ビーム不安定性

電子雲、イオン、CSR

大見　和史　(KEK加速器)

OHO'11
2011年9月6–9日

加速器における諸問題

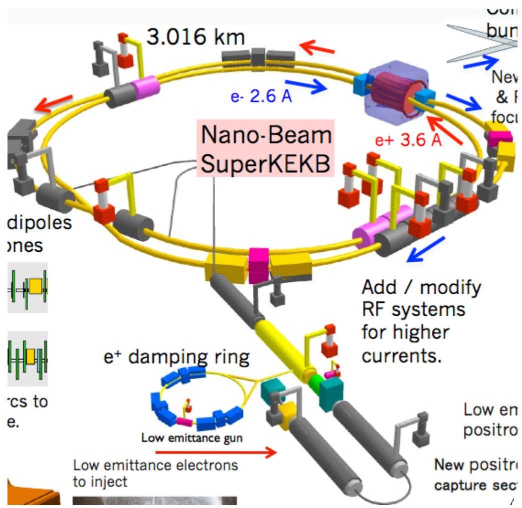
- 軌道のずれ
- 振動　　不安定性（高密度）
- ビームサイズ（エミッタンス）の 増大
  結合（線形、非線型）
  拡散（放射光、非線形、高密度）
  不安定性（高密度）

- ビーム寿命、ビームロス
  急激な軌道、振動、サイズ増大

KEKの加速器

	Energy	長さ	current	#bunch	bunch shape	粒子数 (bunch)
	GeV	m	A		mm	10^{10}
KEK-Linac	8max	480		(50Hz)		1-10
KEKB	4&7	3016		1600	0.1x0.001 x5	6
KEK-PF	2.5	187	0.5	250	1x0.1x10	0.5
ATF	1.5	139		1-	0.2x0.02 x5	1
J-PARC(RCS)	0.2->3	348		2	20x20x 70000	4000
J-PARC(MR)	3->30	1567		8	10x10x 20000	4000

運動エネルギー



世界の加速器

	Energy	長さ	current	#bunch	bunch shape	粒子数 (bunch)
	GeV	m	A		mm	10^{10}
LHC (2011)	3500	26670	0.2	1000		11
LHC (design)	7000	26670	0.5	2808	0.016x0.016x75	11
Tevatron	1000	6000		36	0.04x0.04x430	30
RHIC	200	3833			0.07x0.07x500	40
SPring8	8	1436	0.1		0.2x0.02x4	0.3-1
LCLS (SLAC FEL)						1

衝突加速器のバンチ形状は衝突点

ビーム不安定性
ビーム強度の増加に関する問題

- 相対論的粒子は直接粒子同士の相互作用はしない。
- 周辺の境界条件(電磁場)、他種粒子を媒介として自身の強度に関係する問題が発生する。
- 非相対論的ビームでの空間電荷効果

加速器業界標準の変数

運動をｓをパラメータとして記述。ｔではない。

- 正準共役

$$\hat{p}_x = \frac{p_x}{p_0} \approx x' = \frac{dx}{ds}$$

$$z = -\beta c t \quad \hat{p}_z = \frac{p - p_0}{p_0}$$

z>0 前方

想定より早く到着

t : s への到着時刻 は力学変数。

- 運動量は重心の全運動量で規格化、ビーム粒子の進行方向に対する傾き

- 位相空間 $x - \hat{p}_x$

以降 ^ は省く

個々のビーム粒子の(線形)運動

$$\boldsymbol{x}_x(s_0+L) = M\boldsymbol{x}_x(s_0)$$
$$\boldsymbol{x}_x(s_1) = M(s_1, s_0)\boldsymbol{x}_x(s_0)$$

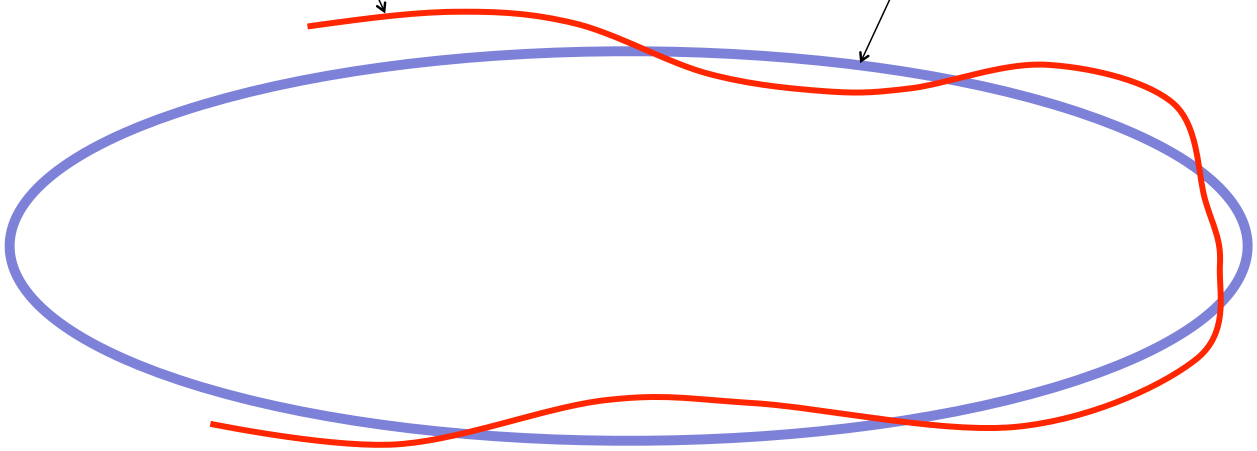
- 周回毎に位相空間の位置の位相角がμ回転する。
- リング内各所で位相角は少しづつ回転して、1周後μ回転する。μの2πx整数部が意味を持つ
- リング内各所で最大振幅が変わる。
- 1周あたりの位相角の回転数をチューンという。

ν=μ/2π

$$\omega = \nu\omega_0 = \mu f_0$$

ベータトロン振動

- ビームの個々の荷電粒子は設計軌道の周りを水平、垂直方向に振動する。その振動をベータトロン振動($\omega_{\beta x}$,$\omega_{\beta y}$)という。

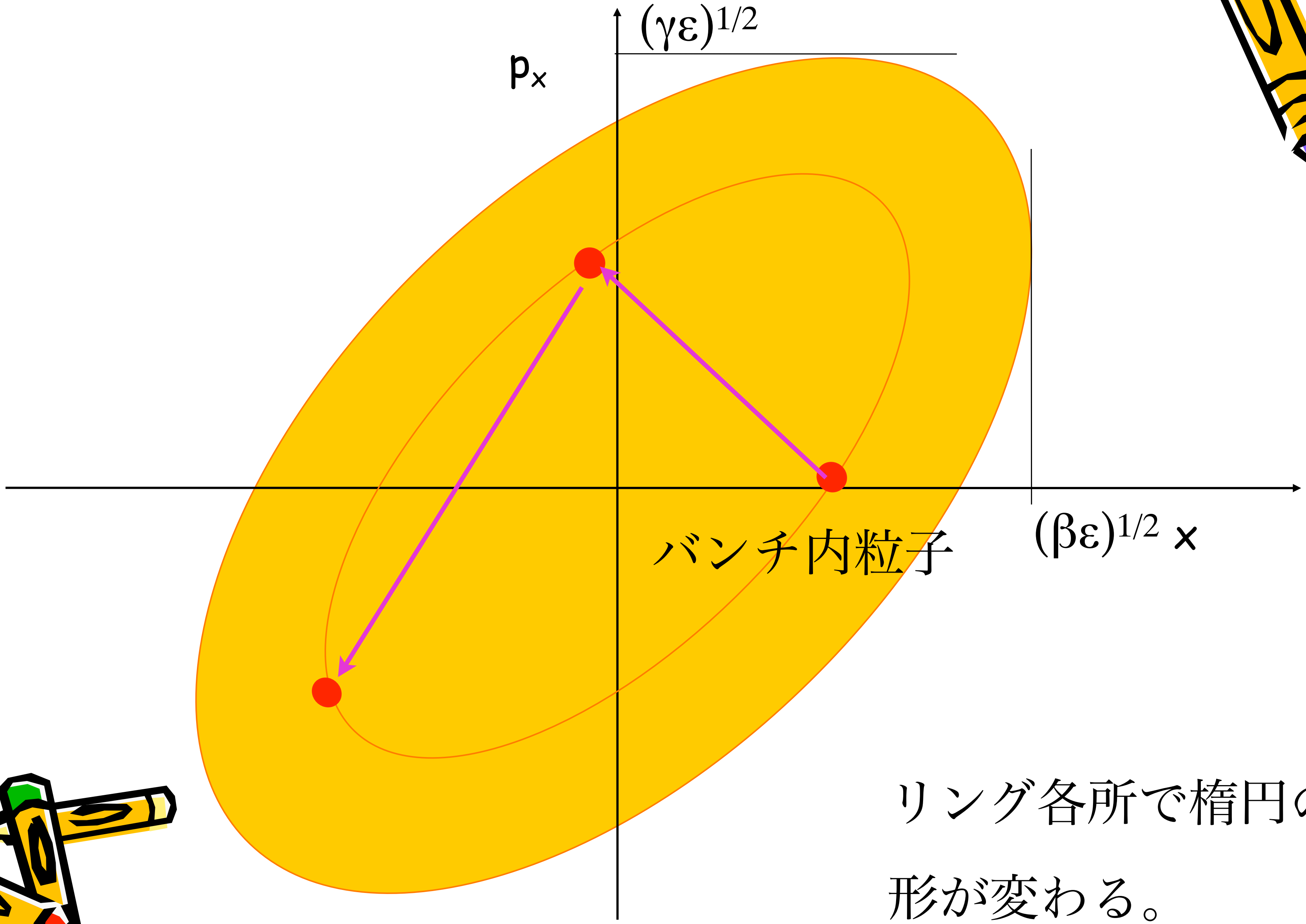


$$\omega = \nu\omega_0 = \mu f_0$$

ω_0: 周回角周波数、f_0: 周回周波数

$$f_0 = c/L$$

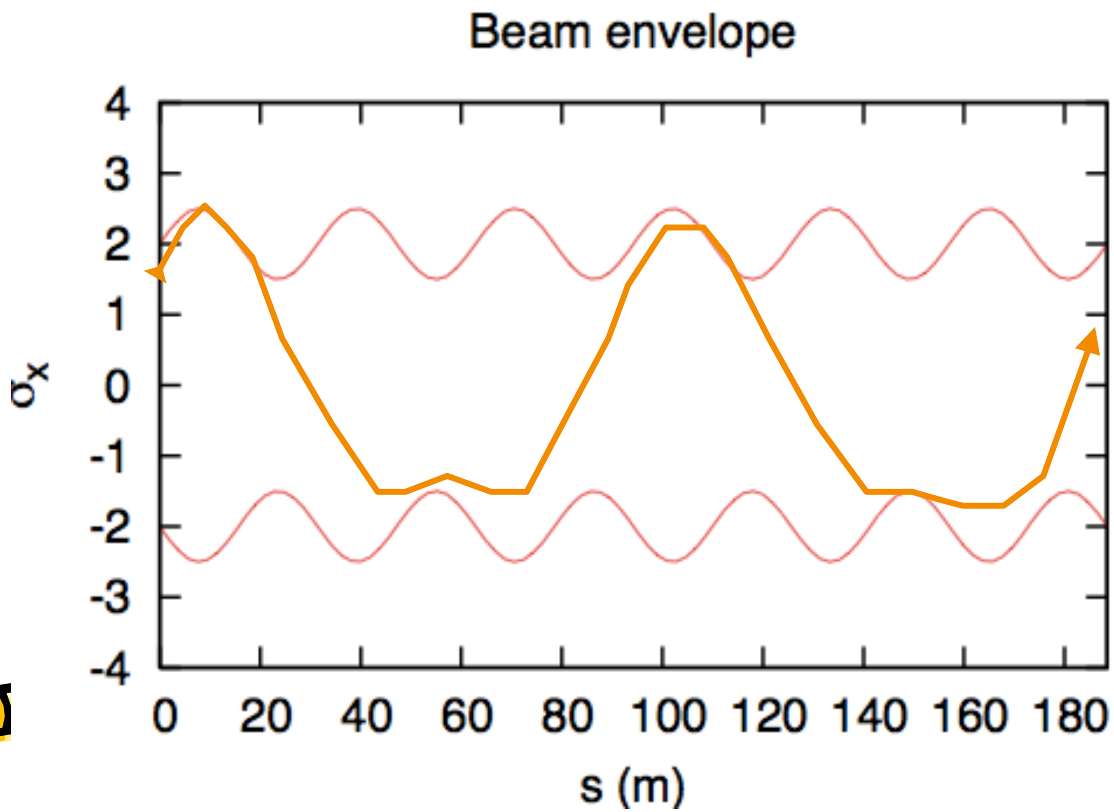
周回ごとの粒子の運動



リング各所で楕円の形が変わる。

周回中の粒子の運動

- 包絡線



例

０を4回横切る
ν_β~2

リング各所で前ページの楕円の形が変わる。

ビーム(バンチ)の重心運動

$$\boldsymbol{x}_x(s_0 + L) = M\boldsymbol{x}_x(s_0)$$

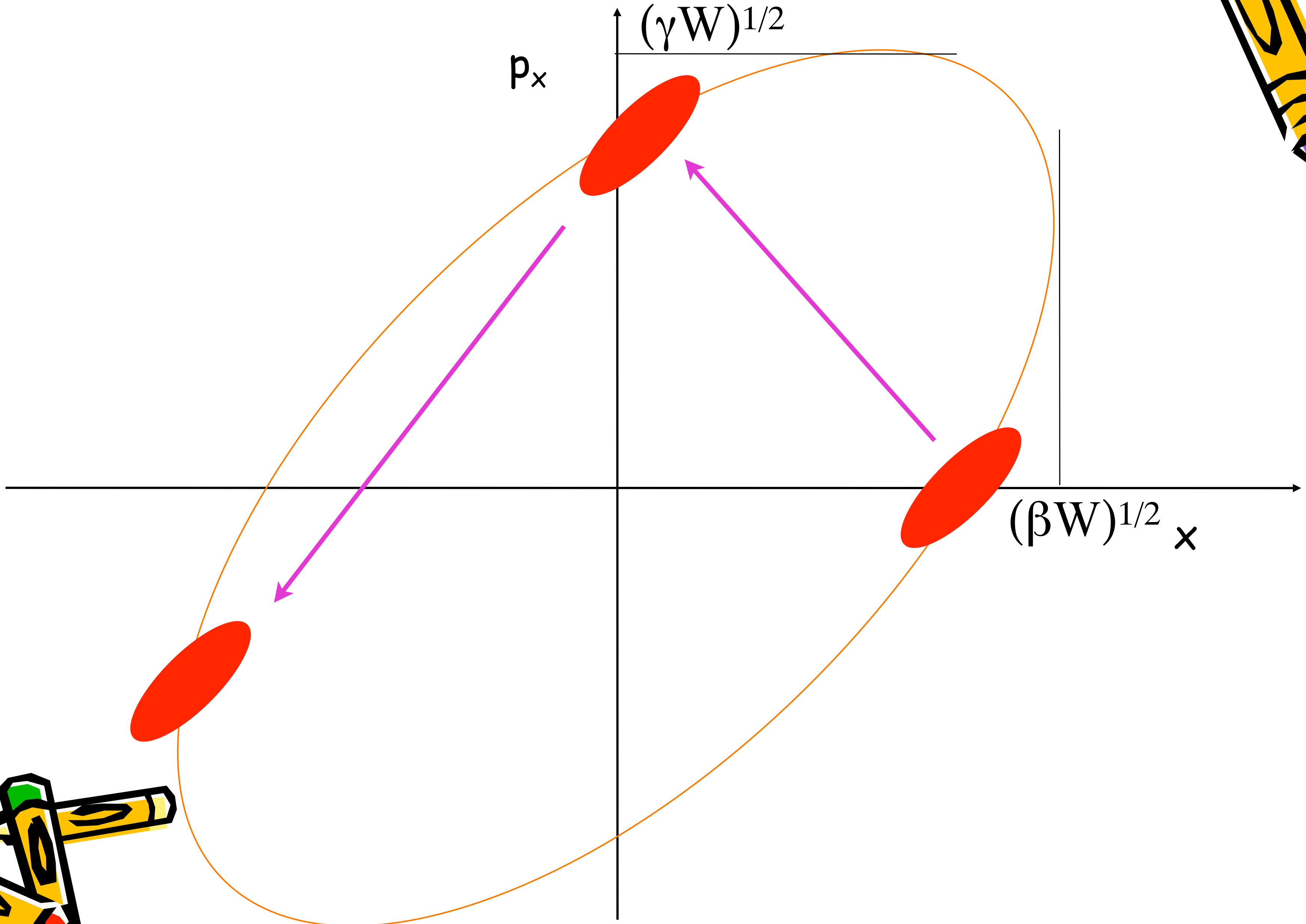
- 周回毎に位相空間の位置の位相角がμ回転する。
- リング内各所で位相角は少し付く回転して、　1周後μ回転する。μの2πx整数部が意味を持つ
- リング内各所で最大振幅が変わる。
- 1周あたりの位相角の回転数をチューンという。

ν=μ/2π

$$\omega = \nu\omega_0 = \mu f_0$$

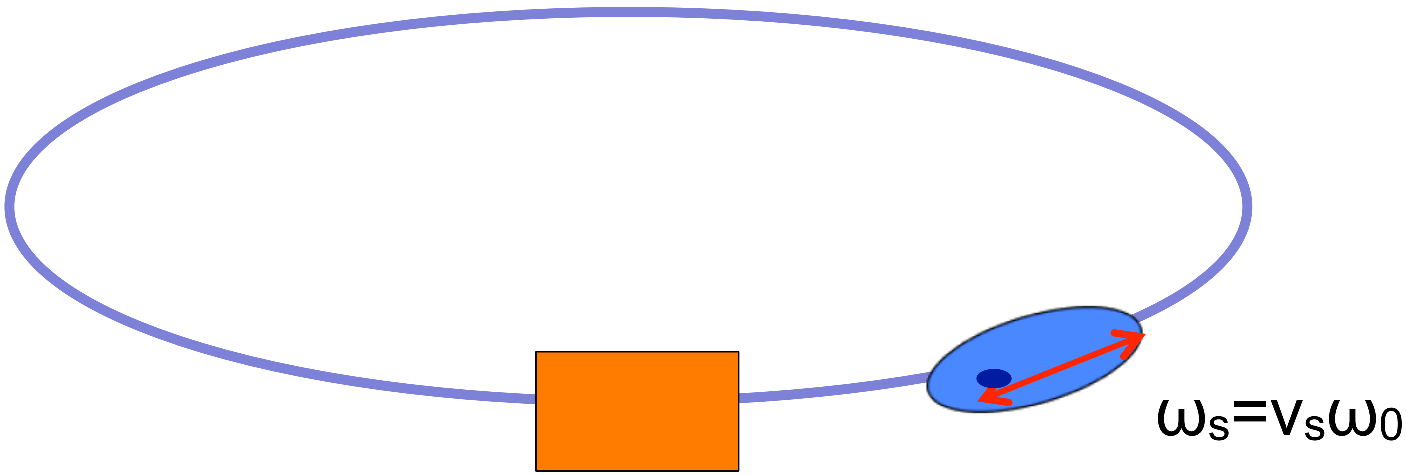
個々の粒子と同じ

周回ごとのバンチの運動



シンクロトロン振動

- ビーム重心は高周波加速装置の周波数に同期した(ある位相の)タイミングで加速装置を通過する。
- ビームはその位相に応じて加速装置からエネルギーを受け取る。
- ビームの個々の粒子はその位相に対して、進んだり遅れたりして振動する。この振動をシンクロトロン振動(ω_s)という。



ν_sは一般に1より小さい。0.025((S)-KEKB),0.01(KEK-PF)

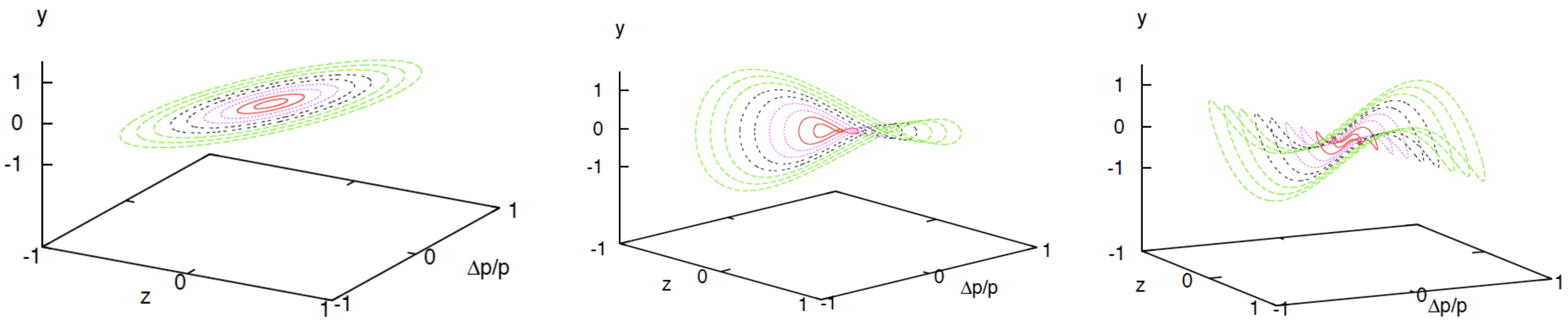
ビームの振動モード

- 基本的には個々のビーム粒子はベータトロン振動、シンクロトロン振動をしている。
- 集団としての振動モード

ビームの振動モード
単バンチ

- $\omega = \omega_\beta \pm m\omega_s$

- m=1　　　　m=2　　　　m=3

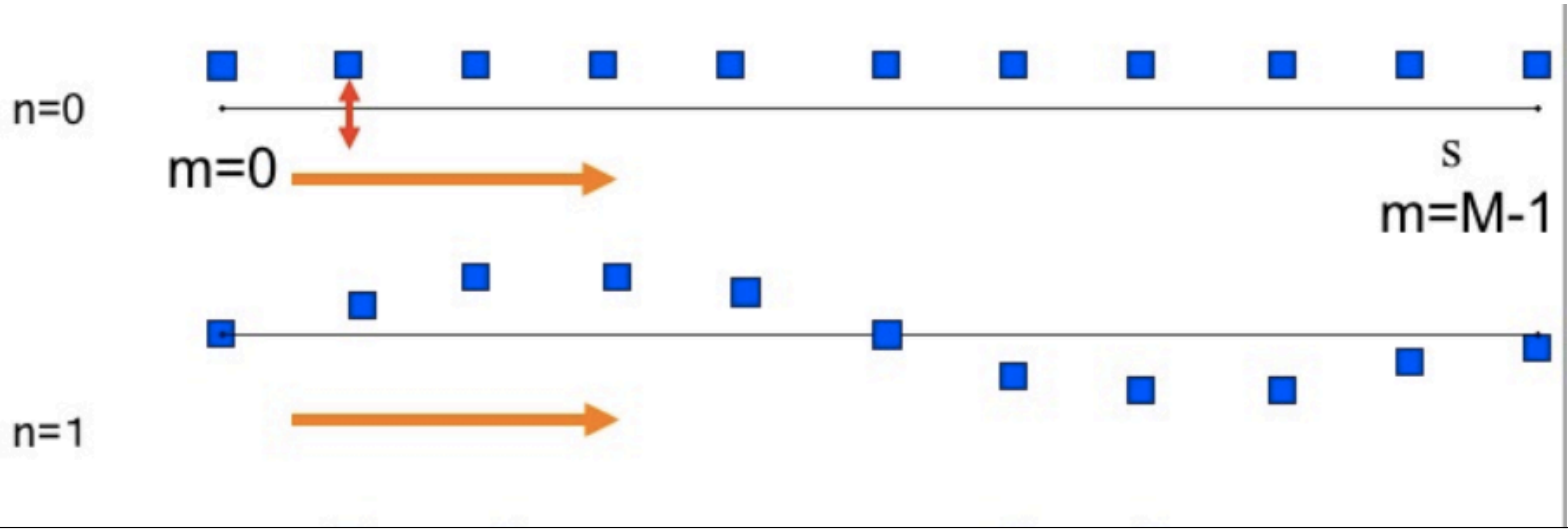


ビームの振動モード

多バンチ

- m: バンチID、n: mode number

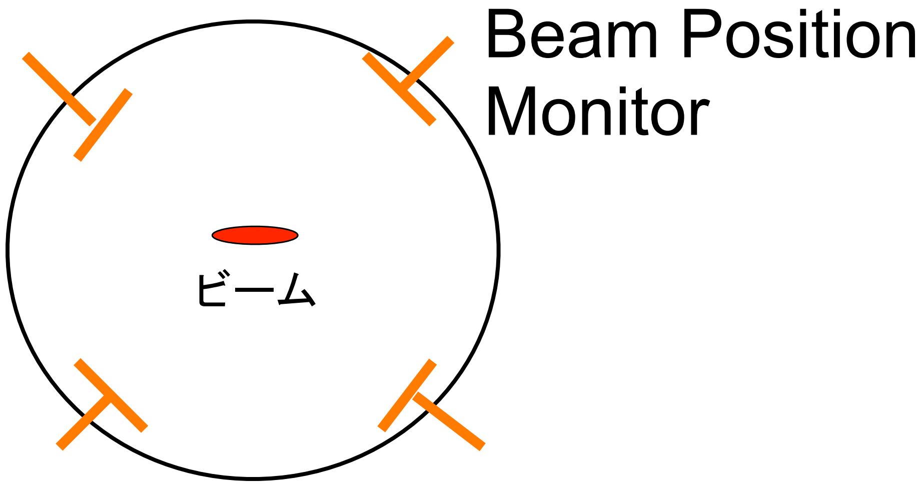
$$y_m(t) = a^{[n]} \exp\left(2\pi i \frac{nm}{M} - i\omega_\beta t\right) \qquad (12)$$



ビームの(位置)モニター

- リングのいろいろな場所にはビーム位置モニター(BPM)をつける、ビームの速い(バンチごと毎周)位置検出を行う。
- リングのある場所でビームの横方向の重心位置を観測するとビームがベータトロン振動していると、角周波数 $|n\omega_0+\omega_\beta|$ の振動が観測される。
- シンクロトロン振動しながらベータトロン振動する場合、$|n\omega_0+\omega_\beta+n_s\omega_s|$
- nは整数、あとでまた意味を持って現れる。

普通はしていない。振動数を測定するとき揺する。不安定の時観測される。



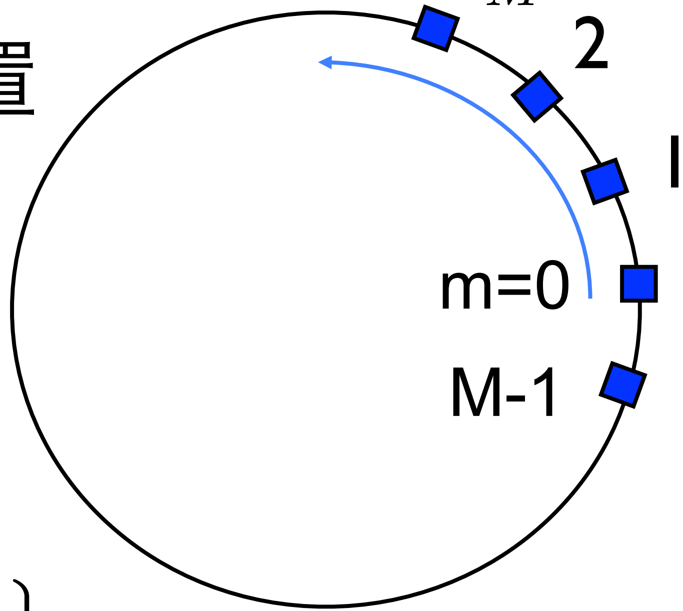
モニターで見たバンチ振動

- モードnによるバンチm (=0...M-1)の振動

$$y_m(t) = a^{[n]} \exp\left(2\pi i \frac{nm}{M} - i\omega_\beta t\right)$$

- バンチmのモニターへの到着時刻

$$ct_m = -\frac{mL}{M}$$



- モニターの観測するバンチ位置

$$y(t) = \sum_{m=0}^{\infty} y_m\left(-\frac{mT_0}{M}\right)\delta\left(t - \frac{mT_0}{M}\right) \qquad (13)$$

$$= a^{[n]} \sum_m \exp\left[\frac{2\pi i m}{M}(n + \nu_\beta)\right]\delta\left(t - \frac{mT_0}{M}\right)$$

- 信号のフーリエ成分

$$\int y(t)e^{-\omega t}dt = \sum_m \exp\left\{im\left[(n+\nu)\omega_0 + \omega\right]\frac{T_0}{M}\right\}$$

$$= \sum_p \delta\left[\omega - (n + \nu + pM)\omega_0\right]$$

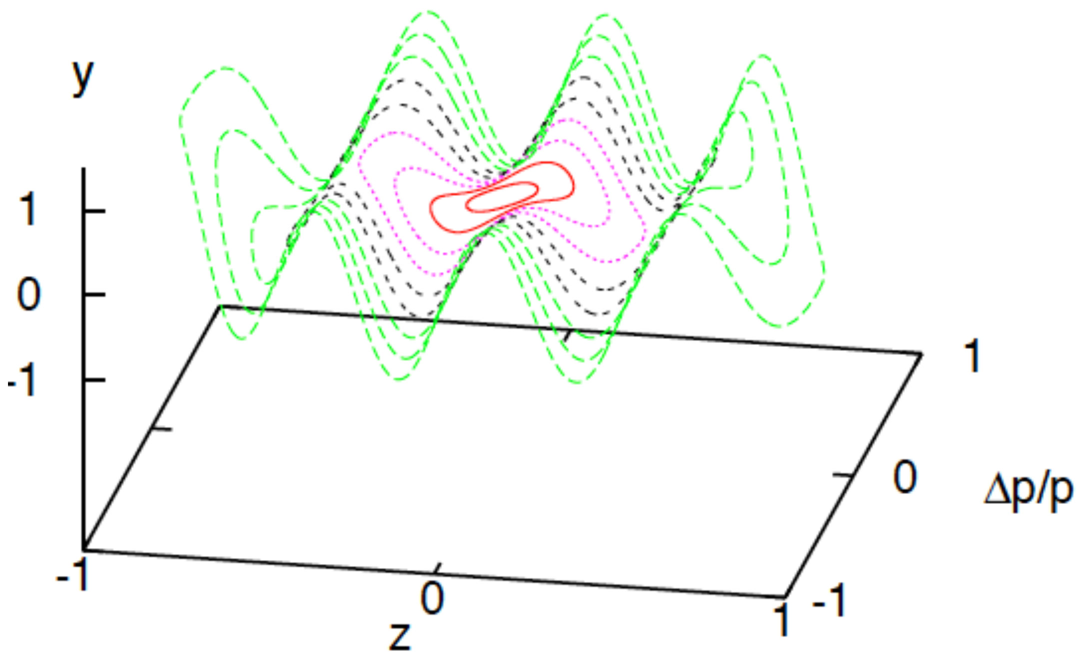
公式

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(im\omega T_0) = \omega_0 \sum_{p=\infty}^{\infty} \delta(\omega - p\omega_0)$$

ビームの振動モード
単バンチ (別の見方)

- M→∞, p=0のみ採る。

$$\delta\left[\omega-(n+\nu)\omega_0\right]$$



どうなったら不安定が起きる

- リングのある場所に$|n\omega_0+\omega_\beta|$の周波数で振動しビームと結合する何かがあり、共振する。
- 何かとは真空パイプに誘起された電磁場、イオン、電子...

航跡力

- 後方にしか摂動が伝わらない。W(z>0)=0
- 後方への影響は前方の変位に比例。重ね合わせが成り立つ。

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2x}{ds^2} + K_x(s)x &= -\frac{Nr_0}{\gamma L}\int_{-\infty}^{\infty} W_x(z-z')\rho_{1,x}(z')dz' \\
\frac{d^2y}{ds^2} + K_y(s)y &= -\frac{Nr_0}{\gamma L}\int_{-\infty}^{\infty} W_y(z-z')\rho_{1,y}(z')dz' \\
\frac{d^2z}{ds^2} + \frac{\mu_s^2}{L^2}z &= -\frac{Nr_0}{\gamma L}\int_{-\infty}^{\infty} W_0'(z-z')\rho_0(z')dz
\end{aligned}
\tag{1}
$$

- Wがある周波数成分を持つ場合、ρ(z')もその周波数成分を持つと大きい効果。

共振子モデルとインピーダンス

- ある周波数成分を持った航跡場

$$W_1(z) = cR_S/Q \sin \omega_c t \qquad (35)$$

- インピーダンス

$$Z_\perp(\omega) = i\int_{-\infty}^{\infty} W(t)\exp(-i\omega t)dt$$

$$\begin{aligned} \Re Z\perp &= \frac{\pi c R_S}{2Q}\left[\delta(\omega-\omega_c)-\delta(\omega+\omega_c)\right] \\ \Im Z_\perp &= \frac{cR_S\omega_c}{2Q}\left(\frac{1}{\omega-\omega_c}+\frac{1}{\omega-\omega_c}\right) \qquad (39) \end{aligned}$$

- 減衰がある場合

$$W(z) = cR/Q\exp(\alpha z/c)\sin(\omega z/c) \quad z<0 \quad (55)$$

$$Z_\perp(\omega) = \frac{c}{\omega}\frac{R_S}{1+iQ\left(\frac{\omega_c}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_c}\right)} \qquad (56)$$

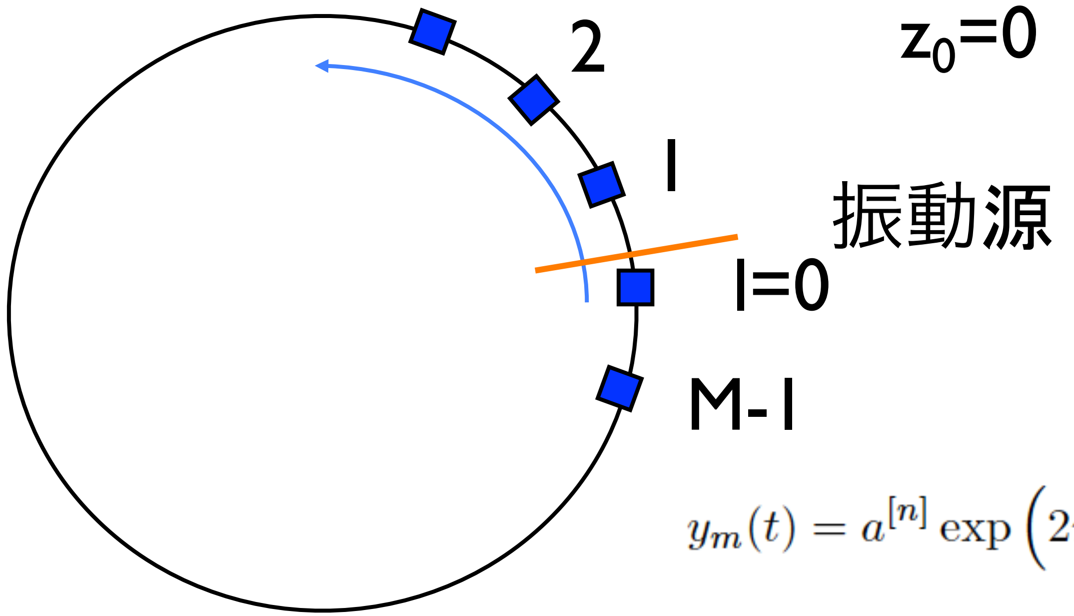
バンチ結合型不安定性(x-y)

- バンチは均等に同じ粒子数(N)が詰まっている。

$$\frac{d^2 y_m(s)}{ds^2} + \left(\frac{\omega_\beta}{c}\right)^2 y_m(s)$$

$$= \frac{N r_e}{\gamma L} \sum_{\ell=m}^{N_w+m} W(z_\ell - z_m) y_\ell(s + z_m - z_\ell)$$

$z_0=0$ $z_m=mL/M$ $s=ct$



$$y_m(t) = a^{[n]} \exp\left(2\pi i \frac{nm}{M} - i\omega_\beta t\right) \qquad (12)$$

解、不安定モード

$$y_m(s) = a^{[n]} \exp\left(2\pi i \frac{mn}{M} - i\frac{\boxed{\omega}}{c}s\right)$$

$$\frac{-\omega^2 + \omega_\beta^2}{c^2} = \frac{2\omega_\beta(-\omega + \omega_\beta)}{c^2}$$

$$= \frac{Nr_e}{\gamma L} \sum_{\ell=0}^{N_w} W(\Delta z_\ell) \exp\left[2\pi i \frac{(n+\nu)\Delta z_\ell}{L}\right]$$

$$z_0 = 0 \quad \Delta z_\ell = \ell L/M$$

Im(μ_n) < 0 のモード n が不安定 $\nu_\beta = \omega_\beta/\omega_0$

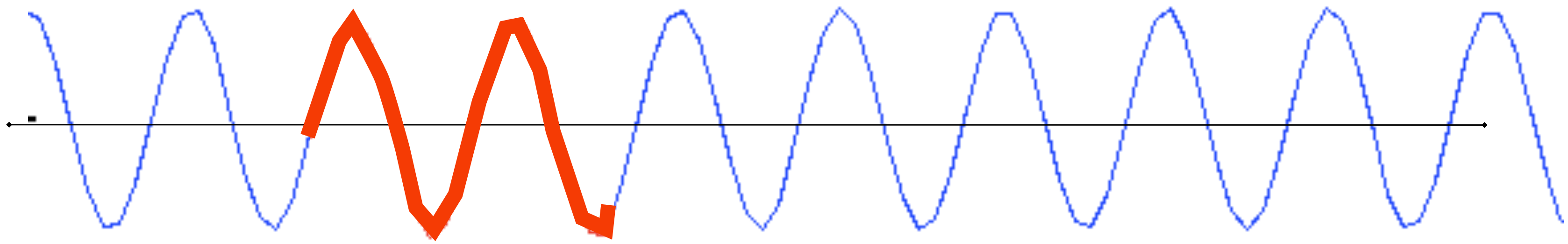
$\omega \approx \omega_\beta$ だが小さな周波数シフトと、虚数部分があり、不安定を起こす。

単バンチ不安定性

- リング全体にビーム粒子が一様に満たされていると考える。(coasting beam)

- M→∞の極限

- 航跡場の相関距離が短い場合、ビーム粒子が一部に存在している場合と同じと考える。



$$\frac{-\omega^2+\omega_\beta^2}{c^2}=\frac{\rho_z r_e}{\gamma L}\int_0^{L_w} dz W(z)\exp\left[2\pi i\frac{(n+\nu)z}{L}\right]$$

ビームー粒子雲相互作用

- 陽電子バンチー電子 KEKB
- 陽電子ビーム(バンチ列)ー電子 KEKB
- 電子バンチーイオン KEKB, KEK-PF
- 電子ビーム(バンチ列)–イオン KEKB, KEK-PF
- 陽子バンチー電子 J-PARC

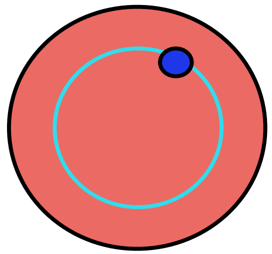
LHC 陽子–電子はKEKBの陽電子–電子に近い

ガウスの法則

$$div\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\epsilon_0}\int \rho d\boldsymbol{x}$$

- 半径R=0.5mm長さl=12mm粒子数N=5x10^{10}の光速で走るバンチの作る電場、磁場

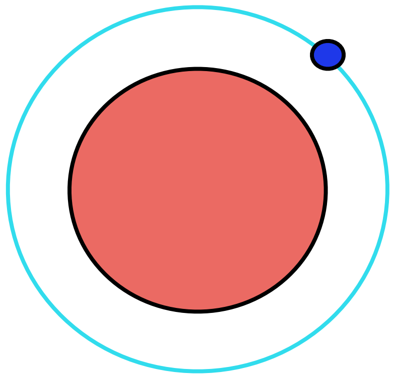
- バンチ内



$$2\pi r E_r = \frac{Ne}{\epsilon_0 \ell}\frac{r^2}{R^2} \qquad E_r = \frac{Ne}{2\pi\epsilon_0 \ell R^2} r$$

$$E_r = 4.8\times 10^{10} r [V/m]$$

- バンチ外



$$2\pi r E_r = \frac{Ne}{\epsilon_0 \ell} \qquad E_r = \frac{Ne}{2\pi\epsilon_0 \ell}\frac{1}{r}$$

$$E_r = \frac{1.2\times 10^4}{r}[V/m]$$

陽電子バンチー電子

- 電子の線形振動

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{e}{m_e}E_y = -\frac{Ne^2}{2\pi\epsilon_0 m_e \ell R^2}y = -\frac{2N}{\ell}r_e c^2 \frac{y}{R^2}$$

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} = 2.81794 \times 10^{-15} m$$

- 電子の振動数

$$\omega_e = \sqrt{\frac{2N}{\ell}\frac{r_e c^2}{R^2}}$$

$$\omega_e = 2\pi \times 14.6 GHz$$

- バンチ内で何回振動するか

$$\omega_e \ell / c = \sqrt{\frac{2N r_e \ell}{R^2}} = 3.7$$

陽電子バンチ列ー電子

- バンチ間隔　~1m, 4ns
- その間隔の間に電子は遠くに行ってしまうが電子が多いためビームへの影響は大きい。

電子バンチーCOイオン

- イオンはバンチ内で動かない。

$$\omega_{CO} = \sqrt{\frac{2N}{\ell}\frac{r_m c^2}{AR^2}} = 2\pi \times 64MHz$$

$$\omega_{CO}\ell/c = 0.016rad$$

電子バンチ列ーCOイオン

- イオンはバンチ間で0.15rad回転、40バンチで1周期、有意な運動

$$\bar{\omega}_{CO} = \sqrt{\frac{2N}{L_{SP}}\frac{r_m c^2}{AR^2}} = 7MHz$$

$$\bar{\omega}_{CO}L_{sp}/c = 0.15$$

陽子バンチー電子

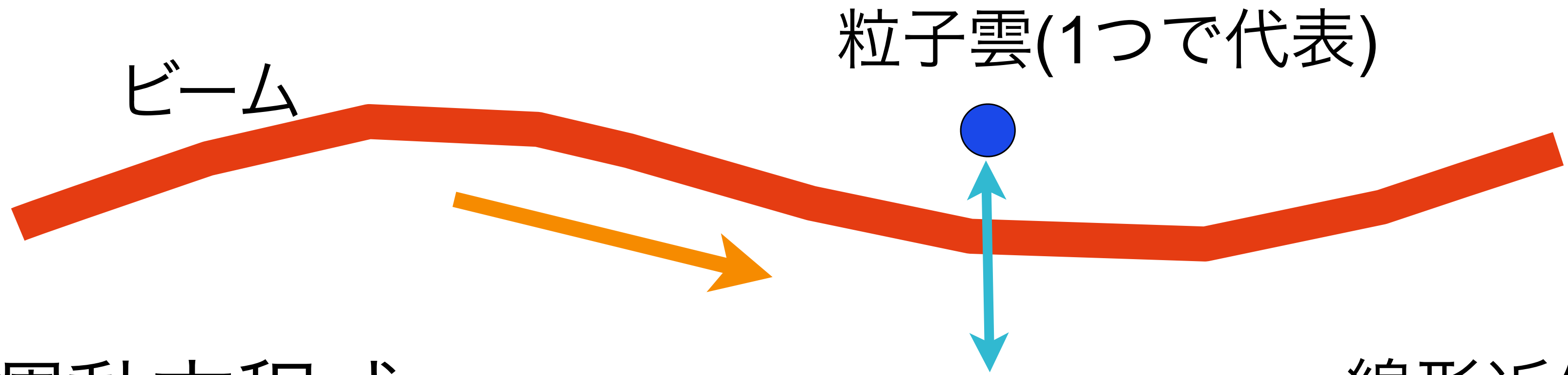
- 半径R=20mm長さl=20m粒子数N=4x10^{13}

$$\omega_e = \sqrt{\frac{2N}{\ell}\frac{r_e c^2}{R^2}} = 2\pi \times 250MHz$$

$$\omega_e \ell / c = 106$$

- バンチ間隔は数10mなので、ほとんどの電子は次がくる前になくなり、相関、影響は少ない。

ビームー粒子雲相互作用



- 運動方程式

線形近似

$$F_y = \frac{y}{\sigma_y(\sigma_x + \sigma_y)}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 y_b(s,t) + \omega_\beta^2 y_b(s,t) = -\frac{2n_c r_b c^2}{\gamma} F(y_b(s,t) - y_c(s,t)) \quad (21)$$

$$\frac{d^2 y_c(s,t)}{dt^2} = -2n_b r_c c^2 F(y_c(s,t) - y_b(s,t)) \quad (22)$$

ビームー荷電粒子間力 F

- 次元　m^{-1}.
- 線形近似　σ:ビームサイズ
- 円形ガウス分布ビーム

$$F_x \approx \frac{x}{\sigma_x(\sigma_x + \sigma_y)}$$

$$F_y \approx \frac{y}{\sigma_y(\sigma_x + \sigma_y)}$$

$$F_r = \frac{1 - e^{-r^2/2\sigma_r^2}}{r} \qquad F_r \approx \frac{r}{R^2}$$

- 楕円ガウス分布ビーム

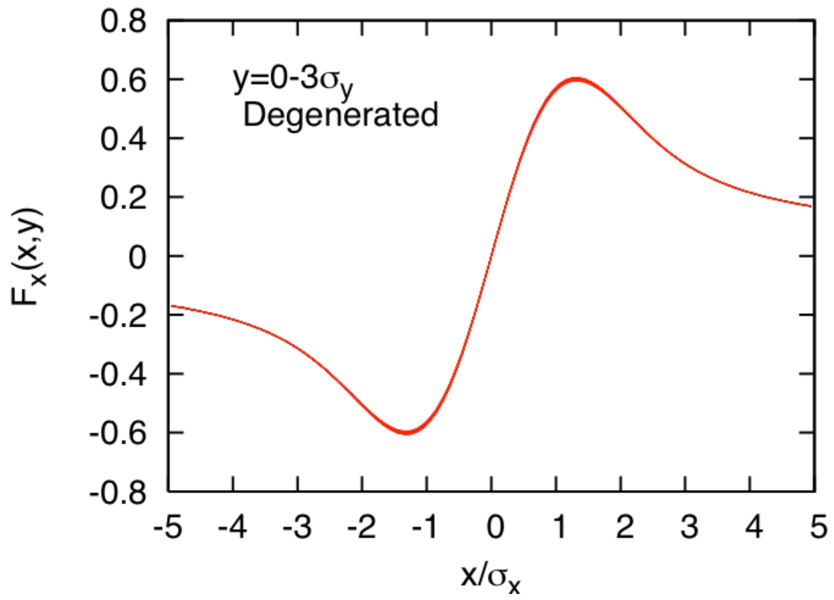
$$F_y + iF_x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}}\left[w\left(\frac{x + iy}{\sqrt{2(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}}\right) - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)w\left(\frac{(\sigma_y/\sigma_x)x + (\sigma_y/\sigma_x)y}{\sqrt{2(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}}\right)\right]$$

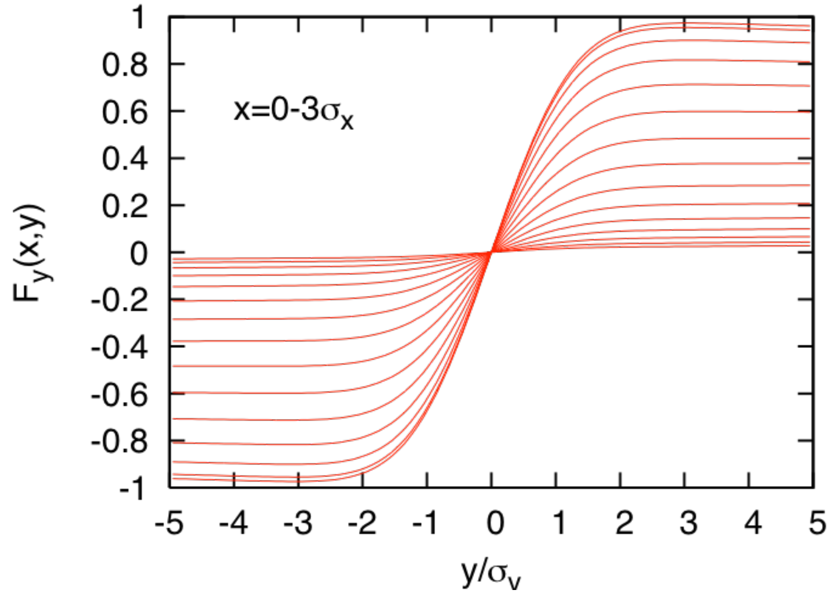
平板ビームのF

一般的な電子陽電子リング

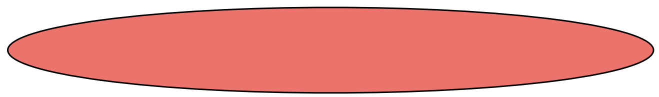
$$F_x \approx \frac{x}{\sigma_x(\sigma_x+\sigma_y)} \qquad F_y \approx \frac{y}{\sigma_y(\sigma_x+\sigma_y)} \qquad \sigma_x \approx 10\sigma_y$$

- Fxはyによらないが、Fyはxによる。





- $\omega_{e,y}$はxに対して広がりを持つ。



粒子雲による航跡力(線形近似)

- 粒子雲の運動(式(21)を積分、$t=t_0$で$y_c=0$)

$$y_c = \omega_c \int_{t_0}^{t} y_b(s,t')\sin\omega_c(t-t')dt' \qquad (32)$$

- 式(22)に代入

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_s\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 y_b(s,t) + \tilde{\omega}_\beta^2 y_b(s,t)$$
$$= \omega_b^2\omega_c \int_{t_0}^{t} y_b(s,z')\sin\omega_c(t-t')dt'. \quad (33)$$

- 航跡力

$$W_1(z) = cR_S/Q\sin\omega_c t \qquad (35)$$

$$cR_S/Q = \frac{\gamma\omega_b^2\omega_c}{n_b r_c c^2}T_0.$$

実効インピーダンス

- ビームからの力が非線形で、周波数広がりがある。
- 粒子雲の振動が減衰する場合
- $$\frac{d^2 y_c}{dt^2} + \alpha \frac{dy_c}{dt} = 2 n_b r_c F(y_c - y_b) \qquad (54)$$

$\alpha = \omega_c / 2Q$ (　　周波数広がり

$$W(z) = cR/Q \exp(\alpha z/c) \sin(\omega z/c) \quad z < 0 \quad (55)$$

$$Z_\perp(\omega) = \frac{c}{\omega} \frac{R_S}{1 + iQ\left(\frac{\omega_c}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_c}\right)} \qquad (56)$$

不安定増幅率(バンチビーム)

$$\frac{Nr_e}{\gamma L}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} W(-\ell L/M)\exp\left[2\pi i\frac{(n+\nu_\beta)\ell}{M}\right]$$

$$= -i\frac{Nr_e}{2\pi\gamma L}\sum_{\ell}\int d\omega \exp\left[\frac{2\pi i}{M\omega_0}\left(\omega - n\omega_0 - \omega_\beta\right)\right] Z(\omega)$$

$$= -i\frac{Nr_e}{2\pi\gamma L}\sum_{p=-\infty}^{\infty} Z[\omega_\beta + (pM+n)\omega_0]$$

- 減衰がない場合 Z~δ(ω±ω_c)

いずれかのpで$\omega_c = -(\omega_\beta + (pM+n)\omega_0)$が満たされたとき

増幅度∞、そうでない場合安定

- 減衰がある場合、増幅度は弱まるが、不安定になる可能性は大きくなる。

不安定増幅率

- コースティングビーム

$$\frac{Nr_e}{\gamma L}\int_{-\infty}^{\infty} dz W(z)\exp\left[-i\frac{(n+\nu_\beta)\omega_0 z}{c}\right]$$

$$= -i\frac{Nr_e}{2\pi\gamma L}Z[\omega_\beta + n\omega_0]$$

- 減衰がない場合 Z~δ(ω±ω_c)

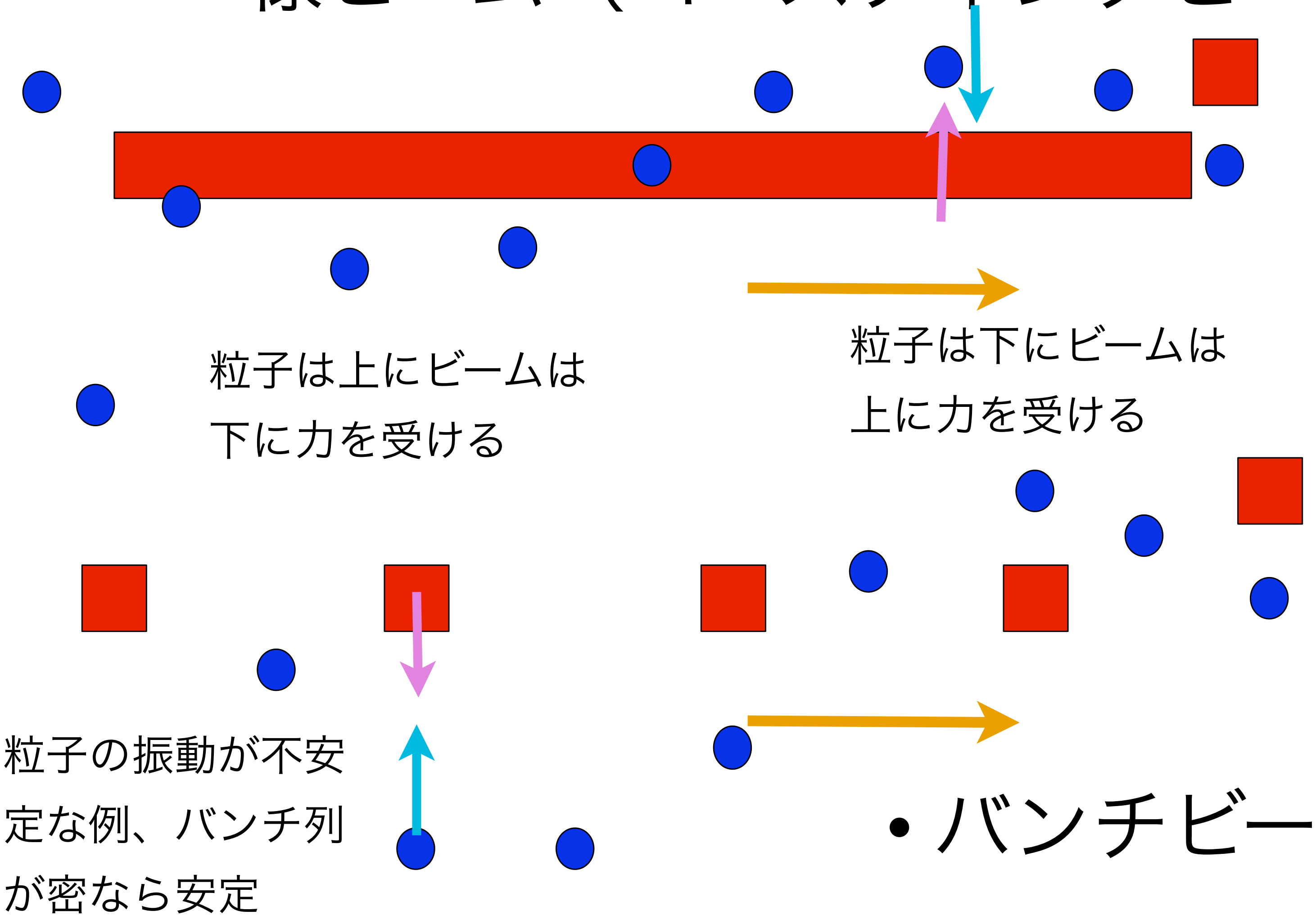
$$\omega_c = -\omega_\beta + n\omega_0$$

において増幅度∞、そうでない場合安定

- 減衰がある場合、増幅度は弱まるが、不安定になる可能性は大きくなる。

粒子雲の実効インピーダンス

- 一様ビーム（コースティングビーム）



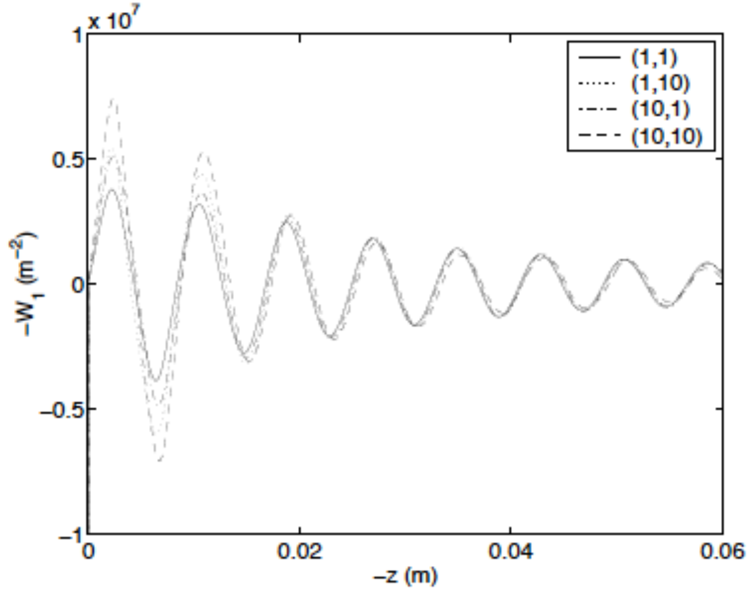
- バンチビーム

Q

- 粒子雲が1つの粒子で一様(コースティング)ビームの場合、粒子に起こった振動は永久に続く。（ポテンシャル問題、ケプラー問題のように）
- 粒子雲がたくさんの粒子で構成されていた場合、それぞれの周波数が異なるため（太陽系の惑星の1年は太陽からの距離による)、重心位置は何周期かの(Q周期)振動の後、指数関数的に減衰。
- 実際、粒子雲はたくさんの粒子で構成されている。
- シミュレーションでQを求める場合、計算する粒子数は、実粒子数より少なくてもいいだろう。

数値的に求めた航跡場、インピーダンス

- 粒子雲の運動が安定な例、ビームが連続分布または粒子の周波数に比べバンチ列が密の場合

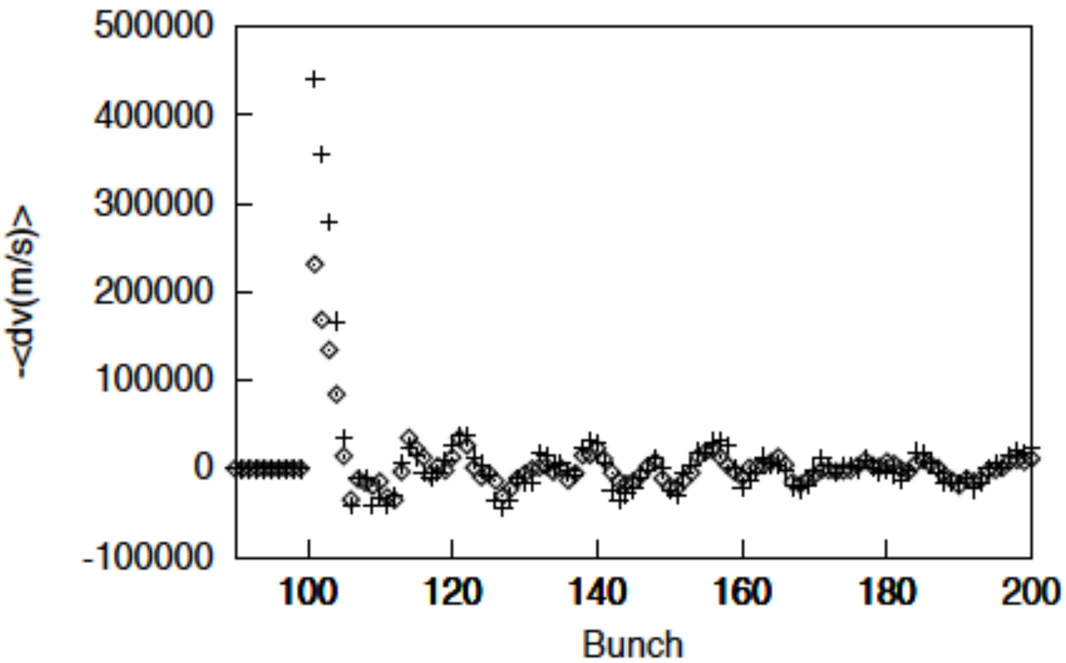
- 

Q=60、電子分布がビームサイズ程度

Q=6.3 電子分布がビームサイズの10倍以上

数値的に求めた航跡場、インピーダンス

- 粒子雲の運動が安定でない例、陽電子バンチ列ー電子



f_e=500MHz/10、

Q=1

後方バンチへの影響は4バンチ位

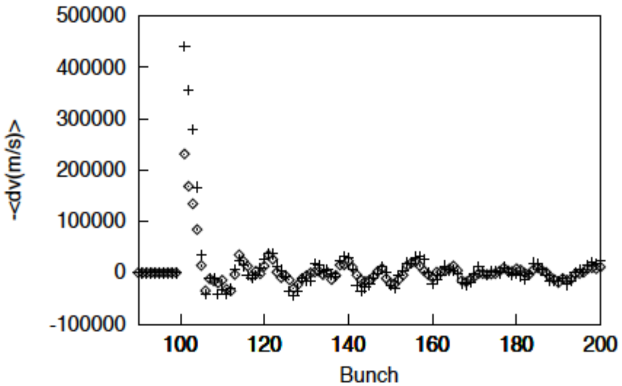
はっきりした周波数はない

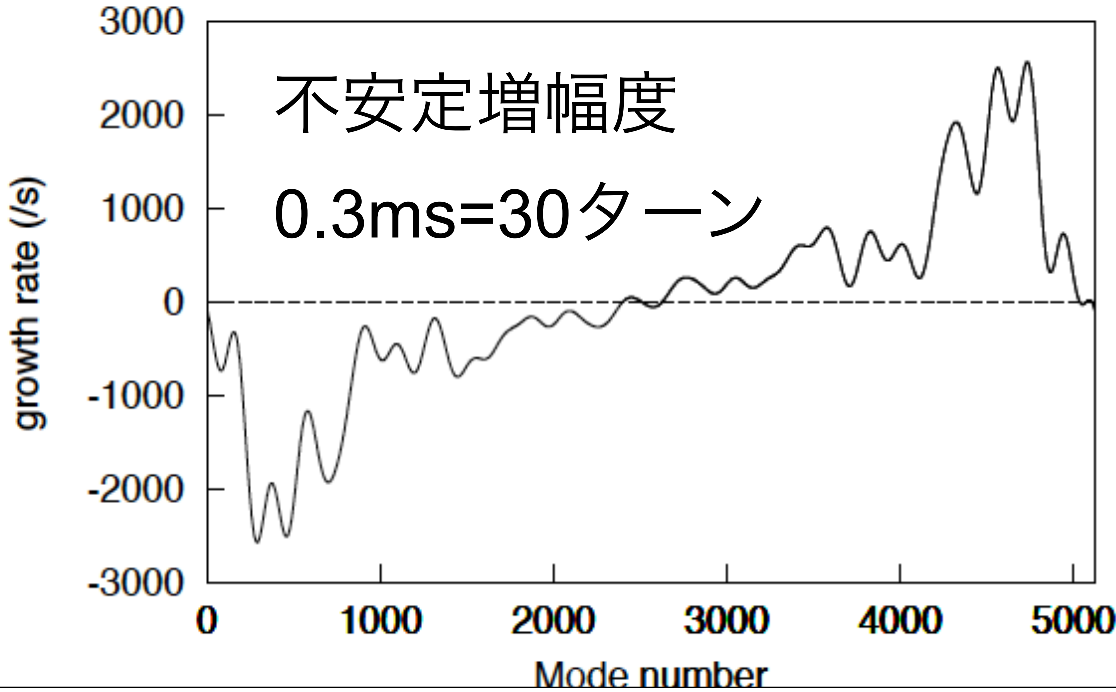
陽電子バンチ列ー電子相互作用でのバンチ結合型不安定性

- インピーダンスより航跡場を足した方が手っ取り早い

$$\frac{-\omega^2+\omega_\beta^2}{c^2}=\frac{2\omega_\beta(-\omega+\omega_\beta)}{c^2}$$

$$=\frac{Nr_e}{\gamma L}\sum_{\ell=0}^{N_w}W(\Delta z_\ell)\exp\left[2\pi i\frac{(n+\nu)\Delta z_\ell}{L}\right]$$





シンクロトロン振動、スリッページ、ランダウ減衰

- コースティングビームあるいはバンチ内不安定性
- エネルギーによってビームの進行方向速度が異なる。

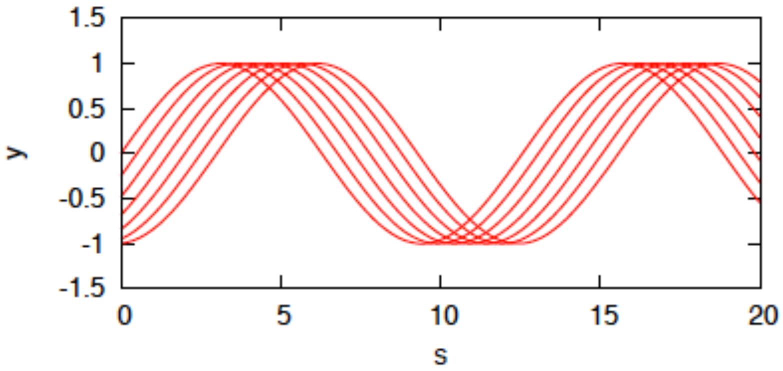
$$\frac{dz}{ds} = \eta p_z = \left(\alpha_m - \frac{1}{\gamma^2}\right) p_z$$

$$\frac{\Delta L}{L} = \alpha_m p_z$$

α_m:モーメンタムコンパクション係数

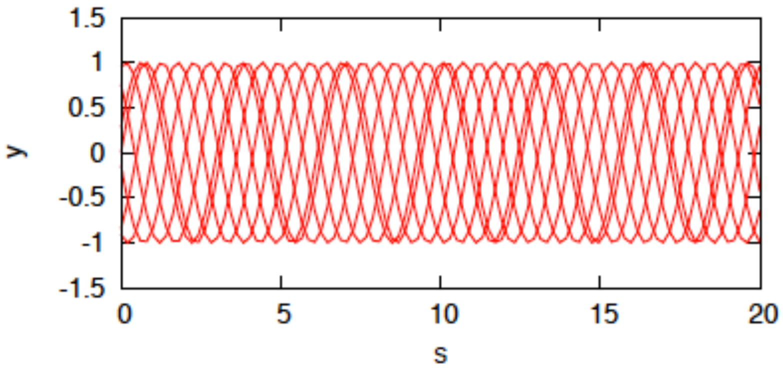
デコヒーレンス、ランダウ減衰

- エネルギーごとにnのモードができても、進行方向速度差で位相がばらけて、重心振幅がなくなってしまう(デコヒーレンス)



遅い周波数

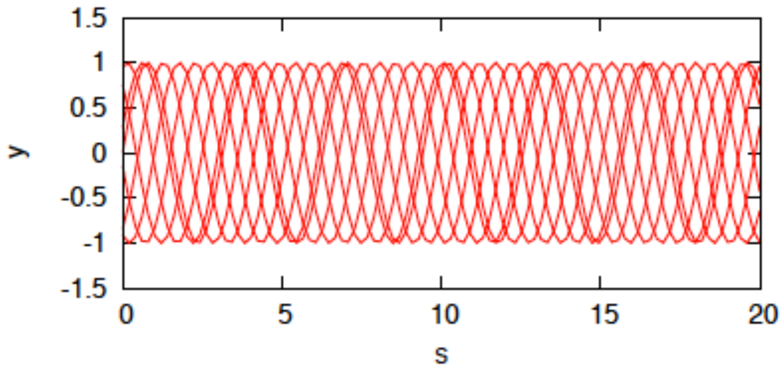
速い周波数ほど減衰しやすい



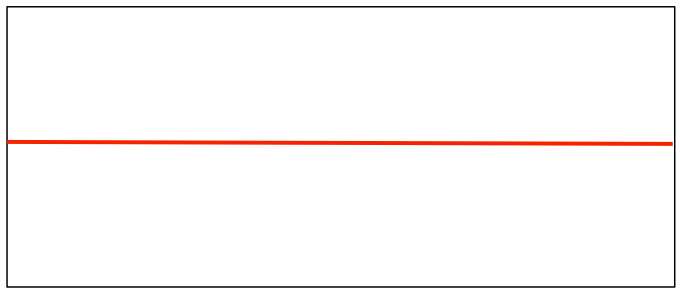
速い周波数

ランダウ減衰

- 厳密なランダウ減衰は、ある周波数の不安定が成長しようとしても、成長できない状態を指す。
- 外からエネルギーを与えて、振動を誘起しても、エネルギーを受け付けない。



ではなく



具体的に式で表すと

- エネルギー広がりを考慮した運動方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\frac{2\pi m v_s(p_z)}{L(p_z)}\right)^2 y_b(s,t,p_z)$$
$$+\omega_\beta^2(1-\eta p_z)^2 y_b(s,t,p_z) \tag{60}$$
$$= \frac{n_c r_b c^2}{\gamma T_0}\int_{-\infty}^{t} dt' W(t-t') \int_{-\infty}^{\infty} y_b(p'_z) f(p'_z) dp'_z$$

$$\frac{v_s(p_z)}{L(p_z)} = \omega_0(1-\eta p_z)$$

- ベータトロン振動はsに対して定義されている。1周で何回振動するか。 $\omega_\beta(p_z) = \omega_\beta(1-\eta p_z)$

フーリエ変換することにより

$$\left[-\{\omega - m\omega_0(1-\eta p_z)\}^2 + \omega_\beta^2(1-\eta p_z)^2\right] y_b(\omega) = \frac{n_c r_b c^2}{\gamma T_0} Z(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} y_b(\omega) f(p_z') dp_z' \quad (62)$$

- ローレンツ分布を仮定すると積分は容易

$$f(p_z) = \frac{1}{\pi} \frac{\sigma_p}{p_z^2 + \sigma_p^2}$$

$$\omega = m\omega_0 \mp \omega_\beta(1-\eta\sigma_p) \pm i \frac{n_b r_b c^2}{2\omega_\beta \gamma T_0} Z(\omega) \quad (65)$$

$\Im\omega < 0$ であるために

$$\boxed{\frac{n_b r_b c^2}{4\pi\gamma n \eta \sigma_p \omega_\beta} Z(\omega_c) < 1} \quad (66)$$

安定条件

バンチ内不安定性での注意点

- バンチをコースティングビームの一部だと解釈。
- $\omega_e \sigma_z / c < Q$ 航跡場がバンチからはみ出す。大きなQは無意味、$Q_{eff} = \min(\omega_e \sigma_z / c, Q)$に設定。

$$W(z) = cR/Q \exp(\alpha z/c) \sin(\omega z/c) \quad z < 0 \quad (55)$$

$$Z_\perp(\omega) = \frac{c}{\omega} \frac{R_S}{1 + iQ\left(\frac{\omega_c}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_c}\right)} \quad (56) \qquad cR_S/Q = \frac{\gamma \omega_b^2 \omega_c}{n_b r_e c^2} T_0.$$

$$\frac{n_b r_b c^2}{4\pi n \eta \sigma_p \omega_\beta} \frac{cR_s}{\omega_c} = 1 \longrightarrow \rho_{e,th} = \frac{2\gamma n \omega_\beta \eta \sigma_p}{\sqrt{3} K Q r_e c L} \quad (83)$$

イオンによるバンチ結合型不安定性

- イオン化によりイオン生成　$N_b=10^{10}$、CO 1nTorr、生成率100m^{-1}

表 3: いくつかの電子蓄積リングにおけるファストイオン不安定性の成長度 (msec 単位とターン単位で並記) 、$Q=5$ を仮定

variable	symbol	KEK-PF	KEKB	superKEKB	SPring-8	PLS	ILC-DR
circumference	L (m)	186	3016	3016	1436	280	6477
energy	E (GeV)	2.5	8.0	7	8.0	2.5	5.0
beam line density	$n_e(\times 10^{10})$ m^{-1}	1.2	3.0	6.5	0.25	0.46	1.1
bunch train length	L_{tr} (m)	150	2800	2945	800	240	41.4
beam sizes	σ_x (mm)	0.5	0.5	0.2	0.2	0.4	0.13
vacuum pressure	P (nTorr)	1	1	0.5	1	1	0.2
growth time	$\tau(ms/turn)$	0.70/1125	0.07/7	0.005/0.5	0.18/38	0.96/1030	0.08/3.8

様々なリングでの陽電子バンチの電子雲不安定性

表 4: いくつかの陽電子蓄積リングにおける単バンチ不安定性の電子密度に対する閾値

variable	symbol	KEKB	SuperKEKB	Cesr-TA	BEPC-II	SuperB
circumference	L (m)	3016	3016	768	240	1260
energy	E (GeV)	3.5	4	2	1.5	6.7
bunch population	$N_p(\times 10^{10})$ m^{-1}	8.4	9	2	4.9	5
bunch length	σ_z (mm)	7	6	6.8	15	5
beam size	σ_x (mm)	0.5	0.2	0.15	1.2	0.13
energy spread	σ_E/E (%)	0.07	0.08	0.08	0.052	0.064
slippage factor	$\eta(\times 10^{-4})$	2.7	3.5	68	261	4.9
electron oscillation	$\omega_e\sigma_z/c$	2.5	18.8	11	2.3	14.1
threshold	$\rho_{e,th}$ (10^{12} m^{-3})	0.54	0.27	1.7	6.1	0.7

光電子雲不安定性

- ビームパイプ表面から出てくる光電子がビームにまとわりついて不安定になる。

- KEK-PFで強いバンチ結合型不安定性が陽電子蓄積の時のみ観測された。
- 光電子モデルによるその不安定性の解釈
- BeijingElectronPositronCollider (China)において同様な不安定性が観測された.
- KEKBでの電子雲効果の研究、観測
- PSR, LHC, SPS, SNS, JPARC, ILC …多くの 加速器で電子雲効果の研究が始まった。

KEK-PFで観測されたバンチ結合型不安定性

- KEK-PF、E=2.5 GeV L=186 m, Frf=500MHz第2世代放射光リング。通常電子蓄積だが、イオン効果の軽減のため陽電子蓄積が行われた。
- 不安定性は陽電子多バンチ運転で観測された、バンチ数 N_{bunch}=200-300 (バケット数=312).
- 不安定が起こる電流の閾値は低い、I~15-20mA. 運転電流300 mA
- その不安定性は電子蓄積では観測されない。

Izawa et.al., Phys. Rev. Lett. 74, 5044 (1995).

BPMの周波数スペクトル.

電子 354 mA

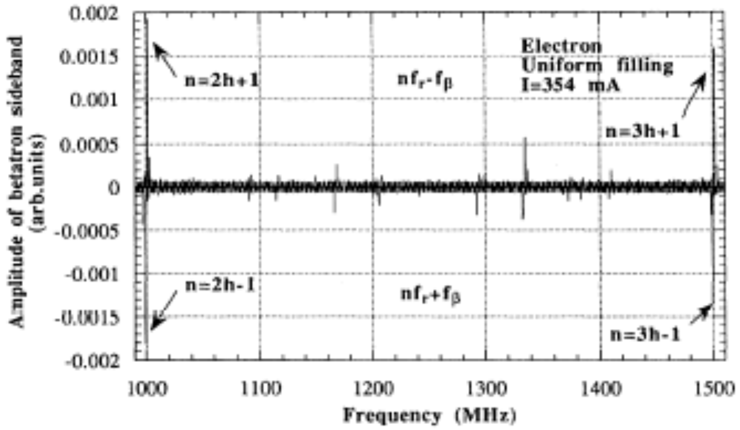


FIG. 1. Distribution of the betatron sidebands observed during electron multibunch operation with uniform filling.

陽電子 324 mA＆ 240 mA

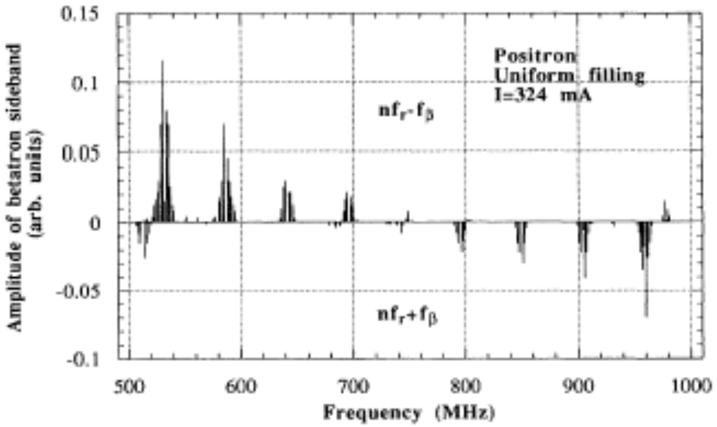


FIG. 2. Distribution of the betatron sidebands observed during positron multibunch operation with uniform filling.

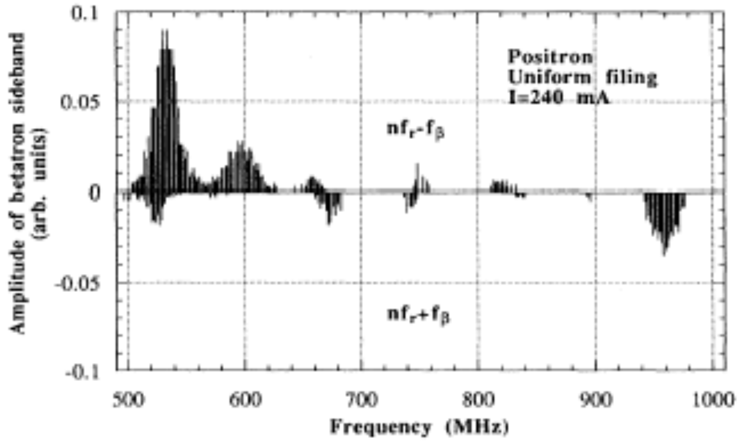


FIG. 3. Distribution of the betatron sidebands observed during positron multibunch operation with uniform filling. Only the stored current is different from Fig. 2.

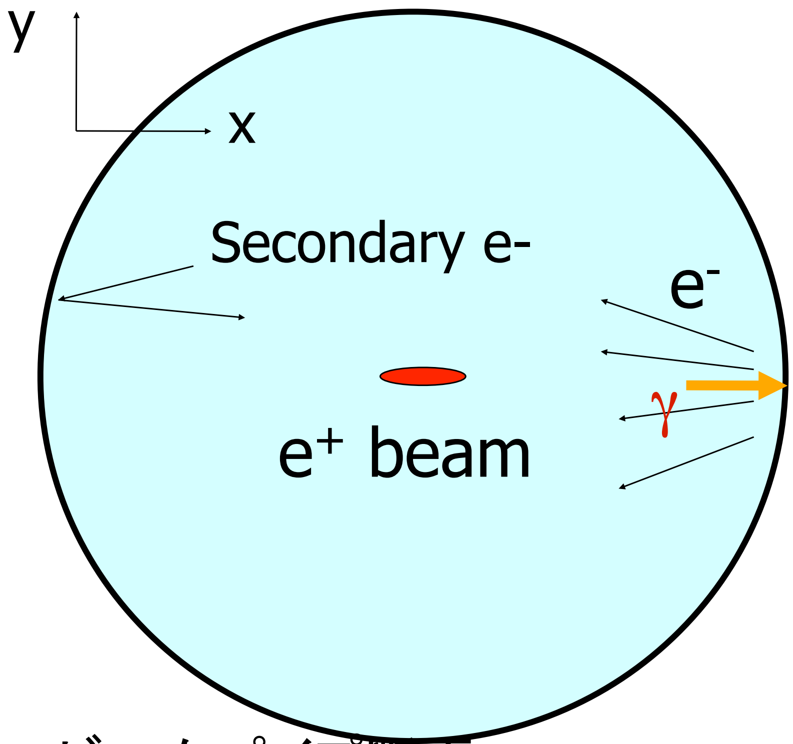
光電子によって引き起こされる不安定性という解釈

- 陽電子ビームがシンクロトロン放射光を放出。
- 電子がビームパイプ壁面で光電効果により放出される、生成率 ~ 0.1e^-/γ.
- 電子は陽電子ビームにより引きつけられ、相互作用をする。電子は20-50 ns程度ビームパイプ中をさまよい、壁面に吸収される。電子のエネルギーによっては壁面で2次電子が放出される。
- 電子は狭いバンチ間隔(~5ns)では連続的に供給され、電子の雲がパイプ内に形成される。
- その電子雲によって、バンチ間に相関ができバンチ結合型不安定性が起こる。バンチ間相関を表す量として、加速器の分野では航跡力(Wake force)を使う。

K. Ohmi, Phys. Rev. Lett., 75, 1526 (1995).

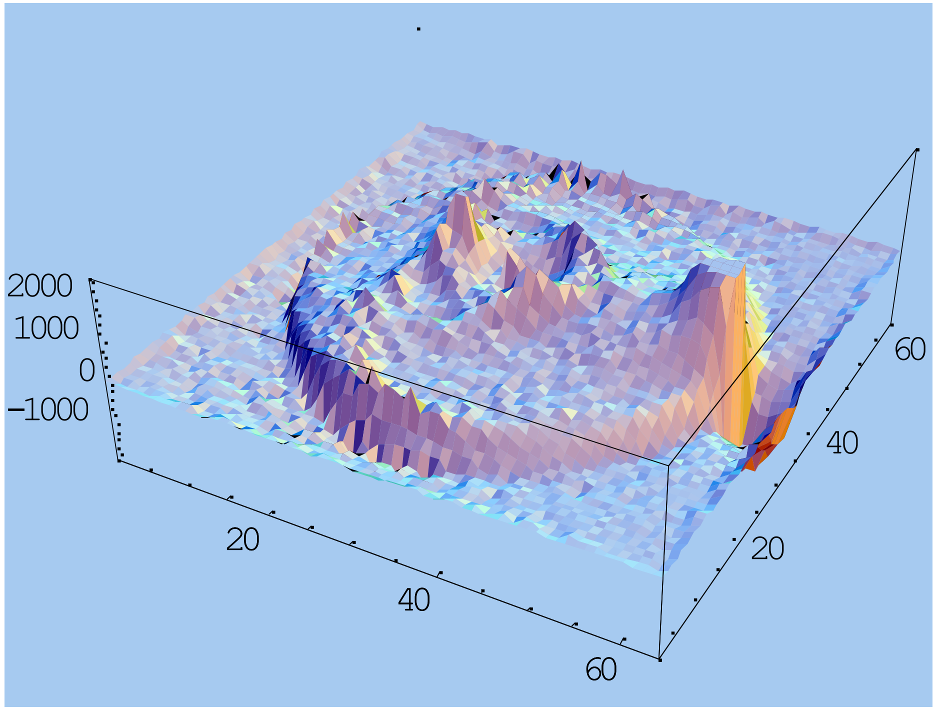
光電子モデルと計算機シミュレーションによる電子雲の形成

Model



ビームパイプ断面

電子雲密度



生成電子数

1メートルあたりに陽電子1個が放出する光子数

$$Y_\gamma = \frac{5\pi}{\sqrt{3}} \frac{\alpha\gamma}{L}$$

α : fine structure const=1/137

◆KEKB-LER　γ=6850 → Yγ=0.15/m

◆KEK-PF　=4892 → Yγ=1.7/m

- バンチ内粒子数
  N_p=3.3x10^{10}　（KEKB-LER design 2.6A）
  N_p=5x10^9　（KEK-PF 400mA)
- 生成率 ($\eta = n_{p.e.}/n_\gamma$)　0.1
- 電子の初期エネルギー　10±5 eV

- KEKB-LER　$Y_{p.e.}$=0.015 e^-/m.e^+
- KEK-PF　$Y_{p.e.}$=0.17 e^-/m.e^+ ,
- ionization 10^{-8} e^-/m.e^+ , proton loss(PSR) 4x10^{-6} e^-/m.p

KEKBでの電子雲によるバンチ結合型不安定性の観測

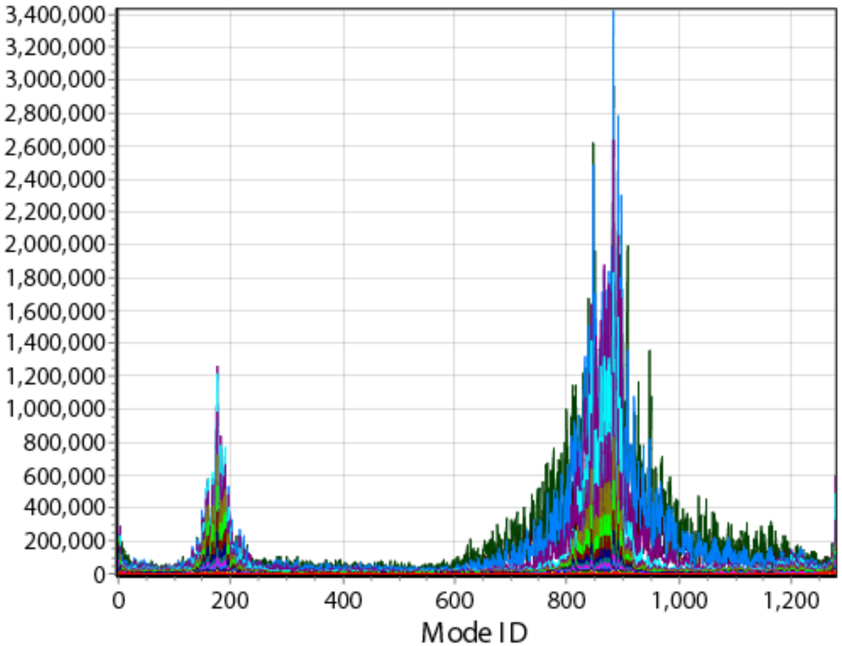
- 電子雲によって誘起されるバンチ間相関、航跡力によって不安定性が起こり、ビームロスを起こす。

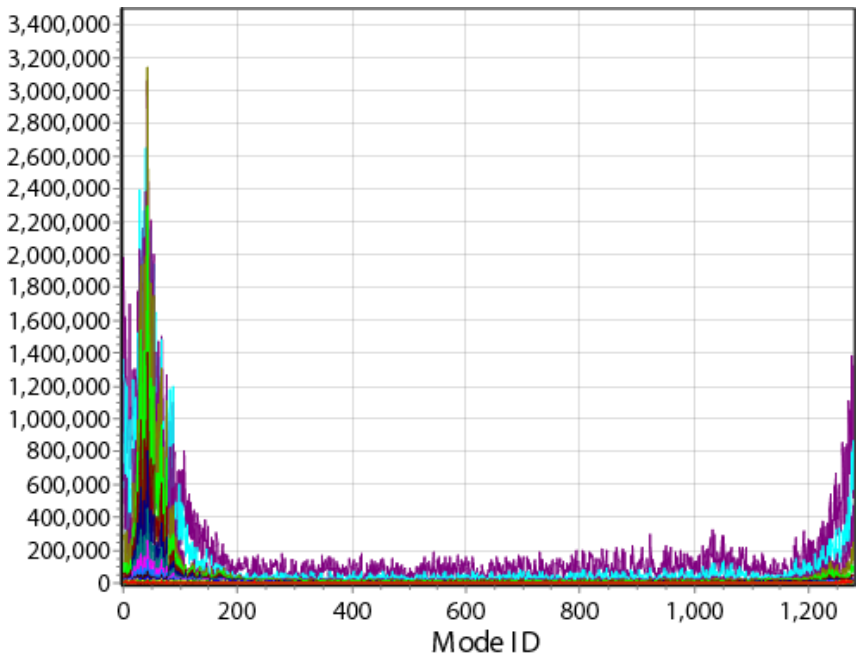
KEKBでの不安定性の測定

- ビームロスを引き起こす速い不安定が観測される。
- 不安定モード、つまりビーム位置モニターの検出する周波数成分、はソレノイドのON/OFFで変わる。

M. Tobiyama et al., PRST-AB (2005)

Solenoid off　　　　　　　　on (measurement)





シミュレーション

K.Ohmi, PRE55,7550 (1997)

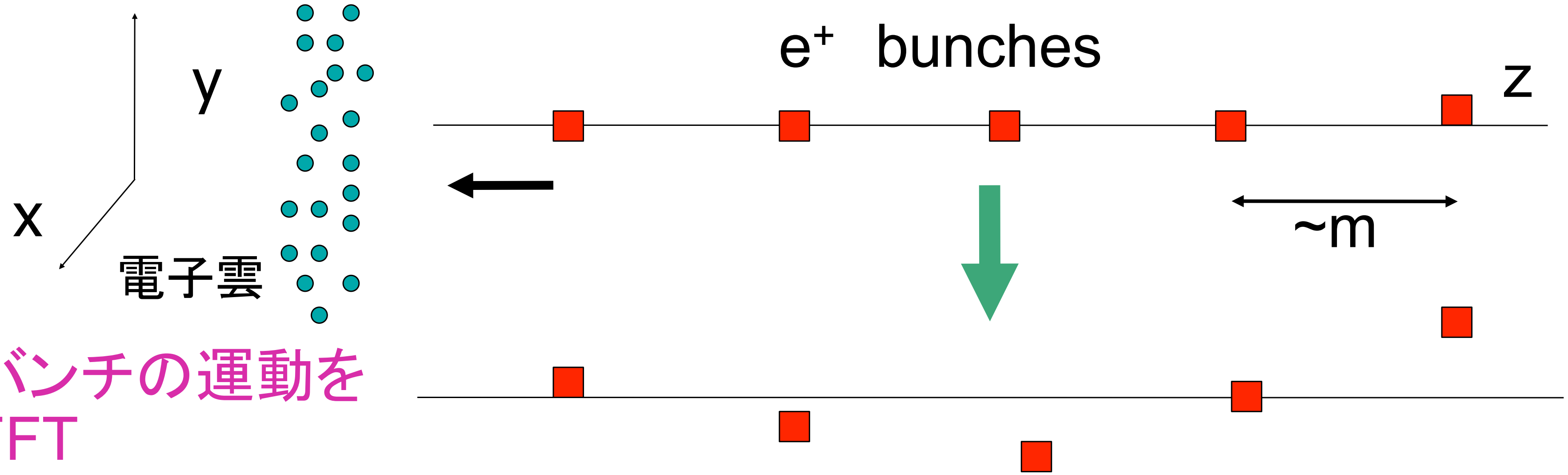
K.Ohmi, PAC97, pp1667.

ビームと電子の運動を同時に解く

$$\frac{d^2\mathbf{x}_{+,a}}{ds^2} + K(s)\mathbf{x}_{+,a} = \frac{2r_e}{\gamma}\sum_{j=1}^{N_i}\mathbf{F}_G(\mathbf{x}_{+,a} - \mathbf{x}_{e,j};\sigma(s))\delta(s - s_j)$$

$$\frac{d^2\mathbf{x}_{e,a}}{dt^2} = \frac{e}{m}\frac{d\mathbf{x}_{e,a}}{dt}\times\mathbf{B} - 2N_p r_e c\sum_n\sum_{i=1}^{N_b}\mathbf{F}(\mathbf{x}_{e,a} - \mathbf{x}_{p,i})\delta\left(t - t_i(s_e + nL)\right)$$

$$-r_e c^2\frac{\partial\phi(\mathbf{x}_{e,a})}{\partial\mathbf{x}_{e,a}} \qquad (2)$$

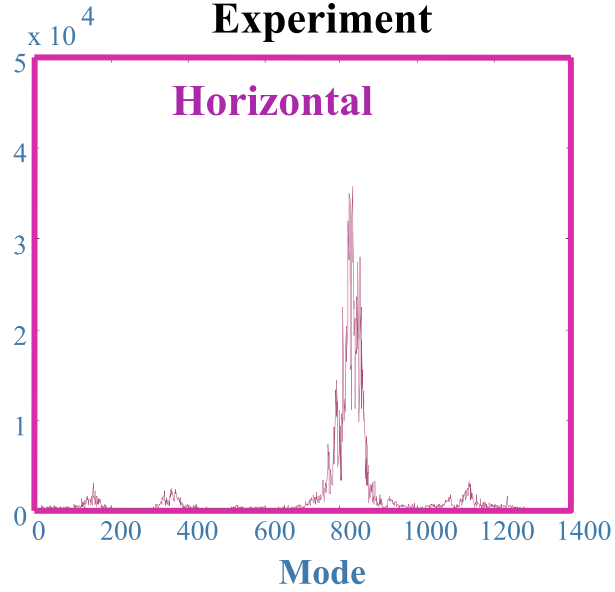


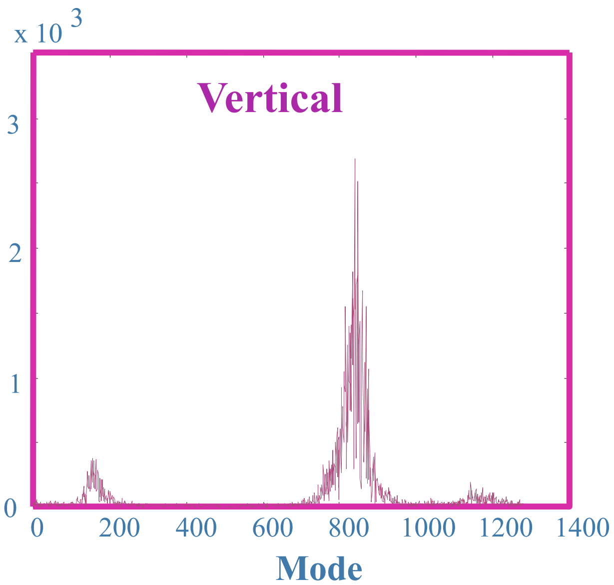
バンチの運動を
FFT

KEKBでのバンチ結合モード

Solenoid-Off

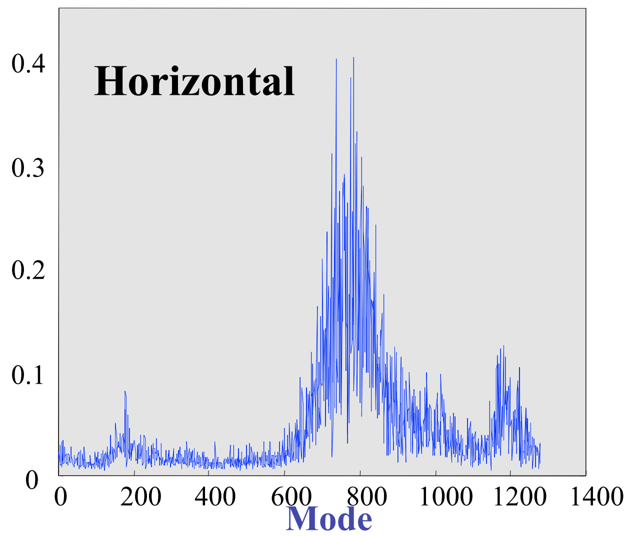
Experiment

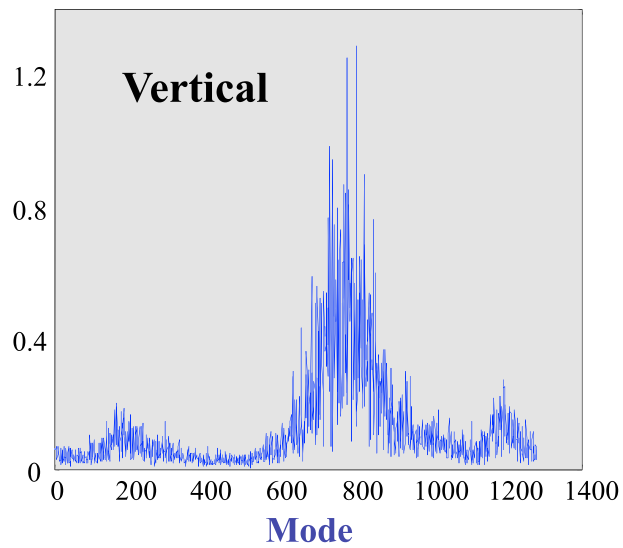




Bunches are filled every 4 bucket.

Simulation





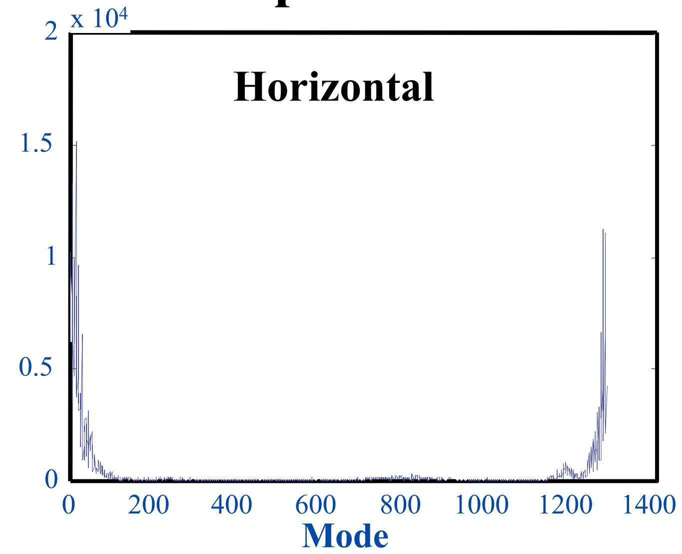
Su Su Win et al,(EC2002)

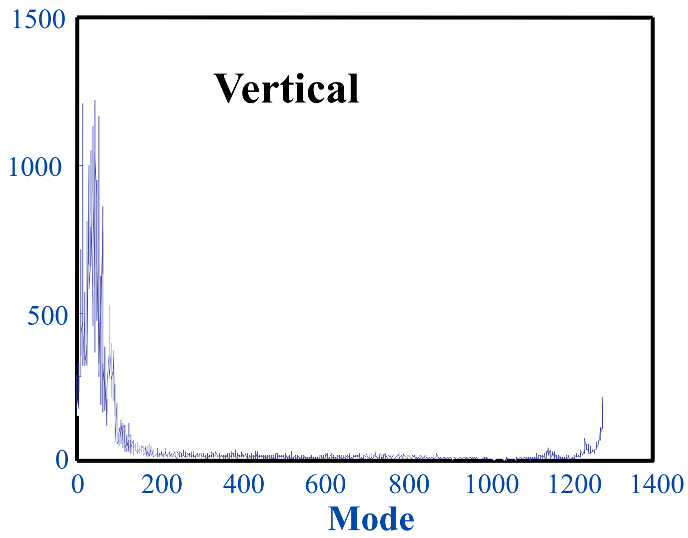
KEKB

Solenoid-ON

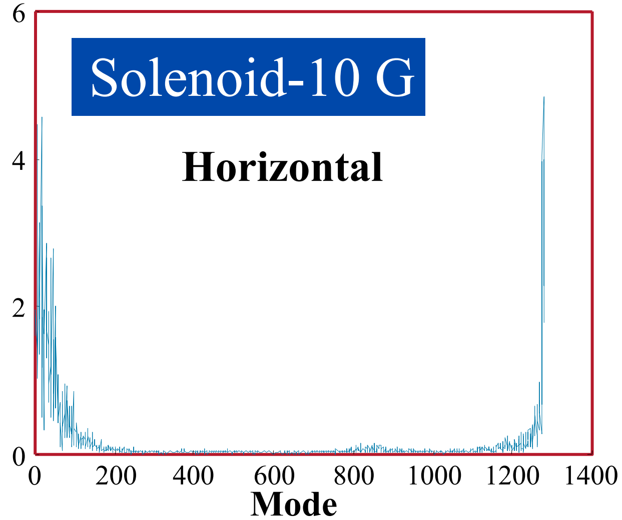
KEKBでは電子を排除するためにソレノイドコイルが全周に巻かれた。それによって振動モードが変化するのが見られる。

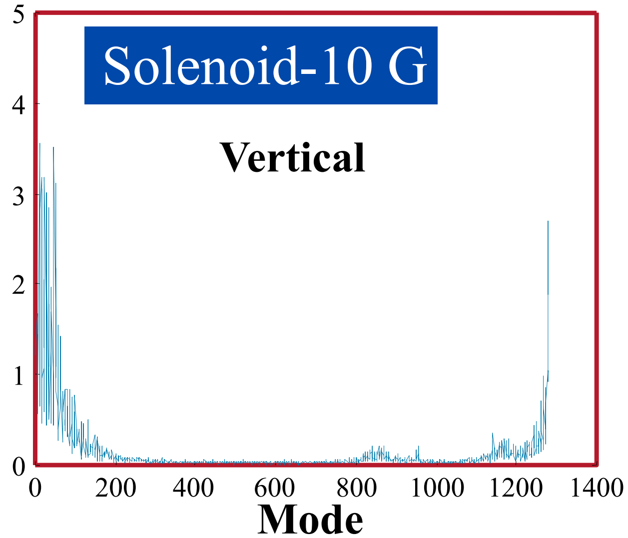
Experiment





Simulation

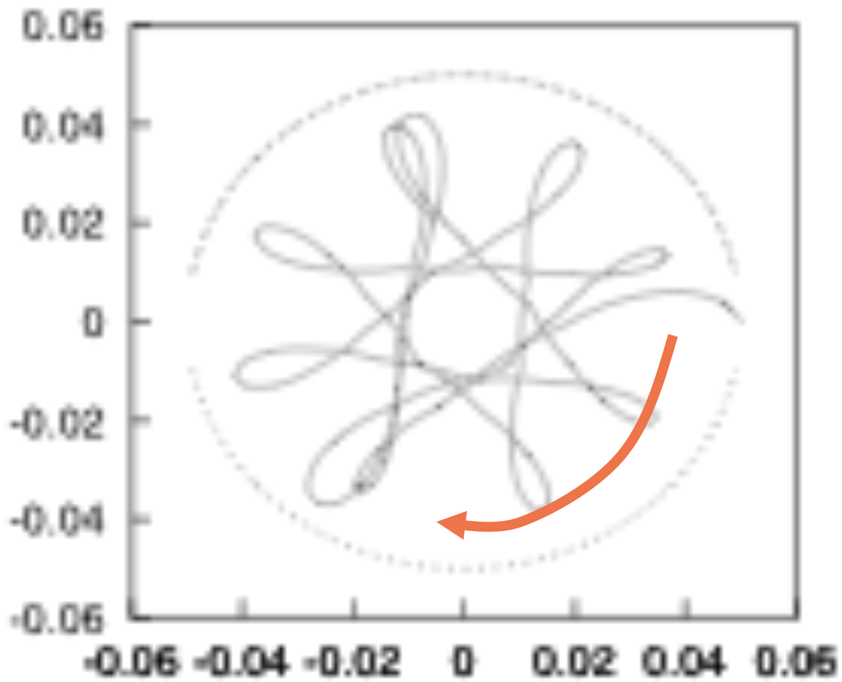




Su Su Win et al., EC2002

なぜソレノイドによってビームの不安定モードが変わるのか

- ビームは電子の運動を感じる。電子がある周波数ω_eで運動すれば、ビームのその周波数に応じたモード$\omega_e=|\mu\omega_0+\omega_\beta|$が不安定になる。



Bz=10Gのソレノイド磁石中での電子の運動

この周波数成分をビームが持つ

単バンチ不安定性
KEKB運転時の陽電子ビームサイズの肥大

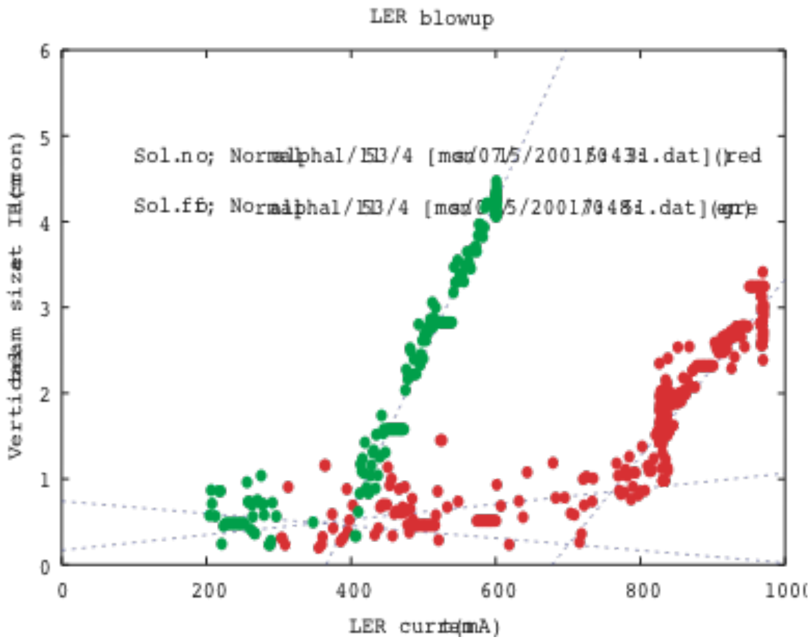
- ビーム電流が閾値を超えるとビームサイズ肥大が起こる。閾値は全電流でおおむね決まる。
- ビームサイズは多バンチ運転で観測されるがバンチ間の相関はない。
- バンチの中の粒子の運動で不安定が起こっている。
- ルミノシティはこのビームサイズ肥大で制限を受けている。

- 電子雲の単バンチ不安定性特有の周波数信号の観測。

単バンチ不安定性の観測

ビームサイズ肥大

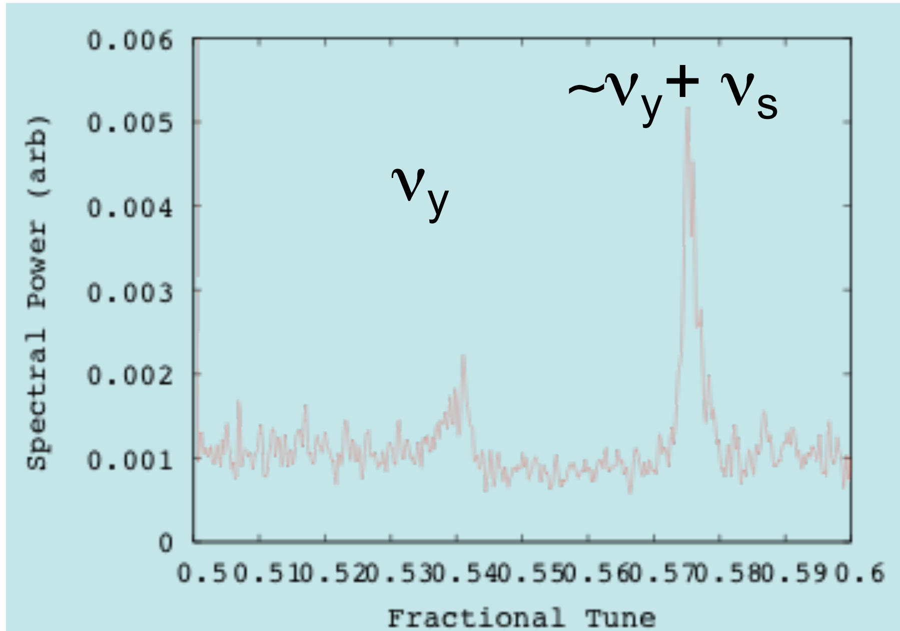
電流とビームサイズ



Fukuma et al.

不安定性信号

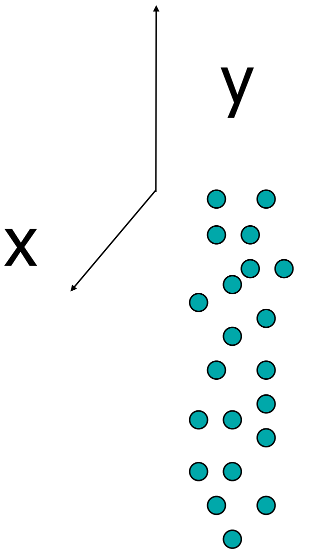
$\omega_\beta + k\omega_s$, k~1.5



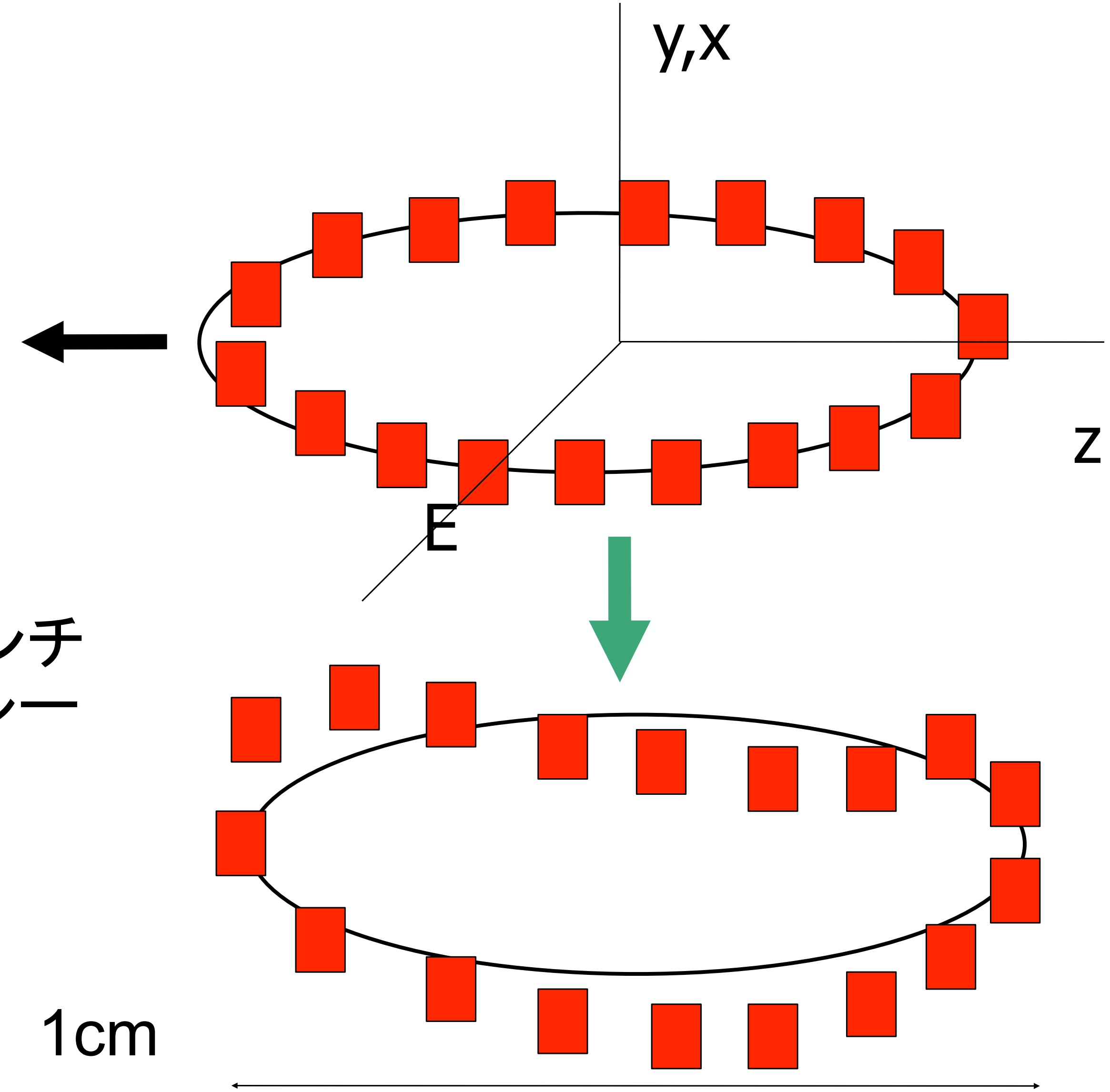
J. Flanagan et al.

シミュレーション

電子雲

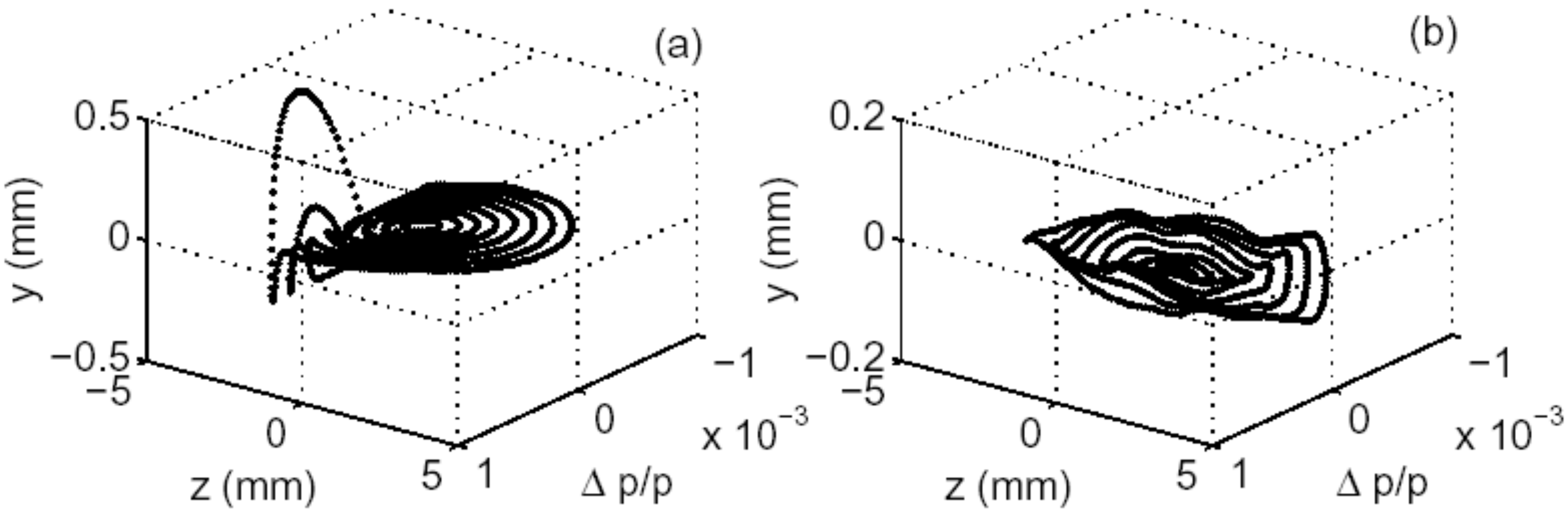


陽電子バンチ



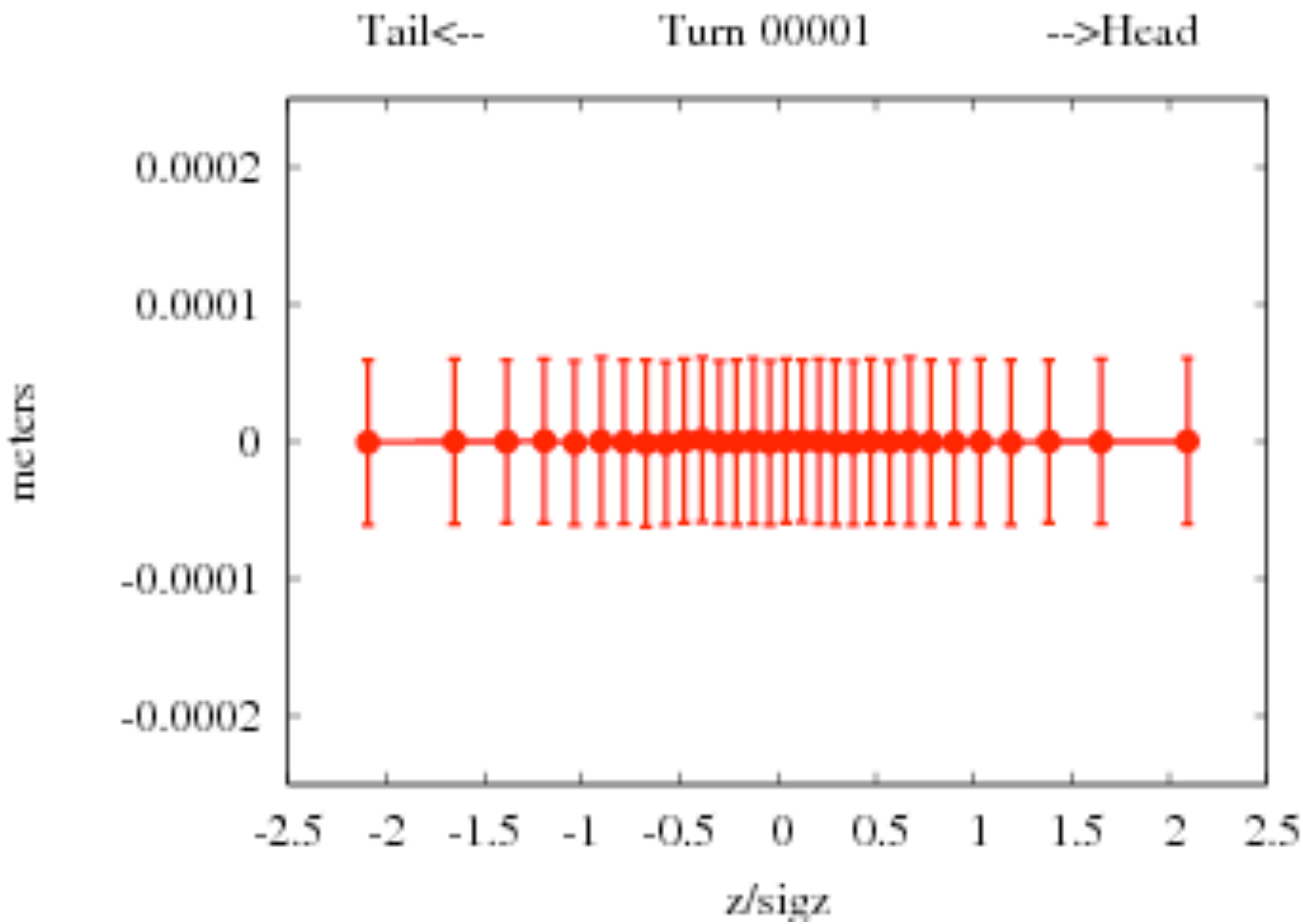
スケールは違うがバンチ
結合不安定のシミュレー
ションと同じ手法

- Bunch head-tail motion w/wo synchrotron motion.



Vertical amplitude of the macro-particles in the longitudinal phase space are plotted. Multi-airbag model (z-δ) is used to visualize in these figures.

K. Ohmi, F. Zimmermann, PRL85, 3821 (2000).



Tail<--
Turn 00001
-->Head
0.0002
0.0001
0
-0.0001
-0.0002
meters
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
z/sigz

KEKBリングでのソレノイド巻き

(0) 永久磁石がリングの周回部分~800mに取り付けられた。

(1) 周回部分800mをソレノイド磁石に置き換える (2000年夏).

(2) さらに 500m追加 (2001年1月).

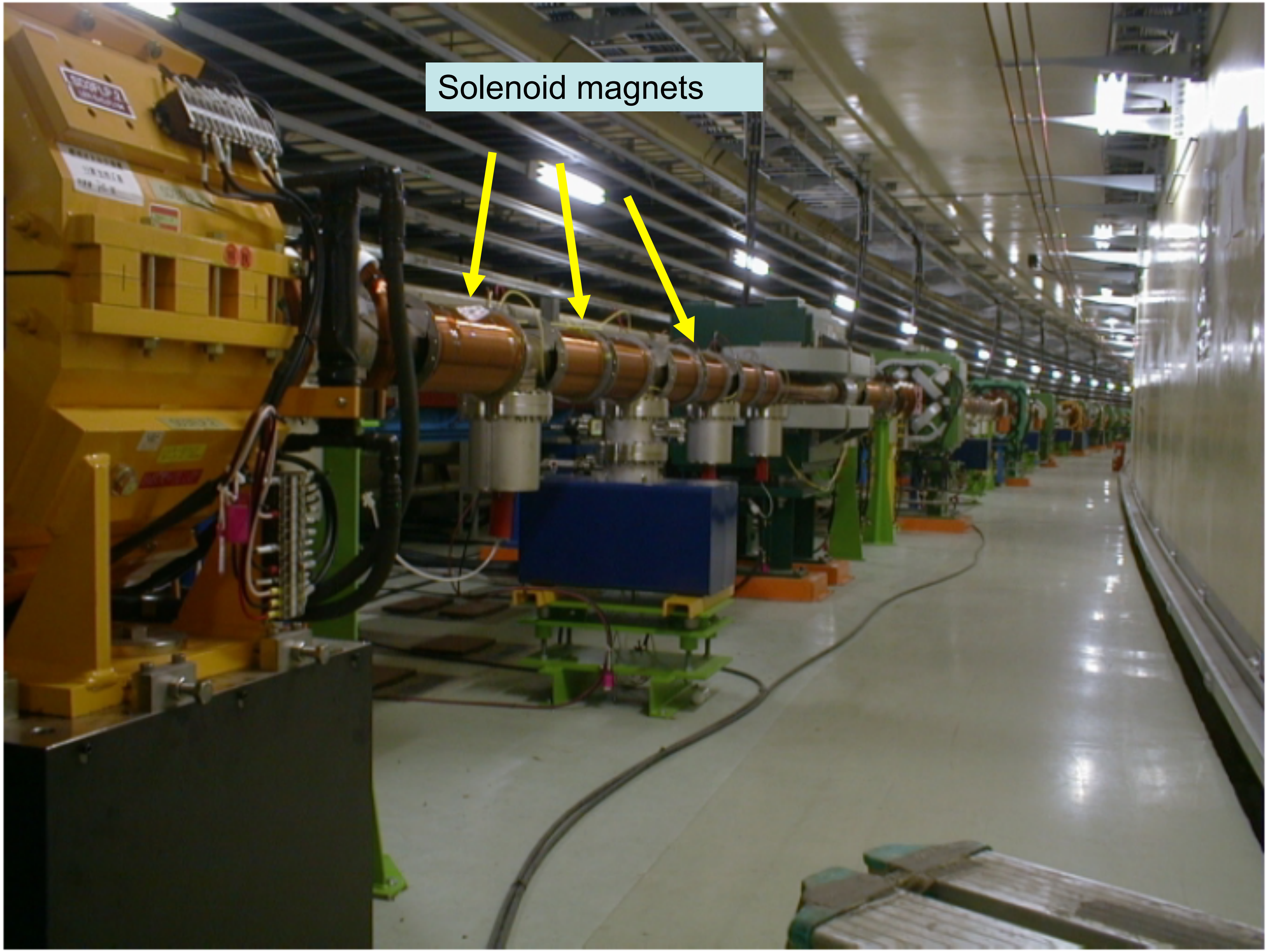
(3) 直線部にも巻く (2001年、4月).

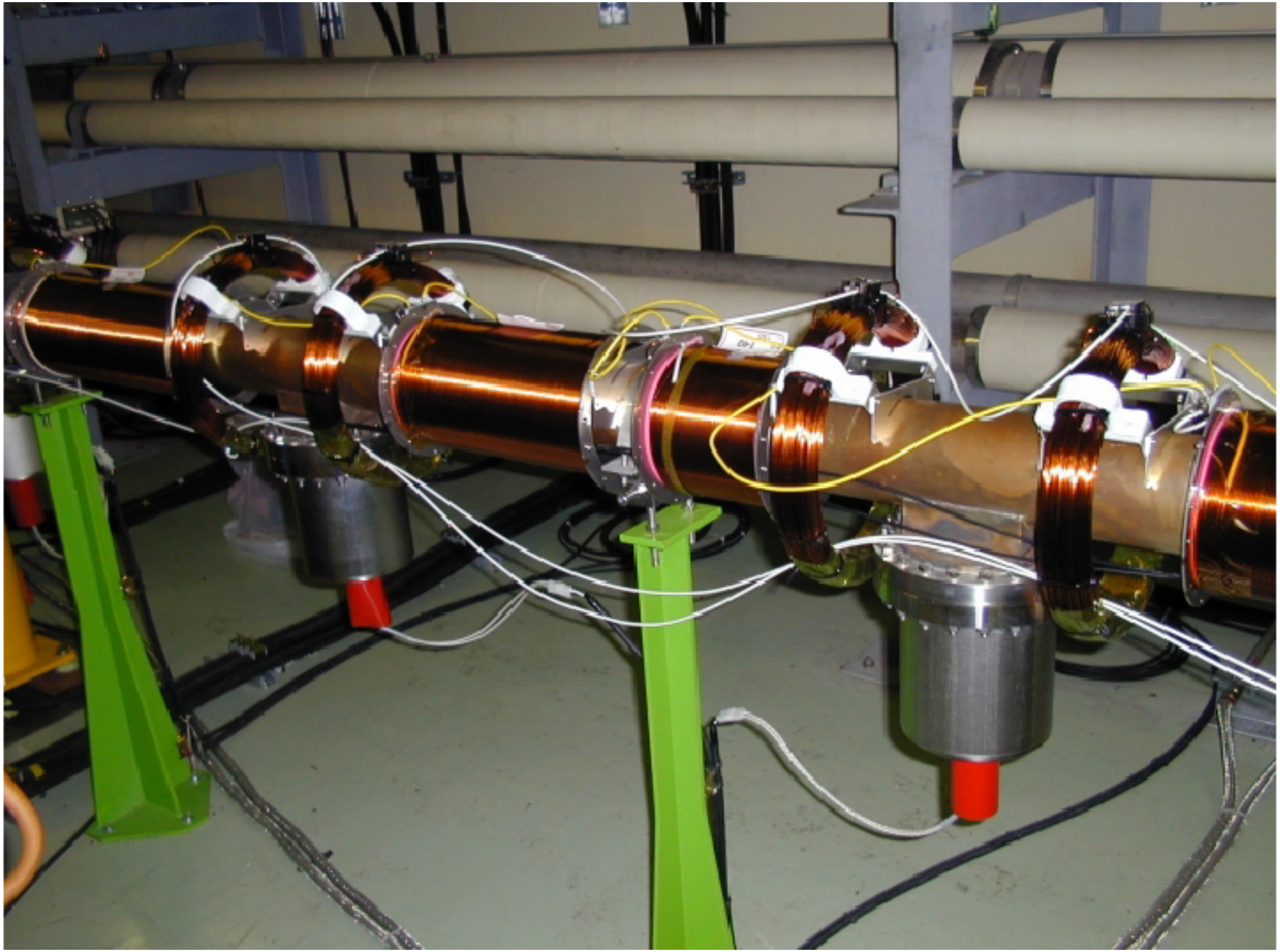
(4) Add solenoids even in short free space (2001年夏).

(5) 磁石占有していない場所の95 %をソレノイドでカバー (~2005).

(6) 収束磁石の ¼ の内側にも巻く (2005年)

Managed by H. Fukuma et al.


Solenoid magnets



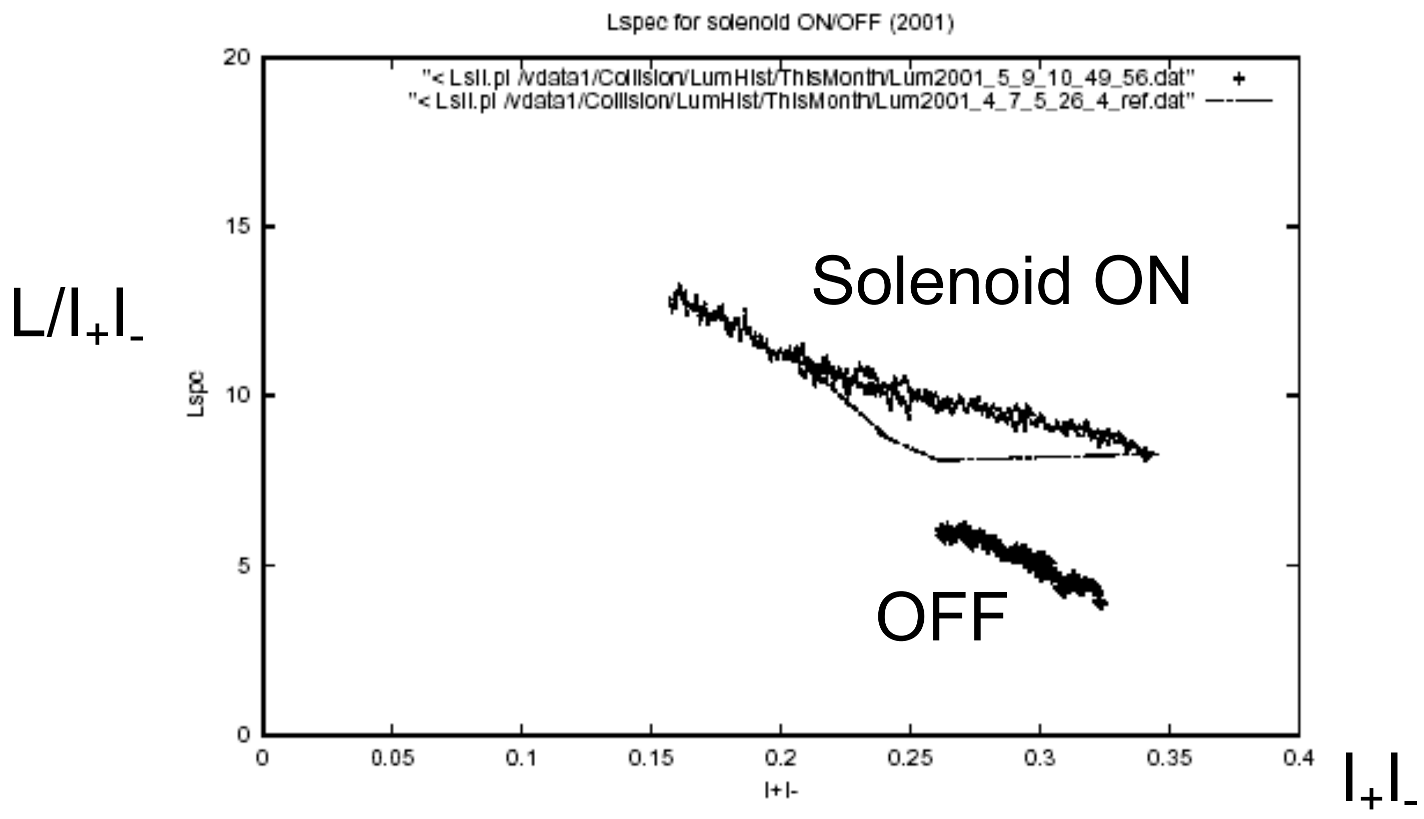
ソレノイドによるルミノシティの向上

- ソレノイド ON/OFFでのルミノシティの比較
- 2000年末に付加したソレノイドによるルミノシティの変化 (500m).

ソレノイド ON/OFFとルミノシティ

- ソレノイドをOFFすると、蓄積電流もバンチ結合型不安定性により、ビームロスを起こし、制限される。
- ルミノシティもきわめて低い (~half).

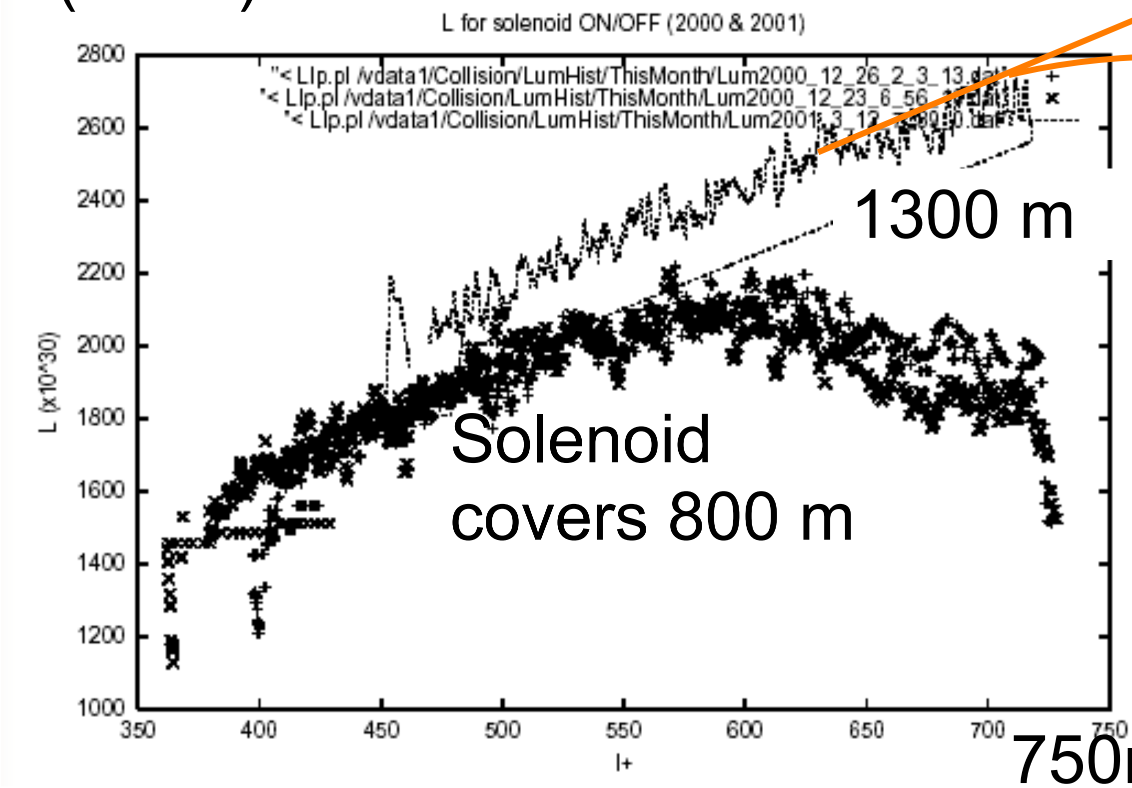
ソレノイド ON/OFFに対するスペシフィックルミノシティ (measurement at May. 2001)



ソレノイドの追加とルミノシティの増加2000年12月と2001年3月

Longer and longer

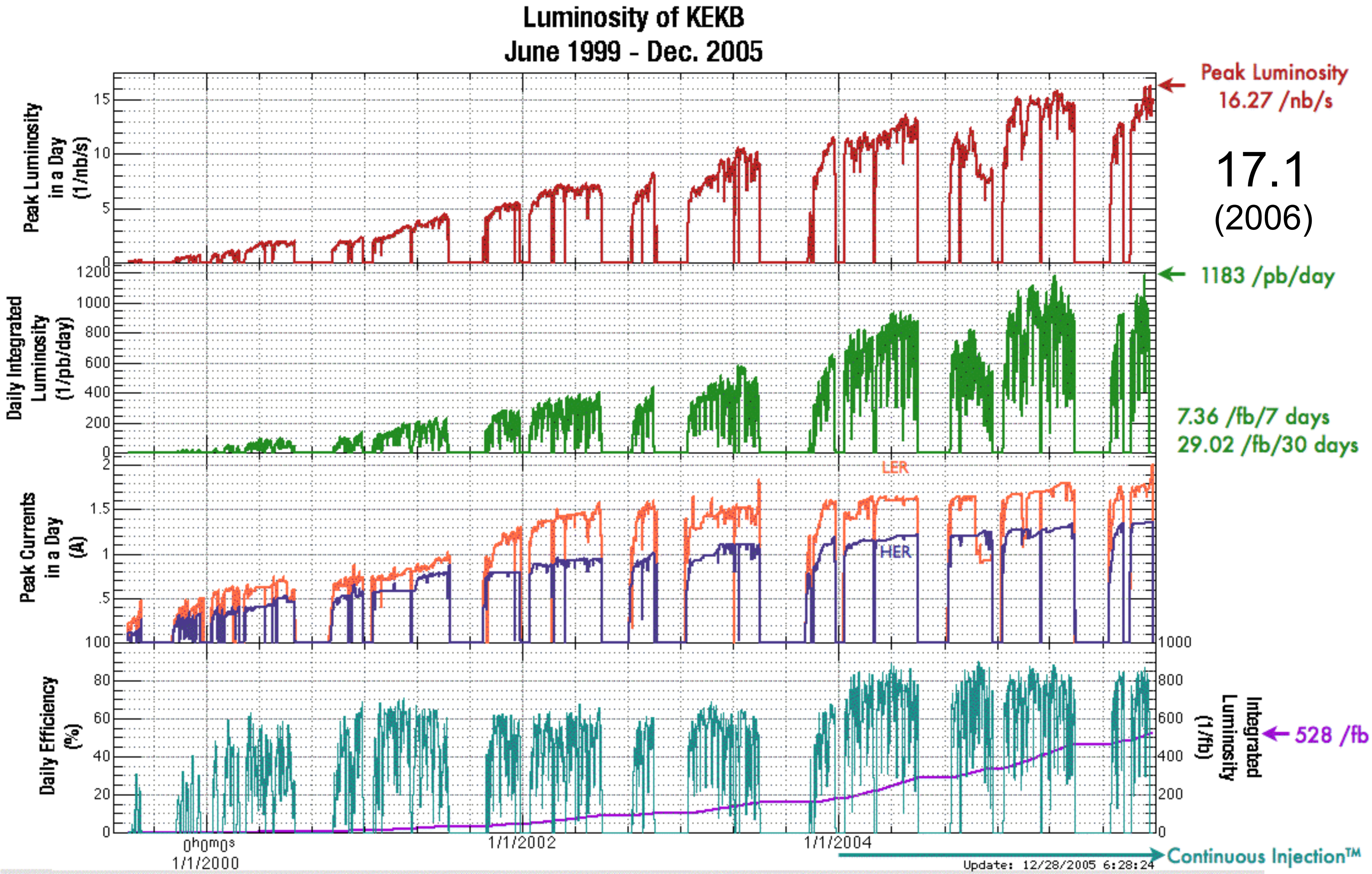
L ($\times 10^{30}$)



Beam-beam tuning also improves the luminosity.

- ソレノイドを追加するたびにピークルミノシティとそれに対する電流値は増加
- 現在ピークルミノシティは1800 mA位

Luminosity history of KEKB



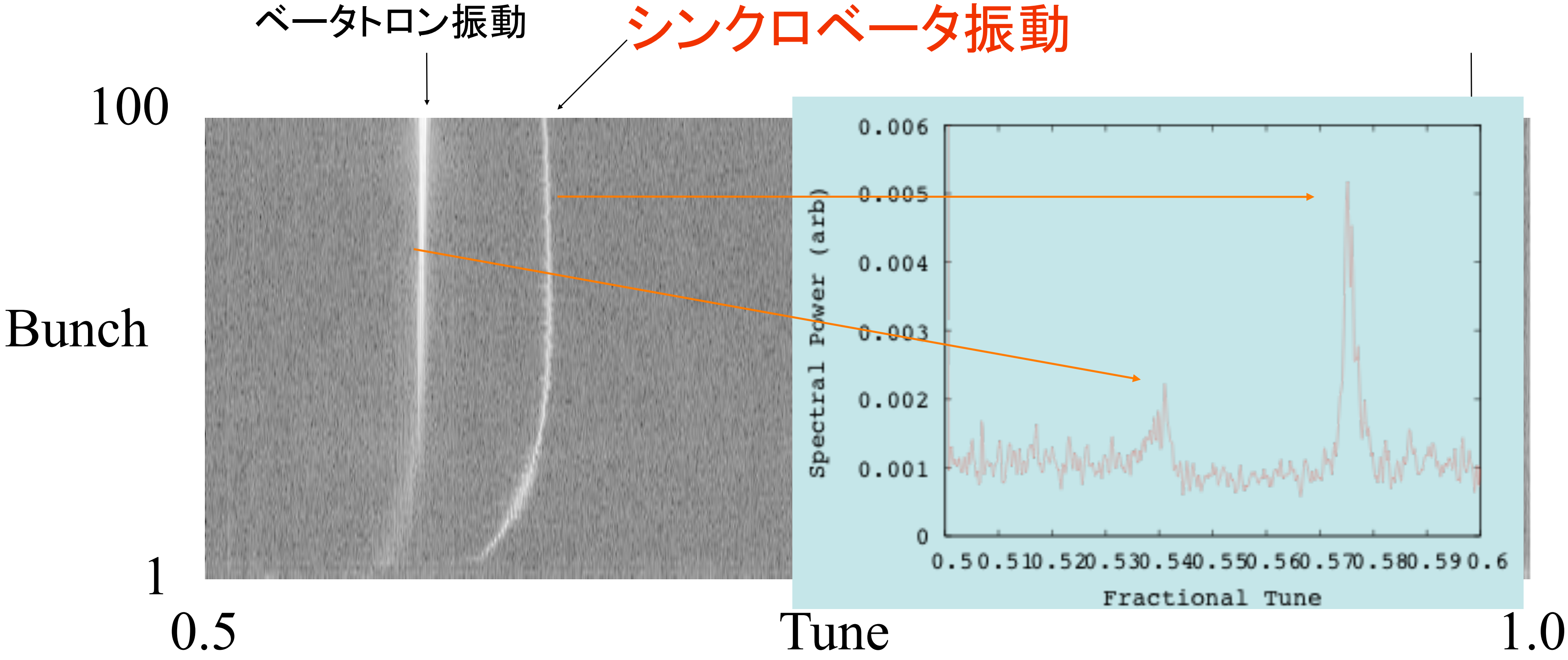
17.1
(2006)

シンクロベータトロン信号の測定
単バンチ不安定性の直接的証拠

- ビームサイズ肥大が電子雲による端バンチ不安定性なら閾値以上でシンクロベータトロン振動が観測されるはずである。
- その振動はビーム位置モニターのフーリエ解析によって観測された。
- 振動の発生するビーム電流閾値と、ビームサイズ肥大の閾値、シミュレーションは一致した。

- その振動は $\sim\omega_\beta+\omega_s$近辺に見つけられた。一般の不安定性は$\sim\omega_\beta-\omega_s$ に見られることと対照的であった。

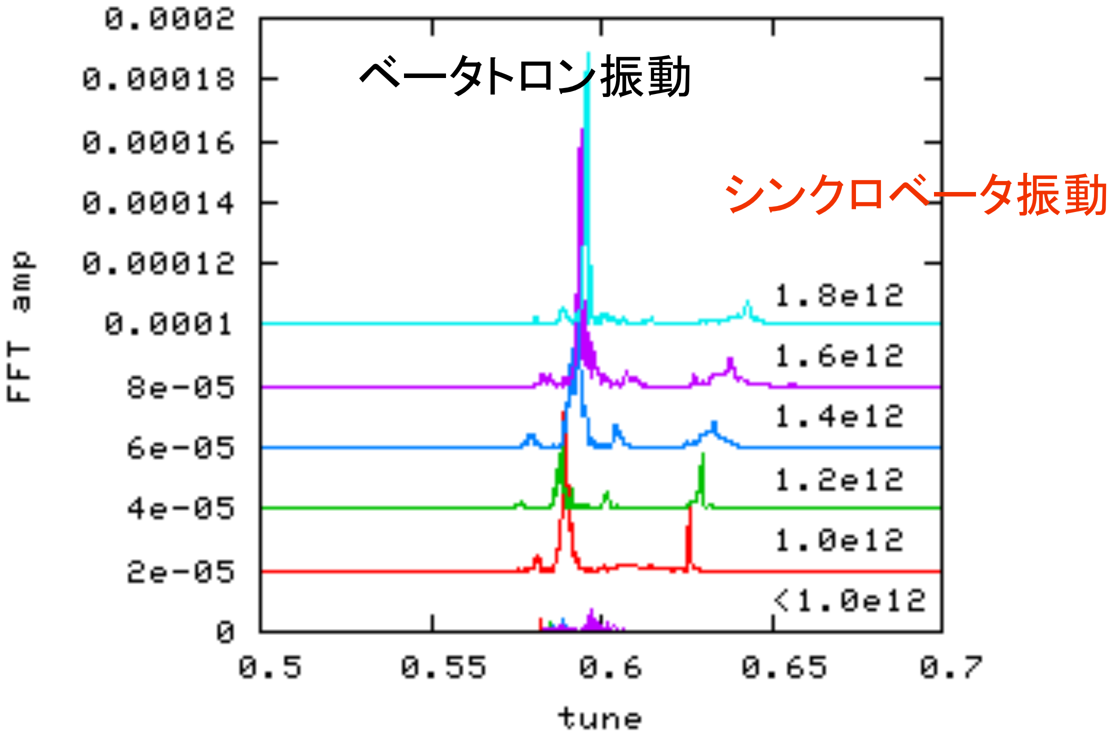
ビーム位置モニターのFourier振幅

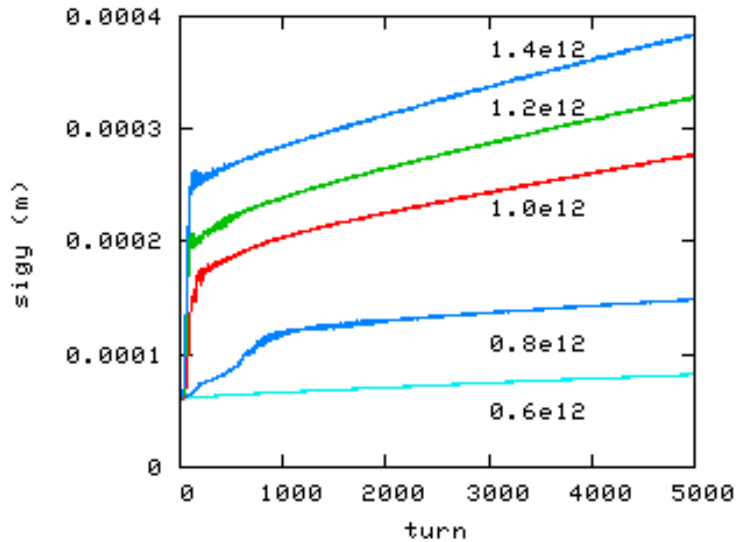


- LER single beam, 4 trains, 100 bunches per train, 4 rf bucket spacing
- Solenoids off: beam size increased from 60 μm ->283 μm at 400 mA
- Vertical feedback gain lowered
  – This brings out the vertical tune without external excitation

J. Flanagan et al., PRL94, 054801 (2005)

シミュレーションによる不安定モードスペクトル





- シミュレーションで得られたビーム重心をフーリエ解析
- シンクロベータ信号 $\sim\omega_\beta+k\omega_s$が見え電子雲密度の上昇とともに周波数が高くなる

まとめ

- 1995年に電子雲不安定性の存在が提案された。
- 当時はKEKBのデザインの最終、建設開始時期であった。
- 運転の開始とともに電子雲によるものらしき現象が観測された。
- ソレノイドによる電子雲対策とあわせるようにKEKBのルミノシティは向上。
- 実際のルミノシティ向上はKEKBコミッショニンググループの絶え間ない奮闘の結果。一般的な条件でソレノイドのスイッチ一つでルミノシティが2倍になるわけではない。
- KEKBの成功とともに電子雲不安定性の理論、実験は完成の域に達した。
- 次のステップはJ-PARC, ILC damping ring…

縦方向バンチ内不安定性

- 縦波(疎密波)の不安定性

$$\Psi = \rho_p(p_z)\left[\frac{1}{L} + a\exp\left(\frac{2\pi ins}{L} - i\omega t\right)\right] \quad (98)$$

- 運動方程式

$$\frac{dp_z}{ds} = -\frac{N_b r_0}{\gamma L}\int_{-\infty}^{\infty} W_0(z-z')\rho_0(z')dz' \quad (94)$$

$$\frac{dz}{ds} = -\eta_p p_z \quad (95)$$

- 分散関係式

$$1 = -i\frac{N_b r_e c^2}{\gamma L^2}\eta\omega Z(\omega)\int \frac{\rho_p}{(\omega(1+\eta_p p_z) - n\omega_0)^2}dp_z \quad (101)$$

エネルギー分布とランダウ減衰

- ローレンツ分布を仮定

$$\rho_p(p_z) = \frac{1}{\pi} \frac{\sigma_p}{p_z^2 + \sigma_p^2} \qquad (102)$$

- 分散関係

$$1 = \frac{N r_e c^2}{\gamma L} \frac{\eta \omega Z(\omega)}{\left[\omega(1 + i\eta\sigma_p - n\omega_0\right]^2}$$

- 安定条件

$$\left| \frac{Z(\omega)}{n} \right| < 0.5 \frac{\gamma \eta L Z_0}{N_b r_e} \sigma_p^2 \qquad (105)$$

$$n = \omega/\omega_0$$

CSRによるインピーダンス

- 最近流行のCoherent Synchrotron Radiation
- 真空パイプ中の進行電磁波、空間電荷力による、バンチ内の加減速。

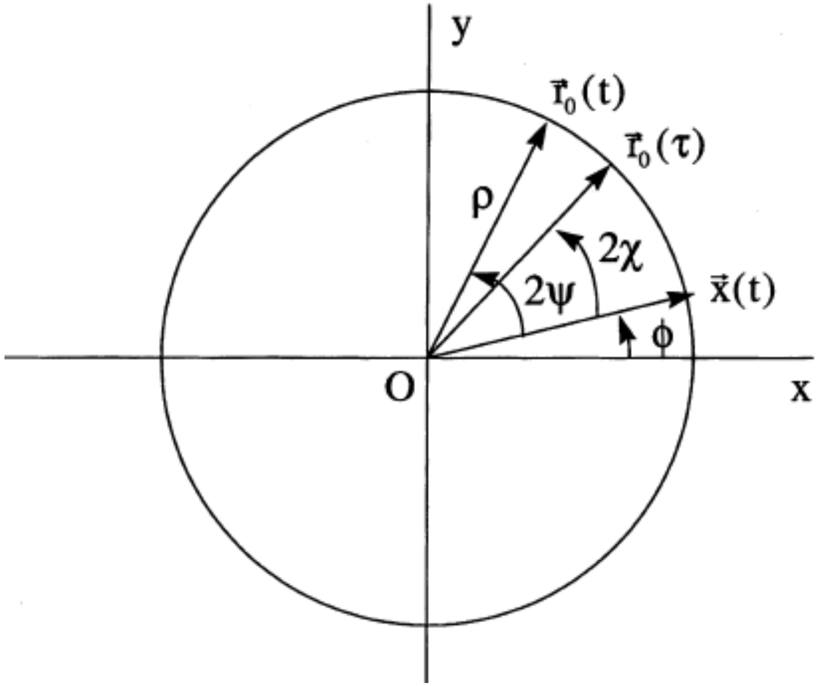
自由空間でのCSR

- Retarded potential

G. Scott(1912), J. Murphy(1997)

$$\Phi(\vec{x}, t) = \frac{e}{|\vec{x} - \vec{r}_0(\tau)| - \vec{\beta}_0(\tau) \cdot (\vec{x} - \vec{r}_0(\tau))},$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{e\vec{\beta}_0(\tau)}{|\vec{x} - \vec{r}_0(\tau)| - \vec{\beta}_0(\tau) \cdot (\vec{x} - \vec{r}_0(\tau))}.$$



電磁気学演習

r_0にいる光速で運動する電子によるxでの時刻tでのE_ϕを求めよ。

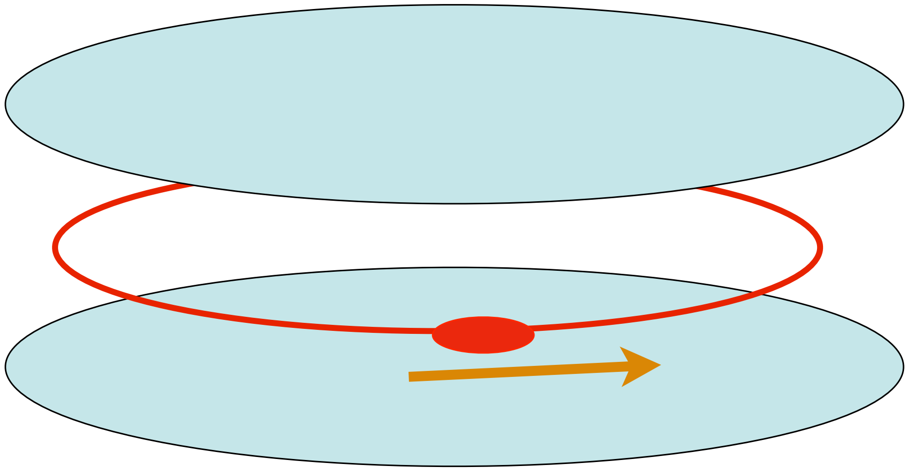
$$\tau = t - \frac{|\vec{x} - \vec{r}_0(\tau)|}{c}.$$

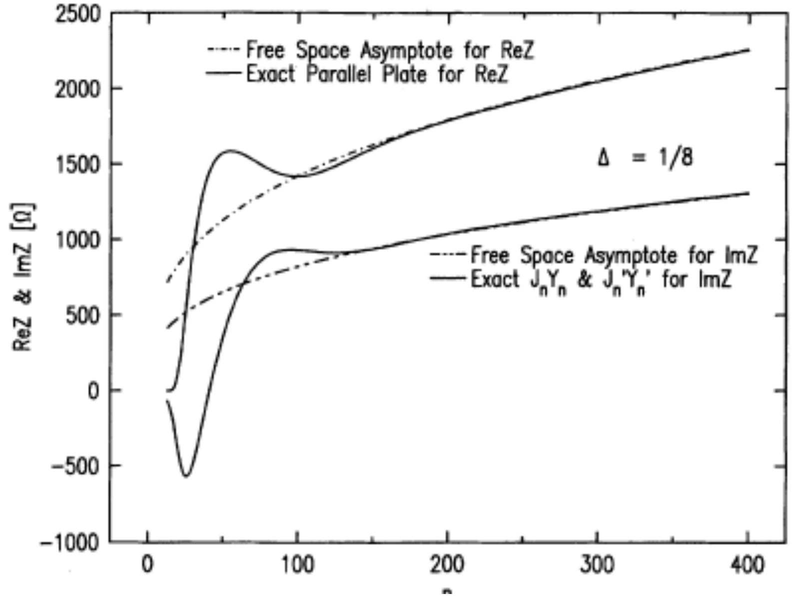
$$W_0(t - t') = \frac{1}{e} \oint E_\phi(\phi - 2\Psi)\rho d\phi$$

$$Z(\omega) = \frac{iAZ_0}{2} \left(\frac{\omega R}{c}\right)^{1/3} \qquad (111)$$

境界条件

- 平行平板





- カットされる周波数(低周波数がカット)

$$\omega R/c > (\pi R/2b)^{3/2}$$

不安定性閾値

$$\left|\frac{Z(\omega)}{n}\right| < 0.5\frac{\gamma\eta L Z_0}{N_b r_e}\sigma_p^2 \qquad (105)$$

$$n = \omega/\omega_0$$

$$Z(\omega) = \frac{iAZ_0}{2}\left(\frac{\omega R}{c}\right)^{1/3} \qquad (111)$$

$$A = 3^{-1/3}\Gamma[2/3](\sqrt{3}i - 1) = 1.63i - 0.94 \qquad (112)$$

- ωが小さければ必ず不安定
- ωの下限設定 $\omega R/c > (\pi R/2b)^{3/2}$

$$\omega\sigma/c > 1$$