# ライナックと RFQ の物理
## RFQ のビーム力学の基礎

## 1　はじめに

本稿では Radio Frequency Quadrupole(RFQ) linac（高周波 4 重極線形加速器）のビーム力学の基本について解説する。今年の OHO のタイトルは、“大電流ビームを作る　J-PARC のビームコミッショニング” とある。“コミッショニング” という言葉はたいへんに広い意味を持っていると思うが、普通” ビームコミッショニング” と言われれば、実際の運転でどのように加速器を調整するのかという課題を思い浮かべることが多いかと思う。しかしながら、RFQ においては、運転時に手軽に変えられるノブは、投入電力（要は電極間電圧）しかなく、あとは入射ビームのエネルギー、位置、角度を微調整するくらいで、学習者的に興味深い話題とは思えない。一方で、“大電流ビームを作る” という観点からは、RFQ は必要不可欠（副題に J-PARC とあるのでイオン加速器に話を絞る）なものである。実際、現代的な大電流イオン加速器は、Kapchinskii と Teplyakov（以下 K-T と書く）により RFQ が発明されて [1] 初めて実現可能となった。RFQ の無いイオンリニアックは存在するが、RFQ の無い大電流イオンリニアックは現状では存在し得ない。RFQ をきちんと理解し、正しく作ることそれ自体が” 大電流ビームを作る” ことそのものとも言える。

そこで本稿では、RFQ の基礎中の基礎であるビーム力学の、その中でも基本的なことに絞って述べることにする。RFQ 全般の概説については、過去の OHO の記事 [2] を参照されたい。

RFQ の教科書として、T. P. Wangler の”RF Linear Accelerators” [3] の第 8 章が比較的よくまとまっていると思うので、本稿はこれにそってビーム力学の解説を行う。RFQ のビーム力学は、最後には Drift Tube Linac (DTL) などの通常のリニアックのビーム力学に帰着するが、本稿ではそこから先は簡単に触れるにとどめる。Wangler の教科書には通常のリニアックのビーム力学についても詳細に記述があるので（むしろこちらが本題）、あまりなじみがないという方はぜひ勉強していただきたい。実際の大電流リニアックにおいては、空間電荷は非常に重要であり、それは RFQ でも同様である。空間電荷効果を取り入れたビーム力学の解析解を得るには、本来非線形であることが本質的な空間電荷効果を線形近似したり、現実にはありえない粒子分布を仮定したりしなければならず、どうしても数値計算に頼らざるを得ない。しかしながら、数値計算では物事の本質が見えにくいので、本稿では” 大電流を作る” というタイトルにもかかわらず、大胆にも空間電荷効果の取り扱いは割愛した。リニアックにおける空間電荷の取り扱いについては、Wangler の教科書 [3] やレポート [8] を参照せよ。また、本稿のような解説記事では、数式のフォローを丁寧にしているものが多いが、あまり式変形にばかり時間をとられると重要な事項がぼやけるので適当に省略した。数式のフォローが重要でないと言っているわけではないので誤解なきよう。なるべく元の文献を記載し、また、文献 [4] では RFQ のビーム力学を、数式の変形を省略することなく詳細に記述しているので、これらの文献を参照して、一度は自分で解いてみていただきたい。

## 2　概説

RFQ は、イオンリニアックに固有の構造であり、電子リニアックには使われない。なぜなら電子はすぐに光速に達するため、RFQ のような低エネルギーに特化した構造は必要無いからである。

大電流リニアックが RFQ なしには実現不可能な理由は以下の通りである。大電流の RF リニアックでは、加速構造に入射するビームは、ある程度のエネルギーの、エミッタンスの小さい、バンチされたビームである必要がある。

従来のイオンリニアックでは、Cockcroft-Walton 型の静電加速器により前段加速が行われていたが、大電流リニアックに要求される電圧を静電場で得ることは事実上不可能である。さらに、高電圧の静電加速器は、非常に大掛かりな装置であり、大きなスペースが必要になる。また、静電加速器ではイオン源の電位を高電圧に上げねばならず、その性能が制限されてしまう。

空間電荷力の特徴として、速度が遅い粒子に対しその発散力が顕著になる。静電型加速器からの、磁場を用いた長いビーム輸送系において、大電流の輸送に必要な強さの収束力を得ることは不可能である。

どのような RF 加速器でも、すべての粒子が加速されるためには、ビームは縦方向にバンチされている必要がある。DTL のような従来の加速器では、バンチングはリニアックの前に置かれる 1 つまたはそれ以上の RF 空洞によって、リニアックに入射される前に行われる。このようなバンチングは、普通あまり効率が良くなく、得られるビームの質も悪い。また、大電流のビームでは、バンチングの過程でビームの密度が増大し、それにより、空間電荷力が増大し、多くの場合横方向のビームエミッタンスの増大をまねく。

これらの問題は、従来のリニアックにとって、本質的な性能限界であったが、RFQ の発明により、これらの問題はビーム力学的には一気に解決された。RFQ は、常識的な技術で実現可能な（決して簡単とは言わない）コンパクトな構造で必要なエネルギーまで加速出来る。RF 電場を用いた周期の短い収束系を、空間的に一様に配置した RFQ は、特に低速粒子に対して著しく強い収束力を発揮出来る。さらに、RFQ では何セルかにわたって、“ゆっくりと” バンチングを行うので、効率の良い、顕著なエミッタンス増大もないバンチングが可能である。

原理的には解決されても、RFQ にはいまだ製造上の困難がつきまとっている。本稿では、RFQ の加工、組み立て上の問題については立ち入らないが、一例として、J-PARC RFQ を例にして、RFQ の特徴的な長さスケールを表 1 にまとめておく。この表で注目して欲しいのは、全体の長さに対して必要な加工精度が非常に小さいことである。一般に、小さな物をこの程度の精度で加工することはそれほど困難ではないが、RFQ のように大きな物をこの精度で加工するのは非常に困難である。しかしながら、近年、航空機などに代表される需要から、大型の精密加工マシニングセンターが多数生産されており、このような加工も以前に比べればやりやすくなっている。

表 1　J-PARC RFQ の典型的な長さスケール

| | | normalize($\lambda = 1$) |
|---|---|---|
| 自由空間波長 $\lambda$ | 0.925 m | 1 |
| 平均ボア半径 $r_0$ | 3.7 mm | 0.004 |
| $\beta\lambda/2$ (3 MeV) | 36.9 mm | 0.04 |
| ヴェーン長さ | 3.115 m | 3.37 |
| ヴェーン加工精度 | 15 $\mu$m | $1.62 \times 10^{-5}$ |
| ヴェーン配置精度 | 30 $\mu$m | $3.24 \times 10^{-5}$ |

## 3　準静的近似

RFQ では、ビーム周辺では、RF 磁場は小さく、速度の遅い粒子には小さな力しか生じないので、ビームダイナミクスの計算には、電場のみを考えればよい。

始めに、RFQ 内部の時間に依存するスカラーポテンシャルは、円柱座標を用いて（ビーム軸方向を $z$ 座標とする)、

$$U(r,\theta,z,t) = V(r,\theta,z) \times sin(\omega t + \phi) \qquad (1)$$

のように記述出来、電場 $\boldsymbol{E}$ は、

$$\boldsymbol{E} = -\nabla U \qquad (2)$$

のように導かれるものとする。ここで、$\omega$ は RF の角振動数、$\phi$ はポテンシャルの初期位相である。ポテンシャルは、時間に依存しないポテンシャル $V$、即ち静電場のポテンシャルに時間のみの RF 成分 $sin(\omega t + \phi)$ をかけた形をしており、このような近似は準静的近似と呼ばれる。

準静的近似について少し補足しておく。式 (1) を、Faraday の法則の微分形（Maxwell 方程式の第 3 式）

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad (3)$$

に代入すると、$\nabla \times \nabla U = 0$（静電場の回転は 0 である。）なので、式 (1) は Maxwell 方程式を満たさない。しかし、今考えている領域において、磁場の時間変化が無視出来るほど小さいとするならば、式 (1) は妥当な近似であると言える。

このことについてもう少し考察する。電場を記述する Helmholtz 方程式

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + k^2 \boldsymbol{E} = 0 \tag{4}$$

において、今考えている領域における構造により決まる空間スケールから出てくる電場の変化に対して $k^2$ が十分に小さい、即ち自由空間波長 $\lambda$ が十分に大きい（$\lambda = 2\pi/k$）時、準静的近似が成り立つ。

簡単のために $z$ のみ考え（普通、電磁場は変数分離法で解くので、$r, \theta, z$ を別々に考えて良い）、$\boldsymbol{E}$ の $z$ 依存は、波数 $k_z$ の周期関数とする。このとき、$\nabla^2 \boldsymbol{E} = k_z^2 \boldsymbol{E}$ となるが、$k_z >> k$ 即ち、$\boldsymbol{E}$ の $z$ 依存の波長が、自由空間波長より十分小さい時、Helmholtz 方程式の第 1 項が支配的となり、電場が満たすべき方程式は

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} \cong 0 \tag{5}$$

となる。ここで、式 (3) の両辺の回転をとると、左辺は、$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E}$ となり、式 (5) から第 2 項は 0 と近似でき、電荷が無いとすると、Gauss の法則 $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ であるので、$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = 0$ となる。式 (2) のように表される $\boldsymbol{E}$ は、この方程式を満たす。$r$ についても、周期関数ではないが、同様の議論が成り立ち、$\theta$ については、$k_\theta$ は 1 より小さくならない。表 1 を見ると、ビームダイナミクスの計算に必要な、ベーン近傍の領域は、自由空間波長の、オーダーとして $10^{-3}$ 以下程度の大きさであり、十分に小さいことが分かる。ただし、準静的近似が適用出来るのはあくまでビーム軸近傍の領域のみであり、RFQ 全体としては、当然ながら正しく Maxwell 方程式を満たすような電磁場とせねばならない。

## 4　K-T ポテンシャル関数

次に、準静的近似を用いて、RFQ の電場の解析を行う。式 (1) を式 (2) に代入し、さらに Gauss の法則（電荷は無いとする）

$$\nabla \boldsymbol{E} = 0 \tag{6}$$

に代入すると、求めるポテンシャルは、

$$\nabla^2 V = 0 \tag{7}$$

の Laplace 方程式になる。

円柱座標系での Laplace 方程式は、

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{8}$$

である。円柱座標系での、変数分離法による Laplace 方程式の一般の解法については、例えば [5] を参照されたいが、ここでは、RFQ に特有の対称性を要求する。

結論から先に書くと、ポテンシャル関数は、

$$\begin{aligned} V(r,\theta,z) = &\sum_{s=0}^{\infty} A_s r^{2(2s+1)} cos(2(2s+1)\theta) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} A_{ns} I_{2s}(knr) cos(2s\theta) cos(knz) \end{aligned} \tag{9}$$

の形になる。ここで、$I_n$ は、第 1 種の変形 Bessel 関数である。

文献 [6] には、RFQ に特有の対称性として、次のようなものが用いられている。

$$V(r,\theta,z) = V(r,-\theta,z) \tag{10}$$

$$V(r,\theta,z) = V(r,\theta,-z) \tag{11}$$

$$V(r,\theta,z) = V(r,\theta \pm \pi,z) \tag{12}$$

$$V(r,\theta,z) = -V(r,\theta \pm \pi/2, L/2 - z) \tag{13}$$

ここで、$L$ は、ポテンシャル関数の $z$ 方向の周期であり、$k = 2\pi/L$ とする。

ポテンシャル関数が、$z$ に関して一様ならば、$z$ 方向の電場、即ち加速電場は生じない。そのため、RFQ リニアックとして機能するためには（加速やバンチングがなされるためには）、ポテンシャル関数がなんらかの $z$ 依存を持つことが必要であるが、$z$ に関する周期関数とするのが自然であろう。実際には、粒子は加速されていくので、厳密には周期関数ではないが、セルあたりの速度増加が十分小さい場合は、そのセル付近では近似的に周期関数としてよい。

さて、式 (10) から (13) の対称性について、1 つずつ見ていこう。まず、式 (10) であるが、ポテンシャル関数が、$\theta$ に関して偶関数であることを要求している。即ち、$\theta = 0$ でポテンシャルが最大（も

しくは最小）になることを定義している。これにより、式 (9) の $\theta$ に関する項には、偶関数である $cos$ しかなくなっている。

式 (11) は、ポテンシャル関数が $z$ について偶関数であることを要求しているが、これは、ポテンシャル関数が $z$ の周期の開始点で、最大（もしくは最小）になると定義することを表している。これにより、ポテンシャル関数の $z$ 依存項は、$cos(knz)$ の形になる。

次に、式 (12) であるが、これは RFQ が z 軸回りの $\pi$ 回転に対して対称であることを表している。これにより、ポテンシャル関数の $\theta$ に関する項は、$cos(2m\theta)$ の形になる。

最後に、式 (13) であるが、これは水平方向と垂直方向で、$z$ の周期関数の位相が $\pi$ だけずれ、電位の極性が反転することを表す。式 (9) の第 1 項の $cos(2m\theta)$ において、$cos(2m\pi/2) = (-1)^2$ なので、m は奇数でなければならない。さらに、第 2 項の $cos(2s\theta)cos(knz)$ において、$cos(2s(\theta + \pi/2))cos(kn(L/2 - z)) = (-1)^{s+n}cos(2s\theta)cos(knz)$ なので、$s$ と $n$ のうちどちらかが奇数という条件が課される。（この条件は、式 (9) には明示的に記述されていない。）

式 (9) は K-T により提唱された、RFQ のポテンシャル関数の一般解であり、これからビーム近傍の電場が計算される。

## 5　2 項ポテンシャル関数

さて、ポテンシャル関数は得られたが、式 (9) を見て即座に、なるほどポテンシャルはこういう形か、と想像出来る人はおそらく特殊能力の持ち主であろう。式 (9) は無限級数なので、有限な境界条件を課して係数を決定するためには、すべての項を使うわけにはいかない。そこで、必要最小限の項以外は全て無視することにする。式 (9) で、第 1 項の $s = 0$、第 2 項の $s = 0, n = 1$ のみを残すと、

$$V(r, \theta, z) = A_0 r^2 cos(2\theta) + A_{10} I_0(kr) cos(kz) \tag{14}$$

が得られる。これを 2 項ポテンシャル関数と呼ぶ。

次に、適当な境界条件を課して、$A_0$ と $A_{10}$ を求めよう。ある時間に、水平方向と垂直方向の電極の電位が、それぞれ $+V_0/2$ と $-V_0/2$ であったとする。$z = 0$ では、水平方向 ($\theta = 0$) の電極先端の位置は、$r = a$ であり、垂直方向 ($\theta = \pi/2$) の電極先端は、$r = ma$ であるとする ($m \geq 1$)。ここで、$a$ は、最小ボア半径であり、$m$ は、$z$ 方向に周期的に変化する電極の振幅を表すパラメータであり、モジュレーションファクターと呼ばれる。したがって、境界条件は、

$$V(a, 0, 0) = \frac{V_0}{2} \tag{15}$$

$$V(ma, \frac{\pi}{2}, 0) = -\frac{V_0}{2} \tag{16}$$

である。これを式 (14) に代入すると、

$$\frac{V_0}{2} = A_0 a^2 + A_{10} I_0(ka) \tag{17}$$

および

$$-\frac{V_0}{2} = -A_0 (ma)^2 + A_{10} I_0(kma) \tag{18}$$

が得られる。式 (17) と式 (18) を定数 $A_0$ と $A_{10}$ について解くと、

$$A_0 = \frac{V_0}{2a^2} \frac{I_0(ka) + I_0(kma)}{m^2 I_0(ka) + I_0(kma)} \tag{19}$$

及び、

$$A_{10} = \frac{V_0}{2} \frac{m^2 - 1}{m^2 I_0(ka) + I_0(kma)} \tag{20}$$

となる。無次元の定数 $X$ と $A$ を

$$X = \frac{I_0(ka) + I_0(kma)}{m^2 I_0(ka) + I_0(kma)} \tag{21}$$

$$A = \frac{m^2 - 1}{m^2 I_0(ka) + I_0(kma)} \tag{22}$$

のように定義する。（意味は次章で述べる。）このようにすると、$A_0 = XV_0/2a^2$、$A_{10} = AV_0/2$ となる。

完全な時間依存ポテンシャルは、

$$\begin{aligned} &U(r,\theta, z, t) \\ &\quad = \frac{V_0}{2} \left[ X \left[\frac{r}{a}\right]^2 cos(2\theta) + A I_0(kr) cos(kz) \right] \\ &\qquad \times sin(\omega t + \phi) \end{aligned} \tag{23}$$

となる。ここで、水平及び垂直電極上での時間依存電圧はそれぞれ、$+(V_0/2)sin(\omega t+\phi)$ 及び $-(V_0/2)sin(\omega t+\phi)$ である。

式 (23) を $x = rcos\theta$ 及び $y = rsin\theta$ を用いて直線座標系で表すと便利である。すなわち、

$$
\begin{aligned}
&U(x,y,z,t) \\
&\quad = \frac{V_0}{2}\left[\frac{X}{a^2}[x^2-y^2] + AI_0(kr)cos(kz)\right] \\
&\qquad \times sin(\omega t+\phi)
\end{aligned} \tag{24}
$$

となる。

原理的には、電極形状はいまや $\pm V_0/2$ の等ポテンシャル面を求めることによって決められる。$z = L/4$ では、$cos(kz) = cos(\pi/4) = 0$ なので、RFQ は厳密に 4 回対称になる。$x$ と $y$ 電極の先端は、

$$
r_0 = aX^{-1/2} \tag{25}
$$

の位置にあり、$r_0$ は平均ボア半径と呼ばれる。

実際には、電極形状は、耐電圧性や、加工上の都合から、2 項ポテンシャル関数の等電位面とは異なった形にする。現在最もよく用いられている電極形状は、電極先端の横断面を、$z$ に依存しない半径 $\rho_t$ を持つ円弧にして、縦断面は 2 項ポテンシャル関数の等電位面を $yz$ および $zx$ 平面への射影したものである。縦断面形状は、式 (24) に $y = 0$ を代入した

$$
1 = \frac{X}{a^2}x^2 + AI_0(kx)cos(kz) \tag{26}
$$

を満たす $x$ および、$x = 0$ を代入した

$$
-1 = -\frac{X}{a^2}y^2 + AI_0(ky)cos(kz) \tag{27}
$$

を満たす $y$ として表される。縦断面形状は $z$ にそったうねりを持つが、このうねりをモジュレーションと呼び、モジュレーションの周期は $L = 2\pi/k$ である。

このような電極形状により得られる電場は当然のことながら、2 項ポテンシャル関数から得られる電場とは異なるものとなる。代表的な RFQ 設計ツールである Los Alamos のコード群 [7] では、RFQ 内部での電磁場を定義するために 8 重極関数を用いている[*1]。8 項ポテンシャル関数は、

$$
\begin{aligned}
&V(r,\theta,z) = \\
&\frac{V}{2}\Bigg\{A_{01}\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 cos2\theta + A_{03}\left(\frac{r}{r_0}\right)^6 cos6\theta \\
&\quad + A_{10}I_0(kr)coskz + A_{30}I_0(3kr)cos3kz \\
&\quad + [A_{12}I_4(kr)coskz + A_{32}I_4(3kr)cos3kz]cos4\theta \\
&\quad + [A_{21}I_2(2kr)cos\theta + A_{23}I_6(2kr)cos6\theta]cos2kz\Bigg\}
\end{aligned} \tag{28}
$$

のように記述される。係数 $A_{mn}$ は、$m$ 及び $L/r_0$ に依存するのだが、いくつかの電極形状について計算され、テーブルとして保持されており、実際の計算の際にはテーブル参照している。

## 6 電場

以下では、2 項ポテンシャル関数から得られる電場のみを考える。式 (24) を式 (2) に代入して得られる電場の直線座標系での成分を書き下すと、

$$
E_x = -\frac{XV_0}{a^2}x - \frac{kAV_0}{2}I_1(kr)\frac{x}{r}cos(kz) \tag{29}
$$

$$
E_y = \frac{XV_0}{a^2}y - \frac{kAV_0}{2}I_1(kr)\frac{y}{r}cos(kz) \tag{30}
$$

$$
E_z = \frac{kAV_0}{2}I_0(kr)sin(kz) \tag{31}
$$

となる。これに、時間依存 $sin(\omega t+\phi)$ をかけたものが実際の電場である。

式 (31) は、ビームに対して加速力を与えるので、$A$ を加速効率と呼ぶ。式 (29) と式 (30) の第 1 項は、4 重極収束に関する項であり、$X$ を収束効率と呼ぶ。$XV_0/a^2$ は、4 重極収束力の強さを現す 4 重極勾配である。第 2 項は、$\phi$ を縦方向に収束するように選んだ（位相安定性）場合にビームに働く RF 発散力である。$m = 1$ の時、$A = 0, X = 1$ であり、RFQ は加速の無い純粋な 4 重極輸送系となる。$m$ が大きくなるにしたがって、軸上に加速電場が生じる。

[*1] このコード群に含まれる粒子シミュレーションプログラム PARMTEQM の M は、Multipole の意味である (Phase And Radial Motion in a Transverse Electric Quadrupole M)

## 7　同期加速

粒子の単位セルあたりのエネルギーの増分 $\Delta W$ は、粒子が見る電場 $E_z sin(\omega t + \phi)$ を単位セルにわたって積分することで計算出来る。ここで、RFQ における単位セル長を定義しよう。式 (31) の $z$ 依存項 $sin(kz)$ を見ると、モジュレーションの半周期で、$z$ 方向の電場の向きが反対になることが分かる（$k = 2\pi/L$ は、モジュレーションの波数）。もし、RF の半周期で粒子がモジュレーションの半周期分だけ進むとすると、$z$ による電場の反転と $t$ による電場の反転が打ち消し合い、RF 半周期前と同じ電場を感じることになる。そこで、単位セル長を $l_c = \beta\lambda/2 = L/2$（$\beta\lambda$ は、RF1 周期の間に粒子が進む距離。）とするとうまく加速できることになる。このような粒子を、同期粒子と呼び、下付の添え字 $_s$ をつけて表す。

エネルギー増加の計算に戻って、粒子の動径方向の位置と速度が単位セル内で一定であるとする。粒子の速度を $v' = \beta' c$ ($c$ は光速) とし、セルの入り口（$z = 0$）で $t = 0$、その時の RF 位相を $\phi$ とする。粒子が $z$ だけ進むのにかかる時間は、$t = z/(\beta' c)$ であり、$\omega = 2\pi c/\lambda$($\lambda$ は自由空間波長) なので、

$$\omega t = \frac{2\pi z}{\beta' \lambda} \tag{32}$$

と書ける。よって $\Delta W$ は、

$$\Delta W = \frac{qkAV_0 I_0(kr)}{2} \int_0^{l_c} sin(kz) sin(k'z + \phi) dz \tag{33}$$

となる。ここで、$k' = 2\pi/\beta'\lambda, k = 2\pi/\beta_s\lambda$ であり、$l_c = \beta_s\lambda/2$ は、単位セルの長さである。

同期粒子に対しては、$\beta' = \beta_s$ であり、同期粒子のエネルギーの増分は、

$$\Delta W = \frac{q\pi AV_0 I_0(kr) cos\phi_s}{4} \tag{34}$$

である。粒子が単位セルの中心にある時の位相 $\phi$ は、粒子位相と呼ばれ、$\phi = 0$ で電場は最大値となる。ここで、エネルギーの増分が正になる条件は、$cos\phi_s > 0$、即ち

$$-\frac{\pi}{2} < \phi_s < \frac{\pi}{2} \tag{35}$$

である。

同期粒子のエネルギー増分は、もっと通常のリニアックの用語に対応した形で書ける。まず、軸上の最大加速電場を RFQ の単位セルにわたり空間平均をとる。

$$E_0 = \frac{1}{l_c} \int_0^{l_c} E_z dz = \frac{2AV_0}{\beta_s \lambda} \tag{36}$$

得られた平均軸上電場は、有効軸上電圧 $AV_0$ が、ユニットセル長 $l_c$ に印加されたものと解釈出来る。同期粒子のトランジットタイムファクターは、

$$T = \frac{\int_0^{l_c} E_z sin(kz) dz}{\int_0^{l_c} Ezdz} = \frac{\pi}{4} \tag{37}$$

である。これらの結果を用いて、同期粒子の長さ $l_c$ のセルあたりのエネルギーの増分は、

$$\Delta W = qE_0 T I_0(kr) l_c cos\phi_s \tag{38}$$

のようななじみのある形となる。蛇足ながら、軸上（$r = 0$）では、$I_0(kr) = 1$ なので、通常のリニアックの縦方向のビーム力学で出てくるものとまったく同じになる。リニアックの縦方向のビーム力学に関しては、Wangler の教科書 [3] の第 6 章などを参照されたい。

## 8　縦方向の運動

RFQ の縦方向の電場は、通常のリニアックの場合と同一であることが分かった。したがって、位相安定性に基づく同期位相の条件についても同様である。縦方向にシンクロトロン振動する粒子はバンチを形成し、RFQ 内のすべてのセルは、１つずつのバンチで占められる。

縦方向の収束を記述する式は次のように得られる。まず、位相 $\phi$ にある粒子のエネルギーの増分を計算し、位相 $\phi_s$ で軸上にあると仮定される同期粒子のエネルギーの増分を引く。相対エネルギー $W - W_s$ の平均変化率の微分の形で結果を書くと、

$$\frac{d(W - W_s)}{dz} = qE_0 T I_0(kr)(cos\phi - cos\phi_s) \tag{39}$$

が得られる。ここで、独立変数 $z$ は、軸方向の座標である。次に、ある粒子と同期粒子の位相差の平均

変化率を記述する式は次のように書ける。

$$\frac{d(\phi-\phi_s)}{dz}=-\frac{2\pi(W-W_s)}{m_0c^2\beta_s^3\lambda} \tag{40}$$

ただし、$m_0$ は、粒子の静止質量である。微小振動の場合、

$$-\pi<\phi_s<0 \tag{41}$$

の時、縦方向の波数

$$k_l^2=\frac{\pi^2qAV_0I_0(kr)sin(-\phi_s)}{m_0c^2\beta_s^4\lambda^2} \tag{42}$$

の単純な調和振動が得られる。また、角振動数 $\omega_l$ は、$\omega_l=k_l\beta_sc$ なので、

$$\omega_l^2=\frac{\pi^2qAV_0sin(-\phi_s)}{m_0\beta_s^2\lambda^2} \tag{43}$$

となる。式 (35) と式 (41) をあわせて、

$$-\frac{\pi}{2}<\phi_s<0 \tag{44}$$

が、加速かつ位相安定な同期位相に対する条件である。

## 9 横方向の運動

RFQ が、イオンリニアックの最初の加速構造として使われる理由の１つに、その低エネルギー領域での非常に強い横方向の収束力が挙げられる。RFQ での横方向の収束は、通常のリニアックと同じく強収束であるが、なぜそのような強い収束力が得られるかについて、Wangler の教科書の 8.6 節にまとめられている。以下、１つずつ見ていこう。

(1) 磁場よりも電場を収束に用いることが、速度の遅い粒子には適している。

電場のエネルギーは $(\epsilon_0/2)\boldsymbol{E}^2$、磁場のエネルギーは、$(1/2\mu_0)\boldsymbol{B}^2$ と表される（真空中で考える）ので、場のエネルギーが同等の場合、磁場の強さは、$B=E/c$ なので、磁場による Lorentz 力は、$qvB=q\beta E$ となり、$\beta$ の分だけ電場を用いるよりも力が小さくなる。ある程度大きな $\beta$ の粒子に対しては、磁場の大きさ自体は電場より高くしやすいため、通常電磁石が収束に用いられるが、$\beta$ が小さな粒子に対しては、電場を用いたほうが強い収束力が得られる。

(2)DC ではなく、RF を用いることで、より高い表面電場と強い電極間電圧を得ることが出来る。

一般的に、静電場より高周波の方が放電に対する耐電圧が高い。

(3) 空間的に一様な 4 重極収束により、収束場に使える空間の割合を、特に低エネルギーでの DTL の、離散的な 4 重極レンズに比べて、増やすことが出来る。

RFQ は長手方向に渡って全体が 4 重極レンズである。

(4) 短い収束周期 $\beta\lambda$ により $\sigma_0$ を減らすことが出来る。このことにより、単位長さあたりの位相進みを大きくすることが出来、ビームの安定性を損なうことなく収束力を強くすることが出来る。

強収束中での粒子の運動は、第 1 近似では、Mathieu 方程式

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}+[P+2Qsin(2\tau)]x=0 \tag{45}$$

で表される。Mathieu 方程式によるビームの安定性の議論は、文献 [8] などを参照されたいが、１収束周期あたりのベータトロン振動の位相進み $\sigma_0$ が $0<\sigma_0<\pi$ の時ビームが安定になることが知られている。$\sigma_0$ に関しては、後述する平滑化近似は、$\sigma_0<\pi/2$ でおおむね成り立ち、また、空間電荷がある場合のビームの安定性から、$\sigma_0<\pi/2$ が望ましいことが示唆されている [9]。いずれにせよ、$\sigma_0$ には、比較的厳しい上限が課される。1 収束周期あたりの位相進みを大きく出来ないとすると、単位長さあたりの位相進みを大きくする（単位長さあたりの収束力を強くする）には、収束周期を短くすれば良い。RFQ の場合、収束周期は $\beta_s\lambda$ であり、DTL の収束周期 $2\beta_s\lambda$ に比べてもさらに短い。

以下、式 (29) から得られる横方向の力から運動方程式を具体的に表記する。電荷 $q$、質量 $m_0$ の粒子の $x$ 平面での運動を考え、軸からの微小変移のみに限定する。非相対論的には、運動方程式は、

$$\ddot{x}+\left[\frac{qXV_0}{m_0a^2}+\frac{qk^2AV_0}{4m_0}cos(kz)\right]xsin(\omega t+\phi)=0 \tag{46}$$

となる。ここで、$\ddot{x}=d^2x/dt^2$ である。括弧内の最初の項は、4 重極項であり、次の項は電極にモジュ

レーションつけたことにより発生する横方向の力、いわゆる RF 発散項である。粒子の軸方向の位置の時間依存は、$kz = \omega t$ によって与えられるので、括弧内の第 2 項は、

$$cos(\omega t)sin(\omega t + \phi) = [sin\phi + sin(2\omega t + \phi)]/2 \tag{47}$$

に比例する。RF 周波数を 2 倍した項は、同期粒子が単位セル内を移動する間に 1 周期分変化し、セル内で $x$ が一定であると仮定すると、この項は平均すると 0 になる。第 1 近似では、この項の寄与を無視でき、運動方程式を次のように書ける。

$$\ddot{x} + \left[\frac{qXV_0}{m_0 a^2} sin(\omega t + \phi) + \frac{qk^2 AV_0}{8m_0} sin\phi\right] x = 0 \tag{48}$$

この結果は、前述したように、Mathieu 方程式の形をしている。

このような、ゆっくり変化する外場のなかに、速い速度で変化する場がある場合の微分方程式の取り扱いに関して、ランダウの力学の教科書 [10] の §30 にに記述があるので、参考にしてほしい。次の形をした試行解を考えると、平滑化近似解が得られる。

$$x = [C_1 sin\Omega t + C_2 cos\Omega t][1 + \epsilon sin(\omega t + \phi)] \tag{49}$$

ここで、$C_1$ と $C_2$ は定数であり、$\Omega$ と $\epsilon$ は、$\Omega \ll \omega$ と $\epsilon \ll 1$ を満たす 2 つの新たなパラメータである。最初の括弧内の初めの係数は、単位セル内でゆっくり変化すると仮定され、平均化された、もしくは平滑化された粒子の軌道を表す。角振動数 $\Omega$ は、平滑化された運動の振動数であり、ベータトロン周波数として知られる。第 2 の括弧内の係数は、時間変化の周期関数であり、RF 周波数によって変化し、フラッタファクタと呼ばれる。ここで、$\epsilon$ は、フラッタ振幅である。簡単のために、$C_1 = 1$、$C_2 = 0$ を選ぶと、

$$x = sin\Omega t + sin\Omega t \times \epsilon sin(\omega t + \phi) \tag{50}$$

となる。試行解を 2 回微分し、ゆっくり変化する $\Omega$ に関する項と早く変化する $\omega$ に関する項を分離し、$\epsilon\Omega/\omega$ と $\Omega^2/\omega^2$ のオーダーより小さい項を無視すると、

$$\ddot{x} \cong -\epsilon\omega^2 sin(\Omega t) sin(\omega t + \phi) \tag{51}$$

となる。フラッタ振幅を、

$$\epsilon \cong \frac{qXV_0}{m_0\omega^2 a^2} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{qXV_0\lambda^2}{m_0 c^2 a^2} \tag{52}$$

のように選ぶと、式 (48) の近似解が得られる。

次に、式 (50) と式 (52) を運動方程式 (48) に代入し、RF 周期にわたって平均をとることで、平滑化された性質を見てみよう。即ち、

$$\ddot{\bar{x}} \cong -\Omega^2 sin(\Omega t) \tag{53}$$

となる。従って、平滑化近似解は、粒子の平均変位が、単純な調和振動子の方程式

$$\ddot{\bar{x}} + \Omega^2 \bar{x} = 0 \tag{54}$$

を満たすことを示す。ここで、

$$\Omega^2 \cong \frac{1}{2}\left[\frac{qXV_0}{m_0\omega a^2}\right]^2 + \frac{qk^2 V_0 A sin\phi}{8m_0} \tag{55}$$

である。第 1 項は、常に正で、4 重極収束力の寄与を表し、第 2 項は RF 発散力を表す。もし、4 重極項が RF 発散力（加速効率 $A$ に依存するが）に比べて大きければ、横方向の運動は、縦方向の運動から分離され、$\Omega$ は近似的にすべての位相の粒子について同一になる。

$\Omega^2$ の振幅は、有効収束力の指標であり、習慣的に収束力の指標は、1 収束周期（RFQ の場合は $\beta_s\lambda$）あたりのベータトロン振動の位相の進みとして表現される。同期粒子が距離 $\beta_s\lambda$ だけ進むのにかかる時間は、$t = \beta_s\lambda/(\beta_s c)$ なので、

$$\sigma_0 = \Omega t = \Omega\frac{\lambda}{c} \tag{56}$$

となる。式 (56) と式 (55) から、$k = 2\pi/(\beta_s\lambda)$ を用いて、

$$\sigma_0^2 \cong \frac{1}{8\pi^2}\left[\frac{qXV_0\lambda^2}{mc^2 a^2}\right]^2 + \frac{\pi^2 qAV_0 sin\phi}{2mc^2\beta_s^2} \tag{57}$$

が得られる。安定境界は、$\sigma_0$ に依存することが分かる。平滑化近似では、$\sigma_0^2 > 0$ のときビームは安定である。同期位相が、式 (44) の条件を満たす時、RF 発散効果を表す第 2 項は負であり、正味の収束力を減少させる。第 2 項の振幅は加速波形のピークである $\phi = 0$ でなくなり、$\phi = -\pi/2$ で最大にな

る。もし、第 2 項が第 1 項を超えると、$\sigma_0$ は負となり、ビームは不安定になる。

ここで、収束強度 $B$ と RF 発散強度 $\Delta_{rf}$ を、

$$B = \frac{qXV_0\lambda^2}{m_0c^2a^2} \tag{58}$$

$$\Delta_{rf} = \frac{\pi^2 qAV_0 sin\phi}{2m_0c^2\beta_s^2} \tag{59}$$

のように定義すると、$\sigma_0$ は、

$$\sigma_0^2 = \frac{B}{8\pi^2} + \Delta_{rf} \tag{60}$$

となり、むしろこの表記のほうがよく使われる。

## 10 RFQ における断熱バンチング

これまで RFQ を特徴づける様々なパラメータを見てきたが、実際の RFQ ではこれらのパラメータをセルごとに適切に変化させることで必要な性能を持たせる。RFQ を大きく 3 つの機能別のセクションに分けることが多い。最初のセクションはラディアルマッチングセクションと呼ばれ、入射ビームのマッチングをとる。RFQ の出口側にマッチングセクションを設けることもある。次にバンチングセクションがあり、ここでバンチングを終了させる。最後は加速セクションであり、バンチされたビームを要求エネルギーまで加速する。このような RFQ のセクション分けの典型は、Crandall らによって提案されたもの [11] であり、細かい違いはあるものの全ての RFQ でこのような機能分割がなされている。本稿では、バンチングセクションのみ言及するので、ほかのセクションについては、[11] を参照されたい。入り口および出口のマッチングセクションに関しては、Wangler の教科書 [3] にも記述がある。

粒子を取りこぼしたり、エミッタンス増大を引き起こさないでバンチングを行うには、“ゆっくりと” すなわち” 断熱的に” バンチングを行う必要がある。“断熱的” とは、パラメーターがゆっくり変化する系において、一定にとどまる量（断熱不変量）が存在することである。バンチングとは、縦方向の運動に関するものであるので、縦方向の運動の断熱不変量について考察する。

文献 [10] の §49 より、微小振動の断熱不変量 $I$ は、

$$I = \oint pdz \tag{61}$$

と書ける。(ただし係数 $1/2\pi$ は省いた。) ここで、$z$ は座標、$p$ は運動量であり、その場合、$I$ は、位相空間での面積となる。つまり、ゆっくり変化する系の微小振動においては、位相空間での面積は断熱不変量である。微小振動の解を、$z = Zsin\omega_l t$ とすると、運動量は非相対論的には $p = mdz/dt$ なので、$p = Pcos\omega_l t$ である。ここで、$P = m\omega_l Z$ である。これらを式 (61) に代入すると、

$$I = \pi m\omega_l Z^2 \tag{62}$$

となる。

実際の RFQ で、どのようにパラメータを変化させてバンチングを行うかは、様々な流儀があるが、最も基本的な方法として、K-T が提唱した、空間電荷効果を制御するためにビームの密度を一定に保つ、という処方がある。Crandall らは、ジェントルバンチャーと呼んでいるバンチングセクションにこの方法を採用した [11]。それぞれの粒子について、一定の振幅 $Z$ を保てれば、一定の密度が得られる。式 (62) から、$\omega_l$ が一定ならば、$Z$ も一定になることが分かる。RFQ では、縦方向の微小振動の周波数は、式 (43) の通り、

$$\omega_l^2 = \frac{\pi^2 qAV_0 sin(-\phi_s)}{m\beta_s^2\lambda^2} \tag{63}$$

と与えられる。したがって、

$$\frac{AV_0 sin(-\phi_s)}{\beta_s^2} = constant \tag{64}$$

となるように RFQ のパラメータを選べば良いこと。式 (64) は、RFQ の断熱バンチングのための第 1 の条件であり、$V_0$ は RFQ を通して一定であり、$\phi_s$ と $\beta_s$ の関数として $A$ を決定する。

次に、$\phi_s$ と $\beta_s$ の関係を次のように決めよう。一定のバンチ密度を、微小振動の領域から大振幅の縦方向の振動をしている粒子に拡張したい。そのための簡単なな近似的方法はセパラトリクスの大きさを一定にすると要求することである。セパラトリクスの大きさ $Z_\psi$ は、位相長 $\psi$ から、$Z_\psi = \psi\beta_s\lambda/2\pi$ の

関係を用いて変換される。もし、同期位相が RFQ にそって

$$\beta_s \psi = constant \tag{65}$$

のように変化するなら、セパラトリクスの長さは一定となる。角度幅 $\psi$ は、文献 [3] の 6.4 節で与えられており、同期位相にのみ依存する。同期位相 $|\phi_s|$ は、単位セルの中心間距離を制御することで制御される。式 (64) と式 (65) を組み合わせは、バンチ長を一定に保つための、$\beta$ の関数としての、加速効率 $A(\beta_s)$ と同期位相 $\phi_s(\beta_s)$ の両方を特定する処方箋を与える。

実際の RFQ では、典型的には、50 ≅ 100keV の低エネルギーの粒子を、初期の同期位相 $\phi_s \cong -\pi/2$ で RFQ に入射する。この同期位相では、セパラトリクスは最大の位相幅をもち、位相方向のアクセプタンスは最大である。ビームを捕捉し、バンチを始めたら、同期位相 $\phi_s$ を、少しずつ増やしていく。電極のモジュレーションと加速電場は初めは小さいので、収束は 4 重極項が支配的であり、縦方向と横方向のダイナミクスはほとんど結合が無い。ビームのバンチングが進むと、電極のモジュレーションの振幅は増えていく。加速セクションでの同期位相 $\phi_s$ は一定（典型的には –30°）にするので、ジェントルバンチャー出口での $\beta_s$ は、式 (65) によって決まる。入射の DC ビームのバンチングを、断熱的に行おうとすると、無限大の長さが必要となる。ふつうは、シェイパーと呼ばれるセクションで、位相と加速効率を軸方向の距離に比例して立ち上げるとう方法を用いて、予備的なバンチングが行われる。バンチングが終了したら、あとは $\phi_s$ 一定で要求エネルギーまで加速する。

## 11 おわりに

以上、RFQ のビーム力学の基礎について解説した。ビーム力学の勉強をしながら、力学や電磁気学の教科書を読み直すと、新たな発見があったり、忘れていたことを思い出したりしてなかなかに楽しいものである。RFQ 固有の部分は実はあまり多くなく、ほとんどが普通のリニアック、（もしくは加速器全般）に適用できることなので、あまりこれまでビーム力学に親しんでいない方はぜひこの機会に勉強してみて下さい。

## 参考文献


[1] I. M. Kapchinskii and V. V. Teplyakov. Linear ion accelerator with spatially homogeneous strong focusing. *Prib. Tech. Eksp.*, Vol. 2, pp. 19–22, 1970.

[2] 徳田登. RFQ 線形加速器. 高エネルギー加速器セミナー OHO'96, 1996.

[3] Thomas P. Wangler. *RF Linear Accelerators*. Wiley-VCH, 2nd, completly revised and enlarged edition, 2008.

[4] 上垣外修一. *Beam Dynamics in RFQ Linacs*.

[5] J. D. ジャクソン. 電磁気学. 吉岡書店, 原書第 3 版, 2002.

[6] K. R. Crandall. Effents of vane-tip geometry on the electric fields in Radio-Frequency Quadrupole linacs. Technical Report LA-9695-MS, Los Alamos National Laboratory, April 1983.

[7] Kenneth R. Crandall, et al. RFQ design codes. Technical Report LA-UR-96-1836 Reviced December 7, 2005, Los Alamos National Laboratory, 1996.

[8] Tomas P. Wangler. Space-charge limits in linear accelerators. Technical Report LA-8388, Los Alamos National Laboratory, December 1980.

[9] Martin Reiser. *Theory and Design of Charged Particle Beams*. Wiley-VCH, 2nd edition, 2008.

[10] ランダウ, リフシッツ. 力学. 東京図書, 増訂第 3 版, 1986.

[11] K. R. Crandall, R. H. Stokes, and T. P. Wangler. RF quadrupole beam dynamics design studies. In *Proceedings of 1979 Linear Accelerator Conferance*, pp. 205–216. Montauk, NY, USA, 1979.