

X線自由電子レーザー理論

田中隆次

理研放射光センター

Outline

- レーザー発振の定性的解釈(2節)
- 1次元FEL理論(3節)
- FELにおける回折効果(4節+5節)
- SASE型FEL (6節)
- シード型FEL (7節)

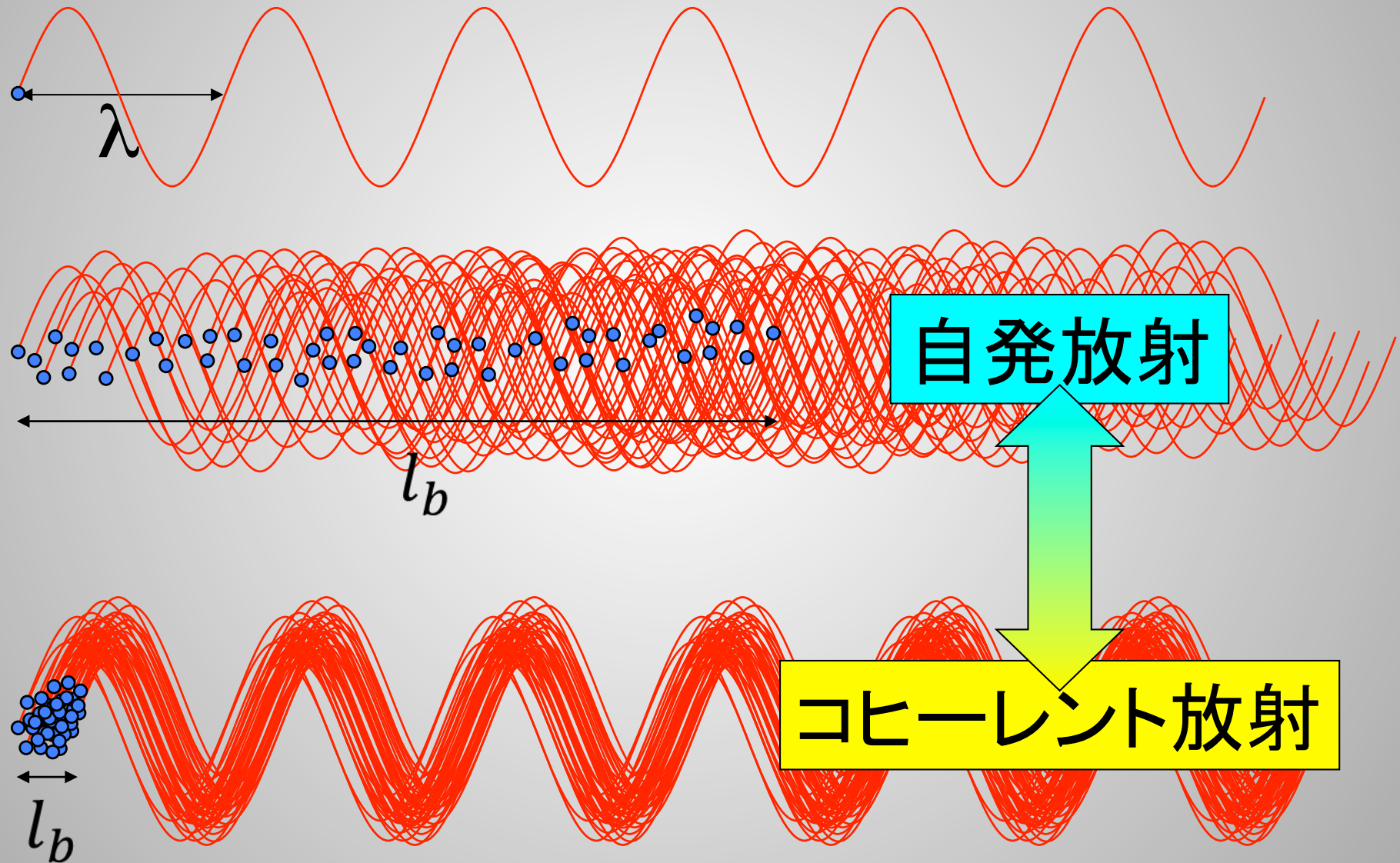
Outline

- **レーザー発振の定性的解釈**
- 1次元FEL理論
- FELにおける回折効果
- SASE型FEL
- シード型FEL

自発放射とコヒーレント放射(1)

- 一般的な電子ビームには 10^9 - 10^{10} 個の電子が存在する
- 個々の電子からの放射光がどのように積算されるかで、放射過程を分類できる
 - 自発放射：ランダムな積算
 - コヒーレント放射：位相が揃った積算
- どちらが支配的かは、電子ビームの長さ(l_b)と、放出される光の波長(λ)の関係で決まる

自発放射とコヒーレント放射(2)

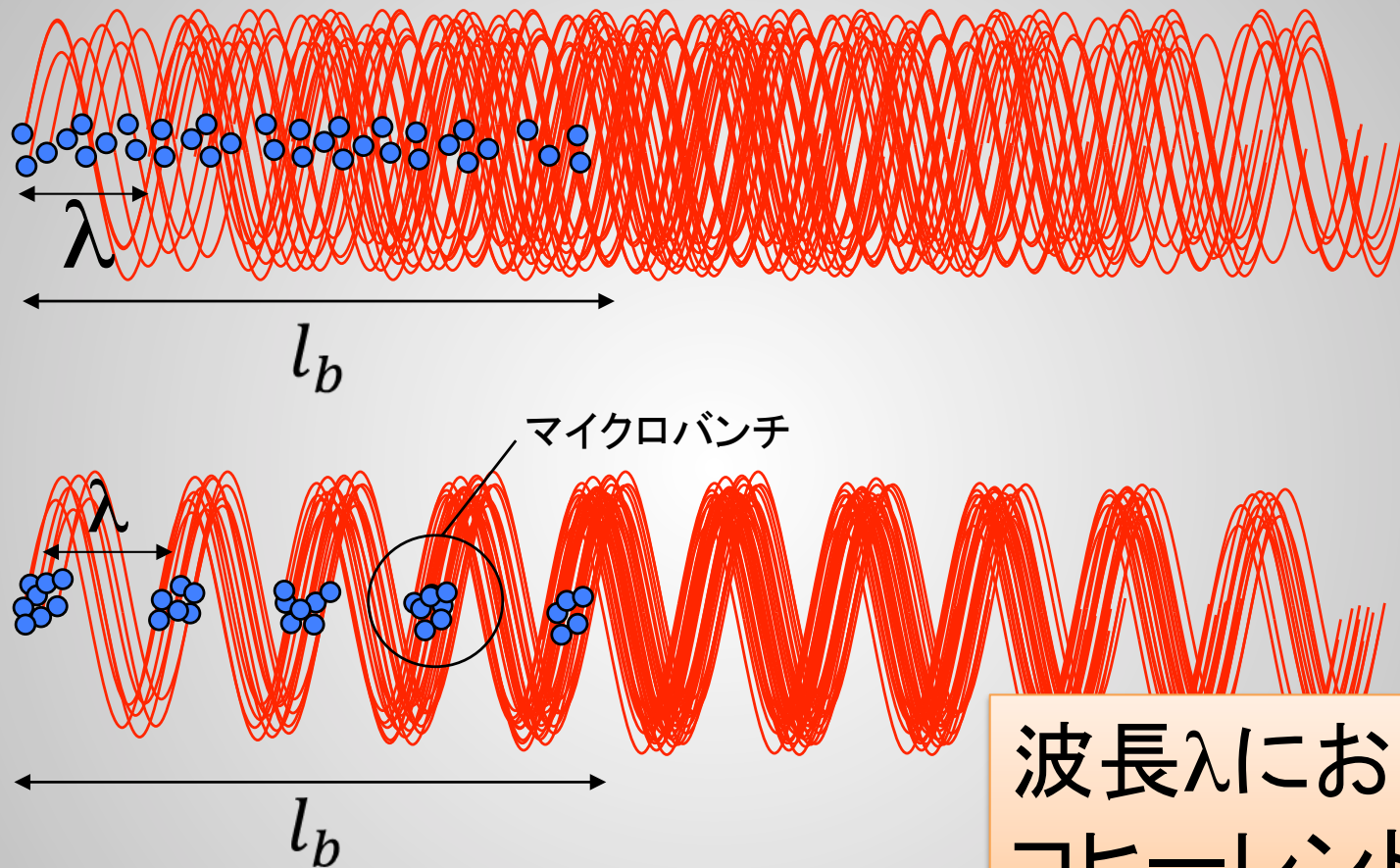


自発放射とコヒーレント放射(3)

- 自発放射
 - バンチ長 $>$ 波長のとき
 - 光は“光子”として積算：光子数がN倍
- コヒーレント放射
 - バンチ長 $<$ 波長のとき
 - 光は“電磁波”として積算：電場振幅がN倍
 - 光子数 \propto |電場振幅|² としてはN²倍

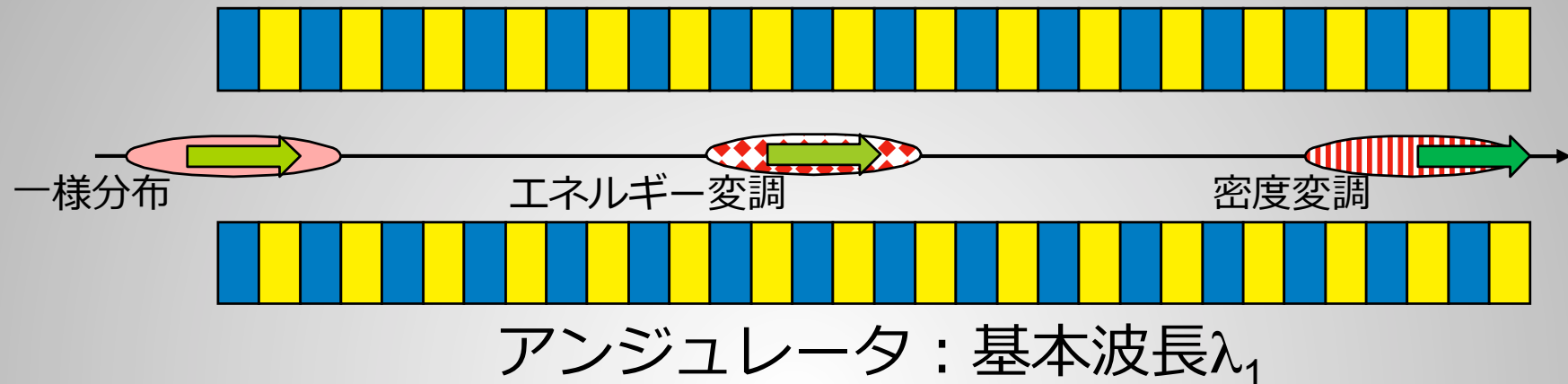
コヒーレント放射の光強度は、自発放射のその電子数($10^9 \sim 10^{10}$)倍!

マイクロバンチによるコヒーレント放射



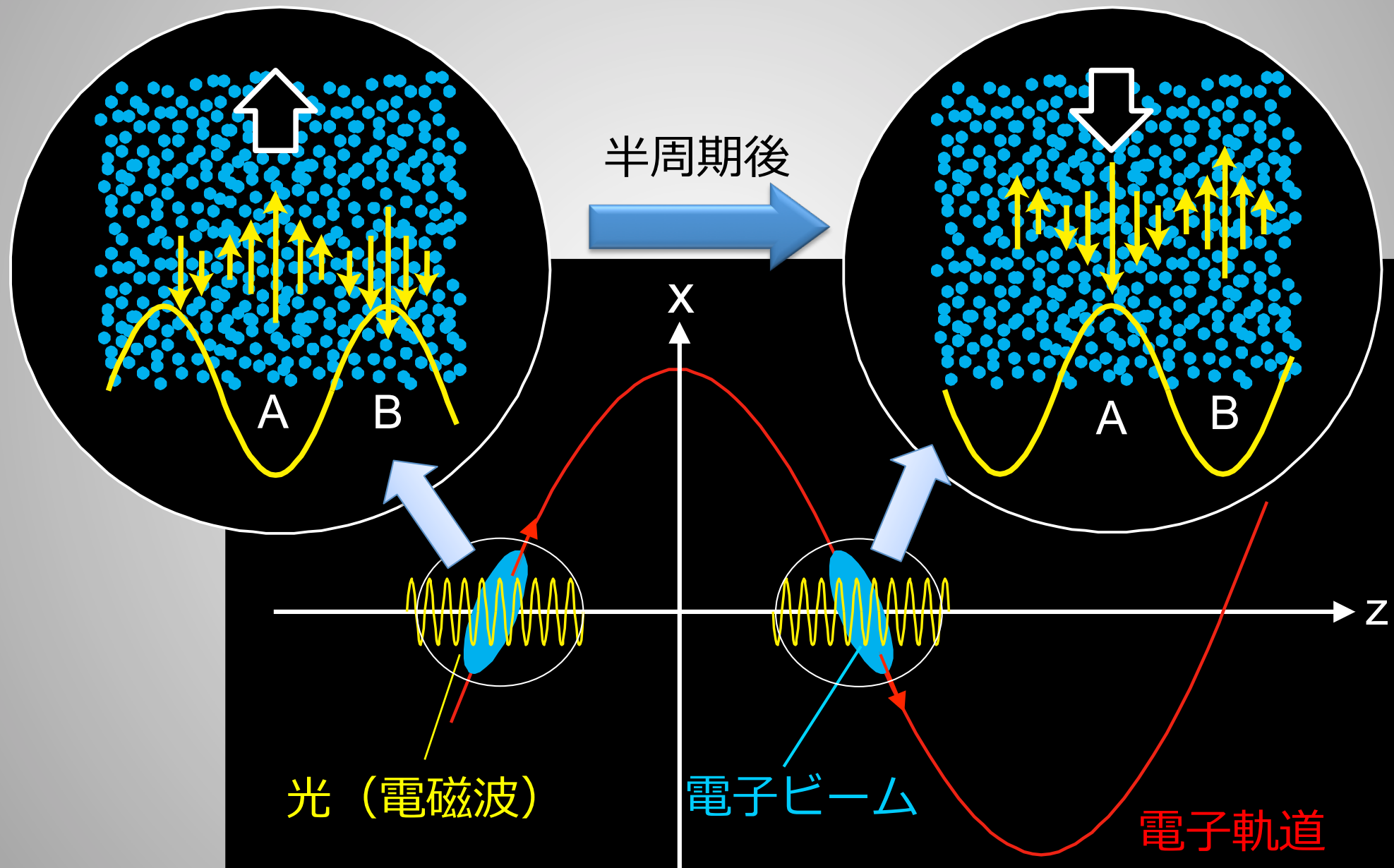
自由電子レーザーとは密度変調した電子ビームから放出されるコヒーレント放射である

マイクロバンチ化の方法

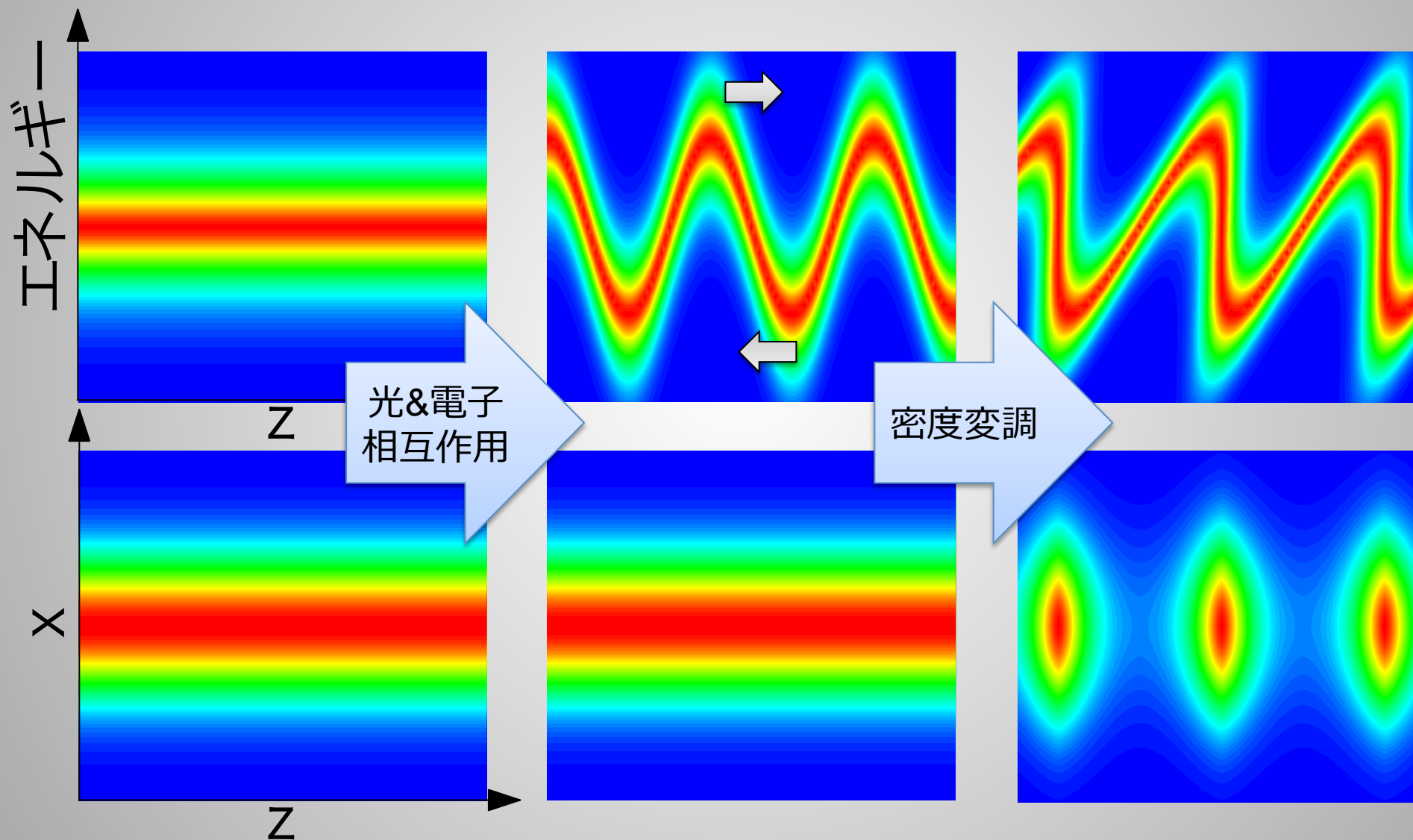


1. 電子ビームがアンジュレータを通過するのと同期して波長 λ_1 の光(シード光)を入射する
2. 各電子はシード光と相互作用し（エネルギー交換）、エネルギーの変調が誘起される
3. エネルギー変調は密度変調へと変換され、コヒーレント光が放出される

電子 \leftrightarrow 光相互作用



エネルギー変調から密度変調へ



Outline

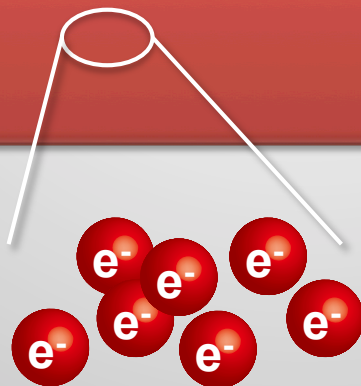
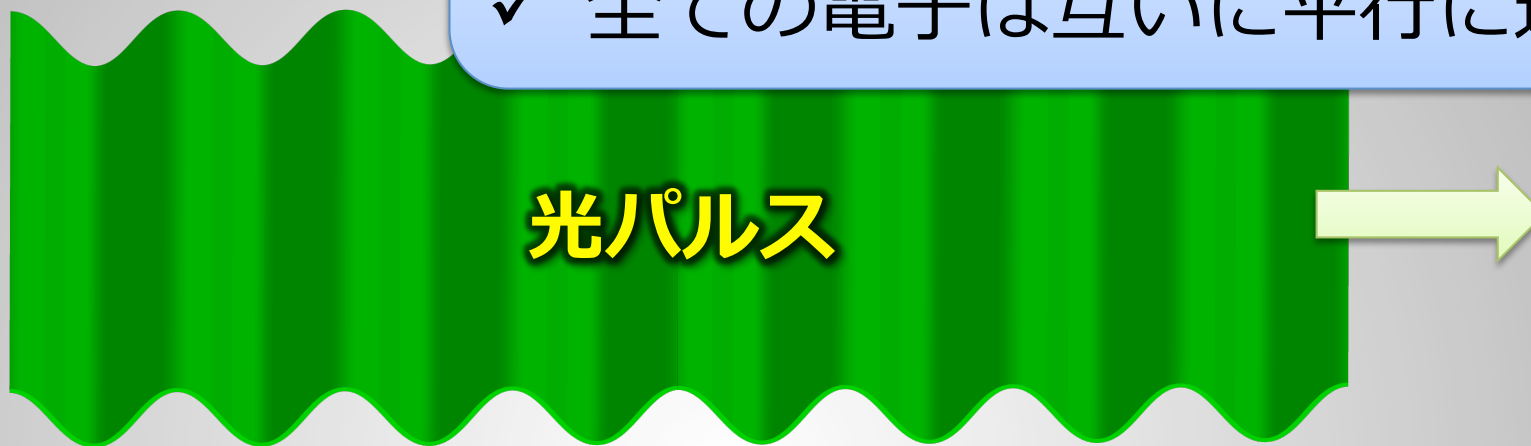
- レーザー発振の定性的解釈
- **1次元FEL理論**
- FELにおける回折効果
- SASE型FEL
- シード型FEL

1次元FEL

- ✓ 光は平面波
- ✓ 無限大の電子ビームサイズ
- ✓ 全ての電子は互いに平行に運動

$\Delta x, \Delta y$

$\Delta x, \Delta y$



アンジュレータ磁場と電子の運動(1)

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = m\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} m\gamma \dot{v}_x = -e(v_y B_z - v_z B_y) \\ m\gamma \dot{v}_y = -e(v_z B_x - v_x B_z) \end{cases}$$

磁場 \mathbf{B} を運動する電子
の運動方程式

$$m\gamma \frac{dv_{x,y}}{v_z dt} = m\gamma \frac{dv_{x,y}}{dz} = \pm e B_{y,x}$$

$$\beta_{x,y} = \pm \frac{e}{\gamma mc} \int^z B_{y,x}(z') dz' \equiv \pm \frac{e}{\gamma mc} I_{1y,1x}(z)$$

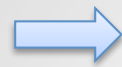
$$x_e, y_e = \pm \frac{e}{\gamma mc} \int^z dz' \int^{z'} B_{y,x}(z'') dz'' \equiv \pm \frac{e}{\gamma mc} I_{2y,2x}(z)$$

I_1, I_2 : アンジュレータ磁場の1次及び2次積分

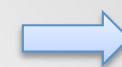
アンジュレータ磁場と電子の運動(2)

$$\begin{cases} B_x(z) = 0 \\ B_y(z) = B_0 \sin\left(\frac{2\pi z}{\lambda_u}\right) \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_y(z) = 0 \\ \beta_x(z) = \frac{K}{\gamma} \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda_u}\right) \end{cases} \quad \begin{cases} y_e(z) = 0 \\ x_e(z) = \frac{\lambda_u K}{2\pi\gamma} \sin\left(\frac{2\pi z}{\lambda_u}\right) \end{cases}$$

リニアアンジュレータ
磁場

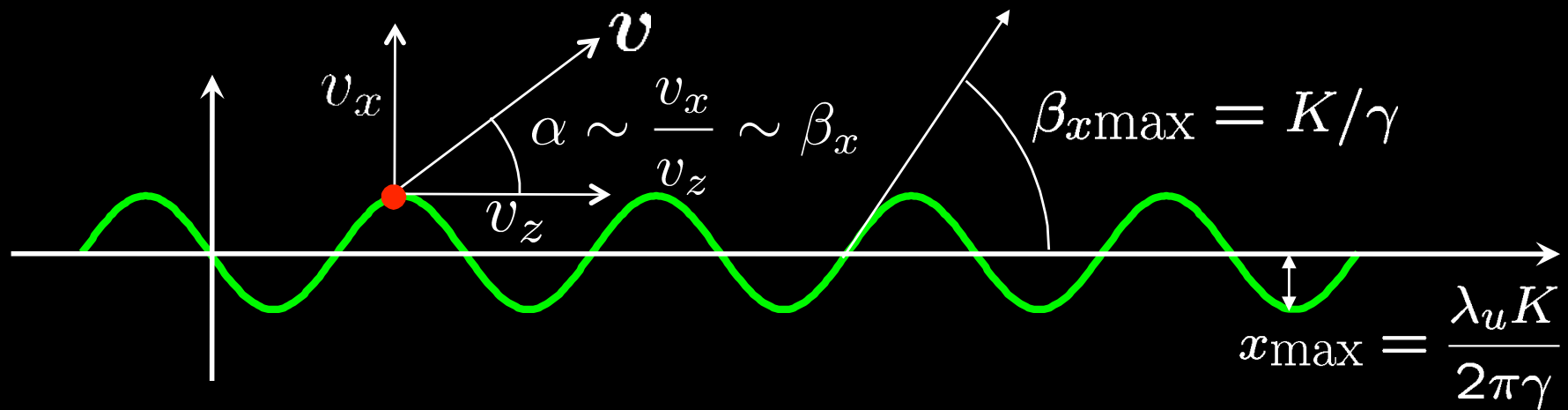


相対速度



位置

$$K = \frac{eB_0\lambda_u}{2\pi mc} = 93.37 B_0(\text{T})\lambda_u(\text{m}) \quad \begin{array}{l} \checkmark \text{K値} \\ \checkmark \text{偏向定数} \end{array}$$



$E=8\text{GeV}, K=1, \lambda_u=5\text{cm} : \beta_{x\max}=64\mu\text{rad}, x_{\max}=0.5\mu\text{m}$

独立変数の変換

独立変数の変換： $t, \beta_x(t), x_e(t) \Rightarrow z, \beta_x(z), x_e(z)$

$$\frac{dt(z)}{dz} = \frac{1}{c\beta_z(z)}, \quad \beta_z = \sqrt{\beta^2 - \beta_x^2 - \beta_y^2}$$

$$t(z) = \bar{t}(z) + \delta t(z)$$

zに到達する平均時刻

平均時刻からの偏差

平均時刻の変化率

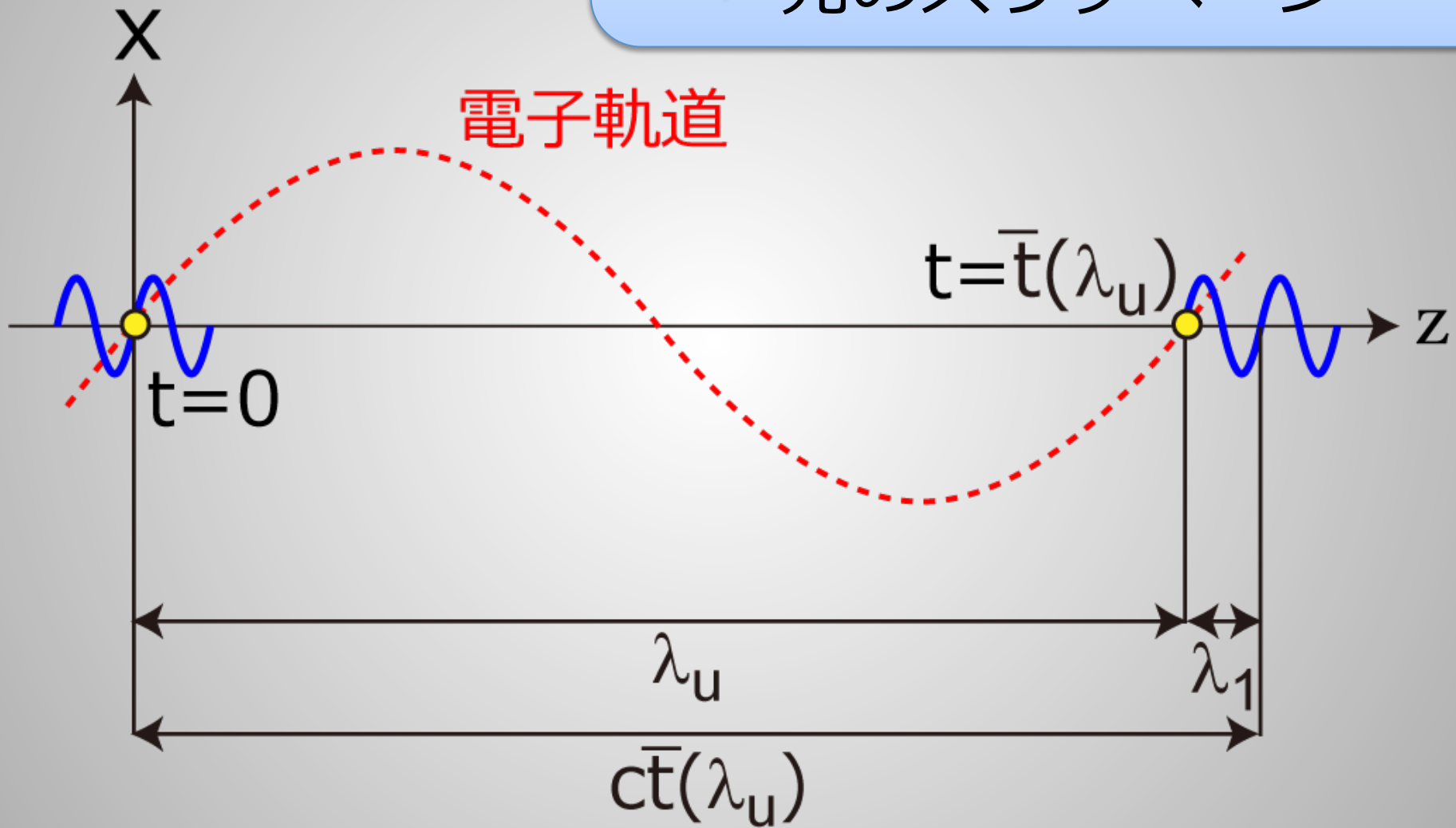
$$\frac{d\bar{t}(z)}{dz} = \frac{1}{c} \left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_u} \right)$$

アンジュレータの基本波長

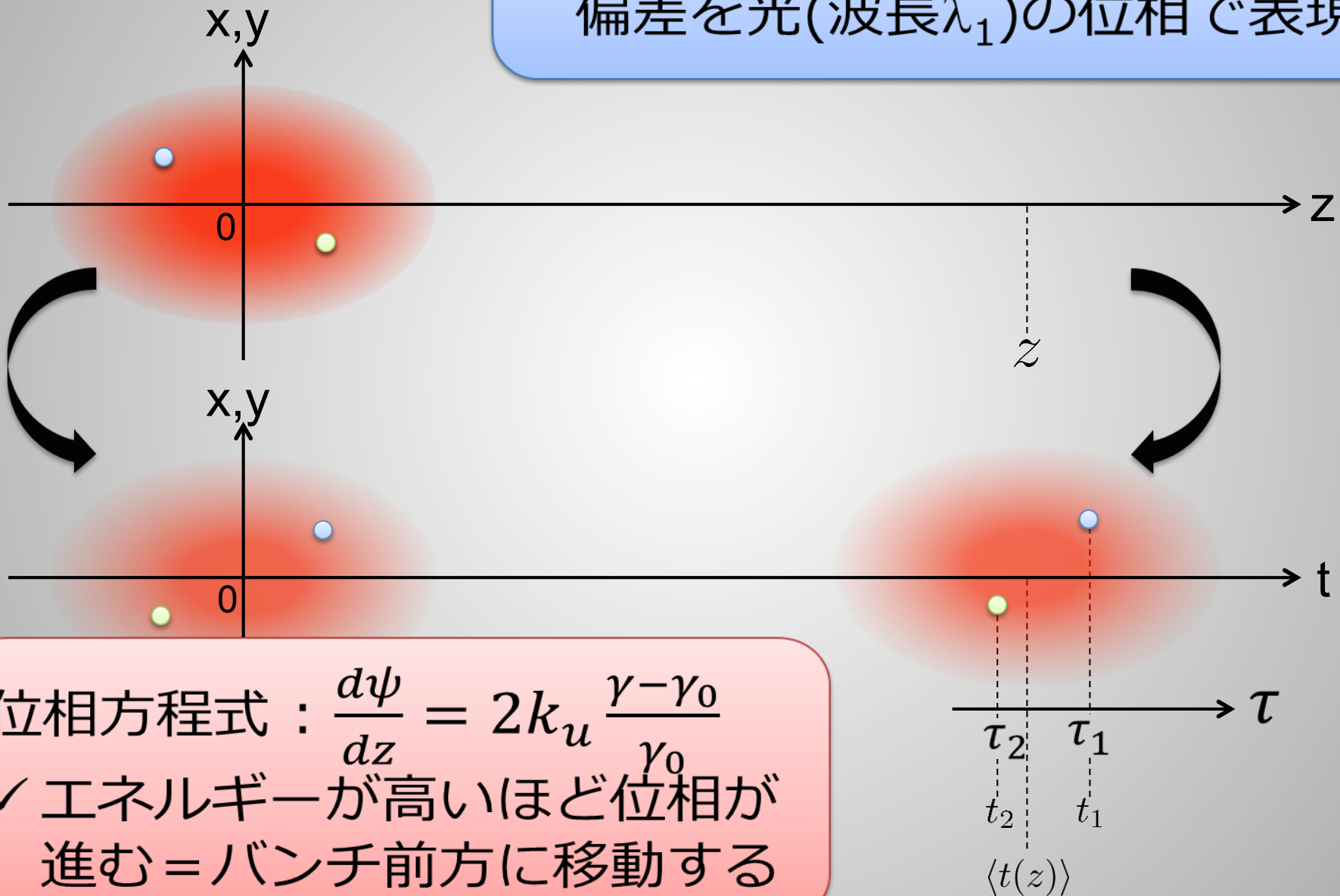
$$\lambda_1 = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} \times \begin{cases} 1 + \frac{K^2}{2} & : \text{リニア} \\ 1 + K^2 & : \text{ヘリカル} \end{cases}$$

アンジュ

- ✓ 電子は1周期進むたびに λ_1 の距離だけ遅れていく
→ 光のスリッページ

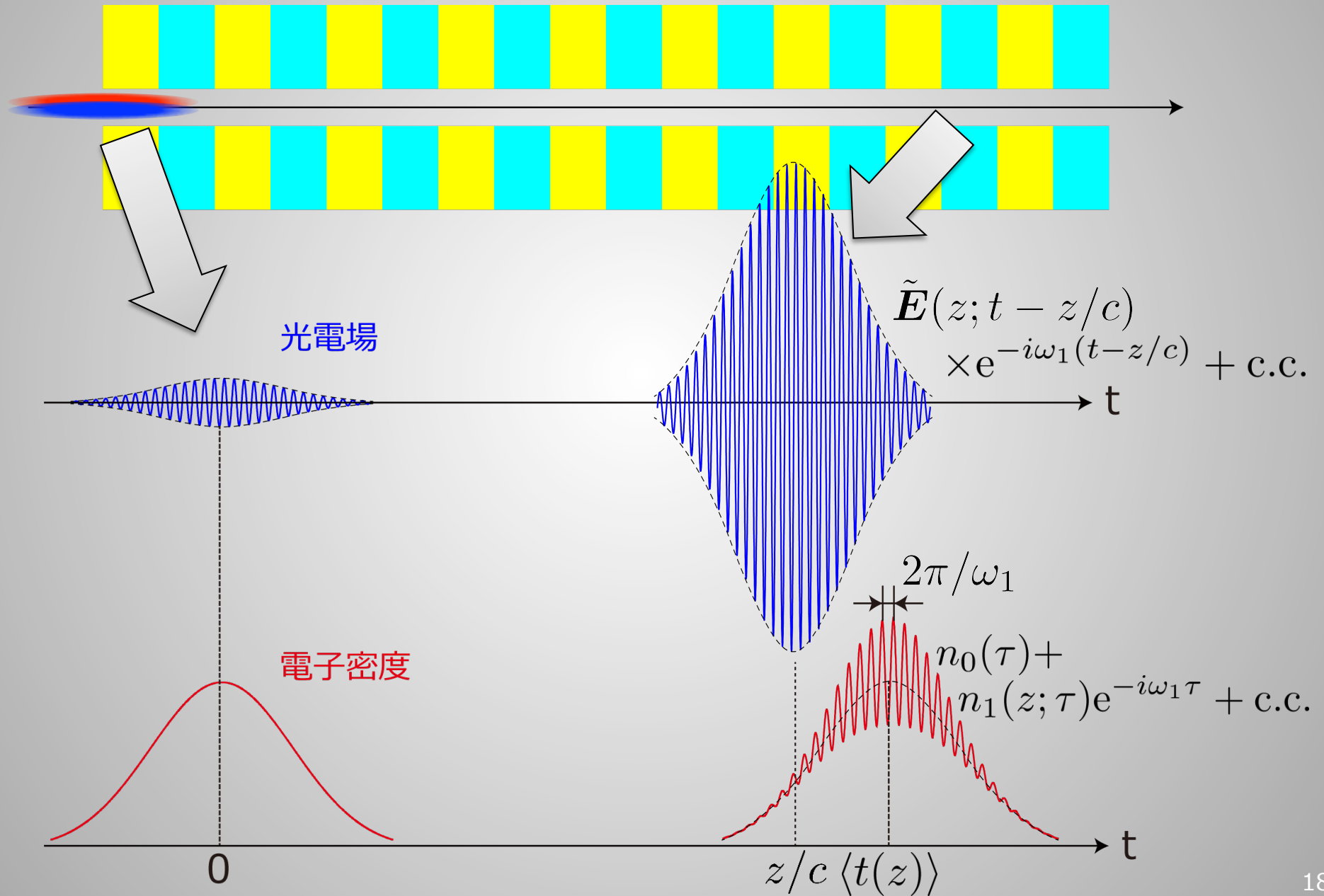


電子位相の導入： $\psi_j = -\omega_1 \tau_j$
 ✓ 座標 z に到達する平均時刻からの偏差を光(波長 λ_1)の位相で表現



位相方程式： $\frac{d\psi}{dz} = 2k_u \frac{\gamma - \gamma_0}{\gamma_0}$
 ✓ エネルギーが高いほど位相が進む = バンチ前方に移動する

光電場と電子分布関数



定常状態近似

- 定常状態
 - シード光は完全単色（無限に長いパルス幅）
 - 電子ビームは完全DC（無限に長いバンチ長）

$$E(z, t) = \tilde{E}(z)e^{-i\omega_1(t-z/c)} + \text{c.c.}$$

光電場の複素振幅

$$n(z, \psi) = n_0 + n_1(z)e^{i\psi} + \text{c.c.}$$

密度変調の複素振幅

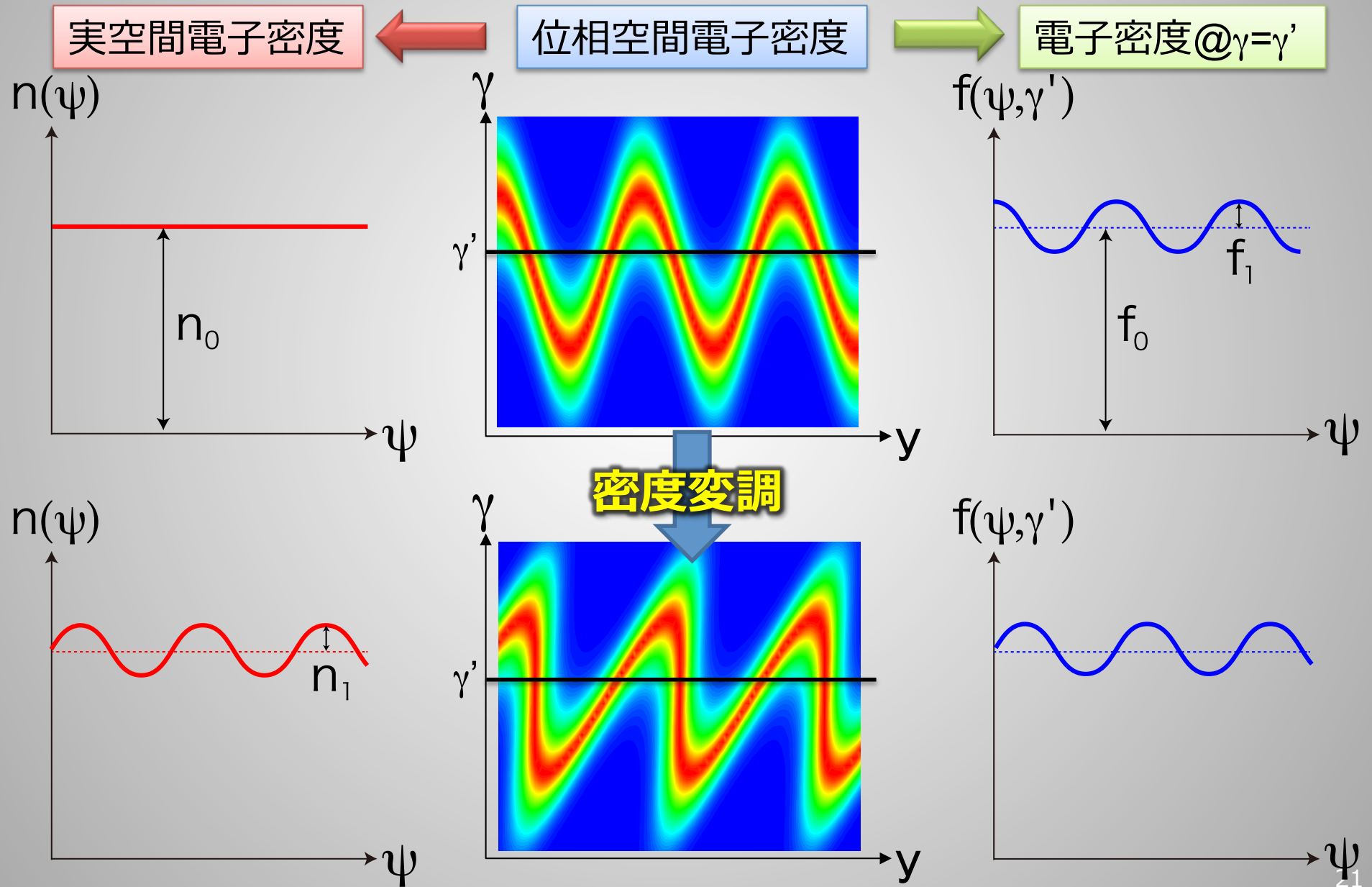
(ψ, γ) 位相空間における密度分布関数

- $n(z, \psi)$ は座標 z における実空間での電子密度分布関数
- 密度変調はエネルギー変調で誘起されるので、エネルギー分布の考慮が必要
- (ψ, γ) 位相空間における電子密度を表す関数 f を導入

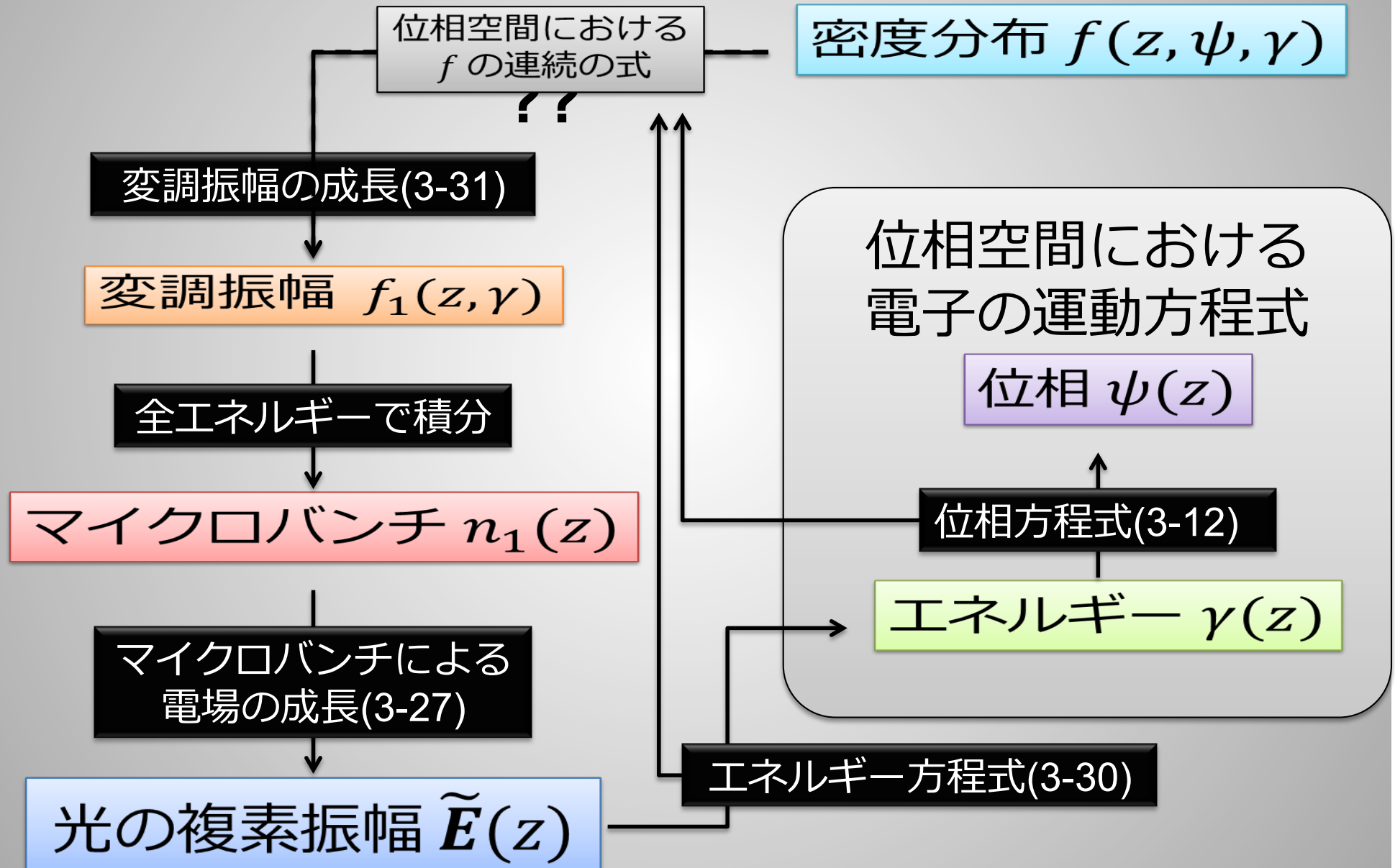
$$f(z, \psi, \gamma) = f_0(\gamma) + f_1(z, \gamma)e^{i\psi} + \text{c.c.}$$

$$n_0 = \int f_0(\gamma)d\gamma, \quad n_1(z) = \int f_1(z, \gamma)d\gamma$$

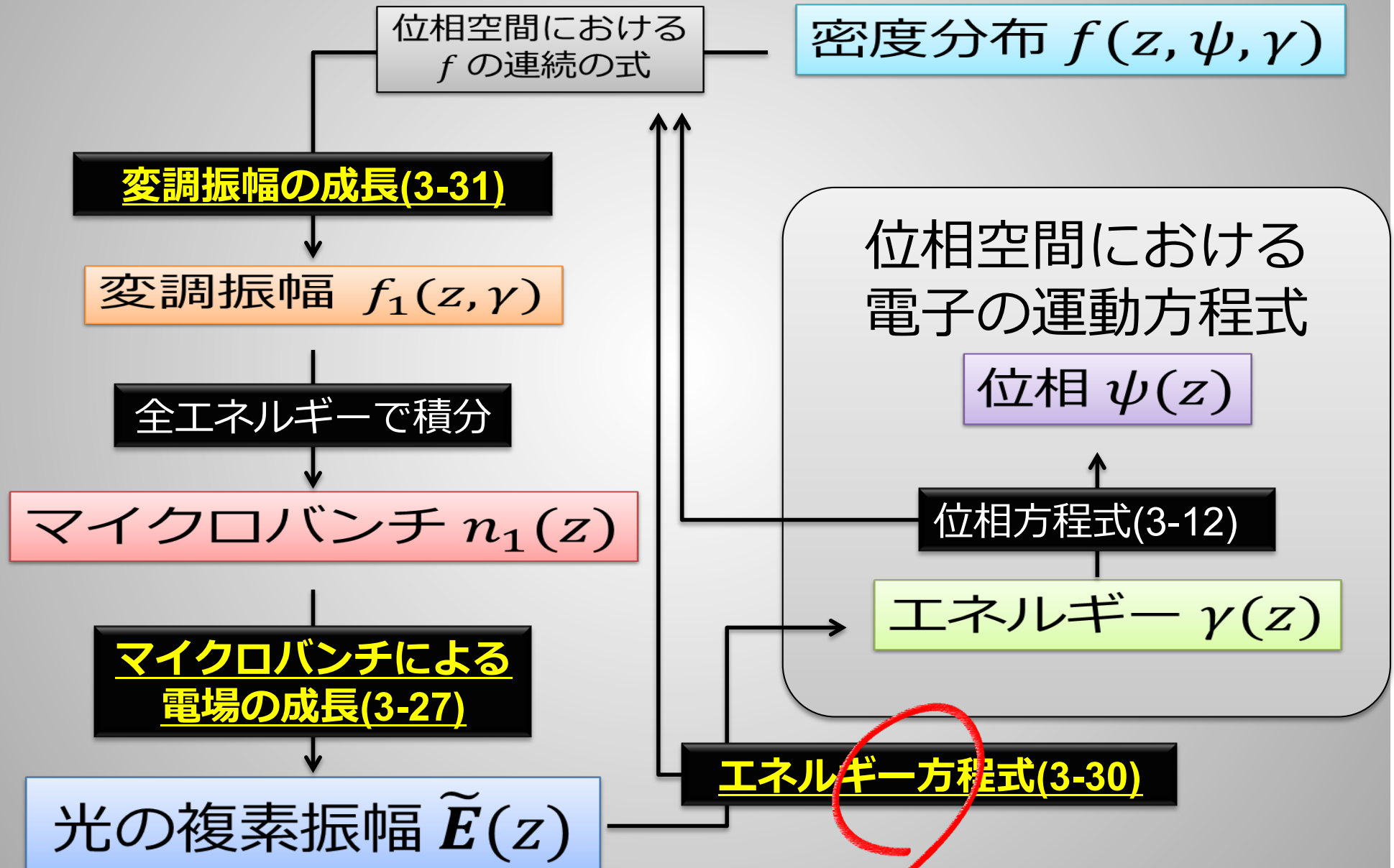
位相空間密度分布関数 $f(z, \psi, \gamma)$



FEL方程式導出プロセス



FEL方程式導出プロセス



エネルギー方程式

光電場による電子のエネルギー変化

$$\frac{d\gamma}{dz} = -\frac{e}{mc^2} \beta \cdot E$$

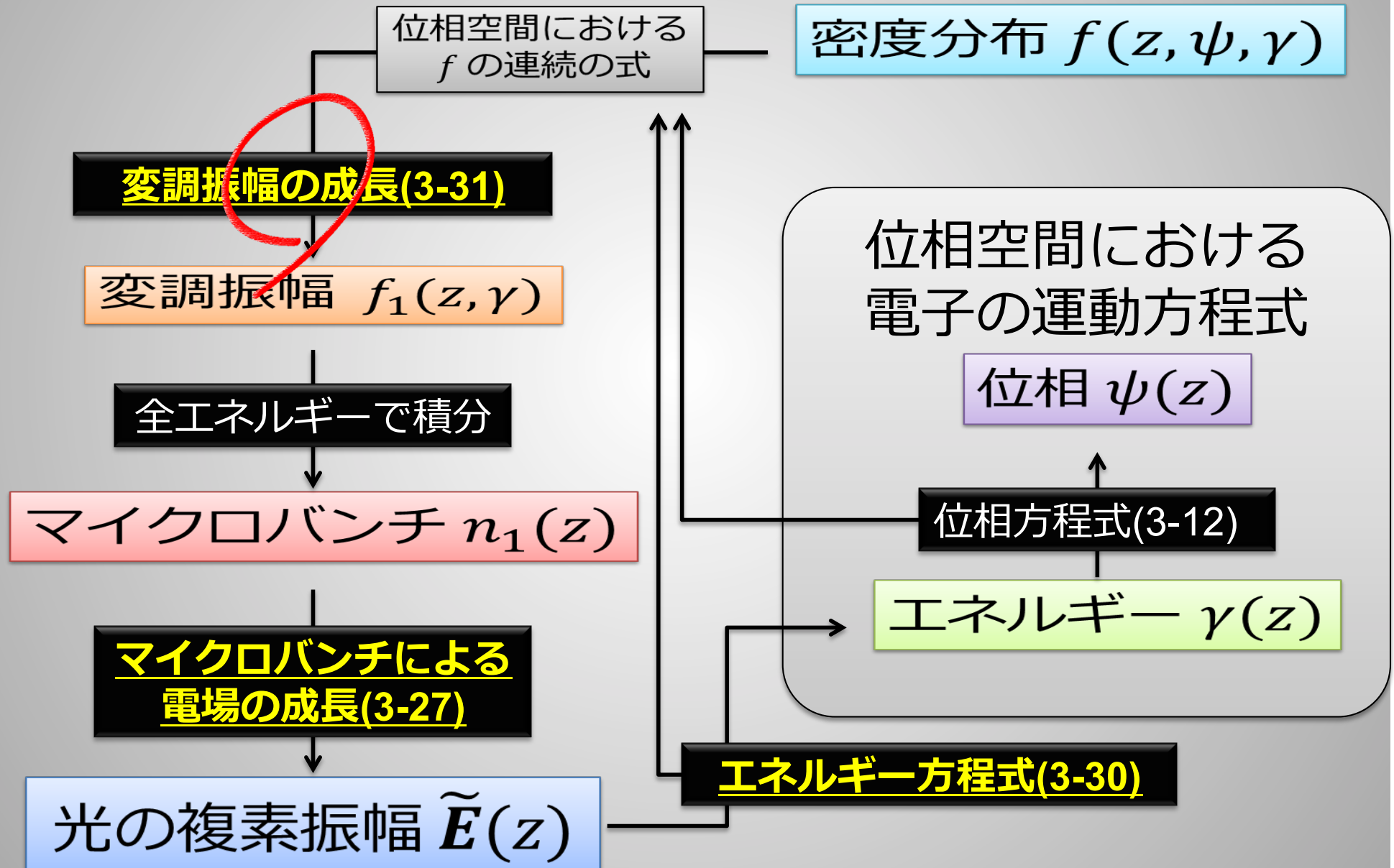
$$= -\frac{eK_{\perp} \bar{\kappa}}{2mc^2 \gamma_0} E_{\perp} e^{i\psi} e^{ik_u z(1-\omega/\omega_1)} + \text{c.c.}$$

β と E の内積：横波の電磁場とアンジュレータ磁場による偏向

$\bar{\kappa} = 1$ (ヘリカル)
 $0.7 < \bar{\kappa} < 1$ (リニア)
 ✓ 光-電子相互作用の効率を表す

エネルギー変化率が
 ✓ ψ の周期関数(周期 2π)
 ✓ $c\tau$ の周期関数(周期 λ_1)
 → エネルギー変調生成

FEL方程式導出プロセス



変調振幅の成長

分布関数の連続の式

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{d\psi}{dz} \frac{\partial f}{\partial \psi} + \frac{d\gamma}{dz} \frac{\partial f}{\partial \gamma} = 0$$

位相方程式(3-12)

エネルギー方程式(3-30)

$$\left| \frac{df_0}{d\gamma} \right| \gg \left| \frac{\partial f_1}{\partial \gamma} \right|$$

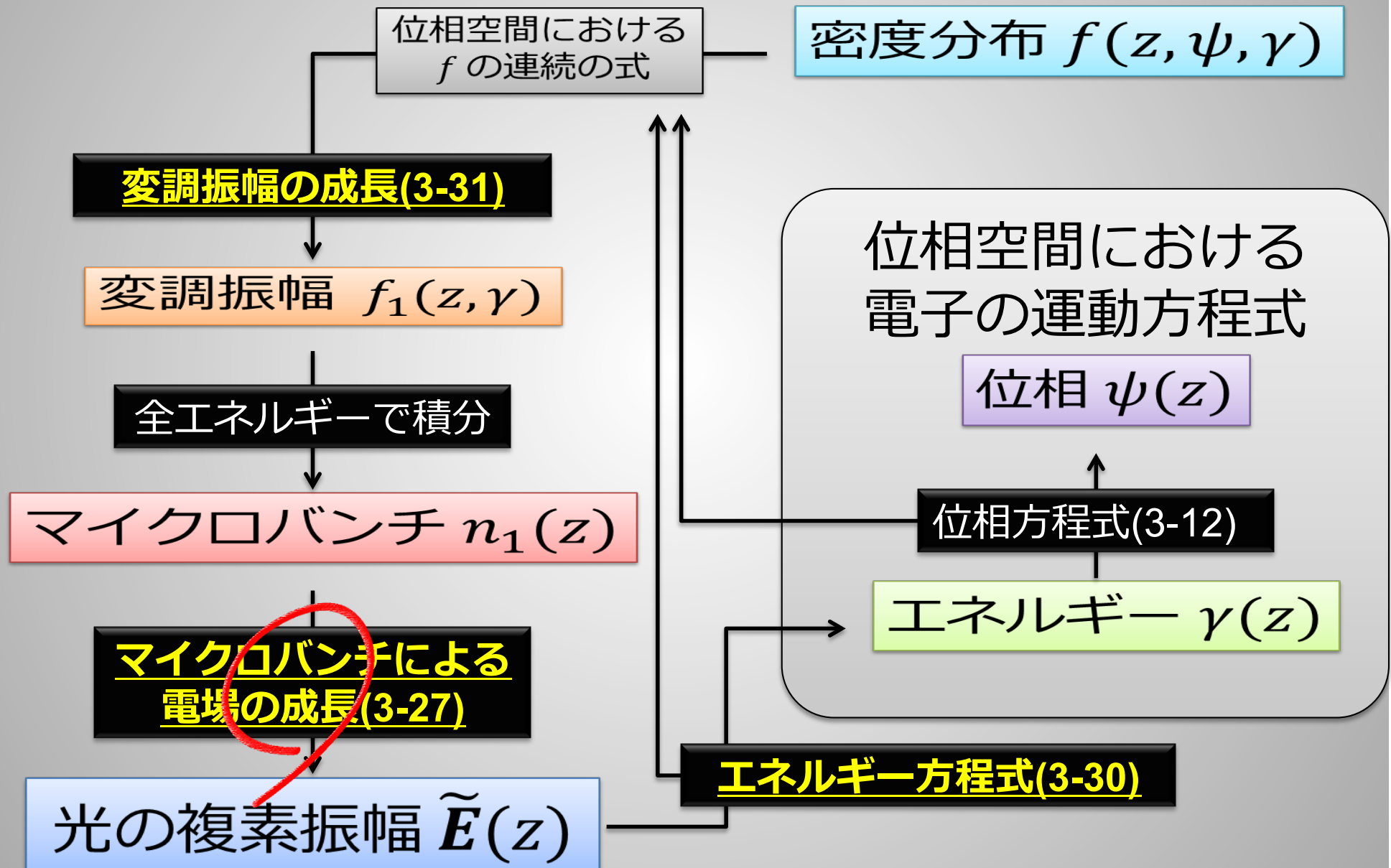
変調振幅が小さいことを仮定

$$f(z, \psi, \gamma) = f_0(\gamma) + f_1(z, \gamma)e^{i\psi} + \text{c.c.}$$

電場による変調振幅の成長

$$\frac{1}{k_u} \frac{\partial f_1}{\partial z} + 2if_1 \frac{\gamma - \gamma_0}{\gamma_0} = \frac{df_0}{d\gamma} \frac{E_{\perp}(z)}{2E_1} e^{ik_u z(1-\omega/\omega_1)}$$

FEL方程式導出プロセス



マイクロバンチによる光電場の成長

波動方程式 (3次元) $\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \rho_e$

↓ 1次元近似

波動方程式 (1次元) $\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}$

↓ $\mathbf{E}(z, t) = \tilde{\mathbf{E}}(z) e^{-i\omega(t-z/c)} + \text{c.c.}$

水平電場振幅の成長 $\frac{dE_x(z)}{dz} = \frac{\mu_0 e c^2 K \bar{\kappa}}{4\gamma_0} n_1(z) e^{-ik_u z(1-\omega/\omega_1)}$

↓ 合成振幅 E_{\perp} ・ 偏向定数 K_{\perp} の導入

合成電場振幅の成長 $\frac{dE_{\perp}}{dz} = \frac{\mu_0 e c^2 K_{\perp} \bar{\kappa}}{4\gamma_0} n_1(z) e^{-ik_u z(1-\omega/\omega_1)}$

FEL微積分方程式

変調振幅の成長

$$\frac{1}{k_u} \frac{\partial f_1}{\partial z} + 2if_1 \frac{\gamma - \gamma_0}{\gamma_0} = \frac{df_0}{d\gamma} \frac{E_{\perp}(z)}{2E_1} e^{ik_u z(1-\omega/\omega_1)}$$

合成電場振幅の成長

$$\frac{dE_{\perp}}{dz} = \frac{\mu_0 ec^2 K_{\perp} \bar{\kappa}}{4\gamma_0} n_1(z) e^{-ik_u z(1-\omega/\omega_1)}$$

$$f_1(z, \gamma) = \frac{k_u}{2\gamma_0} \frac{df_0}{d\gamma} \int_0^z dz' \frac{E_{\perp}(z')}{E_1} \times \exp \left[2ik_u(z' - z) \frac{\gamma - \gamma_0}{\gamma_0} - ik'_u z' \frac{\omega - \omega_1}{\omega_1} \right]$$

$$\frac{1}{k_u} \frac{dE_{\perp}(z)}{dz} = E_2 \frac{e^{-ik_u z(1-\omega/\omega_1)}}{n_0 \gamma_0} \int f_1 d\gamma$$

FEL微積分方程式

$$\frac{1}{k_u} \frac{dE_{\perp}(z)}{dz} = \frac{E_2}{E_1} \frac{k_u}{2\gamma_0^2 n_0} \int d\gamma \frac{df_0}{d\gamma} \int_0^z dz' \times E_{\perp}(z') \exp \left[ik_u(z' - z) \left(2 \frac{\gamma - \gamma_0}{\gamma_0} - \frac{\omega - \omega_1}{\omega_1} \right) \right]$$

規格化：FELパラメータ ρ の導入

FEL微積分方程式

$$\frac{1}{k_u} \frac{dE_{\perp}(z)}{dz} = \frac{E_2}{E_1} \int_0^z \int_0^{\hat{\eta}} d\hat{\eta}' \frac{df_0}{d\hat{\eta}'} \int_0^{\hat{z}'} d\hat{z}' E_{\perp}(\hat{z}') \exp[i(\hat{z}' - \hat{z})(\hat{\eta}' - \hat{\nu})]$$

FELパラメータ

- ✓ レーザー増幅率
- ✓ レーザー飽和パワー
- ✓ スペクトルバンド幅

規格化

$$\frac{E_2}{E_1} = (2\rho\gamma_0)^3 \rightarrow \rho = \left(\frac{\pi\bar{\kappa}^2 K_{\perp}^2 j_0}{8\gamma_0^3 k_u^2 I_A} \right)^{1/3}$$

$$\hat{z} = 2\rho k_u z, \hat{\eta} = \frac{\gamma - \gamma_0}{\rho\gamma_0}, \hat{\nu} = \frac{\omega - \omega_1}{2\rho\omega_1}$$

規格化FEL微積分方程式

$$\frac{dE_{\perp}(\hat{z})}{d\hat{z}} = \frac{\rho\gamma_0}{n_0} \int d\hat{\eta} \frac{df_0}{d\hat{\eta}} \int_0^{\hat{z}} d\hat{z}' E_{\perp}(\hat{z}') \exp[i(\hat{z}' - \hat{z})(\hat{\eta} - \hat{\nu})]$$

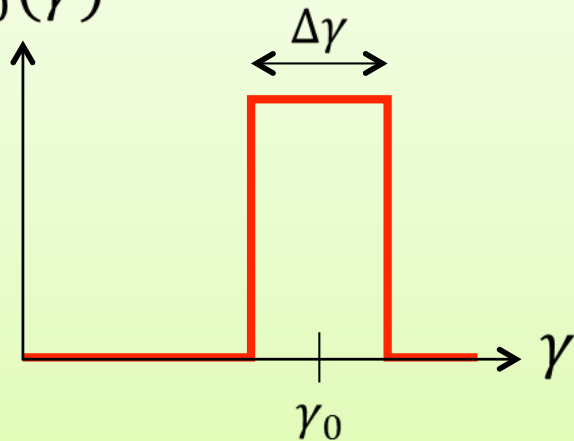
FEL微分方程式

FEL微積分方程式

$$\frac{dE_{\perp}(\hat{z})}{d\hat{z}} = \frac{\rho\gamma_0}{n_0} \int d\hat{\eta} \frac{df_0}{d\hat{\eta}} \int_0^{\hat{z}} d\hat{z}' E_{\perp}(\hat{z}') \exp[i(\hat{z}' - \hat{z})(\hat{\eta} - \hat{\nu})]$$

矩形関数的エネルギー分布

$f_0(\gamma)$



規格化

$$\Delta\hat{\eta} = \frac{\Delta\gamma}{\rho\gamma_0}$$

FEL微分方程式

$$\frac{d^3 E_{\perp}}{d\hat{z}^3} - 2i\hat{\nu} \frac{d^2 E_{\perp}}{d\hat{z}^2} - \left(\hat{\nu}^2 - \frac{\Delta\hat{\eta}^2}{4} \right) \frac{dE_{\perp}}{d\hat{z}} = iE_{\perp}$$

FEL微分方程式の解

FEL微分方程式

$$\frac{d^3 E_{\perp}}{d\hat{z}^3} - 2i\hat{\nu} \frac{d^2 E_{\perp}}{d\hat{z}^2} - \left(\hat{\nu}^2 - \frac{\Delta\hat{\eta}^2}{4} \right) \frac{dE_{\perp}}{d\hat{z}} = iE_{\perp}$$

解の仮定 $E_{\perp} \propto e^{\hat{\Lambda}\hat{z}}$

FEL分散関係式

$$\hat{\Lambda}^3 - 2i\hat{\nu}\hat{\Lambda}^2 - \left(\hat{\nu}^2 - \frac{\Delta\hat{\eta}^2}{4} \right) \hat{\Lambda} = i$$

初期条件

- 1) $E_{\perp}(0) = E_0$
- 2) $E'_{\perp}(0) = 0$ ($n_1 = 0$)
→密度変調無し
- 3) $E''_{\perp}(0) = 0$ ($n'_1 = 0$)
→エネルギー変調無し

FEL方程式の解

$$E_{\perp}(\hat{z}) = E_0 \sum_{j=1}^3 \frac{e^{\hat{\Lambda}_j \hat{z}}}{1 - 2i(\hat{\Lambda}_j - i\hat{\nu})\hat{\Lambda}_j^2}$$

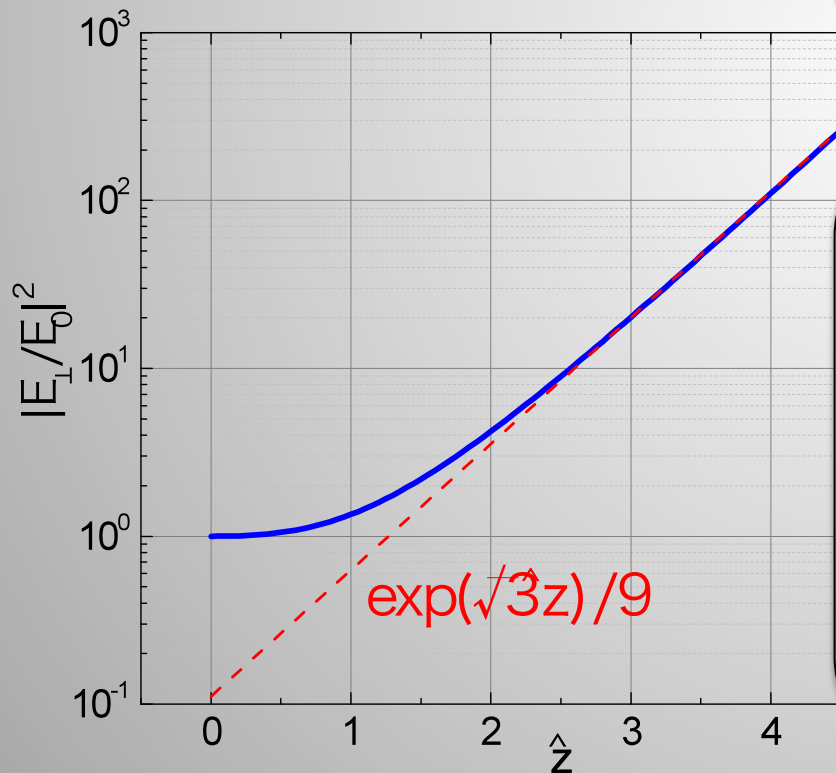
FEL微分方程式の解($\hat{v} = \Delta\hat{\eta} = 0$)

FEL分散関係式

$$\hat{\Lambda}^3 = i$$

解: $\hat{\Lambda} = \frac{\sqrt{3} + i}{2}, \frac{-\sqrt{3} + i}{2}, -i$

$$E_{\perp}(\hat{z}) = \frac{E_0}{3} \left[\underbrace{\exp(-i\hat{z})}_{\text{振動解}} + \underbrace{\exp\left(\frac{-\sqrt{3} + i}{2}\hat{z}\right)}_{\text{減衰解}} + \underbrace{\exp\left(\frac{\sqrt{3} + i}{2}\hat{z}\right)}_{\text{増幅解}} \right]$$



高ゲイン領域では

$$|E_{\perp}/E_0|^2 \sim \frac{1}{9} e^{z/L_g}$$

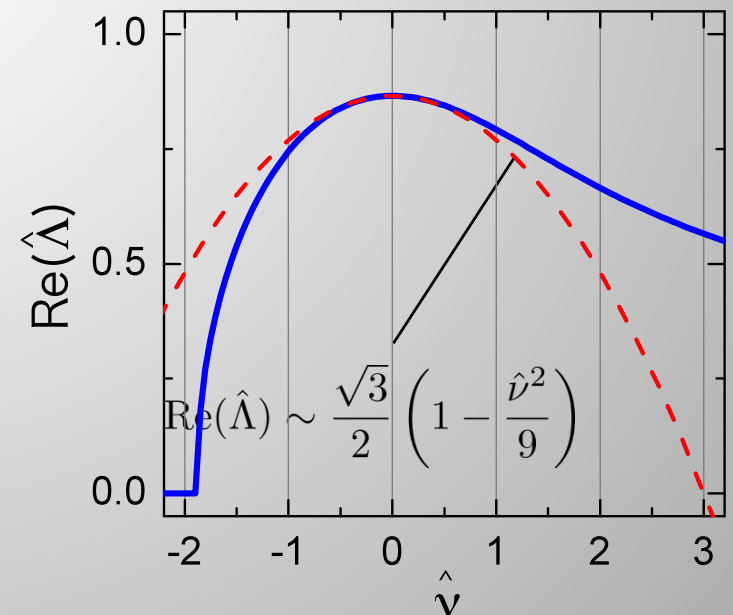
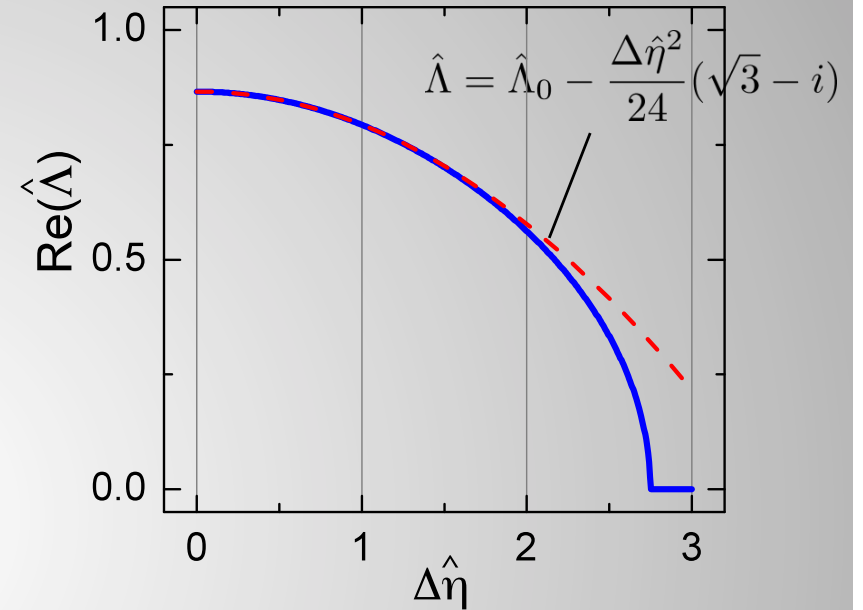
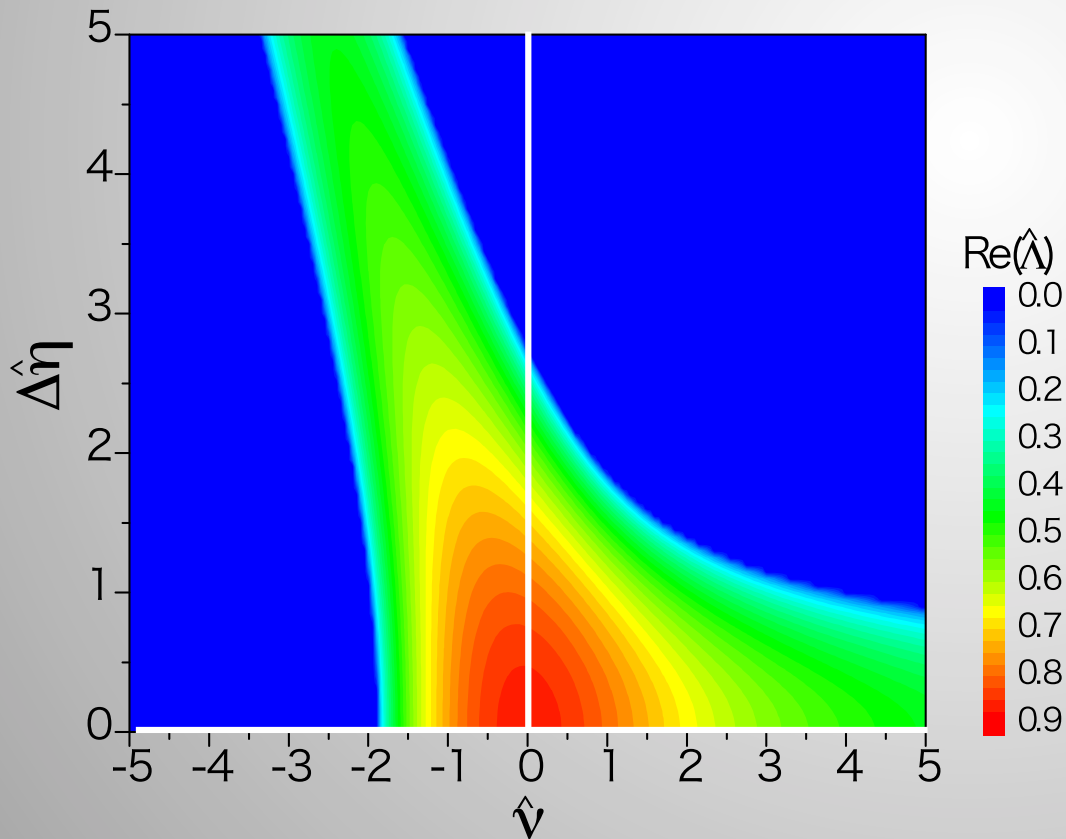
$$L_g = \frac{\lambda_u}{4\pi\sqrt{3}\rho}$$

=ゲイン長(光のパワーがe倍に増幅されるアンジュレータ長)

FEL微分方程式の解(一般)

FEL分散関係式

$$\hat{\Lambda}^3 - 2i\hat{\nu}\hat{\Lambda}^2 - \left(\hat{\nu}^2 - \frac{\Delta\hat{\eta}^2}{4}\right)\hat{\Lambda} = i$$



レーザー強度の飽和

- FELは、高ゲイン領域&増幅初期段階では線形応答($|E_{\perp}|^2 \sim |E_0|^2 e^{z/Lg} / 9$)を示す
- 線形応答は永久に継続するわけではない
 - 電子のエネルギー損失による発振波長の偏差
 - 電子のエネルギー幅増大による増幅率の低下

➡ レーザー強度の飽和

飽和(非線形)状態でのレーザー特性を調べるにはFEL方程式の修正が必要
✓ 特に変調振幅の成長(3-31)

変調振幅の成長

分布関数の連続の式

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{d\psi}{dz} \frac{\partial f}{\partial \psi} + \frac{d\gamma}{dz} \frac{\partial f}{\partial \gamma} = 0$$

位相方程式(3-12)

エネルギー方程式(3-30)

$$\left| \frac{df_0}{d\gamma} \right| \gg \left| \frac{\partial f_1}{\partial \gamma} \right|$$

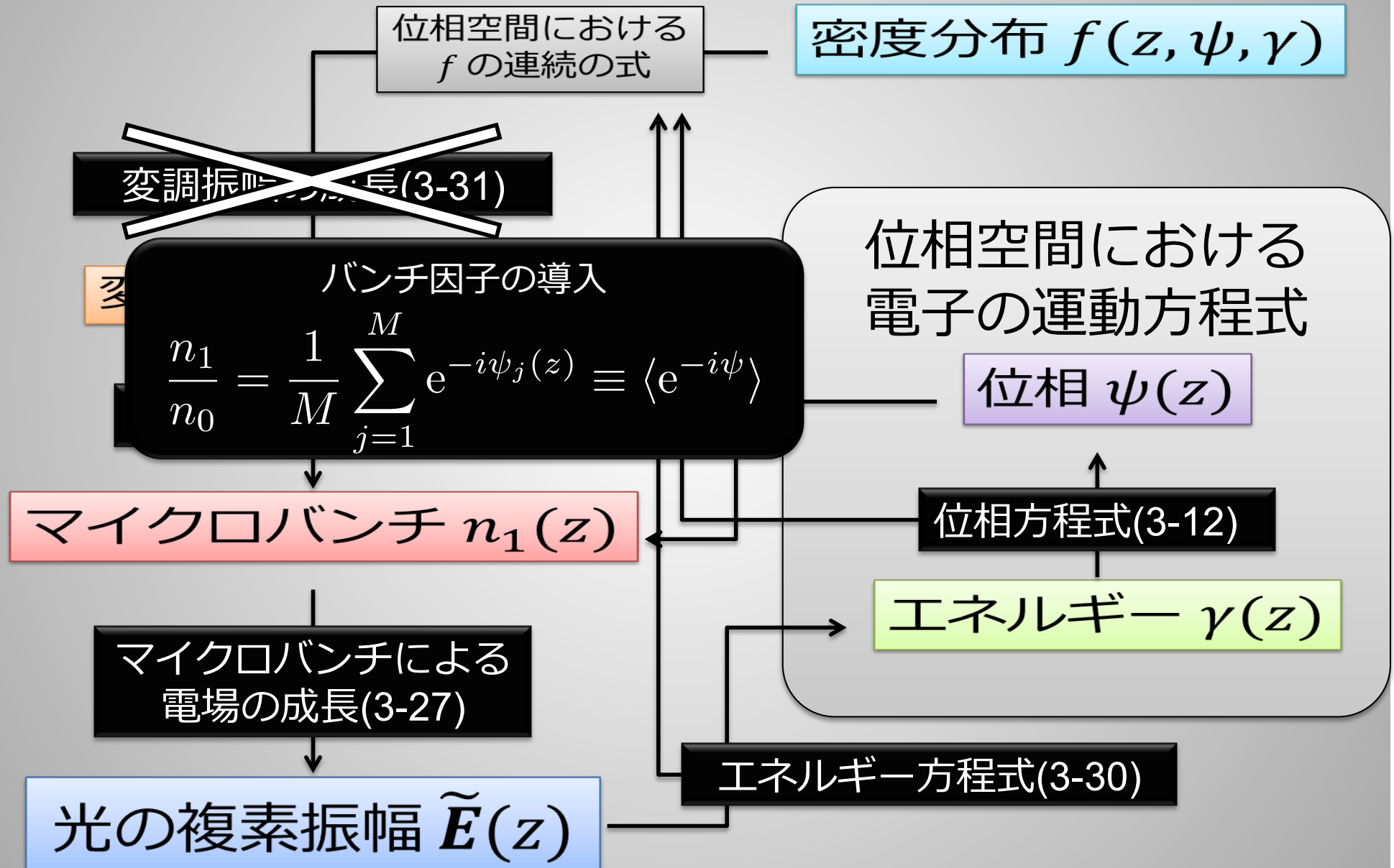
変調振幅が小さい
ことを仮定

$$f(z, \psi, \gamma) = f_0(\gamma) + f_1(z, \gamma)e^{i\psi} + \text{c.c.}$$

電場による変調振幅の成長

$$\frac{1}{k_u} \frac{\partial f_1}{\partial z} + 2if_1 \frac{\gamma - \gamma_0}{\gamma_0} = \frac{df_0}{d\gamma} \frac{E_{\perp}(z)}{2E_1} e^{ik_u z(1-\omega/\omega_1)}$$

FEL方程式導出プロセス



非線形FEL方程式

シミュレーションのための規格化

バンチ因子の導入

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M e^{-i\psi_j(z)} \equiv \langle e^{-i\psi} \rangle$$

マイクロバンチ $n_1(z)$

マイクロバンチによる
電場の成長(3-66)

光の複素振幅 $\tilde{E}(z)$

位相空間における
電子の運動方程式

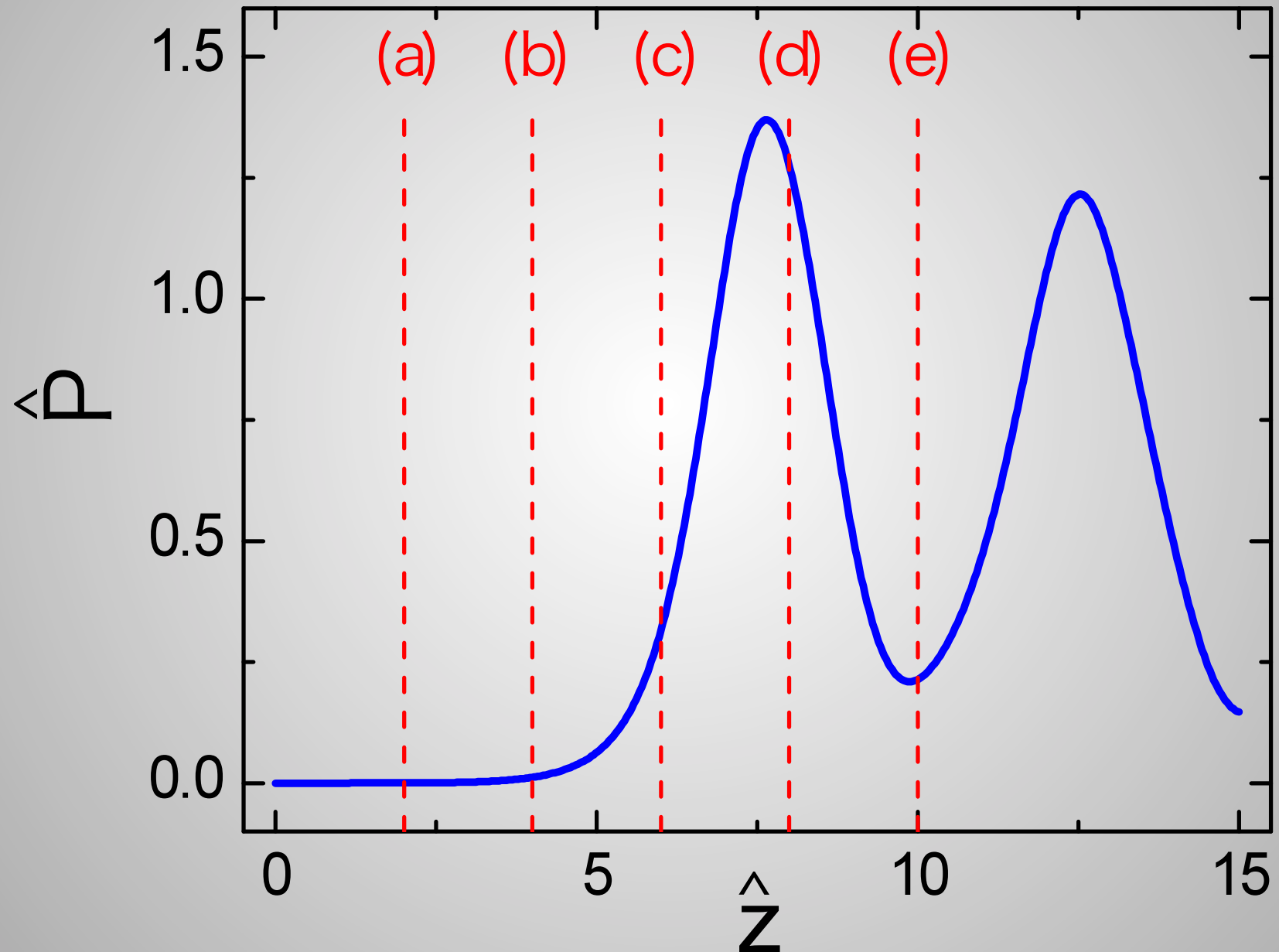
位相 $\psi(z)$

位相方程式(3-61)

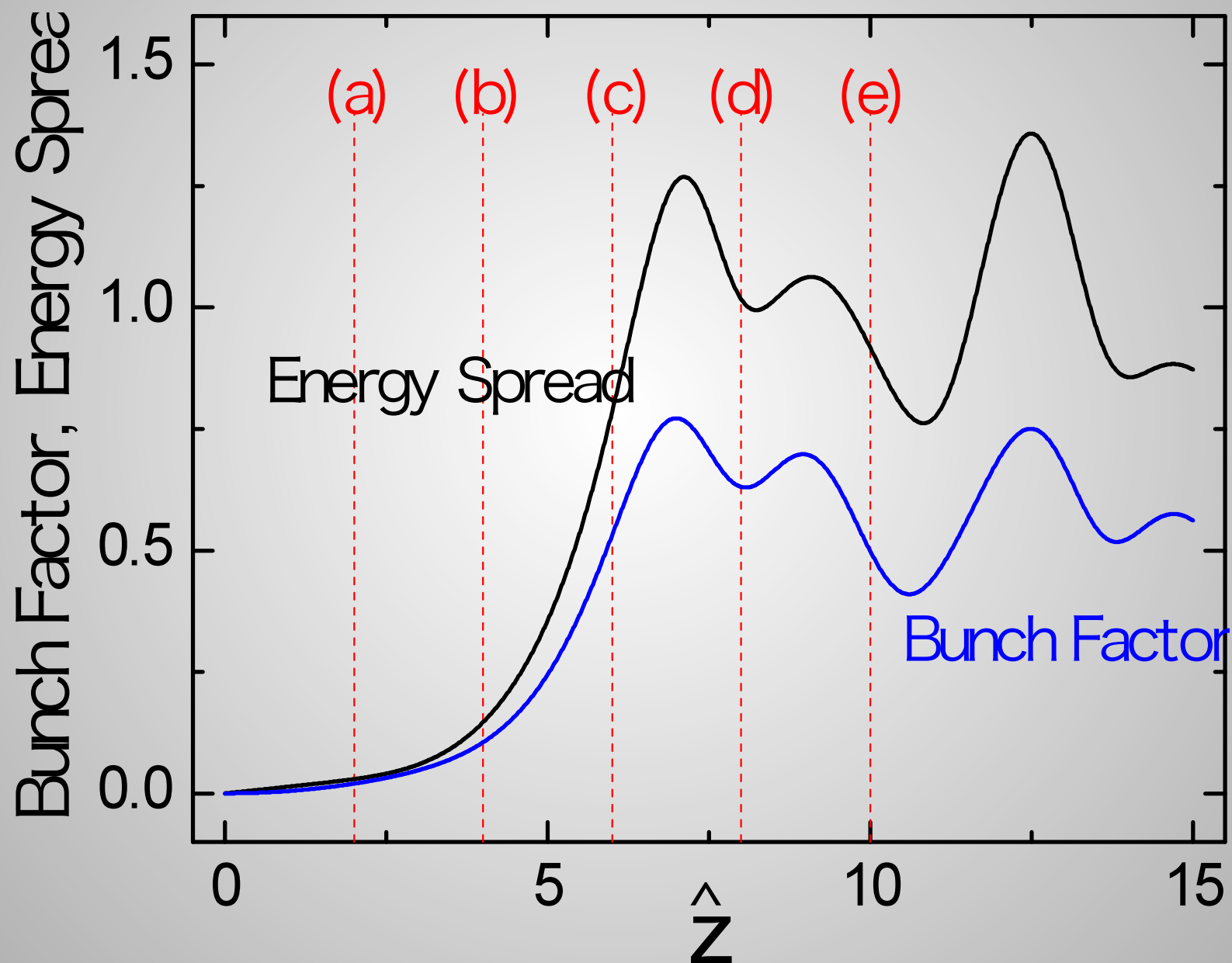
エネルギー $\gamma(z)$

エネルギー方程式(3-62)

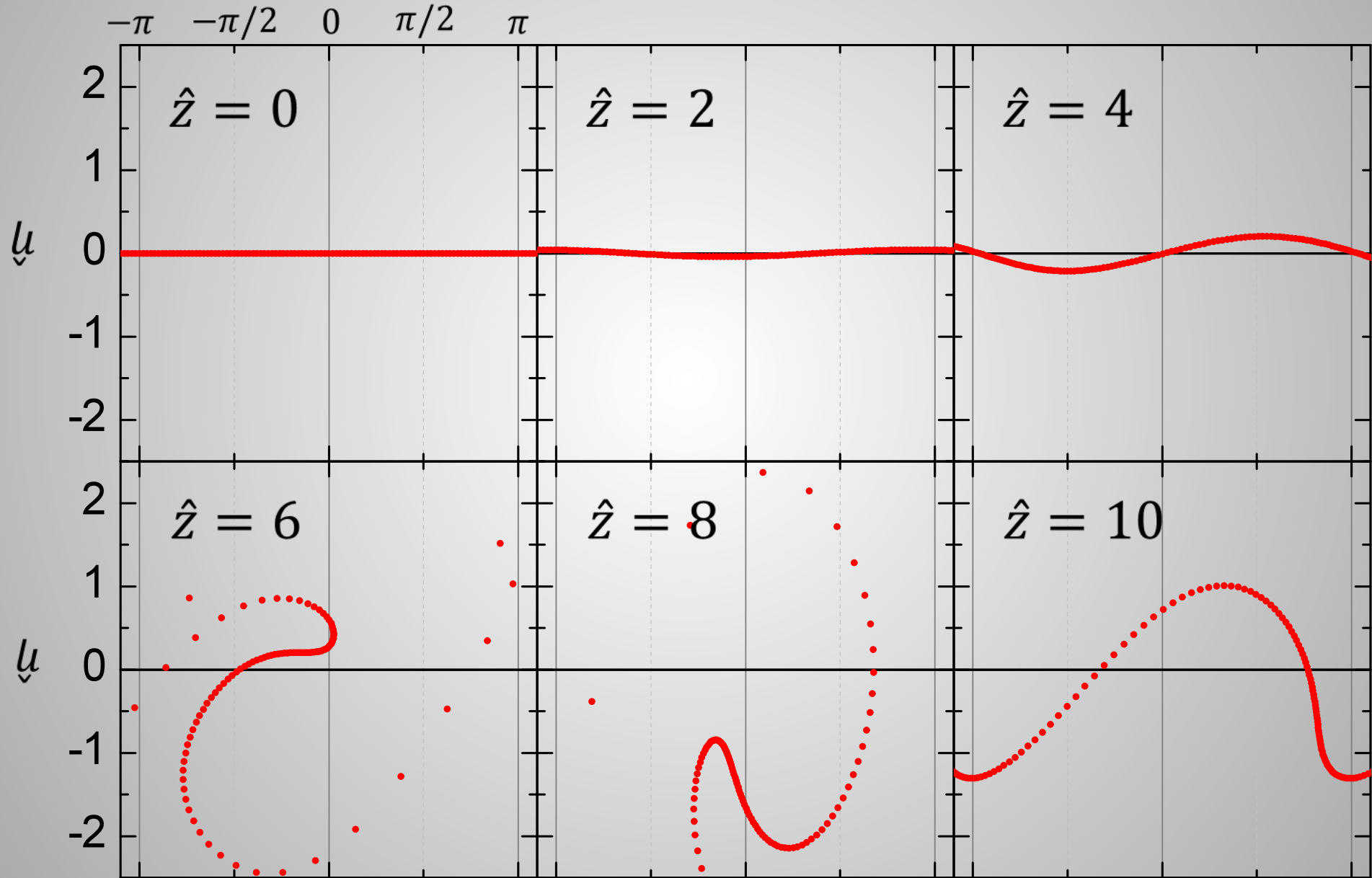
シミュレーション結果：ゲイン曲線



バンチ因子の成長とエネルギー幅の増大



マクロ粒子の運動



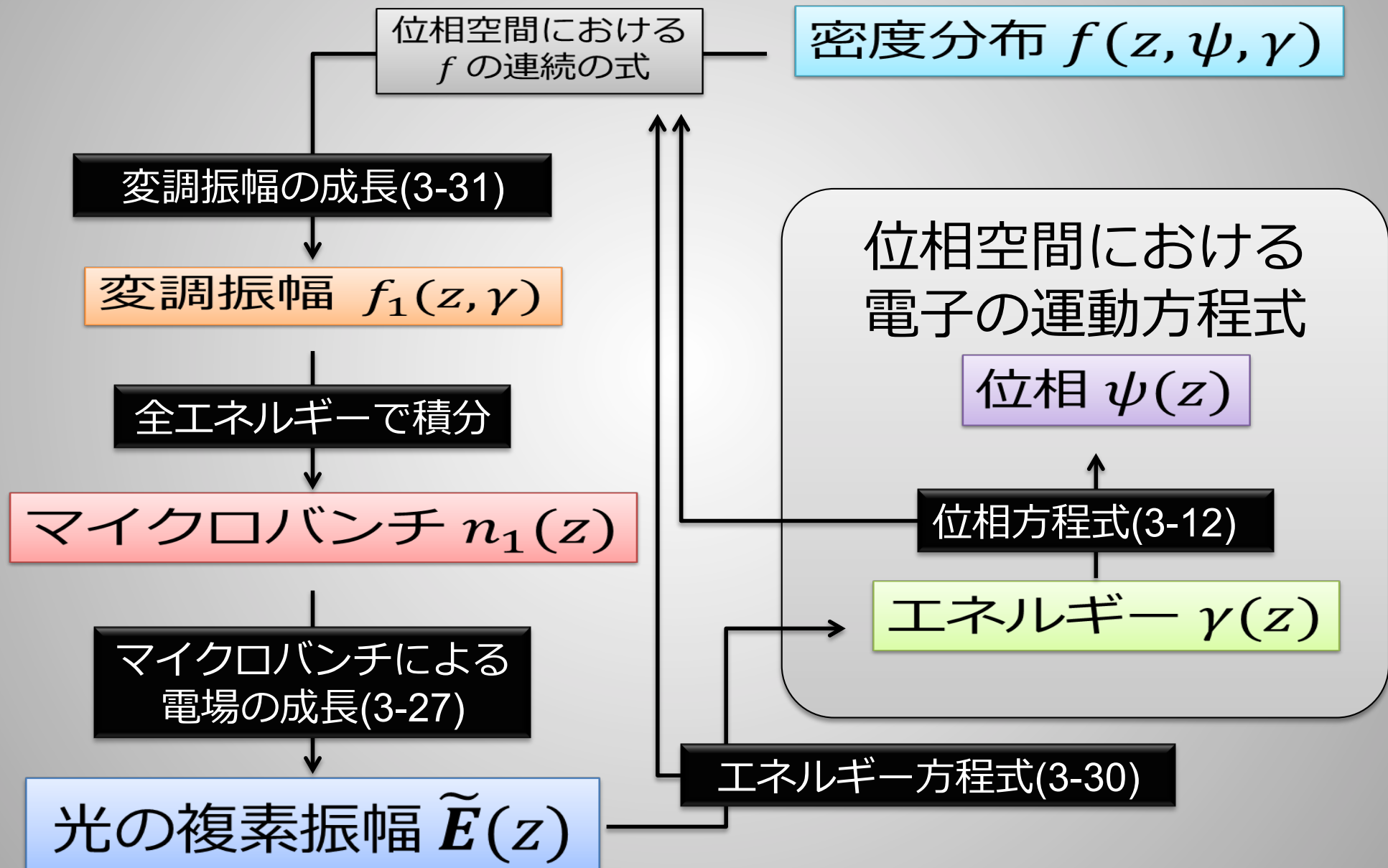
Outline

- レーザー発振の定性的解釈
- 1次元FEL理論
- **FELにおける回折効果**
- SASE型FEL
- シード型FEL

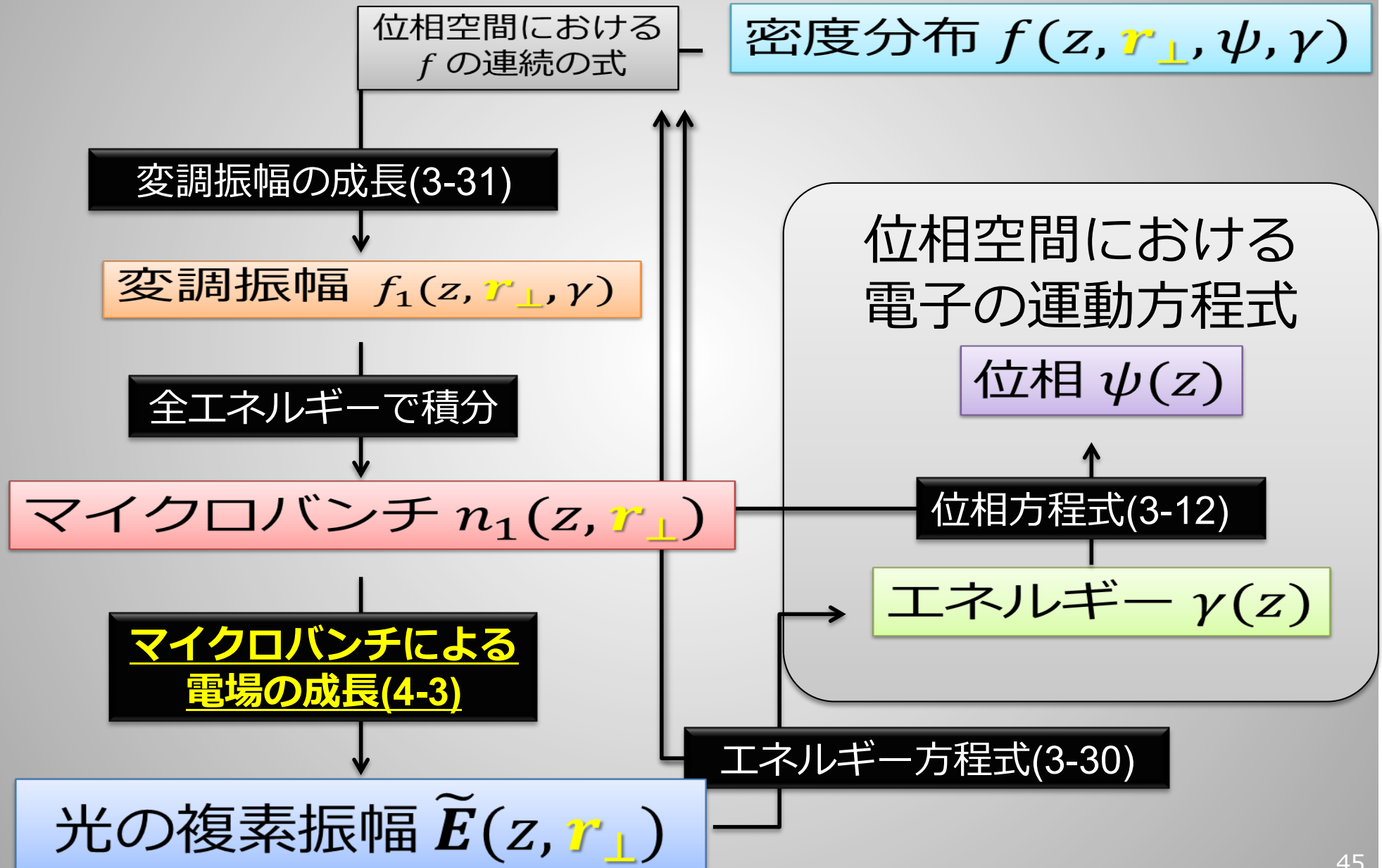
光の回折を考慮したFEL方程式

- 光の回折
 - 有限の光源サイズを持つ光が伝播とともに広がっていく現象。
 - 電子ビームサイズが有限であるとき要検討。
- 電子ビームに対する仮定
 - 角度発散は0 (エミッタンスは0)
 - ベータトロン振動はしない
 - エネルギー幅は0 ($\Delta\gamma = 0$)

一次元FEL方程式導出プロセス



回折効果の考察



回折を考慮した光電場の成長

波動方程式 (3次元) $\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \rho_e$

$\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}}(z, \mathbf{r}_\perp) e^{-i\omega(t-z/c)} + \text{c.c.}$

水平電場振幅の成長 $\left[\nabla_\perp^2 E_x + 2ik \frac{\partial E_x}{\partial z} \right] e^{ikz-i\omega t} + \text{c.c.} = \mu_0 \frac{\partial j_x}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho_e}{\partial x}$

一次元近似による式に空間微分の項が加わるのみ！

水平電場

$n_1(z, \mathbf{r}_\perp) e^{-ik_u z(1-\omega/\omega_1)}$

$E_\perp \cdot K_\perp$ の導入、規格化

合成電場振幅の成長 $\left(\frac{\nabla_\perp^2}{2ik} + \frac{\partial}{\partial z} \right) E_\perp(z, \mathbf{r}_\perp) = \frac{k_u E_2}{\gamma_0} \frac{n_1(z, \mathbf{r}_\perp)}{n_a} e^{-ik_u z(1-\omega/\omega_1)}$

回折を考慮したFEL微積分方程式

一次元近似によるFEL微積分方程式(3-40)

$$\frac{dE_{\perp}(\hat{z})}{d\hat{z}} = \frac{\rho\gamma_0}{n_0} \int d\hat{\eta} \frac{df_0}{d\hat{\eta}} \int_0^{\hat{z}} d\hat{z}' E_{\perp}(\hat{z}') \exp[i(\hat{z}' - \hat{z})(\hat{\eta} - \hat{\nu})]$$



回折を考慮したFEL微積分方程式(4-4)

$$\left(\frac{\nabla_{\perp}^2}{4i\rho k k_u} + \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \right) E_{\perp}(\hat{z}, \mathbf{r}_{\perp}) = \frac{\rho\gamma_0}{n_a} \int d\hat{\eta} \frac{df_0}{d\hat{\eta}} \times \int_0^{\hat{z}} d\hat{z}' E_{\perp}(\hat{z}', \mathbf{r}_{\perp}) \exp[i(\hat{z}' - \hat{z})(\hat{\eta} - \hat{\nu})]$$

円柱ビームに対するFEL微分方程式

回折を考慮したFEL微積分方程式(4-4)

$$\left(\frac{\nabla_{\perp}^2}{4i\rho k k_u} + \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \right) E_{\perp}(\hat{z}, \mathbf{r}_{\perp}) = \frac{\rho\gamma_0}{n_a} \int d\hat{\eta} \frac{df_0}{d\hat{\eta}} \\ \times \int_0^{\hat{z}} d\hat{z}' E_{\perp}(\hat{z}', \mathbf{r}_{\perp}) \exp[i(\hat{z}' - \hat{z})(\hat{\eta} - \hat{\nu})]$$

円柱ビーム

$$f_0 = \begin{cases} n_a \delta(\gamma - \gamma_0) & ; r_{\perp} < r_0 \\ 0 & ; r_{\perp} > r_0 \end{cases}$$

回折を考慮したFEL微分方程式(4-6)

$$\left(\frac{\nabla_{\perp}^2}{4i\rho k k_u} + \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \right) \left(\frac{\partial^2 E_{\perp}}{\partial z^2} - 2i\hat{\nu} \frac{\partial E_{\perp}}{\partial z} - \hat{\nu}^2 E_{\perp} \right) = iE_{\perp} \quad ; r_{\perp} < r_0 \\ \left(\frac{\nabla_{\perp}^2}{4i\rho k k_u} + \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \right) E_{\perp} = 0 \quad ; r_{\perp} > r_0$$

増幅解の仮定と規格化

$$\left(\frac{\nabla_{\perp}^2}{4i\rho k k_u} + \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \right) \left(\frac{\partial^2 E_{\perp}}{\partial z^2} - 2i\hat{\nu} \frac{\partial E_{\perp}}{\partial z} - \hat{\nu}^2 E_{\perp} \right) = iE_{\perp} \quad ; r_{\perp} < r_0$$

$$\left(\frac{\nabla_{\perp}^2}{4i\rho k k_u} + \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \right) E_{\perp} = 0 \quad ; r_{\perp} > r_0$$

回折パラメータ \hat{D} の導入

$$\hat{D} = 2\rho k k_u r_0^2$$

増幅解の仮定

$$E_{\perp}(z, \mathbf{r}_{\perp}) = E_{\Lambda}(\mathbf{r}_{\perp}) e^{\hat{\Lambda} \hat{z}}$$

増幅解の空間プロファイル方程式(4-7)

$$(r_0^2 \nabla_{\perp}^2 + 2i\hat{D}\hat{\Lambda}) E_{\Lambda}(\mathbf{r}_{\perp}) = \begin{cases} -2\hat{D} \frac{E_{\Lambda}(\mathbf{r}_{\perp})}{(\hat{\Lambda} - i\hat{\nu})^2} & ; r_{\perp} < r_0 \\ 0 & ; r_{\perp} > r_0 \end{cases}$$

回折パラメータ

電子ビームサイズ～光源サイズ

$$\hat{D} = 2\rho k k_u r_0^2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{r_0}{\frac{\lambda}{4\pi r_0} L_g}$$

The equation is annotated with colored circles and lines: a red circle around r_0 in the numerator, a blue circle around $\frac{\lambda}{4\pi r_0}$ in the denominator, and a yellow circle around L_g in the denominator. Lines connect these circles to their respective text boxes: a red line from the red circle to the top box, a blue line from the blue circle to the bottom-left box, and a yellow line from the yellow circle to the bottom-right box.

回折限界光の角度発散



ゲイン長

=

光が1ゲイン長を伝播したときに広がるビームサイズ

\hat{D} は回折の影響で規格化した電子ビームサイズ

モード展開による解法

$$(r_0^2 \nabla_{\perp}^2 + 2i\hat{D}\hat{\Lambda})E_{\Lambda}(\mathbf{r}_{\perp}) = \begin{cases} -2\hat{D} \frac{E_{\Lambda}(\mathbf{r}_{\perp})}{(\hat{\Lambda} - i\hat{\nu})^2} & ; r_{\perp} < r_0 \\ 0 & ; r_{\perp} > r_0 \end{cases}$$

モード展開 $E_{\Lambda}(\mathbf{r}_{\perp}) = \sum_{n=0}^{\infty} E_{n\Lambda}(\hat{r})e^{in\theta}$

$$\hat{r} < 1 \quad ; \quad \hat{r}^2 \frac{d^2 E_{n\Lambda}}{d\hat{r}^2} + \hat{r} \frac{dE_{n\Lambda}}{d\hat{r}} + \left[\underbrace{2i\hat{D}\hat{\Lambda}\hat{r}^2 + \frac{2\hat{D}\hat{r}}{(\hat{\Lambda} - i\hat{\nu})^2}}_{= a^2} - n^2 \right] E_{n\Lambda} = 0$$

$$\hat{r} > 1 \quad ; \quad \hat{r}^2 \frac{d^2 E_{n\Lambda}}{d\hat{r}^2} + \hat{r} \frac{dE_{n\Lambda}}{d\hat{r}} + \underbrace{(2i\hat{D}\hat{\Lambda}\hat{r}^2 - n^2)}_{= b^2} E_{n\Lambda} = 0$$

ベッセルの(変形)微分方程式

境界条件：
 $E_{n\Lambda}(0)$ が有限 & $E_{n\Lambda}(\infty) = 0$

$$\hat{r} < 1 \quad ; \quad E_{n\Lambda}(\hat{r}) = C_{a1} J_n(a\hat{r})$$

$$\hat{r} > 1 \quad ; \quad E_{n\Lambda}(\hat{r}) = C_{b2} K_n(b\hat{r})$$

分散関係式

$$\hat{r} < 1 \quad ; \quad E_{n\Lambda}(\hat{r}) = C_{a1} J_n(a\hat{r})$$

$$\hat{r} > 1 \quad ; \quad E_{n\Lambda}(\hat{r}) = C_{b2} K_n(b\hat{r})$$

連続条件

$$\lim_{\hat{r} \rightarrow 1^-} E_{n\Lambda}(\hat{r}) = \lim_{\hat{r} \rightarrow 1^+} E_{n\Lambda}(\hat{r})$$

$$\lim_{\hat{r} \rightarrow 1^-} E'_{n\Lambda}(\hat{r}) = \lim_{\hat{r} \rightarrow 1^+} E'_{n\Lambda}(\hat{r})$$

$$\begin{pmatrix} J_n(a) & -K_n(b) \\ aJ'_n(a) & -bK'_n(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{a1} \\ C_{b2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

行列式 = 0

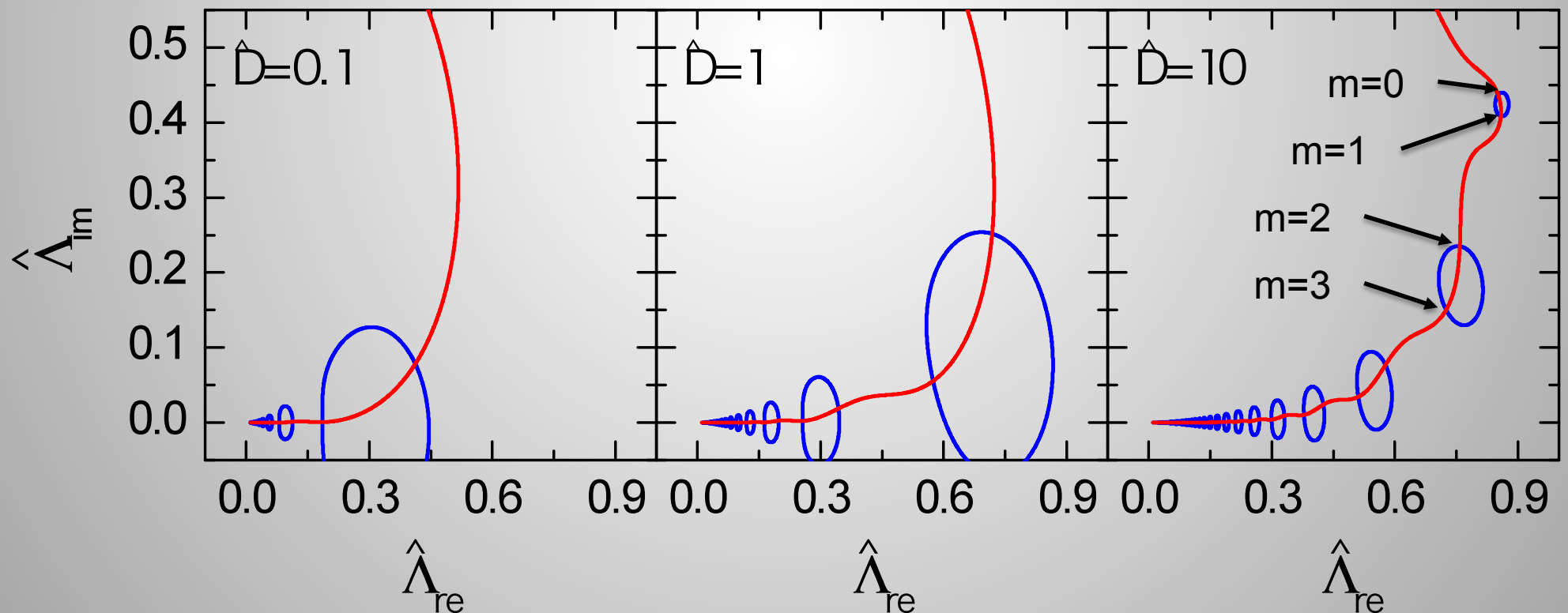
回折を考慮したFEL分散関係式

$$b(\hat{\Lambda}) J_n[a(\hat{\Lambda})] K_{n+1}[b(\hat{\Lambda})] = a(\hat{\Lambda}) J_{n+1}[a(\hat{\Lambda})] K_n[b(\hat{\Lambda})]$$

$$H_n(\Lambda) \equiv \frac{a J_{n+1}(a)}{J_n(a)} - \frac{b K_{n+1}(b)}{K_n(b)} = 0$$

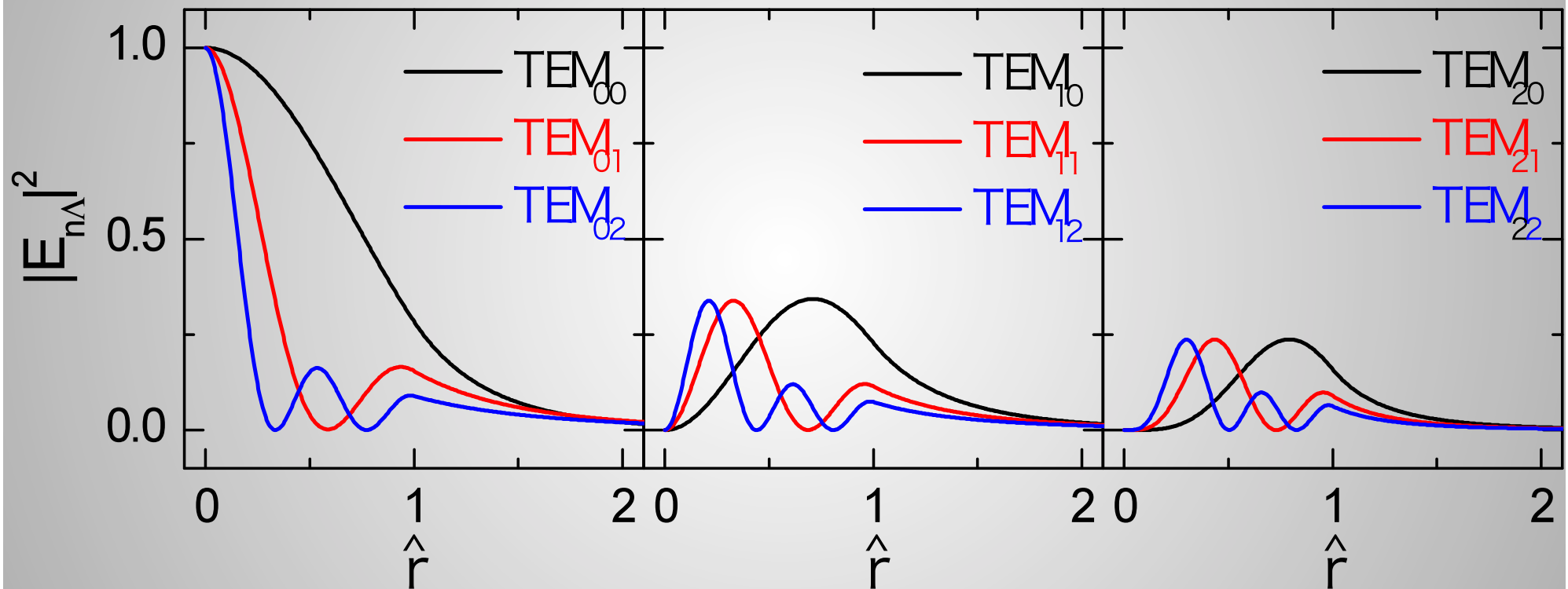
分散関係式の数値的解法

- i. 方程式 $\text{Im}[H_n(\hat{\Lambda})] = 0$ を満たす $\hat{\Lambda}$ の実部と虚部を計算し、陰関数で表示（赤線）
- ii. 上の曲線に沿って $\text{Re}[H_n(\hat{\Lambda})] = 0$ を満たす $\hat{\Lambda}$ の実部と虚部を計算し、**虚部** が大きい順に指数付け



レーザープロファイル(1)

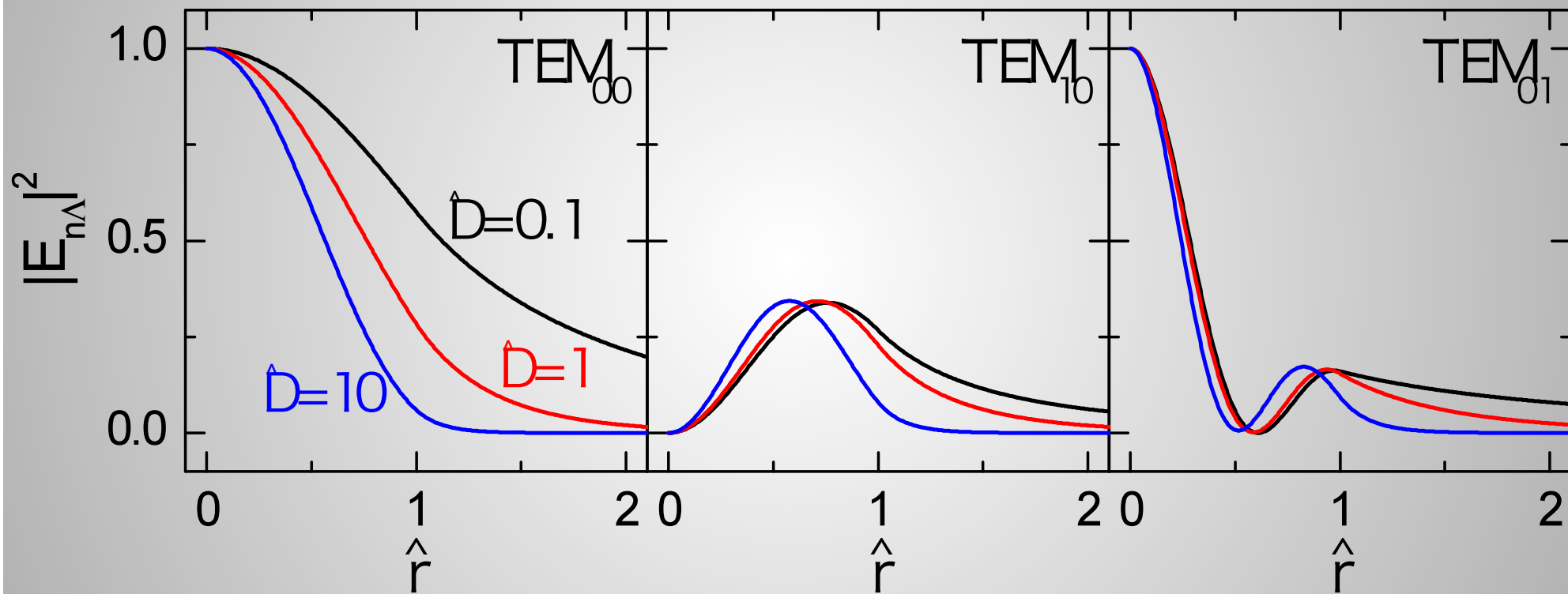
$\hat{D} = 1$ の時の各固有モードの空間プロファイル



モード次数が大きいほど複雑な
(節点の多い)形状に変化する

レーザープロファイル(2)

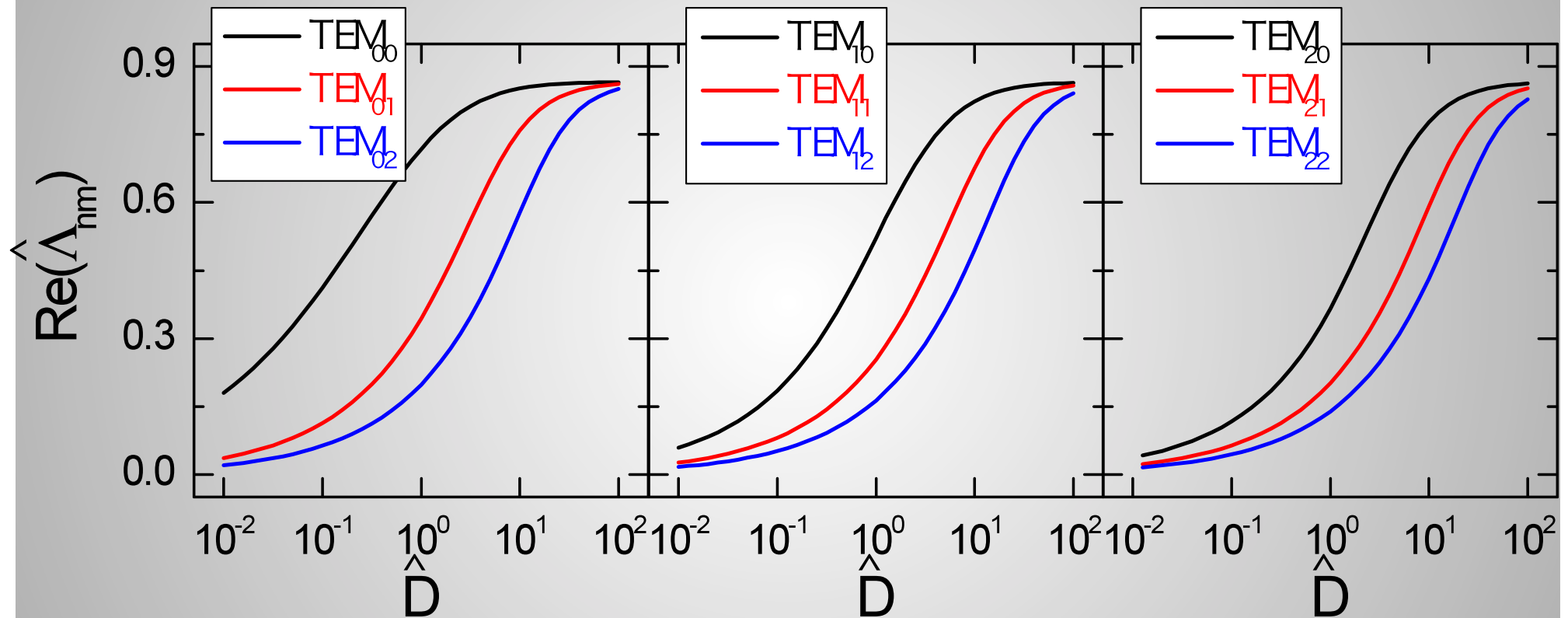
回折パラメータ \hat{D} に対する依存性



電子ビームサイズが小さいと、光は回折
によってこれよりも大きく広がる

増幅率

\hat{D} に対する増幅率 ($\hat{\Lambda}_{mn}$ の実部) の依存性

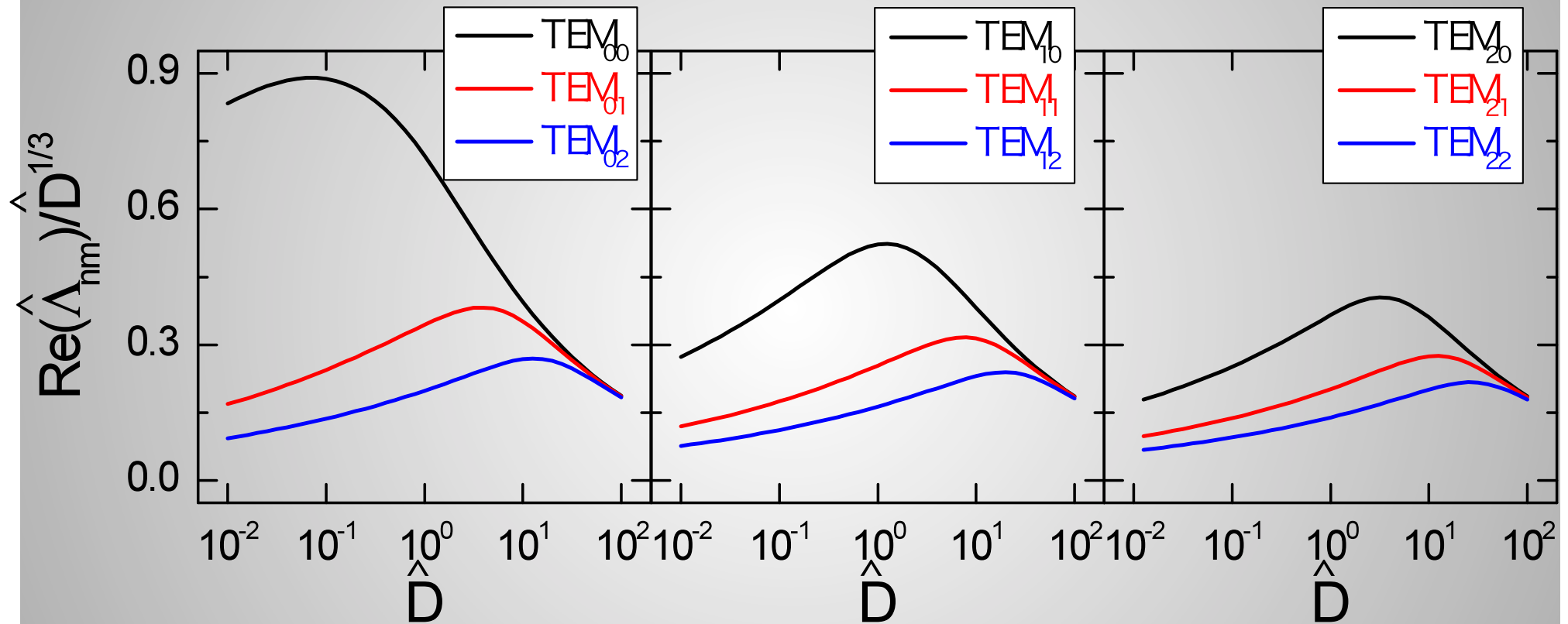


\hat{D} の増加とともに

- ✓ 増幅率増大(電流密度一定、電流値増加)
- ✓ 高次モードの増幅率は基本モードに近づく

規格化増幅率

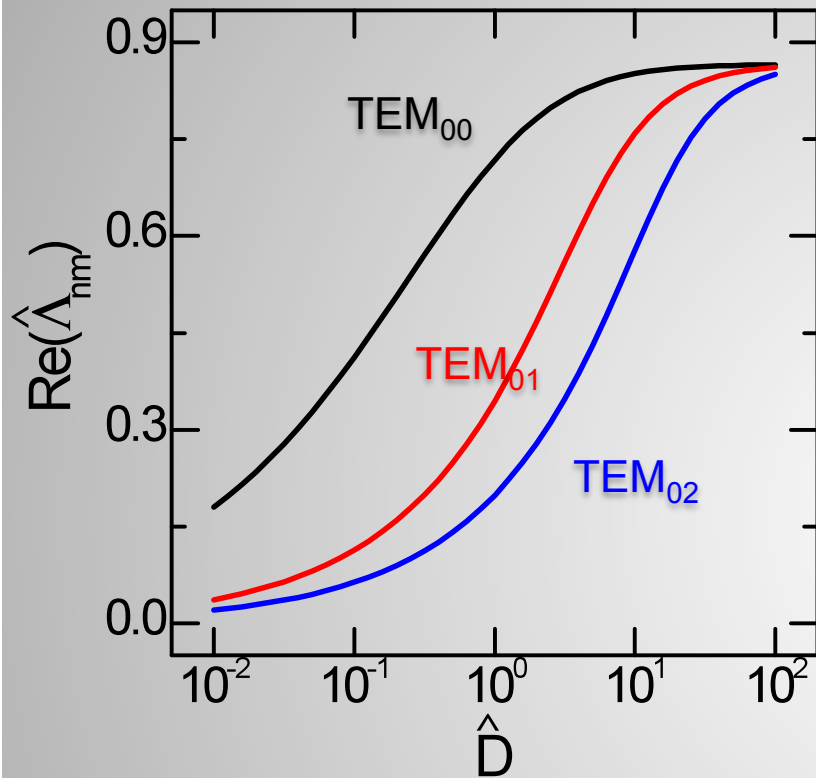
$\hat{D}^{1/3}$ で規格化した増幅率の依存性



規格化により、電流値は一定

- ✓ 最適な \hat{D} が存在(電流密度の増加と回折の相殺効果)

光ガイドイング



分散関係式の解析から：

- ✓ 増幅が許される空間モードは固有の増幅率($\hat{\Lambda}_{nm}$ の実部)を持つ
- ✓ 一般に、モード数(n, m)が小さいほど増幅率は大きい

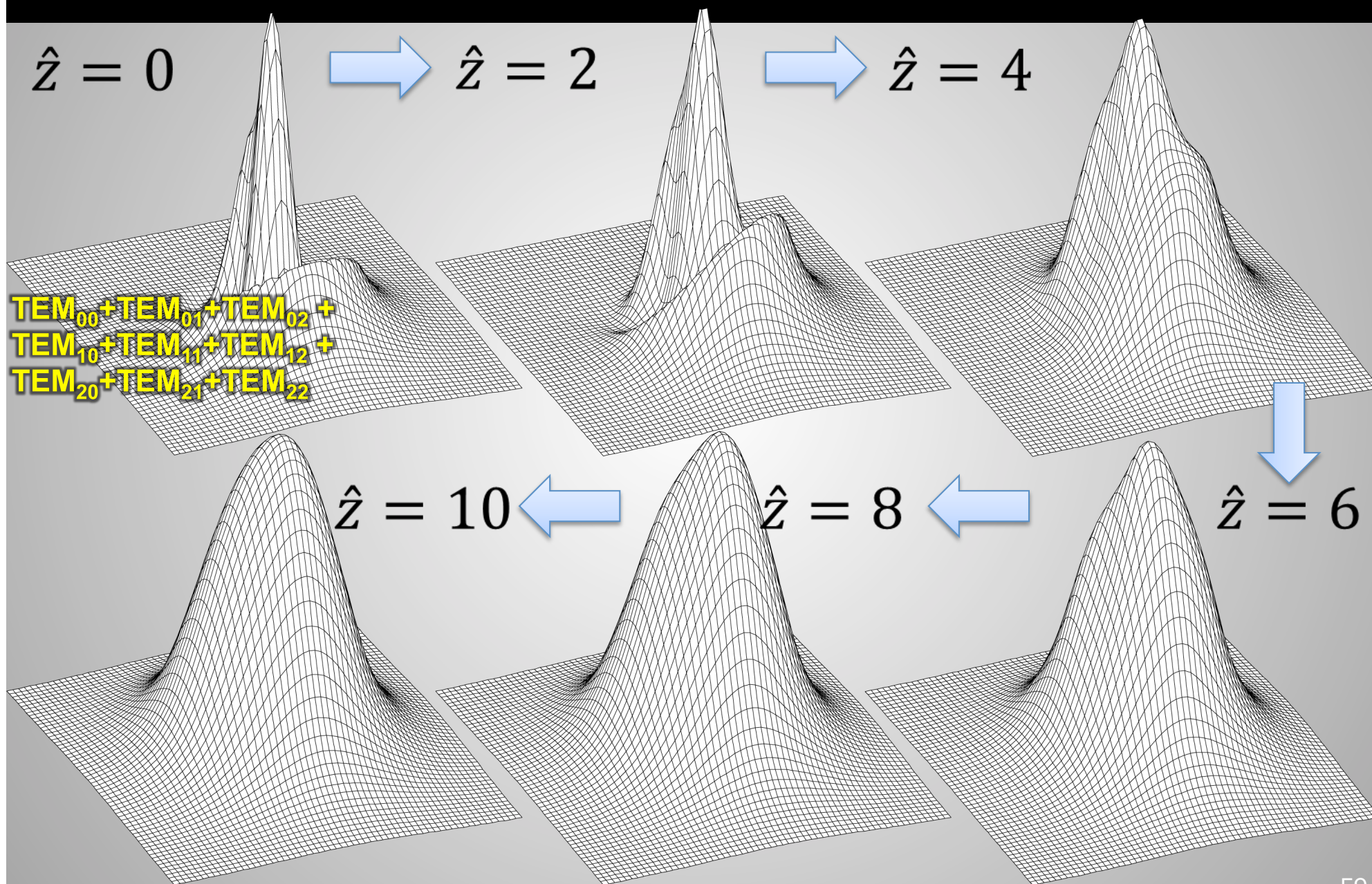
高ゲイン領域($z \gg L_g$)では：

- ✓ モード数(n, m)が小さいほどレーザー強度大
- ✓ 最終的には、基本モードのみが生き残る

光ガイドイング効果



光ガイドイングの例



3次元FEL方程式へ...

- 3次元FEL方程式
 - エラーが存在しない理想的な系で、増幅率に影響する全ての要因を考慮したFEL方程式
 - (4-4)に抜けているのは β 振動の影響
 - ▶ 実効的にはエネルギー幅と等価
- 普遍的スケーリング関数
 - 3次元FEL方程式を変分法にて近似的に解き、光&電子ビームパラメータの関数としてフィッティング
 - 導出された19個のフィッティングパラメータにより、実効ゲイン長が容易に計算可能

Outline

- レーザー発振の定性的解釈
- 1次元FEL理論
- FELにおける回折効果
- **SASE型FEL**
- シード型FEL

FELにおけるシード光

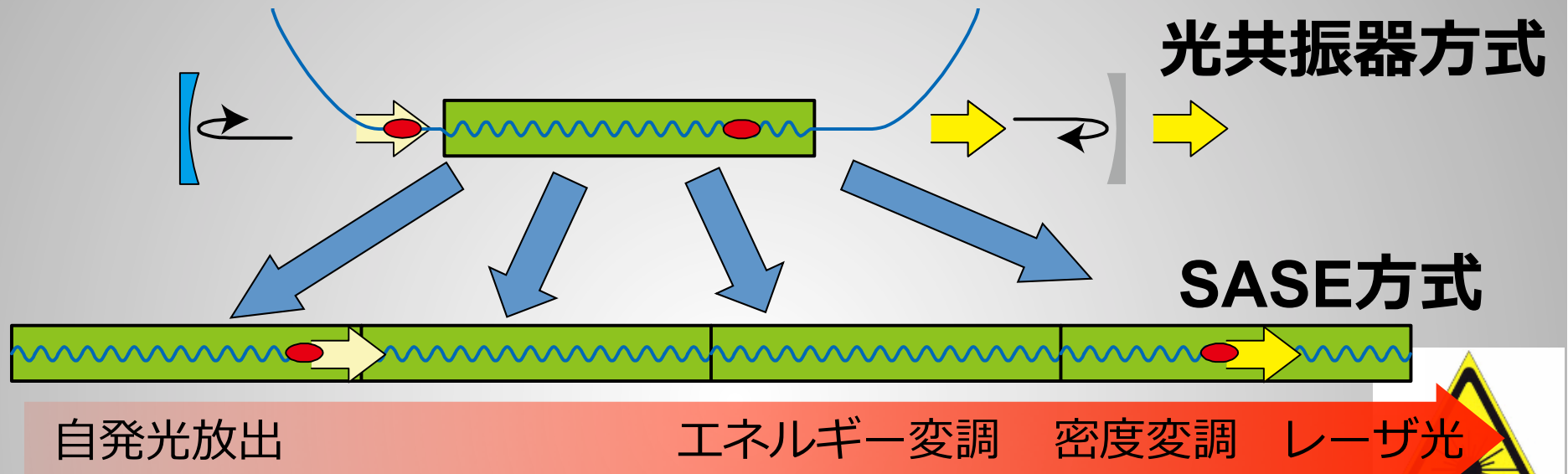
光共振器型FEL



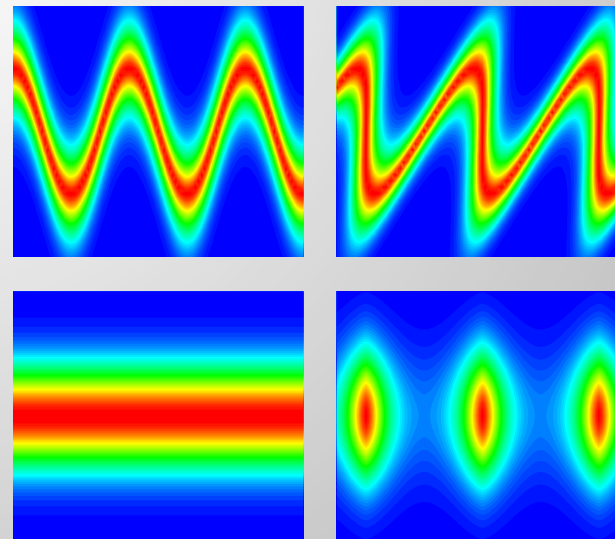
共振器型FELにおけるシード光は、光共振器によって
モード選択(空間的・時間的)された自発光である。

- ✓ 原理的にシングルモードレーザー可能
- ✓ ミラーが利用できないX線領域では？

SASE型FELとは？

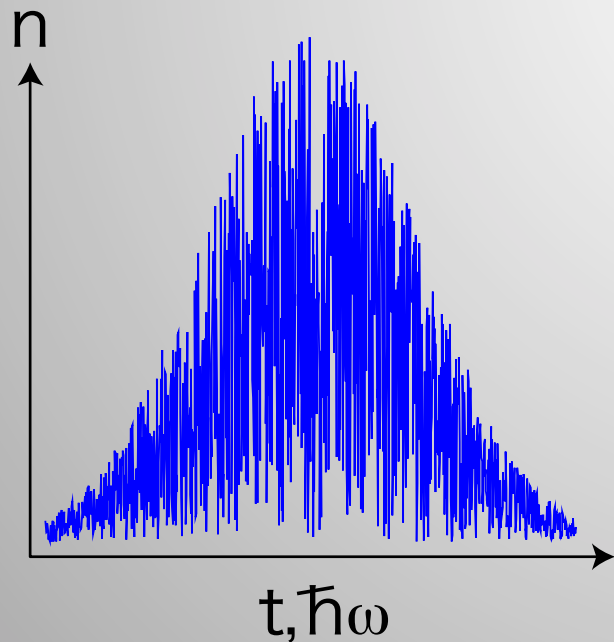
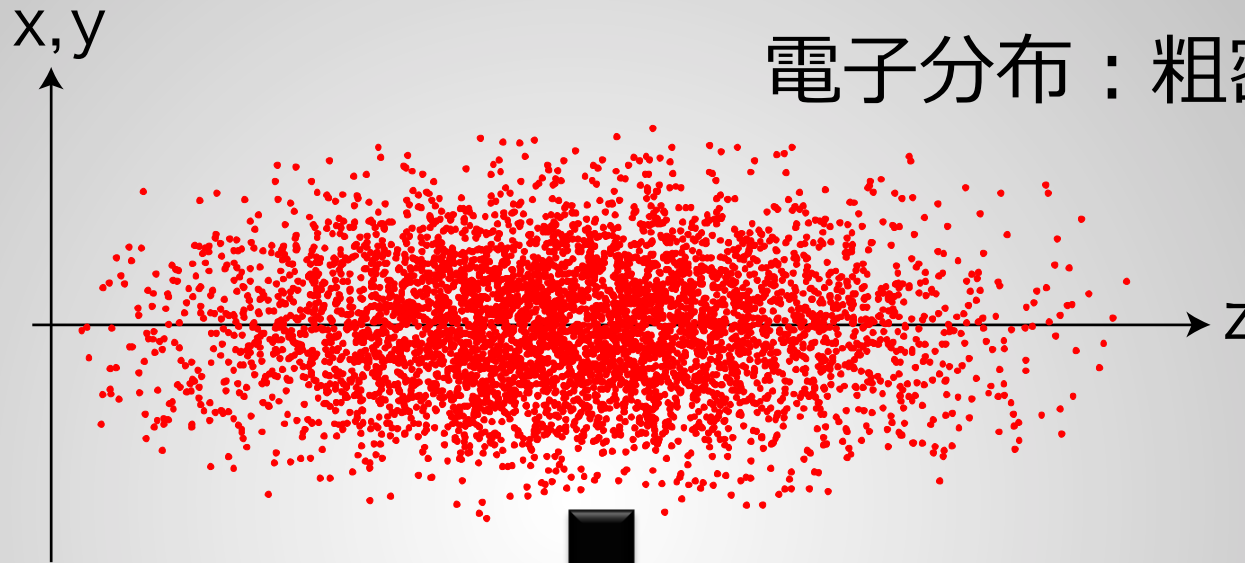


- ✓ アンジュレータ入口付近で放出された自発光をシード光としてそのまま利用
- ✓ 増幅率を稼ぐために長いアンジュレータが必要



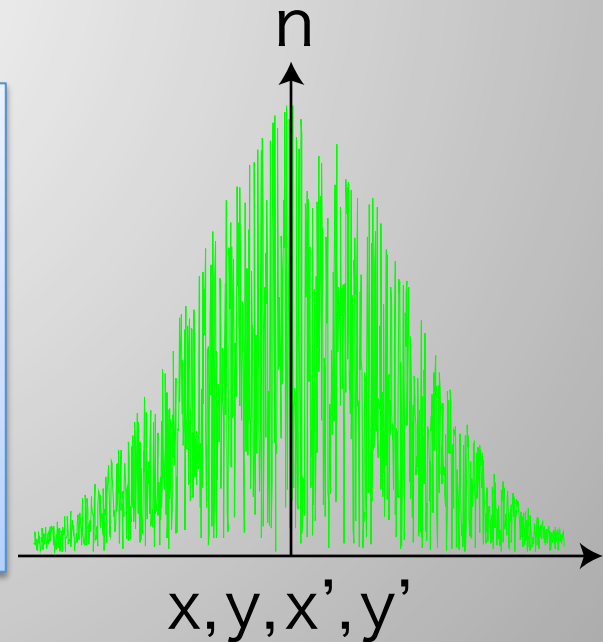
ショットノイズ

電子分布：粗密が混在

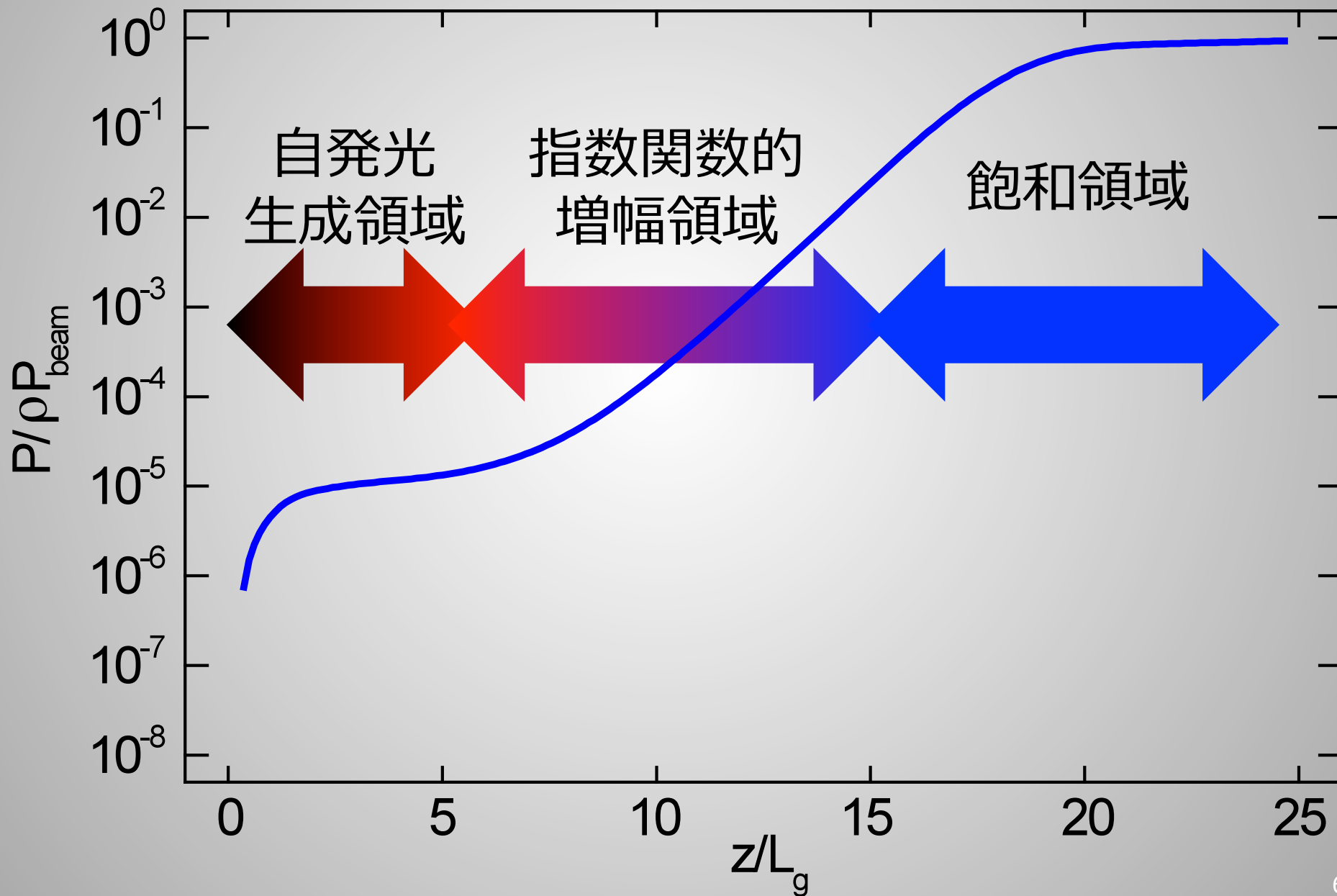


光の分布関数

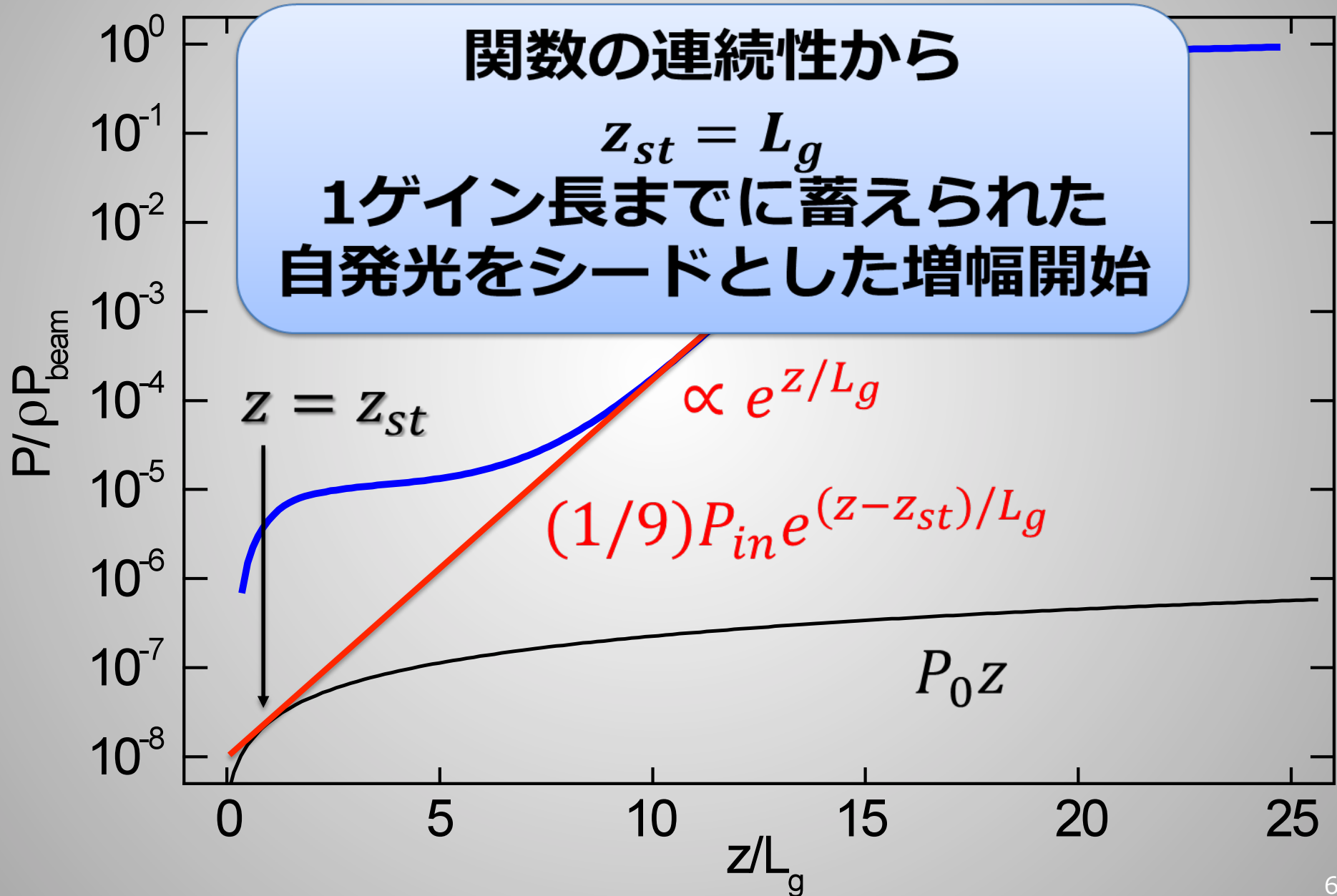
- ✓ 時間
- ✓ スペクトル
- ✓ 空間
- ✓ 角度分布



SASE型FELにおけるゲイン曲線



自発放射のシード光実効パワー



実効入力パワー P_{in} の定性的評価

ビームサイズ σ_r の電子ビームによる
自発放射のフラックス角密度

$$\frac{d^3 P}{d\omega d\Omega^2} = \frac{\rho\gamma_0 mc^2}{24} \left(\frac{4\pi\sigma_r}{\lambda_1} \right)^2 S_N(\omega, \theta)$$

一次元近似：

$$\sigma_{r1} \sim \frac{\lambda}{4\pi\sigma_r} \ll \sigma_\theta$$

周期数： $N = L_g / \lambda_u$

エネルギー・角度で積分
✓ FELゲインのバンド幅 σ_ω
✓ FEL光の角度発散 σ_{r1}

SASE型FELにおけるシード光の実効パワー

$$P_{in} = \frac{\pi}{12} \sqrt{2\pi} \sigma_\omega \rho\gamma_0 mc^2 \quad (\text{定性的評価})$$

$$P_{in} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma_\omega \rho\gamma_0 mc^2 \quad (\text{定量的解析})$$

飽和長(1)

飽和長 L_{sat} : レーザー飽和に達するアンジュレータ長

$$P(L_{sat}) = \frac{P_{in}}{9} e^{(L_{sat}-L_g)/L_g} \sim \rho \gamma_0 m c^2 \frac{I}{e}$$

実効入力パワー

$$P_{in} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma_\omega \rho \gamma_0 m c^2$$

飽和長を定める非線形方程式

$$\ln \left(\frac{3}{2\sqrt{\pi}} \frac{N_{\lambda_1}}{\rho} \right) = \frac{L_{sat}}{L_g} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{L_{sat}}{L_g} \right) - 1 \equiv g \left(\frac{L_{sat}}{L_g} \right)$$

飽和長(2)

$$\ln \left(\frac{3}{2\sqrt{\pi}} \frac{N_{\lambda_1}}{\rho} \right) = \frac{L_{sat}}{L_g} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{L_{sat}}{L_g} \right) - 1 \equiv g \left(\frac{L_{sat}}{L_g} \right)$$

実用的FELで
は16~19の範

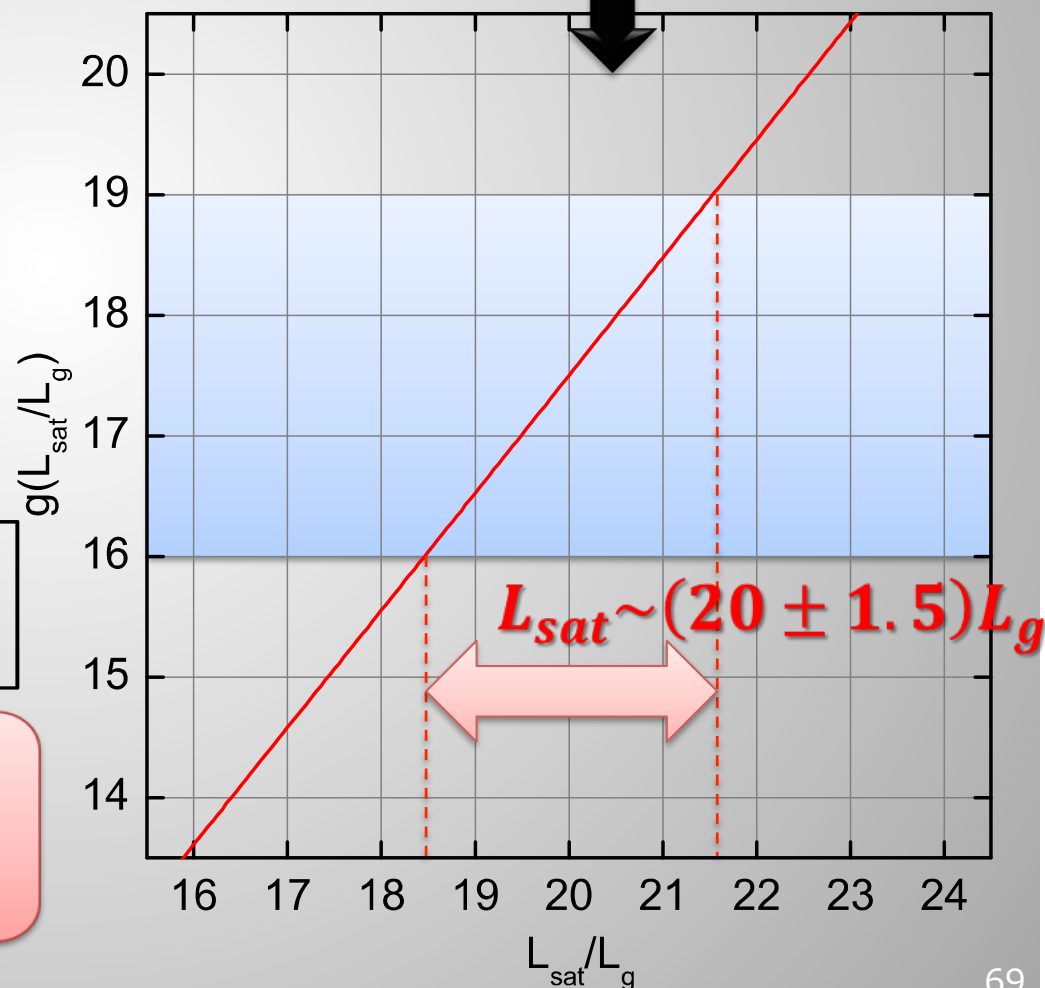
囲

$$L_{sat} \sim (20 \pm 1.5)L_g$$

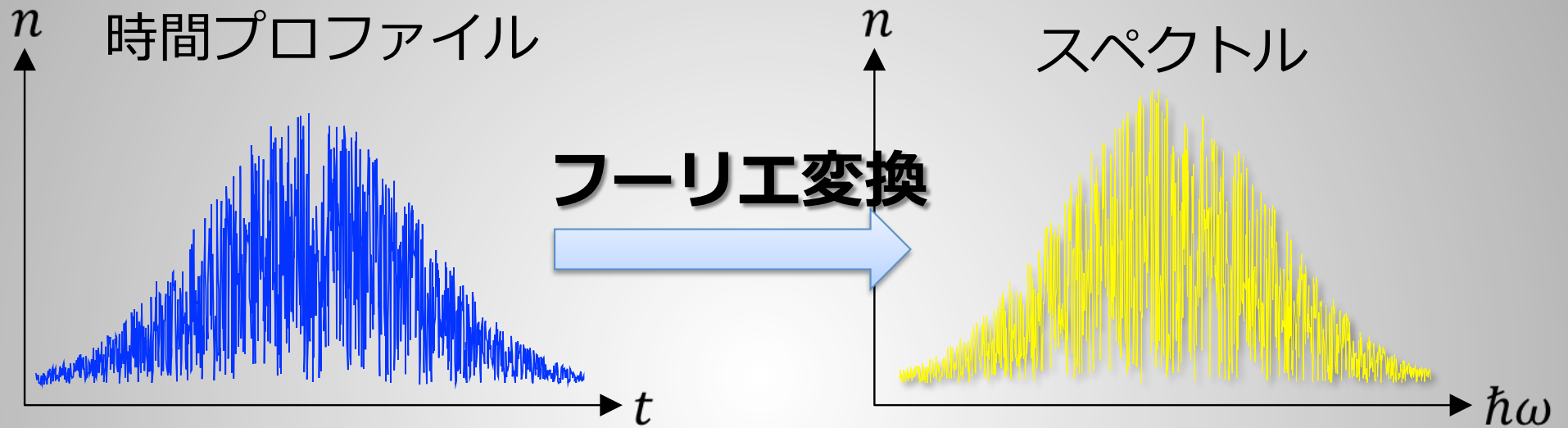
$$L_g = \frac{\lambda_u}{4\pi\sqrt{3}\rho}$$

$$L_{sat} \sim \lambda_u / \rho$$

飽和には ρ^{-1} の周期数が必要



ショットノイズ時間構造とスペクトル(1)

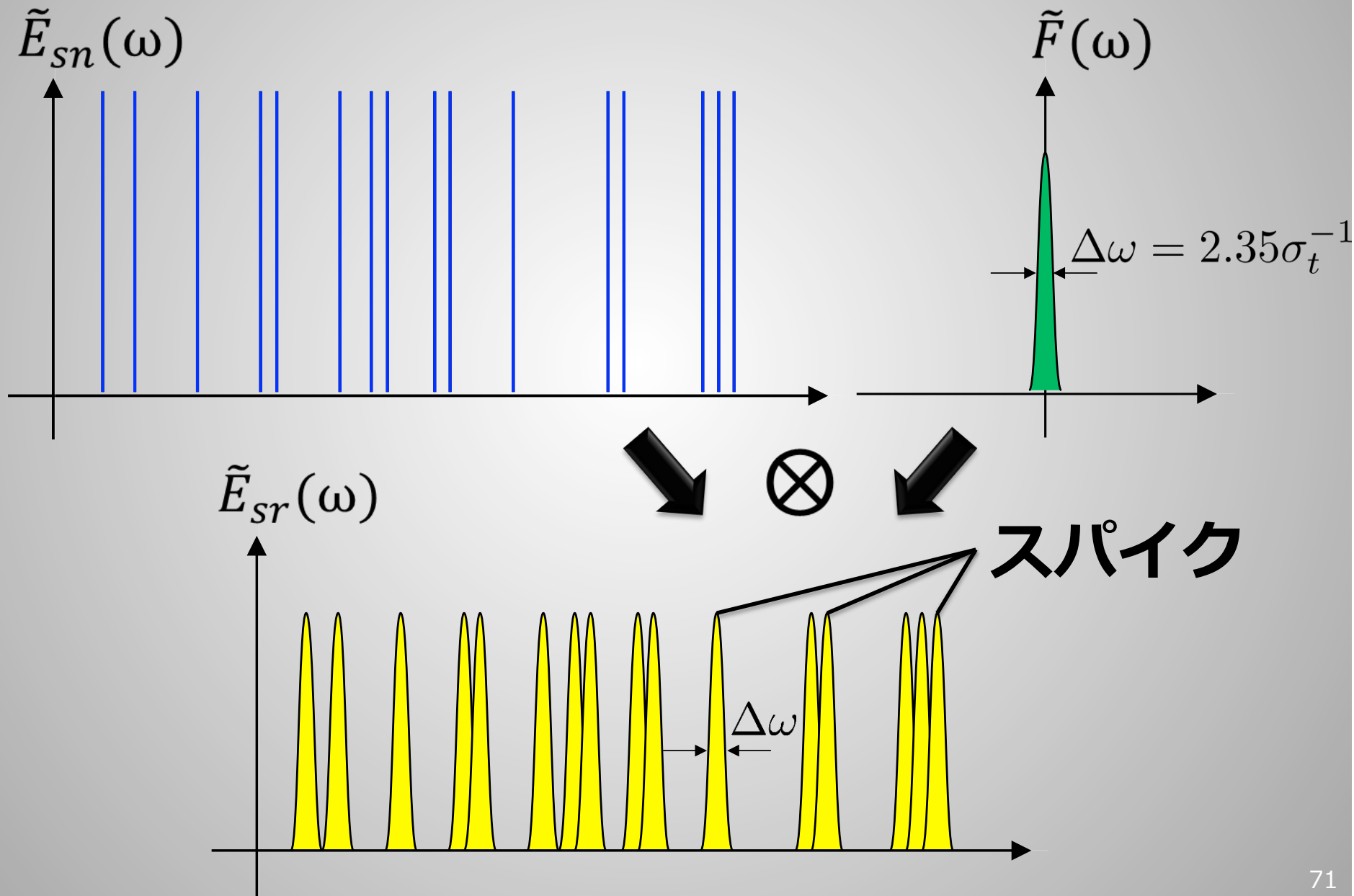


フーリエ変換

$$E_{sr}(t) = F(t)E_{sn}(t) \longrightarrow \tilde{E}_{sr}(\omega) = \int E_{sr}(t)e^{i\omega t} dt$$
$$= \tilde{F}(\omega) \otimes \tilde{E}_{sn}(\omega)$$

フーリエ変換

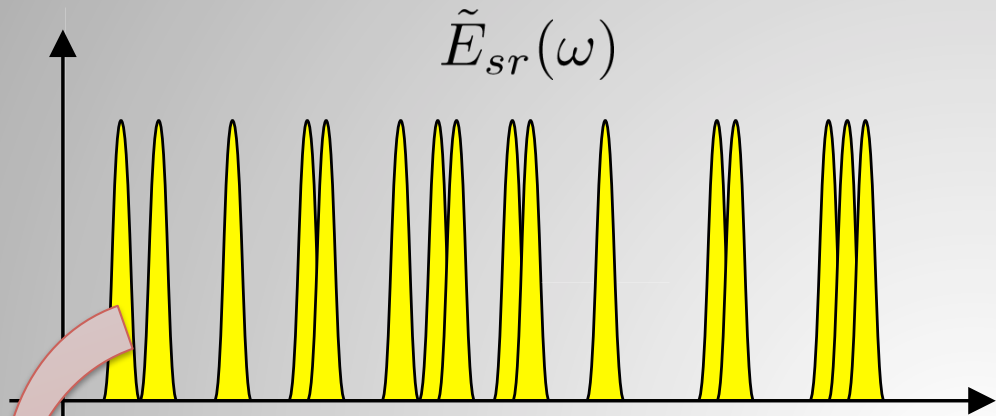
ショットノイズ時間構造とスペクトル(2)



SASE時間構造とスペクトル

FELゲインスペクトル関数のフーリエ変換

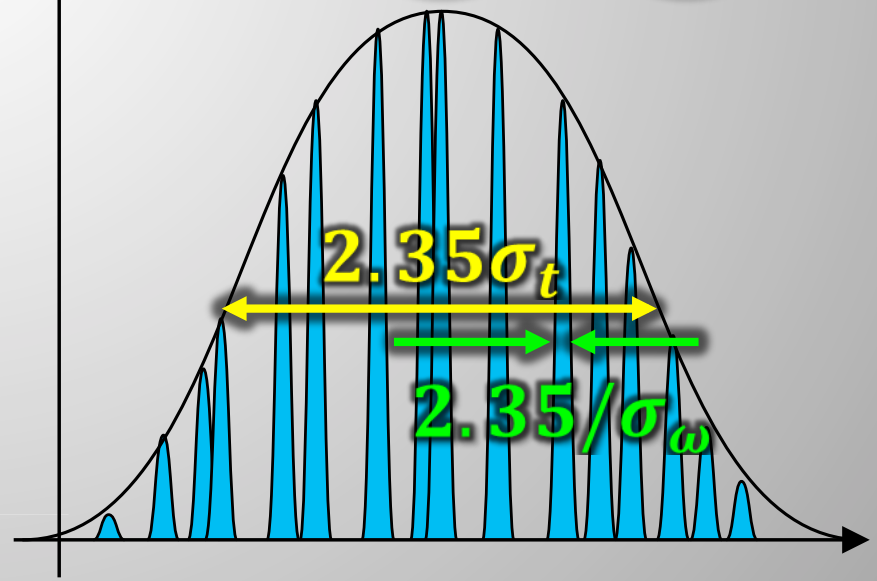
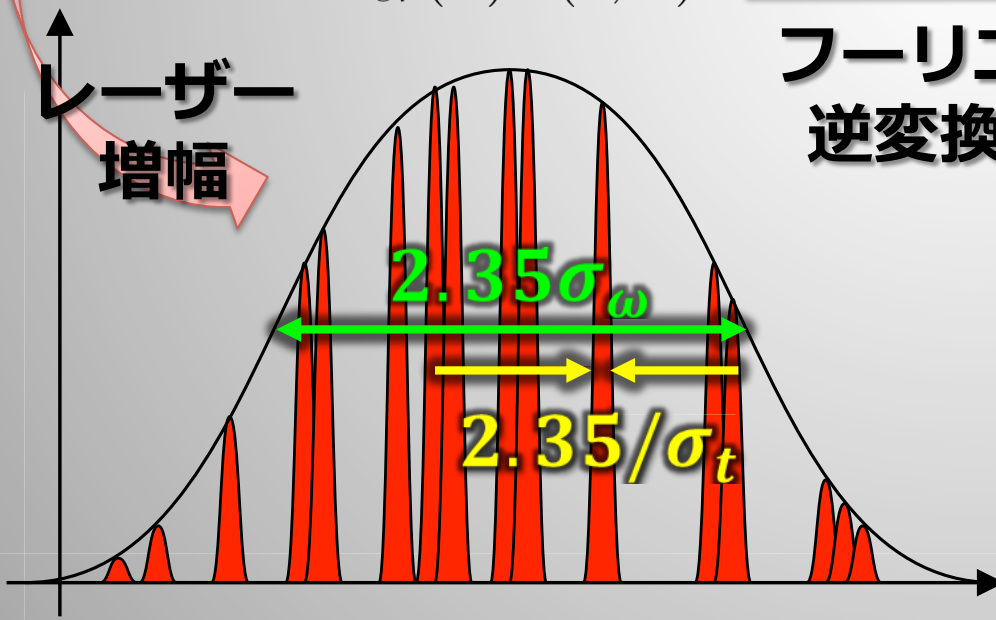
ショットノイズ
時間プロファイル



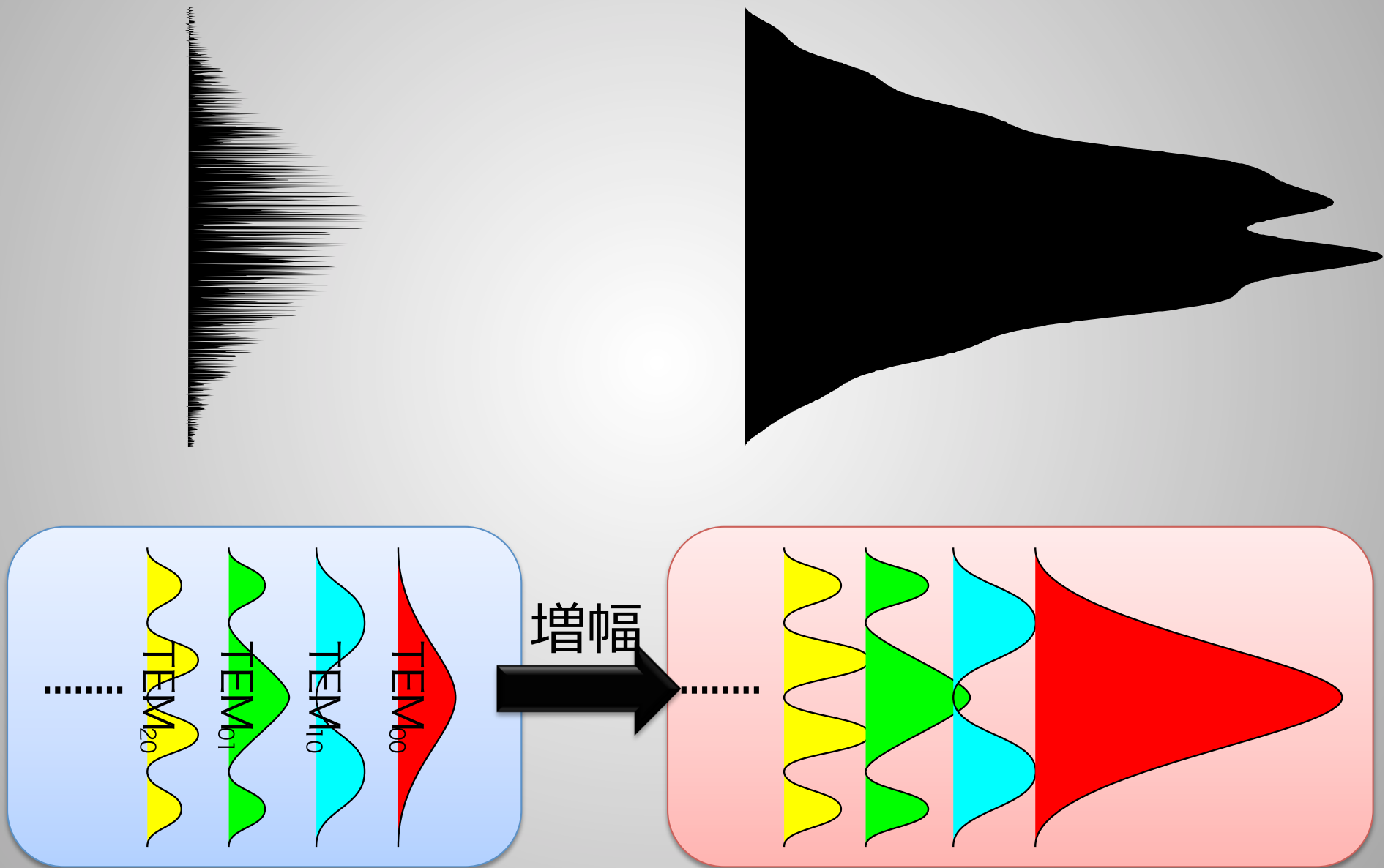
$\tilde{E}_{sr}(\omega) \tilde{A}(z, \omega)$

フーリエ
逆変換

$E(z, t) = E_{sr}(t) \otimes A(z, t)$



空間プロファイル

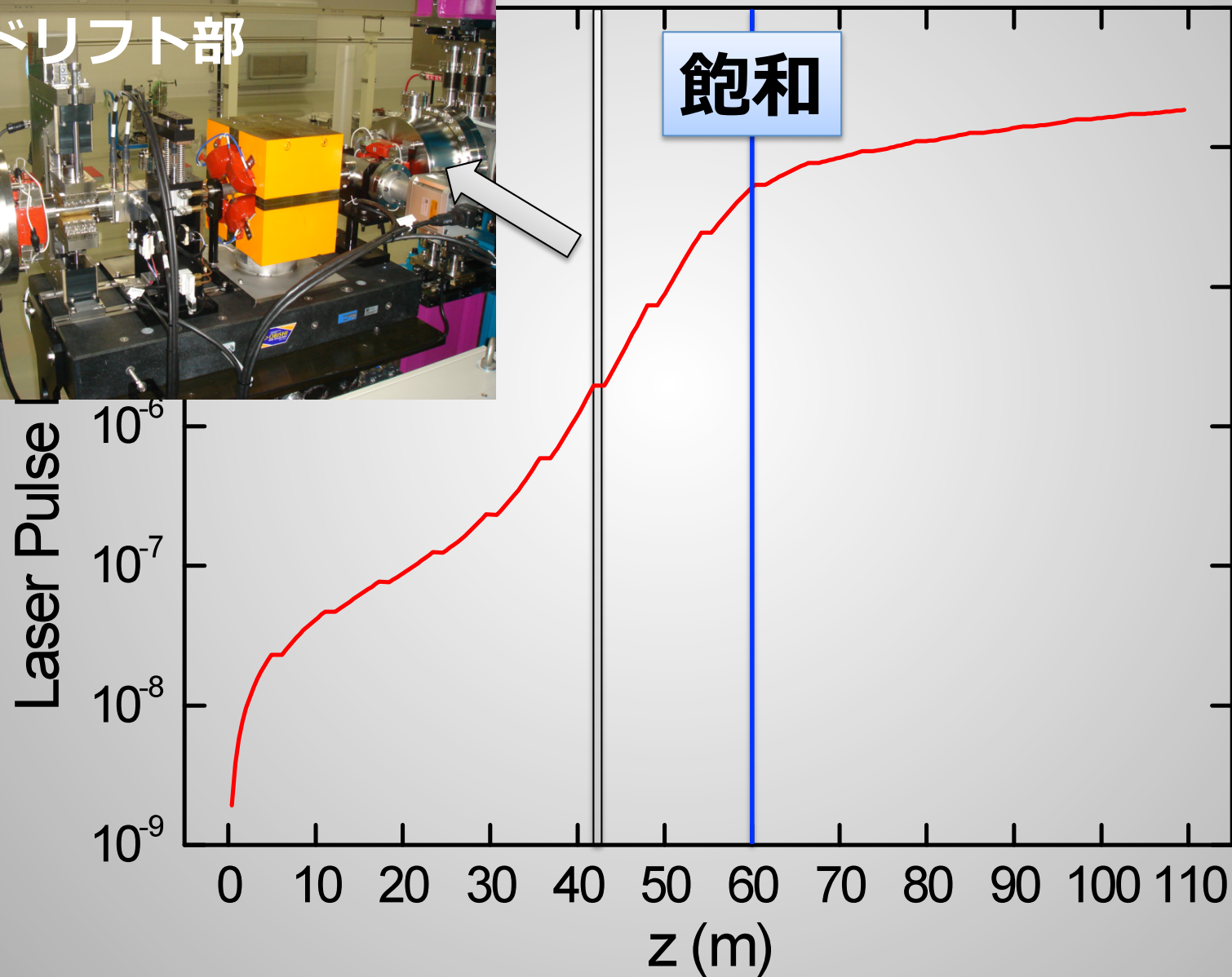
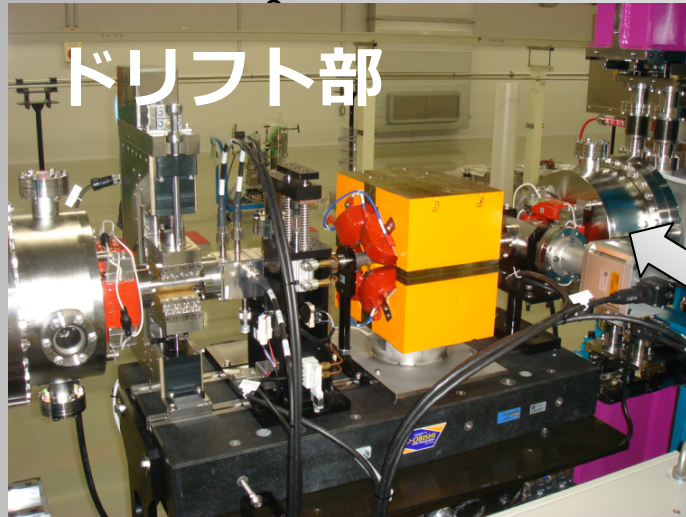


SASE型FELの光源性能計算例

| 電子ビーム | | アンジュレータ | |
|------------|---------------------|----------|-----------------------|
| エネルギー | 8 GeV | 周期長 | 18 mm |
| 有効バンチ電荷 | 75 pC | K値 | 2.18 |
| バンチ長(FWHM) | 20 fsec | セグメント長 | 5 m |
| ピーク電流 | 3.5 kA | セグメント間隔 | 6.15 m |
| 規格化エミッタンス | 0.7 mm.mrad | セグメント総数 | 18 |
| エネルギー幅 | 10^{-4} | 光源パラメータ | |
| 平均ベータ関数 | 25 m | FELパラメータ | 4.14×10^{-4} |
| ビームサイズ | 30 μm | ゲイン長(1D) | 2.00 m |
| 角度発散 | 1.4 μrad | 発振波長 | 0.124 nm |
| | | 発振光エネルギー | 10 keV |

パラメータは全て2011年10月時点でのもの。
2013年7月現在では大幅に改善していることに注意。

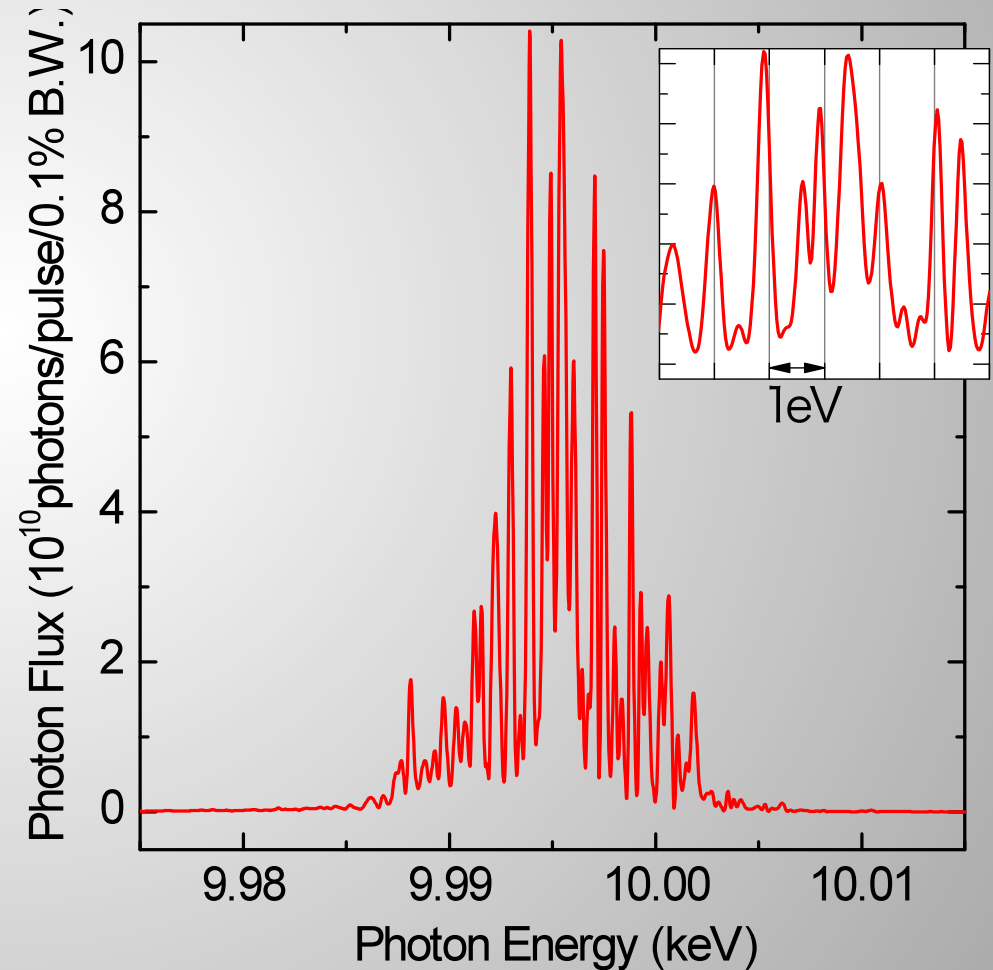
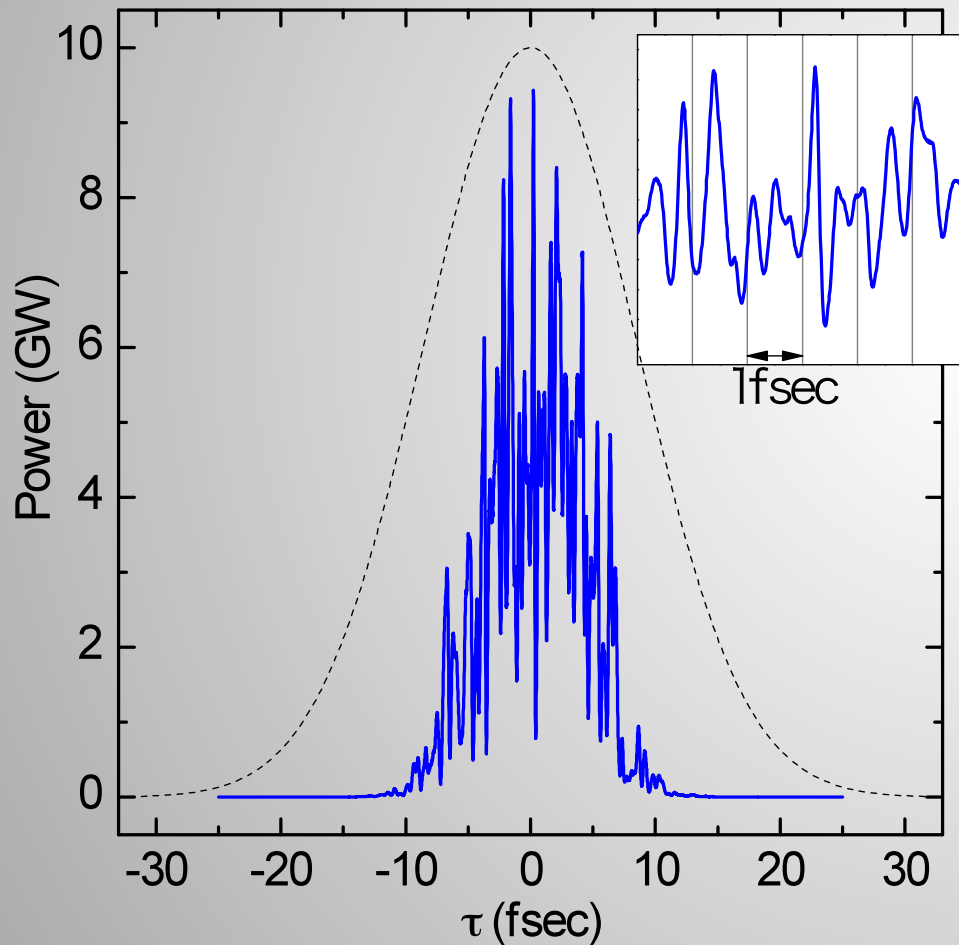
SASE型FELにおけるゲイン曲線



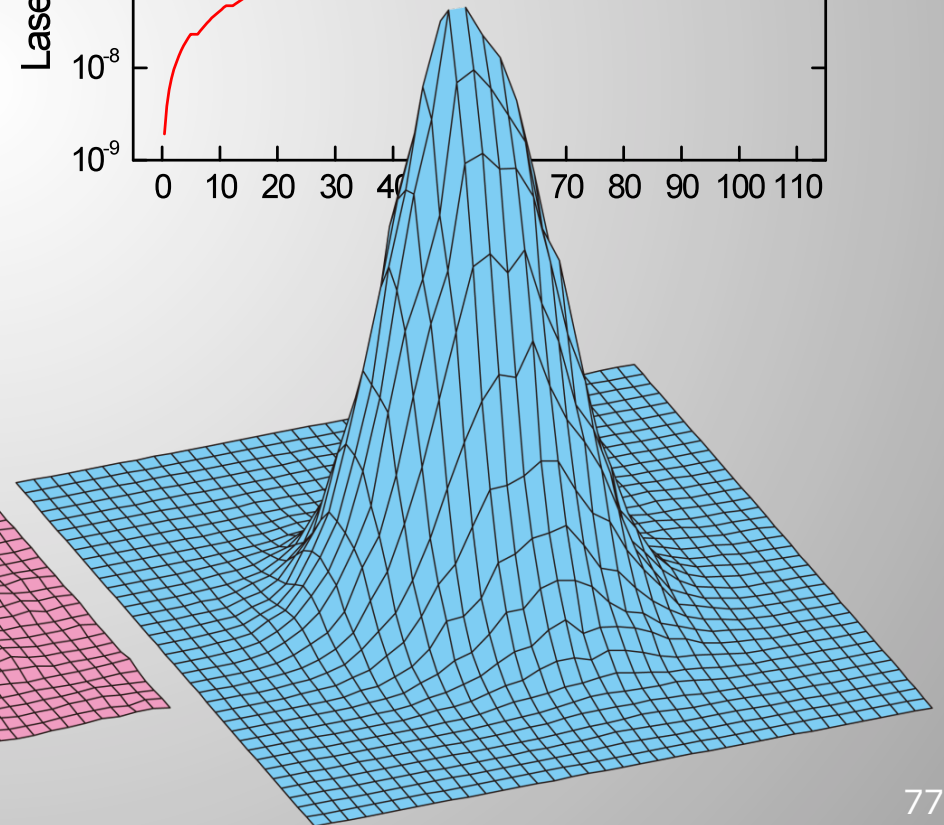
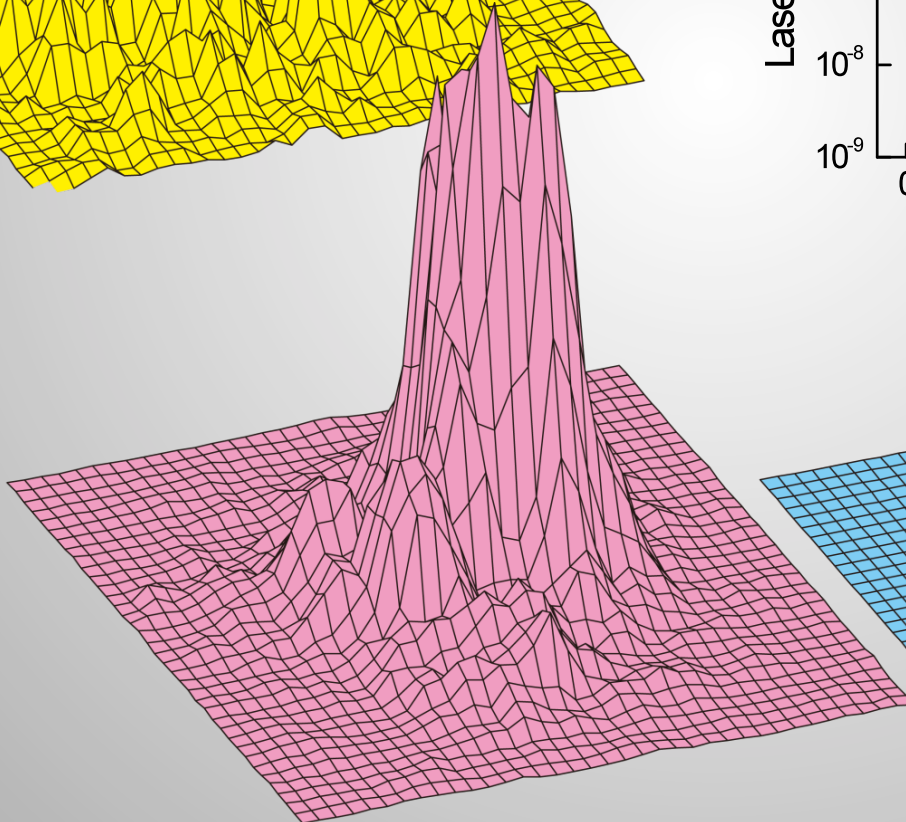
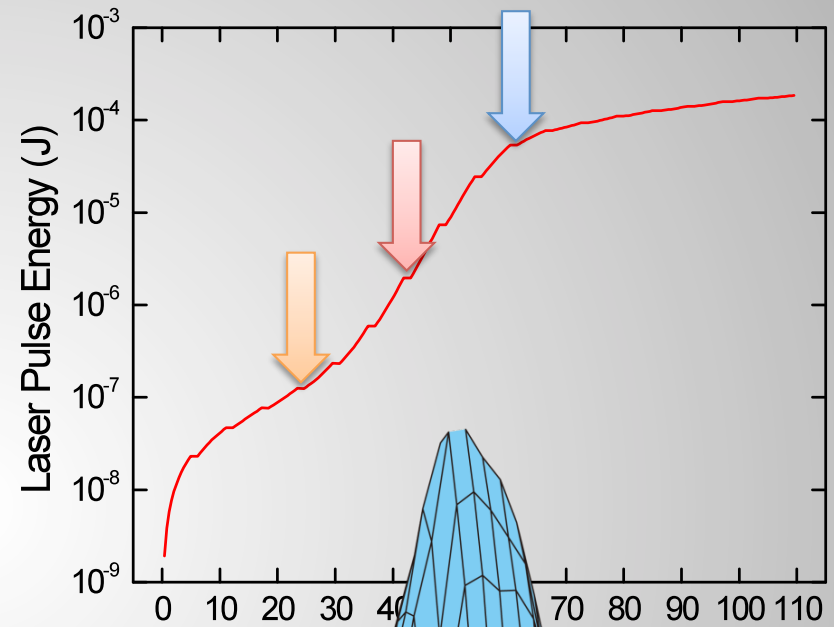
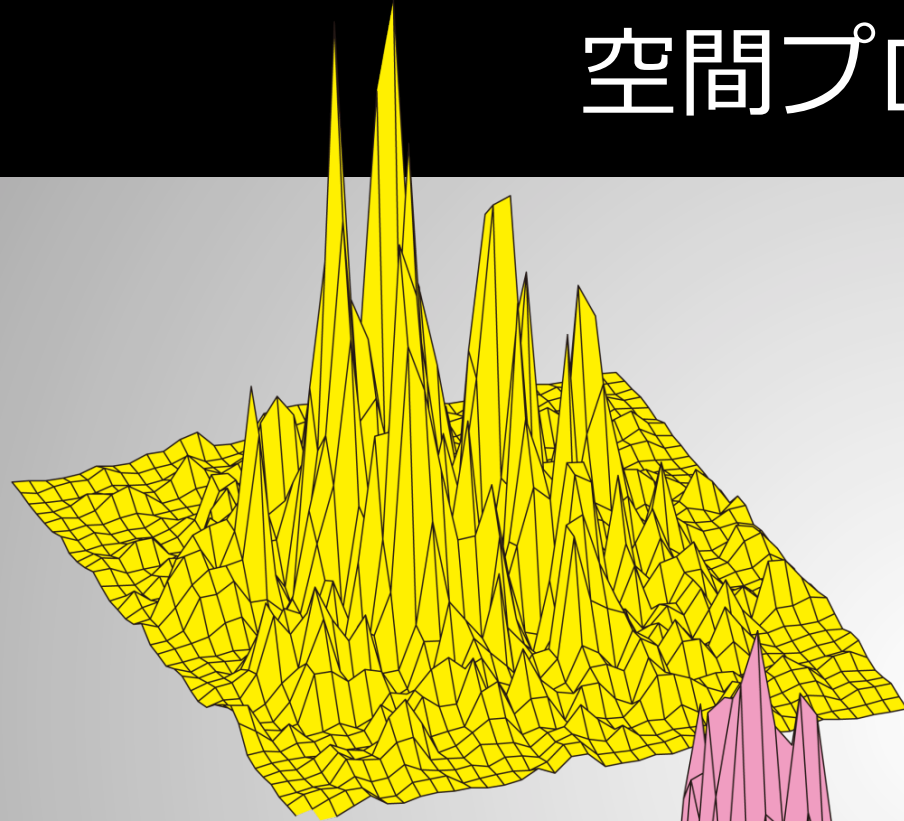
スペクトルと時間構造

$$2.35/\sigma_{\omega} = 0.38 \text{ fsec}$$

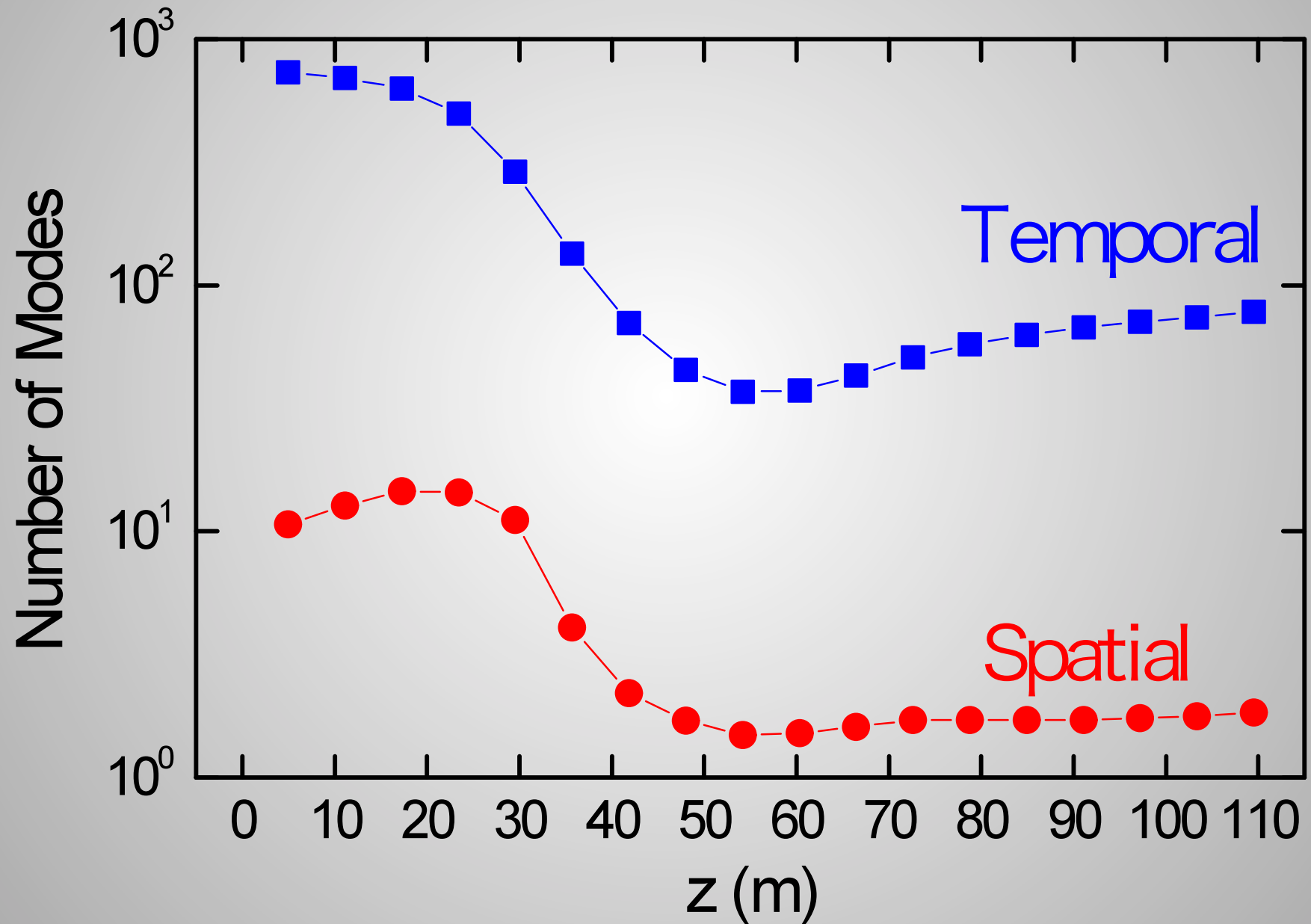
$$2.35\hbar/\sigma_t = 0.18 \text{ eV}$$



空間プロファイル



コヒーレンス



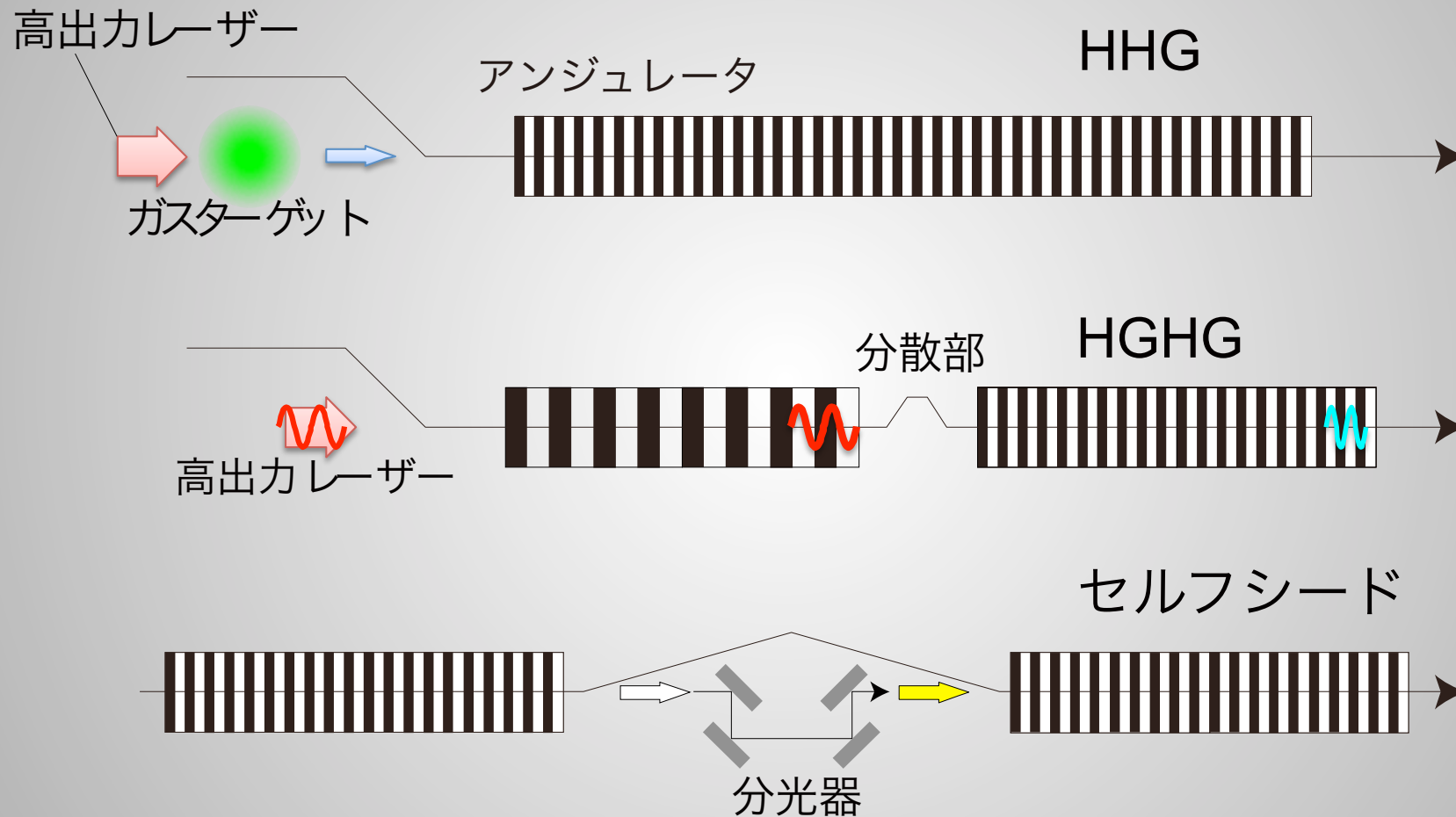
Outline

- レーザー発振の定性的解釈
- 1次元FEL理論
- FELにおける回折効果
- SASE型FEL
- シード型FEL

シード型FELとは？

- FELにおけるシード光
 - 共振器型FEL:(モード選択された)自発放射光
 - SASE型FEL：自発放射光
 - ショットノイズ起源の影響
 - 光ガイディングにより空間的にはコヒーレント
 - 時間的にマルチモード(不完全な時間コヒーレンス)
 - シード型FEL:コヒーレント光(通常はレーザー)
 - 時間・空間的に完全にコヒーレント(シングルモード)
 - “コヒーレントシード”型FEL

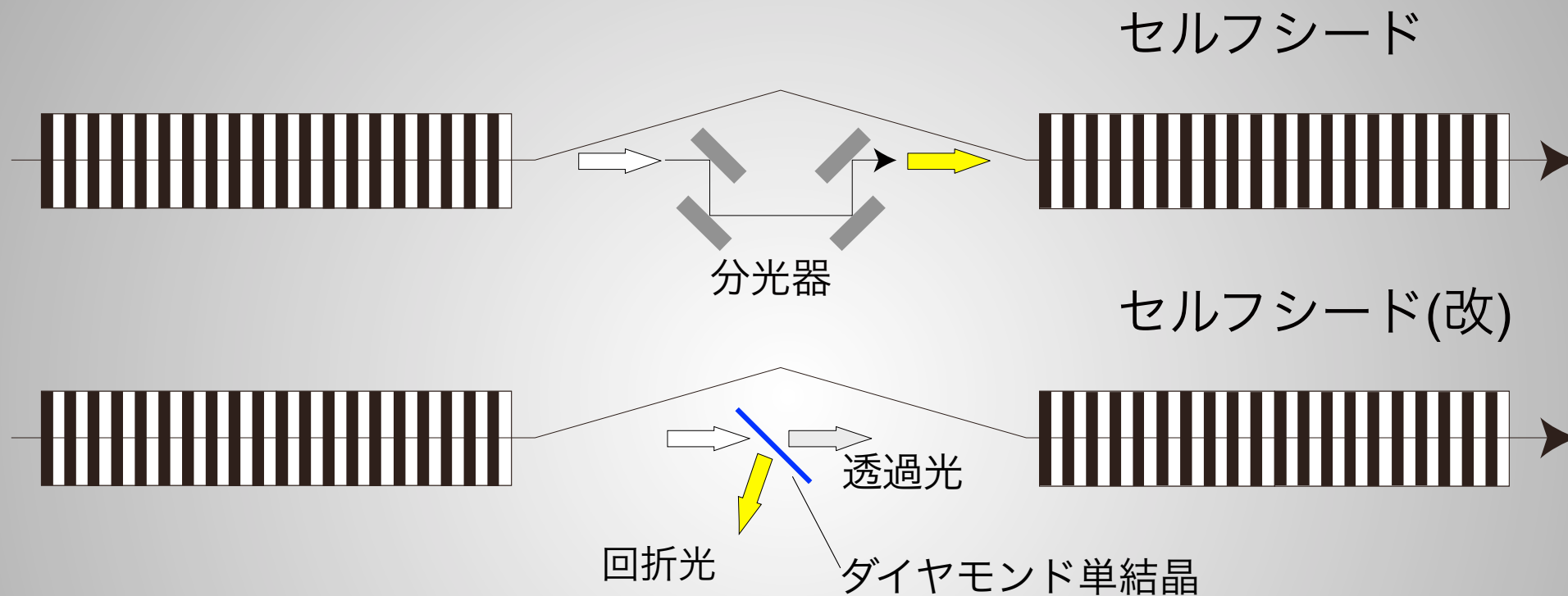
シート型FELの主要な形式



各種シード方式の特長

- HHG & HGHG
 - いずれも外部からのレーザー光を利用
 - 高調波による短波長化
 - ▶ ガスとの相互作用(HHG)
 - ▶ マイクロバンチの高次成分(HGHG)
 - 電子ビームとの時間同期と短波長化が課題
 - セルフシード
 - SASE光を分光し、シード光として利用
 - 時間同期・短波長化への制限無し
 - ただし、非常に長いシケイン(~30 m)が必要
- 改良型セルフシード(透過型結晶の利用)

改良型セルフシード

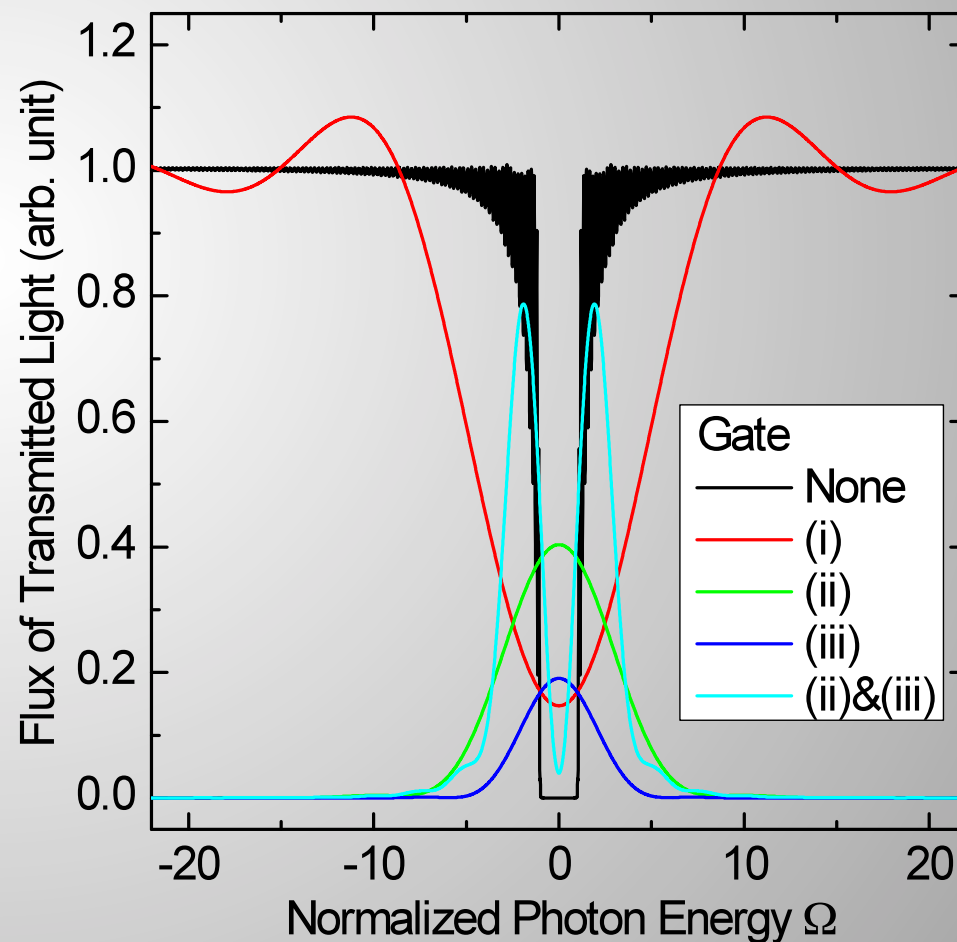
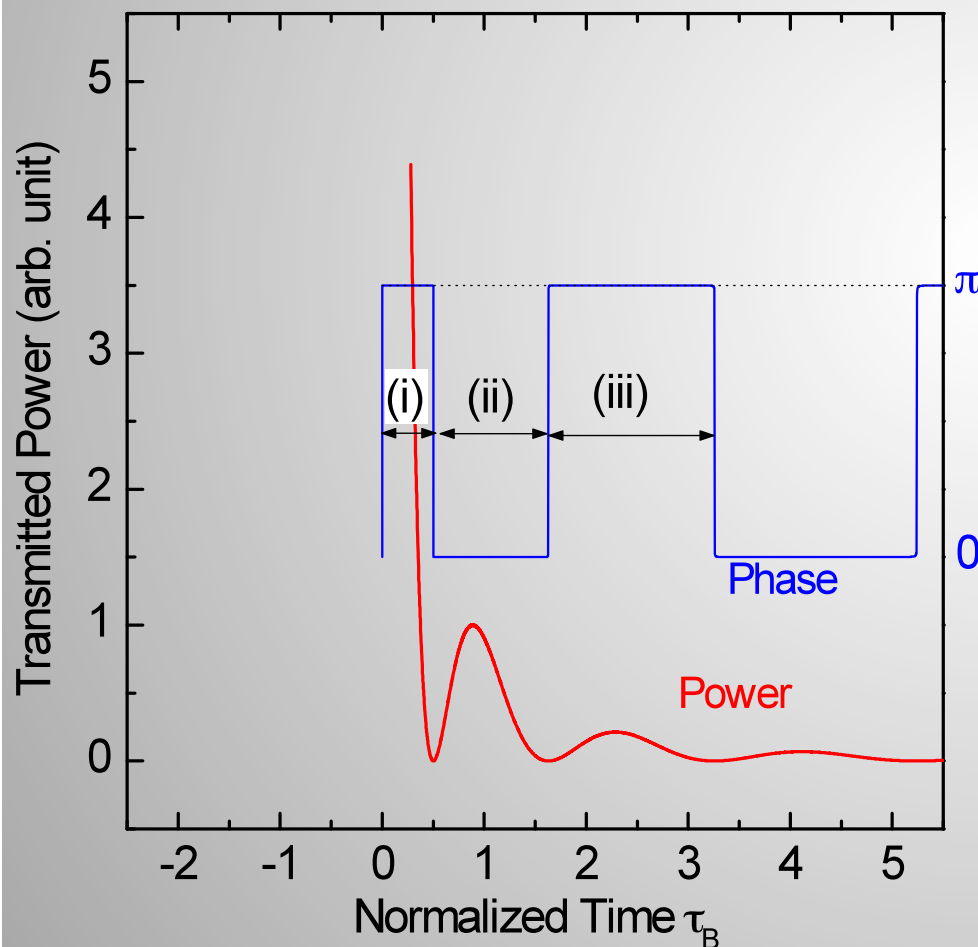


疑問：
透過光に単色成分がふくまれるのか？

透過型セルフシード動作原理

インパルス光入力による
透過光の時間応答

時間窓設定による透過光
スペクトルの変化



シート型FEL光源性能の計算例

