2} \left(\frac{r_s}{\sqrt{2}\sigma_\tau}\right)^n \sqrt{\frac{l!}{(n+l)!}} L_l^{(n)}\left(\frac{r_s^2}{2\sigma_\tau^2}\right) J_n(\omega_0(\nu + p)r_s) \\ &= \sqrt{\frac{l!}{(n+l)!}} \int_0^\infty dx e^{-x} x^{\frac{n}{2}} L_l^{(n)}(x) J_n(\sqrt{2}\sigma_\tau\omega_0(\nu + p)\sqrt{x}), \end{aligned} \quad (5.43)$$

と書ける。一般化された Laguerre 関数の Rodrigues の表示：

$$L_l^{(n)}(x) = \frac{e^x x^{-n}}{l!} \frac{d^l}{dx^l} e^{-x} x^{n+l}, \quad (5.44)$$

と Bessel 関数の表示：

$$J_n(\zeta\sqrt{x}) = \frac{\zeta^n x^{\frac{n}{2}}}{2^n} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h \zeta^{2h} x^h}{4^h h!(n+h)!}, \quad (5.45)$$

を式 (5.43) に代入すると、

$$I_{nl}(\omega_0(\nu + p)) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h \zeta^{2h+n}}{2^{2h+n} l! h!(n+h)!} \sqrt{\frac{l!}{(n+l)!}} \int_0^\infty dx x^h \frac{d^l}{dx^l} e^{-x} x^{n+l}, \quad (5.46)$$

但し、 $\zeta = \sqrt{2}\sigma_\tau\omega_0(\nu + p)$ 。

$$\int_0^\infty dx x^h \frac{d^l}{dx^l} e^{-x} x^{n+l}, \quad (5.47)$$

が $h < l$ の時零であることに注意して、部分積分すると、

$$I_{nl}(\omega_0(\nu + p)) = \frac{1}{\sqrt{(n+l)!l!}} \left(\frac{\sigma_\tau\omega_0(\nu + p)}{\sqrt{2}}\right)^{n+2l} e^{-\frac{\sigma_\tau^2\omega_0^2(\nu+p)^2}{2}}, \quad (5.48)$$

が得られる。

式 (5.43) から $n < 0$ に対しては、

$$I_{-nl}(\omega_0(\nu + p)) = (-1)^n I_{nl}(\omega_0(\nu + p)), \quad (5.49)$$

の関係式から求まる。

これで行列の成分が求まったので、モードが結合していない場合について式 (5.29) を使って考える。 $n = m, l = h$

の場合を考えて、式 (5.16) と (5.41) を使うと

$$\nu = m\nu_{s0} - \frac{jme^2 MN_b \eta}{4\pi^2 \beta^2 E_0 \nu_{s0} \sigma_\tau^2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{Z_L(\omega_0(\nu + Mp + \mu))}{\omega_0(\nu + Mp + \mu)} I_{mh}^2(\omega_0(\nu + Mp + \mu)), \quad (5.50)$$

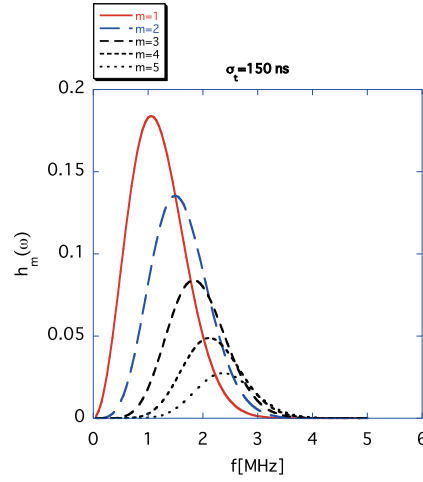


図 5.1: 各々の m に対する $h_m(\omega)$

これに、式 (5.48) を代入すると

$$\nu_{m,h=0} = m\nu_{s0} - \frac{je^2MN_b\eta}{4\pi^2\beta^2E_0\nu_{s0}\sigma_\tau^2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{Z_L(\omega_0(\nu + Mp + \mu))}{\omega_0(\nu + Mp + \mu)} \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{\sigma_\tau^2\omega_0^2(\nu + Mp + \mu)^2}{2} \right)^m e^{-\sigma_\tau^2\omega_0^2(\nu + Mp + \mu)^2}, \quad (5.51)$$

となり、モード結合を無視した場合の growth rate τ_m^{-1} は

$$\tau_m^{-1} = \frac{eI_c\eta}{2\pi\beta^2E_0\nu_{s0}\sigma_\tau^2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{\Re[Z_L(\omega')]}{\omega'} h_m(\omega'), \quad (5.52)$$

となる。但し、

$$h_m(\omega') = \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{\sigma_\tau^2\omega'^2}{2} \right)^m e^{-\sigma_\tau^2\omega'^2}, \quad (5.53)$$

$$\omega' = \omega_0(m\nu_{s0} + Mp + \mu), \quad (5.54)$$

m は自然数。 $\mu = 0 \dots M - 1$ 。

ここで、関数 $h_m(\omega)$ の形を自然数 m に対して図のしたものが、図 5.1 である。高次のモードほど高い周波数

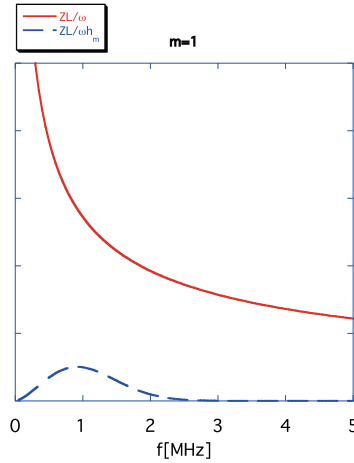


図 5.2: 関数 Z_L/ω (実線) と $Z_L h_m(\omega)/\omega$ (点線)。

でピークを持ち、高次のモードほど $(m - 1)!$ で小さくなる。そこで、式 (5.52) を書き換えると、

$$\begin{aligned} \tau_m^{-1} = & \frac{eI_c \eta}{2\pi\beta^2 E_0 \nu_{s0} \sigma_\tau^2} \left[\frac{\Re[Z_L(\omega_0(m\nu_{s0} + \mu))]}{\omega_0(m\nu_{s0} + \mu)} h_m(\omega_0(m\nu_{s0} + \mu)) \right. \\ & \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\Re[Z_L(\omega_0(Mp + m\nu_{s0} + \mu))]}{\omega_0(Mp + m\nu_{s0} + \mu)} h_m(\omega_0(Mp + m\nu_{s0} + \mu)) \\ & \left. - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\Re[Z_L(\omega_0(Mp - m\nu_{s0} - \mu))]}{\omega_0(Mp - m\nu_{s0} - \mu)} h_m(\omega_0(Mp - m\nu_{s0} - \mu)) \right], \end{aligned} \quad (5.55)$$

となる。但し、インピーダンスの性質 $\Re[Z_L(-\omega)] = \Re[Z_L(\omega)]$ (第 I 部参照) を使った。

今、 $\eta < 0$ の場合を考えたとすると、 $\Re[Z_L(\omega)]$ は常に正なので、第 1、2 項はビームを減衰させる方向に働き、第 3 項はビームを励起させる方向に働く。最終的にビームが励起されるか、減衰されるかは、インピーダンスの形によるが、例えば、抵抗性インピーダンスについて $m = 1$ の場合の例をしると、図 5.2 になる。実線が Z_L/ω 、点線が $Z_L h_{m=1}(\omega)/\omega$ を記したものである。 Z_L は $\sqrt{\omega}$ に比例するので、 Z_L/ω は $\omega^{-1/2}$ に比例して減衰する。 $Z_L h_m(\omega)/\omega$ はピークをもつが、 m が大きくなるほどピークは下がっていく。この $Z_L h_m(\omega)/\omega$ でどの部分に周回周波数 f_0 の Mp (整数) 倍が来るかが重要である。図 5.3 に一つの例を示した。この場合、ビームは励起させられることが判る。

電子ビームの場合は質量が軽いためにその速度はほぼ光速と考えてよいが、陽子の加速器の場合、加速中にその速度が刻々変わっていく。それは、周回周波数が変わっていくことを意味するので、各時間ごとに growth rate がどのようになるか注意しなくては行けない。式 (5.55) をみると判るように、ビームが十分光速であれば、(η の符号が変わる場合もあるが、) エネルギー分の 1 で下がっていく傾向がある。ただ、実際にビームが growth しにくくなるかということについては、もうすこし考察が必要で、それは、このマルチバンチの growth rate の評価

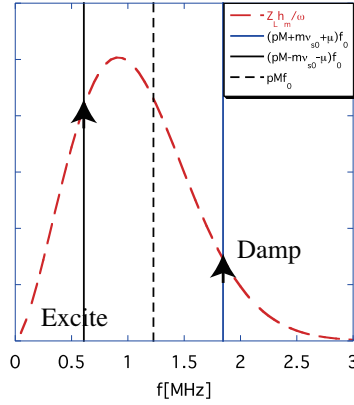


図 5.3: 関数 $Z_L h_m(\omega)/\omega$ (点線) と $f_0 p M$ 及び $f_0(p M \pm m \nu_{s0} \pm \mu)$ との関係の一例。

式にはシンクロトロン周波数のスプレッド $\Delta\omega_s$ の効果が入っていないからである。付録 D.1 を見ると判るようにシンクロトロン振動は非線形振動を行う。そのためバンチ内の粒子ごとにシンクロトロン振動は異なるが、コーティングビームの考察から判るように、これはビームを減衰させる効果がある。シンクロトロン振動は $\sqrt{-\eta}$ に比例するので、加速による slippage factor の変化にも注意が必要である。A.Hofmann[38](実は Sacherer[39])によると、

$$\tau^{-1} \leq \frac{\Delta\omega_s}{4} = \frac{\pi\Delta f_s}{2}, \quad (5.56)$$

がビームが安定である条件になる。これを A.Hofmann の stability condition と呼ぶ。

5.2 横方向のビーム不安定性

縦の場合と同様に Vlasov 方程式を用いてバンチ列の増加率を求める式を求めることにする。 M 個のパケツの内の n 番目のバンチの位相空間での分布を $\Psi_n(s, y, p_y, \tau, \delta)$ と書く事にする。Vlasov 方程式は

$$\frac{\partial \Psi_n}{\partial s} + y' \frac{\partial \Psi_n}{\partial y} + p_y' \frac{\partial \Psi_n}{\partial p_y} + \tau' \frac{\partial \Psi_n}{\partial \tau} + \delta' \frac{\partial \Psi_n}{\partial \delta} = 0, \quad (5.57)$$

となる。但し、独立変数はリング上の位置 s にとり、 τ は、 s での微分を表す。単粒子の運動方程式は

$$y = p_y, \quad (5.58)$$

$$p'_y = -\left(\frac{\nu_{\beta 0}(1 + \xi\delta)}{R}\right)^2 y + \frac{F_y}{2\pi R E_0}, \quad (5.59)$$

$$\tau' = -\frac{\eta}{\beta c} \delta, \quad (5.60)$$

$$\delta' = \frac{\beta c \nu_{s0}^2}{\eta R^2} \tau, \quad (5.61)$$

と書ける。ここで、 ξ はクロマティシティ、 F_y は横方向のウェイクの力、 $\nu_{\beta 0}$ と ν_{s0} は各々非摂動のベータトロンとシンクロトロンチューンを表す。

ここで、縦と横の座標 (τ, δ, y, p_y) を

$$y = r_y \cos \phi_y, \quad (5.62)$$

$$p_y = -\frac{\nu_{\beta 0}(1 + \xi\delta)}{R} r_y \sin \phi_y, \quad (5.63)$$

$$\tau = r_s \cos \phi_s, \quad (5.64)$$

$$\delta = \frac{\beta c \nu_{s0}}{\eta R} r_s \sin \phi_s, \quad (5.65)$$

を使って、極座標 $(r_s, \phi_s, r_y, \phi_y)$ に変換する。式 (5.57) で与えられる Vlasove 方程式は

$$\frac{\partial \Psi_n}{\partial s} + \frac{\nu_{\beta 0}(1 + \xi\delta)}{R} \frac{\partial \Psi_n}{\partial \phi_y} + \frac{F_y}{2\pi R E_0} \frac{\partial \Psi_n}{\partial p_y} + \frac{\nu_{s0}}{R} \frac{\partial \Psi_n}{\partial \phi_s} = 0, \quad (5.66)$$

に変更される。

次に小さい摂動を考えるが、その準備として、ベータトロン振動数の積分 (ヘッドテイル位相因子 $\phi_\beta(s)$) を考えておく事にする。ベータトロン振動数の中には、クロマティシティからくる広がりがあるので、 $\phi_\beta(s)$ は

$$\phi_\beta(s) = \int \frac{ds}{\beta c} \omega_0 \nu_{\beta 0} (1 + \xi\delta), \quad (5.67)$$

と書ける。式 (5.60) を使うと、

$$\phi_\beta(s) = \int ds \omega_0 \nu_{\beta 0} \left(\frac{1}{\beta c} - \frac{\xi}{\eta} \frac{d\tau}{ds} \right) = \omega_0 \nu_{\beta 0} \left(\frac{s}{\beta c} - \frac{\xi}{\eta} \tau \right), \quad (5.68)$$

が得られる。これがヘッドテイル位相因子と呼ばれるものである。

これと、横方向のマルチバンチ因子 (付録 E 参照) を考慮すると、分布関数 Ψ_n は、

$$\Psi_n = f_0(r_y) g_0(r_s) + f_1(r_y, \phi_y) g_1(r_s, \phi_s) e^{j\nu \left(\frac{s}{R} - \frac{2\pi n}{M} \right) - j \frac{\nu_{\beta 0} \xi \omega_0 \tau}{\eta} - j \frac{2\pi \mu n}{M}}, \quad (5.69)$$

と書ける。但し、ビームの平衡分布 $f_0(r_y) g_0(r_s)$ は、 r_y と r_s のみに依存する。

式 (5.69) を式 (5.66) に代入して、摂動に対して線形化すると、

$$\left(j\nu f_1 g_1 + \nu\beta_0 \frac{\partial f_1}{\partial \phi_y} g_1 + \nu s_0 f_1 \frac{\partial g_1}{\partial \phi_s} \right) e^{j\nu\left(\frac{s}{R} - \frac{2\pi n}{M}\right) - j\frac{\nu\beta_0\xi\omega_0\tau}{\eta}} e^{-j\frac{2\pi\mu n}{M}} - \frac{F_y R}{2\pi E_0 \nu\beta_0} \sin \phi_y \frac{df_0}{dr_y} g_0 = 0, \quad (5.70)$$

が得られる。

一方、 F_y を定式化しておく必要がある。位置 s で観測される n 番目のバンチによって引き起こされる双極電流は、

$$eD e^{j\nu\left(\frac{s}{R} - \frac{2\pi n}{M}\right) - j\frac{\nu\beta_0\xi\omega_0\tau}{\eta}} e^{-j\frac{2\pi\mu n}{M}} \int_{-\infty}^{\infty} d\delta g_1(r_s, \phi_s) = eD e^{j\nu\left(\frac{s}{R} - \frac{2\pi n}{M}\right) - j\frac{\nu\beta_0\xi\omega_0\tau}{\eta}} e^{-j\frac{2\pi\mu n}{M}} \rho(\tau). \quad (5.71)$$

ここで、 D は双極子モーメントで、

$$D \equiv \frac{\int \int y f_1 dy dp_y}{\int \int f_0 dy dp_y}, \quad (5.72)$$

で定義される。

横方向の力 F_y は、現在よりも前に周回したビームが引きおこしたすべてのウェイクを足し上げたものなので、

$$F_y = e^2 D \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \rho(\tau') \sum_{n'=0}^{M-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\nu\left(\frac{s}{R} - \frac{2\pi n'}{M} - 2\pi k\right) - j\frac{\nu\beta_0\xi\omega_0\tau'}{\eta}} e^{-j\frac{2\pi\mu n'}{M}} \times W_1 \left((\tau' - \tau)\beta c + kC_0 + \frac{(n' - n)C_0}{M} \right), \quad (5.73)$$

と書く事ができる。式 (1.27) を式 (5.73) 代入して、Poisson の和公式 (5.11) を使うと、

$$\begin{aligned} F_y &= \frac{-je^2 D}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \rho(\tau') \sum_{n'=0}^{M-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega Z_T(\omega) e^{j\nu\left(\frac{s}{R} - \frac{2\pi n'}{M} - 2\pi k\right) - j\frac{\nu\beta_0\xi\omega_0\tau'}{\eta} + j\omega\left(\tau' - \tau + kT_0 + \frac{(n' - n)T_0}{M}\right)} e^{-j\frac{2\pi\mu n'}{M}} \\ &= \frac{-je^2 D e^{j\nu\frac{s}{R} - j\frac{2\pi\mu n}{M}}}{T_0} \sum_{n'=0}^{M-1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} Z_T(\omega_0(\nu + p)) e^{-j\omega_0(\nu + p)\tau} e^{j\frac{2\pi p(n' - n)}{M}} e^{-j\frac{2\pi\mu n'}{M}} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \rho(\tau') e^{j(\nu\omega_0 + p\omega_0 - \frac{\nu\beta_0\xi\omega_0}{\eta})\tau'}, \end{aligned} \quad (5.74)$$

が得られる。 $\tilde{\rho}(\omega)$ のフーリエ変換式 (5.13) を使うと、式 (5.74) は

$$F_y = \frac{-j2\pi e^2 D e^{j\nu\frac{s}{R} - j\frac{2\pi\mu n}{M}}}{T_0} \times \sum_{n'=0}^{M-1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} Z_T(\omega_0(\nu + p)) e^{-j\omega_0(\nu + p)\tau} e^{j\frac{2\pi p(n' - n)}{M}} e^{-j\frac{2\pi\mu n'}{M}} \tilde{\rho}\left(\nu\omega_0 + p\omega_0 - \frac{\nu\beta_0\xi\omega_0}{\eta}\right), \quad (5.75)$$

と書き換えられる。

式 (5.75) を式 (5.70) に代入すると、

$$\begin{aligned}
& j\nu f_1 g_1 + \nu_{\beta 0} \frac{\partial f_1}{\partial \phi_y} g_1 + \nu_{s0} f_1 \frac{\partial g_1}{\partial \phi_s} + \frac{j e^2 D c \beta}{2\pi E_0 \nu_{\beta 0}} \sin \phi_y \frac{d f_0}{d r_y} g_0 \\
& \quad \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} Z_T(\omega_0 \nu + \omega_0 p) e^{-j(\omega_0 \nu + \omega_0 p - \frac{\nu_{\beta 0} \xi \omega_0}{\eta}) \tau} \\
& \times \sum_{n'=0}^{M-1} e^{-j \frac{2\pi \mu (n' - n)}{M}} e^{j \frac{2\pi p (n' - n)}{M}} \tilde{\rho}(\nu \omega_0 + p \omega_0 - \frac{\nu_{\beta 0} \xi \omega_0}{\eta}) = 0,
\end{aligned} \tag{5.76}$$

が得られる。式 (5.76) の厳密解は、 $e^{j\phi_y}$ の成分と $e^{-j\phi_y}$ の成分の重ね合わせで書ける。しかし、ここでは、ウェイクによる周波数のシフトはシンクロトロンチューンやベータトロンチューンに比べて小さいと考えて [5]、解の形として

$$f_1(r_y, \phi_y) = -D \frac{d f_0(r_y)}{d r_y} e^{-j\phi_y}, \tag{5.77}$$

を仮定することにする。これを式 (5.76) に代入すると、

$$\begin{aligned}
& -j\nu g_1 + j\nu_{\beta 0} g_1 - \nu_{s0} \frac{\partial g_1}{\partial \phi_s} - \frac{e^2 c \beta}{4\pi E_0 \nu_{\beta 0}} g_0 \\
& \quad \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} Z_T(\omega_0 \nu + \omega_0 p) e^{-j(\omega_0 \nu + \omega_0 p - \frac{\nu_{\beta 0} \xi \omega_0}{\eta}) \tau} \\
& \times \sum_{n'=0}^{M-1} e^{-j \frac{2\pi \mu (n' - n)}{M}} e^{j \frac{2\pi p (n' - n)}{M}} \tilde{\rho}(\nu \omega_0 + p \omega_0 - \frac{\nu_{\beta 0} \xi \omega_0}{\eta}) = 0,
\end{aligned} \tag{5.78}$$

が得られる。

次に g_1 を

$$g_1(r_s, \phi_s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m(r_s) e^{-jm\phi_s}, \tag{5.79}$$

と展開することにする。ここで、 m がヘッドテイルモードである。

式 (5.79) を式 (5.78) に代入して、 $e^{jm\phi_s}$ を掛け、 ϕ_m について 0 から 2π まで積分すると、

$$\begin{aligned}
& (\nu - \nu_{\beta 0} - m\nu_{s0}) g_m(r_s) = j \frac{e^2 c \beta (-j)^m}{4\pi E_0 \nu_{\beta 0}} g_0 \\
& \quad \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} Z_T(\omega_0 \nu + \omega_0 p) J_m((\omega_0 \nu + \omega_0 p - \frac{\nu_{\beta 0} \xi \omega_0}{\eta}) r_s) \\
& \times \sum_{n'=0}^{M-1} e^{-j \frac{2\pi \mu (n' - n)}{M}} e^{j \frac{2\pi p (n' - n)}{M}} \tilde{\rho}(\nu \omega_0 + p \omega_0 - \frac{\nu_{\beta 0} \xi \omega_0}{\eta}),
\end{aligned} \tag{5.80}$$

となる。ここで、

$$\int_0^{2\pi} e^{-jq r_s \cos \phi_s + jm\phi_s} d\phi_s = 2\pi (-j)^m J_m(q r_s), \tag{5.81}$$

を使った。

ビームの摂動項から発生する縦方向線密度 $\rho(\tau)$ は、

$$\rho(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(r_s, \phi_s) d\delta, \quad (5.82)$$

で定義される。式 (5.82) と (5.79) を (5.13) に代入して、式 (5.81) を使うと

$$\tilde{\rho}(\nu\omega_0 + p\omega_0 - \frac{\nu_{\beta 0}\xi\omega_0}{\eta}) = \frac{\nu_{s0}\omega_0}{\eta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-j)^{-n} \int_0^{\infty} dr_s g_n(r_s) J_n((\nu\omega_0 + p\omega_0 - \frac{\nu_{\beta 0}\xi\omega_0}{\eta})r_s) r_s, \quad (5.83)$$

が得られる。

さらに、式 (5.83) を式 (5.80) に代入すると、

$$\begin{aligned} & -j(\nu - \nu_{\beta 0} - m\nu_{s0})g_m(r_s) \\ &= \frac{e^2 c \beta \nu_{s0} \omega_0 M}{4\pi E_0 \nu_{\beta 0} \eta} g_0 \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dr'_s r'_s g_l(r'_s) (-j)^{m-l} J_m(\omega_0(\nu + \mu + Mp - \frac{\nu_{\beta 0}\xi}{\eta})r_s) \\ & \quad \times Z_T(\omega_0(\nu + \mu + Mp)) J_l(\omega_0(\nu + \mu + Mp - \frac{\nu_{\beta 0}\xi}{\eta})r'_s), \end{aligned} \quad (5.84)$$

が得られる。これを (横方向の) Sacherer の積分方程式と呼ぶ。最終的に ν には、パンチの依存性がなくなっていることが判る。

5.2.1 Air bag モデル

実際に式 (5.84) の解を求めるためには、 $g_0(r_s)$ の形を仮定する必要がある。無矛盾に求めることができる一つの例として

$$g_0(r_s) = \frac{N_b \eta R}{2\pi \beta c \nu_{s0} \hat{\tau}} \delta(r_s - \hat{\tau}), \quad (5.85)$$

が知られている。これを Air bag モデルと呼ぶ。この場合、式 (5.84) の解は

$$g_m(r_s) = a_m \delta(r_s - \hat{\tau}), \quad (5.86)$$

の形で与えられる。式 (5.86) を式 (5.84) に代入して、 ν を $\nu_{\beta 0} + m\nu_{s0}$ で置き換えると、

$$\begin{aligned} & (\nu - \nu_{\beta 0} - m\nu_{s0})a_m = \sum_{l=-\infty}^{\infty} j \frac{I_c R}{4\pi \nu_{\beta 0} E_0 / e} (-j)^{m-l} a_l \\ & \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} Z_T((\nu_{\beta 0} + m\nu_{s0} + pM + \mu)\omega_0) J_m((\nu_{\beta 0} + m\nu_{s0} + pM + \mu)\omega_0 - \frac{\nu_{\beta 0}\xi\omega_0}{\eta}) \hat{\tau} \\ & \quad \times J_l((\nu_{\beta 0} + m\nu_{s0} + pM + \mu)\omega_0 - \frac{\nu_{\beta 0}\xi\omega_0}{\eta}) \hat{\tau}, \end{aligned} \quad (5.87)$$

が得られる。固有モードは

$$\det((\nu - \nu_{\beta 0})\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0, \quad (5.88)$$

を解く事で得られる。ここで、 \mathbf{I} は単位行列、 \mathbf{A} は

$$\begin{aligned} A_{ml} &= m\nu_{s0}\delta_{ml} + j\frac{I_c R}{4\pi\nu_{\beta 0}E_0/e}(-j)^{m-l} \\ &\times \sum_{p=-\infty}^{\infty} Z_T((\nu_{\beta 0} + m\nu_{s0} + pM + \mu)\omega_0)J_m\left(\left(\nu_{\beta 0} + m\nu_{s0} + pM + \mu\right)\omega_0 - \frac{\nu_{\beta 0}\xi\omega_0}{\eta}\right)\hat{\tau}) \\ &\times J_l\left(\left(\nu_{\beta 0} + m\nu_{s0} + pM + \mu\right)\omega_0 - \frac{\nu_{\beta 0}\xi\omega_0}{\eta}\right)\hat{\tau}), \end{aligned} \quad (5.89)$$

で与えられる。

もし、互いのモード間の相互作用が無視できたとすると、式 (5.87) はより簡単化されて、

$$\begin{aligned} \nu - \nu_{\beta 0} - m\nu_{s0} &\simeq j\frac{I_c R}{4\pi\nu_{\beta 0}E_0/e}(-j)^{m-l} \\ &\times \sum_{p=-\infty}^{\infty} Z_T((\nu_{\beta 0} + m\nu_{s0} + pM + \mu)\omega_0)J_m^2\left(\left(\nu_{\beta 0} + m\nu_{s0} + pM + \mu\right)\omega_0 - \frac{\nu_{\beta 0}\xi\omega_0}{\eta}\right)\hat{\tau}), \end{aligned} \quad (5.90)$$

となる。この虚部にビームの周回周波数 ω_0 を掛けたものがビームの増加率である。

5.2.2 Sacherer の方法

Air bag モデルは、よく使われる模型であるが、Sacherer 自身はこの模型は非物理的であるとして、別の公式 (式 (5.131)) を導いた。この公式は今日でもよく用いられ [40, 41, 42, 43]、KEK-PS のビームの growth rate をよく再現することが報告されている [40]。このセクションでそれを導出する事にする。

まず、モード結合を無視して、式 (5.84) で $l = m$ の項だけ取る事にする。すると、式 (5.84) は

$$\begin{aligned} &-j(\nu - \nu_{\beta 0} - m\nu_{s0})g_m(r_s) \\ &= \frac{e^2 c \beta \nu_{s0} \omega_0 M}{4\pi E_0 \nu_{\beta 0} \eta} g_0(r_s) \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dr'_s r'_s g_m(r'_s) J_m\left(\omega_0\left(\nu_{\beta 0} + m\nu_{s0} + \mu + Mp - \frac{\nu_{\beta 0}\xi}{\eta}\right)r_s\right) \\ &\quad \times Z_T\left(\omega_0\left(\nu + \mu + Mp\right)\right) J_m\left(\omega_0\left(\nu_{\beta 0} + m\nu_{s0} + \mu + Mp - \frac{\nu_{\beta 0}\xi}{\eta}\right)r'_s\right), \end{aligned} \quad (5.91)$$

のように簡単化される。 $g_m(r)$ は、関数 $f_k^{(m)}(r)$ で

$$g_m(r) = W(r) \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(m)} f_k^{(m)}(r), \quad (5.92)$$

のように直交展開できるとする (ここで k が radial mode と呼ばれるものである。)。但し、 $W(r)$ は重み関数で、 $f_k^{(m)}(r)$ は

$$\int_0^\infty W(r) f_k^{(m)}(r) f_l^{(m)}(r) r dr = \delta_{kl}, \quad (5.93)$$

を満たす。さらに、分布関数 $g_0(r)$ と重み関数 $W(r)$ は比例して

$$W(r) = C g_0(r), \quad (5.94)$$

となると仮定する。

ここで、式 (5.92) の展開が無矛盾であることを示すために、式 (5.91) に戻って、 ν 及び、 g_m に radial mode の添字をつけることにする。すると式 (5.91) は

$$\begin{aligned} & -j(\nu_{m,l} - \nu_{\beta 0} - m\nu_{s0}) g_{m,l}(r_s) \\ &= \frac{e^2 c \beta \nu_{s0} \omega_0 M}{4\pi E_0 \nu_{\beta 0} C \eta} W(r_s) \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty dr'_s r'_s g_{m,l}(r'_s) J_m(\omega_0(\nu_{\beta 0} + m\nu_{s0} + \mu + Mp - \frac{\nu_{\beta 0} \xi}{\eta}) r_s) \\ & \quad \times Z_T(\omega_0(\nu + \mu + Mp)) J_m(\omega_0(\nu_{\beta 0} + m\nu_{s0} + \mu + Mp - \frac{\nu_{\beta 0} \xi}{\eta}) r'_s), \end{aligned} \quad (5.95)$$

となる。式 (5.95) に $dr_s r_s g_{m,l}(r_s)/W(r_s)$ を掛けて積分した場合と、式 (5.95) の添字を l から l' に換えて、 $dr_s r_s g_{m,l'}(r_s)/W(r_s)$ を掛けて積分した場合の差をとることにすると、

$$(\nu_{m,l} - \nu_{m,l'}) \int_0^\infty \frac{g_{m,l}(r_s) g_{m,l'}(r_s) r_s dr_s}{W(r_s)} = 0. \quad (5.96)$$

つまり、radial mode l, l' が異なれば、 $f_k^{(m)}(r)$ は直交する。よって、

$$\int_0^\infty \frac{g_{m,l}(r_s) g_{m,l'}(r_s) r_s dr_s}{W(r_s)} = N_m \delta_{l,l'}, \quad (5.97)$$

と書く事にする。もし、 $g_{m,l}(r)$ を

$$g_{m,l}(r) = W(r) f_l^{(m)}(r), \quad (5.98)$$

で定義すると、 $N_m = 1$ で式 (5.93) を満たす。

さて、ヘッドテイルモード m , radial mode l を持ったビームの実空間での粒子密度関数 $\rho_{m,l}(\tau)$ は

$$\rho_{m,l}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{m,l}(r) e^{-jm\phi} d\delta, \quad (5.99)$$

と書けて、変形すると、

$$\begin{aligned} \rho_{m,l}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_{m,l}(r) e^{-jm\phi} \delta(\tau - r \cos \phi) d\delta d\tau \\ &= \int g_{m,l}(r) \frac{e^{-jm\phi}}{2\pi} \frac{\beta c \nu_{s0}}{\eta R} e^{-jk(\tau - r \cos \phi)} r dr d\phi dk \\ &= \int g_{m,l}(r) \frac{\omega_0 \nu_{s0}}{\eta} j^m J_m(kr) e^{-jk\tau} r dr dk, \end{aligned} \quad (5.100)$$

となり、粒子密度関数 $\rho_{m,l}(\tau)$ のフーリエ変換 $\tilde{\rho}_{m,l}(k)$ は

$$\tilde{\rho}_{m,l}(k) = \int_0^\infty g_{m,l}(r) \frac{\omega_0 \nu_{s0}}{\eta} j^m J_m(kr) r dr, \quad (5.101)$$

で与えられることが判る。もし、 $g_{m,l}(r)$ が実数の時は、 $\tilde{\rho}_{m,l}^*(k) = (-1)^m \tilde{\rho}_{m,l}(k)$ の関係が成り立つ。この仮定は後で確認できる (式 (5.130) 参照)。

式 (5.95) を $\tilde{\rho}_{m,l}(k)$ を使って書き換えると

$$\begin{aligned} & -j(\nu - \nu_{\beta 0} - m\nu_{s0})g_{m,l}(r_s) \\ &= \frac{e^2 c \beta M}{4\pi E_0 \nu_{\beta 0} j^m C} W(r_s) \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_m(\omega_0(\nu_{\beta 0} + m\nu_{s0} + \mu + Mp - \frac{\nu_{\beta 0} \xi}{\eta}) r_s) \\ & \quad \times Z_T(\omega_0(\nu + \mu + Mp)) \tilde{\rho}_{m,l}(\omega_0(\nu_{\beta 0} + m\nu_{s0} + \mu + Mp - \frac{\nu_{\beta 0} \xi}{\eta})). \end{aligned} \quad (5.102)$$

これに、 $g_{m,l}(r_s)/W(r_s)r_s dr_s$ を書いて積分すると、

$$\begin{aligned} & -j(\nu - \nu_{\beta 0} - m\nu_{s0})\delta_{l,l'} \\ &= \frac{e^2 c \beta M \eta}{4\pi E_0 \nu_{\beta 0} C \omega_0 \nu_{s0}} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}_{m,l'}^*(\omega_0(\nu_{\beta 0} + m\nu_{s0} + \mu + Mp - \frac{\nu_{\beta 0} \xi}{\eta})) \\ & \quad \times Z_T(\omega_0(\nu + \mu + Mp)) \tilde{\rho}_{m,l}(\omega_0(\nu_{\beta 0} + m\nu_{s0} + \mu + Mp - \frac{\nu_{\beta 0} \xi}{\eta})). \end{aligned} \quad (5.103)$$

以上より、モード (m, l) の固有振動数は、

$$\begin{aligned} & \nu_{m,l} = \nu_{\beta 0} + m\nu_{s0} \\ & + \frac{j e^2 c \beta M \eta \sum_{p=-\infty}^{\infty} Z_T(\omega_0(\nu_{\beta 0} + m\nu_{s0} + \mu + Mp)) |\tilde{\rho}_{m,l}(\omega_0(\nu_{\beta 0} + m\nu_{s0} + \mu + Mp - \frac{\nu_{\beta 0} \xi}{\eta}))|^2}{4\pi E_0 \nu_{\beta 0} C \omega_0 \nu_{s0}}, \end{aligned} \quad (5.104)$$

で与えられることが判る。

今、 $C_{m,l}$ という定数を

$$C_{m,l} = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau |\rho_{m,l}(\tau)|^2 = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |\tilde{\rho}_{m,l}(\omega)|^2, \quad (5.105)$$

で定義する。この ω 積分を和で近似して、式 (5.104) を書き換えると

$$\begin{aligned} & \nu_{m,l} = \nu_{\beta 0} + m\nu_{s0} + \frac{j e^2 c \beta \eta C_{m,l}}{8\pi^2 E_0 \nu_{\beta 0} C \omega_0^2 \nu_{s0}} \\ & \times \frac{\sum_{p=-\infty}^{\infty} Z_T(\omega_0(\nu + \mu + Mp)) h'_{m,l}(\omega_0(\nu_{\beta 0} + m\nu_{s0} + \mu + Mp - \frac{\nu_{\beta 0} \xi}{\eta}))}{\sum_{p=-\infty}^{\infty} h'_{m,l}(\omega_0(\nu_{\beta 0} + m\nu_{s0} + \mu + Mp - \frac{\nu_{\beta 0} \xi}{\eta}))}, \end{aligned} \quad (5.106)$$

但し、

$$h'_{m,l}(\omega) = |\tilde{\rho}_{m,l}(\omega)|^2. \quad (5.107)$$

	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$	$p = 6$	$p = 7$	$p = 8$
$m = 0$	0.937		0.012		0.0006		0.00010	
$m = 1$		0.410		0.0086		0.00066		0.00014
$m = 2$	0.023		0.26		0.0038		0.00046	
$m = 3$		0.038		0.183		0.00098		0.00022
$m = 4$	0.000029		0.0505		0.132		0.000029	
$m = 5$		0.00037		0.0609		0.094		0.00022

表 5.1: $l = 1$ の時、 $8\mu_{ml}J_m(\pi\rho)/(\mu_{ml}^2 - \frac{\pi^2 p^2}{4})^2$ を (m, p) の行列と思って書いたもの。 $p - 1 = m$ の成分が支配的。

以後、 C, C_{ml} を具体的に求めることにする。さて、平衡分布 $g_0(r)$ と重み関数 $W(r)$ として、

$$g_0(r) = \frac{\eta RN_b}{\pi\beta c\nu_{s0}\hat{\tau}^2} = \frac{W(r)}{C}, \quad \text{for } r < \hat{\tau}, \quad (5.108)$$

を考える。すると、直交関数は

$$f_k^{(m)}(r) = \sqrt{\frac{2}{W}} \frac{J_m(\frac{\mu_{mk}r}{\hat{\tau}})}{\hat{\tau}J_{m+1}(\mu_{mk})}, \quad \text{for } r < \hat{\tau}, \quad (5.109)$$

である。但し、 μ_{mk} は $J_m(x)$ の k 番目の零点。

すると、位相空間での分布関数 $g_{m,l}(r)$ は

$$\begin{aligned} g_{m,l}(r) &= \sqrt{2W(r)} \frac{J_m(\frac{\mu_{ml}r}{\hat{\tau}})}{\hat{\tau}J_{m+1}(\mu_{ml})}, \\ &= \sqrt{\frac{2C\eta RN_b}{\pi\beta c\nu_{s0}\hat{\tau}^2}} \frac{J_m(\frac{\mu_{ml}r}{\hat{\tau}})}{\hat{\tau}J_{m+1}(\mu_{ml})} (1 - \Theta(r - \hat{\tau})), \end{aligned} \quad (5.110)$$

と選べる。式 (5.97) から

$$N_m = \int_0^{\hat{\tau}} 2 \frac{J_m^2(\frac{\mu_{m,l}r}{\hat{\tau}})}{\hat{\tau}^2 J_{m+1}^2(\mu_{ml})} r dr = 1, \quad (5.111)$$

となっていることが確認できる。

式 (5.110) を式 (5.100) に代入すると、

$$\begin{aligned} \rho_{m,l}(\tau) &= \sqrt{\frac{2C\eta RN_b \nu_{s0}}{\pi\beta c\eta}} \frac{\omega_0 j^m}{\hat{\tau}^2 J_{m+1}(\mu_{ml})} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-jk\tau} \int_0^{\hat{\tau}} dr J_m(\frac{\mu_{ml}r}{\hat{\tau}}) J_m(kr) r \\ &= \sqrt{\frac{2C\eta RN_b \nu_{s0}}{\pi\beta c\eta}} \omega_0 \mu_{ml} j^m \int_0^{\infty} dk ((-1)^m + 1) \cos k\tau + ((-1)^m - 1) j \sin k\tau \frac{J_m(k\hat{\tau})}{\mu_{ml}^2 - k^2 \hat{\tau}^2}. \end{aligned} \quad (5.112)$$

さて、 $\tau = \pm \hat{\tau}$ で $\rho_{m,l}(\pm \hat{\tau}) = 0$ とならねばならぬことから、 $\rho_{m,l}(\tau)$ は、

$$\rho_{m,l}(\tau) = \sum_{p=1,3,5,\dots} D_p \cos \frac{\pi p}{2\hat{\tau}} \tau + \sum_{p=2,4,6,\dots} E_p \sin \frac{\pi p}{2\hat{\tau}} \tau, \quad (5.113)$$

とも書けるはずである。式 (5.112) と式 (5.113) を等値すると、

$$D_p = \frac{2}{\hat{\tau}} \sqrt{\frac{2CRN_b \nu_{s0}}{\pi \beta c \eta}} \omega_0 \mu_{ml} (-1)^{\frac{m}{2}} \int_0^\infty dk \frac{J_m(k\hat{\tau})}{\mu_{ml}^2 - k^2 \hat{\tau}^2} \int_{-\hat{\tau}}^{\hat{\tau}} d\tau \cos k\tau \cos \frac{\pi p \tau}{2\hat{\tau}}, \quad (5.114)$$

for $m = 0, 2, 4,$

$$E_p = \frac{2}{\hat{\tau}} \sqrt{\frac{2CRN_b \nu_{s0}}{\pi \beta c \eta}} \omega_0 \mu_{ml} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \int_0^\infty dk \frac{J_m(k\hat{\tau})}{\mu_{ml}^2 - k^2 \hat{\tau}^2} \int_{-\hat{\tau}}^{\hat{\tau}} d\tau \sin k\tau \sin \frac{\pi p \tau}{2\hat{\tau}}, \quad (5.115)$$

for $m = 1, 3, 5,$

となる。

$$\int_{-\hat{\tau}}^{\hat{\tau}} \cos k\tau \cos \frac{\pi p \tau}{2\hat{\tau}} d\tau = \frac{(-1)^{\frac{p+1}{2}} p \pi}{\hat{\tau} (k^2 - (\frac{\pi p}{2\hat{\tau}})^2)} \cos k\hat{\tau}, \text{ for odd } p, \quad (5.116)$$

$$\int_{-\hat{\tau}}^{\hat{\tau}} \sin k\tau \sin \frac{\pi p \tau}{2\hat{\tau}} d\tau = \frac{(-1)^{\frac{p}{2}} p \pi}{\hat{\tau} (k^2 - (\frac{\pi p}{2\hat{\tau}})^2)} \sin k\hat{\tau}, \text{ for even } p, \quad (5.117)$$

を式 (5.114) と (5.115) に代入し、 $J_m(-x) = (-1)^m J_m(x)$ を使うと [44]、

$$D_p = -\frac{p\pi\omega_0\mu_{ml}}{\hat{\tau}^4} \sqrt{\frac{2CRN_b \nu_{s0}}{\pi \beta c \eta}} (-1)^{\frac{m}{2}} (-1)^{\frac{p+1}{2}} \Re \left[\int_{-\infty}^\infty dk \frac{J_m(k\hat{\tau}) e^{jk\hat{\tau}}}{(k^2 - \frac{\mu_{ml}^2}{\hat{\tau}^2})(k^2 - (\frac{\pi p}{2\hat{\tau}})^2)} \right], \quad (5.118)$$

for $m = 0, 2, 4, \dots,$

$$E_p = -\frac{p\pi\omega_0\mu_{ml}}{\hat{\tau}^4} \sqrt{\frac{2CRN_b \nu_{s0}}{\pi \beta c \eta}} (-1)^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{\frac{p}{2}} \Im \left[\int_{-\infty}^\infty dk \frac{J_m(k\hat{\tau}) e^{jk\hat{\tau}}}{(k^2 - \frac{\mu_{ml}^2}{\hat{\tau}^2})(k^2 - (\frac{\pi p}{2\hat{\tau}})^2)} \right], \quad (5.119)$$

for $m = 1, 3, 5, \dots,$

と纏まるが、これは $k = \pm \pi p / 2\hat{\tau}$ に極があるので、留数積分で求まる。最終的に

$$D_p = \frac{\omega_0}{\hat{\tau}} \sqrt{\frac{\pi CRN_b \nu_{s0}}{\beta c \eta}} (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{2\sqrt{2}\mu_{ml} J_m(\frac{\pi p}{2})}{(\mu_{ml}^2 - (\frac{\pi p}{2})^2)}, \text{ for even } m, \quad (5.120)$$

$$E_p = \frac{\omega_0}{\hat{\tau}} \sqrt{\frac{\pi CRN_b \nu_{s0}}{\beta c \eta}} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{2\sqrt{2}\mu_{ml} J_m(\frac{\pi p}{2})}{(\mu_{ml}^2 - (\frac{\pi p}{2})^2)}, \text{ for odd } m, \quad (5.121)$$

となる (文献 [6] のように式 (5.112) で引数 k を単純に $p\pi/2\hat{\tau}$ に置き換えても正確な値は導出できない。)。

従って、

$$\rho_{m,l}(\tau) = \sum_p A_p^m b_p(\tau), \quad (5.122)$$

$$b_p(\tau) = \begin{cases} \cos \frac{\pi p \tau}{2\hat{\tau}} & p = 1, 3, 5\dots \\ \sin \frac{\pi p \tau}{2\hat{\tau}} & p = 2, 4, 6\dots \end{cases}, \quad (5.123)$$

$$A_{lp}^m = \frac{\omega_0}{\hat{\tau}} \sqrt{\frac{\pi C R N_b \nu_{s0}}{\beta c \eta}} P_{m,p,l} \begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}} & \text{for } m = 0, 2, 4\dots \\ (-1)^{\frac{m-1}{2}} & \text{for } m = 1, 3, 5\dots \end{cases}, \quad (5.124)$$

$$P_{m,p,l} = \frac{2\sqrt{2}\mu_{ml} J_m\left(\frac{\pi p}{2}\right)}{(\mu_{ml}^2 - \frac{\pi^2 p^2}{4})}, \quad (5.125)$$

但し、 $m = 0, 2, 4, \dots$ の時は、 p は $1, 3, 5, \dots$ を動き、 $m = 1, 3, 5, \dots$ の時は、 p は $2, 4, 6, \dots$ を動くことと約束する。

ここで、最低時の radial mode として $l = 1$ に注目する。この時の m と p について

$$\frac{8\mu_{m,1}^2 J_m^2\left(\frac{\pi(m+1)}{2}\right)}{(\mu_{m,1}^2 - \frac{\pi^2(m+1)^2}{4})^2}, \quad (5.126)$$

を (m, p) の行列として表したものが、表 5.1 である。これをみると、 $l = 1$ に関する限り、 $m + 1 = p$ の項が支配的だと判る。つまり、 $\rho_{m,l}(\tau)$ が $\sin \pi(m+1)\tau/2\hat{\tau}$ か $\cos \pi(m+1)\tau/2\hat{\tau}$ で近似できると判る。そこで、

$$P_{m,p=m+1,l=1} = \frac{2\sqrt{2}\mu_{m,1} J_m\left(\frac{\pi(m+1)}{2}\right)}{(\mu_{m,1}^2 - \frac{\pi^2(m+1)^2}{4})} \simeq \frac{16(3+2m)}{(5+4m)\pi^2\sqrt{m+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{m+1}}, \quad (5.127)$$

を使って、 $A_{l=1,p=m+1}^m = 1$ となるように C を決めると、

$$C = \frac{\eta\beta c(m+1)\hat{\tau}^2}{\omega_0^2 \nu_{s0} \pi R N_b}, \quad (5.128)$$

と決まる。

このようにして、 $\rho_m(\tau)$ が

$$\rho_{m,l=1}(\tau) = \begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}} \cos \frac{\pi(m+1)\tau}{2\hat{\tau}} & m = 0, 2, 4\dots \\ (-1)^{\frac{m-1}{2}} \sin \frac{\pi(m+1)\tau}{2\hat{\tau}} & m = 1, 3, 5\dots \end{cases}, \quad (5.129)$$

となり、文献 [22] と三角関数の前の因子を除いて一致することが判る。これから、ヘッドテイルモード m は縦方向のノードの数と一致することが判る。図 5.4 に CERN PS Booster で観測されたバンチの横方向振動を示しておいた [22]。

式 (5.129) を式 (5.105) に代入すると $C_{m,l} = \hat{\tau}$ が得られる。式 (5.128) を式 (5.110) に代入すると、

$$g_{m,l}(r) = \frac{\sqrt{2(m+1)}|\eta|J_m\left(\frac{\mu_{ml}r}{\hat{\tau}}\right)}{\pi\omega_0\nu_{s0}\hat{\tau}J_{m+1}(\mu_{ml})}(1 - \Theta(r - \hat{\tau})), \quad (5.130)$$

となり、 $g_{m,l}(r)$ は実数であることも確認できる。

この $C_{m,l}$ と式 (5.128) で求めた C を式 (5.106) に代入すると、式 (5.106) は、

$$\tau_m^{-1} \simeq -\frac{c\beta I_c}{4\pi\nu_{\beta 0}(m+1)E_0/e} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \Re[Z_T(\omega'_p)] F'_m(\omega'_p - \omega_\xi), \quad (5.131)$$

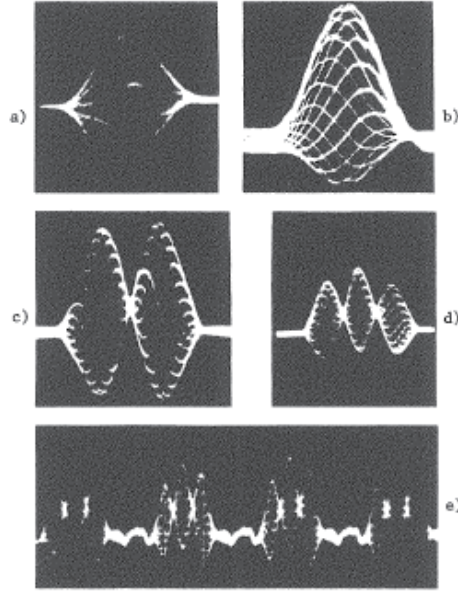


図 5.4: CERN PS Booster で観測されたバンチの横方向振動 [22]。

と書き換えられる。但し、

$$F'_m(\omega) = \frac{h'_m(\omega)}{B'_f \sum_{p=-\infty}^{\infty} h'_m(\omega'_p - \omega_\xi)}, \quad (5.132)$$

$$\omega'_p = \omega_0(\nu_{\beta 0} + m\nu_{s0} + \mu + Mp), \omega_\xi = \omega_0 \frac{\nu_{\beta 0} \xi}{\eta}, I_c = \frac{eMN_b}{T_0}, \quad (5.133)$$

$$B'_f = \frac{M\tau_L c \beta}{2\pi R}, \quad (5.134)$$

とおく事にした。式 (5.13) に式 (5.129) を代入すると、 $\tilde{\rho}(\omega)$ が求まり、 $h'_m(\omega)$ は

$$h'_m(\omega) = \frac{\tau_L^2}{2\pi^4} (m+1)^2 \frac{[1 + (-1)^m \cos(\omega\tau_L)]}{[(\frac{\omega\tau_L}{\pi})^2 - (m+1)^2]^2}, \quad (5.135)$$

が得られる。式 (5.131) の事を Sacherer の公式と呼ぶ [22, 37]。

B'_f はバンチ長と RF 波長の比なので、一般的なバンチング因子 B_f (平均電流とピーク電流の比) とは異なる。例えば、ビームの縦方向の定常分布が

$$\lambda(\tau) = \frac{3N_b}{4} \left[1 - \left(\frac{\tau}{\hat{\tau}} \right)^2 \right], \quad \text{for } -\hat{\tau} < \tau < \hat{\tau}, \quad (5.136)$$

のような放物型で与えられる時、二つのバンチング因子 B_f, B'_f

$$B_f = \frac{2}{3} B'_f, \quad (5.137)$$

で関連づけられる。本講義では、 $B'_f \sim B_f$ と近似することにする。

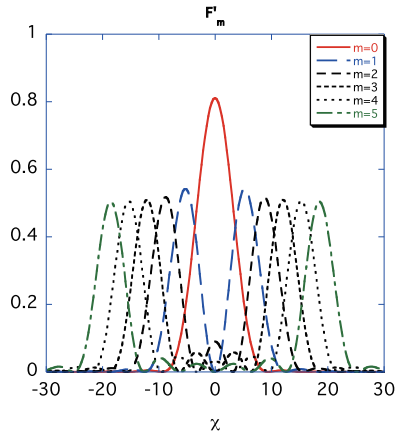


図 5.5: $m = 0$ から $m = 5$ までの関数 $F'_m(\chi)$ 。

ここで、横軸を $\chi = \omega\tau_L$ として関数 $F'_m(\chi)$ を書いたものが、図 5.5 である。縦の場合の h_m (式 (5.53) 参照) と同様に、高次の m ほどピークが高周波側にくる。また、growth rate は $1/(m+1)$ だけ抑えられるようになる。縦の時と同様にインピーダンスとして抵抗性チェンバーを考えると、(抵抗性チェンバーの横方向インピーダンスは $\omega^{-1/2}$ に比例するので、基本的に、 Z_L/ω と同じ形になる。) $m = 0$ のモードが一番励起されることが判る。縦の場合と大きく異なるのは、 $F(\omega)$ の引数にクロマテシティ ω_ξ の効果が入る点である。クロマテシティ ξ は補正しない場合負であることが一般的なので、もし slippage factor η が負の時は ω_ξ は正になり、関数 $F'_m(\omega)$ は周波数軸に沿って正側にずれるようになる。従って、 $m = 0$ のモードは励起されにくくなる。しかし、 $F'_1(\omega - \omega_\xi)$ が右側にずれるので、代わりに $m = 1$ のモードは励起され易くなる。インピーダンスの周波数依存性を考慮して、どのモードがどれだけ励起されるかクロマテシティを関数に検討する必要がある。

最後に growth rate を抑える要素であるが、ベータトロン周波数に広がりがあればよい。それには、非線形なベータトロン振動や空間電荷効果が考えられる。仮に今、空間電荷効果が支配的なビームを考えたとすると、その広がり $\Delta\omega$ は、

$$\Delta\omega \simeq \frac{5r_p N_b \omega_0}{32\pi\beta^2\gamma^3\epsilon B_f}, \quad (5.138)$$

となり、ビームが安定化される条件はおおよそ

$$\tau_m^{-1} \leq \frac{\Delta\omega}{4}, \quad (5.139)$$

と考えてよい (式 (5.139) に表れる因子 4 は、縦方向の条件 A.Hofmann の stability condition 式 (5.56) になった。もっと精緻な値が実験的に求める方が望ましい。)。但し、 r_p は陽子の古典半径、 ϵ はエミッタンス、 N_b はバンチ当たりの粒子数である。

第III部

J-PARC (Rapid Cycling Synchrotron
(RCS) 及び (Main Ring) MR) の代表的な
インピーダンス源とビームの不安定性

第 III 部では、今まで導出してきたインピーダンスの公式や Keil-Schnell criterion(式 (4.28) 及び (4.82))、マルチバンチビームの growth rate の評価式 (式 (5.52) 及び (5.131)) が具体的なマシーンにどのように適応されるか、J-PARC の場合を例に具体的にをみていくことにする。

第6章 J-PARC のインピーダンスの評価例

この章では J-PARC の場合、インピーダンスが各加速器要素でどのように評価できるかを陳栄浩氏の論文 [45] に従って具体的に評価してみることにする。

表 6.1 と表 6.4 に 計算に必要な J-PARC の Rapid Cycling Synchrotron (RCS) と Main Ring(MR) の基本パラメータを記した [1]。

ここで注意すべきは陽子加速器の場合エネルギーを運動エネルギー T で言うところである。例えば、J-PARC の RCS は 3GeV シンクロトロンであるが、この 3 GeV とは運動エネルギー T で、例えばローレンツ因子 γ を求める時には静止エネルギー $m_0c^2 = 0.938$ GeV を使って、

$$\gamma = \frac{T + m_0c^2}{m_0c^2}, \quad (6.1)$$

としなくてはならない。

6.1 空間電荷効果のインピーダンス

半径 a の完全導体のチェンバーに半径 σ のビームがある時の空間電荷効果のインピーダンスは、

$$\left(\frac{Z_L(n\omega_0)}{n}\right)_{SC} = -j \frac{Z_0}{2\beta\gamma^2} \left(1 + 2 \log \frac{\sigma}{a}\right), \quad (6.2)$$

$$(Z_T)_{SC} = -j \frac{Z_0 R}{\beta^2 \gamma^2} \left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{a^2}\right), \quad (6.3)$$

で与えられる (セクション 2.1 参照)。但し、 $\omega_0 (= 2\pi f_0)$ は回転角周波数、 n は自然数 (式 (4.28) で与えられた縦方向の Keil-Schnell criterion との比較との関係でこのような形で書かれることが多い。)

RCS の空間電荷効果のインピーダンス:

RCS では、2 極磁石と 4 極磁石で口径が違うが、平均すると、おおむね $a = 0.12$ m。ビームサイズ σ を評価するのに、平均の β 関数 $\langle \beta \rangle \simeq R/\nu = 9.2$ m と un-normalized emittance ϵ (補足; この emittance: ϵ を使った。

運動エネルギー T (GeV)	0.181	0.4	3
Lorentz γ	1.193	1.4263	4.1974
β	0.5453	0.71306	0.97121
周長 $2\pi R$ (m)		348.333	
回転周波数 f_0 (MHz)	0.47	0.614	0.837
harmonic number h		2	
slippage factor η	-0.69	-0.4791	-0.047
tune ν_x/ν_y		6.45(6.68)/6.45(6.27)	
bunching factor B_f	0.315	0.315	0.179
particle per bunch N_b	2.49×10^{13}	4.15×10^{13}	4.15×10^{13}
平均電流 I_c (A)	3.74	8.15	11.1
ピーク電流 $I_p = I_c/B_f$ (A)	12	26	62
$\Delta p/p$ (%)	± 0.85	± 0.85	± 0.38
$(\Delta p/p)_{FWHM}$ (%)	1.2	1.2	0.53
バンチ長 τ_z (全長)(m)	74	75	40
$\sigma_\tau (= \tau_z/2\sqrt{5}c\beta)$ (μs)	0.10	0.078	0.03
synchrotron tune ν_s	0.0088	0.006	0.0005

表 6.1: RCS の典型的なパラメータ

運動エネルギー T (GeV)	0.181	0.4	3
$(\frac{Z_L}{n})_{SC}$	$-j717$	$-j384$	$-j48$
$(\frac{Z_L}{n})_{Ti}$	$\frac{0.23(1+j)}{\sqrt{n}}$	$\frac{0.27(1+j)}{\sqrt{n}}$	$\frac{0.31(1+j)}{\sqrt{n}}$
$(\frac{Z_L}{n})_{ceramic-TiN}$	$0.0036n + j4.1$	$0.012n + j6.5$	$0.037n + j9.9$
$(\frac{Z_L}{n})_{Cu-slit}$	$j0.0006$	$j0.0008$	$j0.001$
$(\frac{Z_L}{n})_{coll}$	$j0.12$	$j0.157$	$j0.214$
$(\frac{Z_L}{n})_{taper}$	$j0.48$	$j0.62$	$j0.86$
$(\frac{Z_L}{n})_{EMS-RW}$	$\frac{0.064(1+j)}{\sqrt{n}}$	$\frac{0.073(1+j)}{\sqrt{n}}$	$\frac{0.085(1+j)}{\sqrt{n}}$
$(\frac{Z_L}{n})_{8-kickers}$		図 7.1	
$(\frac{Z_L}{n})_{th}$	2755	1805	79

表 6.2: RCS の典型的な縦方向インピーダンス ($Z_L(\Omega)$)

運動エネルギー T (GeV)	0.181	0.4	3
$(Z_T)_{SC}$	$-j21k$	$-j8.5k$	$-j2.5k$
$(Z_T)_{Ti}$	$\frac{3.3(\text{sgn}(\omega)+j)}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.9(\text{sgn}(\omega)+j)}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.5(\text{sgn}(\omega)+j)}{\sqrt{n}}$
$(Z_T)_{\text{ceramic-TiN}}$	$0.06n + j58$	$0.13n + j70$	$0.29n + j78$
$(Z_T)_{Cu-slit}$		$j0.007$	
$(Z_T)_{coll}$		$j1.7$	
$(Z_T)_{taper}$		$j5.6$	
$(Z_T)_{EMS-RW}$	$\frac{0.904(\text{sgn}(\omega)+j)}{\sqrt{n}}$	$\frac{0.791(\text{sgn}(\omega)+j)}{\sqrt{n}}$	$\frac{0.678(\text{sgn}(\omega)+j)}{\sqrt{n}}$
$(Z_T)_{8-kickers}$		☒ 7.3	
$(Z_T)_{th}(\text{with } \nu_{\beta 0} = 6.45, FS_{x,y} = 1)$	521	287	157

表 6.3: RCS の典型的な横方向インピーダンス (Z_T (k Ω /m))

運動エネルギー T (GeV)	3	50
Lorentz γ	4.1974	54.28943
β	0.97121	0.9998
周長 $2\pi R$ (m)	1567.5	
回転周波数 f_0 (MHz)	0.1857	0.1912
harmonic number h	9	
slippage factor η	-0.058	-0.002
tune ν_x/ν_y	22.37(22.33)/22.28	
bunching factor B_f	0.298	0.058
particle per bunch N_b	4.15×10^{13}	4.15×10^{13}
平均電流 I_c (A)	9.87	10.2
ピーク電流 $I_p = I_c/B_f$ (A)	33	176
$\Delta p/p$ (%)	± 0.63	± 0.25
$(\Delta p/p)_{FWHM}$ (%)	0.89	0.35
バンチ長 τ_z (全長)(m)	73	16
$\sigma_\tau (= \tau_z/2\sqrt{5}c\beta)$ (μs)	0.055	0.012
synchrotron tune ν_s	0.0025	0.0001

表 6.4: MR の典型的なパラメータ

運動エネルギー T (GeV)	3	50
$(\frac{Z_L}{n})_{SC}$	$-j31$	$-j0.3$
$(\frac{Z_L}{n})_{SUS}$	$\frac{2.97(1+j)}{\sqrt{n}}$	$\frac{3(1+j)}{\sqrt{n}}$
$(\frac{Z_L}{n})_{3-injectionkickers}$	図 7.8 の左図 [46]	
$(\frac{Z_L}{n})_{5-FXkickers}$	測定予定 [47]	
$(\frac{Z_L}{n})_{5-cavities}$	図 7.6 の左図 [48]	
$(\frac{Z_L}{n})_{th}$	516	8.8

表 6.5: MR の主要な縦方向インピーダンス ($Z_L(\Omega)$)

運動エネルギー T (GeV)	3	50
$(Z_T)_{SC}$	$-j7.6k$	$-j0.46k$
$(Z_T)_{SUS}^a$	$\frac{397(\text{sgn}(\omega)+j)}{\sqrt{n}}$	$\frac{391(\text{sgn}(\omega)+j)}{\sqrt{n}}$
$(Z_T)_{3-injectionkickers}$	図 7.8 の右図 [49]	
$(Z_T)_{5-FXkickers}$	測定予定 [47]	
$(Z_T)_{5-cavities}$	図 7.6 の右図 [48]	
$(Z_T)_{th}(\text{with } \nu_{\beta 0} = 22.37, FS_{x,y} = 1)$	380	370

表 6.6: MR の主要な横方向インピーダンス ($Z_T(\text{k}\Omega/\text{m})$)

^aこの表 6.6 から SUS-resistive wall impedance が直ちに横の Keil-Schnell criterion を破っていると早計しないで欲しい。第 7 章セクション 7.2 の議論を確認して下さい。

別の emittance に $\beta\gamma\epsilon$ があって、normalized emittance と呼ぶ。) が入射部で $216\pi\text{mmrad}$ 、出射部で $54\pi\text{mmrad}$ を使うことにすると、入射部で $\sigma = 0.0452\text{ m}$ 、出射部で $\sigma = 0.022\text{ m}$ 。これを式 (6.2)-(6.3) に代入すると、

$$\left(\frac{Z_L(n\omega_0)}{n}\right)_{SC} = \begin{cases} -j717\Omega & @0.181\text{ GeV} \\ -j384\Omega & @0.4\text{ GeV} \\ -j48\Omega & @3\text{ GeV} \end{cases}, \quad (6.4)$$

$$(Z_T)_{SC} = \begin{cases} -j21M\Omega/m & @0.181\text{ GeV} \\ -j8.5M\Omega/m & @0.4\text{ GeV} \\ -j2.5M\Omega/m & @3\text{ GeV} \end{cases}. \quad (6.5)$$

MR の空間電荷効果のインピーダンス:

MR では $a \simeq 0.062\text{ m}$ 。平均の β 関数 $\langle\beta\rangle \simeq R/\nu = 11.34\text{ m}$ とビームのエミッタンスが入射部で $54\pi\text{mmrad}$ 、出射部で $6.1\pi\text{mmrad}$ を使うことにすると、入射部で $\sigma = 0.025\text{ m}$ 、出射部で $\sigma = 0.0083\text{ m}$ 。これを式 (6.2)-(6.3) に代入すると、

$$\left(\frac{Z_L(n\omega_0)}{n}\right)_{SC} = \begin{cases} -j31\Omega & @3\text{ GeV} \\ -j0.3\Omega & @50\text{ GeV} \end{cases}, \quad (6.6)$$

$$(Z_T)_{SC} = \begin{cases} -j7.6M\Omega/m & @3\text{ GeV} \\ -j0.46M\Omega/m & @50\text{ GeV} \end{cases}. \quad (6.7)$$

6.2 抵抗性チェンバーのインピーダンス (Resistive Wall impedance)

抵抗性チェンバーのインピーダンス (resistive wall impedance) は

$$\left(\frac{Z_L(n\omega_0)}{n}\right)_{RW} = Z_0\beta\frac{1+j}{2}\frac{\delta}{a}\Delta_f, \quad (6.8)$$

$$(Z_T)_{RW} = \frac{Z_0(\text{sgn}(\omega) + j)}{\sqrt{n}}\frac{R\delta}{a^3}\Delta_f, \quad (6.9)$$

で与えられる (セクション 2.2 参照)。但し、 Δ_f はリング一周に対するチェンバーの占める割合。 δ はスキンドプスで

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma_c}}. \quad (6.10)$$

RCS における Ti-チェンバーのインピーダンス:

RCS では、Ti-チェンバーの部分がリングの半分 $\Delta_f = 0.5$ を占めている。これは、電気伝導率 $\sigma_{Ti} = 1.8 \times 10^6 / \Omega\text{m}$ を持っているため、抵抗性チェンバーのインピーダンス (resistive wall impedance) を持つ。 $a \simeq 0.12 \text{ m}$ として、式 (6.8)-(6.9) を使うと、

$$\left(\frac{Z_L(n\omega_0)}{n}\right)_{Ti} = \begin{cases} \frac{0.23(1+j)}{\sqrt{n}} \Omega & @0.181 \text{ GeV} \\ \frac{0.27(1+j)}{\sqrt{n}} \Omega & @0.4 \text{ GeV} \\ \frac{0.31(1+j)}{\sqrt{n}} \Omega & @3 \text{ GeV} \end{cases}, \quad (6.11)$$

$$(Z_T)_{Ti} = \begin{cases} \frac{3.3(\text{sgn}(\omega)+j)}{\sqrt{n}} \text{k}\Omega/\text{m} & @0.181 \text{ GeV} \\ \frac{2.9(\text{sgn}(\omega)+j)}{\sqrt{n}} \text{k}\Omega/\text{m} & @0.4 \text{ GeV} \\ \frac{2.5(\text{sgn}(\omega)+j)}{\sqrt{n}} \text{k}\Omega/\text{m} & @3 \text{ GeV} \end{cases}. \quad (6.12)$$

MR における Stainless Steel (SUS-) チェンバーのインピーダンス:

MR は、Stainless Steel (SUS-) チェンバーでできている。電気伝導率は $\sigma_{SUS} = 1.35 \times 10^6 / \Omega \text{ m}$ で与えられる。 $a = 0.062 \text{ m}$ を使うと、

$$\left(\frac{Z_L(n\omega_0)}{n}\right)_{SUS} = \begin{cases} \frac{2.97(1+j)}{\sqrt{n}} \Omega & @3 \text{ GeV} \\ \frac{3(1+j)}{\sqrt{n}} \Omega & @50 \text{ GeV} \end{cases}, \quad (6.13)$$

$$(Z_T)_{SUS} = \begin{cases} \frac{397(\text{sgn}(\omega)+j)}{\sqrt{n}} \text{k}\Omega/\text{m} & @3 \text{ GeV} \\ \frac{391(\text{sgn}(\omega)+j)}{\sqrt{n}} \text{k}\Omega/\text{m} & @50 \text{ GeV} \end{cases}. \quad (6.14)$$

MR では、この SUS のレジスティブウォールインピーダンスの効果がリング一周のインピーダンスの中で最大であることが判っている。

6.3 RCS の TiN コーティングしたセラミックダクトが作るインピーダンス

RCS では、磁場の変化によって引き起こされる渦電流の効果を減らすために [50]、磁石内部のチェンバーでは、セラミックダクトを用いている [51]。これは、図 6.1 の左図が示すようにセラミックで作ったダクトを銅のストライプで覆ったものである。また、セラミックダクトの内側は陽子がダクトに当たって発生する 2 次電子の放出を抑えるために TiN コーティングがなされている [20]。このインピーダンスを求めるは、とても難しいが、外側の銅のストライプの部分は銅のチェンバーだと思って十分よく近似できるということが判っている [52]。そ

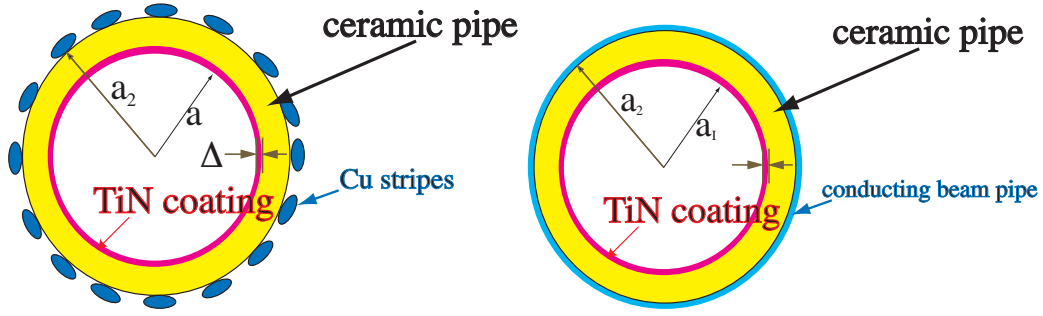


図 6.1: セラミックダクトの模式図。

ここで、ここでは、図 6.1 の右図が示すような模型を使って求めたインピーダンスで評価することにする。

$$\left(\frac{Z_L(n\omega_0)}{n}\right)_{ceramic-TiN} = \frac{Z_0}{k\beta a(Z_0\Delta\sigma_{TiN} - j\frac{\epsilon'}{(\epsilon'\beta^2-1)ka\log\frac{a_2}{a}})}\Delta_f, \quad (6.15)$$

$$(Z_T)_{ceramic-TiN} = \frac{2R}{a^2\beta} \frac{Z_0}{k\beta a(Z_0\Delta\sigma_{TiN} - j\frac{\epsilon'}{(\epsilon'\beta^2-1)ka\log\frac{a_2}{a}})}\Delta_f, \quad (6.16)$$

但し、 $\sigma_{TiN} \simeq 5.88 \times 10^6/\Omega \text{ m}$ は TiN の電気伝導率、 $a \simeq 0.12 \text{ m}$ はチェンバーの内径、 $\Delta \simeq 15\text{nm}$ は TiN コーティングの厚み、 $a_2 \simeq 0.1275 \text{ m}$ はセラミックダクトの外径、 $\epsilon' \simeq 10$ はセラミックの比誘電率、セラミックダクトのリングに対する占有率 $\Delta_f \simeq 0.5$ 。

これを使うと、

$$\left(\frac{Z_L(n\omega_0)}{n}\right)_{ceramic-TiN} = \begin{cases} 0.0036n + j4.1\Omega & @0.181 \text{ GeV} \\ 0.012n + j6.5\Omega & @0.4 \text{ GeV} \\ 0.037n + j9.9\Omega & @3 \text{ GeV} \end{cases}, \quad (6.17)$$

$$(Z_T)_{ceramic-TiN} = \begin{cases} 0.06n + j58k\Omega/m & @0.181 \text{ GeV} \\ 0.13n + j70k\Omega/m & @0.4 \text{ GeV} \\ 0.29n + j78k\Omega/m & @3 \text{ GeV} \end{cases}. \quad (6.18)$$

銅ストライプの間隙をスリットと見た時のインピーダンス:

Ti-チェンバーからセラミックチェンバーに移る時、壁電流は、銅のストライプをみることになる。この時、壁電流の流れ方に变化があるのでインピーダンスが生ずる。この効果を図 6.2 のように銅ストライプの間隙をスリットと見ることで評価することにする。インピーダンスは、

$$\frac{Z_L}{n} = j\frac{\beta}{R} Z_0 \frac{\alpha_e + \alpha_m}{4\pi^2 a^2}, \quad (6.19)$$

$$Z_T = jZ_0 \frac{\alpha_e + \alpha_m}{\pi^2 a^4} \cos^2 \theta_0, \quad (6.20)$$

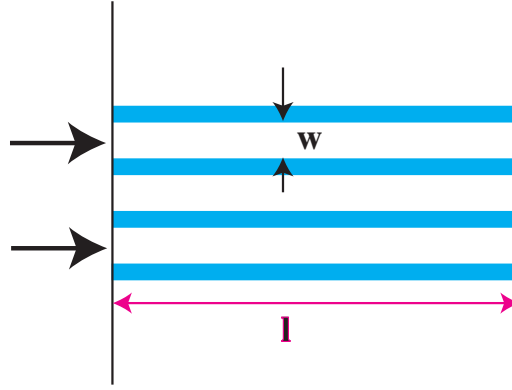


図 6.2: 銅ストライブの隙間をスリットと見た時のインピーダンス。青は銅のストライブを示す。

で表される [7, 12, 53, 54]。ここで、 θ_0 はインピーダンスのソース源と注目している横方向インピーダンスの向きとの角度、 α_e, α_m はおのおの隙間に励起される電気分極率、磁気分極率である。

今、真空に幅 w の隙間がある完全導体の板を考えた時、隙間に励起される電気分極率、磁気分極率は

$$\alpha_e + \alpha_m \simeq 0.1814w^3, \quad (6.21)$$

で与えられることが知られている [7, 55, 56]。下にセラミックがある場合も、隙間に励起される電気分極率、磁気分極率は大きくは異ならないと予想されるので、この値を使うことにする。(文献 [45] にセラミックがある場合は磁気分極率の効果が支配的との考察があるが、セラミックの外側の電場について考えるために、中心に一樣な電荷があり、その周りに3層に真空、セラミック、真空が覆っている単純な静電場問題を考えたとする。この時、セラミックの外側の動径方向の電場は、セラミックの存在とは無関係である。従って、本講義では、隙間に励起される動径方向電場は、セラミックの存在には大きく影響されない仮定することにした。)

今、全部で $N_{ceramic}$ 個のセラミックチェンバーがあり、一つのセラミックチェンバーに隙間が、 N_{aper} 個あるとすると、そのインピーダンスは

$$\left(\frac{Z_L(n\omega_0)}{n}\right)_{Cu-slit} = jZ_0 \frac{\beta}{R} \frac{0.1814}{4\pi^2 a^2} w^3 N_{aper} N_{ceramic}, \quad (6.22)$$

$$(Z_T)_{Cu-slit} = jZ_0 \frac{0.1814}{\pi^2 a^4} w^3 \frac{N_{aper}}{2} N_{ceramic}, \quad (6.23)$$

で与えられる (但し、 $\cos^2 \theta_0$ を $\langle \cos^2 \theta_0 \rangle = 1/2$ で置き換えた。)。今、2極磁場内部にあるチェンバーは半径は $a = 0.1075\text{m}$ 、ストライブの幅は 0.0055 m 、 $N_{aper} = 68$ であり (従って、 $w = (2\pi a - 0.0055 \times 68)/N_{aper} = 0.0044\text{m}$)、リングには $N_{ceramic} = 24$ 個ある。4極磁場内部にあるチェンバーは半径は $a = 0.1575\text{m}$ 、ストライブの幅は 0.0055 m 、 $N_{aper} = 99$ であり (従って、 $w = 0.0045\text{m}$)、リングには $N_{ceramic} = 70$ 個ある。従って、リ

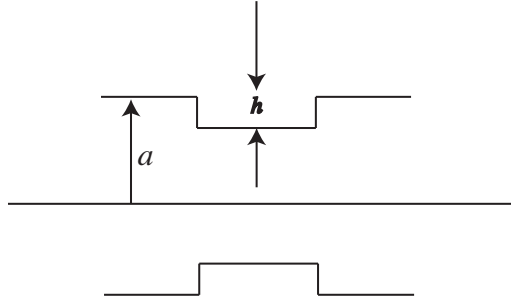


図 6.3: コリメータの作るインピーダンス。

ングー周のインピーダンスは

$$\left(\frac{Z_L(n\omega_0)}{n}\right)_{Cu-slit} = \begin{cases} j0.0006\Omega & @0.181 \text{ GeV} \\ j0.0008\Omega & @0.4 \text{ GeV} \\ j0.001\Omega & @3 \text{ GeV} \end{cases} . \quad (6.24)$$

$(Z_T)_{Cu-slit}$ はエネルギーによらず、 $0.007j \text{ k}\Omega/\text{m}$ となる。

6.4 RCS のコリメータの作るインピーダンス:

コリメータとは、図 6.3 が示すようなビームのハローを削る装置で RCS には、primary collimator が縦方向と横方向に対して一つ secondary collimator が 5 つ合計 $N_{coll} = 7$ 個ある [57]。インピーダンスの表式は

$$\left(\frac{Z_L(n\omega_0)}{n}\right)_{coll} = j \frac{Z_0 \beta h^2 N_{coll}}{R 2\pi^2 a} \left(2 \log \frac{2\pi a}{h} + 1\right), \quad (6.25)$$

$$(Z_T)_{coll} = j \frac{Z_0 h^2 N_{coll}}{\pi^2 a^3} \left(2 \log \frac{2\pi a}{h} + 1\right), \quad (6.26)$$

で与えられる [53]。primary collimator で代表させることにすると、primary collimator はエミッタンス $324\pi \text{ mmrad}$ なので、 β 関数を約 20 と仮定すると、アパーチャーサイズは、0.08 m になる。よって、段差の大きさ ($h \simeq 0.04\text{m}$)、ダクトの半径を $a \simeq 0.12 \text{ m}$ を代入すると、縦方向のインピーダンスは

$$\left(\frac{Z_L(n\omega_0)}{n}\right)_{coll} = \begin{cases} j0.12\Omega & @0.181 \text{ GeV} \\ j0.157\Omega & @0.4 \text{ GeV} \\ j0.214\Omega & @3 \text{ GeV} \end{cases} , \quad (6.27)$$

となり、横方向のインピーダンスはエネルギーに依らず、 $(Z_T)_{coll} = 1.7j\text{k}\Omega/\text{m}$ となる。

6.5 RCS で段差が作るインピーダンス:

RCS で半径が、0.13m から 0.095m に変わるところが 48 個。0.13m から 0.15m に変わるところが 12 個。0.13m から 0.19m に変わるところが 6 個。0.15m から 0.19m に変わるところが 6 個 [1]。これがスムーズに繋がっていると考えると、(直角に繋がっていると考えた場合のおよそ 1/2 で評価できるので、) 各々は、

$$\left(\frac{Z_L(n\omega_0)}{n}\right)_{taper} = j \frac{Z_0 \beta}{R} \frac{h^2}{4\pi^2 a} \left(2 \log \frac{2\pi a}{h} + 1\right), \quad (6.28)$$

$$(Z_T)_{taper} = j \frac{Z_0 h^2}{2\pi^2 a^3} \left(2 \log \frac{2\pi a}{h} + 1\right), \quad (6.29)$$

[53]。リング一周では、縦方向インピーダンスは

$$\left(\frac{Z_L(n\omega_0)}{n}\right)_{taper} = \begin{cases} j0.48\Omega & @0.181 \text{ GeV} \\ j0.62\Omega & @0.4 \text{ GeV} \\ j0.86\Omega & @3 \text{ GeV} \end{cases} . \quad (6.30)$$

横方向のインピーダンスはエネルギーに依らず、 $(Z_T)_{taper} = 5.6 \text{jk}\Omega/\text{m}$ となる。

6.6 RCS の電磁ステンレスパイプのインピーダンス:

RCS では、出射ラインからの漏れ磁場を抑える為に電磁ステンレスパイプ (100kHz での比透磁率が $\mu = 55$, 電気伝導率 $\sigma_c = 1.3568 \times 10^6 / \Omega\text{m}$) が一部使われている。このインピーダンスは

$$\left(\frac{Z_L(n\omega_0)}{n}\right)_{EMS-RW} = \beta Z_0 \frac{1+j}{2} \sqrt{\mu'} \frac{\delta_0}{a\sqrt{n}} \Delta_f, \quad (6.31)$$

$$(Z_T)_{EMS-RW} = Z_0 (\text{sgn}(\omega) + j) \frac{\sqrt{\mu'}}{a^3} \frac{\delta_0}{\sqrt{n}} R \Delta_f, \quad (6.32)$$

で与えられる。但し、

$$\delta_0 = \sqrt{\frac{2}{\omega_0 \mu_0 \sigma_c}}. \quad (6.33)$$

これに $\Delta_f = 0.016$, $a = 0.12 \text{ m}$ を代入すると、

$$\left(\frac{Z_L(n\omega_0)}{n}\right)_{EMS-RW} = \begin{cases} \frac{0.064(1+j)}{\sqrt{n}} \Omega & @0.181 \text{ GeV} \\ \frac{0.073(1+j)}{\sqrt{n}} \Omega & @0.4 \text{ GeV} \\ \frac{0.085(1+j)}{\sqrt{n}} \Omega & @3 \text{ GeV} \end{cases} , \quad (6.34)$$

$$(Z_T)_{EMS-RW} = \begin{cases} \frac{904(\text{sgn}(\omega)+j)}{\sqrt{n}} \Omega/\text{m} & @0.181 \text{ GeV} \\ \frac{791(\text{sgn}(\omega)+j)}{\sqrt{n}} \Omega/\text{m} & @0.4 \text{ GeV} \\ \frac{678(\text{sgn}(\omega)+j)}{\sqrt{n}} \Omega/\text{m} & @3 \text{ GeV} \end{cases} , \quad (6.35)$$

が得られる。

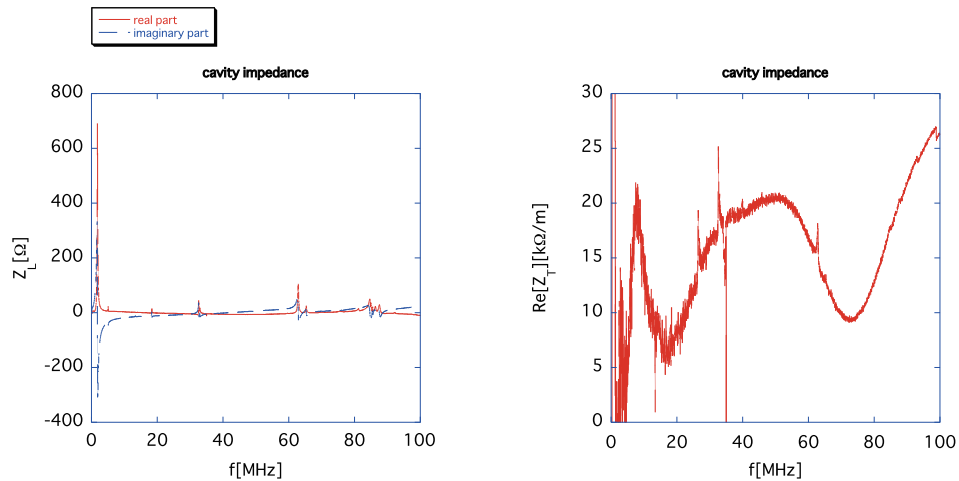


図 6.4: RF 空洞 1 台分のインピーダンス。左図が縦方向インピーダンス Z_L の実部と虚部、右図が横方向インピーダンスの実部 $\Re[Z_T]$ 。 $\Re[Z_T]$ は測定結果自身は負のところもあったが、 $\Re[Z_T] < 0$ は物理的ではない。そこで、この図では、周波数 f が零になるに従って、 $\Re[Z_T]$ が零に近づくように (横方向インピーダンスの実部の性質) 全体に $19k\Omega/m$ ほどかさ上げしてある。

6.7 MR の RF 空洞インピーダンス:

MR には 5 台の RF 空洞が用意されている。RF 空洞は複雑な装置なので、このインピーダンスは測定で求めることが多い。図 6.4 の左図が RF 空洞 1 台分の縦方向インピーダンス Z_L 、右図が横方向インピーダンス Z_T の実部である。これは、2 本のワイヤーを空洞内にはって、その透過係数 S_{12} を測定することで [12, 58]、外山毅氏が RF グループと協力して測定したものである [48]。

この結果は、 Z_L に関しては、長谷川豪志氏らが RF 空洞の 1 ギャップの場合に測定した結果と無矛盾である事が判っている [59]。図 6.4 の左図が示す 1.85MHz の鋭いピークは基本モードに対応するもので、RF 空洞の高次モードによるビームの不安定性の考慮をするときには除外する。

横方向インピーダンス Z_T を透過係数 S_{12} を測定することで、低周波側で正確に求めることは一般に非常に難しく、この測定でも、元々の $\Re[Z_T]$ は全体に負側にふれていた。これはノイズによるベースラインが正確に引ききれていないためである。ここでは、growth rate が評価できないので、ここでは、 $\Re[Z_T]$ が、周波数 f が零になるに従って、零に近づくように全体に $19k\Omega/m$ ほどかさ上げをすることにした。それを表示したものが図 6.4

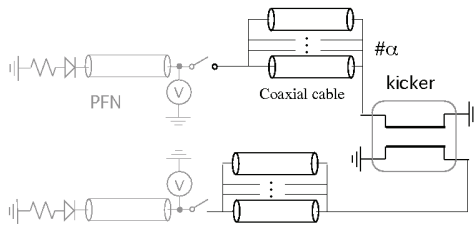


図 6.5: キッカー電磁石の構成。右図は、RCS キッカー電磁石本体。

の右図である。

6.8 キッカーインピーダンス:

最後にキッカーインピーダンスについて指摘することにする。キッカーとはビームをリングから磁場の力で蹴りだす(あるいは蹴り入れる)装置で [60]、J-PARC の RCS には 8 台置かれており、MR には 8 台(改造された 3 台の入射キッカーと 5 台の速い取り出し用キッカー)が用意される予定である。図 6.5 の左図が示すようにキッカー磁石は、同軸ケーブルでサイラトロンと結合しており、ビームとうまく同期してサイラトロンがアクティブになって、ビームはリングから蹴りだされたり、蹴り入れられたりする。しかし、それ以外のビームが周回している時にも、ビームによって誘起された電流が誘導磁場を発生させ、ビームに影響を与える。

キッカー磁石の本体は、フェライトが金属板でサンドウィッチされた構造が縦方向に周期的に並んでいるのが特徴で、上下にやはり金属のしきり板があるのが標準的である。

このしきり板が縦方向のインピーダンスを下げる上で重要で、Lambertson の flux break と呼ばれている [61]。これが必要なのは、キッカー自身がつくる横方向の磁場が、しきり板とは無関係に励起されるのに対して、しきり板がないと、ビームの作る磁場が、ビームを中心に同軸上に励起されてフェライトの効果で、強い B -field が生じてしまうからである。このしきり板は、完全導体が高周波磁場を通さないという性質を使って、それが起こるのを防いでいる。

キッカーは図 6.5 が示すように複雑な装置なので、このインピーダンスも測定で求めることが多い [62]。図 6.6 に縦方向のインピーダンスと横方向の RCS のキッカーのインピーダンスの実部を示す [63, 64, 65]。特徴的なのは、インピーダンスにスパイクが見えることである。これは RCS のキッカーの場合、キッカーがアクティブで

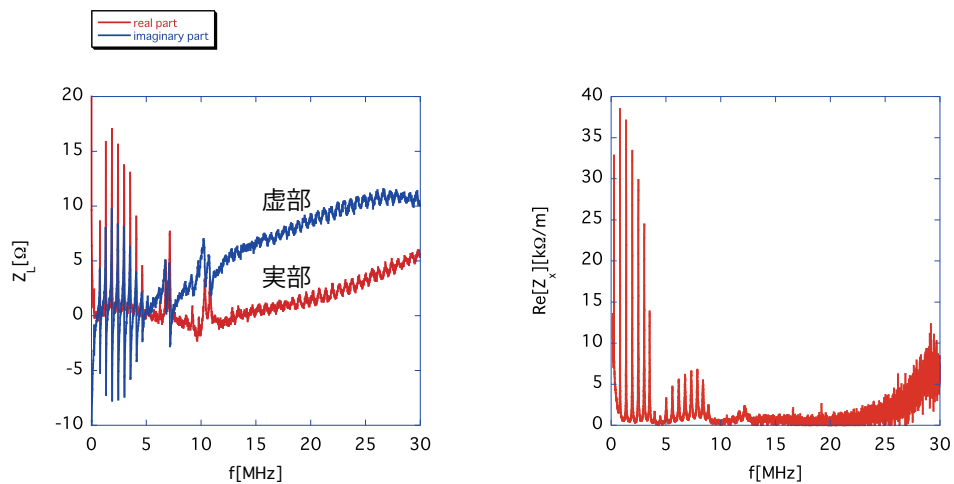


図 6.6: RCS のキッカー 1 台の縦方向インピーダンスの実部と虚部 (左図) 及び横方向インピーダンスの実部 (右図)。

ない状況 (ビームが周回している時) で、図 6.5 の左図が示すように、キッカーの片端がショート、もう一端が同軸ケーブルを介してオープンになっているからである。そのため、ビームによって誘起された電流が同軸ケーブルの中を行ったり来たりするのが原因である。

これを軽減させる一つの方法がショートしている側にキッカーの特性インピーダンスとマッチした matched resistor をつけるやり方で、MR の入射キッカーはその方法でインピーダンスを下げている。図 6.7 が MR の入射キッカー 3 台のインピーダンスの実部の測定値で [46, 49]、図 6.6 のような激しいスパイク構造がないことが判る。

表 6.2 と 6.3 をみると判るように、RCS のインピーダンスの中では、このインピーダンスが圧倒的であることが判る。MR でも、現状 SUS のレジスティブウォールインピーダンスの効果 (セクション 6.2 参照) に次いでこの効果が大きいことが判っており、インピーダンス低減に向けて今年 (2010 年) の夏に改造が進められている。

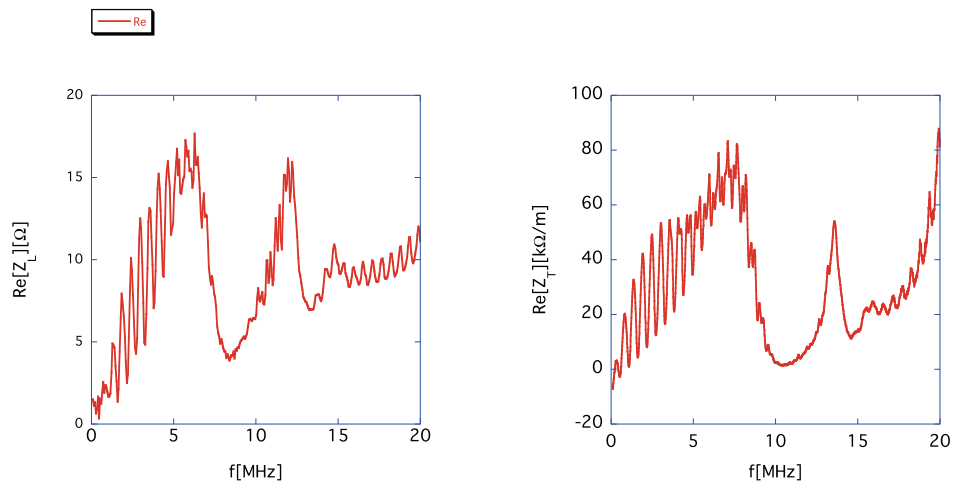


図 6.7: MR の入射キッカー 3 台の縦方向インピーダンスの実部 (左図) 及び横方向インピーダンスの実部 (右図)。

第7章 J-PARC のビームの安定性の評価

この章では、前章で得られた縦横のインピーダンスと Keil-Schnell criterion(式 (4.28)-(4.82)) を比較することで単バンチビーム不安定性の評価を行い、式 (5.52)-(5.131) を使って、マルチバンチビーム不安定性の評価を行う。Keil-Schnell criterion を含めた単バンチビームの不安定性については表 6.2, 6.3, 6.5, 6.6 に纏められている。以下、RCS, MR に関して詳細を見ていくことにする。

7.1 RCS のビーム不安定性

RCS に関しては、キッカーインピーダンスが支配的なので、インピーダンスの源はこれのみだと考えて問題ない [42]。まず、縦方向の不安定性について見てみることにする。8 台の RCS のキッカーインピーダンスについて、 $(Z_L(n\omega_0)/n)$ を記したものが、図 7.1 である。表 6.2 の $(Z_L/n)_{th}$ と比べると、入射部付近では全く問題ないことが判る。slippage factor の影響で出射部付近で、厳しくなっていくが、式 (4.15) を使って厳しめに評価してみても、大きくても 10^{-8} Hz 程度の growth rate と評価できる。これは RCS の ramping time 20 ms (50Hz) よりも十分小さいので、縦方向の単バンチビームの microwave instability は無視できると考えてよい。

次に、マルチバンチビーム不安定性について、式 (5.52) で評価してみる。一番厳しい growth rate を示すのは、400MeV の入射時なので、その時の結果のみを図 7.2 に記すことにする。最大で約 13Hz を示していることが判る。この時の A.Hofmann の stability condition を参考文献 [1] にのっているデータを使って求めると、

$$\tau_m^{-1} < 1.3\text{kHz}, \quad (7.1)$$

となる。よって、縦方向のマルチバンチ不安定性も RCS では問題にはならない。

次に RCS の横方向ビーム不安定性について考える。表 6.3 をみて直ちに判るのは、空間電荷効果の影響で直接的には、この条件はすでに破っているという事である。但し、セクション 4.3 でも述べたように、インピーダンスの実部が調整できていれば、インピーダンスの虚部は直接的には問題にはならない。

そこで、再び、キッカー 8 台分でインピーダンスがどのようになるかを横軸を時間にとって考えてみる。ここで、式 (4.82) がバンチしたビームに適應できるためには、ビームが不安定になる波長がバンチ長に比べて短かい

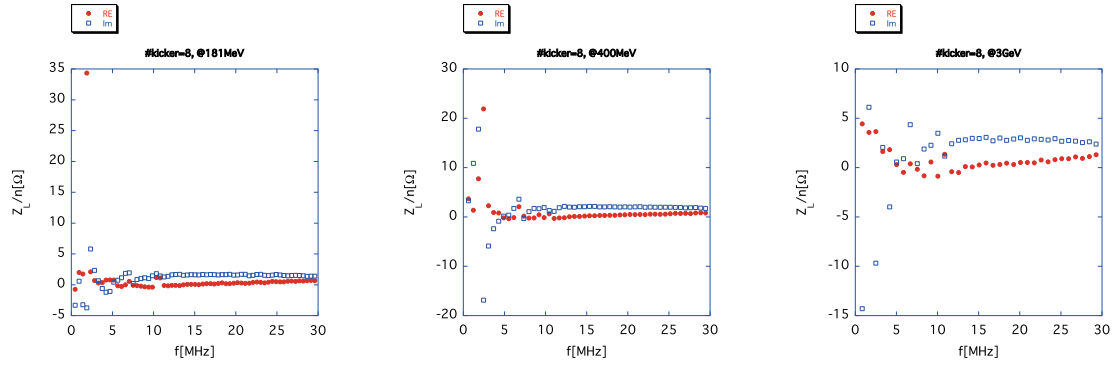


図 7.1: 8 台の RCS のキッカーインピーダンスを入力にして、 $(Z_L(n\omega_0)/n)$ を記したもの。左から、180MeV、400MeV、3GeV 時のもの。

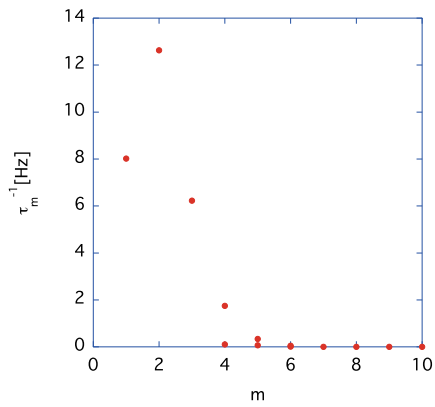


図 7.2: 8 台のキッカーのインピーダンスを入力にして得た 400MeV 時の縦方向の growth rate τ_m^{-1} 。

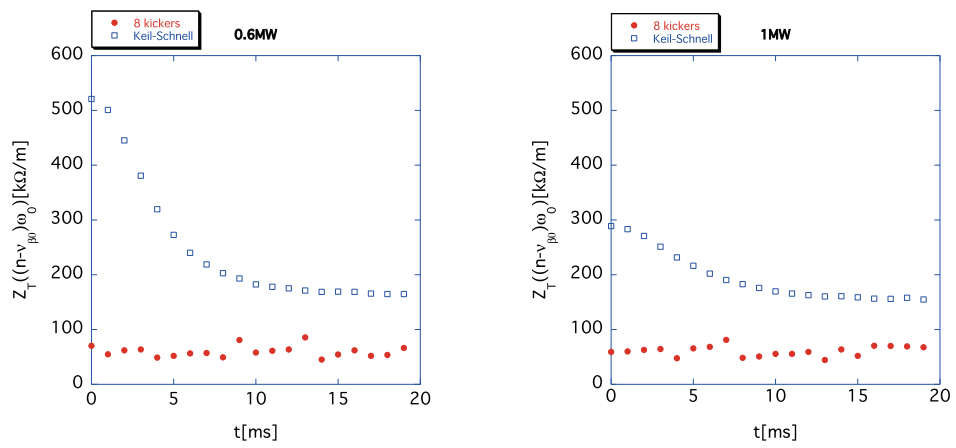


図 7.3: 8 台のキッカーの場合の $\Re[Z_T((n - \nu_{\beta 0})\omega_0)]$ の最大値 (塗りつぶし点) と $\nu_{\beta 0} = 6.45, FS = 1$ の時の式 (4.82) (白抜き点) を横軸を RCS の加速時間 (20ms) にして記したもの。左図が 0.6MW ビーム (181MeV 入射), 右図が 1MW ビーム (400MeV 入射) の場合。

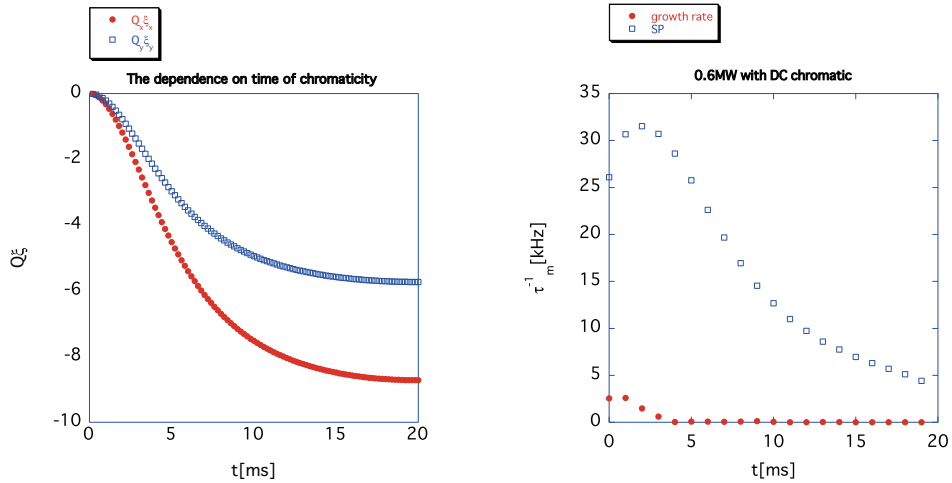


図 7.4: 入射エネルギーでクロマティシティを DC 電源で補正した時のクロマティシティの (時間) 変化 (左図) とその時に 0.6MW 運転したと仮定した場合のビームの growth rate(塗りつぶし点) と式 (5.139) を使って得られた空間電荷効果による ベータトロン振動幅 $\Delta\omega_{SP}/4$ (白抜き点)。

必要があるので、横方向のインピーダンスを評価する時、 n は

$$n > \nu_\beta + \frac{c\beta}{\tau_z f_0}, \quad (7.2)$$

を満たさなくていけないことに注意することにする (縦の場合には、 $n > c\beta/\tau_z f_0$ に変更すればよい)。これを満たす n の中で $\Re[Z_T((n - \nu_{\beta 0})\omega_0)]$ が最大のものを横軸を時間にしてプロットしてみることにする。結果が図 7.3 に示したもので、左図が 0.6MW ビームの、右図が 1MW ビームでの $\Re[Z_T((n - \nu_{\beta 0})\omega_0)]$ である。白抜き点が式 (4.82) で $\nu_{\beta 0} = 6.45, FS_{x,y} = 1$ の条件での値で、塗りつぶし点が 8 台のキッカーのインピーダンスの実部を記してある。1MW ビームの場合でも、Keil-Schnell criterion 以下になることが判る。ただ、出射部付近で非常に余裕があるわけではないので、ビームの縦方向の分布については注意を払う必要がある。

縦方向の場合と同様に横方向についてもマルチバンチ不安定性の議論を式 (5.131) を使って行うことにする。その前に、現在の RCS のビーム状況について考えてみる。現在、RCS は 300kW 相当のビームをビームを不安定にさせることなく打つ事ができている。ただし、チューンは $\nu_{\beta x} = 6.45, \nu_{\beta y} = 6.45$ でクロマティシティは、DC 電源を使って入射部だけ補正されている (加速時間全般に渡ってクロマティシティを補正するには AC 電源にする必要がある)。この DC 電源というのがポイントで、この影響で図 7.4 の左図が示すようにエネルギーが上が

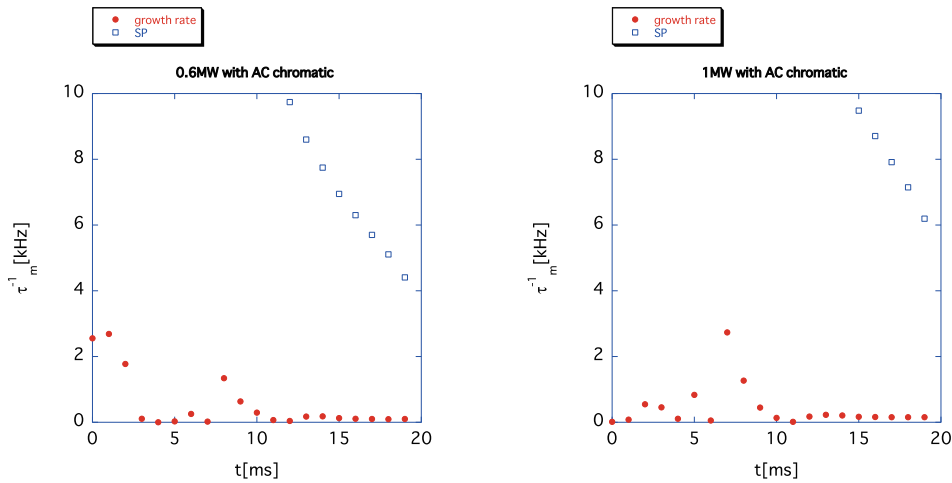


図 7.5: $\nu_{\beta 0} = 6.45$ の時、8 台のキッカーのインピーダンスを入力にして得た横方向の growth rate τ_m^{-1} の時間変化。左図が 0.6MW(181MeV 入射) でクロマチシティが加速全般 (20ms) に渡って AC 的に補正されている場合。右図が 1MW(400MeV 入射) でクロマチシティが加速全般 (20ms) に渡って AC 的に補正されている場合。塗りつぶし点がキッカーによる growth rate、白抜き点が空間電荷効果によるベータトロン振動の幅。

るに従って、クロマチシティは補正されなくなっていく。これは、ビームを安定化させるという観点からは有利に働く。それを示したのが、図 7.4 の右図で、これは 0.6MW 運転をした場合の計算値を示している。塗りつぶし点が growth rate、白抜き点が式 (5.139) を使って計算した空間電荷効果によるベータトロン振動幅 $\Delta\omega_{SP}/4$ を記している。最初、数 kHz 程度あった growth rate は、クロマチシティが負側にふれることで、減衰していく。しかし、5ms までの間にビームが不安定になる現象はみられていないので、この観測事実は、空間電荷効果が引き起こすパンチ内でのインコヒーレントなベータトロン振動の幅がビームの安定化に寄与していることを示唆している [43, 66]。

さて、クロマチシティを AC 電源で補正しないとアーク部でビームがロスするという事情があり、今年 (2010 年) の夏に 6 極磁石に AC 電源が取り付けられる。そこで、クロマチシティをフル補正した場合にどのようなか予想してみることにする。式 (5.131) を使って、横軸時間、縦軸 growth rate の図を 0.6MW(181MeV 入射) と 1MW ビーム (400MeV 入射) の場合各々について書いてみることにする。この時、クロマチシティは加速全般に渡って AC 的にフル補正してあると仮定してある。図 7.5 の左図が 0.6MW (181 MeV 入射) の場

合、右図が 1MW(400MeV 入射) の場合である。塗りつぶし点がキッカーによる growth rate、白抜き点が式 (5.138) を使って得た空間電荷効果によるベータトロン振動の幅 $\Delta\omega_{SP}/4$ である。まず、判るのは、このチューン ($\nu_{\beta 0} = 6.45$) では、0.6MW の時には、加速初期と中盤で、1 MW の時には、加速中盤で、数 kHz をこえる growth rate を超えるところが出るということである。空間電荷効果によるビームの安定化が機能すれば、この場合でもビームは不安定にならないはずであるが、この効果によるビームの安定化は十分検証されたとは言えない。空間電荷効果によるビームの安定化は、シミュレーション上では、それらしい振る舞いがみえるが [43]、今度の 6 極電源の改造で、クロマティシティがフル補正した時、どのような結果がでるか注視する必要がある。結果次第では、クロマティシティの最適化やキッカーの改造などの対策が必要になるかもしれない。

7.2 MR のビームの不安定性

MR では、SUS チェンバーの示す resistive wall impedance, 3 台の入射キッカー及び 5 台の速い取り出し用キッカーが作るインピーダンス、5 台の RF 空洞のインピーダンスが主なインピーダンス源である。小さい方から順に各々について見に行くことにする。

5 台の RF 空洞の効果:

まず、単バンチのビームの不安定性について考えることにする。式 (7.2) の条件を満たす n について考えることにし、縦方向については、基本モードの効果は無視することにする。図 7.6 に結果を示す。横軸は、運動エネルギー (加速中の時間に対応) を示している。縦方向については左図で $|Z_L(n\omega_0)/n|$ を示し、横方向については、右図で $\Re[Z_T((n - \nu_{\beta 0})\omega_0)]$ を記している (n を振って同時刻で (同エネルギーで) 最大のものをプロットしている。)。縦横ともに、5 台の RF 空洞による microwave instability は無視できることが判る。

次に、マルチバンチ不安定性について考える。式 (5.52) を使って評価すると、縦方向の growth rate を評価すると 3GeV 付近で 7Hz、50GeV 付近で 5Hz 程度であるが、A.Hofmann の stability condition (式 (5.56)) を評価すると、各々につき、746Hz 以下、60Hz 以下となるので、縦方向に関してマルチバンチ不安定性は問題にならない。

横方向のマルチバンチ不安定性の growth rate については、クロマティシティをフル補正した場合に式 (5.131) を使って評価した結果を図 7.7 に示す。MR では、周回周波数が、加速中に RCS ほどは変わらないので、この 5 台の RF 空洞のインピーダンスを入力にした場合、エネルギーが上がるほど、growth rate がさがるという素直な動きをする。横方向のマルチバンチ不安定性については、後で総合的な議論をするが、一つの目安として、こ

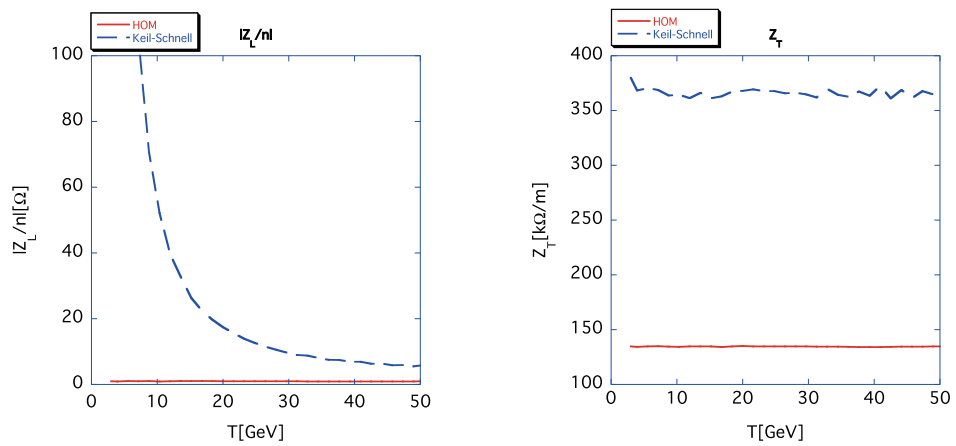


図 7.6: 5 台の RF 空洞の場合の縦方向と横方向のインピーダンスと Keil-Schnell criterion の関係。横軸が運動エネルギー。左図で実線が空洞の $|Z_L/n|$ を記している、点線が式 (4.28) から得られた Keil-Schnell の条件。右図は、 $\Re[Z_T((n - \nu_{\beta 0})\omega_0)]$ (実線) と $\nu_{\beta 0} = 22.37, FS = 1$ の時の Keil-Schnell の条件式 (4.82) (点線) を記したもの。

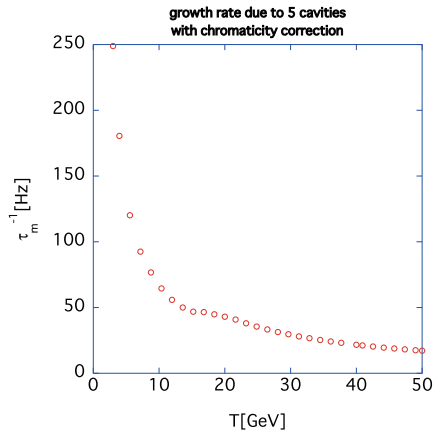


図 7.7: 5 台の RF 空洞の場合の横方向のマルチバンチ不安定性。但し、クロマティシティは零。

の図から約数 100Hz の growth rate が見込まれることが判る。

3 台の入射キッカーに起因する効果:

図 7.8 に単バンチのビームの不安定性についての結果を示す。横軸は、運動エネルギーを示している。縦方向については左図に $\Re[Z_L(n\omega_0)]/n$ (n を振って同時刻で (同エネルギーで) 最大のものを) を示し^a、横方向については [49]、右図に $\Re[Z_T((n - \nu_{\beta 0})\omega_0)]$ (n を振って同時刻で (同エネルギーで) 最大のものを) をプロットしている。 Z_L の虚部が実部と同じオーダーだと仮定すると、縦横ともに、Keil-Schnell criterion (点線) 以下であることが判る。

次に、マルチバンチ不安定性について考える。式 (5.55) を使って評価すると、縦方向の growth rate を評価すると 0.1Hz 程度であるが、A.Hofmann の stability condition (3GeV 付近で 746Hz、50GeV 付近で 60Hz) 以下で、縦方向に関してマルチバンチ不安定性は問題にならない。

横方向のマルチバンチ不安定性は、クロマティシティをフル補正した場合について、式 (5.131) を使って評価した結果を図 7.7 に示す。この図から、3 台の入射キッカーも約数 100Hz の growth rate を引き起こすと見込まれる。

^aこの測定は、 Z_L の実部からキッカーの発熱量を見積もるのが目的だった為、 Z_L の虚部については信頼できるデータをとっていない [46]。

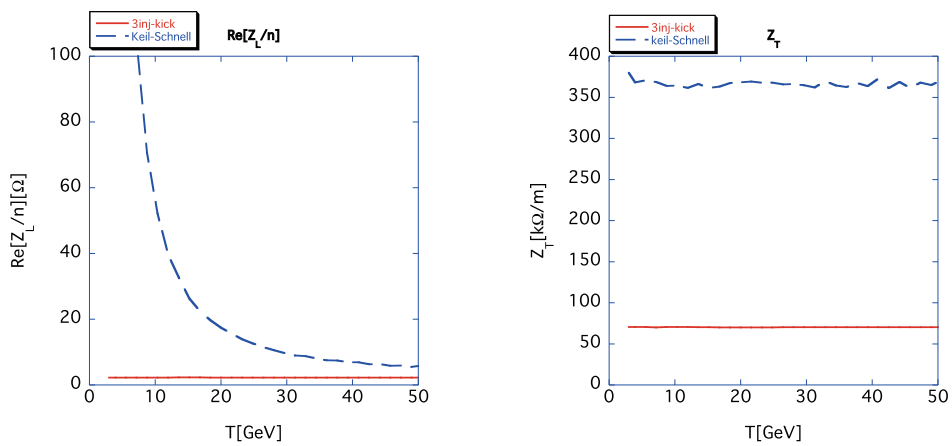


図 7.8: 3台の入射キッカーの縦方向と横方向のインピーダンスと Keil-Schnell criterion の関係。横軸が運動エネルギー。左図で実線がキッカーの $\Re[Z_L/n]$ を記していて (虚部についてはデータがないため)、点線が式 (4.28) から得られた Keil-Schnell の条件。右図は、 $\Re[Z_T((n - \nu_{\beta 0})\omega_0)]$ (実線) と $\nu_{\beta 0} = 22.37, FS = 1$ の時の Keil-Schnell の条件式 (4.82) (点線) を記したものの。

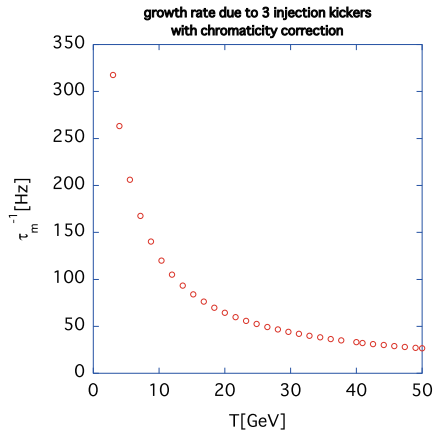


図 7.9: 3 台の入射キッカーに起因する横方向のマルチバンチ不安定性。但し、クロマティシティは零。

5 台の速い取り出し用キッカーに起因する効果:

改造計画進行中のため、残念ながらこの講義までには測定結果を纏めることができなかった [47]。後の全体のまとめでは、3 台の入射キッカーの測定結果を 5/3 倍にして、大雑把に評価している。

SUS 抵抗性チェンバー (resistive wall impedance) の効果:

まず、表 6.5 を見ると判るように縦方向については、microwave instability は問題にならない。また、縦方向のマルチバンチ不安定性の growth rate は約 10^{-3} Hz と評価できるので、A.Hofmann の stability condition(3GeV 付近で 746Hz、50GeV 付近で 60Hz) 以下で問題にはならない。

横に関しては表 6.6 を見ると一見 Keil-Schnell criterion を破っているように見える。しかし、式 (7.2) を満たすものだけ考えると図 7.10 のようになり、microwave instability は問題にならない。問題になるのは、マルチバンチ不安定性で、図 7.11 が示すように、クロマティシティ零、 $\nu_{\beta,x} = 22.37$ の条件で 1kHz を超える。

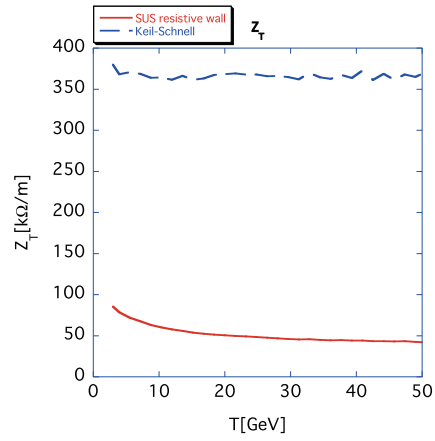


図 7.10: SUS の resistive wall impedance が引き起こす横方向の単バンチ不安定性。実線が SUS-resistive wall impedance、点線が横方向の Kel-Schnell criterion。

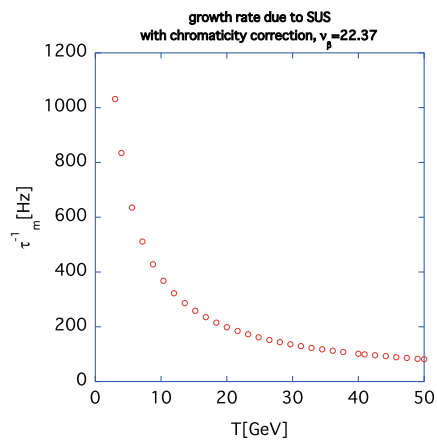


図 7.11: SUS の resistive wall impedance が引き起こす横方向のマルチバンチ不安定性。但し、クロマティシティ零、 $\nu_{\beta,x} = 22.37$ 。

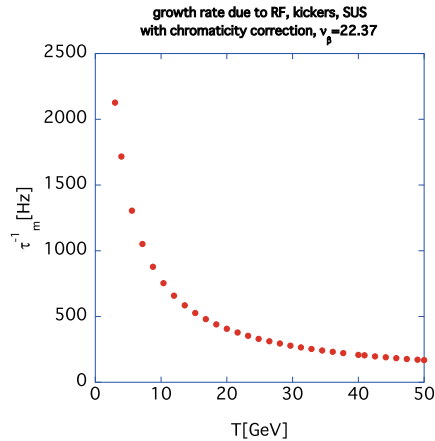


図 7.12: RF 空洞、キッカー、SUS resistive wall impedance が引き起こす横方向のマルチバンチ不安定性。但し、クロマティシティ零、 $\nu_{\beta,x} = 22.37$ 。

MR のビーム不安定性の総合的な評価:

現状 MR のビーム不安定性に関して、最も深刻だと考えられているのは、横方向のマルチビーム不安定性である。図 7.12 をみると判るように、RF 空洞、キッカー、SUS resistive wall impedance をまとめて考えると、空間電荷効果によるビームの安定化の効果を無視する限り、最大 2kHz 程度の growth rate を引き起こす可能性がある。しかし、実際には空間電荷効果によるビームの安定化の効果が入射部付近では期待できるので、加速中盤あたりからその効果が表れると予想される。

ビームが不安定になった場合に備え、横方向ダンパーが必要不可欠だというのは、計画の当初から考えられてきた [8]。これについては、飛山真理氏、帯名崇氏、栗本佳典氏を中心にダンパーの開発が進められている [67]。現在、MR の加速のしない 6 バンチビームのストレージモード運転下で、不安定なビームを意識的に作り、ビームが不安定になったところで、ビームを蹴り返して、ビームロスを低減させる試験に成功している [68]。

もう一つ問題になる可能性があるのは、縦方向の microwave instability である。図 7.13 をみると判るように 40GeV を超えた付近で、Keil-Schnell criterion を破ることが判る。実際大強度ビームを MR で 50GeV まで加速することによって生成するときには、更なるキッカーインピーダンスの低減を図るか、バンチング因子を調整してビームの縦方向分布を変えてみる。等の試行錯誤が必要になるかもしれない。

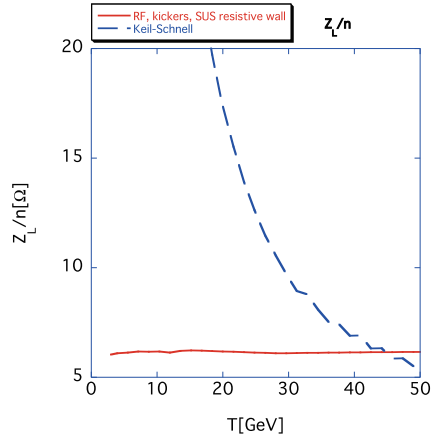


図 7.13: RF 空洞、キッカー、SUS resistive wall impedance(実線) が引き起こす縦方向の単バンチ不安定性。点線が縦方向の Kel-Schnell criterion。

あとがき

私は過去に研究発表の経験はありますが、学生を相手に物事を教えるということに関して、経験もなければ、その事に関するノウハウの教育を受けたこともありません。その意味で、まず、このような素人の話を聞いてくださったことに、学生さんを含めた聴衆の皆様には感謝をしたいと思います。

さて、このように、講義録を作るために過去の文献を読んでみると、第 I 部、第 II 部で紹介したこの分野の基本的な部分の大部分が先人たちの偉大な知性によって築かれたことを改めて思い知らされます。それは、楽しい作業ではありますが、同時に研究とはなんたるか。ということに関しても自省を迫られる場面であります。このような貴重な機会を与えてくださった校長の古屋貴章氏及び山崎良成氏、金正倫計氏を初めとする J-PARC センターの皆様に感謝します。

最後に、この講義を聞いてくださった学生さんの中に将来、独創的な研究を行えて、魅力的な講義を行える人材が生まれれば、それは本当に素晴らしいことだと思います。

付録A チェンバー内部の一般解

マクスウェル方程式はソース項を持った波動方程式として与えられる。今、最終的にインピーダンスを求めたいので解の形として $e^{j\omega t}$ に比例するものをとくに考えると、それは、具体的には以下のようなヘルムホルツ方程式になる。

$$(\Delta + k^2\beta^2)\vec{E} = jk\beta Z_0\vec{j} + \vec{\nabla}(cZ_0\bar{\rho}), \quad (\text{A.1})$$

$$(\Delta + k^2\beta^2)\vec{H} = -\vec{\nabla} \times \vec{j}. \quad (\text{A.2})$$

今後は、軸対称な構造を考える事にして円筒座標系をもちいることにする。今、 $r = r_b, \theta = \theta_b$ の位置にある電荷 q をもった速度 βc の荷電粒子が軸方向に走っている状況を考えると、電荷密度 ρ は

$$\bar{\rho} = \frac{i_m}{r_b^{1+m}} \delta(r - r_b) \delta_p(\theta - \theta_b) \delta(s - \beta ct) = \sum_{m=0}^{\infty} \int \frac{dk}{2\pi} i_m \rho_m, \quad (\text{A.3})$$

$$\rho_m = \frac{1}{\pi r_b^{1+m} (1 + \delta_{m0})} \delta(r - r_b) \cos m(\theta - \theta_b) e^{-jk(s - \beta ct)}, i_m = q r_b^m, \quad (\text{A.4})$$

で与えられる。但し、 $\delta(x)$ は δ -関数、 $\delta_p(\theta)$ は周期 δ -関数、 $\delta_{m,n}$ は Kronecker の δ である。

式 (A.1)-(A.2) の一般解は $i_m \rho_m$ に対する解の重ね合わせで与えられるので、ソース項として特に $i_m \rho_m$ を持つ場合を考えることにする。

これに対するソース場は $m = 0$ に対しては

$$H_r^S = E_\theta^S = H_z^S = 0, \quad (\text{A.5})$$

$$E_z^S = \begin{cases} \frac{jkcZ_0 I_0(\bar{k}r_b)}{2\pi\gamma^2} K_0(\bar{k}r) e^{-jks} & \text{for } r > r_b, \\ \frac{jkcZ_0 K_0(\bar{k}r_b)}{2\pi\gamma^2} I_0(\bar{k}r) e^{-jks} & \text{for } r_b > r, \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\beta}{Z_0} E_r^S = H_\theta^S = \begin{cases} \frac{\beta kc I_0(\bar{k}r_b)}{2\pi\gamma} K_1(\bar{k}r) e^{-jks} & \text{for } r > r_b, \\ -\frac{\beta kc K_0(\bar{k}r_b)}{2\pi\gamma} I_1(\bar{k}r) e^{-jks} & \text{for } r_b > r, \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

$m > 0$ に対しては

$$H_z^S = 0, \quad (\text{A.8})$$

$$E_z^S = \begin{cases} \frac{jkcZ_0 I_m(\bar{k}r_b)}{\pi r_b^m \gamma^2} K_m(\bar{k}r) \cos m(\theta - \theta_b) e^{-jks} & \text{for } r > r_b, \\ \frac{jkcZ_0 K_m(\bar{k}r_b)}{\pi r_b^m \gamma^2} I_m(\bar{k}r) \cos m(\theta - \theta_b) e^{-jks} & \text{for } r_b > r, \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

$$-\frac{Z_0}{\beta} H_r^S = E_\theta^S = \begin{cases} \frac{mcZ_0 I_m(\bar{k}r_b)}{r \pi r_b^m} K_m(\bar{k}r) \sin m(\theta - \theta_b) e^{-jks} & \text{for } r > r_b, \\ \frac{mcZ_0 K_m(\bar{k}r_b)}{r \pi r_b^m} I_m(\bar{k}r) \sin m(\theta - \theta_b) e^{-jks} & \text{for } r_b > r, \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\beta}{Z_0} E_r^S = H_\theta^S = \begin{cases} \frac{\beta kc I_m(\bar{k}r_b)}{2\pi r_b^m \gamma} (K_{m-1}(\bar{k}r) + K_{m+1}(\bar{k}r)) \cos m(\theta - \theta_b) e^{-jks} & \text{for } r > r_b, \\ -\frac{\beta kc K_m(\bar{k}r_b)}{2\pi r_b^m \gamma} (I_{m-1}(\bar{k}r) + I_{m+1}(\bar{k}r)) \cos m(\theta - \theta_b) e^{-jks} & \text{for } r_b > r, \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

で与えられる。但し、 $k = 2\pi f/\beta c$, $\bar{k} = k/\gamma$, $K_m(z)$, $I_m(z)$ は各々変形ベッセル関数である。

従って、 $m = 0$ の時の式 (A.1)-(A.2) の一般解は、

$$E_z = E_z^S + \int_{-\infty}^{\infty} dh A(h) e^{-jhs} \frac{J_0(\Lambda r)}{J_0(\Lambda a)}, \quad (\text{A.12})$$

$$H_\theta = H_\theta^S + \frac{jk\beta}{Z_0} \int_{-\infty}^{\infty} dh A(h) e^{-jhs} \frac{J_1(\Lambda r)}{\Lambda J_0(\Lambda a)}, \quad (\text{A.13})$$

$m > 0$ の時の一般解は

$$E_z = i_m \left[E_z^S + \int_{-\infty}^{\infty} dh A(h) e^{-jhs} \frac{J_m(\Lambda r)}{J_m(\Lambda a)} \cos m(\theta - \theta_b) \right], \quad (\text{A.14})$$

$$H_\theta = i_m \left[H_\theta^S - \int_{-\infty}^{\infty} dh e^{-jhs} \frac{jh}{\Lambda^2} \left(\frac{mB(h)J_m(\Lambda r)}{rJ_m(\Lambda a)} + \frac{k\beta}{Z_0 h} A(h) \frac{\partial J_m(\Lambda r)}{\partial r} \right) \cos m(\theta - \theta_b) \right], \quad (\text{A.15})$$

$$H_z = \int_{-\infty}^{\infty} dh i_m B(h) e^{-jhs} \frac{J_m(\Lambda r)}{J_m(\Lambda a)} \sin m(\theta - \theta_b), \quad (\text{A.16})$$

$$E_\theta = i_m \left[E_\theta^S + \int_{-\infty}^{\infty} dh e^{-jhs} \frac{jk\beta Z_0}{\Lambda^2} \left(B(h) \frac{\partial J_m(\Lambda r)}{\partial r} + \frac{mh}{Z_0 k \beta r} A(h) \frac{J_m(\Lambda r)}{J_m(\Lambda a)} \right) \sin m(\theta - \theta_b) \right], \quad (\text{A.17})$$

となる。但し、 $\Lambda = \sqrt{k^2 \beta^2 - h^2}$ 、 $J_m(z)$ はベッセル関数である。

付録B 抵抗性チェンバーの横方向インピーダンス

縦方向の長さが g で半径が a 、材質の電気伝導率が σ_c の抵抗性チェンバーの横方向インピーダンスを求める。

$m = 1$ の時の一般解はチェンバーの内側 ($r < a$) で、

$$E_z = i_1(E_z^S + A(k)I_1(\bar{k}r)) \cos(\theta - \theta_b)e^{-jks}, \quad (\text{B.1})$$

$$H_\theta = i_1 \left(H_\theta^S + \frac{j\gamma}{\bar{k}} \left(\frac{B(k)I_1(\bar{k}r)}{r} + \frac{\beta\bar{k}A(k)}{Z_0} I_1'(\bar{k}r) \right) \cos(\theta - \theta_b)e^{-jks} \right), \quad (\text{B.2})$$

$$H_z = i_1 B(k)I_1(\bar{k}r) \sin(\theta - \theta_b)e^{-jks}, \quad (\text{B.3})$$

$$E_\theta = i_1 \left(E_\theta^S - \frac{j\beta\gamma Z_0}{\bar{k}} \left(\bar{k}B(k)I_1'(\bar{k}r) + \frac{A(k)}{Z_0\beta r} I_1(\bar{k}r) \right) \sin(\theta - \theta_b)e^{-jks} \right), \quad (\text{B.4})$$

パイプの金属部 ($a < r < a + t$) では、

$$E_z = (C_3(k)I_1(\nu_2 r) + C_4(k)K_1(\nu_2 r)) \cos(\theta - \theta_b)e^{-jks}, \quad (\text{B.5})$$

$$H_\theta = \frac{jk}{\nu_2^2} \left(\frac{C_1(k)I_1(\nu_2 r) + C_2(k)K_1(\nu_2 r)}{r} + \frac{\sigma\nu_2(C_3(k)I_1'(\nu_2 r) + C_4(k)K_1'(\nu_2 r))}{jk} \right) \times \cos(\theta - \theta_b)e^{-jks}, \quad (\text{B.6})$$

$$H_z = (C_1(k)I_1(\nu_2 r) + C_2(k)K_1(\nu_2 r)) \sin(\theta - \theta_b)e^{-jks}, \quad (\text{B.7})$$

$$E_\theta = -\frac{jk}{\nu_2^2} \left(\frac{C_3(k)I_1(\nu_2 r) + C_4(k)K_1(\nu_2 r)}{r} + \beta Z_0 \nu_2 (C_1(k)I_1'(\nu_2 r) + C_2(k)K_1'(\nu_2 r)) \right) \times \cos(\theta - \theta_b)e^{-jks}, \quad (\text{B.8})$$

チェンバーの外側 ($a + t < r$) では、

$$E_z = i_1 D_4(k)K_1(\bar{k}r) \cos(\theta - \theta_b)e^{-jks}, \quad (\text{B.9})$$

$$H_\theta = \frac{j\gamma}{\bar{k}} \left(\frac{i_1 D_2(k)K_1(\bar{k}r)}{r} + \frac{\beta\bar{k}i_1 D_4(k)}{Z_0} K_1'(\bar{k}r) \right) \cos(\theta - \theta_b)e^{-jks}, \quad (\text{B.10})$$

$$H_z = i_1 D_2(k)K_1(\bar{k}r) \sin(\theta - \theta_b)e^{-jks}, \quad (\text{B.11})$$

$$E_\theta = -\frac{j\beta\gamma Z_0}{\bar{k}} \left(\bar{k}i_1 D_2(k)K_1'(\bar{k}r) + \frac{i_1 D_4(k)}{Z_0\beta r} K_1(\bar{k}r) \right) \sin(\theta - \theta_b)e^{-jks}, \quad (\text{B.12})$$

で与えられる。但し、 $(r_b \cos \theta_b, r_b \sin \theta_b)$ はビーム中心の位置、 $i_1 = qr_b, \omega/c\beta, \bar{k} = k/\gamma, I_n(z)$ と $K_n(z)$ に現れる z は z による微分を示す。

$A(k), B(k), C_1(k), C_2(k), C_3(k), C_4(k), D_2(k), D_4(k)$ は、未定係数で境界条件によって決定される。Panofsky-Wenzel theorem を使って横方向インピーダンスを求め、式 (2.8) で与えられる空間電荷部分を除くと、抵抗性チェンバーの横方向インピーダンス Z_T は

$$Z_{\perp} = -\frac{gA(k)}{2\gamma c\beta} + \frac{gkZ_0I_1(\bar{k}r_b)K_1(\bar{k}a)}{j2\pi\beta r_b\gamma^3I_1(\bar{k}a)}, \quad (\text{B.13})$$

となる。 $r_b \rightarrow 0$ の極限をとると、文献 [18] の式 (13) :

$$Z_T = \frac{jgZ_0\bar{k}^2K_1(\bar{k}a)E_2(\alpha_2 - 1)}{4\pi\beta\gamma^2I_1(\bar{k}a)}, \quad (\text{B.14})$$

を再現する。ここで、 E_2 と α_2 は以下の連立方程式 :

$$\frac{(\nu_2^2 - \bar{k}^2)}{\bar{k}\beta a\nu_2}E_2(1 - \alpha_2) + \left(\nu_2\frac{I_1'(\bar{k}a)}{I_1(\bar{k}a)} - \bar{k}\frac{K_1'(\nu_2a)}{K_1(\nu_2a)}\right)G_2 - \left(\nu_2\frac{I_1'(\bar{k}a)}{I_1(\bar{k}a)} - \bar{k}\frac{I_1'(\nu_2a)}{I_1(\nu_2a)}\right)G_2\eta_2 = 0, \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{aligned} &\left(\beta\nu_2\frac{I_1'(\bar{k}a)}{I_1(\bar{k}a)} + j\frac{Z_0\sigma_c}{\gamma}\frac{K_1'(\nu_2a)}{K_1(\nu_2a)}\right)E_2 - \left(\beta\nu_2\frac{I_1'(\bar{k}a)}{I_1(\bar{k}a)} + j\frac{Z_0\sigma_c}{\gamma}\frac{I_1'(\nu_2a)}{I_1(\nu_2a)}\right)E_2\alpha_2 \\ &\quad + \frac{(\nu_2^2 - \bar{k}^2)}{\nu_2\bar{k}a}G_2(1 - \eta_2) = -\beta\nu_2\left(\frac{K_1'(\bar{k}a)}{K_1(\bar{k}a)} - \frac{I_1'(\bar{k}a)}{I_1(\bar{k}a)}\right), \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

$$\begin{aligned} &\frac{(\bar{k}^2 - \nu_2^2)}{\bar{k}\nu_2\beta(a+t)}\frac{K_1(\nu_2(a+t))}{K_1(\nu_2a)}E_2 - \frac{(\bar{k}^2 - \nu_2^2)}{\bar{k}\nu_2\beta(a+t)}\frac{I_1(\nu_2(a+t))}{I_1(\nu_2a)}E_2\alpha_2 \\ &\quad + \left(\bar{k}\frac{K_1'(\nu_2(a+t))}{K_1(\nu_2a)} - \nu_2\frac{K_1(\nu_2(a+t))}{K_1(\nu_2a)}\frac{K_1'(\bar{k}(a+t))}{K_1(\bar{k}(a+t))}\right)G_2 \\ &\quad - \left(\bar{k}\frac{I_1'(\nu_2(a+t))}{I_1(\nu_2a)} - \nu_2\frac{I_1(\nu_2(a+t))}{I_1(\nu_2a)}\frac{K_1'(\bar{k}(a+t))}{K_1(\bar{k}(a+t))}\right)G_2\eta_2 = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

$$\begin{aligned} &- \left(\nu_2\beta\frac{K_1'(\bar{k}(a+t))}{K_1(\bar{k}(a+t))}\frac{K_1(\nu_2(a+t))}{K_1(\nu_2a)} + j\frac{Z_0\sigma_c}{\gamma}\frac{K_1'(\nu_2(a+t))}{K_1(\nu_2a)}\right)E_2 \\ &\quad + \left(\nu_2\beta\frac{K_1'(\bar{k}(a+t))}{K_1(\bar{k}(a+t))}\frac{I_1(\nu_2(a+t))}{I_1(\nu_2a)} + j\frac{Z_0\sigma_c}{\gamma}\frac{I_1'(\nu_2(a+t))}{I_1(\nu_2a)}\right)E_2\alpha \\ &\quad + \frac{(\bar{k}^2 - \nu_2^2)}{\nu_2\bar{k}(a+t)}\frac{K_1(\nu_2(a+t))}{K_1(\nu_2a)}G_2 - \frac{(\bar{k}^2 - \nu_2^2)}{\nu_2\bar{k}(a+t)}\frac{I_1(\nu_2(a+t))}{I_1(\nu_2a)}G_2\eta_2 = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

を解く事で求まる。但し、 $\nu_2 = \sqrt{k^2 + jk\beta Z_0\sigma_c}$

付録C 抵抗性インサートのインピーダンス

ビームは、

$$j_z = \beta c(1 - \Theta(r - \sigma))e^{-jks + j\omega t} / (\pi\sigma^2), \quad (\text{C.1})$$

で与えられるものとする。ビームの内部 ($r < \sigma$) の電磁場は、

$$E_z = \frac{jk cZ_0}{\gamma^2 \pi\sigma^2} \left(\frac{1}{\bar{k}^2} - \frac{\sigma I_0(\bar{k}r) K_1(\bar{k}\sigma)}{\bar{k}} \right) e^{-jks} + \int_{-\infty}^{\infty} dh A(h) e^{-jhs} \frac{J_0(\Lambda r)}{J_0(\Lambda a)}, \quad (\text{C.2})$$

$$H_\theta = \frac{\beta c}{\pi\sigma} K_1(\bar{k}\sigma) I_1(\bar{k}r) e^{-jks} + \frac{jk\beta}{Z_0} \int_{-\infty}^{\infty} dh A(h) e^{-jhs} \frac{J_1(\Lambda r)}{\Lambda J_0(\Lambda a)}, \quad (\text{C.3})$$

で、外側は ($r > \sigma$)

$$E_z = \frac{jcZ_0}{\pi\sigma\gamma} I_1(\bar{k}\sigma) K_0(\bar{k}r) e^{-jks} + \int_{-\infty}^{\infty} dh A(h) e^{-jhs} \frac{J_0(\Lambda r)}{J_0(\Lambda a)}, \quad (\text{C.4})$$

$$H_\theta = \frac{\beta c}{\pi\sigma} I_1(\bar{k}\sigma) K_1(\bar{k}r) e^{-jks} + \frac{jk\beta}{Z_0} \int_{-\infty}^{\infty} dh A(h) e^{-jhs} \frac{J_1(\Lambda r)}{\Lambda J_0(\Lambda a)}, \quad (\text{C.5})$$

で与えられる。但し、 $\bar{k} = k/\gamma$ 、 $A(h)$ は展開係数、 $J_m(z)$ はベッセル関数、 $\Lambda = \sqrt{k^2\beta^2 - h^2}$ 。場の時間依存性は $e^{j\omega t}$ であてられるものと仮定し、以後省く事にする。

E_z はパイプの内側でインサートの部分を除いて零なので、展開係数 $A(h)$ は

$$\frac{jcZ_0}{\pi\sigma\gamma} I_1(\bar{k}\sigma) K_0(\bar{k}a) e^{-jks} + \int_{-\infty}^{\infty} dh A(h) e^{-jhs} = \begin{cases} \frac{\tilde{V}_1}{2w} & \text{for } -w < z < w \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad (\text{C.6})$$

を満たす。但し、 \tilde{V}_1 は $r = a$ での電圧。ここで、抵抗性インサートの長さ g はチェンバーの半径より十分小さく、 E_z はこのパイプのあるところで一定であると仮定することにした。展開係数 $A(h)$ は電圧 \tilde{V}_1 を使って

$$\frac{jcZ_0}{\pi\sigma\gamma} I_1(\bar{k}\sigma) K_0(\bar{k}a) \delta(h - k) + A(h) = \frac{\tilde{V}_1}{2\pi} \frac{\sin hw}{hw}, \quad (\text{C.7})$$

と書き換えることができる。

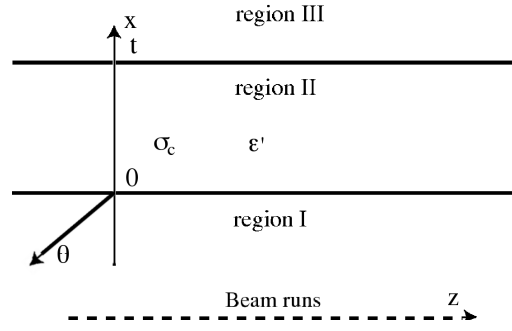


図 C.1: 電気伝導率: σ_c , 非誘電率: ϵ' , 厚み: t の壁。ビームは領域 I を通るとする。

式 (C.7) を式 Eqs.(C.2)-(C.5) に代入すると、ビーム内部 ($r < \sigma$) の電磁場は

$$E_z = \frac{jcZ_0}{\pi\sigma^2\gamma} \left(\frac{1}{\bar{k}} - \sigma I_0(\bar{k}r) K_1(\bar{k}\sigma) - \frac{\sigma I_0(\bar{k}r) I_1(\bar{k}\sigma) K_0(\bar{k}a)}{I_0(\bar{k}a)} \right) e^{-jks} + \frac{\tilde{V}_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dh e^{-jhs} \frac{J_0(\Lambda r)}{J_0(\Lambda a)} \frac{\sin hw}{hw}, \quad (C.8)$$

$$H_\theta = \frac{\beta c}{\pi\sigma} \left(K_1(\bar{k}\sigma) + \frac{I_1(\bar{k}\sigma) K_0(\bar{k}a)}{I_0(\bar{k}a)} \right) I_1(\bar{k}r) e^{-jks} + \frac{\tilde{V}_1 jk\beta}{2\pi Z_0} \int_{-\infty}^{\infty} dh e^{-jhs} \frac{J_1(\Lambda r)}{\Lambda J_0(\Lambda a)} \frac{\sin hw}{hw}, \quad (C.9)$$

ビームの外部 ($r > \sigma$) の電磁場は

$$E_z = \frac{jcZ_0}{\pi\sigma\gamma} I_1(\bar{k}\sigma) \left(K_0(\bar{k}r) - \frac{I_0(\bar{k}r) K_0(\bar{k}a)}{I_0(\bar{k}a)} \right) e^{-jks} + \frac{\tilde{V}_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dh e^{-jhs} \frac{J_0(\Lambda r)}{J_0(\Lambda a)} \frac{\sin hw}{hw}, \quad (C.10)$$

$$H_\theta = \frac{\beta c}{\pi\sigma} I_1(\bar{k}\sigma) \left(K_1(\bar{k}r) + \frac{K_0(\bar{k}a) I_1(\bar{k}r)}{I_0(\bar{k}a)} \right) e^{-jks} + \frac{\tilde{V}_1 jk\beta}{2\pi Z_0} \int_{-\infty}^{\infty} dh e^{-jhs} \frac{J_1(\Lambda r)}{\Lambda J_0(\Lambda a)} \frac{\sin hw}{hw}, \quad (C.11)$$

と書く事ができる。

チェンバーの外側 ($r > a + t$) については Silver と Saunders の理論があって [69]、

$$E_z = \frac{\tilde{V}_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_0^{(2)}(\Lambda r)}{H_0^{(2)}(\Lambda(a+t))} \frac{\sin hw}{hw} e^{-jhs} dh, \quad (C.12)$$

$$H_\theta = j \frac{\beta k \tilde{V}_2}{Z_0 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_1^{(2)}(\Lambda r)}{\Lambda H_0^{(2)}(\Lambda(a+t))} \frac{\sin hw}{hw} e^{-jhs} dh, \quad (C.13)$$

と書く事ができる。但し、 $H_m^{(2)}(z)$ は第 2 種のハンケル関数、 \tilde{V}_2 は $r = a + t$ (t はチェンバーの厚み) での電圧である。ここで、式 (C.12) は抵抗性インサートのある部分を除いてチェンバーの外側で零になっていることを指摘しておくことにする。これらの電圧 \tilde{V}_1, \tilde{V}_2 は境界条件から決められる。

$r < a$ の解と $r > a + t$ の解をつなげるには、 $r = a$ の場と $r = a + t$ の場の関係を知る必要がある。ここで、図 C.1 が示すような 1 次元問題を考えることにする。つまり、厚みが t の壁が自由空間にあるものとする。 $(x < 0)$ の領域を 領域 I, $(0 < x < t)$ の領域を領域 II ($t < x < \infty$) の領域を領域 III と呼ぶ事にする。ビームは領域 I を走っていて、壁の内側 ($x = 0$) に場を誘起させる。その場を $E_z(0)$ 、 $H_\theta(0)$ と書く事にする。ここで抵

抗性のパイプではオームの法則: $\vec{j} = \sigma_c \vec{E}$ が成り立っていると仮定すると、領域 II でのマクスウェル方程式は

$$-\frac{\partial E_z}{\partial x}(x) = -jk\beta Z_0 H_\theta(x), \quad (C.14)$$

$$\frac{\partial H_\theta(x)}{\partial x} = \left(\sigma_c + j \frac{k\beta\epsilon'}{Z_0} \right) E_z(x), \quad (C.15)$$

と書かれる。ここで ϵ は抵抗性パイプの非誘電率であるで、通常式 (C.15) の第一項と比べて無視してよい。解は、

$$E_z(x) = E_z(0) \cosh \sqrt{jk\beta Z_0 \left(\sigma_c + j \frac{k\beta\epsilon'}{Z_0} \right)} x + H_\theta(0) \frac{jZ_0 k\beta \sinh \sqrt{jk\beta Z_0 \left(\sigma_c + j \frac{k\beta\epsilon'}{Z_0} \right)} x}{\sqrt{jk\beta Z_0 \left(\sigma_c + j \frac{k\beta\epsilon'}{Z_0} \right)}}, \quad (C.16)$$

$$H_\theta(x) = H_\theta(0) \cosh \sqrt{jk\beta Z_0 \left(\sigma_c + j \frac{k\beta\epsilon'}{Z_0} \right)} x + E_z(0) \frac{\sqrt{jk\beta Z_0 \left(\sigma_c + j \frac{k\beta\epsilon'}{Z_0} \right)} \sinh \sqrt{jk\beta Z_0 \left(\sigma_c + j \frac{k\beta\epsilon'}{Z_0} \right)} x}{jZ_0 k\beta}, \quad (C.17)$$

のように書く事ができる。

式 (C.4) と (C.5) で与えられるチェンバーの外側の場と式 (C.12) と (C.13) で与えられるチェンバーの外側の場は、式 (C.16) と (C.17) を通して連続でなくてはならない。電圧 \tilde{V}_1 は

$$\tilde{V}_1 = - \frac{\frac{2\gamma c Z_0 I_1(\bar{k}\sigma) e^{-jks}}{jk^2 \sigma a I_0(ka)} \left(1 + \frac{k^2 \beta^2 w \tanh \sqrt{jk\beta Z_0 \left(\sigma_c + j \frac{k\beta\epsilon'}{Z_0} \right)} t}{\pi \sqrt{jk\beta Z_0 \left(\sigma_c + j \frac{k\beta\epsilon'}{Z_0} \right)}} \right)}{J + Y - \left(\frac{\pi \sqrt{jk\beta Z_0 \left(\sigma_c + j \frac{k\beta\epsilon'}{Z_0} \right)}}{k^2 \beta^2 w} + \frac{k^2 \beta^2 w J Y}{\pi \sqrt{jk\beta Z_0 \left(\sigma_c + j \frac{k\beta\epsilon'}{Z_0} \right)}} \right) \tanh \sqrt{jk\beta Z_0 \left(\sigma_c + j \frac{k\beta\epsilon'}{Z_0} \right)} t}, \quad (C.18)$$

と解かれ、 J 、 Y は

$$J = \frac{1}{2w} \int_{-\infty}^{\infty} dh \int_{-w}^w d\xi \frac{e^{-jh(z-\xi)}}{\Lambda} \frac{J_1(\Lambda a)}{J_0(\Lambda a)}, Y = -\frac{1}{2w} \int_{-\infty}^{\infty} dh \int_{-w}^w d\xi \frac{e^{-jh(z-\xi)}}{\Lambda} \frac{H_1^{(2)}(\Lambda(a+t))}{H_0^{(2)}(\Lambda(a+t))}, \quad (C.19)$$

と定義することにする。但し、 z はマッチング点で $-w < z < w$ を満たしていなくてはならない。

式 (C.2) で与えられる E_z を r で平均すると、縦方向インピーダンスがもとまる。以下で与えられる条件

$$\frac{k^2 \beta^2 w^2}{\sqrt{jk\beta Z_0 \left(\sigma_c + j \frac{k\beta\epsilon'}{Z_0} \right)} w} \tanh \sqrt{jk\beta Z_0 \left(\sigma_c + j \frac{k\beta\epsilon'}{Z_0} \right)} t \ll 1, \quad (C.20)$$

はほとんどの場合満たされるので、インピーダンスは

$$Z_L = -\frac{jZ_0}{k\beta\pi\sigma^2} \left(1 - \frac{2K_0(\bar{k}a)I_1^2(\bar{k}\sigma)}{I_0(\bar{k}a)} - 2I_1(\bar{k}\sigma)K_1(\bar{k}\sigma) \right) \mathcal{L} + Z_{insert,L}, \quad (C.21)$$

$$Z_{insert,L} \simeq \frac{4Z_0 I_1^2(\bar{k}\sigma) e^{-jks}}{j\beta\gamma\sigma^2 a \bar{k}^3 I_0^2(\bar{k}a) \left(J + Y - \frac{\pi \sqrt{jk\beta Z_0 \left(\sigma_c + j \frac{k\beta\epsilon'}{Z_0} \right)}}{k^2 \beta^2 w} \tanh \sqrt{jk\beta Z_0 \left(\sigma_c + j \frac{k\beta\epsilon'}{Z_0} \right)} t \right)}, \quad (C.22)$$

とかける。ここで \mathcal{L} はインサートも含めたビームパイプの長さである。式 (C.21) の第一項が非相対論的な空間電荷効果 [13]。第 2 項 $Z_{insert,L}$ が求めるべき結合インピーダンスである。

ベッセル関数の積分は留数積分を実行することで求められる。一方、ハンケル関数の積分は $h = \pm k\beta$ に分岐点があるので、注意が必要である。最終的に、縦方向のインピーダンスは

$$Z_{L,insert} = \frac{4Z_0 I_1^2(\bar{k}\sigma) e^{-jk_s}}{j\beta\gamma\sigma^2 a \bar{k}^3 I_0^2(\bar{k}a) \left(Y_{pole} + Y_{cut} - \frac{\pi \sqrt{jk\beta Z_0} \left(\sigma_c + j \frac{k\beta\epsilon'}{Z_0} \right)}{k^2 \beta^2 w} \tanh \sqrt{jk\beta Z_0} \left(\sigma_c + j \frac{k\beta\epsilon'}{Z_0} \right) t \right)}, \quad (C.23)$$

と書かれる。但し、

$$Y_{pole} = - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\pi a (2 - e^{-j \frac{b_s}{a}(z+w)} - e^{j \frac{b_s}{a}(z-w)})}{w b_s^2}, \quad (C.24)$$

$$Y_{cut} = - \frac{1}{w\pi(a+t)} \int_0^{\infty} d\zeta \frac{2 - e^{-j(z+w)\sqrt{k^2\beta^2 + \frac{\zeta}{(a+t)^2}} - e^{j(z-w)\sqrt{k^2\beta^2 + \frac{\zeta}{(a+t)^2}}}}{\zeta \left(k^2\beta^2 + \frac{\zeta}{(a+t)^2} \right)} H_0^{(1)}(e^{j\frac{\pi}{2}}\sqrt{\zeta}) H_0^{(2)}(e^{j\frac{\pi}{2}}\sqrt{\zeta})} \simeq \frac{2(1-j)}{\sqrt{k\beta w}}, \quad (C.25)$$

$b_s^2 = k^2\beta^2 a^2 - j_{0,s}^2 = -\beta_s^2$, $j_{0,s}$ は $J_0(z)$ の s 番目の零点。 $H_n^{(1)}(z)$ は第一種ハンケル関数。 b_s は、 $j_{0,s} > k\beta a$ に対して、 $-j\beta_s$ で与えられる。

横方向についても同様に求められて、

$$Z_{T,insert} \simeq - \frac{jZ_0 I_1(\bar{k}r_b) e^{-jk_s}}{\beta\gamma r_b a k I_1^2(\bar{k}a) \left(-\frac{\pi \sqrt{jk\beta Z_0} \sigma_c}{k^2 \beta^2 w} \tanh \sqrt{jk\beta Z_0} \sigma_c t + Y'_{pole} + Y'_{cut} \right)}, \quad (C.26)$$

但し、

$$Y'_{pole} = \sum_{s=1}^{\infty} \left[- \frac{\pi a (2 - e^{-j \frac{b'_{1,s}}{a}(z+w)} - e^{j \frac{b'_{1,s}}{a}(z-w)})}{w b_{1,s}^2} + \frac{\pi a J_1(j'_{1,s}) (2 - e^{-j \frac{b'_{1,s}}{a}(z+w)} - e^{j \frac{b'_{1,s}}{a}(z-w)})}{k^2 \beta^2 a^2 w j_{1,s}'^2 J_1''(j'_{1,s})} \right] - \frac{\pi H_1^{(2)}(h'_{1,0}) (2 - e^{-j \frac{d'_{1,0}}{a+t}(z+w)} - e^{j \frac{d'_{1,0}}{a+t}(z-w)})}{k^2 \beta^2 (a+t) w h_{1,0}'^2 H_1''^{(2)}(h'_{1,0})} + \frac{\pi (2 - e^{-jk\beta(z+w)} - e^{jk\beta(z-w)})}{w k^2 \beta^2} \left(\frac{H_1^{(2)}(h'_{1,0})}{(a+t) h_{1,0}'^2 H_1''^{(2)}(h'_{1,0})} - \frac{1}{2a} \right), \quad (C.27)$$

$$Y'_{cut} = - \frac{1}{\pi(a+t)w} \int_0^{\infty} d\zeta \frac{(2 - e^{-j(z+w)\sqrt{k^2\beta^2 + \frac{\zeta}{(a+t)^2}} - e^{j(z-w)\sqrt{k^2\beta^2 + \frac{\zeta}{(a+t)^2}}})}{\zeta \left(k^2\beta^2 + \frac{\zeta}{(a+t)^2} \right)} H_1^{(1)}(e^{j\frac{\pi}{2}}\sqrt{\zeta}) H_1^{(2)}(e^{j\frac{\pi}{2}}\sqrt{\zeta})} + \int_0^{\infty} d\zeta \frac{(e^{-j(z+w)k\beta} + e^{j(z-w)k\beta} - e^{-j(z+w)\sqrt{k^2\beta^2 + \frac{\zeta}{(a+t)^2}} - e^{j(z-w)\sqrt{k^2\beta^2 + \frac{\zeta}{(a+t)^2}}})}{k^2 \beta^2 (a+t) \pi w \zeta^2 H_1^{(1)}(e^{j\frac{\pi}{2}}\sqrt{\zeta}) H_1'^{(2)}(e^{j\frac{\pi}{2}}\sqrt{\zeta})} \simeq 4 \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{2jk\beta w}} + \frac{-2 + 4\sqrt{1 + 2jk\beta w} \sinh^{-1} \frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2k\beta w}} + e^{-j(z+w)k\beta} + e^{j(z-w)k\beta}}{k^2 \beta^2 (a+t)^2 \sqrt{1 + 2jk\beta w}}, \quad (C.28)$$

$b_{1,s} = \sqrt{k^2\beta^2 a^2 - j_{1,s}'^2}$, $b'_{1,s} = \sqrt{k^2\beta^2 a^2 - j_{1,s}'^2}$, $d'_{1,0} = \sqrt{k^2\beta^2 a^2 - h_{1,0}'^2}$, $j_{n,s}$ は $J_n(z)$ の s 番目の零点、 $j'_{1,s}$ は $J_1'(z)$ の s 番目の零点、 $h'_{1,0} = 0.501184 + j0.643545$ は $H_1^{(2)}(z)$ の 0 番目の零点。 $b'_{1,s}$ は $j_{1,s}'^2 > k^2\beta^2 a^2$ の時、 $-j\sqrt{j_{1,s}'^2 - k^2\beta^2 a^2}$ になる。

付録D 縦方向の運動方程式

バンチしたビーム及びバンチ内の粒子の縦方向の運動はシンクロトロン運動と呼ばれる（前者をコヒーレントな振動、後者をインコヒーレントな振動とって区別する場合もあるので注意が必要である）。これに関する運動方程式を導くとき注意しなくてはならないのは、円形加速器において、エネルギーの高い粒子ほど早くもとの位置にかえってくる訳ではないという事実である。それは、偏向磁場が一定のとき、運動量の大きい粒子は、より曲がりにくくなりそれだけながい距離を走るようになるからである。そこで、リングの周長 C と運動量 p の関係を示す式として、

$$\frac{\delta C}{C} = \alpha_p \frac{\delta p}{p}, \quad (\text{D.1})$$

を導入する。この α_p を momentum compaction factor と呼ぶ。

では、粒子がリングを一周する時の粒子ごとの周期の違い δT は運動量によってどのように変わるのかをみることにすると、ビームがリングを一周する時間 T は

$$T = \frac{C}{c\beta}, \quad (\text{D.2})$$

と書けるから、

$$\delta T = \frac{\delta C}{c\beta} - \frac{C}{c} \frac{\delta\beta}{\beta^2}, \quad (\text{D.3})$$

となる。また、 $p = mc\beta\gamma$ という関係式を使うと、

$$\frac{\delta p}{p} = \gamma^2 \frac{\delta\beta}{\beta}. \quad (\text{D.4})$$

式 (D.1) と (D.4) を式 (D.3) に代入すると、

$$\frac{\delta T}{T} = \left(\alpha_p - \frac{1}{\gamma^2}\right) \frac{\delta p}{p} = \eta \frac{\delta p}{p} = \eta \delta, \quad (\text{D.5})$$

が得られる。但し、 $\delta = \delta p/p$ 。この η を slippage factor と呼ぶ。 η が負の時は、運動量が大きければ大きいほど速く帰ってきて、 η が正の時は、運動量が大きければ大きいほど遅く帰って来ることが判る。

さて、加速と同期している同期粒子というのを考え、その粒子からのずれを τ で表すことにする。今、陳栄浩氏

[7] にならって τ が正の時に早くリングを一周する粒子だと定義することにすると、式 (D.2) と (D.5) を使って、

$$\frac{d\tau}{ds} = -\frac{dT}{C} = -\eta \frac{\delta p}{pc\beta} = -\eta \frac{\delta}{c\beta}, \quad (\text{D.6})$$

が得られる。

一方、粒子は加速されているので、同期している粒子からのずれによって得られるエネルギーも同期粒子とは異なる。今、同期している粒子は $eV \sin \phi_s$ のエネルギーをもらおうとすると、それから τ ずれている粒子は、

$$\frac{d\delta E}{ds} = \frac{eV}{C} [\sin(\phi_s - h\omega_0\tau) - \sin \phi_s] \simeq -\frac{eV \cos(\phi_s) h\omega_0}{C} \tau, \quad (\text{D.7})$$

のエネルギーを一周ごとに獲得する。 $dp/p = dE/\beta^2 E$ の関係があるから、式 (D.7) は

$$\frac{d\delta}{ds} = -\frac{eV \cos(\phi_s) h\omega_0}{\beta^2 EC} \tau, \quad (\text{D.8})$$

と書き換えられる。

式 (D.6) と (D.8) を使うと、

$$\frac{d^2\tau}{ds^2} = \eta \frac{1}{c\beta} \frac{eV \cos(\phi_s) h\omega_0}{\beta^2 EC} \tau \equiv -\left(\frac{\nu_{s0}}{R}\right)^2 \tau, \quad (\text{D.9})$$

となり、シンクロトロンチューン: ν_{s0} とシンクロトロン周波数: f_{s0} は

$$\nu_{s0} = \frac{1}{\beta} \sqrt{-\frac{\eta h e V \cos \phi_s}{2\pi E}}, \quad (\text{D.10})$$

$$f_{s0} = \frac{c}{2\pi R} \sqrt{-\frac{\eta h e V \cos \phi_s}{2\pi E}}, \quad (\text{D.11})$$

と書ける。 η の符号によって、安定位相 ϕ_s が変わることがわかる。

又、式 (D.6) を使うと線形近似の範囲でパンチ長 (全長) $\tau_z = 2\hat{\tau}$ は、

$$\tau_z = \frac{|\eta| c \beta}{f_0 \pi \nu_{s0}} \hat{\delta}, \quad (\text{D.12})$$

と与えられる。但し、 $\hat{\delta}$ はビームの運動量振幅。

D.1 シンクロトロン振動幅

ところで、シンクロトロン振動にはその非線形性からくる幅がある [70]。それを見るために、式 (D.7) と (D.8) に戻ることにする。すると、

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} = -\frac{\eta \omega_0 e V}{2\pi \beta^2 E} (\sin(\phi_s - h\omega_0\tau) - \sin \phi_s), \quad (\text{D.13})$$

となる。これを t で積分すると、

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 + \frac{\eta\omega_0 eV}{2\pi\beta^2 E} \tau (\sin(\phi_s - h\omega_0\tau) - \sin\phi_s) = C_0, \quad (\text{D.14})$$

が得られる。従って、

$$\frac{d\tau}{dt} = \pm \sqrt{2C_0 - \frac{\eta\omega_0 eV}{\pi\beta^2 E} \tau (\sin(\phi_s - h\omega_0\tau) - \sin\phi_s)}, \quad (\text{D.15})$$

となる。

この逆数がシンクロトロン周期 T_s であるので、

$$T_s = \int_{\tau_{min}}^{\tau_{max}} \frac{d\tau}{\sqrt{2C_0 - \frac{\eta\omega_0 eV}{\pi\beta^2 E} \tau (\sin(\phi_s - h\omega_0\tau) - \sin\phi_s)}}, \quad (\text{D.16})$$

となる。シンクロトロン周波数 f_s はその逆数 $1/T_s$ から求まる。ここで、 τ_{min} と τ_{max} は

$$2C_0 - \frac{\eta\omega_0 eV}{\pi\beta^2 E} \tau (\sin(\phi_s - h\omega_0\tau) - \sin\phi_s) = 0, \quad (\text{D.17})$$

の解として求まる。一方、 C_0 に関しては、 $\tau_{max} - \tau_{min} = \tau_z$ となるように決める。但し、 τ_z はバンチの全長。

付録E ビームを点電荷と思った時の横方向のマルチバンチモード

M 個のバンチが M 個のバケツに詰まっている状況を考える。この場合、バンチのインデックス n は 0 から $M - 1$ まで歩くことになる。 n 番目のバンチに対する運動方程式は、

$$\frac{d^2 y_n}{dt^2} + \omega_{\beta 0}^2 y_n = \frac{cI_c}{M\beta E_0/e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n'=0}^{M-1} W_1(kC + \frac{n' - n}{M}C) y_{n'}(t - kT_0 - \frac{n' - n}{M}T_0), \quad (\text{E.1})$$

と書かれる。ここで、 $C = \beta cT_0$ はリングの周長、 $I_c = eNM/T_0$ はビームの平均電流、 W_1 は横方向のウェイク関数、 E_0 は粒子のエネルギー、 $\omega_{\beta 0}$ は非摂動のベータトロンの振動数である。 y_n として

$$y_n = \tilde{y}_n e^{j\Omega t}, \quad (\text{E.2})$$

を仮定すると、式は

$$(-\Omega^2 + \omega_{\beta 0}^2) \tilde{y}_n \simeq \frac{cI_b}{M\beta E_0/e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n'=0}^{M-1} W_1(kC + \frac{n' - n}{M}C) e^{-j\omega_{\beta} kT_0} \tilde{y}_{n'} e^{-j\frac{(n' - n)}{M}\omega_{\beta} T_0}, \quad (\text{E.3})$$

と書ける。この式 (E.1) は、行列形式では

$$\mathbf{M}_f \cdot \begin{pmatrix} \tilde{y}_0 \\ \tilde{y}_1 \\ \vdots \\ \tilde{y}_{M-1} \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{E.4})$$

と書き換えられる。但し、 \mathbf{M}_f は

$$\mathbf{M}_f = \begin{pmatrix} -\Omega^2 + \omega_{\beta 0}^2 - \frac{cI_b \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_1(kC) e^{-j\omega_{\beta} kT_0}}{M\beta E_0/e} & \dots & -\frac{cI_b e^{-j\frac{(M-1)\omega_{\beta} T_0}}{M}}{\sum_{k=-\infty}^{\infty} W_1(kC + \frac{(M-1)C}{M}) e^{-j\omega_{\beta} kT_0}}}{M\beta E_0/e} \\ -\frac{cI_b e^{-j\frac{(M-1)\omega_{\beta} T_0}}{M}}{\sum_{k=-\infty}^{\infty} W_1(kC + \frac{(M-1)C}{M}) e^{-j\omega_{\beta} kT_0}}}{M\beta E_0/e} & \dots & -\frac{cI_b e^{-j\frac{(M-2)\omega_{\beta} T_0}}{M}}{\sum_{k=-\infty}^{\infty} W_1(kC + \frac{(M-2)C}{M}) e^{-j\omega_{\beta} kT_0}}}{M\beta E_0/e} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ -\frac{cI_b e^{-j\frac{\omega_{\beta} T_0}}{M}}{\sum_{k=-\infty}^{\infty} W_1(kC + \frac{C}{M}) e^{-j\omega_{\beta} kT_0}}}{M\beta E_0/e} & \dots & -\Omega^2 + \omega_{\beta 0}^2 - \frac{cI_b \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_1(kC) e^{-j\omega_{\beta} kT_0}}{M\beta E_0/e} \end{pmatrix}, \quad (\text{E.5})$$

で与えられる。式 (E.4) がノントリビアルな解をもつには、行列式 $\det(M_f)$ が零にならなくてはならない。行列 M_f は巡環型なので、固有モードは

$$\begin{aligned} \Omega(\mu) &= \omega_\beta + \frac{cI_b}{2\omega_{\beta_0}M\beta E_0/e} \sum_{n=0}^{M-1} e^{-j\frac{2\pi\mu n}{M} - j\frac{\omega_{\beta_0}T_0 n}{M}} \sum_{k=0}^{\infty} W_1(kC + \frac{nC}{M}) e^{-j\omega_\beta kT_0} \\ &= \omega_\beta + \frac{cI_b}{2\omega_{\beta_0}M\beta E_0/e} \left(\sum_{n=1}^{M-1} e^{-j\frac{2\pi\mu n}{M} - j\frac{\omega_{\beta_0}T_0 n}{M}} \sum_{k=0}^{\infty} W_1(kC + \frac{nC}{M}) e^{-j\omega_\beta kT_0} + \sum_{k=1}^{\infty} W_1(kC) e^{-j\omega_\beta kT_0} \right), \quad (\text{E.6}) \end{aligned}$$

と解かれ、固有関数は $e^{-j\frac{2\pi\mu n}{M}}$ と解かれる。ここで、 $s \leq 0$ に対して、 $W_1(s) = 0$ を使った。

関連図書

- [1] For example, JAERI/KEK Joint Project Team, *Accelerator Technical Design Report for J-PARC*, KEK Report 2002-13, JAERI-Tech 20003-044, (2003);<http://j-parc.jp/>
- [2] E. Keil and W. Schnell, CERN Report TH-RF/69-48, (1969)
- [3] V. K. Neil and A. M. Sessler, *Rev. Sci. Instr.* **36**, 429, (1965).
- [4] A. A. Vlasov, *J. Phys.(Moscow)* **9**, 25, (1945)
- [5] A. W. Chao, *Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators*, (Wiley, New York, 1993).
- [6] 鈴木敏郎, OHO 1986, *ビームの不安定性の理論*, (1986)
- [7] 陳栄浩, OHO 2005, *大強度陽子ビームの不安定性*, (2005)
- [8] JHF Project Office, *JHF Accelerator Design Study Report*, KEK Report 97-16, (1997); 筒井裕士, Internal Report, (2001)
- [9] <http://www-proc.kek.jp/>
- [10] W. Panofsky and W. Wenzel, *Rev. Sci. Instr.* **27**, 967, (1956)
- [11] 鈴木敏郎, 第8回理研冬の学校「加速器におけるビーム物理」, *Fundamentals of the theory of collective beam instabilities*, (1998)
- [12] *Handbook of Accelerator Physics and Engineering*, ed. A. W. Chao and M. Tigner, (1999)
- [13] Y. Shobuda, Y. H. Chin and K. Takata, *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **12**, 094401, (2009)
- [14] Y. Shobuda, Y. H. Chin and K. Takata, *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **10**, 044403, (2007)
- [15] B. W. Zotter and S. A. Kheifets, *Impedances and wakes in high-energy particle accelerators*, (World Scientific, Singapore, 1998).

- [16] E. Metral, B. Zotter and B. Salvant, in Proceedings of PAC07, Albuquerque, New Mexico, USA, 4216, (2007)
- [17] Y. Shobuda and K. Yokoya, Phys. Rev. E **66**, 056501, (2002)
- [18] E. Metral, CERN-AB-2005-084, (2005)
- [19] R. Todd *et al*, in Proceeding of Particle Accelerator Conference 2005, 3088, (2005)
- [20] K. Ohmi, T. Toyama and C. Ohmori, Phys. Rev. ST Accel. Beams **5**, 114402, (2002); Phys. Rev. ST Accel. Beams **6**, 029901, (2003)
- [21] R. Nagaoka, private communications in IPAC'10, (2010)
- [22] B. Zotter and F. Sacherer, *Theoretical Aspects of the Behavior of Beams in Accelerators and Storage Rings*, CERN 77-13, 175, (1977)
- [23] K. Bane and M. Sands, Particle Accelerators **25**, 73, (1990).
- [24] Y. H. Chin, *User 's guide for ABCI version 9.4 (Azimuthal beam cavity interaction) and introducing the ABCI Windows application package* , KEK Report 2005-06, (2005); <http://abci.kek.jp/>
- [25] <http://www.gfdl.de>
- [26] O. Napoly, Y. H. Chin and B. Zottor, Nucl. Inst. and Meth. in Phys. Res. A **334**, 255, (1993)
- [27] Y. Shobuda, Y. H. Chin and K. Takata, Phys. Rev. ST Accel. Beams **11**, 011003, (2008)
- [28] For example, T. D. Frank, *Nonlinear fokker-planck equations : fundamentals and applications*, (Berlin, Springer, 2005)
- [29] C. N. Lashmore-Davies, CERN 81-13, (1981)
- [30] N. N. Bogoliubov, Journal of Experimental and Theoretical Physics (in Russian) **16** (8), 691, (1946); N. N. Bogoliubov, Journal of Physics USSR **10** (3), 265, (1946); N. N. Bogoliubov, K. P. Gurov, Journal of Experimental and Theoretical Physics (in Russian) **17** (7), 614, (1947); J. Yvon, *Theorie Statistique des Fluides et l 'Equation et l 'Equation d 'Etat* (in French), Actes scientifique et industrie. 203 Paris : Hermann, (1935); J. G. Kirkwood, The Journal of Chemical Physics **14** (3), 180, (1946); J. G. Kirkwood, The Journal of Chemical Physics **15** (1), 72, (1947); M. Born and H. S. Green, Proc. Roy. Soc. A **188**, 10, (1946)

- [31] C. E. Nielsen, A. M. Sessler and K. R. Symon, in Proceedings of 1959 CERN Accelerator Conference, 239, (1959)
- [32] L. D. Landau, J. Phys. (Moscow) **10**, 25, (1946)
- [33] A. G. Ruggiero and V. G. Vaccaro, CERN-ISR-TH/68-33, (1968)
- [34] K. Hubner and V. Vaccaro, CERN-ISR-TH/70-44, (1970)
- [35] K. Y. Ng, Chapter 14 in FERMILAB-TM-2169, *Proton driver study. II. (Part 1)* G.W. Foster, W. Chou, E. Malamud, (ed.), (Fermilab) , (2002)
- [36] T. Suzuki, Y. H. Chin and K. Satoh, Particle Accelerators **13**, 179, (1983)
- [37] F. Sacherer, CERN/SI-BR/72-5, (1972)
- [38] A. Hofmann, *Theoretical Aspects of the Behavior of Beams in Accelerators and Storage Rings*, CERN 77-13, 139, (1977)
- [39] F. Sacherer, in Proceedings of 1973 Particle Accelerator Conference, San Francisco, IEEE Trans. Nucl. Sci. NS-20, 3, 825, (1973)
- [40] T. Toyama, D. Arakawa, S. Igarashi, J. Kishiro, K. Koba, E. Nakamura, K. Takayama and M. Yoshii, in: Workshop on Instabilities of High Intensity Hadron Beams in Rings, Vol. **496**, AIP Conf. Proc., BNL, Upton, N.Y., U.S.A., 182, (1999)
- [41] R. Cappi, Part. Accel. **50**, 117, (1995)
- [42] Y. H. Chin, K. Takata, T. Toyama, Y. Shobuda and J. Kamiya, in Proceedings of HB2008, Nashville, Tennessee, USA, WGA01, (2008)
- [43] Y. Shobuda, Y. H. Chin and M. Ikegami, in Proceedings of Particle Accelerator Conference (PAC 2009), Vancouver, BC, Canada, FR5RFP072, (2009)
- [44] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of mathematical functions—with formulas, graphs, and mathematical tables*, Dover Pub., New York, (1974)
- [45] Y. H. Chin, S. Lee, K. Takata, T. Toyama, Y. Shobuda and H. Tsutsui, in Proceedings of HB2006, Tsukuba, Japan, 125, (2006)

- [46] 外山毅, 私信, "The longitudinal impedance of MR injection kicker, measured with the single wire method by T. Toyama, Y. Kurimoto, T. Murasugi, K. Ishii and NAT-Group^a (Kobayashi, Nakura, Onodera, Nemoto, Iwama and Suzuki) on 29th July 2010", (2010)
- [47] 外山毅, 私信, " The impedances of FX kickers will be measured in August 2010", (2010)
- [48] 外山毅, 私信, " The MR-cavitiy impedances measured by T. Toyama and RF-Group on 3th September 2008", (2010)
- [49] 外山毅, 私信, "The transverse impedance of MR injection kicker, measured with the twin-wire method by T. Toyama, Y. Kurimoto, T. Murasugi, K. Ishii and NAT-Group^a(Nakura, Onodera, Nemoto and Koizumi) on 30th July 2010", (2010)
- [50] Y. Shobuda, Y. Irie and S. Igarashi, *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **12**, 032401, (2009)
- [51] M. Kinsho *et al*, *J. Vac. Sci. Technol.* **A20**, (3), 829, (2002); M. Kinsho *et al*, in *Proceeding of Particle Accelerator Conference 2005*, 2604, (2005)
- [52] Y. Shobuda, Y. H. Chin, K. Ohmi and T. Toyama, in *Proceedings of Particle Accelerator Conference (PAC 05)*, Knoxville, Tennessee, 1898, (2005)
- [53] S. S. Kurennoy and G. T. Stupakov, *Parti. Accel.* **45**, 95, (1994)
- [54] R. L. Gluckstern, *Phys. Rev. A* **46**, 1106, (1992)
- [55] S. S. Kurennoy, SSCL-636, (1993)
- [56] N. A. McDonald, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, MTT-**33**,1146, (1985); *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, MTT-35, 20, (1987)
- [57] K. Yamamoto, *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **11**, 123501, (2008)
- [58] 外山毅, OHO 2009, "ビームインスツルメント", (2009)
- [59] K. Hasegawa, K. Hara, M. Nomura, C. Ohmori, A. Schnase, F. Tamura, M. Toda, M. Yamamoto and M. Yoshii, *HOM analysis of Magnetic Alloy Cavity*, in *proceedings of the 5th Annual Meeting of Particle Accelerator Society of Japan and the 33rd Linear Accelerator Meeting in Japan*, Higashihi-Hiroshima, Japan, WP053, (2008)

^aNippon Advance Technology Ltd.

- [60] For example, J. Kamiya, T. Takayanagi and M. Watanabe, Phys. Rev. ST Accel. Beams, **12**, 072401, (2009)
- [61] F. Voelker and G. Lambertson, 851, PAC 1989, (1989)
- [62] L. S. Waling, D. E. MaMurray, D. V. Neuffer and H. A. Thiessen, Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A, **281**, 433, (1989)
- [63] T. Toyama, K. Ohmi and Y. Shobuda, in Proceedings of the 9th European Particle Accelerator Conference (EPAC 2004), Lucerne, Switzerland, 1336 (2004)
- [64] T. Toyama, Y. Hashimoto, Y. Shirakabe, J. Kamiya and Y. Shobuda, in Proceedings of HB2006, Tsukuba, Japan, TUBX03, (2006)
- [65] Y. Shobuda, T. Toyama, J. Kamiya and M. Watanabe, in Proceedings of the 1st International Particle Accelerator Conference (IPAC 2010), Kyoto, Japan, 2024, (2010)
- [66] M. Blaskiewicz, Phys. Rev. ST Accel. Beams **1**, 044201 (1998)
- [67] M. Tobiyama, T. Obina, Y. H. Chin, Y. Shobuda, T. Toyama, M. Tejima and Y. Kurimoto, in Proceedings of the 1st International Particle Accelerator Conference (IPAC 2010), Kyoto, Japan, 2767, (2010)
- [68] Y. Kurimoto, M. Tobiyama, T. Obina, Y. Shobuda, Y. H. Chin and T. Toyama, *Bunch-by-bunch Feedback System for J-PARC Main Ring*, in proceedings of the 7th Annual Meeting of Particle Accelerator Society of Japan, Himeji, Japan, WEPS024, (2010)
- [69] S. Silver and W. K. Saunders, Journal of Applied Physics **21**, 153, (1950).
- [70] 亀井亨、木原元央, パリティ物理学コース, 加速器科学, 76, (丸善, 1993)