ウェイク場、インピーダンスとロスファクター

陳　栄浩(KEK)、菖蒲田　義博(JAEA)

OHO2011

KEK, Tsukuba

はじめに

- この講義は加速器科学の初心者を対象にビーム不安定性を勉強する上で必須なウェイク場やインピーダンスについて解説したものである。
- ３回の授業でウェイク場とインピーダンスの基礎の習得に必要な事柄とその導出方法をほぼ網羅する。
- この講義では、受講者がフォローできる様に理論の展開を出来るだけ丁寧に追うが(結果だけを見せることは避ける)、
  - 結果的に内容は膨大で、式もたくさん出てくるので注意。
  - 漫然と聞いていると脱落するので、理解するよう努力する。
  - 必ず毎日講義ノートで復習をして下さい。

概要

- 空洞や円形導波管内での電磁場
- ウェイク場
- インピーダンス
- ロスファクター

円形導波管内での電磁波

- 円形の形をした導波管や空洞を考える。
- 円形導波管を伝播する電磁波:
  - TM波(磁界は横波であり、進行方向成分をもたない)
  - TE波(電界は横波であり、進行方向成分をもたない)
- TE波は、進行方向に傾きをもたないで直進するビームとは相互作用しまいので、円形加速器のビーム不安定性理論ではあまり取り扱わない。ここではTM波だけを考える。
- 時間方向と進行方向空間の一様性、円形導波管一周に渡る周期性から、電磁場のz方向成分 は

$$E_z = \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_{rm}(r)\cdot\cos(m\theta)\cdot\exp(i\omega t - i\beta z)$$

m : モード
m=0: モノポール
m=1: ダイポール

E_{rm}の解

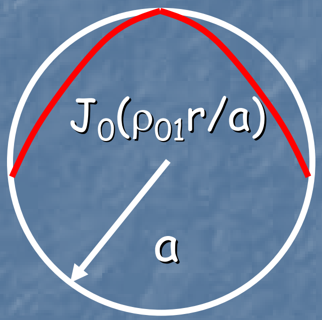
- E_{rm}に関する波動方程式

$$\frac{d^2E_{rm}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dE_{rm}}{dr}+(k_c^2-\frac{m^2}{r^2})E_{rm}=0$$

$$\boxed{\begin{aligned}k&=\omega/c\\ k_c^2&=k^2-\beta^2\end{aligned}}$$

- 解はベッセル関数となる:

$$E_{rm}(r)=J_m(k_cr)$$



- 円形導波管の半径をaとすると、導波管の内壁では電解の接線成分はゼロになる:

ρ_{mn} :m のベッセル関数のn番目のゼロ根

$$J_m(k_ca)=0 \longrightarrow k_c=\frac{\rho_{mn}}{a}$$

$\rho_{01}=2.40$,
$\rho_{11}=3.83$

遮断周波数

- 位相定数β

$$\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\rho_{mn}}{a}\right)^2}$$

$k < \rho_{mn} / a$ の時、β は虚数。この
電磁界は導波管中を伝播せず、
zの方向に指数関数的に減衰する。

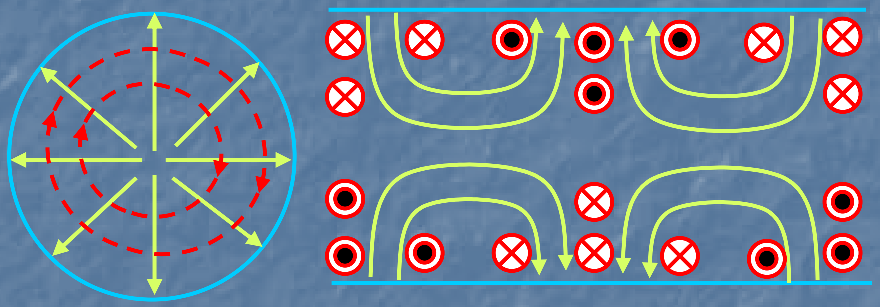
- 遮断周波数（カットオフ周波数）
  - 電磁界の周波数がこの遮断周波数以下の時、電磁波は導波管を伝播しない。
  - 言い換えれば、周波数が遮断周波数以下の電磁波を円形導波管に入射することは出来ない。

$$\omega_c = c\frac{\rho_{mn}}{a} \longrightarrow \lambda_g = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - \left(\frac{\rho_{mn}}{a}\right)^2}}$$

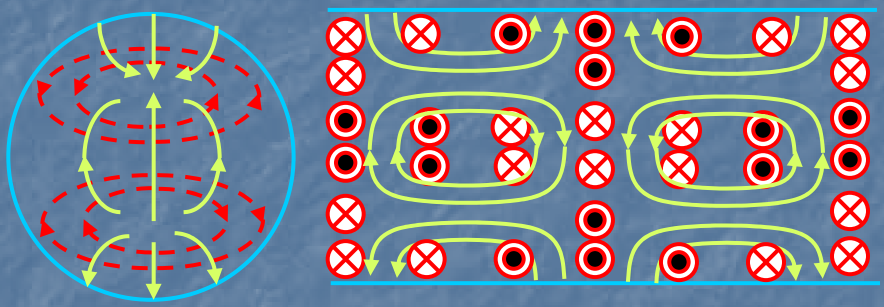
：管内波長

TM$_{mn}$モード

- 導波管内の電磁波は、進行方向成分の有無とθ方向の依存性を表すモード番号m、径方向の依存性を表すモード番号nによって分類することができる。
  - TM波はモード番号mとnによってTM$_{mn}$モードと書く。



TM$_{01}$モード（モノポール）



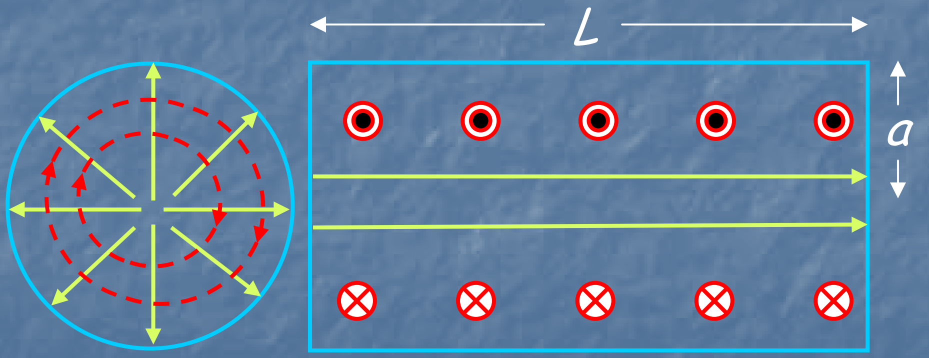
TM$_{11}$モード（ダイポール）

円形空洞内の電磁場

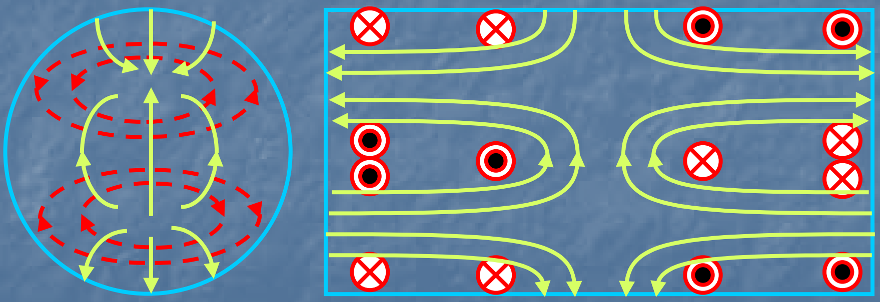
- 円形導波管の両端に板を置いて短絡すると、短絡した面で境界条件から、進行方向に完全な定在波ができる。
  - 空洞での管内波長の1/2の整数倍が空洞の長さＬと等しい。

$$L = l\frac{\lambda_g}{2} \longrightarrow (kc)^2 = \left(\frac{\rho_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi l}{L}\right)^2$$

：空洞内のTM_{mnl}モードの共振周波数



TM_{010}モード（モノポール）



TM_{111}モード（ダイポール）

空洞の並列共振回路モデル

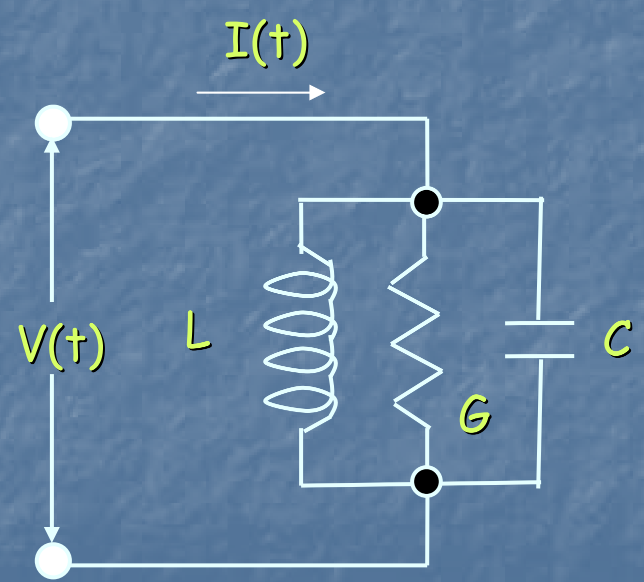
- 空洞共振器や加速器に於けるその他の多くのインピーダンス源は並列共振回路でモデル化されることが多い。
  - 並列共振回路では回路に流れる全電流はLGCそれぞれの回路要素を流れる電流の和に等しい：

$$I(t) = C\frac{dV}{dt} + GV + \frac{1}{L}\int V dt$$

キャパシタンス（静電容量）

アドミッタンス（抵抗の逆数）

インダクタンス



アドミッタンスとインピーダンス

- 電流と電圧が、それぞれ $I(t) = \hat{I}\exp(i\omega t)$、$V(t) = \hat{V}\exp(i\omega t)$ と振動していると仮定すると、

$$\hat{I} = Y\hat{V}$$

  - ここで

$$Y(\omega) = i\omega C + G - i\frac{1}{\omega L}$$

：アドミッタンス

$$Z(\omega) = \frac{1}{Y(\omega)}$$

：インピーダンス

空洞のインピーダンス

- 空洞の特性を表す3つのパラメーターで表現する：

$$Z(\omega) = \frac{R_s}{1 + iQ\left(\frac{\omega_R}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_R}\right)}$$

$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ：共振周波数

$R_s = \frac{1}{G}$ ：シャントインピーダンス

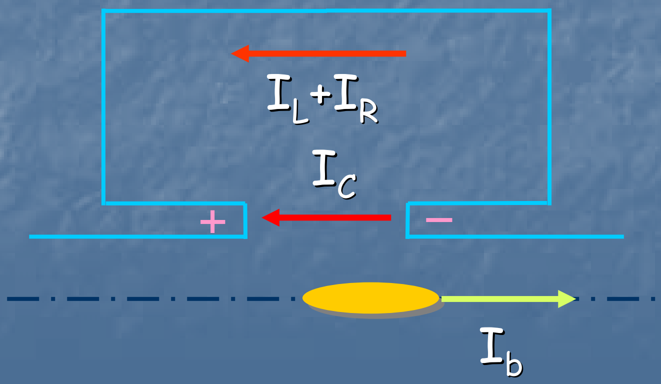
$Q = \frac{1}{G}\sqrt{\frac{C}{L}}$ ：クオリティファクター
或はQ値

$\frac{R_s}{Q} = \sqrt{\frac{L}{C}}$:G によらない

空洞内の物理現象との対応

- ビーム電流 I_b を持ったビームが空洞を通過すると、
  - 電磁誘導によって空洞内の磁場の変化を妨げる向き、つまりビームの進行方向と逆向きに誘導起電力が生じ、空洞のインダクタンスに比例する鏡像電流 I_L が空洞の表面に流れる。
  - 空洞の材質に抵抗があると、更に起電力が生じ、I_R の電流がビーム電流の向きと逆向き流れる。
  - 空洞のギャップ間には電荷がたまるため、変位電流 I_C が流れる。

$$I_b + I_L + I_R + I_C = 0$$



起電力での表示

- 回路に誘導される起電力Vの式として書き換えると

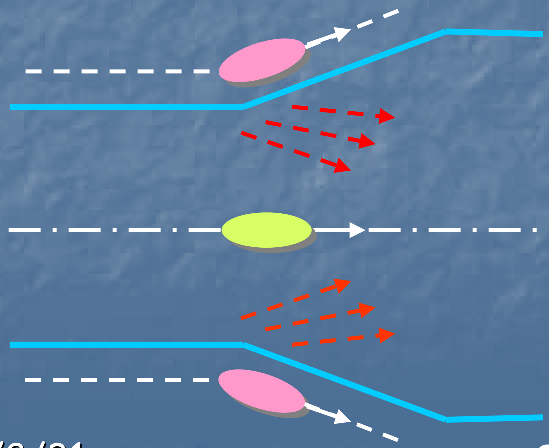
$$\frac{1}{L}\int V dt + \frac{V}{R} + C\frac{dV}{dt} = -I_b$$

  - この式は以前定義したアドミッタンスで記述できる:

$$Y \cdot V = -I_b$$

ウェイク場

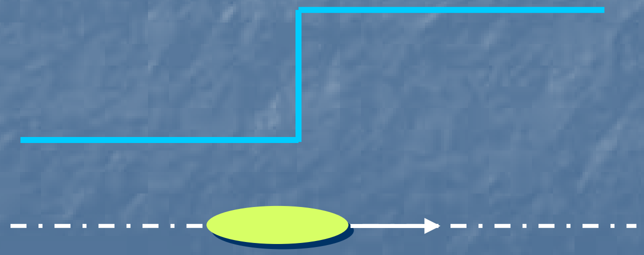
- 完全導体で出来た真っ直ぐなパイプの中心を光速で直進する粒子を考える。
  - パイプの外側で電磁場がゼロになる様にパイプの内側の表面上に鏡像電流が誘起され、粒子との間に電磁場の雲ができる 。
- パイプの先で口径が急に広がっているとする。
  - 粒子はそのまま直進するが鏡像電流はパイプに沿ってその軌道が曲げられる。その時、鏡像電流はシンクロトロン放射を出す。



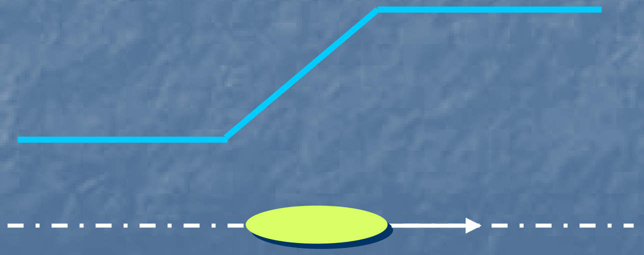
ウェイク場＝鏡像電流からのシンクロトロン放射

ウェイク場の正体

- パイプの材質が伝導率有限の物質になっていたとする。
  - 鏡像電流は急に減速され、前方に制動輻射を出す。
    - ウェイク場＝鏡像電流からの制動輻射
- つまり、ウェイク場とは鏡像電流に加速（横方向及び縦方向）が加わった時に鏡像電流が出す輻射である。
- 問題：どちらの構造体が作るウェイク場が小さいか？



A



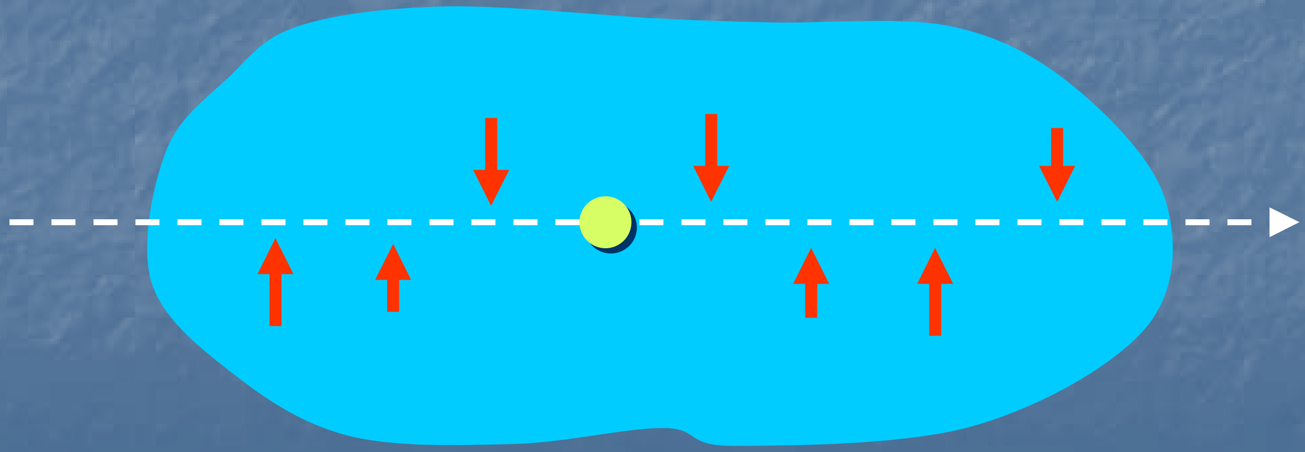
B

ウェイク場計算

- ウェイク場は境界条件付きでマックスウェル方程式を解くことによって求められる。
- しかしこれは大変な作業であり、ビーム不安定性とインピーダンスの問題を検討するときに最も多くの時間はここに費やされる。
- 解析的に計算できる場合は極めて限られていて、円形のパイプが小さく波打っている場合や、真っ直ぐなパイプが非完全導体でできている場合などだけである。
- 殆どの場合、ABCI やMAFIA などの計算機コードを使って計算する。

粒子の運動量変化

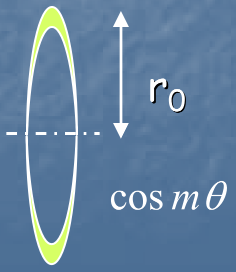
- 粒子の作るウェイク場が計算できたとして、そのウェイク場が粒子の運動にどう影響を与えるかを、後でビーム不安定性の解析をする際に便利な様にうまくパラメーター化する。
- 粒子がウェイク場の雲の中を通過する間に起きる軌道変化が十分に小さいとして、ウェイク場による粒子の運動量変化の総量を求める。



リング状の誘導ビーム

- ウェイク場は軸対象構造体の中で出来るとする。
  - 対称性から電磁場は軸の周りの角度θに関して, cos mθの形にフーリエ展開できる。
  - 次数の低い順に
    - モノポール (m=0)
    - ダイポール (m=1)
- ウェイク場を誘起する誘導ビームが次数mの電磁場だけを誘起するように、誘導ビームとしてcos mθの電荷分布をもったリング(半径r_0)を考える:

$$\lambda = \frac{qc}{\pi r_0 (1+\delta_{m0})} \delta(z-ct)\delta(r-r_0)\cos m\theta$$

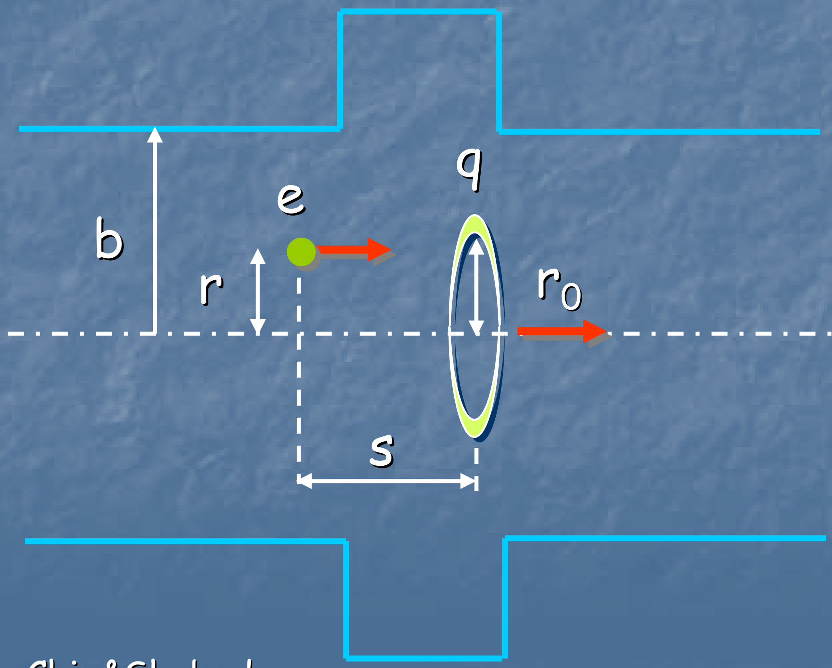


試験粒子

- ウェイク場から力を受ける別の粒子(試験粒子)を考える。
  - 試験粒子は誘導ビームの後方を相対距離sを保ちながら、誘導ビームと一緒に軸と平行に光速で動く。
  - 試験粒子が時間tの時、軸方向の位置zで受ける縦方向、横方向(径方向)のローレンツ力は

$$F_L = eE_z \cos m\theta$$

$$\mathbf{F}_T = e(E_r - c \cdot B_\theta)\cos m\theta \cdot \mathbf{r}$$
$$\equiv F_T \cos m\theta \cdot \mathbf{r}$$



ウェイクポテンシャル

- 試験粒子がウェイク場の雲を通過中に受ける運動量変化の総量：

$$\Delta p_Z = \int_{-\infty}^{\infty} dz F_L(z, t = \frac{z+s}{c})$$

$$\equiv -eqW_{Lm}(s) \cdot r_0^m r^m \cos m\theta$$

$$\Delta \mathbf{p}_T = \int_{-\infty}^{\infty} dz \mathbf{F}_T(z, t = \frac{z+s}{c})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dz F_T(z, t = \frac{z+s}{c}) \cdot \cos m\theta \cdot \mathbf{r}$$

$$\equiv eqW_{Tm}(s) \cdot mr_0^m r^{m-1} \cos m\theta \cdot \mathbf{r}$$

$W_{Lm}(s)$

$W_{Tm}(s)$

ウェイクポテンシャル：
構造体の形状によって
一意的に決まる
sだけの関数

運動量変化の性質

- モノポール場（m=0）
  - 対称性から横方向のウェイクポテンシャルはない。
  - 試験粒子の運動量変化は誘導ビームと試験粒子の相対距離sだけの関数。
    - 誘導ビームのリングの半径にも、また試験粒子の横方向位置にもよらない。
- ダイポール場　(m=1)の横方向
  - 試験粒子の運動量変化の大きさは誘導ビームの半径（誘導ビームのオフセット）に比例する。
    - 試験粒子の横方向位置によらない。
  - その向きは $W_{Tm}(s)$ が正（負）ならば、誘導ビームのオフセットの向き（逆向き）と同じである。

Panofsky-Wenzel theorem

- 縦方向と横方向のウェイクポテンシャルの間にはPanofsky-Wenzel theoremと呼ばれる関係がある:

$$W_{Tm}(s) = \int_0^s ds W_{Lm}(s)$$

- この関係はこのままでは殆ど役にたたない。
  - なぜなら次数mの $W_{Lm}(s)$ を計算できるほどに電磁場解が解かっているならば、同じ次数の $W_{Tm}(s)$ も直接、定義に従って計算できるはず。
- この関係はむしろモノポール場の $W_{L0}(s)$ からダイポール場の $W_{T1}(s)$ を近似的に求めるときに用いられる:

$$W_{T1}(s) \approx \frac{2}{b^2}\int_0^s ds W_{L0}(s)$$

b ：ビームパイプの内径

ウェイクポテンシャルの振る舞い

- 誘導ビームは光速で走っていると仮定するとウェイクポテンシャルは誘導ビームの前方でゼロ:

$$W_{Lm}(s) = W_{Tm}(s) = 0 \qquad (s < 0)$$

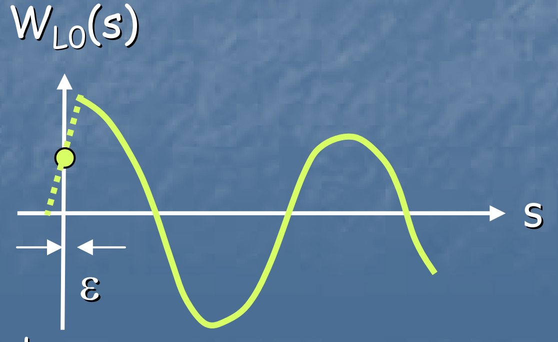
- Panofsky-Wenzel theoremから横方向ウェイクポテンシャルは原点でゼロ:

$$W_{Tm}(0) = 0$$

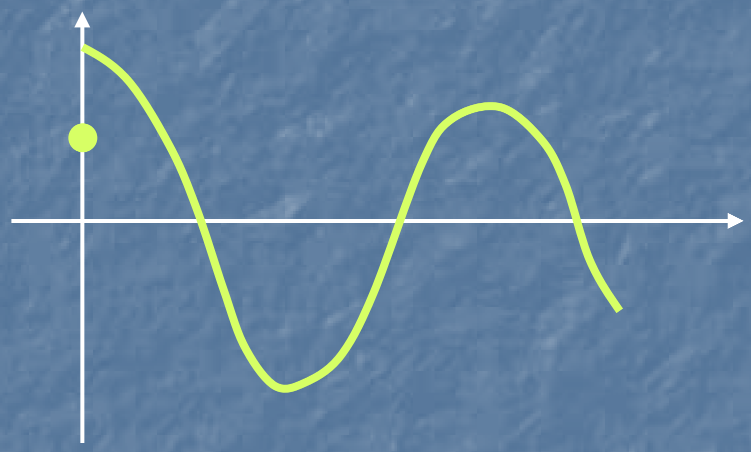
- 縦方向ウェイクポテンシャルは原点で誘導ビームすぐ後方の粒子の半分の値を持つ:

$$W_{L0}(0) = W_{L0}(\varepsilon)/2$$

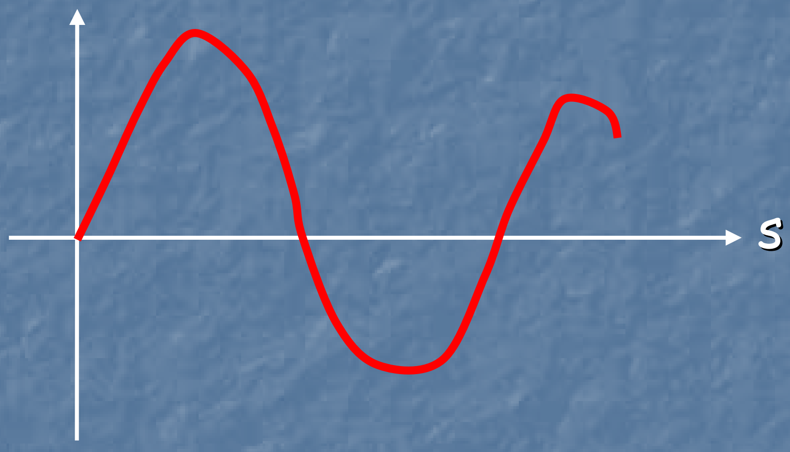
"Fundamental theorem of beam loading"



典型的なウェイクポテンシャル



Cosine-like



Sine-like

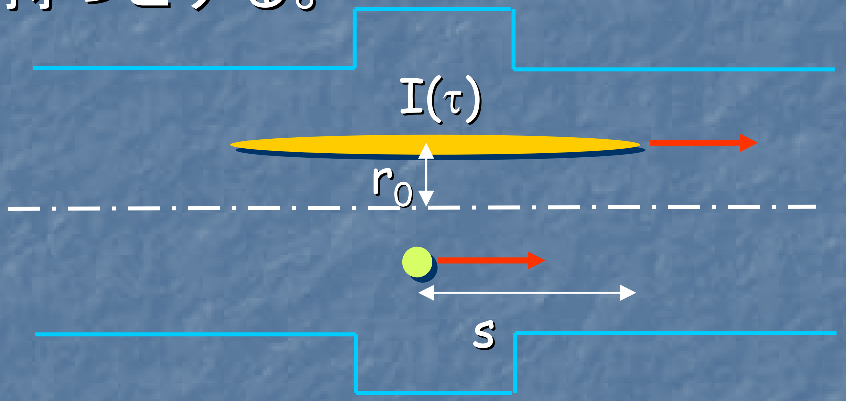
- 誘導ビームも試験粒子も光速で移動しているとする仮定は、陽子ビームの場合、多少の不整合を生むが、理論全体をすっきりさせるために必要な仮定（近似）である。

インピーダンス

- ウェイクポテンシャルは、ビームの振る舞いを時間領域で調べるのに都合が良く、トラッキング等を行う時に便利である。
- しかしビームの振る舞いを解析的に調べようとすると、周波数領域で議論した方が簡単で都合が良いことが多い。
- そこでインピーダンスという量を、以前に学習した電気回路やRFでの定義に沿うように定義しよう。
- 説明の簡略化のためにモノポール場での縦方向インピーダンスとダイポール場での横方向インピーダンスの場合に議論を限る。 実用上、これで十分である。

電流と電圧

- 縦方向の電流分布 $I(\tau)$ を持った誘導ビームを考える。
- ビームの横方向分布は任意でよいが、ビーム重心はチェンバーの軸からr_0のオフセットを持つとする。
- 電流のフーリエ変換:



$$I(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau I(\tau)\exp(i\omega\tau)$$

- このビームの先端から距離 s だけ遅れて走る試験粒子がウェイク場から受ける電圧:

$$V(s)=\int_{-\infty}^{\infty}dzE_Z(z,t=\frac{(z+s)}{c})$$

インピーダンスの定義

- 電圧のフーリエ変換:

$$V(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds}{c}V(s)\exp(i\omega\frac{s}{c})$$

- 縦方向インピーダンスの定義：

$$V(\omega)=-Z_L(\omega)I(\omega)$$

  - インピーダンスの前に負の符号をつけたのは電圧Vを直接作っているのは鏡像電流であり、それは-Iで与えられるから

- ダイポール場での横方向インピーダンスの定義:

$$V_T(\omega)=iZ_T(\omega)\cdot r_0I(\omega)$$

  - $r_0I(\omega)$ = 横方向ダイポール電流のフーリエ変換

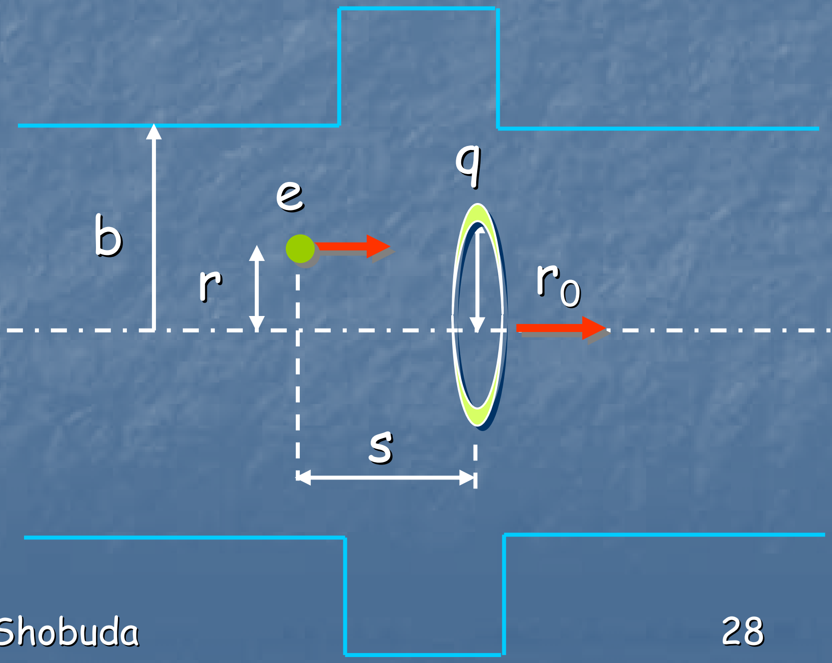
リング状のビームの場合

- 特別な場合として、光速で移動する電荷q、半径r_0のリング状誘導ビームを考える:

$$I(\tau) = q\delta(\tau)$$

- このビームより距離 s だけ遅れて走る試験粒子がウェイク場から受ける電圧

$$V(s) = \int_{-\infty}^{\infty} dz E_Z(z, t = \frac{(z+s)}{c}) = -qW_{L0}(s)$$



  - = ウェイクポテンシャル

インピーダンスとウェイクポテンシャル

- 縦方向電流分布のフーリエ変換

$$I(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau I(\tau)\exp(i\omega\tau)=\frac{q}{2\pi}$$

- 試験粒子の受ける電圧のフーリエ変換

$$V(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds}{c}V(s)\exp(i\omega\frac{s}{c})$$

$$=-\frac{q}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds}{c}W_{L0}(s)\exp(i\omega\frac{s}{c})$$

$$V(\omega)=-Z_L(\omega)I(\omega)$$

- 縦方向インピーダンスは縦方向ウェイクポテンシャルのフーリエ変換

$$Z_L(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds}{c}W_{L0}(s)\exp(i\omega\frac{s}{c})$$

横方向インピーダンス

- 横方向インピーダンスも横方向ウェイクポテンシャルのフーリエ変換である:

$$Z_T(\omega) = \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds}{c}W_{T1}(s)\exp(i\omega\frac{s}{c})$$

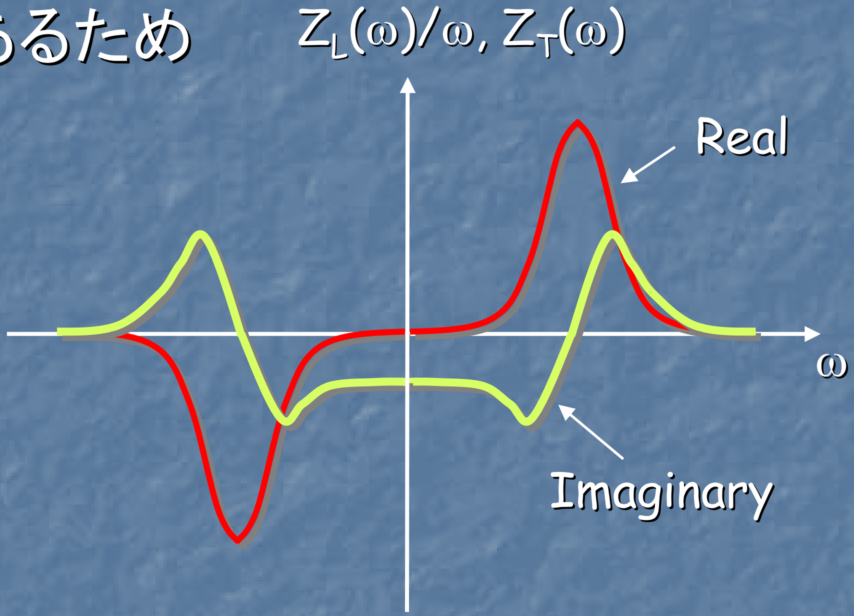
  - ここで注意する必要があるのは、これらの関係はインピーダンスの定義ではなく、インピーダンスとウェイクポテンシャルの間の関係を示しているにすぎないこと。
  - つまり、インピーダンスはウェイクポテンシャルを知らなくてもその定義から独立に計算できる。
  - むしろインピーダンスを求めて、それからウェイクポテンシャルを計算することはよくある。

インピーダンスの性質

- ウェイクポテンシャルが実数であるため

$$Z_L(-\omega) = Z_L^*(\omega)$$

$$Z_T(-\omega) = -Z_T^*(\omega)$$



- Panofsky-Wenzel theorem:

$$Z_{Tm}(\omega) = \frac{c}{\omega} Z_{Lm}(\omega)$$

- m=0の縦方向インピーダンスとm=1の横方向インピーダンスを関係づける便利な近似式:

$$Z_T \cong \frac{2c}{b^2} \frac{Z_L}{\omega}$$

インピーダンスの種類

- 典型的な縦方向インピーダンス：

$$Z_L = -i\omega L + R_W\sqrt{\omega} + R_\Omega + \frac{R_c}{\sqrt{\omega}}$$

インダクタンス　　純粋な抵抗　　加速空洞インピーダンスの高周波成分

Resistive-wallインピーダンス

- 加速空洞のインピーダンス

$$Z_L(\omega) = \frac{R_L}{1 + iQ(\frac{\omega_R}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_R})} \qquad Z_T(\omega) = \frac{R_T\frac{\omega_R}{\omega}}{1 + iQ(\frac{\omega_R}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_R})}$$

対応するウェイクポテンシャル

- インダクタンス:

$$W_{L0}(s) = Lc\frac{d}{ds}\delta(s/c)$$

- 純粋な抵抗

$$W_{L0}(s) = R\delta(s/c)$$

- 縦方向共振空洞インピーダンス

$$W_{L0} = \begin{cases} 0 & (s<0) \\ \alpha R_L & (s=0) \\ 2\alpha R_L e^{-\alpha\frac{s}{c}}\left[\cos\frac{\omega' s}{c} - \frac{\alpha}{\omega'}\sin\frac{\omega' s}{c}\right] & (s>0) \end{cases}$$

$$\alpha = \omega_R/(2Q)$$

$$\omega' = \sqrt{\omega_R^2 - \alpha^2}$$

対応するウェイクポテンシャル続き

- 横方向共振空洞インピーダンス

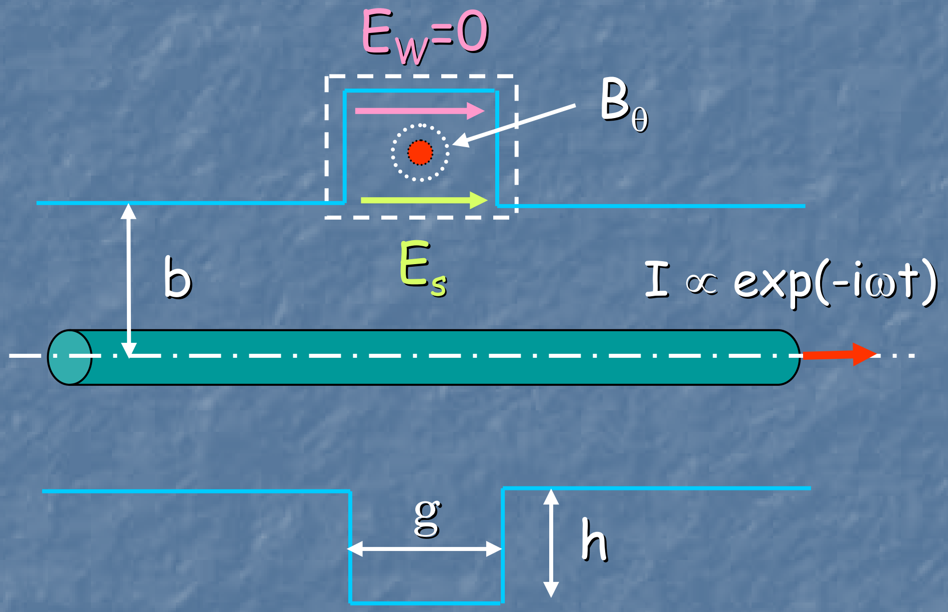
$$W_{T1} = \begin{cases} 0 & (s \le 0) \\ \dfrac{R_T \omega_R^2}{Q\omega'} e^{-\alpha\frac{s}{c}} \sin\dfrac{\omega' s}{c} & (s > 0) \end{cases}$$

$$\alpha = \omega_R /(2Q) \qquad \omega' = \sqrt{\omega_R^2 - \alpha^2}$$

- 以上の様な形式的な説明では、インピーダンスの種類とその名前はわかっても、実際にどういった構造体がどういうインピーダンスを作るかはよくわからない。
- そこでいくつかの重要なインピーダンスを簡単に求めてみる。

インダクタンス

- 小さな空洞のような構造体の中心軸上をビームが通過する。



- 電場はビームパイプの近傍では殆どゼロであるから、空洞の中では磁場だけを考えればよい
- 今知りたいのはギャップ間に立つ電場 E_s である。

インダクタンスの公式

- 線積分路にそった電場の積分は、空洞内の磁場の時間変化の反対符号に等しい（ファラデーの法則）：

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} \longrightarrow V = i\omega\frac{\mu_0 gh}{2\pi b} I$$

  - 左辺はギャップ間電圧そのもの

$$V = \int_{gap} E_s ds$$

  - 空洞内の磁場は

$$B_\vartheta = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \longrightarrow -\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = i\omega\frac{\mu_0 gh}{2\pi b} I$$

インピーダンスの定義より

$$Z_L = -i\omega\frac{\mu_0 gh}{2\pi b} = -i\omega\frac{Z_0 gh}{2\pi bc}$$

$$Z_0 = c\mu_0 = 120\Omega$$

：真空のインピーダンス

円形加速器での公式

- 円形加速器では、ビームは円形加速器の回転周波数の整数倍の周波数($\omega = n\omega_0$)でしかインピーダンスを誘起しない。
- インダクタンスのインピーダンスを整数 nで割った公式が一般的に使われる:

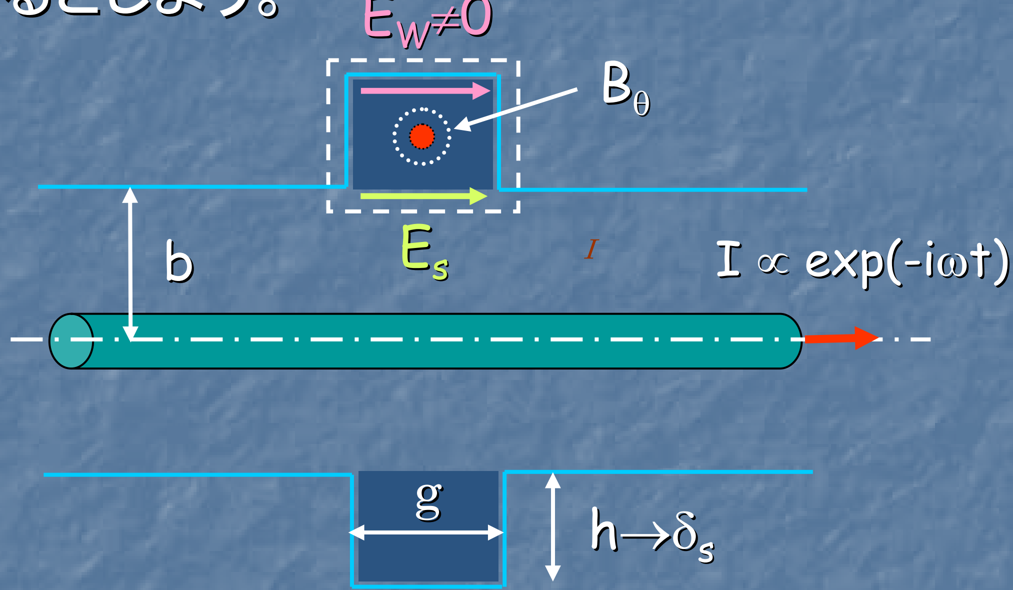
$$\frac{Z_L}{n} = -i\omega_0 \frac{Z_0 gh}{2\pi bc}$$
$$= -i\beta \frac{Z_0 gh}{2\pi bR}$$

R: 円形加速器の平均半径

  - 空洞はコイルの役割をして、電磁誘導で誘導起電力を生じる。
  - バンチが長い陽子ビームでは殆どの構造体はこの様にインダクタンスに見える。

Resistive-wall インピーダンス

- 次にこの空洞の中が電気伝導率が大きいが有限である物質で満たされているとしよう。



- この場合、電磁場はスキンデプスδ_s 以上にはこの物質の中に入っていかない:

$$\delta_s = \sqrt{\frac{2\rho_c}{\omega\mu_0}} \qquad \rho_c = 1/\sigma_c \text{：体積抵抗率}$$

電気伝導率有限の物質の中の電磁場

- そこで、いっそ空洞の深さ h をスキンデプス δ_s にする。
- 空洞の奥の内壁での$E_W \neq 0$の寄与が新たに加わる。
- E_Wはそこでの磁場と以下の関係がある(Leontovich条件):

$$E_w = \frac{\omega}{2}\delta_s(1+i)B_\vartheta$$

$$V = -\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} - \int E_w ds$$

$$= i\omega\frac{\mu_0 g\delta_s}{2\pi b}I - \frac{\omega}{2}\delta_s(1+i)g\frac{\mu_0 I}{2\pi b}$$

$$= -\frac{\omega}{2}(1-i)\frac{Z_0 g\delta_s}{2\pi bc}I$$

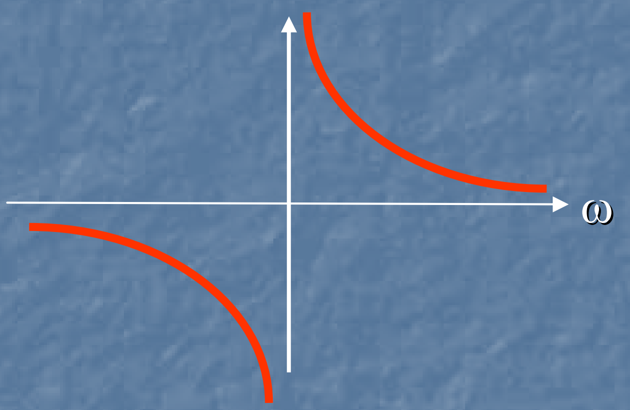
$$Z_L = \frac{\omega}{2}(1-i)\frac{Z_0 g\delta_s}{2\pi bc}$$

縦方向のresistive-wall
インピーダンス

Resistive-wall インピーダンスの公式

- インダクタンス同様、回転周波数の整数倍の周波数（ $\omega = n\omega_0$ ）での形に書き換えると、

$$\frac{Z_L}{n} = Z_0\beta \cdot \left(\frac{1-i}{2}\right)\frac{\delta_s}{b}\frac{g}{2\pi R}$$



- 横方向のResistive-wallインピーダンス

$$Z_T = Z_0(1-i)\frac{g\delta_s}{2\pi b^3}$$

（ $Z_T \cong \frac{2c}{b^2}\frac{Z_L}{\omega}$ ）から

- $\delta_s \propto 1/\sqrt{\omega}$ の周波数依存性のために、横方向のresistive-wall インピーダンスは低周波で急激に増大する。そのため、大電流陽子加速器では横方向のresistive-wall インピーダンスが最も深刻な横方向インピーダンスになることが多い。

Resistive-wall インピーダンスの実部

- 縦方向のresistive-wall インピーダンス物理的意味合いを考えよう。
- 右のパイプの電気回路的な抵抗値

$$\mathrm{Re}\, Z_L = \frac{\rho_c g}{2\pi b \delta_s}$$

$$\mathrm{Re}\, Z_L = \frac{\omega}{2}\frac{Z_0 g \delta_s}{2\pi b c}$$

$$\frac{\rho_c}{\delta_s} = \frac{\rho_c}{\sqrt{\frac{2\rho_c}{\omega\mu_0}}} = \frac{\omega\mu_0}{2}\sqrt{\frac{2\rho_c}{\omega\mu_0}}$$

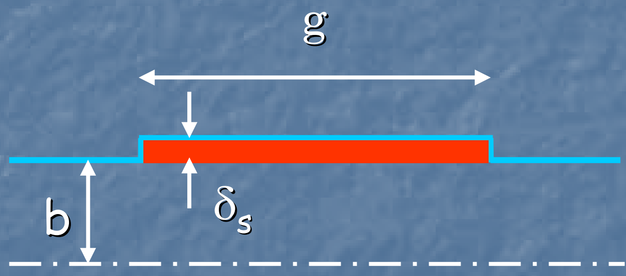
$$= \frac{\omega\mu_0}{2}\delta_s = \frac{\omega}{2}\frac{Z_0}{c}\delta_s$$

インピーダンスの実部は
この物質の抵抗そのもの。

Resistive-wall インピーダンスの虚部

- 円筒形パイプの両端が内径bの完全導体のビームパイプに繋がっていると考える。
- 非完全導体の円筒形パイプは一種の空洞を構成する。
- 磁場はこの空洞内部で指数関数的に減衰するから、空洞の外半径での磁場をゼロと近似すると、実効的な磁場は内部が真空の時の磁場の約半分ぐらいになる。

$$B_\phi \approx \frac{1}{2}\times\frac{\mu_0 I}{2\pi b}$$



- これをインダクタンスの公式の導出に使うと

$$\mathrm{Im}\,Z_L = -i\frac{\omega}{2}\frac{Z_0 g\delta_s}{2\pi bc}$$

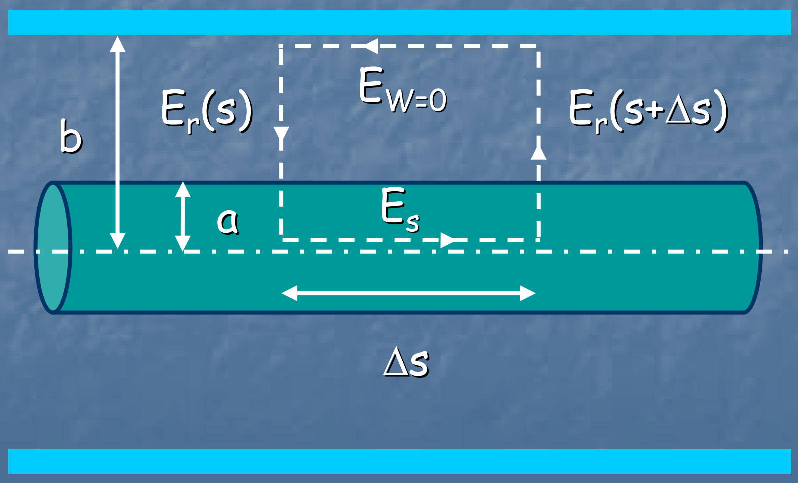
虚部はインダクタンス。

公式は全周波数領域で正しいの？

- 実は、ここで求められたresistive-wall インピーダンスの公式はスキンデプスがチェンバーの壁の厚みより小さい高周波の領域でしか有効ではない。スキンデプスがチェンバーの壁の厚みより大きい低周波の領域を含めた正しい取り扱いについてはテキストの参考文献[10]を参照されたい。

縦方向スペースチャージインピーダンス

- ビーム内の粒子は他の粒子からクーロン反発力を受ける。
  - 縦方向（進行方向）には、前方の粒子はバンチの中心から前方に押し出される様な力を受け、後方の粒子は後方に押し戻される。
  - この力はインダクタンスの効果と逆の方向である。
- ビームは円筒形をしていて、粒子は横方向に一様に分布していると仮定する。
  - 積分路がビームの内部まで入る。
  - ビームが在る時の電磁場を計算。
  - 電場の径方向成分も寄与する。

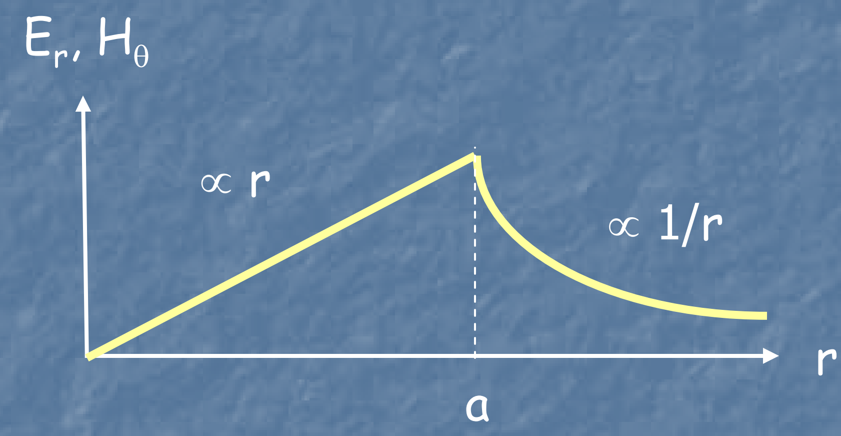


横方向の電磁場

- 円筒形ビームの半径を a とし、ビームの進行方向線密度を λ とした時に、横方向の電磁場は

$$E_r = \begin{cases} \dfrac{e\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r} & (r \geq a) \\ \dfrac{e\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{r}{a^2} & (r < a) \end{cases}$$

$$H_\theta = \begin{cases} \dfrac{e\lambda\beta c}{2\pi}\dfrac{1}{r} & (r \geq a) \\ \dfrac{e\lambda\beta c}{2\pi}\dfrac{r}{a^2} & (r < a) \end{cases}$$



ファラデーの法則

- 積分路にそって電場の積分を行うと、それは空洞内の磁場の時間変化の反対符号に等しい:

$$\oint \mathbf{E}d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} \longleftarrow -\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = -\frac{\mu_0 e\beta c}{4\pi}\left(1+2\ln\frac{b}{a}\right)\Delta s\frac{\partial\lambda}{\partial t}$$

$$\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial t} = -\beta c\frac{\partial\lambda}{\partial s}$$

$$\oint \mathbf{E}d\mathbf{l} = E_s\Delta s + \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left(1+2\ln\frac{b}{a}\right)$$

$$\times\left(\lambda(s+\Delta s)-\lambda(s)\right)$$

$$= E_s\Delta s + \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left(1+2\ln\frac{b}{a}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial s}\Delta s$$

$$E_s = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left(1-\beta^2\right)\cdot\left(1+2\ln\frac{b}{a}\right)\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial s}$$

$$= -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0\gamma^2}\cdot\left(1+2\ln\frac{b}{a}\right)\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial s}$$

$$= -\frac{eZ_0 c}{4\pi\gamma^2}\cdot\left(1+2\ln\frac{b}{a}\right)\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial s}$$

$$Z_0 c = \frac{1}{\varepsilon_0}$$

縦方向スペースチャージインピーダンスの公式

- ビーム電流I:

$$I = e\beta c\lambda$$

- ジオメトリカルファクター:

$$g_0 = 1 + 2\ln\frac{b}{a}$$

- 加速器リング一周に渡る電圧:

$$V = E_s \cdot 2\pi R = -\frac{\partial I}{\partial s} Z_0 R \frac{g_0}{2\beta\gamma^2} \longleftarrow I = I_0 + I_1 \exp i\left(\frac{n}{R}s - \omega t\right)$$

$$\downarrow$$

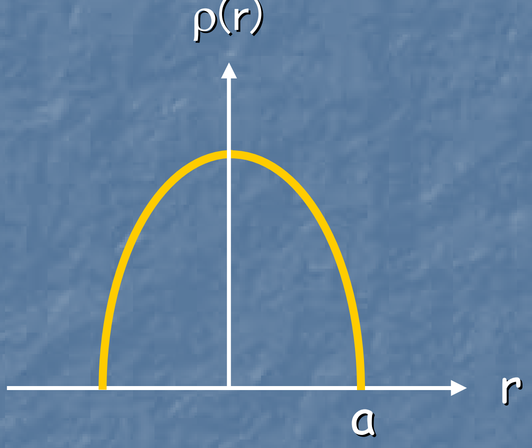
$$V = -in \cdot Z_0 \frac{g_0}{2\beta\gamma^2} \cdot I_1 \longrightarrow \frac{Z_L}{n} = i\frac{Z_0 g_0}{2\beta\gamma^2}$$

:縦方向のスペースチャージインピーダンス

パラボラビームの場合

- ジオメトリカルファクターはビームの横方向分布関数に依存。
  - 以下の関数で与えられるパラボラビームの場合

$$\rho(r) = \frac{N_p}{\pi^2 a^2 R}\left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]$$



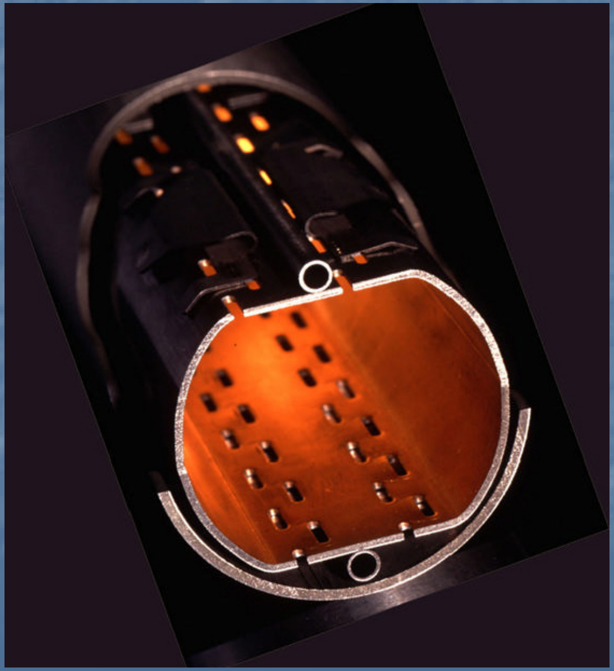
  - ジオメトリカルファクターは

$$g_0 = 1.5 + 2\ln\frac{b}{a}$$

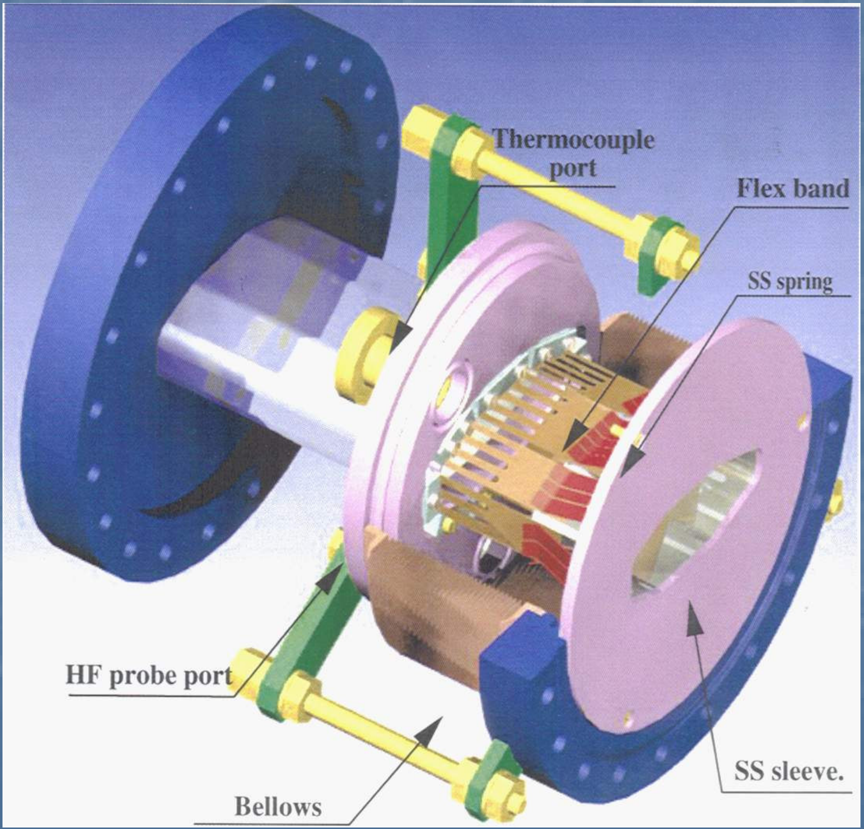
- 縦方向のスページチャージインピーダンスは、キャパシタンスの様に働く(負のインダクタンス)。
- ガンマーファクターのため高エネルギーでは効かなくなる(電場は押し出そうとし、磁場は押し戻そうとする)。

穴やスロットのインピーダンス

- 加速器のビームパイプには、さまざまな理由でさまざまな形状の穴があいている:
  - 真空を引くための穴
  - フィンガー形式のベロー



LHC



Shielded bellow

小さな空洞の作る磁気ダイポール

- 空洞内の磁場:

$$B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}$$

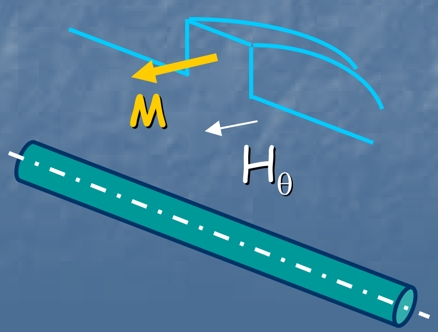
- 空洞の中をトロイダルの様に回転する磁束:

$$\Phi_m = \int_S B(r)dS \approx B_\theta S$$

$$\alpha_m = S = gh$$

- 磁束の時間変化が作る起電力:

$$V = i\omega\Phi_m$$



- 単位長さ当りの磁気ダイポールモーメント：
  - 空洞の近くに磁場があると磁気分極が起きる:

$$m = \frac{M}{2\pi b} = \frac{\Phi_m}{\mu_0}$$

- 磁気分極率：

$$m = \alpha_m H_\theta(b) \rightarrow \alpha_m = \frac{\Phi_m}{(\mu_0 H_\theta(b))}$$

- 磁気分極が作る縦方向インピーダンス：

$$Z_{L(m)} = -\frac{V}{I} = -i\omega\frac{Z_0\alpha_m}{2\pi bc}$$

磁気分極率と電気分極率

- 空洞の様に軸対象構造であれば、内部の磁場は軸方向に一様で簡単に求まる。
- パイプ上の穴は軸方向に局所的な磁場を作るので、以上の方法は使えない。
- しかし、ビームパイプの形状に摂動がある時にどういう磁気分極が起きるかが分かればインピーダンスは計算できる。
- 磁気分極率を摂動法を使って求められる場合はこの方法が適している。
- 実は、磁気分極だけではなく、空洞の近くの電場が起こす電気分極の寄与もある。

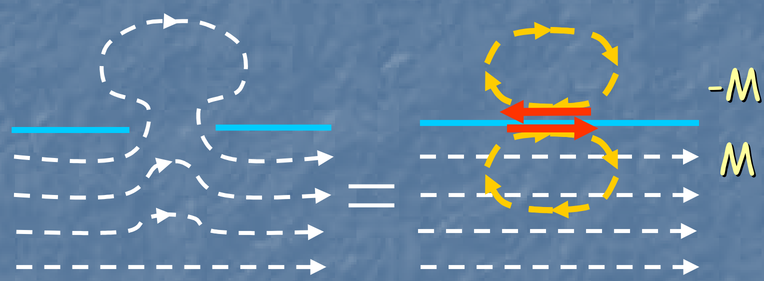
穴やスロットのインピーダンスの公式

- パイプ上の一つの穴或はスロットが電気、磁気分極を起す時、インピーダンスへの効果は空洞の場合より、パイプの周長だけ小さくなる:
  - 穴やスロットが作る縦方向インピーダンスの一般形:

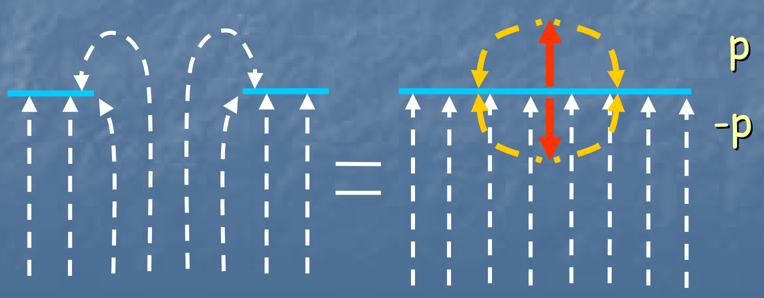
$$Z_L(\omega) = -iZ_0 \frac{\omega}{c} \frac{(\alpha_m + \alpha_e)}{4\pi^2 b^2}$$

α_m :穴やスロットの磁気分極率

α_e :穴やスロットの電気分極率



磁気分極



電気分極

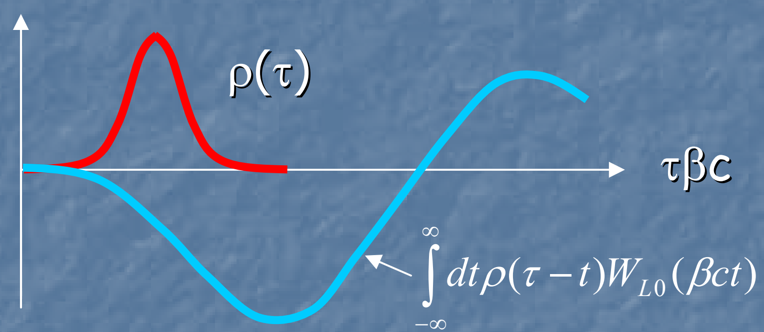
  - 例:半径aの丸い穴

$$\alpha_m = \frac{4}{3}a^3, \alpha_e = -\frac{2}{3}a^3$$

ロスファクター

- ビームがインピーダンスを持つ構造体を通過するとき、幾ばくかのエネルギーを損失する。
  - 損失の量はビームの進行方向の形状に依存する。
  - ビームの総電荷をqとしたとき、構造体を一回通過した時のエネルギー損失は以下の式で与えられる:

$$\Delta E = -q^2 k_L$$



  - k_L はロスファクター
    - 線密度 ρ(τ) を持ったビームが、自分自身が作ったウェイクポテンシャルから力を受けて、ビームがエネルギーを損失する割合

$$k_L = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \rho(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} dt \rho(\tau - t) W_{L0}(\beta ct)$$

インピーダンスを使ったロスファクターの表現

- 線密度ρ(τ)のフーリエ変換ρ(ω)とインピーダンスを使ったロスファクターの表現:

$$k_L(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \mathrm{Re}\, Z_L(\omega) \left|\rho(\omega,\sigma)\right|^2$$

σ: 時間で測ったバンチ長

  - ビームの進行方向線密度がガウシアン分布をしている場合:

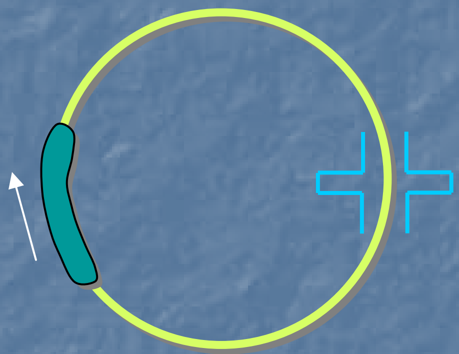
$$k_L(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \mathrm{Re}\, Z_L(\omega) \exp(-\omega^2\sigma^2)$$

- ロスファクターはプログラムABCIなどを使って任意の軸対象構造体の場合に計算できる。

リングでのパワー損失

- 一旦ワンパスのロスファクターが計算できれば、リングの様に、同じ構造体を周回の度に通過する場合の単位時間あたりのエネルギー損失、つまりパワー損失を以下の式で計算できる:

$$P_{loss} = 1.6 \times 10^{-19} \cdot N_p \cdot I_b \cdot k_L$$



  - N_p= 1バンチ中の粒子の数
  - I_b = 総ビーム電流（多バンチの場合はバンチ電流の総和）

キックファクター

- 横方向のロスファクターはキックファクターとも呼ばれ、ビームが自分が作ったウェイク場から受ける横方向キックの大きさを表し、ビームのコヒーレントなベータトロン周波数を決定する：

$$k_T = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \rho(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} dt \rho(\tau - t) W_{T1}(\beta c t)$$

- インピーダンスを使うと：

$$k_T(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega Z_T(\omega) \left| \hat{\rho}(\omega, \sigma) \right|^2$$

ガウシアン分布の場合

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \operatorname{Im} Z_T(\omega) \left| \hat{\rho}(\omega, \sigma) \right|^2 \quad \left(= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \operatorname{Im} Z_T(\omega) \exp(-\omega^2 \sigma^2) \right)$$

コヒーレントなベータトロン周波数のずれ

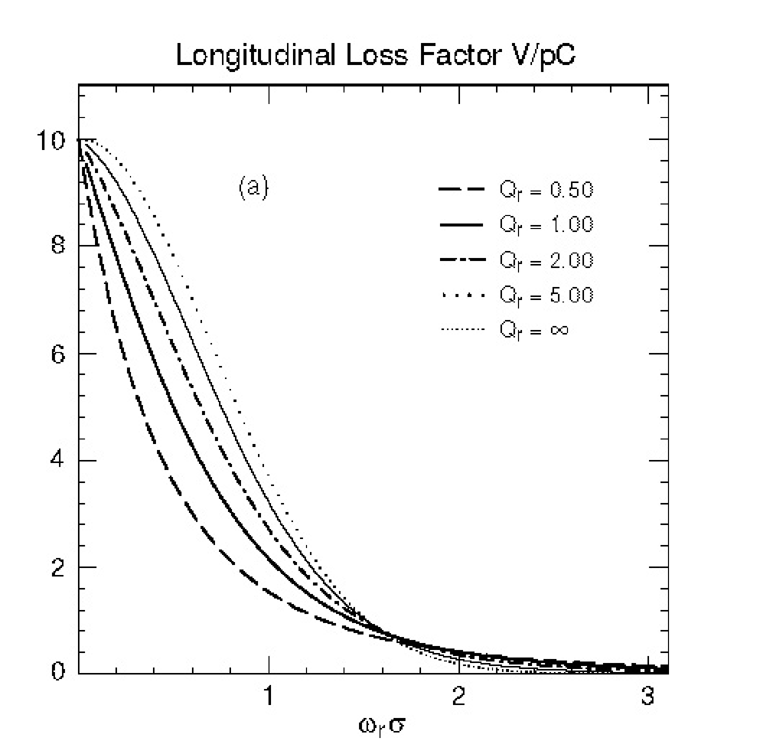
- キックファクターk_Tによるビームのコヒーレントなベータトロン周波数のずれは以下の公式から計算できる:

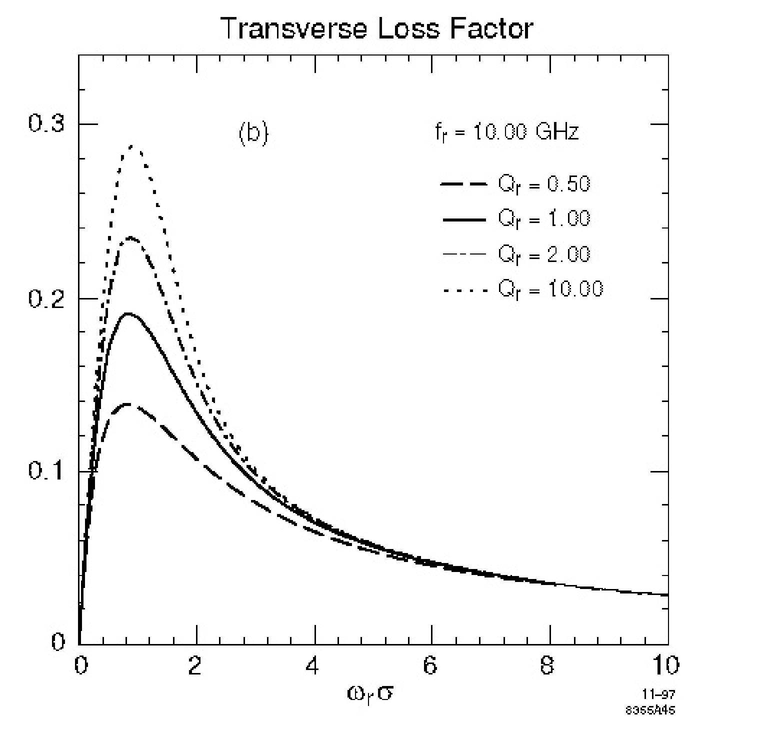
$$\Delta \nu_\beta \approx \frac{1.6\times 10^{-19}\cdot N_p \cdot \beta_T \cdot k_T}{4\pi E_0 / e}$$

  - β_T =ビームにキックを与える構造体でのベータ関数
  - E_0=ビームのエネルギー

空洞形インピーダンスのロスファクター

- ビームの進行方向線密度がガウシアン分布をしている場合:





$\omega_r R/2Q$でノーマライズしてある

最後に

- 過去3時間の講義で、ウェイク場、インピーダンスとロスファクターについてを駆け足的に学習してきた。
- 内容的には、ウェイク場とインピーダンスとのほぼ全体を網羅したので、基礎として、これ以上学習することはない。
- 初めてウェイク場とインピーダンスを学習する人にとって、難しい内容であったと思うが、現象や公式の物理的説明を出来るだけ書き込んだと思うので、講義ノートを呼んで、再度勉強して下さい。