



高精度ビーム診断

2013.7.26.
理化学研究所
前坂 比呂和

- **電子ビームと検出器の相互作用**
 - 電子ビームに付随する電磁場
 - 電子ビームとRF共振空洞との相互作用
 - 電子ビームと物質との相互作用
 - 電子ビームの各種放射
- **SACLAのビーム診断システム**
 - 要求性能とその解決法
- **各機器の詳細**
 - RF空洞型ビーム位置モニタ (RF-BPM)
 - スクリーンモニタ (SCM)
 - 高速差動CT (CT)
 - RFデフレクタ (RFDEF)
 - ストリークカメラ
 - コヒーレント放射検出器
 - ビームロスモニタ・ハローモニタ
 - データ収集

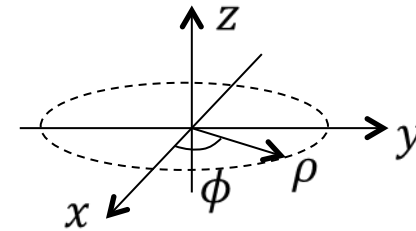
- 電子ビームを診断するには、検出器との間になんらかの相互作用がなければならない
- 電子ビームに付随する電磁場のピックアップ
- 電子ビームがRF共振空洞に誘起するRF電磁場
- 電子ビームと物質との相互作用
 - 電離
 - 制動放射
 - 蛍光
- 電子ビームの放射
 - 遷移放射
 - チェレンコフ放射
 - シンクロトロン放射
 - それらのコヒーレントな放射

- MKSA単位を使う
- マクスウェル方程式 (真空中)

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H} \\ \epsilon_0 \mu_0 c^2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J} \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

- 原則として円柱座標を使う
- (ρ, ϕ, z)



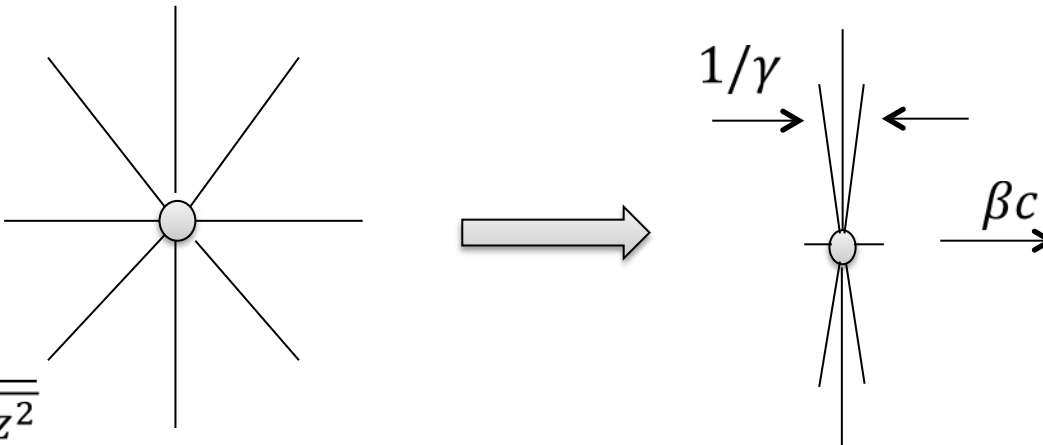
$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{A_\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \\ \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \\ \frac{\partial A_\phi}{\partial \rho} + \frac{A_\phi}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

$$\nabla \Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

- 静止した点電荷からは等方的に電気力線が出ている
- ブーストすると電場が横方向に集中し、 $1/\gamma$ の幅になる



$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

- 4元座標
 - $x^\alpha = (ct, x, y, z)$
 - ミンコフスキー空間
- ある慣性系 S と z 方向に速度 βc で進む慣性系 S' を考える
 - 両慣性系の原点は $x^0 = x'^0 = 0$ のときに一致

- ローレンツ変換

$$\begin{aligned}
 x'^0 &= \gamma(x^0 - \beta x^3) & \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\
 x'^1 &= x^1 \\
 x'^2 &= x^2 \\
 x'^3 &= \gamma(x^3 - \beta x^0) & x'^\alpha &= \xi'^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3)
 \end{aligned}$$

- 変換性

- スカラー: $\Phi'(x') = \Phi(x)$
- 反変ベクトル: $A'^\alpha(x') = \frac{\partial \xi'^\alpha}{\partial x^\beta} A^\beta(x)$
- 共変ベクトル: $A'_\alpha(x') = \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x'^\alpha} A_\beta(x)$
- 2階反変テンソル: $F'^{\alpha\beta}(x') = \frac{\partial \xi'^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial \xi'^\beta}{\partial x^\delta} F^{\gamma\delta}(x)$
- 2階共変テンソル: $F'_{\alpha\beta}(x') = \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial \xi^\delta}{\partial x'^\beta} F_{\gamma\delta}(x)$

縮約記法を使用

$$\sum_{\beta=0}^3 \frac{\partial \xi'^\alpha}{\partial x^\beta} A^\beta(x) \rightarrow \frac{\partial \xi'^\alpha}{\partial x^\beta} A^\beta(x)$$

- ベクトルポテンシャル \mathbf{A}

$$-\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

- 4元ポテンシャル A^α

$$\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

$$-A^\alpha = \left(\frac{\Phi}{c}, \mathbf{A} \right)$$

- 電磁場テンソル

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$-F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$$

– 電磁場はミンコフスキー空間ではテンソル量

- マクスウェル方程式

$$-\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0$$

$$-\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \mu_0 J^\beta \quad J^\alpha = (c\rho, \mathbf{J})$$

- ローレンツブースト (z 方向)
- 4元ポテンシャル

$$- A'^0 = \Phi'/c = \gamma(A^0 - \beta A^3) = \gamma(\Phi/c - \beta A^3)$$

$$- A'^1 = A^1$$

$$- A'^2 = A^2$$

$$- A'^3 = \gamma(A^3 - \beta A^0) = \gamma(A^3 - \beta \Phi/c)$$

ベクトルのブーストでは
 t 成分と z 成分が変化する

- 電磁場 (デカルト座標)

$$- E'_x = \gamma(E_x - \beta c B_y) \quad B'_x = \gamma(B_x + \beta E_y/c)$$

$$- E'_y = \gamma(E_y + \beta c B_x) \quad B'_y = \gamma(B_y - \beta E_x/c)$$

$$- E'_z = E_z \quad B'_z = B_z$$

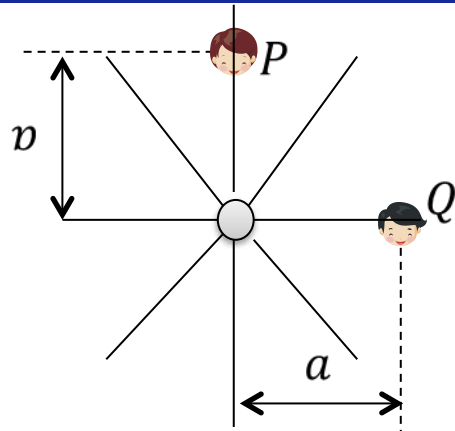
- 電磁場 (円柱座標)

$$- E'_\rho = \gamma(E_\rho - \beta c B_\phi) \quad B'_\rho = \gamma(B_\rho + \beta E_\phi/c)$$

$$- E'_\phi = \gamma(E_\phi + \beta c B_\rho) \quad B'_\phi = \gamma(B_\phi - \beta E_\rho/c)$$

$$- E'_z = E_z \quad B'_z = B_z$$

電磁場のブースト
では $(x, y), (\rho, \phi)$
成分が変化する



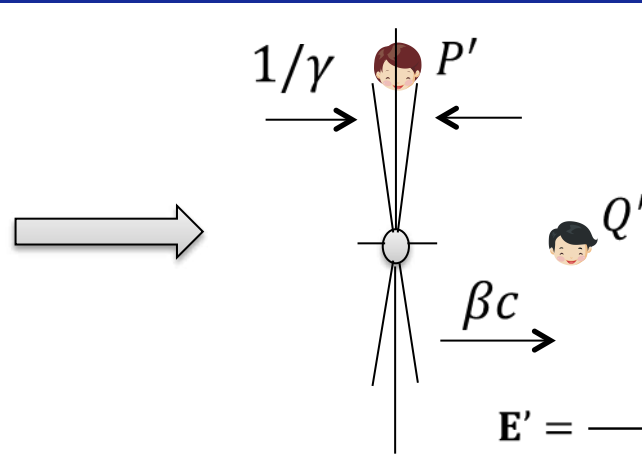
$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

P の電場

$$E_\rho = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

Q の電場

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$



$t' = 0$ のとき
P' の電場

$$E'_\rho = \frac{\gamma q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

Q' の電場

$$E'_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \gamma^2 a}$$

P' の磁場

$$B'_\phi = -\frac{\beta\gamma c \mu_0 q}{4\pi a^2}$$

$$\mathbf{E}' = \frac{\gamma q}{4\pi\epsilon_0(\rho'^2 + \gamma^2(z' + \beta ct')^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} \rho' \\ 0 \\ z' + \beta ct' \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}' = \frac{-\beta\gamma c \mu_0 q \rho'}{4\pi(\rho'^2 + \gamma^2(z' + \beta ct')^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

P' が大きな電場を感じる時間

$$\beta\gamma c \Delta t \approx a \Rightarrow \Delta t \approx \frac{a}{\beta\gamma c}$$

距離に換算して

$$\Delta z \approx \frac{a}{\gamma}$$

- 横方向電場が γ 倍
- 縦方向電場が $1/\gamma^2$
- 電場の幅が $1/\gamma$
- ϕ 方向磁場が出現

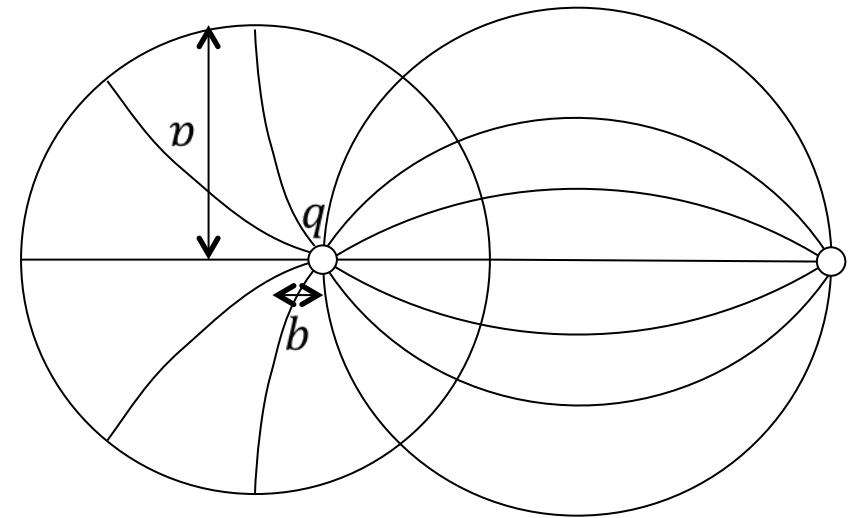
- 鏡像法により簡単に解ける
- ポテンシャル

$$\Phi = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{b^2\rho^2 - 2b^3\rho \cos\phi + b^4}{b^2\rho^2 - 2a^2b\rho \cos\phi + a^4}$$

- 表面電荷

$$\sigma = -\frac{\lambda}{2\pi a} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 - 2ab \cos\phi + b^2}$$

$$= -\frac{\lambda}{2\pi a} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^n \cos n\phi \right] \quad (\text{フーリエ級数の公式})$$



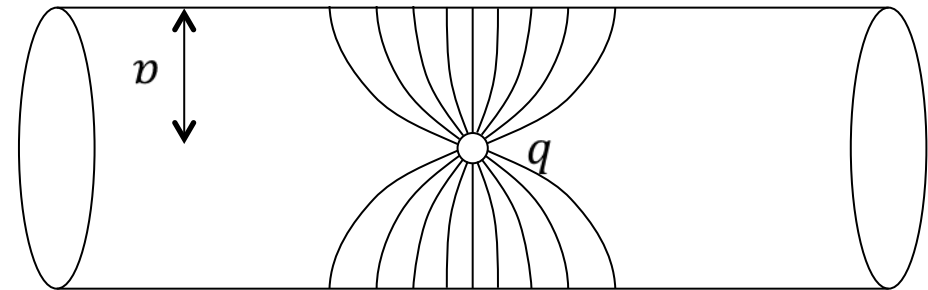
- 表面電荷をピックアップすればいろいろな情報が得られる
 - 0次モーメント ($n = 0$) → 電流・電荷量
 - 1次モーメント ($n = 1$) → ビーム位置
 - 2次モーメント ($n = 2$) → ビームの扁平率
- 電場

$$E_\rho = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{a^2 - b^2}{\rho^2 - 2b\rho \cos\phi + b^2} \cdot \frac{(a^2 + b^2)\rho - b(\rho^2 + a^2) \cos\phi}{b^2\rho^2 - 2a^2b\rho \cos\phi + a^4}$$

$$E_\phi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{a^2 - b^2}{\rho^2 - 2b\rho \cos\phi + b^2} \cdot \frac{(a^2 - \rho^2)b \sin\phi}{b^2\rho^2 - 2a^2b\rho \cos\phi + a^4}$$

$$E_z = 0$$

- 電荷が原点にある場合
- 円筒表面の電荷密度



$$\sigma = -\frac{q}{2\pi a^2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\kappa_n |z|}{a}} \frac{1}{J_1(\kappa_n)}$$

κ_n : 0次ベッセル関数の n 番目の零点

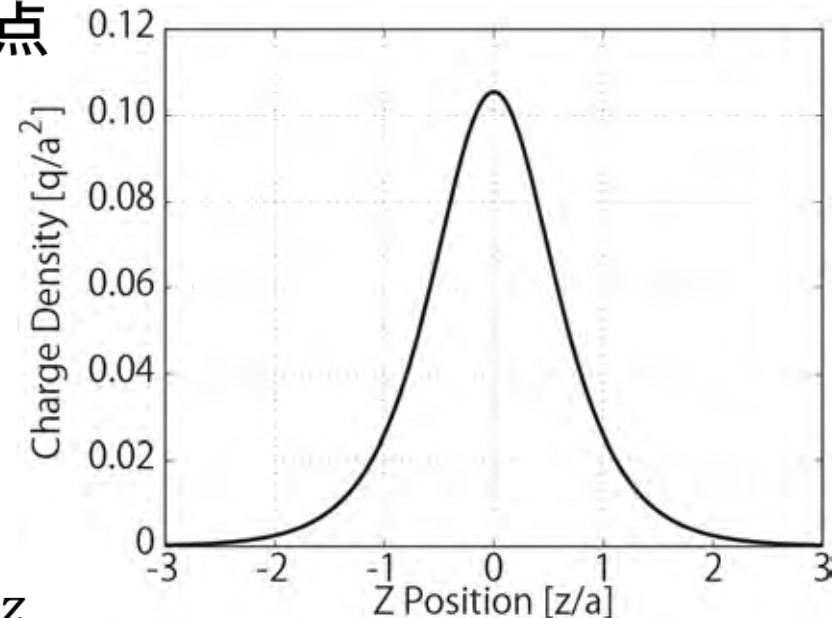
J_1 : 1次ベッセル関数

– 無限級数でしか表せない

- 電場

$$E_\rho = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\frac{\kappa_n \rho}{a}\right)}{J_1^2(\kappa_n)} e^{-\frac{\kappa_n |z|}{a}}$$

$$E_z = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\kappa_n \rho}{a}\right)}{J_1^2(\kappa_n)} e^{-\frac{\kappa_n |z|}{a}} \text{sgn } z$$



- 電場は円筒の半径程度の広がり
- 相対論的速度で飛行する電子の電場は $1/\gamma$ に縮む

- 例
 - 円筒の半径 $a = 10 \text{ mm}$
 - 電子ビームエネルギー 1 GeV
- 長さの単位で $\frac{a}{\gamma} \simeq 5 \text{ } \mu\text{m}$
- 時間換算で $\frac{a}{\beta\gamma c} \simeq 17 \text{ fs}$
- SACLAの電子ビームバンチ長 30 fs より短いので、円筒内電場や表面電荷のひろがりは電子ビームのバンチ長とほぼ同じと考えてよい

- 電荷が原点からずれた場合
- 円筒表面の電荷密度

$$\sigma = -\frac{q}{2\pi a^2} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos m\phi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_m\left(\frac{\kappa_{m,n}b}{a}\right)}{J_{m+1}(\kappa_{m,n})} e^{-\frac{\kappa_{m,n}|z|}{a}}$$

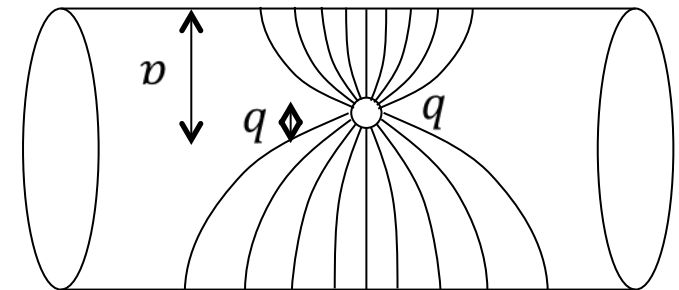
$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1 & (m = 0) \\ 2 & (m > 0) \end{cases}$$

$\kappa_{m,n}$: m 次ベッセル関数の n 番目の零点

J_m : m 次ベッセル関数

- これを z で積分すると

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma dz &= -\frac{q}{\pi a} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos m\phi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_m\left(\frac{\kappa_{m,n}b}{a}\right)}{\kappa_{m,n}J_{m+1}(\kappa_{m,n})} \\ &= -\frac{q}{2\pi a} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^m \cos m\phi \right] \end{aligned}$$



数値計算によると

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_m(\kappa_{m,n}x)}{\kappa_{m,n}J_{m+1}(\kappa_{m,n})} = \frac{x^m}{2}$$

になるようだ

- これは線電荷の場合と同じ結果

- 電子ビームの加速
 - 通常の加速管
- 電子ビームの横方向加速
 - RFデフレクタによるビームの時間構造測定
- 電子ビームがRF共振空洞に誘起する電磁場
 - RF共振空洞に電子ビームが通過するとさまざまな共振モードのRF電磁場が誘起される
- このRF電磁場のビーム診断への応用
 - RF空洞型BPMによるビーム位置測定
 - 電子ビームの到達時間測定
- ここでは、電子ビームがRF空洞に誘起する電磁場について、その計算方法を考える

- RF空洞の形状（境界条件）によって共振モードと共振周波数が決まる
- モードは無限に存在
- 電流・電荷のない場合のマクスウェル方程式から出発する

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

4番目の方程式のrotationをとる

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

\mathbf{E} は時間に正弦的に振る舞うとすると

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_a e^{j\omega_a t}$$

とおくことができる。これを代入して

$$\nabla^2 \mathbf{E}_a + k_a^2 \mathbf{E}_a = 0$$

$$\omega_a = ck_a$$

同様に

$$\nabla^2 \mathbf{B}_a + k_a^2 \mathbf{B}_a = 0$$

これらは

$$\nabla \times \mathbf{E}_a = k_a \mathbf{B}_a \quad \nabla \times \mathbf{B}_a = k_a \mathbf{E}_a$$

から出発しても同じ結果となる。したがって、RF共振モードはこの2つの方程式を満たすものと思ってよい

ある連結した閉空間 V を考え、その表面 S, S' にて以下の境界条件を満たすこととする

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_a = 0 \quad \text{and} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_a = 0 \quad \text{on } S$$

・ 電場ショート面

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_a = 0 \quad \text{and} \quad \mathbf{n} \times \mathbf{B}_a = 0 \quad \text{on } S'$$

・ 磁場ショート面

\mathbf{n} は表面の法線ベクトル

規格化条件と直交性

$$\int_V \mathbf{E}_a^2 dv = 1 \quad \int_V \mathbf{E}_a \cdot \mathbf{E}_b dv = 0 \quad (a \neq b)$$

$$\int_V \mathbf{B}_a^2 dv = 1 \quad \int_V \mathbf{B}_a \cdot \mathbf{B}_b dv = 0 \quad (a \neq b)$$

このとき、あるモード $\mathbf{E}_a, \mathbf{B}_a$ の電磁場は

$$\mathbf{E} = f_a(t) \mathbf{E}_a$$

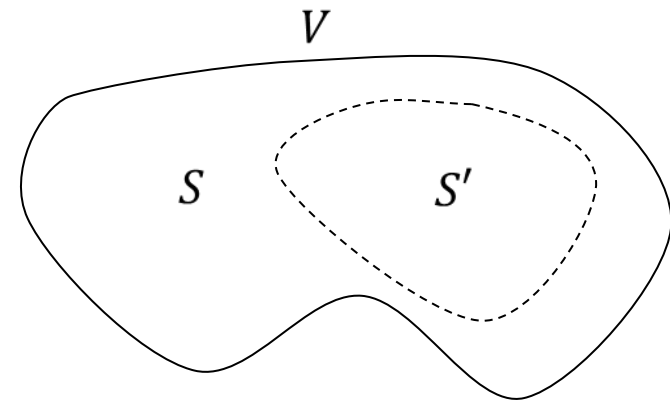
$$\mathbf{B} = g_a(t) \mathbf{B}_a$$

と表せる。このとき、

$$f_a(t) = \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a dv$$

$$g_a(t) = \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_a dv$$

の関係が満たされる。



前ページの電磁場をマクスウェル方程式に代入する前に、電磁場のローテーションについての準備をしておく。単純に

$$\nabla \times \mathbf{E} = f_a \nabla \times \mathbf{E}_a = k_a f_a \mathbf{B}_a$$

としても間違いではないが、あとあとのために別の表記をしておく。まず、

$$\nabla \times \mathbf{E} = F_a \mathbf{B}_a$$

とおき、両辺に \mathbf{B}_a との内積をとって積分すると

$$F_a = \int_V (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{B}_a dv$$

となることがわかる。これを、以下の関係式

$$\nabla \cdot [\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}_a)] = (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}_a) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_a) = k_a \mathbf{B}_a \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - k_a^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a$$

を使って変形すると、

$$F_a = k_a \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a dv + \int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}_a) dv = k_a f_a + \int_{S, S'} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}_a) d\sigma = k_a f_a + \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{B}_a d\sigma$$

よって、

$$\nabla \times \mathbf{E} = \left[k_a f_a + \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{B}_a d\sigma \right] \mathbf{B}_a$$

途中で、ガウスの発散定理とベクトル積の公式

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

および、境界条件を使った。

が得られる。

このように、右辺第2項の表面積分が出てくることわかった。

この表面積分は \mathbf{E} が境界条件を満たしていれば0であるが、有限の電気伝導率をもつ表面や、空洞の入出力ポートを考えるとときに境界条件を満たさない成分がでてくるので、そのような計算の際に重要となる。

$\nabla \times \mathbf{B}$ についても同様に

$$\nabla \times \mathbf{B} = \left[k_a g_a + \int_{S'} (\mathbf{n} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{E}_a d\sigma \right] \mathbf{E}_a$$

マクスウェル方程式

- $$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

から,

$$k_a f_a \mathbf{B}_a + \mathbf{B}_a \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{B}_a d\sigma + \dot{g}_a \mathbf{B}_a = 0$$

が得られる。この両辺に \mathbf{B}_a との内積をとって積分すると,

$$k_a f_a + \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{B}_a d\sigma + \dot{g}_a = 0$$

となる。同様に、マクスウェル方程式

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}$$

から,

$$k_a g_a + \int_{S'} (\mathbf{n} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{E}_a d\sigma - \frac{\dot{f}_a}{c^2} = \mu_0 \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_a dv$$

となる。これらを合わせると

$$\frac{1}{c^2} \ddot{f}_a + k_a^2 f_a = -\frac{d}{dt} \left[\mu_0 \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_a dv - \int_{S'} (\mathbf{n} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{E}_a d\sigma \right] - \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{B}_a d\sigma$$

$$\frac{1}{c^2} \ddot{g}_a + k_a^2 g_a = k_a \left[\mu_0 \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_a dv - \int_{S'} (\mathbf{n} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{E}_a d\sigma \right] - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{B}_a d\sigma$$

これらがRF共振空洞の電磁場の方程式である。

単振動の方程式の右辺に励振や減衰のもととなる項がついている。

$$\mathbf{B} = g_a(t) \mathbf{B}_a$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \left[k_a f_a + \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{B}_a d\sigma \right] \mathbf{B}_a$$

$$\dot{g}_a = \frac{d g_a}{dt}$$

$$\mathbf{E} = f_a(t) \mathbf{E}_a$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \left[k_a g_a + \int_{S'} (\mathbf{n} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{E}_a d\sigma \right] \mathbf{E}_a$$

RF空洞の電磁場の方程式の形から、 f_a, g_a の時間依存性は $e^{j\omega t}$ と考えてよい。そこで、

- $f_a = E_0 e^{j\omega t}$

とおき、時間の1階微分の項は天下りの的に

$$\frac{k_a E_0}{j c Q} e^{j\omega t}$$

に従うものとする。このとき、 f_a の方程式

$$\frac{1}{c^2} \ddot{f}_a + k_a^2 f_a = -\frac{d}{dt} \left[\mu_0 \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_a dv - \int_{S'} (\mathbf{n} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{E}_a d\sigma \right] - \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{B}_a d\sigma$$

は、

$$\left(\omega^2 + \frac{k_a c}{Q} \omega + k_a^2 c^2 \right) E_0 e^{j\omega t} = 0$$

となる。これを満たす ω は、

$$\omega = \pm \omega_a \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} + j \frac{\omega_a}{2Q} \quad \omega_a = c k_a$$

である。 f_a は周波数 $\omega_a \sqrt{1 - 1/4Q^2}$ で振動しながら、時定数 $\omega_a/2Q$ で減衰する。

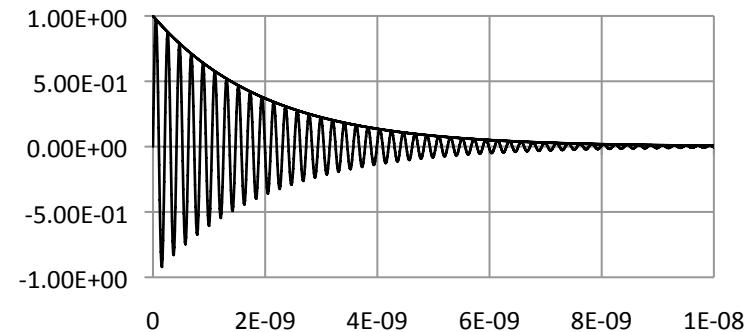
パワーで考えるときは2乗になるので時定数は ω_a/Q となる。

- Q値の意味

$$Q = \frac{\omega_a U}{P}$$

蓄積エネルギー U に ω_a をかけた値を単位時間あたりの損失エネルギー P で割ったもの

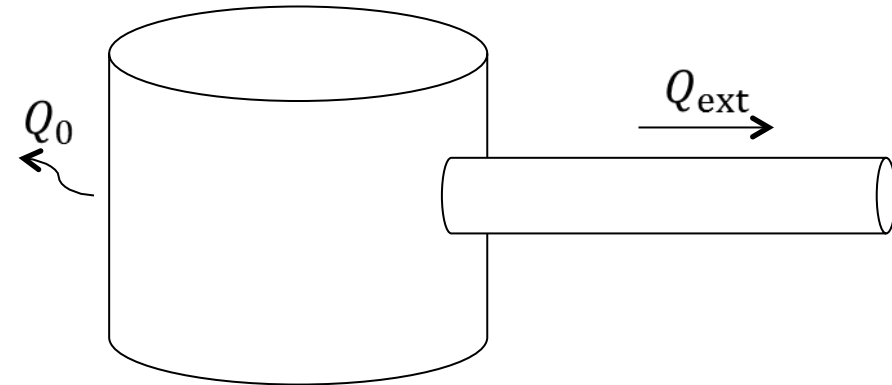
何らかの損失によってRF空洞内のパワーが減衰するとき、そのパワーが $1/e$ になるまでに振動の位相が Q ラジアン回ることができる



- 内部Q値 Q_0 (Unloaded Q factor)
 - 空洞表面のジュール損失などによって空洞内で消費されるパワーに対応
- 外部Q値 Q_{ext} (External Q factor)
 - 空洞の入出力ポートから出て行くパワーに対応
- 負荷Q値 Q_L (Loaded Q factor)
 - 空洞の全損失に対応
- 各Q値の関係
 - 単ポート空洞

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{\text{ext}}}$$
 - 複数ポート空洞

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_0} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{Q_{\text{ext},n}}$$
- これらのQ値はモードごとに異なる
- Q値の便利な点
 - 損失の要因はいろいろあっても、要因ごとのQ値によって簡単に表現できる
 - 損失要因ごとの比較がしやすい



- 入出力ポートから出ていくRFパワー P_{ext}

$$P_{\text{ext}}(t) = \frac{\omega_a U(t)}{Q_{\text{ext}}}$$

- 空洞にエネルギー U_0 が蓄積されている状態から減衰振動する場合

$$P_{\text{ext}}(t) = \frac{\omega_a U_0}{Q_{\text{ext}}} e^{-\frac{\omega_a t}{Q_L}}$$

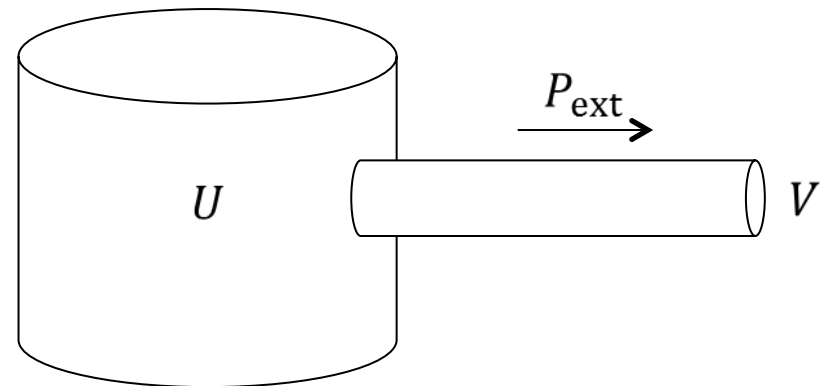
- ポートが特性インピーダンス Z_0 の伝送線路に接続されている場合に得られる電圧

$$V(t) = \sqrt{Z_0 P_{\text{ext}}(t)} = \sqrt{\frac{\omega_a U_0 Z_0}{Q_{\text{ext}}}} e^{-\frac{\omega_a t}{2Q_L}}$$

- ピークパワーとピーク電圧 ($t = 0$)

$$P_{\text{ext}}(0) = \frac{\omega_a U_0}{Q_{\text{ext}}}$$

$$V(0) = \sqrt{\frac{\omega_a U_0 Z_0}{Q_{\text{ext}}}}$$



- RF空洞の電磁場の方程式

$$\frac{1}{c^2} \ddot{g}_a + k_a^2 g_a = k_a \left[\mu_0 \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_a d\nu - \int_{S'} (\mathbf{n} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{E}_a d\sigma \right] - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{B}_a d\sigma$$

- の右辺第3項 (S の面積分) を考えればよい
- 金属表面付近の電場

$$\mathbf{E} = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega}{2\mu\sigma}} \mathbf{B} \times \mathbf{n} \quad \text{導出はテキスト参照}$$

- S の面積分は

$$-\frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{B}_a d\sigma = -\frac{1+j}{c^2} \sqrt{\frac{\omega_a}{2\mu\sigma}} g_a \int_S |\mathbf{B}_a|^2 d\sigma$$

- となり, 電磁場の方程式は以下のようなになる

$$\ddot{g}_a + (1 + j) \sqrt{\frac{\omega_a}{2\mu\sigma}} g_a \int_S |\mathbf{B}_a|^2 d\sigma + \omega_a^2 g_a = 0$$

- これを解いて複素周波数を求め, Q 値を算出すると以下のようなになる

$$\frac{1}{Q} = \frac{2\text{Im}(\omega)}{\omega_a} \simeq \frac{\delta}{2} \int_S |\mathbf{B}_a|^2 d\sigma \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} \quad (\text{Skin depth})$$

共振モードの微分方程式

- $\nabla^2 \mathbf{E}_a + k_a^2 \mathbf{E}_a = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{B}_a + k_a^2 \mathbf{B}_a = 0$

をピルボックス空洞に適用して解を求める

– 半径を b , 高さを L とする

円柱座標を使って変数分離すれば解くことができる

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}_a}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{E}_a}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \mathbf{E}_a}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}_a}{\partial z^2} + k_a^2 \mathbf{E}_a = 0$$

ここで

$$E_i = R_i(\rho)\Phi_i(\phi)Z_i(z) \quad i = \rho, \phi, z$$

と変数分離すると以下ようになる

$$\frac{1}{R_i} \frac{\partial^2 R_i}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho R_i} \frac{\partial R_i}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2 \Phi_i} \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial \phi^2} + \frac{1}{Z_i} \frac{\partial^2 Z_i}{\partial z^2} + k_a^2 = 0$$

これが常に成り立つためには

$$\frac{\partial^2 R_i}{\partial (k\rho)^2} + \frac{1}{k\rho} \frac{\partial R_i}{\partial (k\rho)} + \left(1 - \frac{n^2}{(k\rho)^2}\right) R_i = 0 \Rightarrow R_i(\rho) = A_{i,n} J_n(k\rho)$$

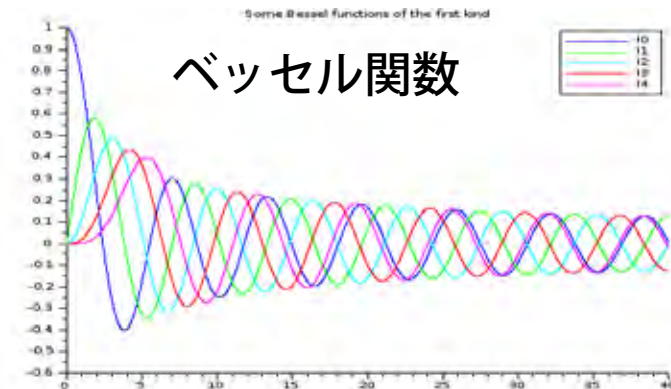
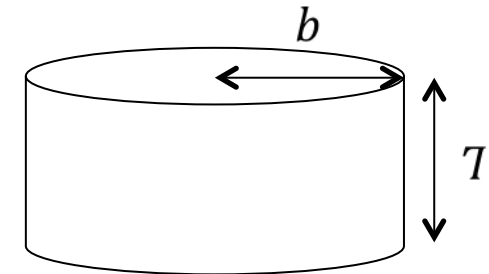
$$k^2 = k_a^2 - k_l^2$$

$$\frac{1}{\Phi_i} \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial \phi^2} = -n^2 \Rightarrow \Phi_i(\phi) = C_{i,n} \cos n\phi + D_{i,n} \sin n\phi$$

$$\frac{1}{Z_i} \frac{\partial^2 Z_i}{\partial z^2} = -k_l^2 \Rightarrow Z_i(z) = F_{i,l} \cos k_l z + G_{i,l} \sin k_l z$$

最後に以下の規格化条件も適用

$$\int_V \mathbf{E}_a^2 dv = 1, \quad \int_V \mathbf{B}_a^2 dv = 1$$



- 境界条件

- $\rho = b$ にて, $E_\phi = E_z = 0$

$$z = 0, L \text{ にて, } E_\rho = E_\phi = 0$$

- 解

$$E_\rho = -\frac{\alpha_{n,m,l} \frac{l\pi}{L}}{\frac{\kappa_{n,m}}{b}} J'_n\left(\frac{\kappa_{n,m}}{b} \rho\right) \cos n\phi \sin\left(\frac{l\pi}{L} z\right) \quad B_\rho = -\frac{\alpha_{n,m,l} n \sqrt{\left(\frac{\kappa_{n,m}}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{L}\right)^2}}{\left(\frac{\kappa_{n,m}}{b}\right)^2 \rho} J_n\left(\frac{\kappa_{n,m}}{b} \rho\right) \sin n\phi \cos\left(\frac{l\pi}{L} z\right)$$

$$E_\phi = \frac{\alpha_{n,m,l} n \frac{l\pi}{L}}{\left(\frac{\kappa_{n,m}}{b}\right)^2 \rho} J_n\left(\frac{\kappa_{n,m}}{b} \rho\right) \sin n\phi \sin\left(\frac{l\pi}{L} z\right) \quad B_\phi = -\frac{\alpha_{n,m,l} \sqrt{\left(\frac{\kappa_{n,m}}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{L}\right)^2}}{\frac{\kappa_{n,m}}{b}} J'_n\left(\frac{\kappa_{n,m}}{b} \rho\right) \cos n\phi \cos\left(\frac{l\pi}{L} z\right)$$

$$E_z = \alpha_{n,m,l} J_n\left(\frac{\kappa_{n,m}}{b} \rho\right) \cos n\phi \cos\left(\frac{l\pi}{L} z\right) \quad B_z = 0$$

- 共振周波数

$$f_{n,m,l} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\kappa_{n,m}}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{L}\right)^2}$$

$\kappa_{n,m}$: $J_n(x) = 0$ の m 番目の根 (零点)

- 規格化定数

$$\alpha_{n,m,l} = \frac{\kappa_{n,m}}{b^2 |J'_n(\kappa_{n,m})|} \sqrt{\frac{2\varepsilon_n}{\pi L \left[\left(\frac{\kappa_{n,m}}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{L}\right)^2 \right]}}$$

TM: Transverse Magnetic
TM_{nml} モードと表記

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ 2 & (n > 0) \end{cases}$$

- 境界条件

- $\rho = b$ にて, $B_\rho = 0$

$$z = 0, L \text{ にて, } B_z = 0$$

- 解

$$E_\rho = -\frac{\beta_{n,m,l} n \sqrt{\left(\frac{\kappa'_{n,m}}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{L}\right)^2}}{\left(\frac{\kappa'_{n,m}}{b}\right)^2 \rho} J_n\left(\frac{\kappa'_{n,m}}{b} \rho\right) \sin n\phi \sin\left(\frac{l\pi}{L} z\right)$$

$$B_\rho = \frac{\beta_{n,m,l} \frac{l\pi}{L}}{k'} J'_n(k' \rho) \cos n\phi \cos\left(\frac{l\pi}{L} z\right)$$

$$E_\phi = -\frac{\beta_{n,m,l} \sqrt{\left(\frac{\kappa'_{n,m}}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{L}\right)^2}}{\frac{\kappa'_{n,m}}{b}} J'_n\left(\frac{\kappa'_{n,m}}{b} \rho\right) \cos n\phi \sin\left(\frac{l\pi}{L} z\right)$$

$$B_\phi = -\frac{\beta_{n,m,l} n \frac{l\pi}{L}}{k'^2 \rho} J_n(k' \rho) \sin n\phi \cos\left(\frac{l\pi}{L} z\right)$$

$$E_z = 0$$

$$B_z = \beta_{n,m,l} J_n(k' \rho) \cos n\phi \sin\left(\frac{l\pi}{L} z\right)$$

- 共振周波数

$$f_{n,m,l} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\kappa'_{n,m}}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{L}\right)^2}$$

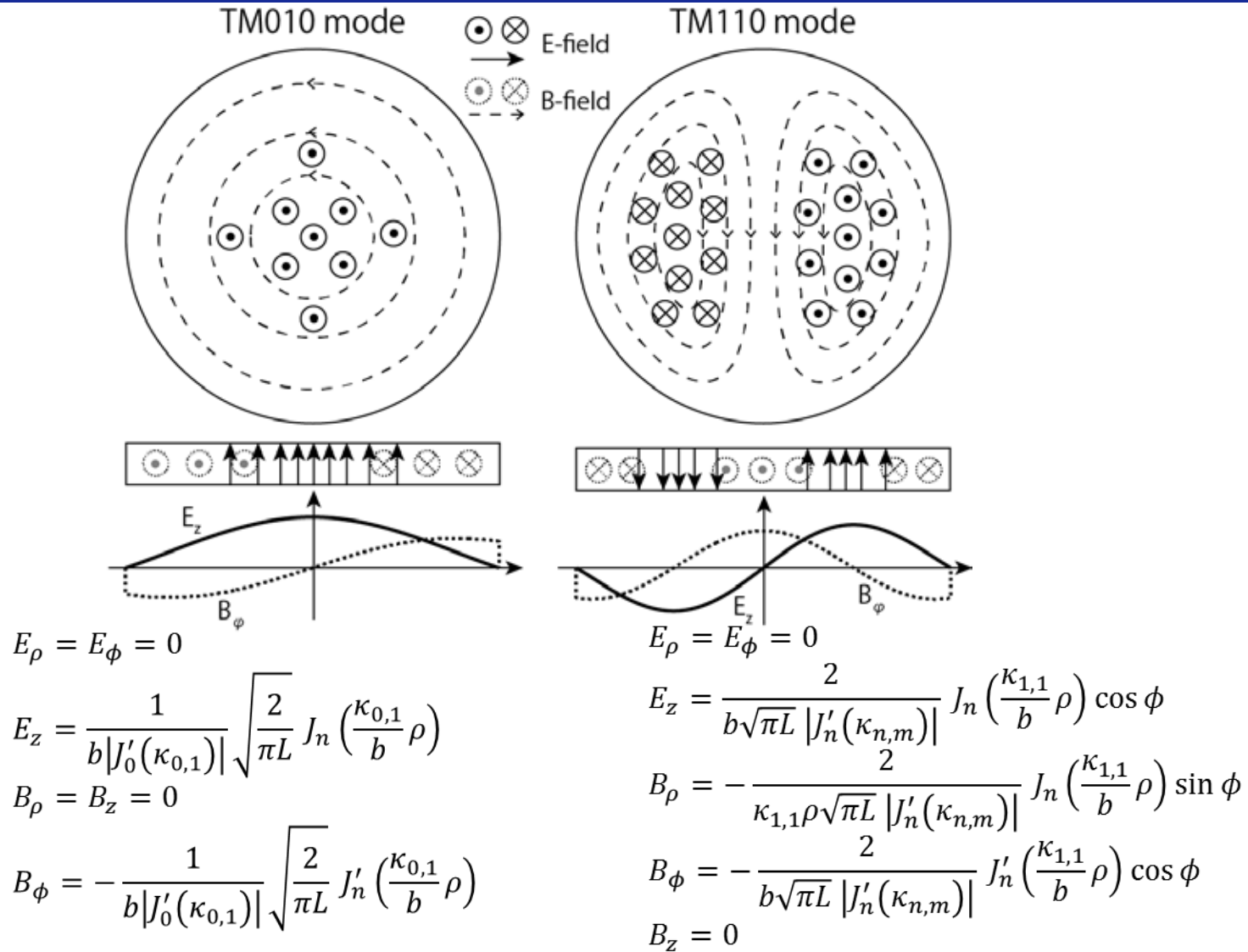
$\kappa'_{n,m}$: $J'_n(x) = 0$ の m 番目の根 (零点)

- 規格化定数

$$\beta_{n,m,l} = \frac{\kappa'_{n,m}{}^2}{b^2 |J_n(\kappa'_{n,m})|} \sqrt{\frac{2\varepsilon_n}{\pi(\kappa'_{n,m}{}^2 - n^2)L \left[\left(\frac{\kappa'_{n,m}}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{L}\right)^2 \right]}}$$

TE: Transverse Electric
TE_{nml} モードと表記

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ 2 & (n > 0) \end{cases}$$



軸付近で電場が一定
ビーム電荷量, 到達時間の測定に使用

軸付近で電場が線形に変化
ビーム位置測定に使用

電子ビームがRF空洞を通過する際、電子ビームが電流源となって電磁場を生み出すので、RF空洞の電磁場の方程式のうち $\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_a dv$ の項だけ考えればよい

$$\frac{1}{c^2} \ddot{g}_a + k_a^2 g_a = k_a \mu_0 \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_a dv$$

加速器においてはピルボックス空洞のTM010モードやTM110モードのような、電場強度がzに依存しない場合を考えることが多い

電荷 q の点電荷が速度 βc でz方向に空洞を通過するとき、電流は

$$I = \int_V \mathbf{J} dv = \beta c q$$

となり、電磁場の方程式の右辺の積分は、

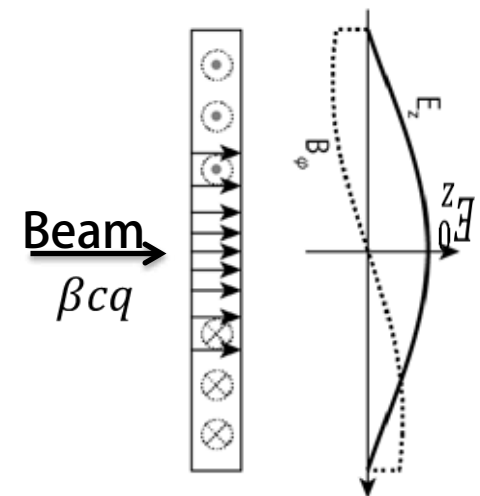
$$\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_a dv = \beta c q E_z^0$$

– 電荷が通過する場所での \mathbf{E}_a のz成分を E_z^0 とおいたとなる。たとえば、TM010モードのとき

$$E_z^0 = \frac{1}{b J_1(\kappa_{0,1})} \sqrt{\frac{2}{\pi L}}$$

となる。このとき、電磁場の方程式は以下のようなになる。

$$\ddot{g}_a + \omega_a^2 g_a = \omega_a \beta q E_z^0 / \epsilon_0 \qquad \omega_a = c k_a, \quad \epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$$



- 電磁場の方程式

- $$\ddot{g}_a + \omega_a^2 g_a = \frac{\omega_a \beta q E_z^0}{\epsilon_0}$$

- 一般解

$$g_a(t) = A \cos \omega_a t + B \sin \omega_a t + \frac{\beta q E_z^0}{\epsilon_0 \omega_a}$$

- 初期条件

$$g_a(0) = \dot{g}_a(0) = 0 \quad t = 0 \text{ にて空腔内には電磁場が存在しない}$$

- 解

$$g_a(t) = \frac{\beta q E_z^0}{\epsilon_0 \omega_a} (1 - \cos \omega_a t)$$

$$f_a(t) = -\frac{\dot{g}_a(t)}{k_a} = -\frac{\beta c q E_z^0}{\epsilon_0 \omega_a} \sin \omega_a t$$

$$k_a f_a + \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{B}_a d\sigma + \dot{g}_a = 0$$

- 空腔の厚さが L のとき, ビーム通過直後の f_a, g_a は,

$$f_a\left(\frac{L}{\beta c}\right) = -\frac{\beta c q E_z^0}{\epsilon_0 \omega_a} \sin \frac{\omega_a L}{\beta c}$$

$$g_a\left(\frac{L}{\beta c}\right) = \frac{\beta q E_z^0}{\epsilon_0 \omega_a} \left(1 - \cos \frac{\omega_a L}{\beta c}\right)$$

- 電磁場のエネルギー

$$U\left(\frac{L}{\beta c}\right) = \int_V \left(\frac{\epsilon_0 |\mathbf{E}|^2}{2} + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu_0}\right) dv = \left(\frac{\epsilon_0 f_a^2}{2} + \frac{g_a^2}{2\mu_0}\right) = \frac{\beta^2 c^2 q^2 (E_z^0)^2}{\epsilon_0 \omega_a^2} \left(1 - \cos \frac{\omega_a L}{\beta c}\right)$$

- 誘起されるエネルギーを求める際に毎回電磁場の方程式を解くのは不便
- シャントインピーダンスを定義すると誘起されるエネルギーが簡単に計算できる

$$R_{sh} = \frac{V_{peak}^2}{P_{loss}}$$

$$V_{peak} = \max \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

$$P_{loss} = \frac{\omega_a U'}{Q}$$

- 誘起されるエネルギーとシャントインピーダンスの関係

$$U = \frac{\omega_a R_{sh}}{4 Q} q^2$$

- 規格化シャントインピーダンス

$$\frac{R_{sh}}{Q} = \frac{V_{peak}^2}{\omega_a U'}$$

- 一般の空洞で成り立つ（証明はテキスト参照）
- 損失の大小に関係なく空洞の形状だけで決まる
- 右辺の各パラメータは電磁場シミュレーションで直接得られる結果のみで表されている

• TM010モードのシャントインピダンス

$$V_{\text{peak}} = \int_{-\frac{L}{2\beta c}}^{\frac{L}{2\beta c}} E_0 E_z^0 \beta c \cos \omega_a t dt = \frac{2E_0 E_z^0 \beta c}{\omega_a} \sin \frac{\omega_a L}{2\beta c}$$

E_0 は電場の振幅

$$U' = \int_V \frac{\epsilon_0 |\mathbf{E}|^2}{2} dv = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}$$

$$\frac{R_{\text{sh}}}{Q} = \frac{V_{\text{peak}}^2}{\omega_a U'} = \frac{8\beta^2 c^2 (E_z^0)^2}{\epsilon_0 \omega_a^3} \sin^2 \frac{\omega_a L}{2\beta c}$$

• 誘起される電磁場のエネルギー

$$U = \frac{\omega_a R_{\text{sh}}}{4 Q} q^2 = \frac{\beta^2 c^2 q^2 (E_z^0)^2}{\epsilon_0 \omega_a^2} \sin^2 \frac{\omega_a L}{2\beta c}$$

• これは、電磁場の方程式から求めたものと一致

$$1 - \cos \frac{\omega_a L}{\beta c} = \sin^2 \frac{\omega_a L}{2\beta c}$$

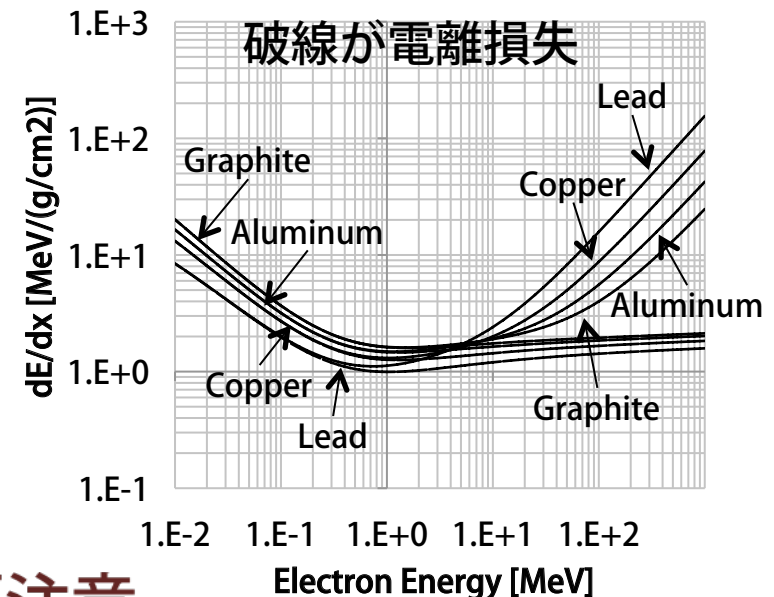
- **電離損失**
 - 物質を構成する分子を電離することによるエネルギー損失
- **制動放射**
 - 電子が原子内の電磁場で曲げられることによる放射
- **電磁シャワー**
 - 制動放射によってできた高エネルギー光子が対生成と制動放射を繰り返して多数の電子・陽電子が発生した状態
- **多重散乱**
 - 電子が物質中で多数の小角散乱を受けてランダムに軌道が曲げられること

● 電離損失の式

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{2\pi r_e^2 m_e c^2 N_A Z}{\beta^2 A} \times \left\{ \ln \left[\frac{\gamma^2 (\gamma + 2) m_e^2 c^4}{2I^2} \right] + F(\gamma) - \delta \right\}$$

- m_e : 電子の静止質量
- r_e : 古典電子半径
- N_A : アボガドロ数
- Z : 原子番号
- A : 原子量
- I : 平均励起エネルギー
- δ : 密度効果補正パラメータ
- x の単位は g/cm^2
 - 密度換算の長さ
- 1 MeV以上の電子では、
1 g/cm^2 あたりおよそ
2 MeVの電離損失
- 10 MeV以上の電子では
制動放射が支配的となるので要注意

物質	平均励起エネルギー I [eV]
グラファイト	78
アルミニウム	166
鉄	286
銅	322
タングステン	727
鉛	823



- 電子が原子の電磁場によって曲げられる際に出す放射 (bremsstrahlung)
- 放射長 X_0 (radiation length)

電子のエネルギーが $1/e$ になるまでの飛行距離

$$\frac{1}{X_0} = \frac{4\alpha r_e^2 N_A}{A} \{Z^2 [L_{rad} - f(Z)] + ZL'_{rad}\}$$

α : 微細構造定数

$$f(Z) = a^2 \left(\frac{1}{1+a^2} + 0.20206 - 0.0369a^2 + 0.0083a^4 - 0.002a^6 \right)$$

$$L_{rad} \approx \ln 184.15 Z^{-\frac{1}{3}} \quad (Z \geq 5)$$

$$L'_{rad} \approx \ln 1194 Z^{-\frac{2}{3}} \quad (Z \geq 5)$$

$$a = \alpha Z$$

物質	放射長 X_0 [g/cm ²]
グラファイト	42.70
アルミニウム	24.01
鉄	13.84
銅	12.86
タングステン	6.76
鉛	6.37

- 臨界エネルギー E_c

$$E_c \approx \frac{610}{Z + 1.24} \text{ [MeV]}$$

電離損失と制動放射損失が等しくなるエネルギー

- 制動放射のエネルギースペクトル

$$\frac{d(\hbar\omega)}{d\eta} \propto \frac{3}{4}\eta^2 - \eta + 1 \quad (E > E_c)$$

$$\eta = \frac{\hbar\omega}{E} \quad (0 < \eta < 1)$$

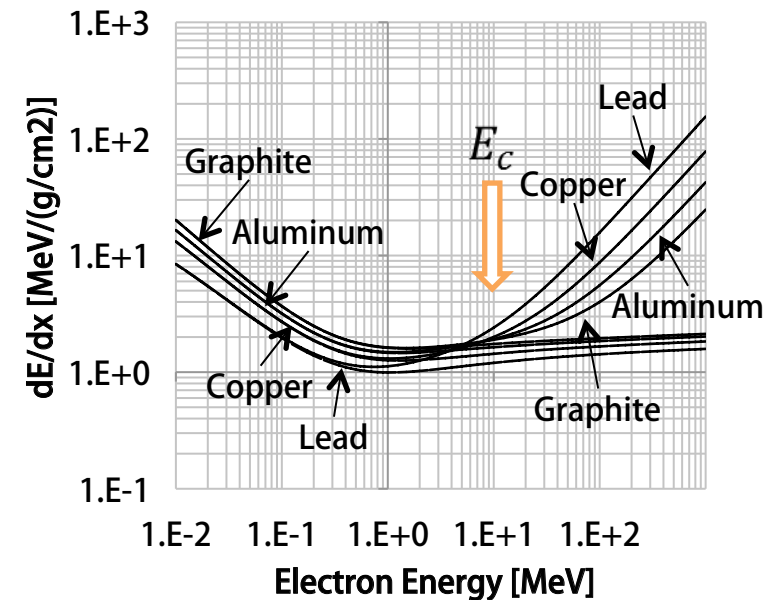
$\hbar\omega$: 制動放射の光子エネルギー

E : 電子のエネルギー

- 光子数スペクトル

$$\frac{dN}{d\eta} \propto \frac{3}{4}\eta - 1 + \frac{1}{\eta}$$

- スペクトルは $\eta \sim 1$ でも有意な値を持っており、電子エネルギーにほぼ等しい光子も放射する



電磁シャワー

- 1 GeV以上の電子になると、制動放射によってエネルギーの高い光子が出て、それが電子・陽電子の対生成をして、さらにそれらが制動放射をして…、というふうに連鎖反応が起こる
- これを電磁シャワー (electromagnetic cascade shower) と呼ぶ
- 電磁シャワーの損失エネルギー

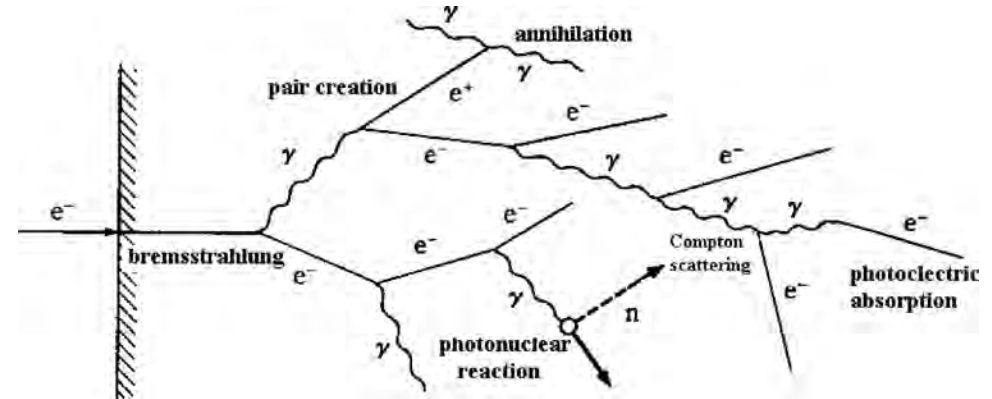
$$\frac{dE}{dt} = E_0 b \frac{(bt)^{a-1} e^{-bt}}{\Gamma(a)}$$

$$t = \frac{x}{X_0}, \quad y = \frac{E}{E_c}$$

ガンマ分布となる

$$t_{max} = \frac{a-1}{b} = \ln y - 0.5 \text{ で最大値をとる}$$

b はおよそ 0.5



- 1 GeV の電子がアルミニウムに入射する場合の例

$$t_{max} X_0 = 63.6 \text{ [g/cm}^2 \text{]}$$

実際の長さで約 24 cm

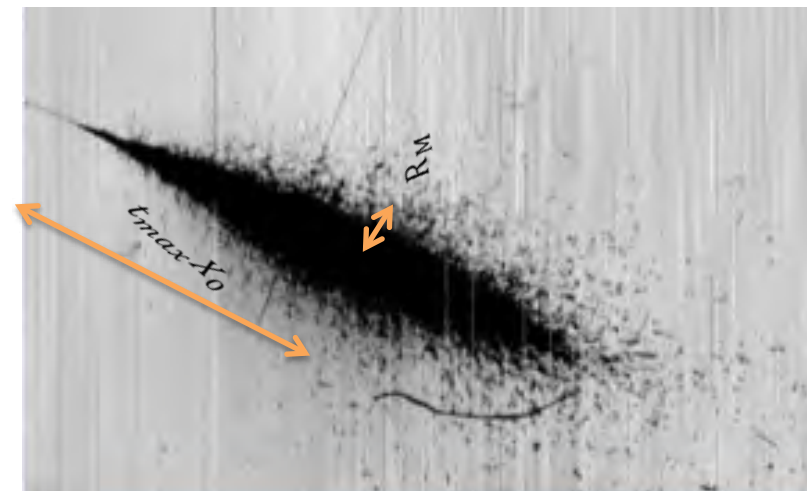
- 電磁シャワーの横方向広がり

モリエール半径 R_M (Moliere radius)
この半径の中に損失エネルギーの約90%が含まれる

$$R_M = \frac{X_0 E_s}{E_c}$$

$$E_s = \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha}} m_e c = 21.2052 \text{ MeV (Scale energy)}$$

さきほどのアルミの例では, $R_M \approx 11.8 \text{ g/cm}^2$



- 電子ビームが物質との相互作用で多くの散乱を受けてランダムに軌道が曲げられる
- 散乱角の分布

$$\theta_0 = \theta_{\text{plane}}^{\text{rms}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \theta_{\text{space}}^{\text{rms}}$$

$$\theta_0 = \frac{13.6 \text{ MeV}}{\beta c p} \sqrt{\frac{x}{X_0}} \left[1 + 0.038 \ln \frac{x}{X_0} \right]$$

- 横方向位置の分布

$$y_{\text{plane}}^{\text{rms}} = \frac{1}{\sqrt{3}} x \theta_0$$

- 薄膜通過後のエミッタンスの計算例

- エネルギー: 1 GeV
- エミッタンス: 1 nm rad
- RMS半径: 10 μm \Rightarrow 角度広がり: 0.1 mrad
- Twissパラメータの $\alpha = 0$
- 厚さ0.1 mmのアルミニウム板を通過する場合

- 散乱角

$$\theta_0 \approx \frac{13.6 \text{ MeV}}{1 \text{ GeV}} \sqrt{\frac{0.027}{24.01}} \left[1 + 0.038 \ln \frac{0.027}{24.01} \right] \approx 0.34 \text{ mrad}$$

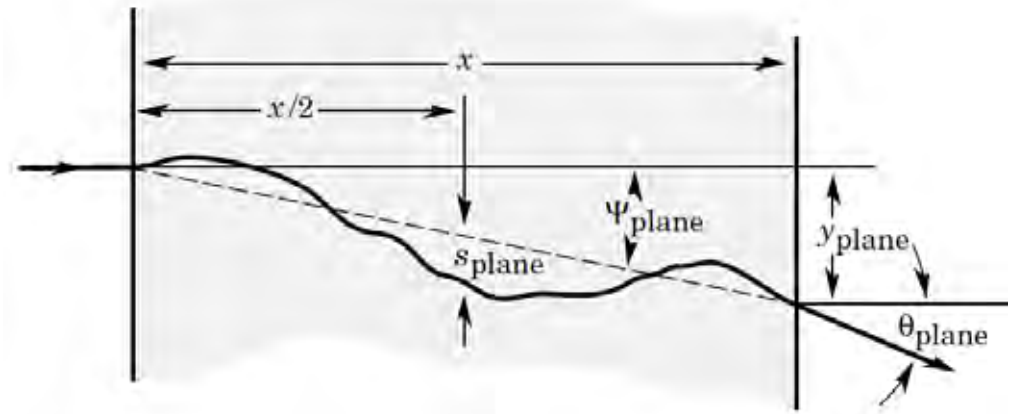
もとの角度広がりとの2乗和の平方根をとると, 0.35 mrad

- 位置の広がり

$$y_{\text{plane}}^{\text{rms}} \approx \frac{0.027 \times 0.35 \times 10^{-3}}{\sqrt{3}} \approx 5.5 \times 10^{-6} \text{ g/cm}^2$$

もとのビーム半径との2乗和の平方根をとると, 10.2 μm (半径はさほど大きくならない)

$$\epsilon \approx 10.2 [\mu\text{m}] \times 0.35 [\text{mrad}] \approx 3.6 \text{ nm rad}$$



- 遷移放射
 - 電子ビームが物質に入射した瞬間にその境界で発生
- チェレンコフ放射
 - 物質中の光速より速い速度で進む荷電粒子から発生
- シンクロトロン放射
 - 電子ビームが磁場で曲げられたときに発生
- これらのコヒーレントな放射
 - 放射の波長が電子ビームの時間構造と同程度かそれより長くなると発生
- 制動放射も放射の一種だがすでに説明済み

- 電子が真空から物質に入射するとき、真空中で電子に付随する電磁場と、物質内で電子に付随する電磁場は異なるため、その差を補うための放射が生じる
 - 遷移放射 (Transition radiation)
- 角度 $1/\gamma$ rad. の前方に放射
- スペクトルは $\gamma \sim 1000$ でX線領域まで伸びる
- 遷移放射の周波数・角度分布

$$\frac{d^2I}{d\omega d\theta} = \frac{e_0^2 \gamma}{2\pi^2 \epsilon_0 c} \left[\frac{(\gamma\theta)^3}{\left(\frac{\omega}{\gamma\omega_p}\right)^4 \left\{1 + \left(\frac{\gamma\omega_p}{\omega}\right)^2 + (\gamma\theta)^2\right\}^2 \{1 + (\gamma\theta)^2\}^2} \right]$$

e_0 : 素電荷

ω_p : 物質のプラズマ振動数

この式は単位立体角あたりではなく、光軸のまわりの ϕ 方向に一周積分した値である

- 周波数スペクトル (角度で積分)

$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{e_0^2}{4\pi^2 \epsilon_0 c} \left[\left\{1 + 2\left(\frac{\omega}{\gamma\omega_p}\right)^2\right\} \ln \left\{1 + \left(\frac{\gamma\omega_p}{\omega}\right)^2\right\} - 2 \right]$$

$\omega \sim \gamma\omega_p$ あたりまで伸びている

例えば、金の場合、 $\hbar\omega_p \sim 80$ eV となるので、エネルギー 1 GeV の電子は 160 keV 程度のX線の遷移放射を発生しうる

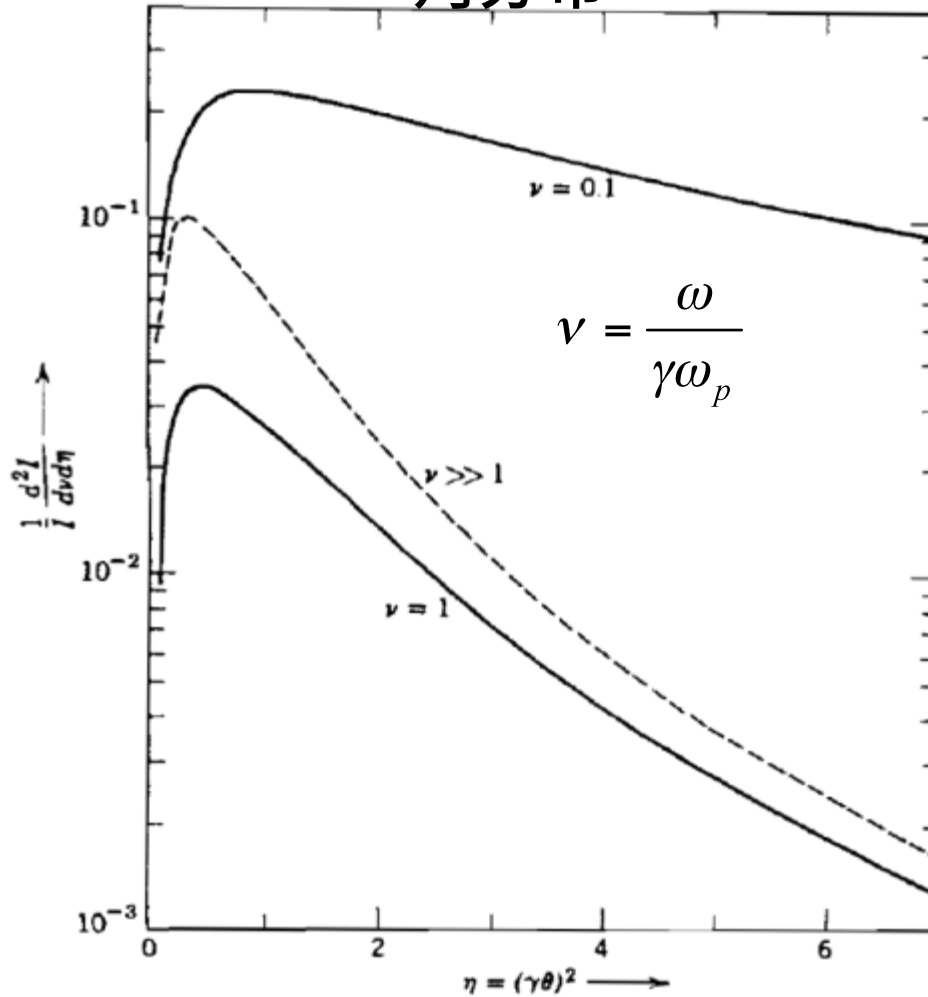
- 全放射エネルギー (周波数スペクトルを積分)

$$I = \frac{e_0^2 \gamma \omega_p}{12\pi \epsilon_0 c}$$

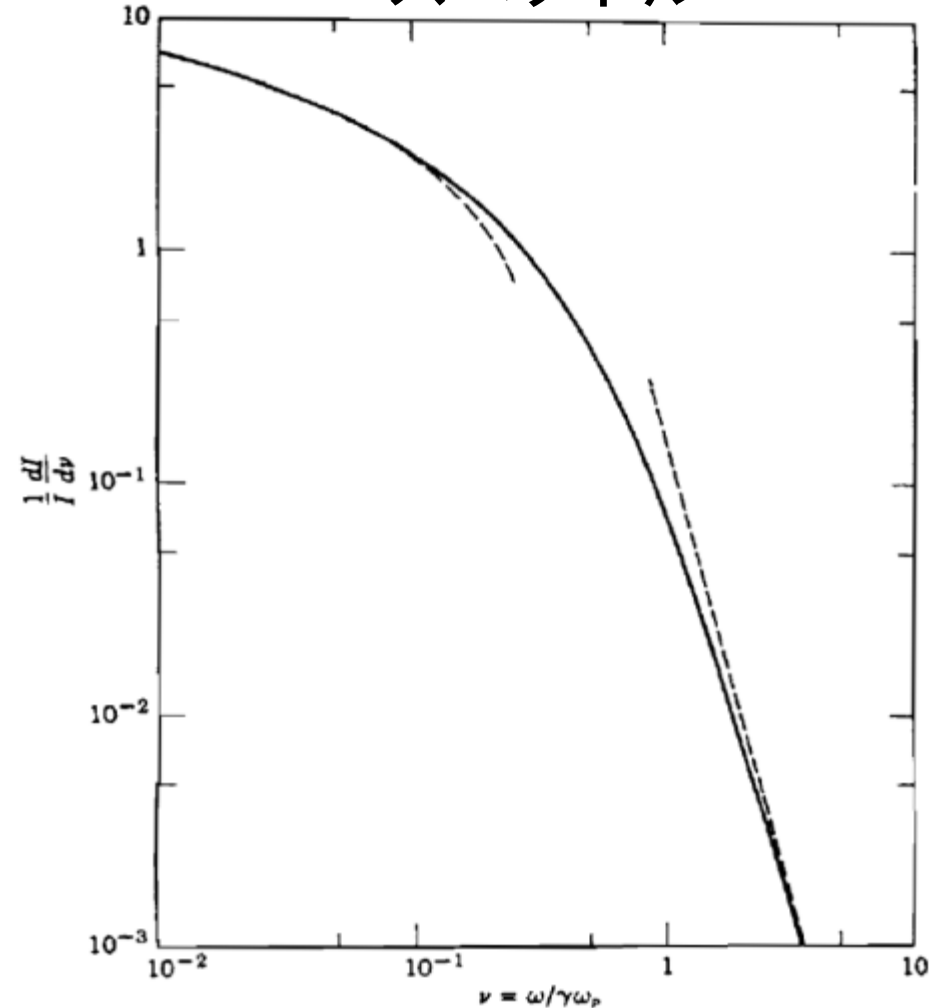
γ に比例

- 可視光は $\nu < 0.1$

角分布



スペクトル



- 可視光領域の遷移放射を遷移放射光 (Optical Transition Radiation, OTR) と呼ぶ

$$\omega \ll \gamma\omega_p$$

- ビーム診断でしばしば用いられる
- 電子1個1個が光源 \Rightarrow ビームプロファイル測定
- 瞬間的な放射 \Rightarrow 時間構造測定

- 周波数スペクトル

$$\frac{dI}{d\omega} \approx \frac{e_0^2}{2\pi^2\epsilon_0 c} \ln\left(\frac{\gamma\omega_p}{e\omega}\right)$$

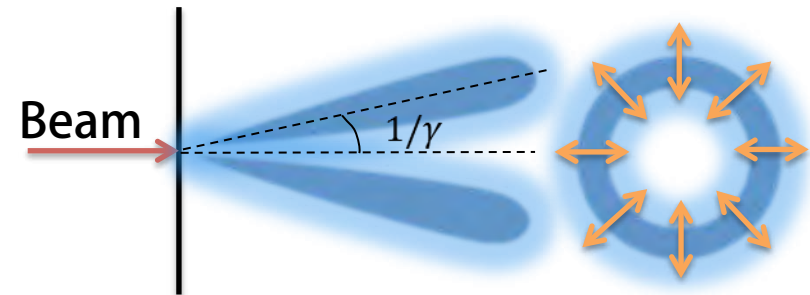
- 1 GeVの電子が金標的に当たったときの可視光の遷移放射光

- 周波数範囲: $2\pi \cdot (4 - 8) \times 10^{14}$ rad/s
- 電子1個の放射エネルギー: $I \approx 1.24 \times 10^{-20}$ J
- 1 nC のときの全エネルギー: 7.7×10^{-11} J
- 光子数: $\sim 2 \times 10^8$
- これをCCDカメラに結像してビームプロファイルを見る場合, 1000ピクセル程度で観測されるとすると, 1ピクセルあたり約10万個の光子が得られる

- 角度分布

- $\theta \approx 1/\gamma$ でピーク
- $1/\gamma < \theta < \omega_p/\omega$ までは $1/\theta$ に比例して減少
- $\theta > \omega_p/\omega$ では $1/\theta^5$ で減少
- さきほどの例では, $\theta \approx 10/\gamma$ でも $\theta \approx 1/\gamma$ の10%程度のエネルギーがある
- 角度分布は比較的ゆるやか

- ラジアル偏光という特殊な偏光



- 電子が物質内の光速より速く飛行する場合に放射される
- チェレンコフ放射の角度

$$\cos \theta_c = \frac{1}{n\beta}$$

- 電子速度のしきい値

$$\beta = \frac{1}{n}$$

- 単位長さあたりに単位エネルギー幅の光を出すときの光子数分布

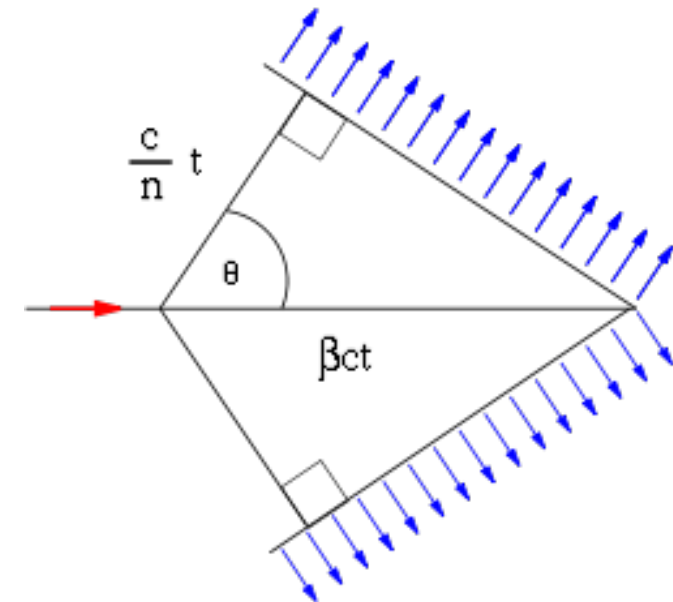
$$\frac{d^2 N}{dE dx} = \frac{\alpha}{\hbar c} \sin^2 \theta_c = \frac{\alpha}{\hbar c} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right)$$

- 石英（屈折率: 1.6）に $\beta \sim 1$ の電子が入射する場合

$$\theta_c = \cos^{-1} \frac{1}{1.6} \approx 51 \text{ deg.}$$

周波数範囲 $(4 - 8) \times 10^{14}$ Hz（可視光）にて電子1個が1 cm あたりに放射する光子数

$$N \approx 3.7 \times 10^2$$



- 電子が磁場などで軌道を曲げられた際に出る放射
- 一様磁場 B で曲げられる場合
- 曲率半径

$$\rho = \frac{\beta\gamma m_e c}{eB} \simeq \frac{\gamma m_e c}{eB}$$

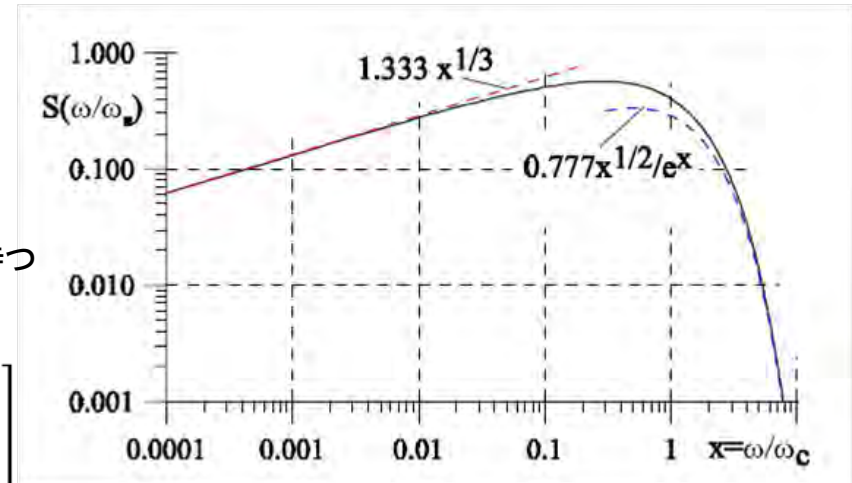
- 臨界周波数

$$\omega_c = \frac{3\gamma^3 c}{2\rho} \quad \text{この周波数付近でスペクトルがピークを持つ}$$

- シンクロトロン放射の周波数・角度分布

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{3\pi^2 c} \left(\frac{\omega\rho}{c}\right)^2 \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right)^2 \left[K_{\frac{2}{3}}^2(\xi) + \frac{\theta^2}{\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2} K_{\frac{1}{3}}^2(\xi) \right]$$

$$\xi = \frac{\omega\rho}{3c} \left(\frac{1}{\gamma^2} - \theta^2\right)^{\frac{3}{2}} \quad K_\nu(x) \text{ は } \nu \text{ 次変形ベッセル関数}$$

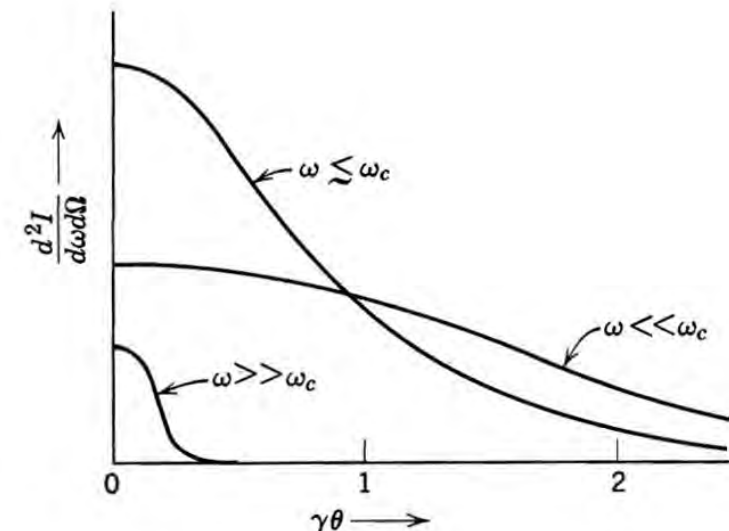


- スペクトルの定性的振る舞い
 - $\omega \gg \omega_c$ で指数関数的に減少
 - $\omega \ll \omega_c$ で $\omega^{\frac{1}{3}}$ に比例
 - 低振動数側では比較的緩やかに下がる
- 角度分布 (RMS角度発散 σ_θ)

$$\sigma_\theta \simeq \frac{0.64}{\gamma} \text{ rad} \quad (\omega = \omega_c)$$

$$\sigma_\theta \simeq \frac{0.58}{\gamma} \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{-\frac{1}{2}} \text{ rad} \quad (\omega \gg \omega_c)$$

$$\sigma_\theta \simeq \frac{1.07}{\gamma} \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{-\frac{1}{3}} \text{ rad} \quad (\omega \ll \omega_c)$$



- 遷移放射やシンクロトロン放射において、電子ビームの時間構造と比べて波長が同程度かそれより長い領域ではコヒーレントな成分が現れる
 - 電子ビームのバンチ長の測定などに利用できる
- 放射パワー

$$P(\lambda) \sim P_e(\lambda) [N_e + N_e^2 F(\lambda)]$$

$P_e(\lambda)$: 電子1個の放射エネルギーの波長依存性

N_e : 電子数

$F(\lambda)$: 形状因子 (form factor)

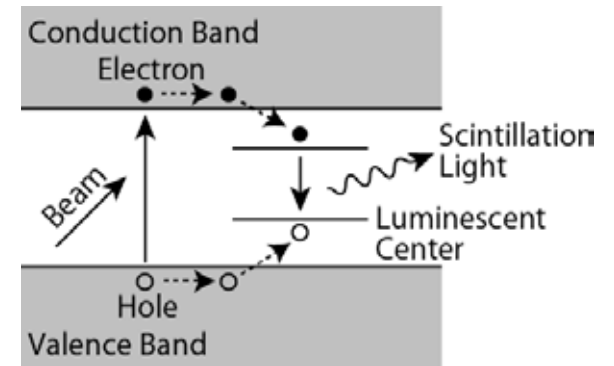
$$F(\lambda) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-j \frac{2\pi z}{\lambda}} dz \right|^2$$

$f(z)$: 電子数分布

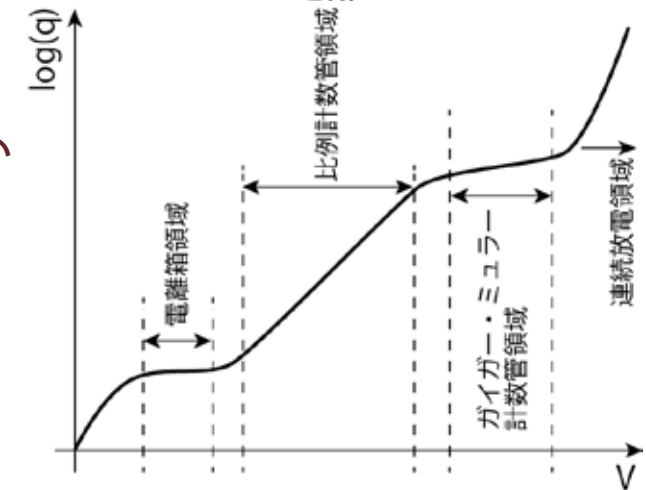
- 第1項: コヒーレントでない成分
- 第2項: コヒーレントな成分
 - コヒーレント成分のパワーは電子数の2乗に比例

- 電子ビームが物質中で起こす電離を利用した現象として蛍光と電離電荷の検出がある
- 蛍光
 - 電離によって発生した電子・ホールペアが再結合する際に放出する光
- 電離電荷の検出
 - 絶縁体に電極をつけて電圧をかけておけば、電子ビームが生成した電離電荷を集めてきて検出できる

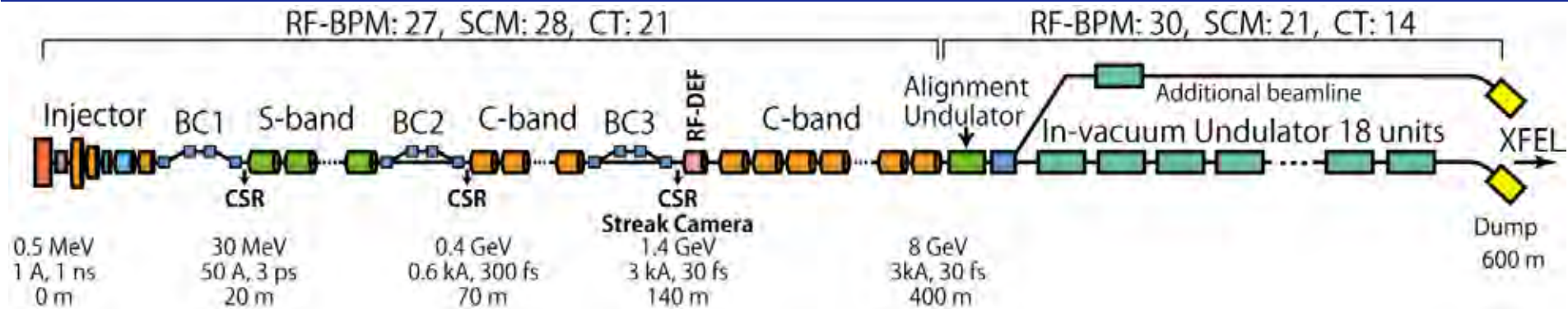
- 蛍光体からの発光を撮像すると電子ビームのプロファイルや電荷量の情報が得られる
- 蛍光体には無機結晶シンチレータとプラスチックシンチレータがある
 - プラスチックシンチレータは耐放射線性が悪く、真空中にも入れにくいのでここでは無機結晶シンチレータのみ扱う
- 無機結晶シンチレータ
 - 純粋な結晶自体が発光するものと蛍光物質をドープすることによって発光するものがある
 - 発光原理はいずれも同じ
 - 電子・ホールペアが蛍光中心で再結合する際に発光する
- **Nal (Tl)**
 - ヨウ化ナトリウム (Nal) 結晶にタリウム (Tl) を適量ドープ
 - 発光量 約 40000 photons/MeV
 - 伝統的な蛍光体で、発光量の基準とされることが多い
 - しかし、潮解性があるため扱いづらい
- **AF995-R (Desmarquest)**
 - $\text{Al}_2\text{O}_3:\text{Cr}$ (アルミナ Al_2O_3 に酸化クロム Cr_2O_3 を重量比 0.5% ドープ)
 - 発光波長: 693 nm peak (赤色)
 - 立ち上がり時間: マイクロ秒オーダー
 - 時定数: 約 3 ms
 - 耐放射線性がよく、加速器でよく使われる
 - しかし、不透明な蛍光体のため、蛍光体内で乱反射して像がにじむ
- **YAG:Ce**
 - $\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}:\text{Ce}$ (イットリウム・アルミニウム・ガーネットにセリウムをドープ)
 - Ceは重量比 0.5% のものが多い
 - 発光波長: 540 nm peak (黄色)
 - 時定数: 約 70 ns
 - 発光量: Nal(Tl) の 1/3 程度
 - 透明な結晶のため、乱反射がない
 - 耐放射線性も良好



- 固体・液体・気体の相の違いを選ばず、絶縁体であれば電子ビームによって電離された電荷を電場で引き寄せて電極から取り出すことが可能
 - 固体の場合は電子・ホールペア
 - 液体・気体では電子とイオン
- 絶縁体を電極で挟み、電圧をかけて電荷を引き寄せればよい
- かける電圧と得られる電荷量には特徴的な関係がある
- 低電圧での振る舞い
 - 電離箱領域より低い電圧では電離した電荷の一部が電極に到達する前に再結合するため、一部の電荷のみ検出される
 - 再結合領域とも呼ばれる
- **電離箱領域**
 - 電離した電荷がほぼすべて電極に引き寄せられて検出される
 - そのため、この領域では電荷量が電圧にほとんどよらない
 - 得られる電荷量が少ないため、電子1個が通過した程度では検出が難しい
 - 電子ビームを直接当てて検出する場合は個数が多いので問題ない
- **比例計数管領域**
 - 電荷が引き寄せられる間に他の分子を電離して電荷が増幅される
 - 得られる電荷量は電離した電荷に比例
 - 電子1個が通過した場合でも検出可能
- **ガイガー・ミュラー計数管領域**
 - 電荷の増幅効果が電極間の物質全体にわたって起こる
 - そのため、電子の損失エネルギーによらず似たような電荷量が得られる
 - わずかでも電離がおこれば一定の電荷量が得られるので、単純に個数だけを数えたいときに有効
 - ただし、電離が全体にわたって起こるため、もとに戻るまでに一定時間必要で、その間はデッドタイムとなる
- 加速器での電子ビームを扱う際は多数の電子からの電離が期待できるので、電離箱領域を使うのが適当
- それより低い電圧でも十分な信号が得られる場合はこの限りではない

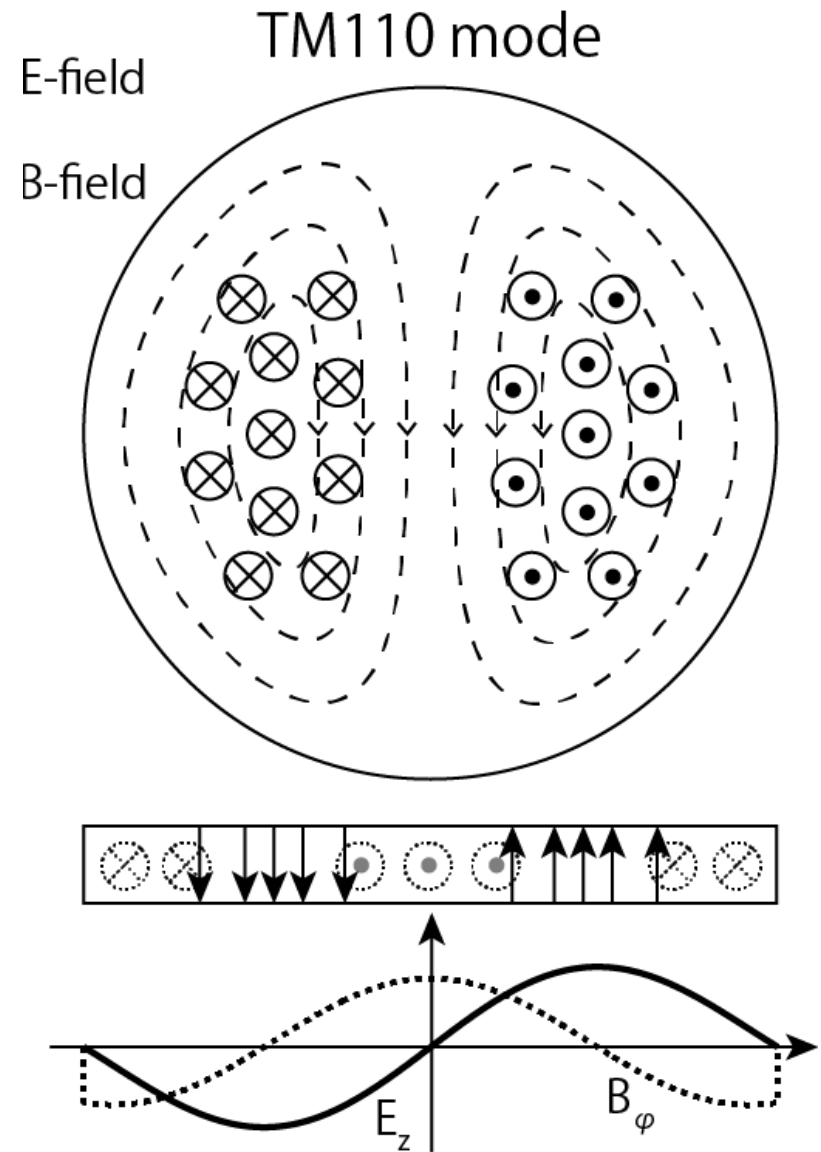


- アンジュレータ区間でのBPMの位置分解能 $1 \mu\text{m}$ 以下
 - 電子ビームとX線とが数 μm 以内の精度で重なりあっていなければならない
- 数 μm 分解能のビームプロファイルモニタ
 - 規格化エミッタンス 1 mm mrad を測定
 - エネルギー 8 GeV のときエミッタンス 約 64 pm rad
 - この状態でベータ関数が 1 m まで絞られるとビームの半径はわずか $8 \mu\text{m}$
- 時間分解能 10 fs の時間構造測定システム
 - 3 kA 以上のピーク電流と、それを達成するためのバンチ長 30 fs までのバンチ圧縮を確認する必要あり
- 各種バンチ長モニタ
 - SACLAでは、 1 ns で切りだされた電子ビームを速度変調バンチング、および、磁場シケイン型のバンチ圧縮器を3台使用してバンチ長を 30 fs まで縮めていく
 - 各段階でバンチ長を測定できることが重要
- 電荷量の測定
 - ビームの適切な加速・輸送
 - ピーク電流を求める際の絶対電荷量
- 電子ビームのエネルギー分解能 10^{-4}
 - 磁場シケインの分散部にてエネルギーを測定
 - 各段階のエネルギーはバンチ圧縮率やX線の波長の安定性に重要
 - エネルギー分散が 100 mm の場合、 $10 \mu\text{m}$ の位置分解能が必要
- アンジュレータ永久磁石の減磁防止
 - 1 fC が測定可能なビームハローモニタ
 - 高感度なビームロスモニタ
- 同期データ収集システム
 - 線型加速器は毎ショット初期条件が微妙に異なるビームがやってくる
 - 複数のビーム診断機器のデータに同期がとれていないと比較ができない



- **ビーム位置測定**
 - RF空洞型ビーム位置モニタ (RF-BPM)
 - 1 μm 以下の分解能を実用的に達成可能な唯一の方法
 - TM₀₁₀モード空洞で到達時間も測定可能
- **ビームプロファイル測定**
 - OTRや蛍光を利用した 10 μm 以下の分解能を持つスクリーンモニタ
- **ビーム電荷量モニタ**
 - 高速差動CT (Current Transformer)
 - 高速, かつ, ノイズに強い
 - 数 100 ps のバンチ長も測定可能
- **ビームの時間構造測定**
 - RFデフレクタによる 10 fs 分解能の時間構造測定システム
 - OTRをストリークカメラで検出することで 1 ps 以下のバンチ長測定
 - コヒーレント放射を利用したバンチ長測定
- **ビーム損失・ハロー測定**
 - 光ファイバ型ビームロスモニタ
 - ダイヤモンド型ビームハローモニタ

- ビーム軸付近でz方向電場が線形に変化するモードを検出するとビーム位置が測定できる
 - TM110モードなど
- ここでは、ビームが誘起するTM110モードについて詳しく考える



- z方向電場

$$E_z = \frac{2}{b\sqrt{\pi L} J_1'(\kappa_{1,1})} J_1\left(\frac{\kappa_{1,1}}{b}\rho\right) \cos\phi$$

$$\kappa_{1,1} \approx 3.832 \quad [J_1(x) = 0 \text{ のひとつ目の根}]$$

$$J_1(x) \approx \frac{x}{2} \quad (x \ll 1)$$

$$E_z \approx \frac{\kappa_{1,1}x}{b^2\sqrt{\pi L} J_1'(\kappa_{1,1})}$$

- この空洞に速度 βc の点電荷 q が通過
- 規格化シャントインピーダンス

$$\frac{R_{sh}}{Q} = \frac{8\beta^2 c^2 \kappa_{1,1}^2 x^2}{\pi \epsilon_0 \omega_a^3 b^4 L [J_1'(\kappa_{1,1})]^2} \sin^2 \frac{\omega_a L}{2\beta c}$$

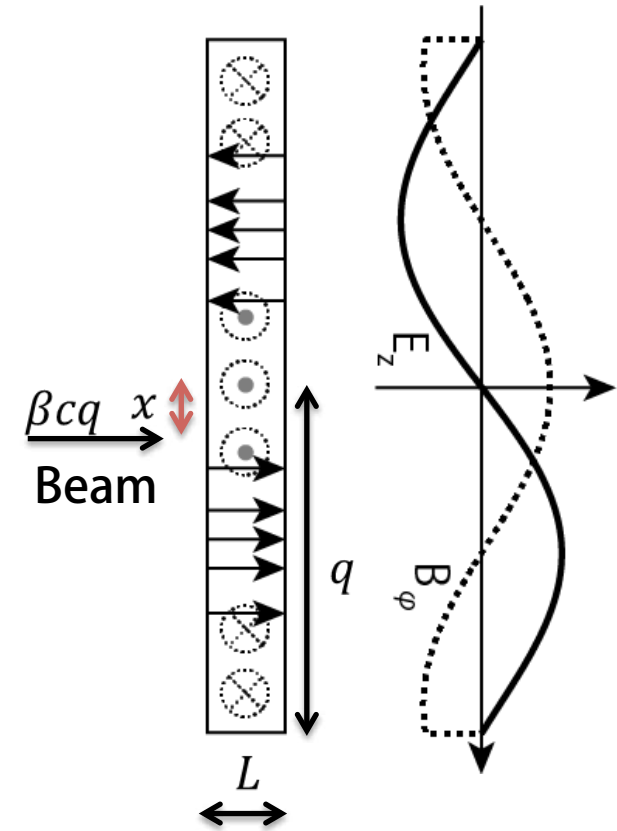
$$\omega_a = \frac{\kappa_{1,1}c}{b}$$

- 誘起される電磁場のエネルギー

$$U = \frac{2\beta^2 q^2 x^2}{\pi \epsilon_0 b^2 L [J_1'(\kappa_{1,1})]^2} \sin^2 \frac{\omega_a L}{2\beta c}$$

- ビーム位置の2乗と電荷量の2乗に比例
- ビーム位置の符号が変わると位相が π 回る
- 電磁場エネルギーと空洞長さの関係

$$U \propto L \quad \left(\frac{\omega_a L}{\beta c} \ll 1\right)$$



- 位相を考える際は電磁場の方程式から考えなければならない
- 今回の場合, 電荷通過直後の f_a, g_a は

$$f_a\left(\frac{L}{\beta c}\right) = -\frac{\beta q x}{\epsilon_0 b \sqrt{\pi L} J'_1(\kappa_{1,1})} \sin \frac{\omega_a L}{\beta c}$$

$$g_a\left(\frac{L}{\beta c}\right) = \frac{\beta q x}{\epsilon_0 b c \sqrt{\pi L} J'_1(\kappa_{1,1})} \left(1 - \cos \frac{\omega_a L}{\beta c}\right)$$

- これを初期条件として自由振動するとき, 改めて $g_a(t) = A \cos \omega_a t + B \sin \omega_a t$
- として, $t = 0$ のときに上記の初期条件を満たすとすると

$$g_a(0) = A = \frac{\beta q x}{\epsilon_0 b c \sqrt{\pi L} J'_1(\kappa_{1,1})} \left(1 - \cos \frac{\omega_a L}{\beta c}\right)$$

$$\dot{g}_a(0) = B \omega_a = -k_a f_a(0) = \frac{\beta \omega_a q x}{\epsilon_0 b c \sqrt{\pi L} J'_1(\kappa_{1,1})} \sin \frac{\omega_a L}{\beta c}$$

- このとき, $g_a(t)$ の位相 θ は

$$\theta = \tan^{-1} \frac{A}{B} = \frac{\omega_a L}{2\beta c}$$

- ビームが空洞の中心を通ったときが位相原点

- ビーム位置を求めるにはTM110モードの情報だけでは足りず，電荷と位相原点の情報も必要
- これには軸付近でビーム位置に依らないTM010モードを使うのがよい
- TM010モードのz方向電場

$$E_z = \frac{\sqrt{2}}{b\sqrt{\pi L} J_0'(\kappa_{0,1})} J_0\left(\frac{\kappa_{0,1}}{b} \rho\right) \approx \frac{\sqrt{2}}{b\sqrt{\pi L} J_0'(\kappa_{0,1})}$$

$$J_0(x) \approx 1 \quad (x \ll 1)$$

- 規格化シャントインピーダンス

$$\frac{R_{sh}}{Q} = \frac{16\beta^2 c^2}{\pi\epsilon_0 \omega_a^3 b^2 L [J_0'(\kappa_{0,1})]^2} \sin^2 \frac{\omega_a L}{2\beta c}$$

- 誘起される電磁場エネルギー

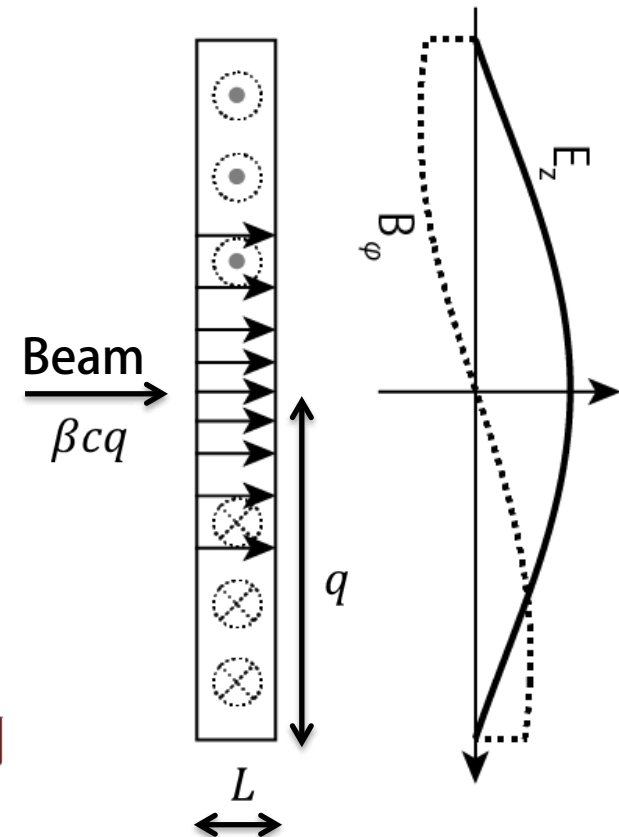
$$U = \frac{4\beta^2 q^2}{\pi\epsilon_0 L \kappa_{0,1}^2 [J_0'(\kappa_{0,1})]^2} \sin^2 \frac{\omega_a L}{2\beta c} \quad \omega_a = \frac{\kappa_{0,1} c}{b}$$

- TM010モードの電磁場は電荷量の2乗に比例

– ビーム位置に依らない

- 位相からは到達時間情報も得られる

- TM110と共振周波数を合わせておくと位相の補正の際に周波数の換算がいらないので便利



- 電磁場の方程式の右辺の積分

$$\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_a dv \simeq \beta c q E_z \left[x = x' \left(\beta c t - \frac{L}{2} \right) \right] = \frac{\beta^2 c^2 q \kappa_{1,1} x' \left(t - \frac{L}{2\beta c} \right)}{b^2 \sqrt{\pi L} J_1'(\kappa_{1,1})}$$

- 誘起される電磁場のエネルギー

$$U = \frac{2\beta^4 x'^2 q^2}{\pi \epsilon_0 L \kappa_{1,1}^2 [J_1'(\kappa_{1,1})]^2} \left(\sin \frac{\omega_a L}{2\beta c} - \frac{\omega_a L}{2\beta c} \cos \frac{\omega_a L}{2\beta c} \right)^2$$

$$U \propto L^5 \left(\frac{\omega_a L}{\beta c} \ll 1 \right) \quad \text{空洞長さに対する依存性が強い}$$

- 位相の算出

- 電荷が通過した直後の電磁場の係数

$$f_a \left(\frac{L}{\beta c} \right) = - \frac{\beta^2 q x'}{\epsilon_0 \kappa_{1,1} \sqrt{\pi L} J_1'(\kappa_{1,1})} \left(1 - \cos \frac{\omega_a L}{\beta c} - \frac{\omega_a L}{2\beta c} \sin \frac{\omega_a L}{\beta c} \right)$$

$$g_a \left(\frac{L}{\beta c} \right) = \frac{\beta^2 q x'}{\epsilon_0 \kappa_{1,1} c \sqrt{\pi L} J_1'(\kappa_{1,1})} \left[\frac{\omega_a L}{2\beta c} \left(1 + \cos \frac{\omega_a L}{\beta c} \right) - \sin \frac{\omega_a L}{\beta c} \right]$$

- これを初期条件として自由振動するとき、改めて

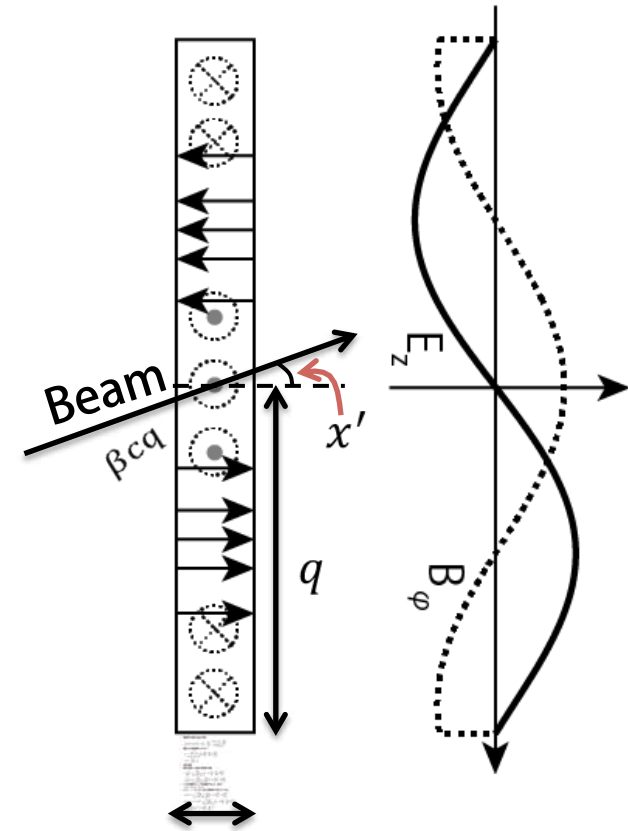
$$g_a(t) = A \cos \omega_a t + B \sin \omega_a t$$

- として、 $t = 0$ のときに上記の初期条件を満たすとすると

$$g_a(0) = A = \frac{\beta^2 q x'}{\epsilon_0 \kappa_{1,1} c \sqrt{\pi L} J_1'(\kappa_{1,1})} \left[\frac{\omega_a L}{2\beta c} \left(1 + \cos \frac{\omega_a L}{\beta c} \right) - \sin \frac{\omega_a L}{\beta c} \right]$$

$$\dot{g}_a(0) = B \omega_a = -k_a f_a(0) = \frac{\beta^2 \omega_a q x'}{\epsilon_0 \kappa_{1,1} c \sqrt{\pi L} J_1'(\kappa_{1,1})} \left(1 - \cos \frac{\omega_a L}{\beta c} - \frac{\omega_a L}{2\beta c} \sin \frac{\omega_a L}{\beta c} \right)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{A}{B} = \tan^{-1} \left(-\cot \frac{\omega_a L}{2\beta c} \right) = \frac{\omega_a L}{2\beta c} - \frac{\pi}{2} \quad \text{位置信号と位相が } \pi/2 \text{ 異なる}$$



- RF-BPMは電子ビームが空洞の中心を通るときに信号が0となる
 - ボタン形やストリップライン型では各電極からの比較的大きな信号の差をとってわずかな違いを取り出さなければならない
 - RF-BPMはビームが中心のときに信号がなくなるので、信号を低ノイズに増幅することさえできれば高分解能化が容易
- RF-BPMは空洞自体がバンドパスフィルタとなり、S/Nを上げやすい
 - 熱ノイズなどはバンド幅に入るものだけを考えればよい
- RF-BPMを円筒空洞とした場合、加工時の軸の精度を上げやすい
 - 高精度な旋盤加工が可能なので、ビーム軸とRF電磁場の軸のずれが少ない

- 周波数

- - 内径約 22 mmのビームパイプの導波管としての遮断周波数の最小値 8.3 GHz (TE₁₁モード)より十分低い必要がある
 - 周波数は高いほうが軸付近の電場の変化が大きいので有利
 - 主加速器周波数 5712 MHz あたりが適当
 - 5712 MHz をそのまま使うと加速管からの暗電流の影響を受けるので若干ずらしたほうがよい
 - そこで, 4760 MHz とした

$$4760 = 5712 \times \frac{5}{6}$$

- 負荷Q値 Q_L

- 誘起された電磁場の減衰の時定数が決まる
- Q_L が小さいとバンド幅が広くなり, ノイズが増えて分解能を制限
- Q_L が大きいと共振周波数のずれに敏感 (温度変動など)
- Q_L が小さくてもいい場合, 材質の幅が広がる
 - 加工しやすい材質を選べる
- SACLAでは $Q_L \approx 50$ とした

- 時定数

$$\frac{2Q_L}{\omega} = \frac{2 \times 50}{2\pi \times 4.76 \times 10^9} \approx 3.3 \text{ ns}$$

- バンド幅

$$\Delta f = \frac{4.76 \times 10^9}{50} \approx 95 \text{ MHz}$$

- 熱雑音

$$P_n = 4k_B T \Delta f \approx 1.6 \times 10^{-12} \text{ W} \approx -88 \text{ dBm} \quad (T = 300 \text{ K})$$

- 空洞の厚さ L
- - 必要とされる信号電力に応じて決める
 - 電荷量は最低で 0.1 nC
 - 分解能は 1 μm 以下
 - ピルボックス空洞の場合, 周波数 4760 MHz のとき, 半径 $b \approx 38.4 \text{ mm}$
 - 規格化シャントインピーダンス R_{sh}/Q

$$\frac{R_{\text{sh}}}{Q} [\Omega] \approx \frac{(4.0 \times 10^7)x^2}{L [\text{mm}]} \sin^2(0.050 L [\text{mm}])$$
 - ビーム位置 $x = 1 \mu\text{m}$ のとき得られるエネルギーは

$$U [\text{J}] \approx \frac{3.0 \times 10^{-15}}{L [\text{mm}]} \sin^2(0.050 L [\text{mm}])$$
 - たとえば, $L = 5 \text{ mm}$ のとき,

$$\frac{R_{\text{sh}}}{Q} [\Omega] \approx (4.9 \times 10^5)x^2 \quad (x \text{ の単位は } [\text{m}])$$

$$U \approx 3.7 \times 10^{-17} [\text{J}] \quad (x = 1 [\mu\text{m}])$$
 - ポートから出てくるRFパワーのピーク値

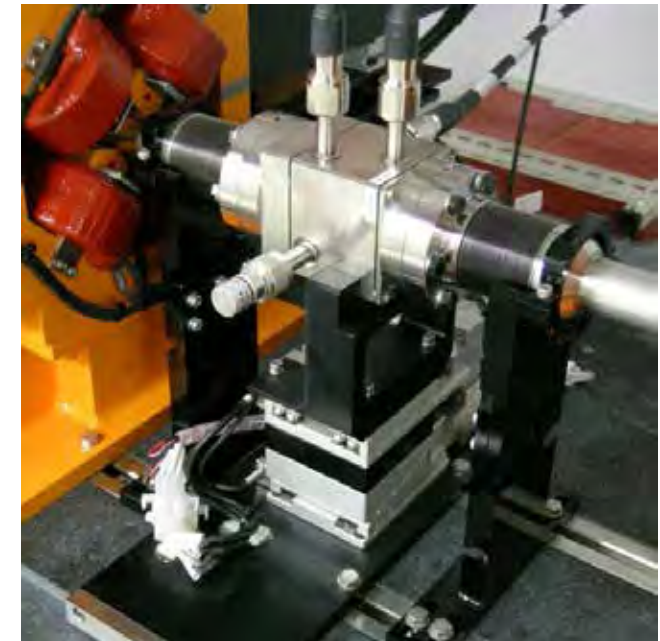
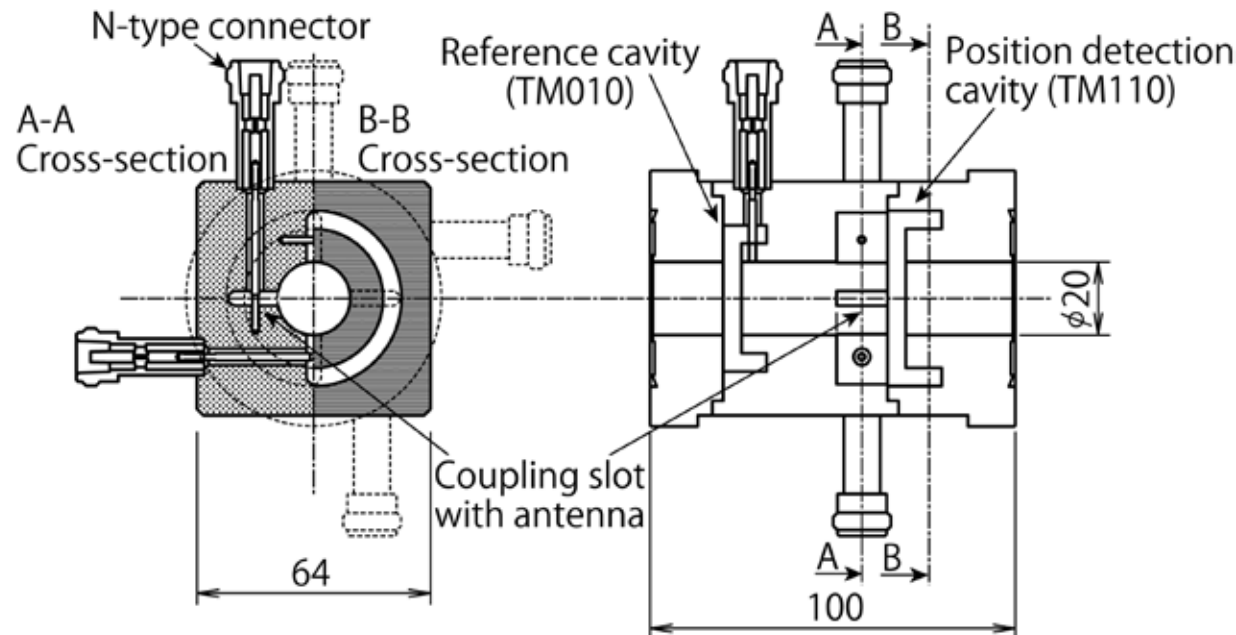
$$P_0 = \frac{\omega U}{Q_{\text{ext}}} \approx 2.2 \times 10^{-8} \text{ W} \approx -47 \text{ dBm} \quad (x = 1 [\mu\text{m}], \quad q = 0.1 [\text{nC}])$$

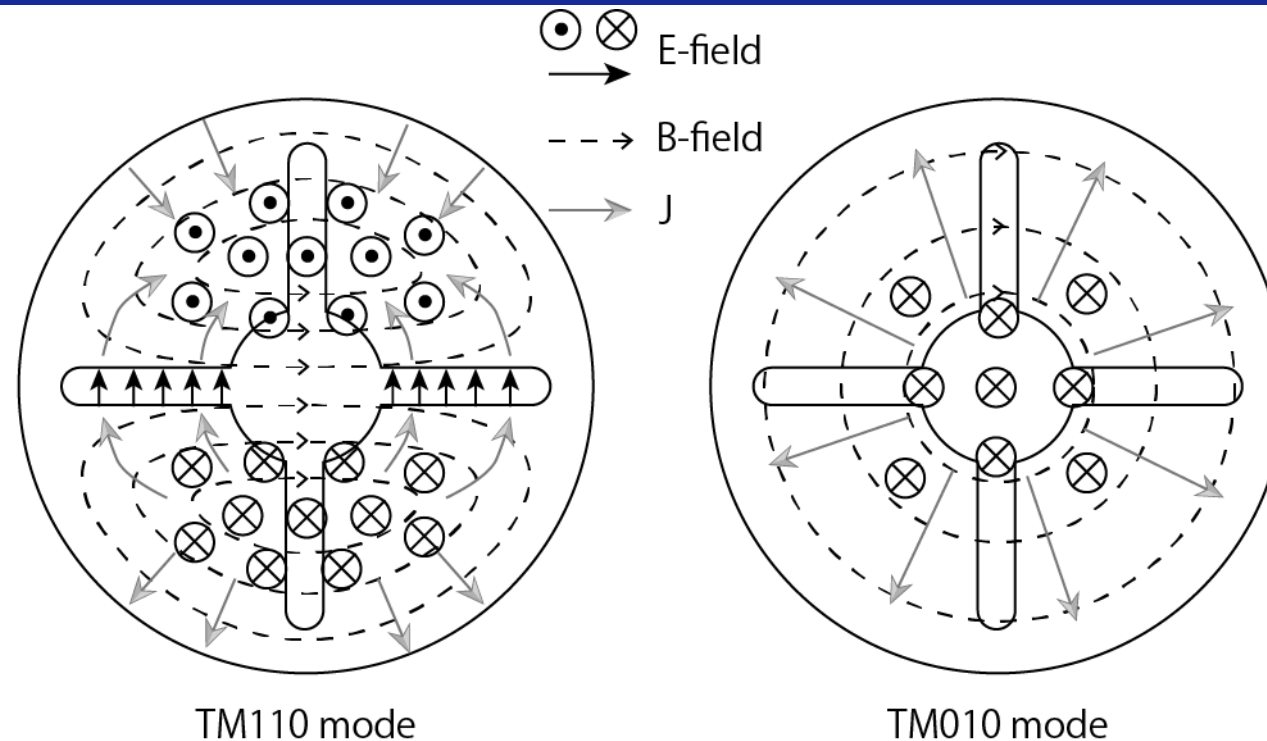
Q が十分大きいと仮定して, $Q_{\text{ext}} \approx Q_L = 50$ と近似した
 - 50 Ω の伝送線路の電圧のピーク値

$$V_0 = \sqrt{P_0 Z_0} \approx 1.1 \text{ mV} \quad (x = 1 [\mu\text{m}], \quad q = 0.1 [\text{nC}])$$
- 傾きの信号
 - ビームの傾きによる信号のエネルギー

$$U \approx 1.6 \times 10^{-12} \times x'^2 [\text{J}] \quad (L = 5 [\text{mm}], \quad x = 1 [\mu\text{m}], \quad q = 0.1 [\text{nC}])$$
 - これが位置の信号と同等になるには $x' = 4.8 \text{ [mrad]}$ にならなければならない
 - これほどビームが傾くことはないので無視できるほど小さいといえる

- 材質
 - Q_L がそれほど大きくないので、 Q_0 も大きい必要がない
 - そのため、たいていの金属材料が使える
 - 加工や真空のことも考えて、SUS 316L を選択
- 形状
 - TM110モードの位置検出空洞に加えて、TM010の基準空洞が一体となっている
 - 位置検出空洞には、水平・垂直 それぞれ2ポート、合計4ポートを装備
 - 位置検出空洞のポートはスロットを介して接続しており、TM110モードを選択的に取り出せる
 - 空洞がコの字に曲がっているのは、コンパクトにするためと、基準空洞のアンテナを取り付けやすくするため

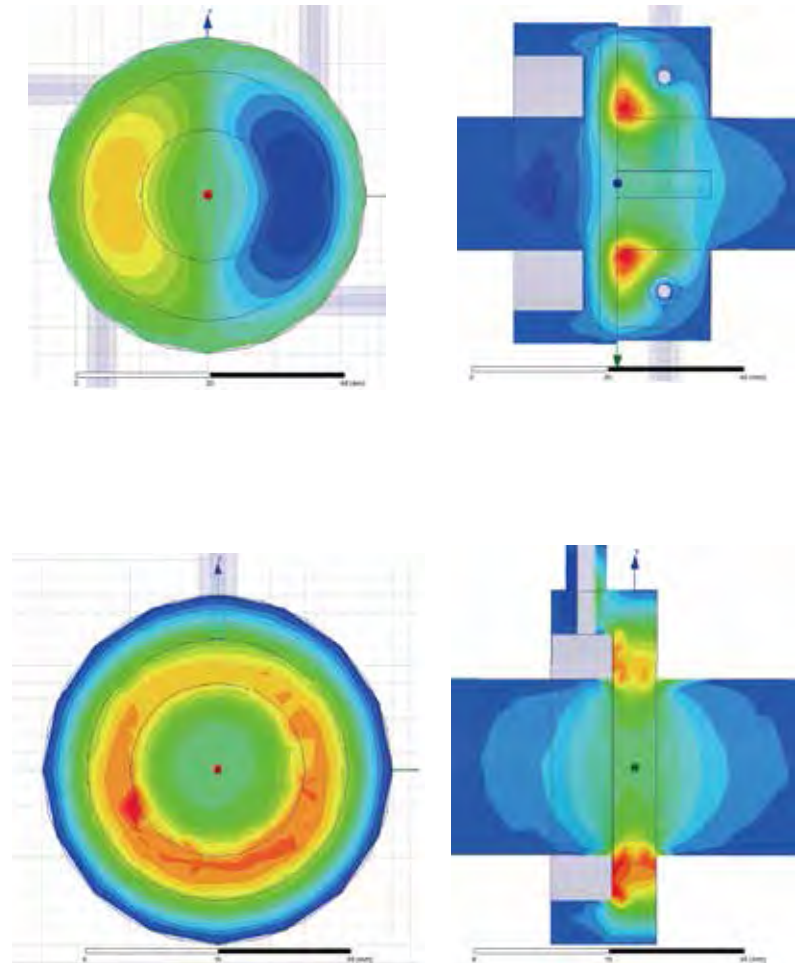




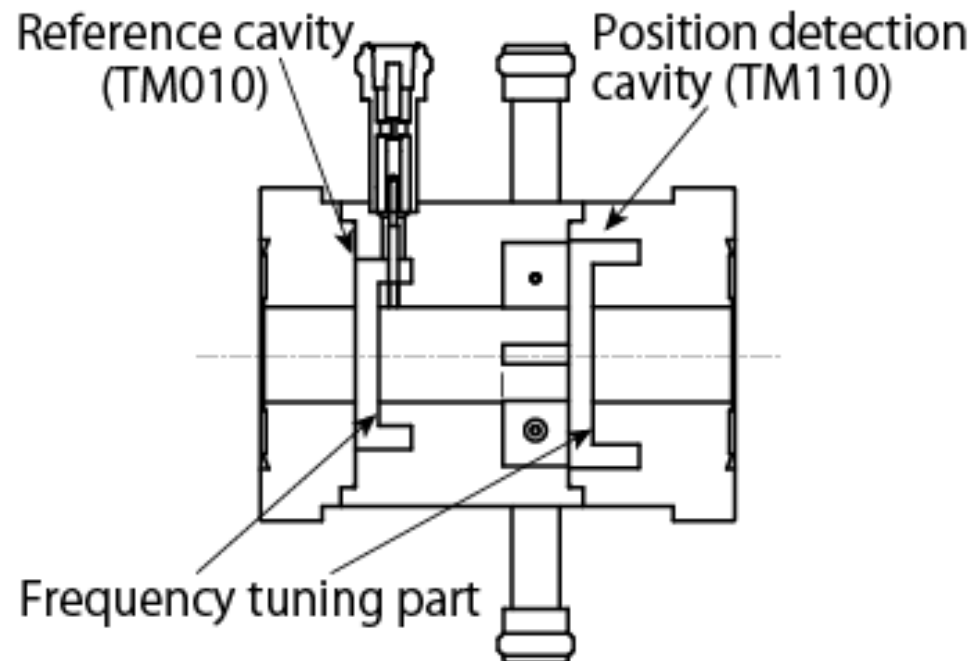
- TM010モードのように空胴の表面電流が放射状にしか流れない場合、スロット内に電場が立たない
- TM110モードには軸の周りを回転する電流も流れるので、スロット内に電場が立ち、ポートからパワーを取り出すことができる
- 不要なモードの信号を低減することで高分解能化に貢献

実測値は約60台の統計

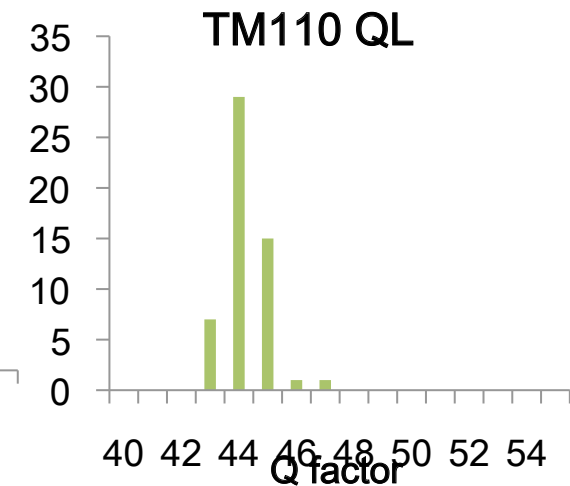
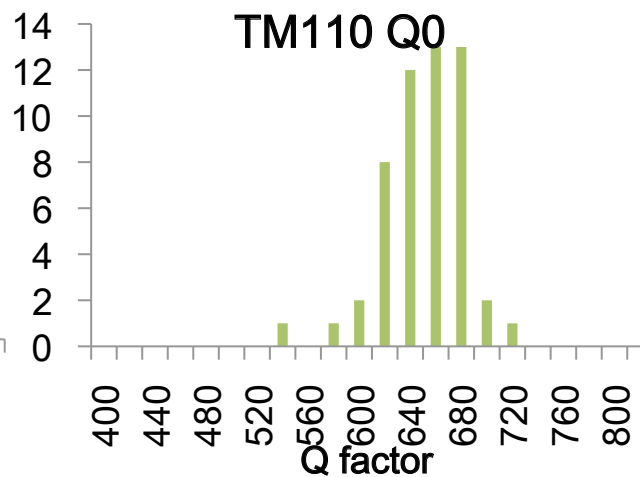
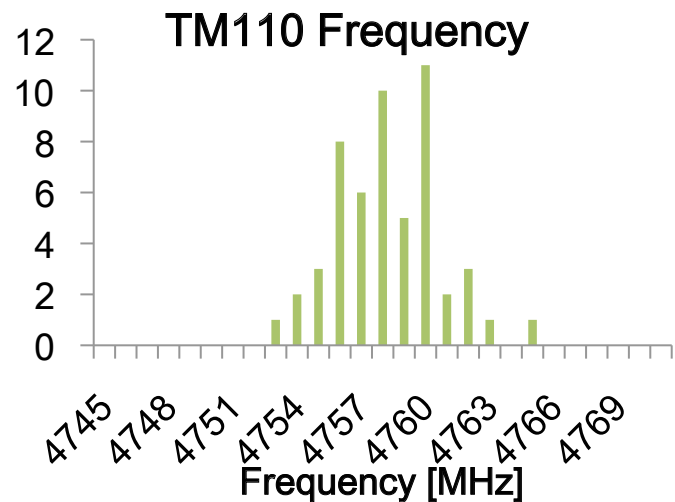
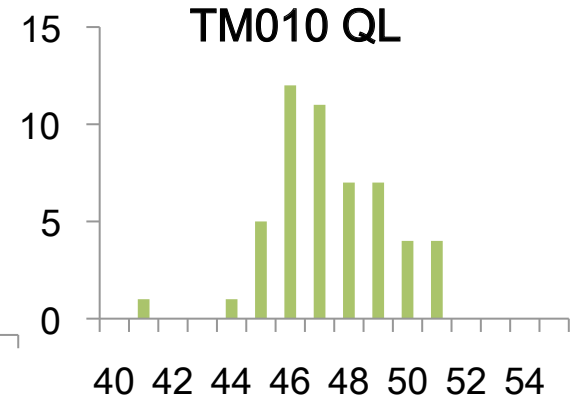
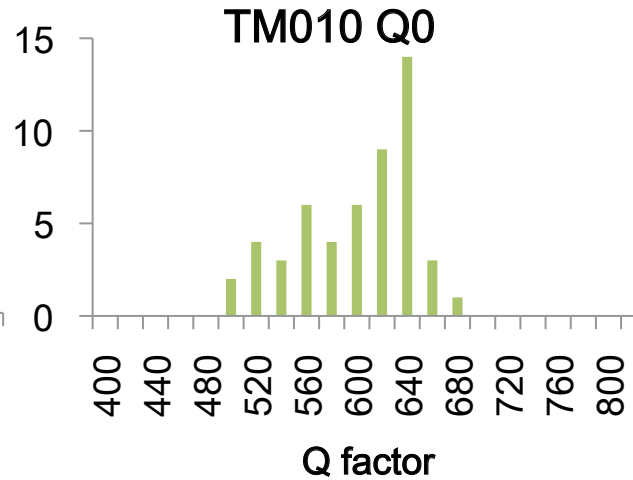
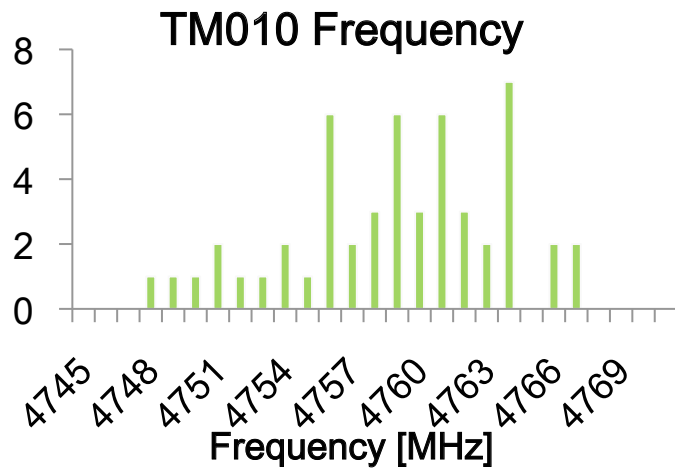
位置検出空洞	計算値	実測値
共振周波数 [GHz]	4.760	4.758±0.005
無負荷Q値 (Q_0)	600	642±32
外部Q値 (Q_{ext})	84.75	94.1±2.6
負荷Q値 (Q_L)	40.3	43.8±0.8
規格化シャントインピーダンス (R/Q)	5.11×10^5 [Ω/m^2]	--
電圧振幅 (50 Ω ポートにて)	8.2 mV/mm/nC (peak)	--
基準空洞		
共振周波数	4.760 GHz	4.758±0.005
無負荷Q値 (Q_0)	570	592±45
外部Q値 (Q_{ext})	52.47	51.2±2.4
負荷Q値 (Q_L)	48.29	47.1±1.9
規格化シャントインピーダンス (R/Q)	54.7 [Ω]	--
電圧振幅 (50 Ω ポートにて)	108 V/nC (peak)	--

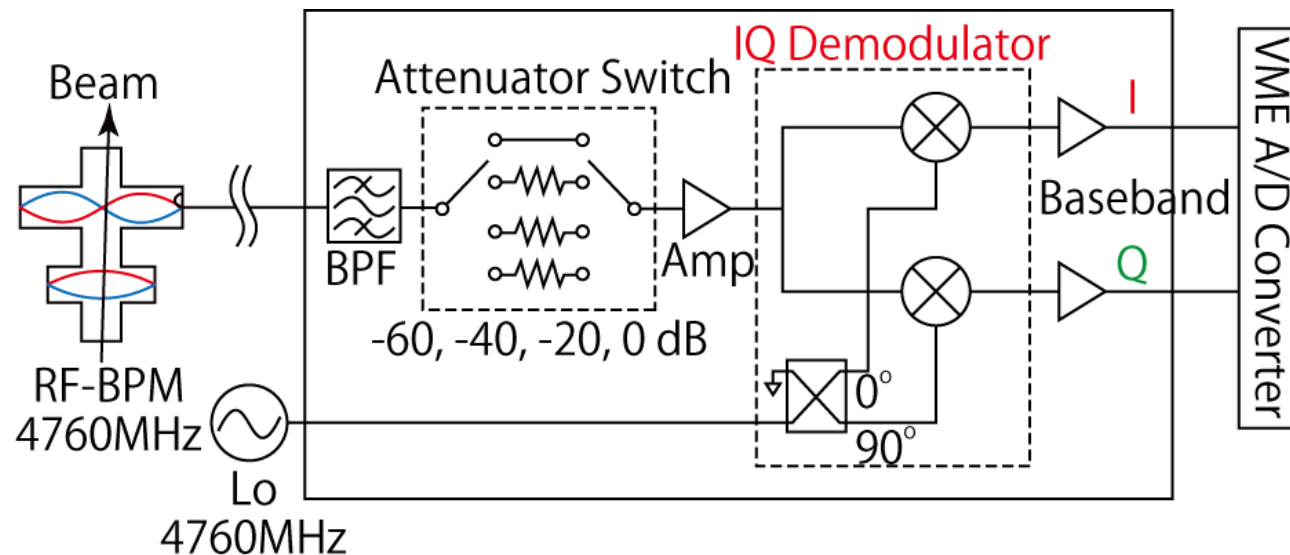


- RF-BPM空洞は3つのブロックにわかれている
- 空洞の内面は10 μm 程度の許容差で精密に加工
 - 周波数調整をする部分だけ0.1 mm程度の削り代を残しておく
- 空洞を仮組みしてRF測定をおこない、削り代の部分を削って周波数を追い込む
 - 旋盤にチャッキングし直すことになるので、削り面が傾かないよう慎重に行う
- 周波数調整が終わったブロックは真空ろう付けにて接合
- 接合後、アンテナを差し込み、N型真空フィードスルーコネクタを溶接
- 溶接後、最終RF測定をおこない、周波数やQ値を確認



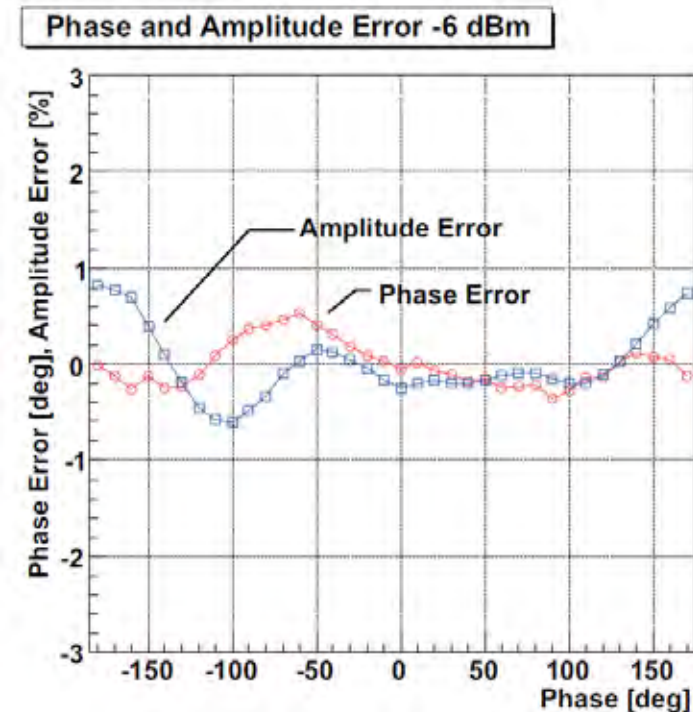
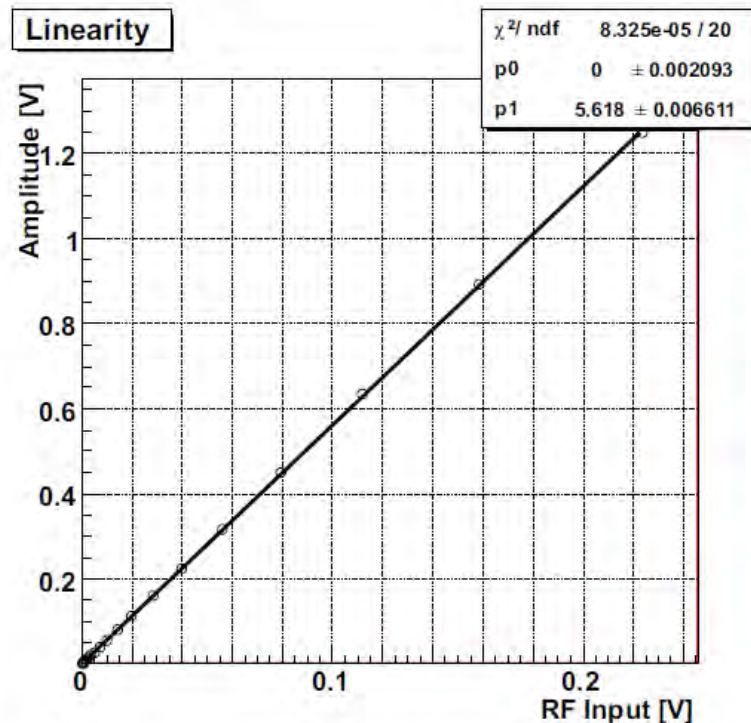
・ 設計通りの結果





- IQ復調器にて検波
 - In-phase and Quadrature
- IQ復調器の前に切替式減衰器
 - 測定レンジの切替
 - 電荷量: 0.1 – 1 nC
 - ビーム位置のフルスケール: 100 μm – 10 mm
- ベースバンド信号はVME波形記録ボードにて収集
 - 238 MSPS
 - 12ビット or 16ビット

- リニアリティ
 - 誤差1%以下
- 位相誤差・振幅誤差
 - 振幅一定で位相を振った場合
 - 位相誤差：0.5度以下
 - 振幅誤差：1%以下
 - 入力信号の振幅はフルスケールのおよそ7割

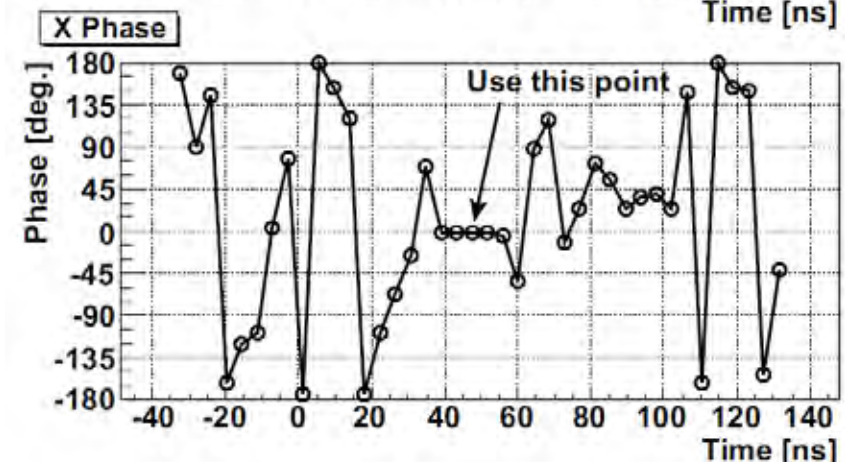
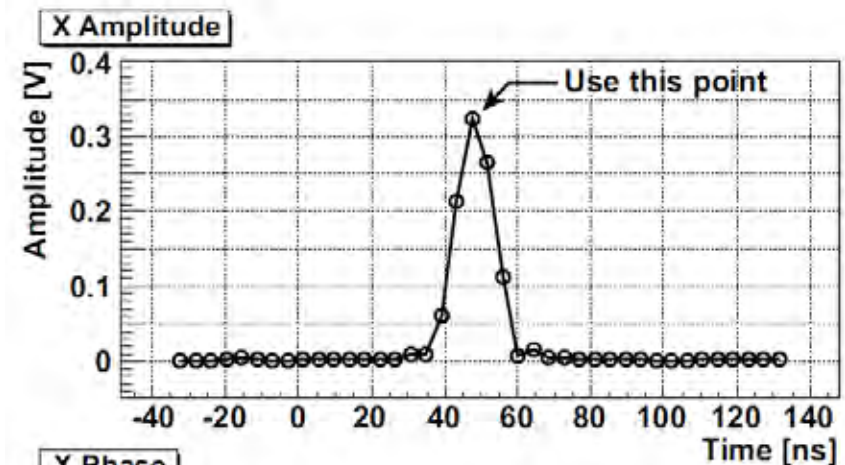


： 算出式

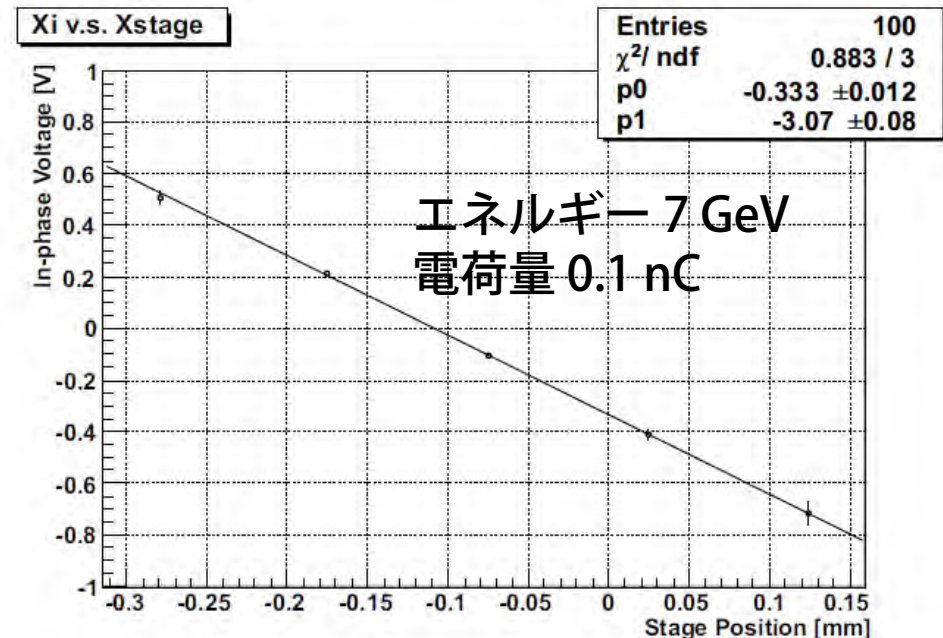
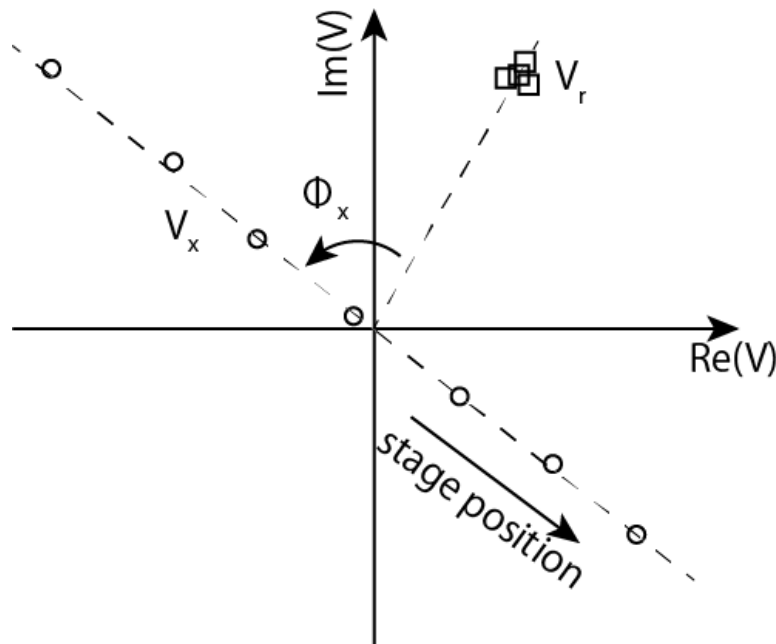
$$x = C_x \frac{|V_x|}{|V_r|} \cos[\arg(V_x) - \arg(V_r) - \Phi_x]$$

- V_x : 位置検出空洞の複素振幅
- V_r : 基準空洞の複素振幅
- C_x : ビーム位置の較正係数
- Φ_x : 位相オフセット補正
 - \cos 内の位相が0か π になるようにする

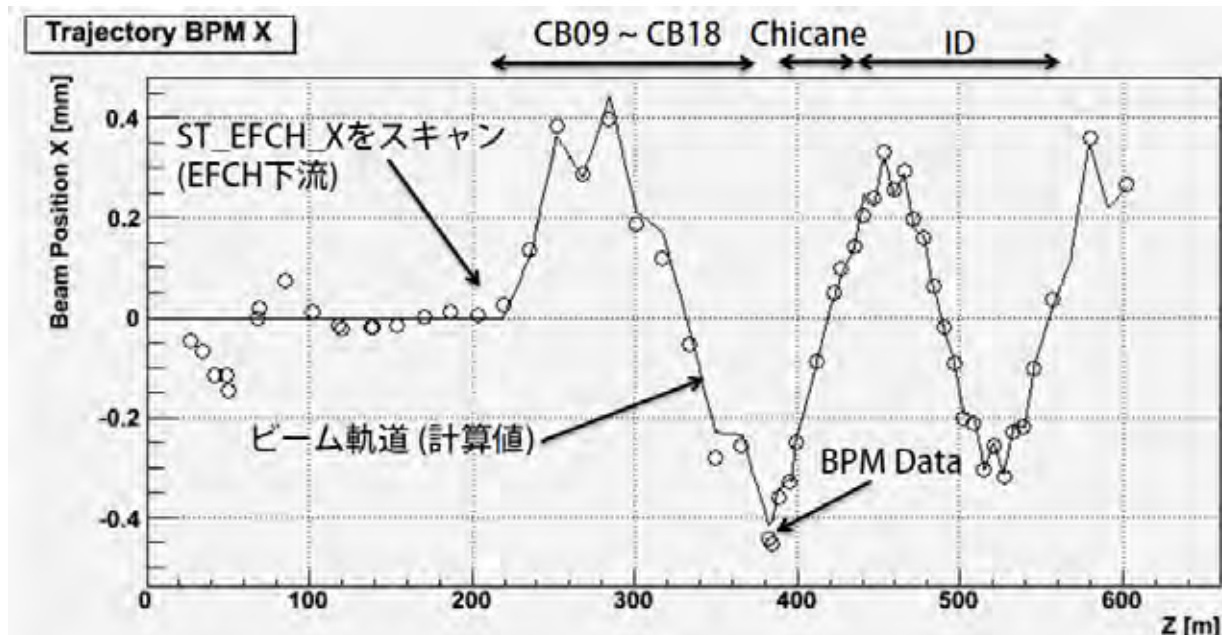
- 位置検出空洞の振幅を基準空洞の振幅で複素数除算することで電荷量と位相の両方の補正をしている

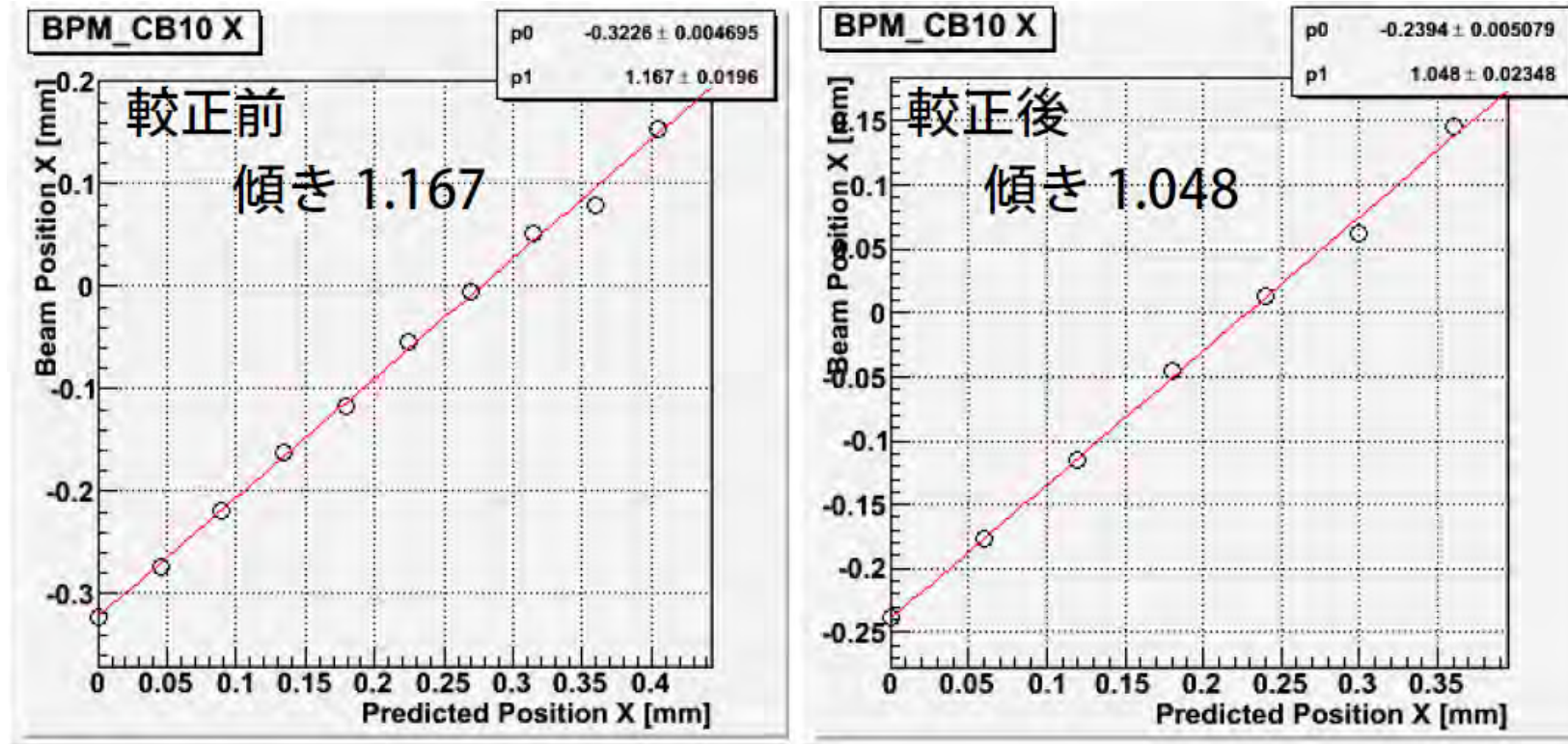


- 電子ビームを一定に保っておき, XZステージでRF-BPMを動かせば校正できる
 - RF-BPMがXZステージに載っている場合
- 位置検出空洞と基準空洞のそれぞれの複素振幅をプロットすると左下図のようになる
 - これで Φ_x が決まる
- ステージを動かしたときの $|V_x| \cos[\arg(V_x) - \arg(V_r) - \Phi_x]$ をプロットすると右下図
 - ± 0.3 mm 以上の範囲を測定可能
 - この傾きから校正係数がわかる



- ビームをステアリング電磁石で振って較正
 - - XZステージに載っていない場合
- キック量をRF-BPMまで転送すればビーム位置の変化量が推定できる
 - $\begin{pmatrix} x' \\ x \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$
 - M : ステアリング電磁石からRF-BPMまでの転送行列
 - k : ステアリング電磁石のキック角
 - 転送行列は加速器構成に合わせて適宜計算する
- 注意点
 - ステアリング電磁石とRF-BPMの間のベータatron位相差が π の整数倍にならないこと
 - キック角とビーム位置との相関が弱くなる





- あるRF-BPMの較正データ
 - 横軸：ビーム位置の推定値
 - 縦軸：測定値
- 較正前の係数は約17%ずれているが、較正後は約5%のずれとなっている

- RF-BPMがドリフトスペース上に3台あれば, 上下流2台のデータを使って真ん中の1台のビーム位置を決定できる
- 真ん中のRF-BPMのビーム位置の推定値 \hat{x}_2

$$\hat{x}_2 = \frac{L_1 x_3 + L_2 x_1}{L_1 + L_2}$$

x_1, x_3 はそれぞれ1台目, 3台目のRF-BPMの測定値

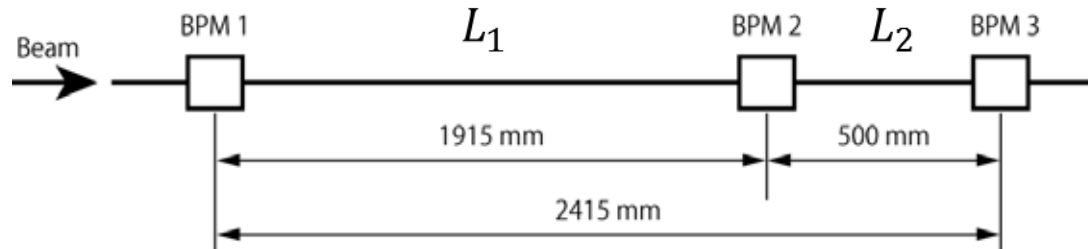
- 3台のRF-BPMの分解能が等しいとき

$$\sigma_{\text{BPM}} = \frac{L_1 + L_2}{\sqrt{2(L_1^2 + L_1 L_2 + L_2^2)}} \sigma_{\text{res}}$$

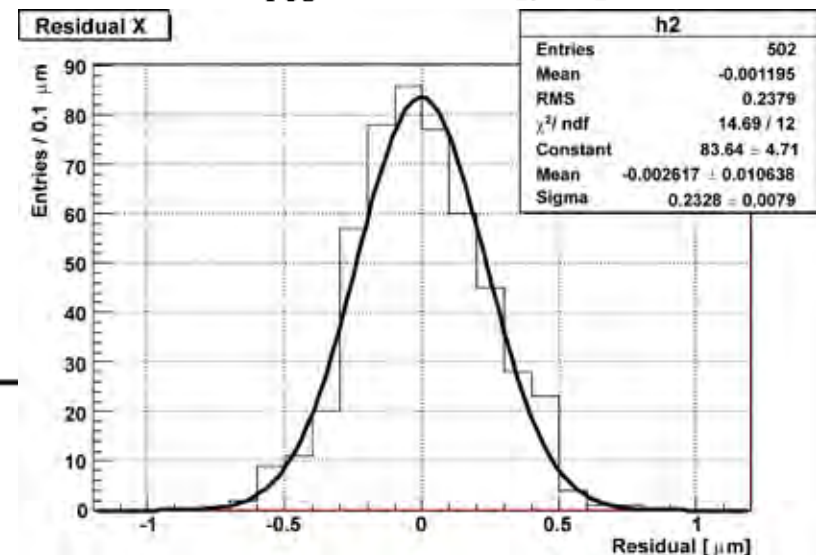
σ_{BPM} : RF-BPMの分解能

σ_{res} : $x_2 - \hat{x}_2$ の標準偏差

- SCSS試験加速器での測定結果
 - エネルギー 250 MeV, 電荷量 0.3 nC
 - $\sigma_{\text{BPM}} \approx 0.18 [\mu\text{m}]$



$$\sigma_{\text{res}} \approx 0.238 [\mu\text{m}]$$



- 4台以上のBPMでも適用でき, BPM間に各種加速器構成機器がある
- 場合の位置分解能測定について考える
 - BPMは N 台 ($N \geq 3$)
 - BPM間の転送行列はすべて既知
- n 番目のBPMでのビームの位置と傾きの推定値 (\hat{x}_n, \hat{x}'_n) を, のこり $N - 1$ 台のBPMの測定値から推定する
 - 最小二乗法を使う
- 特長
 - BPMが何台でもよく, 間に何かあってもよい
 - BPMの台数が十分多いと推定誤差がBPMの分解能に比べて十分小さくなり, 全BPMの分解能が等しいという仮定をする必要がなくなる
 - 単純計算で $1/\sqrt{n}$

解析方法

$\hat{\xi}_n = \begin{pmatrix} \hat{x}_n \\ \hat{x}'_n \end{pmatrix}$: n 番目のBPMでのビームの位置と傾きの推定値

$\hat{\xi}_{m/n} = \begin{pmatrix} \hat{x}_{m/n} \\ \hat{x}'_{m/n} \end{pmatrix} = M(m, n) \hat{\xi}_n$: n 番目のBPMでの推定値を m 番目に転送

$M(m, n)$: n 番目から m 番目までの転送行列

この各BPMでの位置の推定値 $\hat{x}_{m/n}$ が測定値 x_m に最も近くなるように $\hat{\xi}_n$ を決めればよい

- 評価関数

$$J = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N (x_m - \hat{x}_{m/n})^2$$

- これが最小になるので $\frac{\partial J}{\partial \hat{x}_n} = \frac{\partial J}{\partial \hat{x}'_n} = 0$
- いま,

$$\hat{x}_{m/n} = M(m, n)_{11} \cdot \hat{x}_n + M(m, n)_{12} \cdot \hat{x}'_n$$

- なので,

$$J = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N [x_m - M(m, n)_{11} \hat{x}_n - M(m, n)_{12} \hat{x}'_n]^2$$

転送行列の1行1列の要素を $M(m, n)_{11}$ のように表記

- したがって、以下の連立方程式を解けばよい

$$0 = \frac{\partial J}{\partial \hat{x}_n} = 2 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N \{ [M(m, n)_{11}]^2 \hat{x}_n + M(m, n)_{11} M(m, n)_{12} \hat{x}'_n - M(m, n)_{11} x_m \}$$

$$0 = \frac{\partial J}{\partial \hat{x}'_n} = 2 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N \{ M(m, n)_{11} M(m, n)_{12} \hat{x}_n + [M(m, n)_{12}]^2 \hat{x}'_n - M(m, n)_{12} x_m \}$$

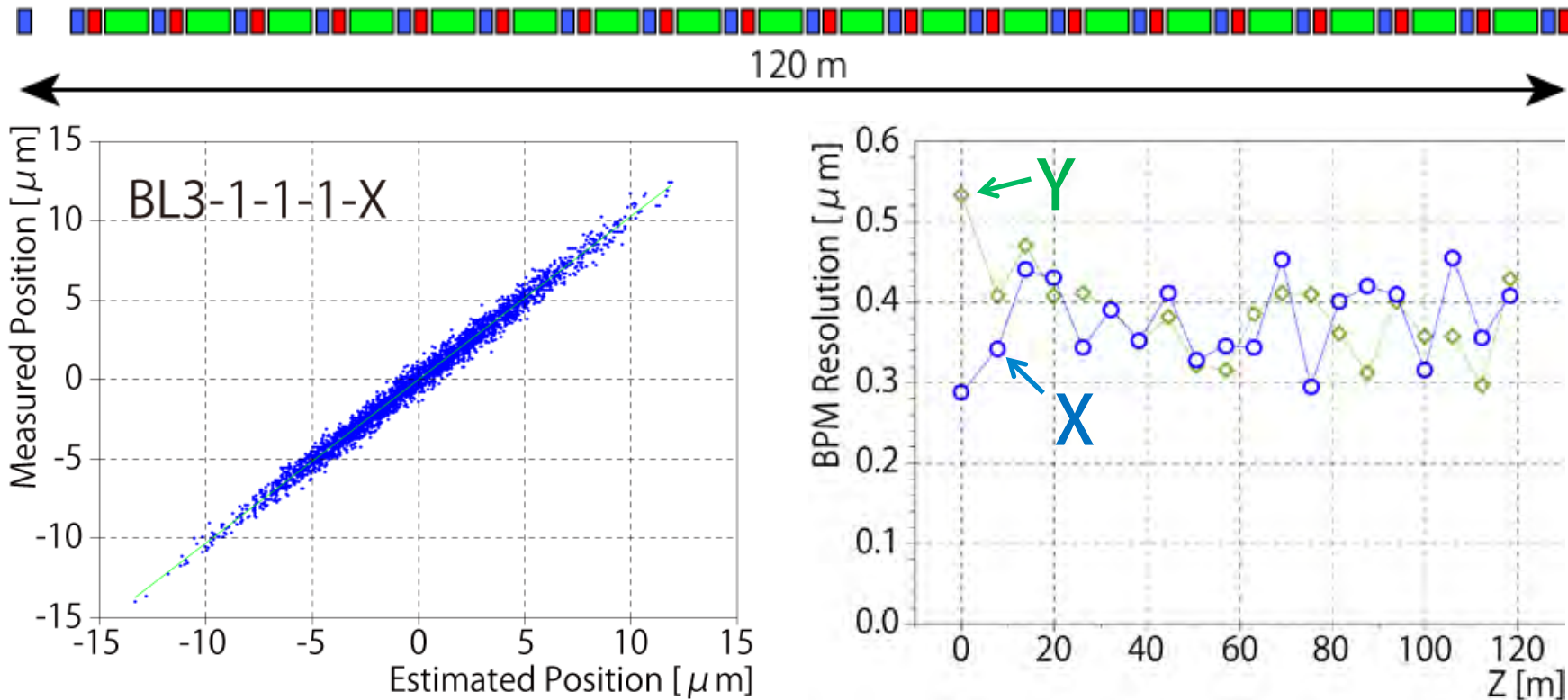
- 行列表示では,

$$S \hat{\xi}_n = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N \begin{pmatrix} M(m, n)_{11} x_m \\ M(m, n)_{12} x_m \end{pmatrix}$$

$$S = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N \begin{pmatrix} [M(m, n)_{11}]^2 & M(m, n)_{11} M(m, n)_{12} \\ M(m, n)_{11} M(m, n)_{12} & [M(m, n)_{12}]^2 \end{pmatrix}$$

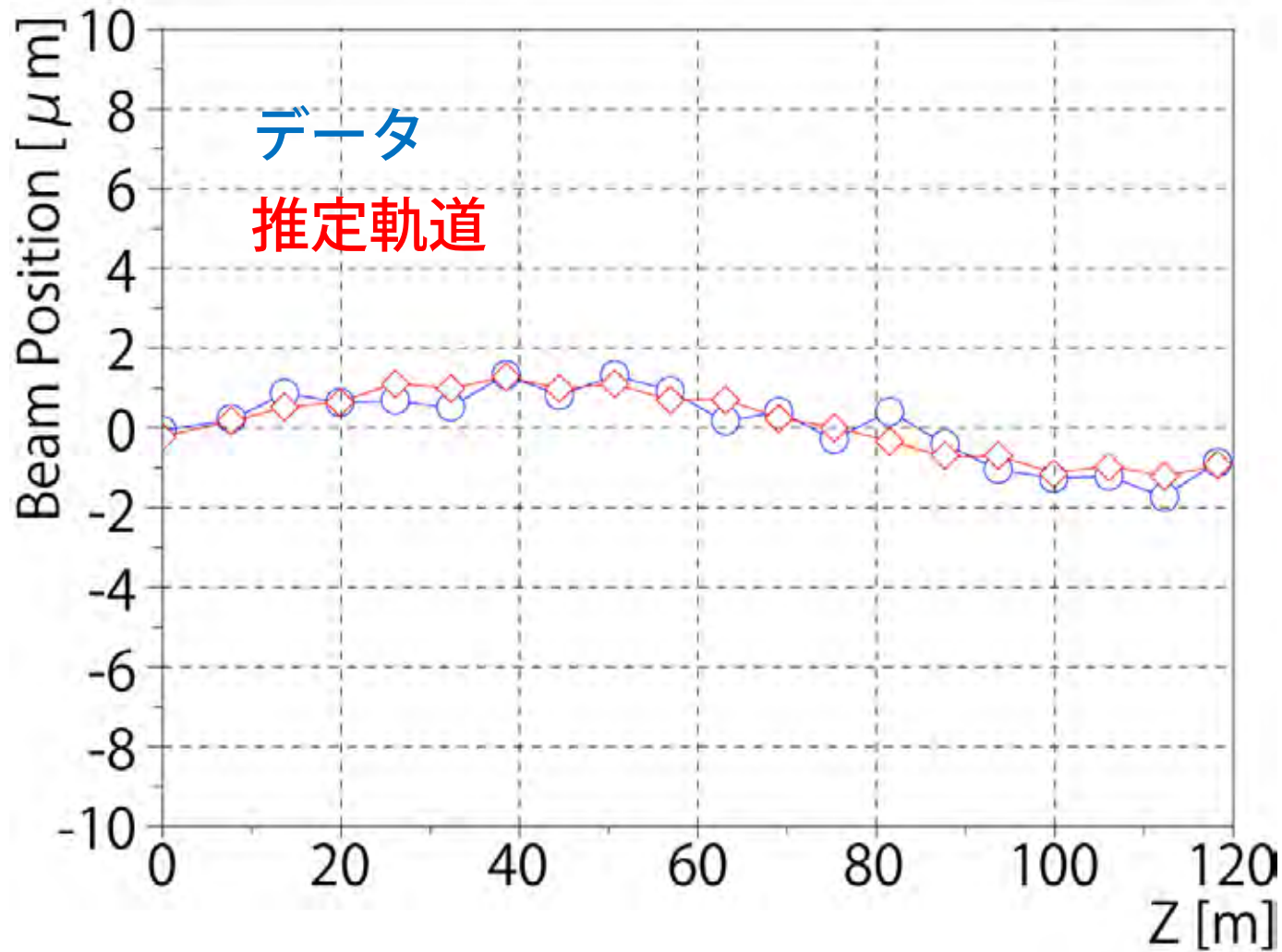
$$\hat{\xi}_n = S^{-1} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N \begin{pmatrix} M(m, n)_{11} x_m \\ M(m, n)_{12} x_m \end{pmatrix}$$

■: BPM ■: Q-mag ■: Undulator

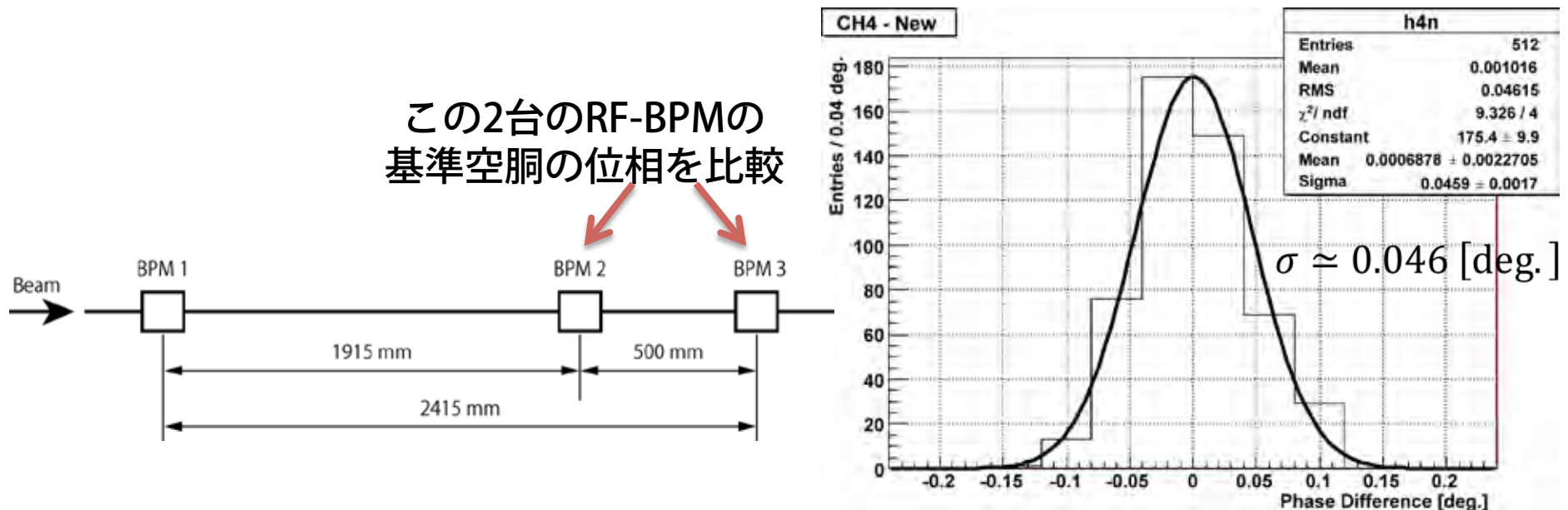


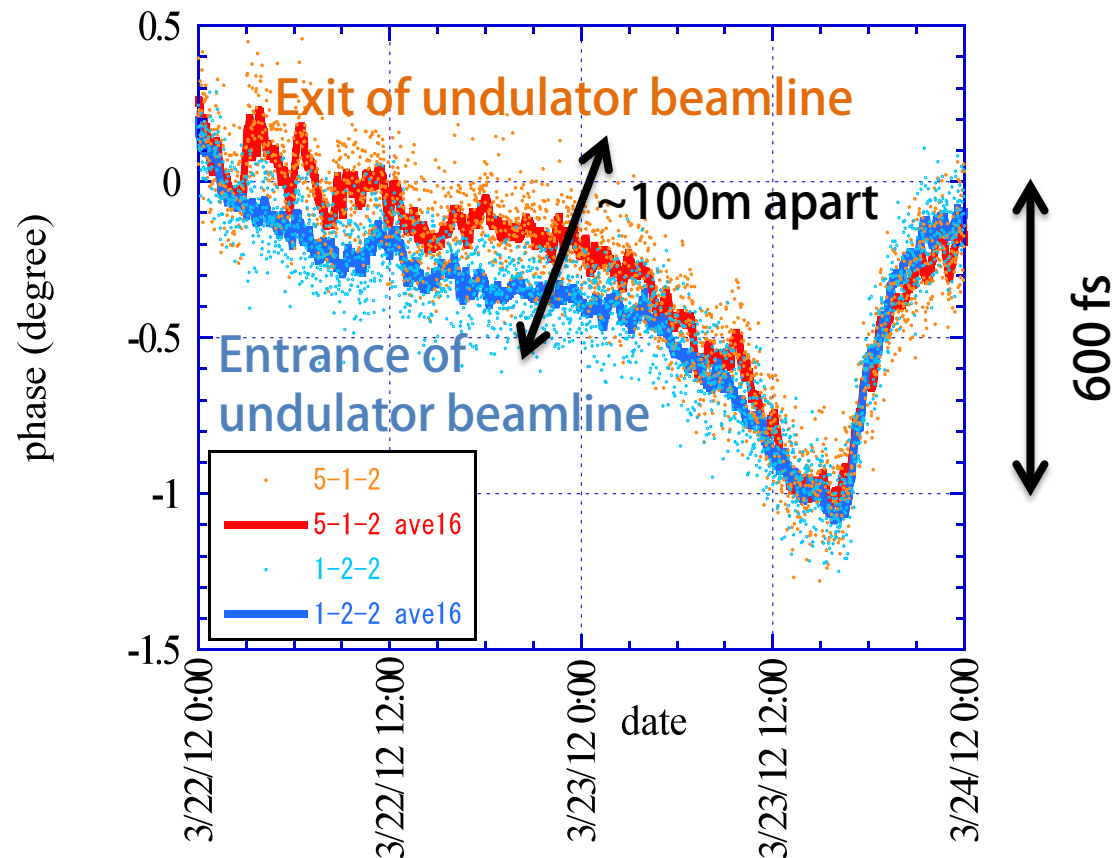
- アンジュレータ区間の20台のRF-BPMの位置分解能を測定
- 位置の推定値と測定値は $1 \mu\text{m}$ 精度で一致
- 位置分解能 $< 0.6 \mu\text{m}$
 - 7 GeV, 0.1 nC

ある1ショットのデータと推定軌道

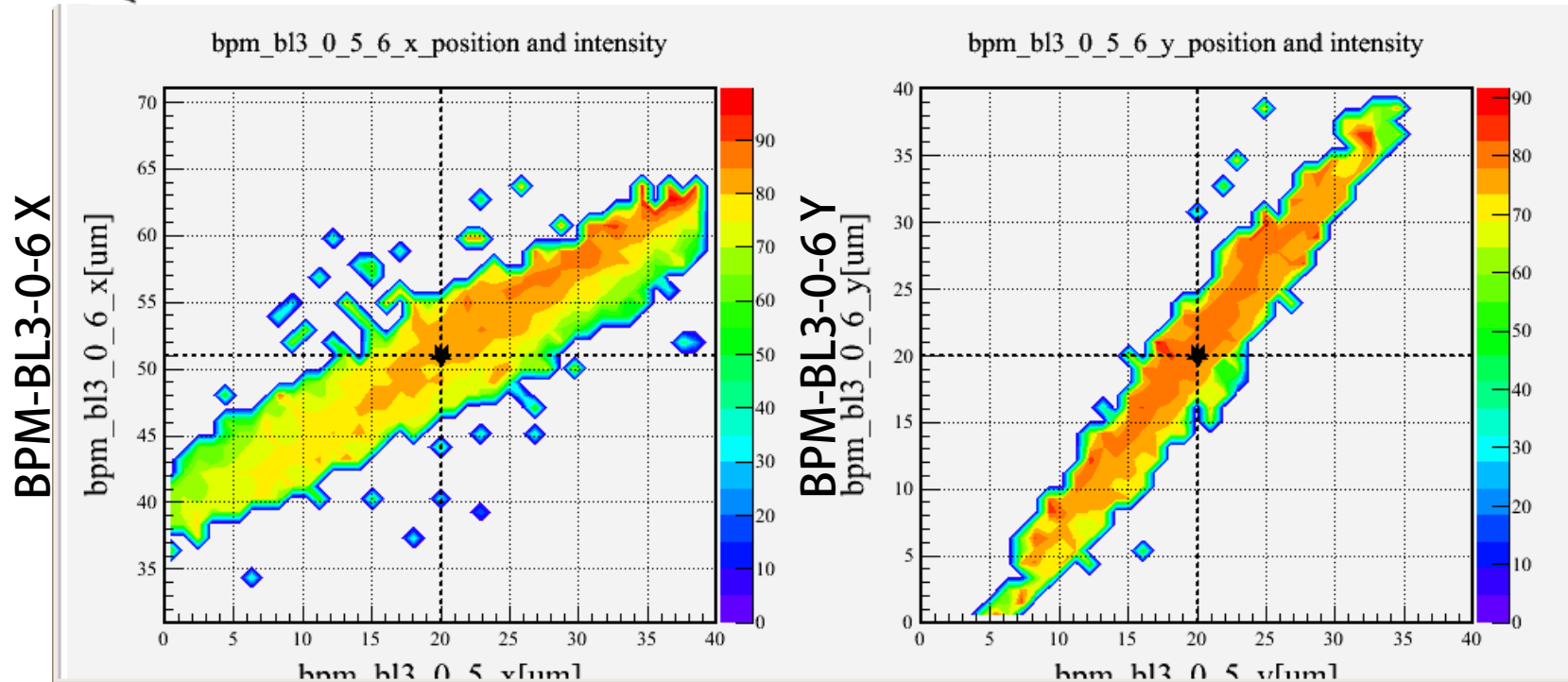
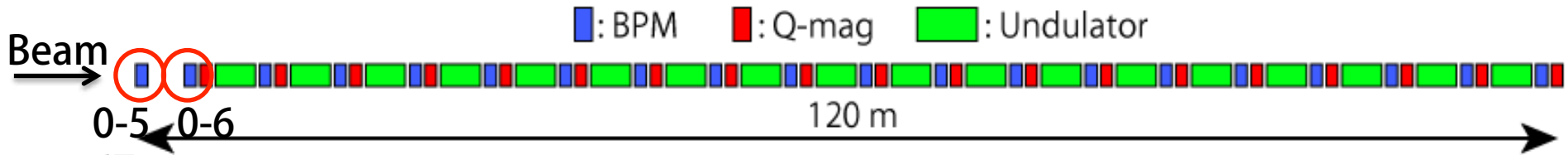


- 2台のRF-BPMの基準空洞の位相を比較すればよい
 - ビームの到達時間はビーム位置が多少変わっても影響は無視できる
- SCSS試験加速器の結果
 - 位相差の標準偏差: 0.046 度 (4760 MHz)
 - 時間換算で 27 fs
 - 1台あたりの到達時間分解能はこの $1/\sqrt{2}$
 - これはSACLAの加速位相安定度の要求値 50 fs より小さい





- 電子ビームの到達時間のドリフトが適切にとれている
- アンジュレータ区間の上下流で若干の差が見えるのは基準信号伝送用の光ファイバの温度ドリフトと考えられる
- 共通の大きな変動は加速器入射部のRF位相変動による

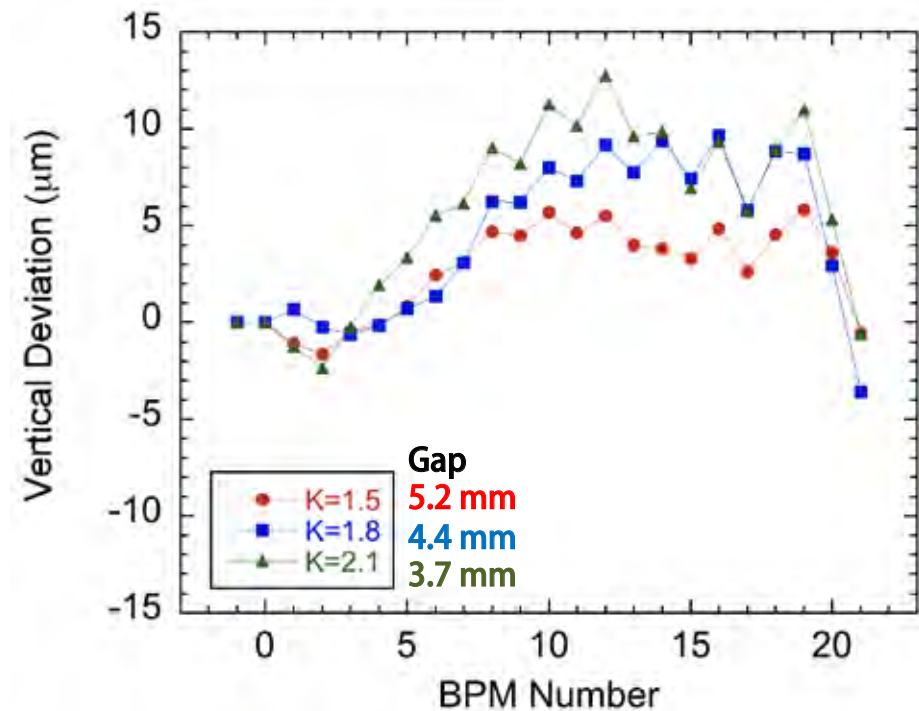
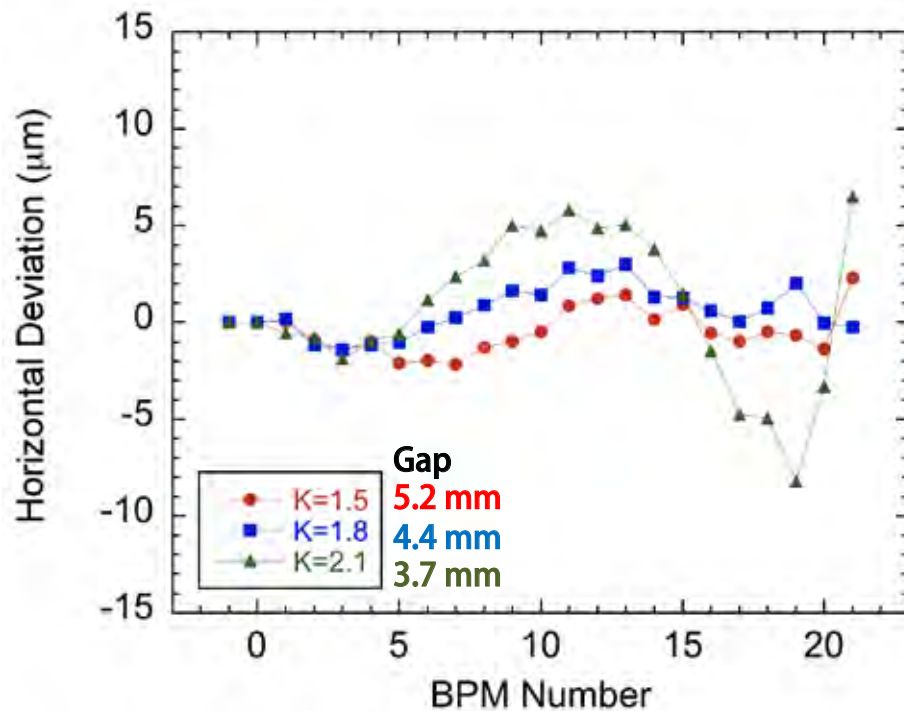


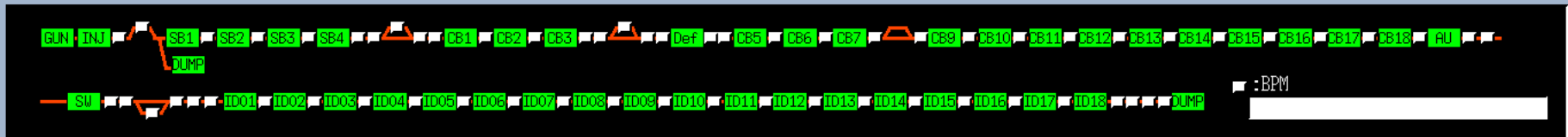
BPM-BL3-0-5 X

BPM-BL3-0-5 Y

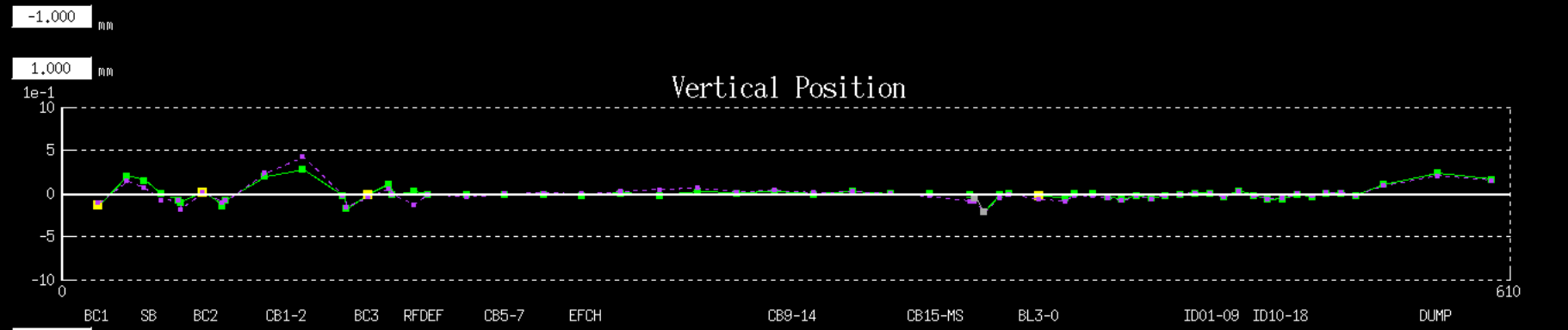
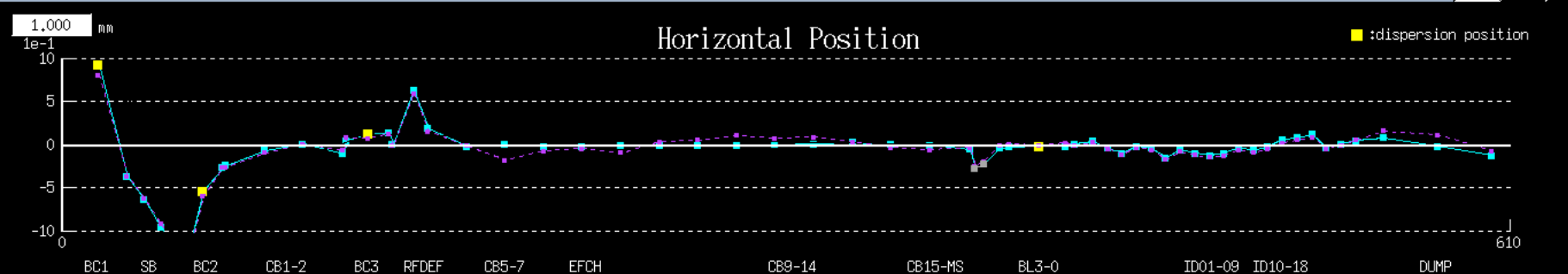
- ビーム位置（図のX軸とY軸）とXFEL強度（図の色）の相関
- どの軌道が最適かがひと目で分かる
- 最適な軌道に合うようにフィードバック制御している

- アンジュレータのギャップを変えたときの軌道変動の測定に RF-BPM のデータが使われている
 - 軌道はステアリング電磁石で補正
 - 補正量はRF-BPMデータをもとにしたフィードフォワードテーブルで決定
- 軌道再現性は $10 \mu\text{m}$ 以内





DB FM mysql



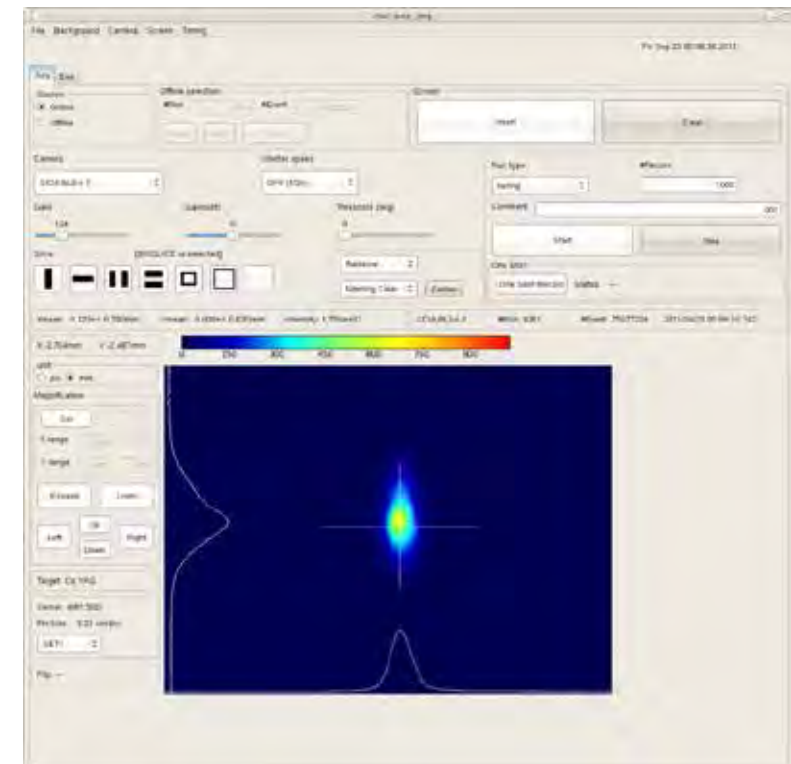
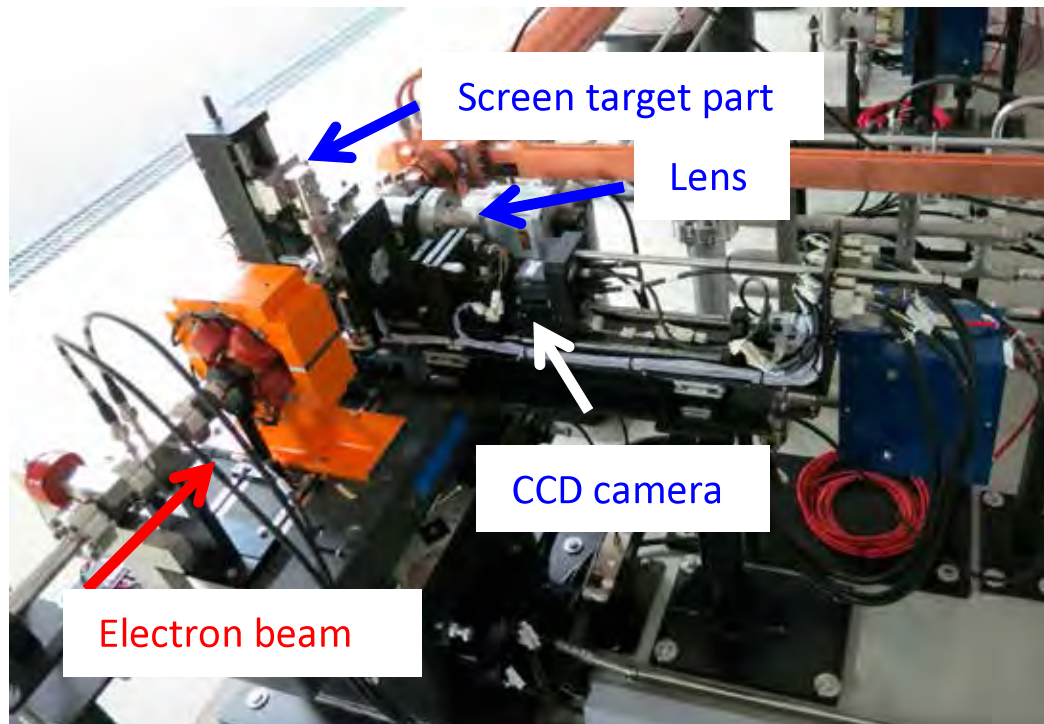
Reference

- 2012/06/22 09:38:00 ON
- 2012/06/21 10:00:00 OFF
- 2012/06/19 15:30:00 OFF
- 2012/06/14 12:25:00 OFF
- 2012/06/01 11:00:00 OFF

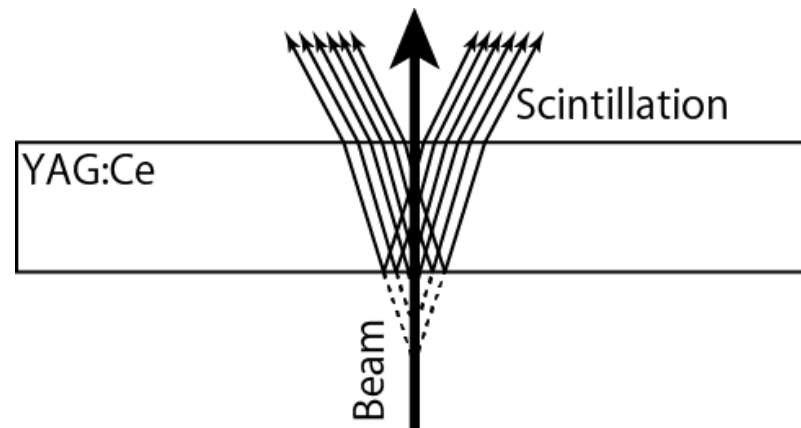
```

2012/ 6/22 10: 9:56 , xfel_mon_bpm_b13_1_2_2 : Y cavity amplitude over voltage.
2012/ 6/22 10: 9:56 , xfel_mon_bpm_b13_1_2_2 : X cavity amplitude over voltage.
2012/ 6/22 10: 9:56 , xfel_mon_bpm_b13_1_2_1 : X cavity amplitude over voltage.
2012/ 6/22 10: 9:55 , xfel_mon_bpm_b13_1_2_2 : Y cavity amplitude over voltage.
2012/ 6/22 10: 9:55 , xfel_mon_bpm_b13_1_2_2 : X cavity amplitude over voltage.
2012/ 6/22 10: 9:55 , xfel_mon_bpm_b13_1_2_1 : X cavity amplitude over voltage.
2012/ 6/22 10: 9:54 , xfel_mon_bpm_b13_5_1_2 : Y cavity amplitude over voltage.
2012/ 6/22 10: 9:54 , xfel_mon_bpm_b13_5_1_1 : X cavity Q channel over voltage.
    
```

- 電子ビームのプロファイルを測定
 - 10 μm 以下の分解能
 - SACLAの電子ビームは 8 GeVまで加速されると半径数10 μm
 - 四極電磁石で絞ると 10 μm 以下になることもある



- OTR (遷移放射光) , および, 蛍光を利用
- OTRスクリーン: 金属ミラー
 - $1/\gamma$ rad の前方に集中することに注意
 - Coherent OTR (後述) の問題もあり
- 蛍光体: YAG:Ce, AF-995R (Desmarquest)
 - 像のにじみに注意
 - YAG:Ce は透明のため, 表面の反射によって光源の実質的な厚みが増すので極力薄いほうがよい
 - AF-995Rは不透明なため, 乱反射によるにじみが避けられない



- レンズの開口数 (Numerical Aperture)

- $NA = n \sin \theta$

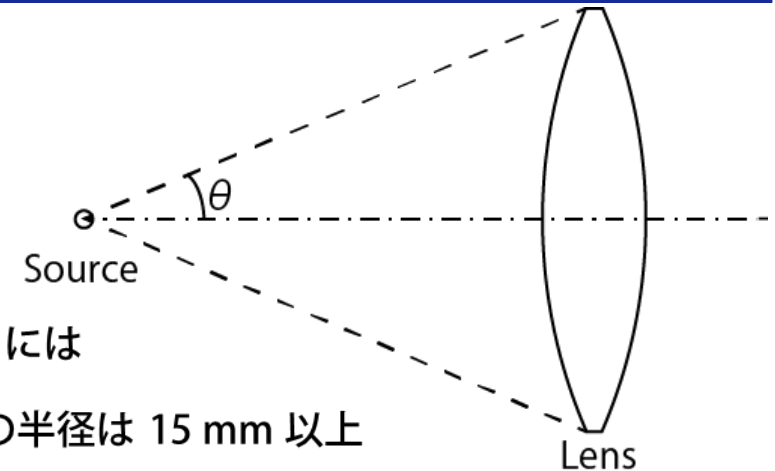
- 光学分解能 δ

$$\delta = \frac{0.61 \times \lambda}{NA}$$

波長 $0.5 \mu\text{m}$ の光に対し, $2 \mu\text{m}$ の光学分解能を得るには

$NA \approx 0.15$ が必要

レンズが光源から 100 mm 離れているとき, レンズの半径は 15 mm 以上



- 焦点深度 d

$$d = \frac{\lambda}{NA^2}$$

上の条件の場合, 焦点深度は $86 \mu\text{m}$

- 焦点距離 f

$$\frac{1}{L} + \frac{1}{L'} = \frac{1}{f}$$

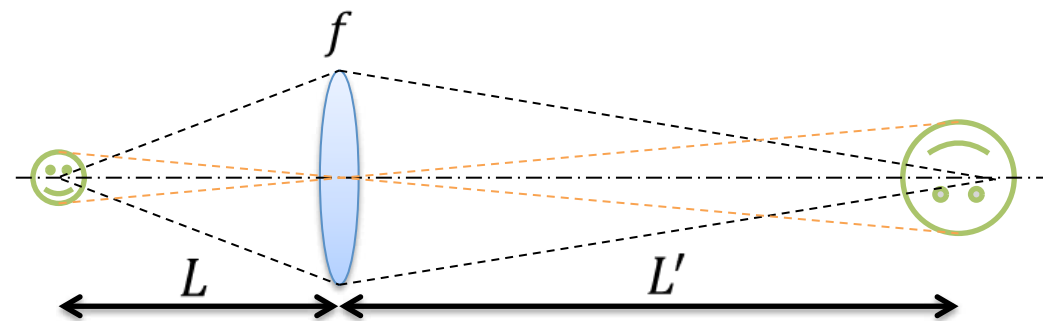
L : 光源からレンズまでの距離

L' : レンズから結像面までの距離

- 光学倍率 m

$$m = \frac{L'}{L}$$

CCDカメラのピクセルサイズが $8 \mu\text{m}$ のとき, $2 \mu\text{m}$ の分解能を得るには, 4倍光学系が必要



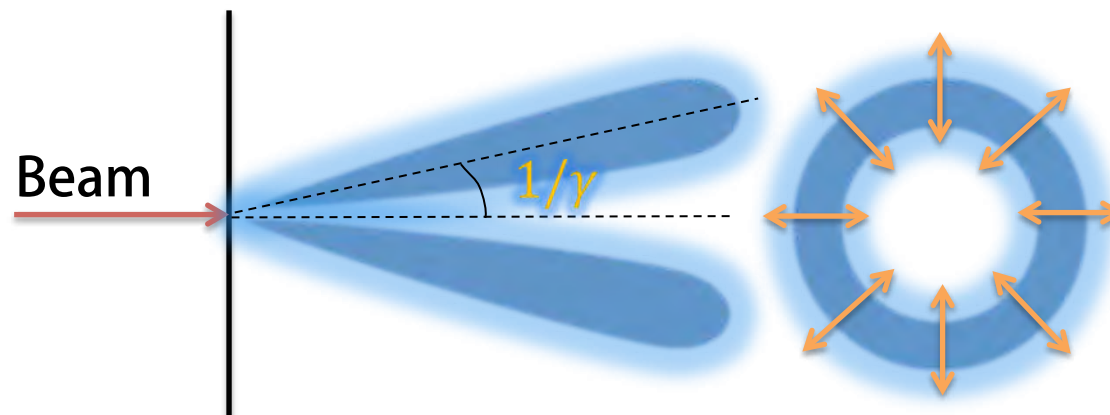
- OTRの光学分解能のパラドックス
 - OTRは $1/\gamma$ [rad] の前方に出るので、レンズを大きくしても実質的なNAは大きくならない
 - 例えば、1 GeVの電子ビームの場合、 $1/\gamma \approx 0.5$ [mrad]
 - たとえその10倍の角度までNAがあるとしても、 $\delta \sim 60$ [μm]にしかない

- OTRの光学分解能 δ_{OTR}

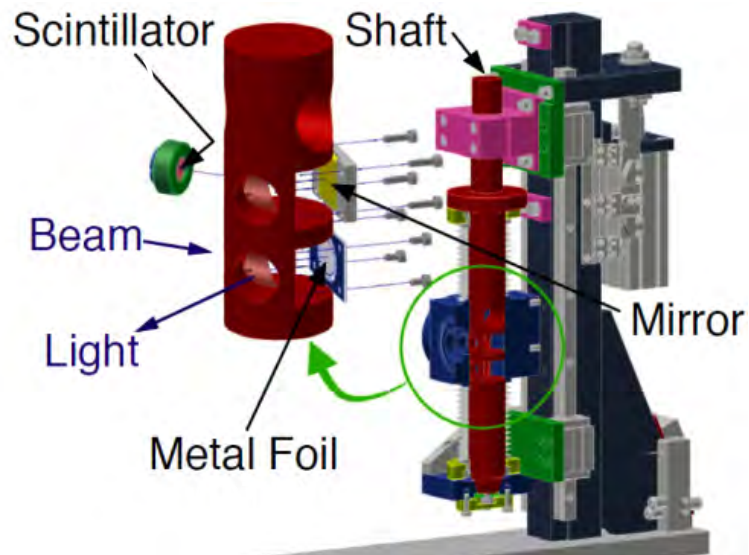
ビームエネルギーが十分高いとき ($\gamma \gg 1$)

$$\delta_{\text{OTR}} \approx \frac{1.44 \times \lambda}{\text{NA}}$$

上の例だと、 $2 \mu\text{m}$ の光学分解能を得るには $\text{NA} \approx 0.36$ が必要
光源から100 mmのレンズだと、半径39 mm以上



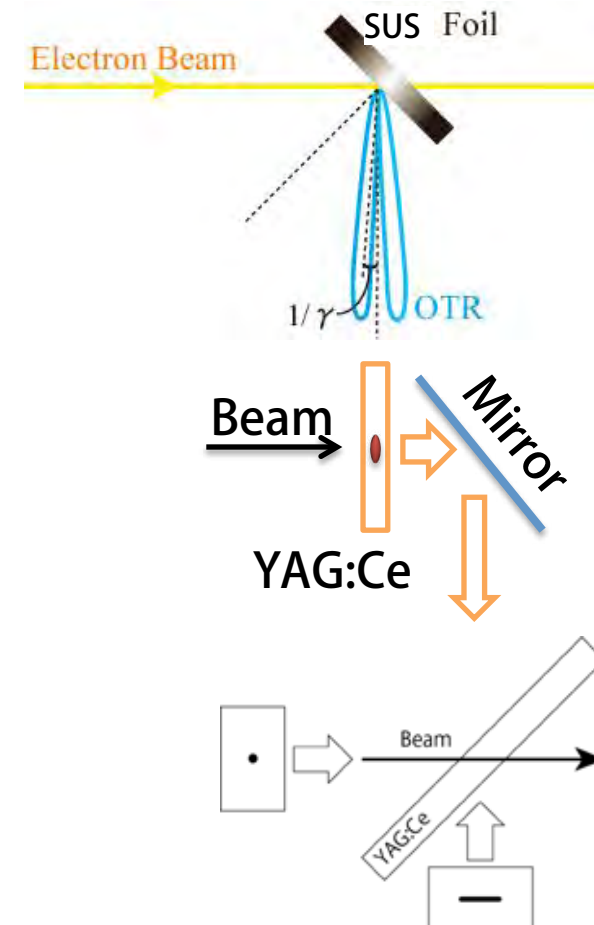
- **必要な機能**
 - 最大で2種のターゲットを選択できること
 - 必要に応じてOTRと蛍光体などが使い分けできるように
 - ターゲットの位置精度・再現性が 10 μm 以内
 - ビーム位置を正確に知るため
 - フォーカスがずれないようにするため
 - ターゲットからの光がビームに対して90度方向に出せること
- **SACLAのスクリーンモニタチャンバ**
 - 3段式ニューマチックアクチュエータ（圧縮空気駆動）
 - ターゲットは鉛直のシャフトに取り付け
 - シャフトは上下でリニアガイドに固定（両持ち）
 - 光を取り出せるよう、ターゲットやミラーが45度の角度で取り付けられる
 - YAG:Ce はビームに垂直に取り付け

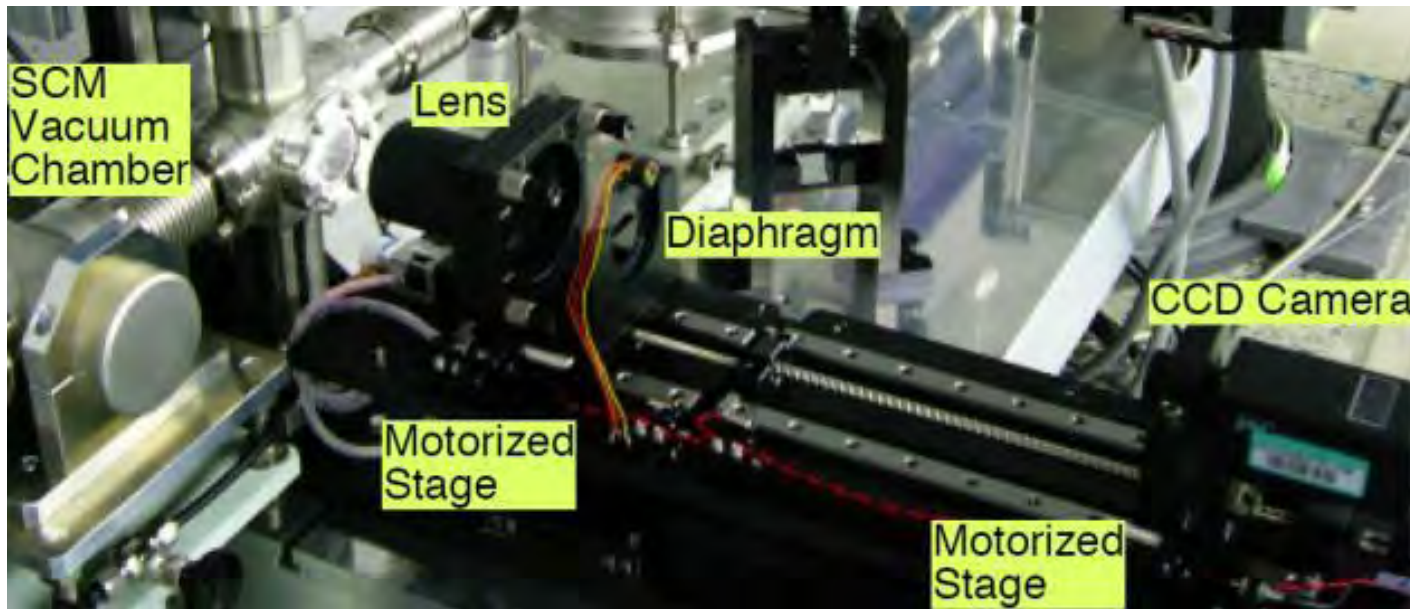


- OTRターゲット
 - 厚さ0.1 mmのステンレスミラー
 - 平面度 $3 \mu\text{m}$, 面粗度 $R_a 4.8 \text{ nm}$
 - エミッタンス悪化の低減, ビームロスの低減
 - エミッタンスはビームが通せなくなるほどまでは悪化しない
 - 10枚のフォイルを拡散接合して枠を形成
 - 45度に傾けておくとOTRは90度方向に出る

- AF-995R (Desmarquest)
 - 主に入射部で使用
 - 厚さ 1 mm
 - 45度に傾けておき, 90度方向から撮像

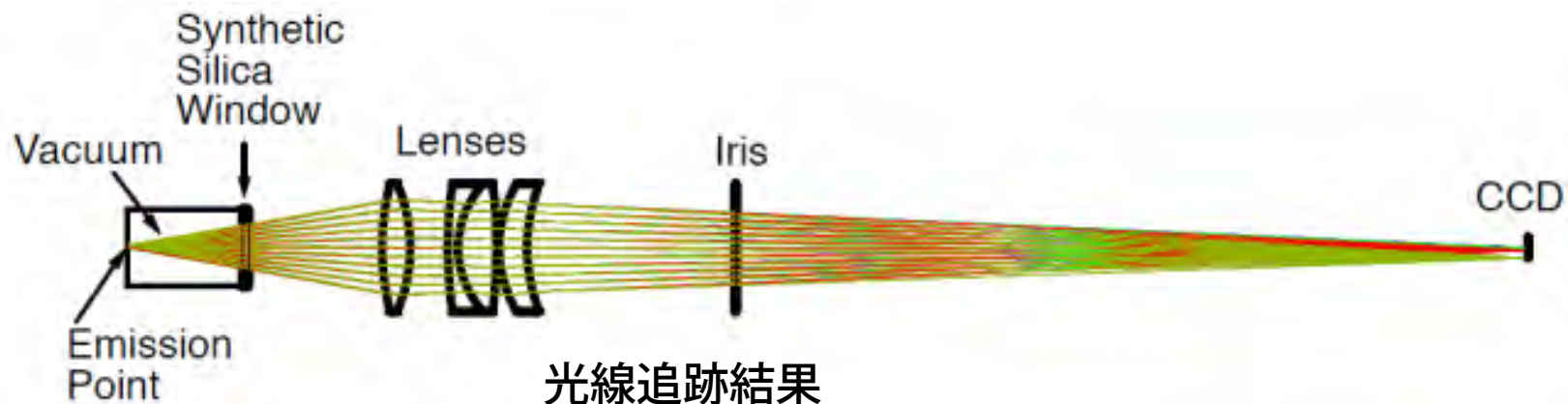
- YAG:Ce
 - 厚さ 0.1 mm
 - 内部反射の影響などを抑えるため
 - ビームに垂直に設置し, すぐ後ろのミラーで90度方向に反射
 - 透明なため, 45度に傾けるとビームの軌跡の長さが見えてしまう





- レンズ・絞り・CCDカメラなどを一直線上に配置
- 倍率やフォーカスを自動で遠隔操作できるものと手動のものがある
 - 自動のものはリニアガイドにレンズなどを載せた
- 光学分解能の目標： $2 \mu\text{m}$
 - CCDカメラのピクセルサイズが $6.45 \mu\text{m}$ のため、4倍光学系とした
 - 4倍のとき、視野が狭くなるので、1-4倍の可変とした
 - CCDカメラの移動量 200 mm
 - 光学系の全長 600 mm
 - このような長いもので十分に位置精度の高いものが必要

- 開口数 NA
 - $2\mu\text{m}$ 程度の光学分解能を得るには NA が 0.2 程度必要
 - 光源からレンズまでの距離は100 mm程度必要のため、レンズの直径は40 mm以上
 - したがって、レンズの直径を 50 mmとした
 - なお、分解能が低くてもよいところは市販のアクロマートレンズを組み合わせ使用
- レンズの設計
 - OTRの広いスペクトルにわたって収差なく結像できる必要あり
 - 低分散ガラスの使用
 - レンズ枚数をなるべく少なく
 - 光学シミュレーションソフトウェア ZEMAX を使って設計
 - レンズは3群4枚となった
 - 光学分解能は $2.5\mu\text{m}$ (計算値)



• CCDカメラ

- JAI社のモノクロCCDカメラを使用
- CameraLinkにてデータを転送
- CameraLink切替器で該当するCCDカメラを選択してビームプロファイルを見る

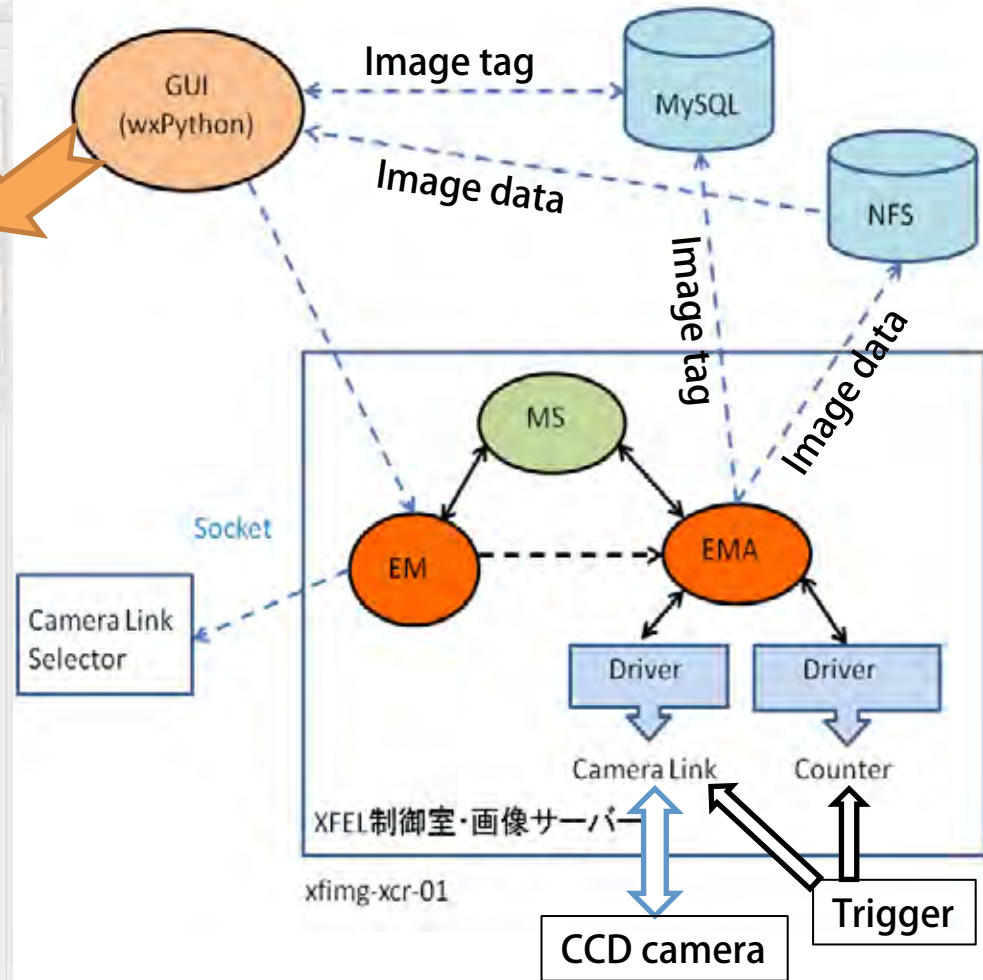
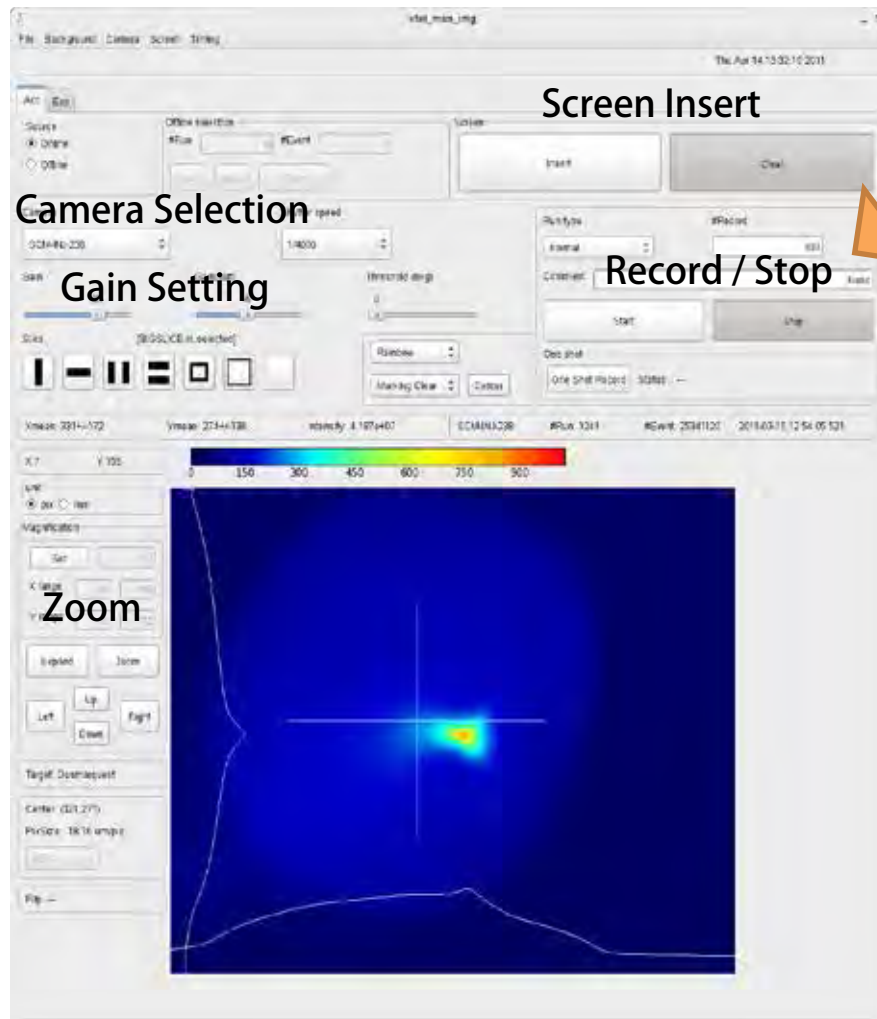
	CV-M4+CL	CV-A10CL
CCD型	2/3型	1/2型
CCDサイズ	8.8 x 6.6 mm ²	6.4 x 4.8 mm ²
画素数	1380 x 1030	768 x 576
画素サイズ	6.45 μm	8.3 μm



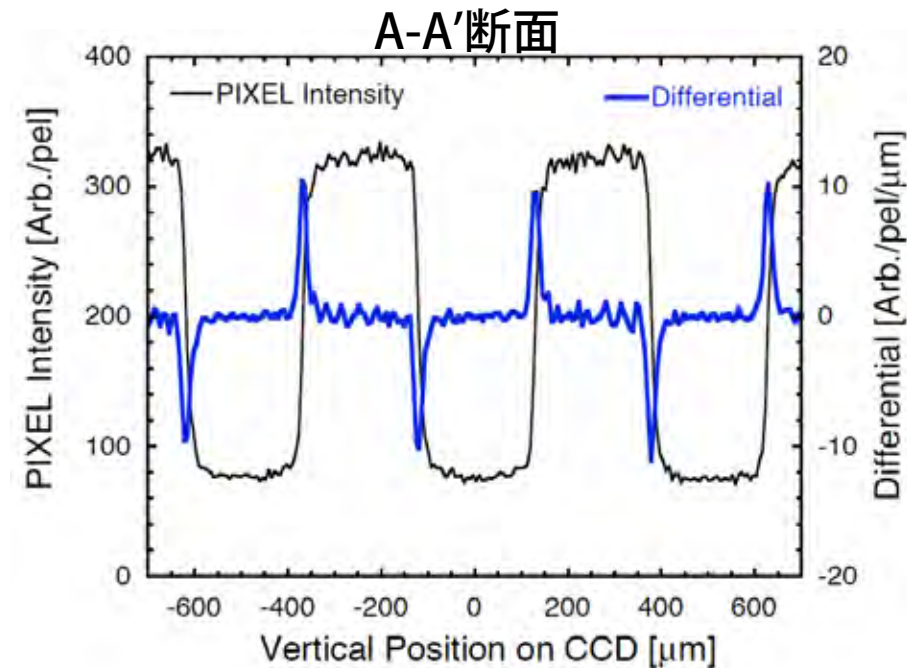
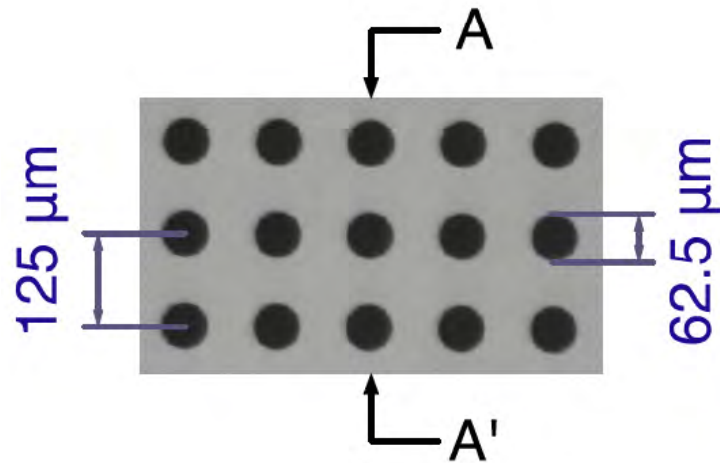
• 絞り

- 遠隔操作できるように電動式とした
- 日本精密測器社 V-6335RH
 - 最大開口 直径 35 mm



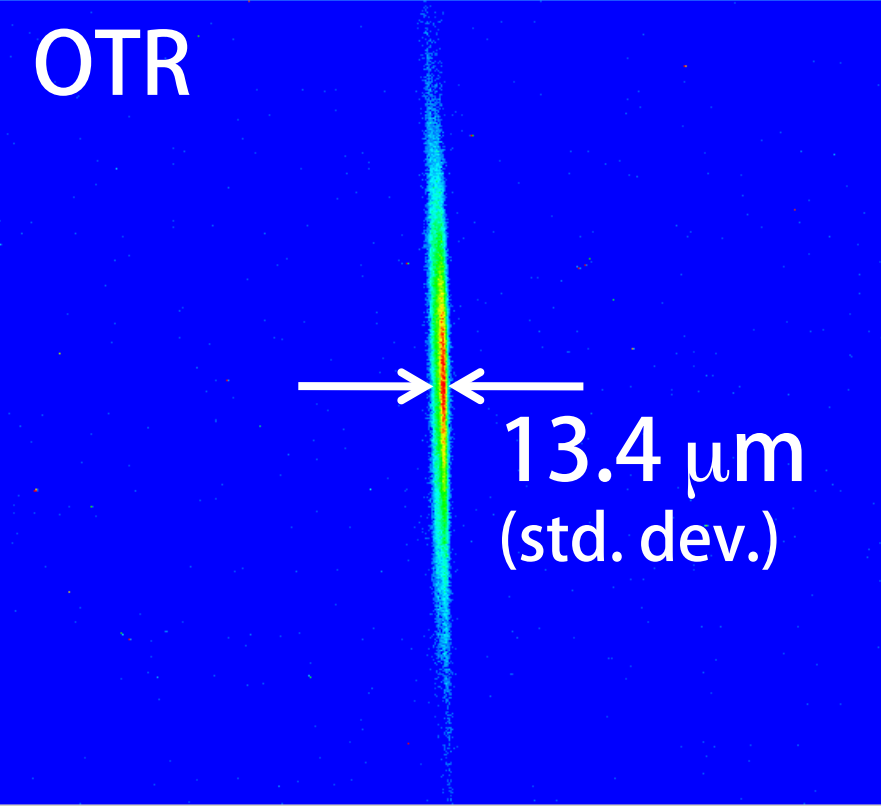


- カメラリンク経由でカメラサーバに記録される
- GUIで画像の閲覧やスクリーンの選択など各種操作が可能



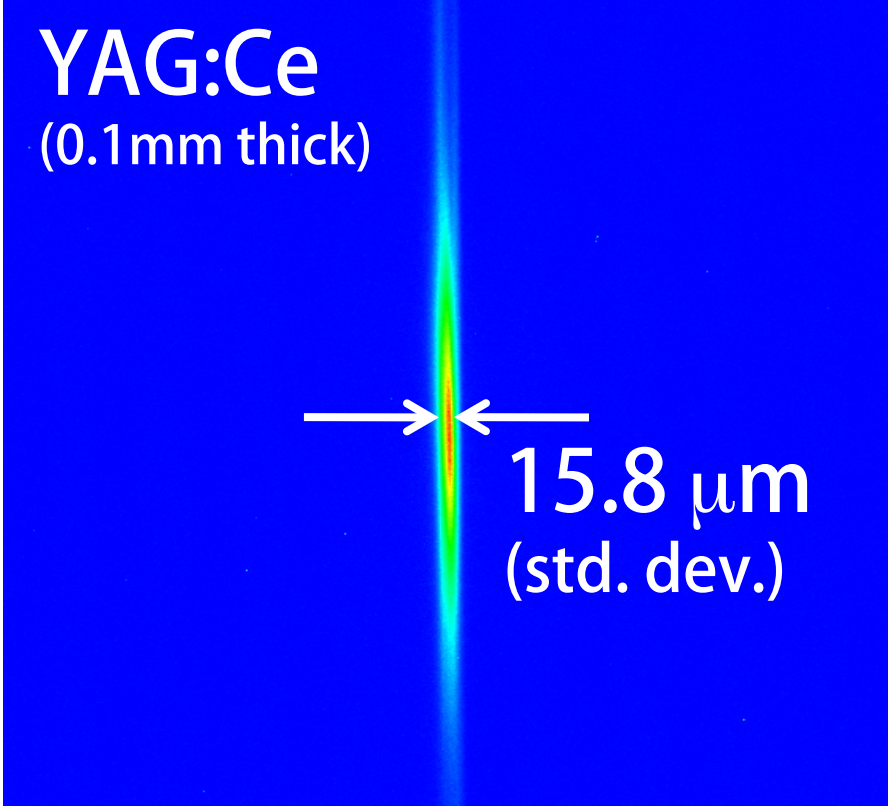
- グリッドディストーション図表を使用
- パターンのエッジの微分（青線）のHWHM (Half Width at Half Maximum) を分解能とする
- 4倍光学系するとき, 像面で 9.9 μm の分解能
- 物体面で 2.5 μm の分解能
- 設計通りの結果

OTR



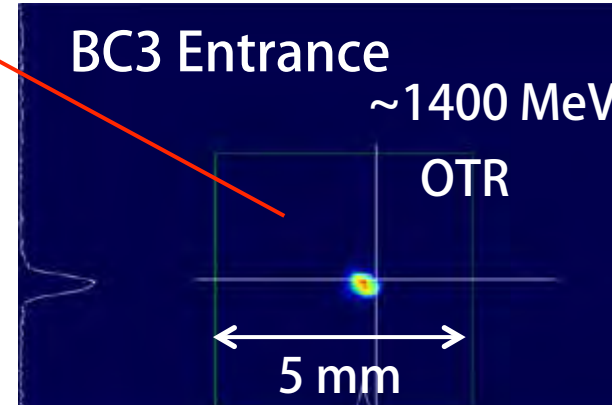
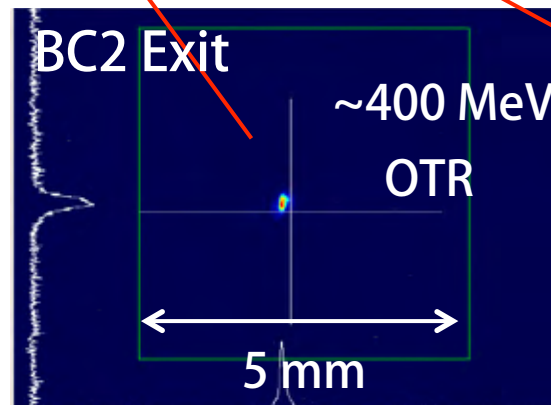
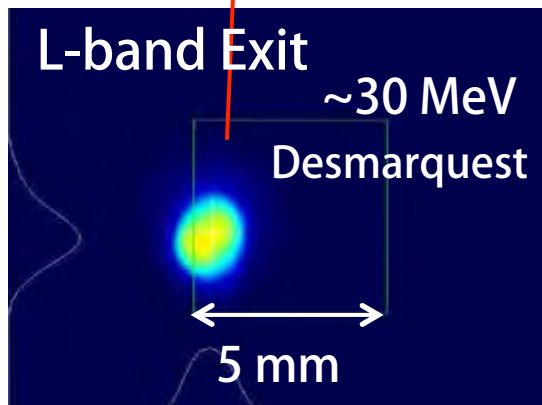
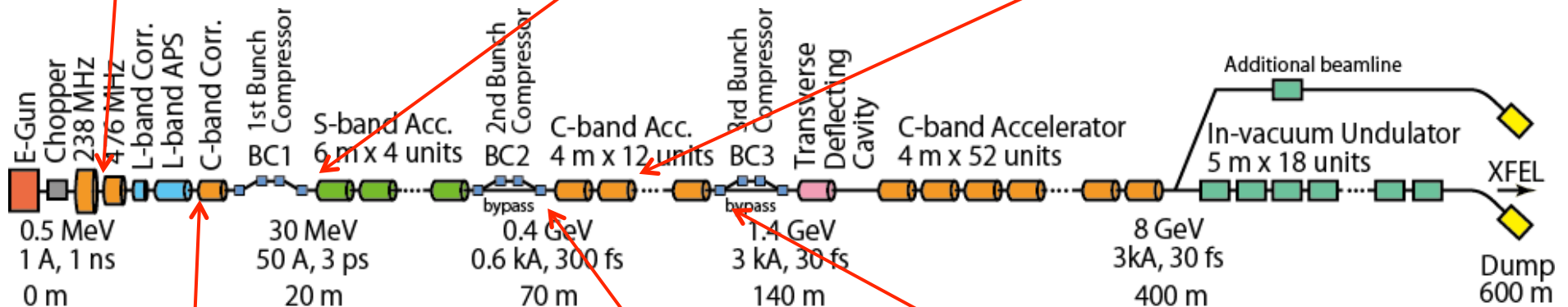
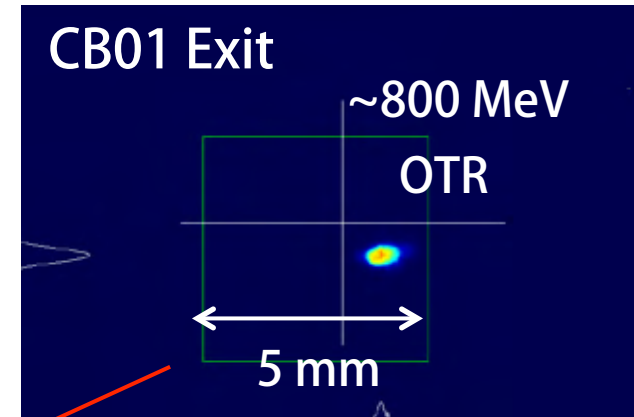
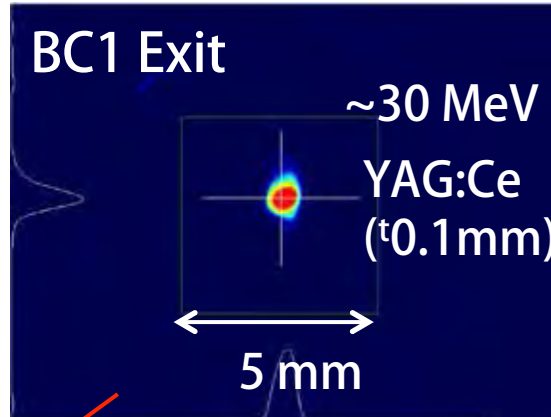
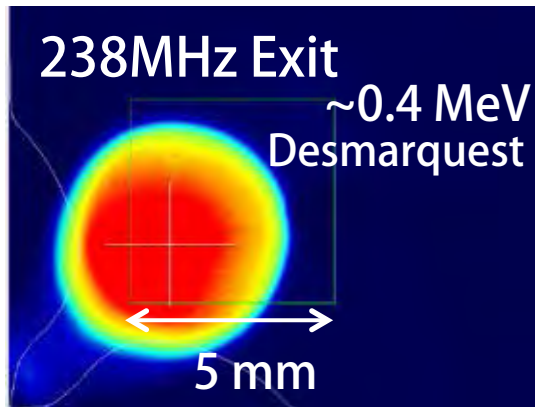
13.4 μm
(std. dev.)

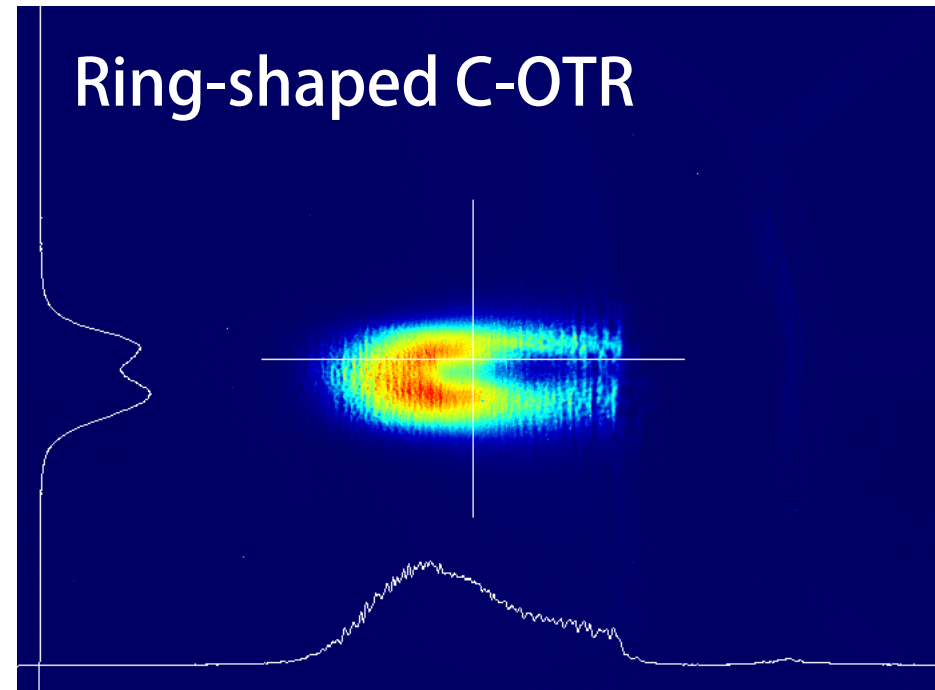
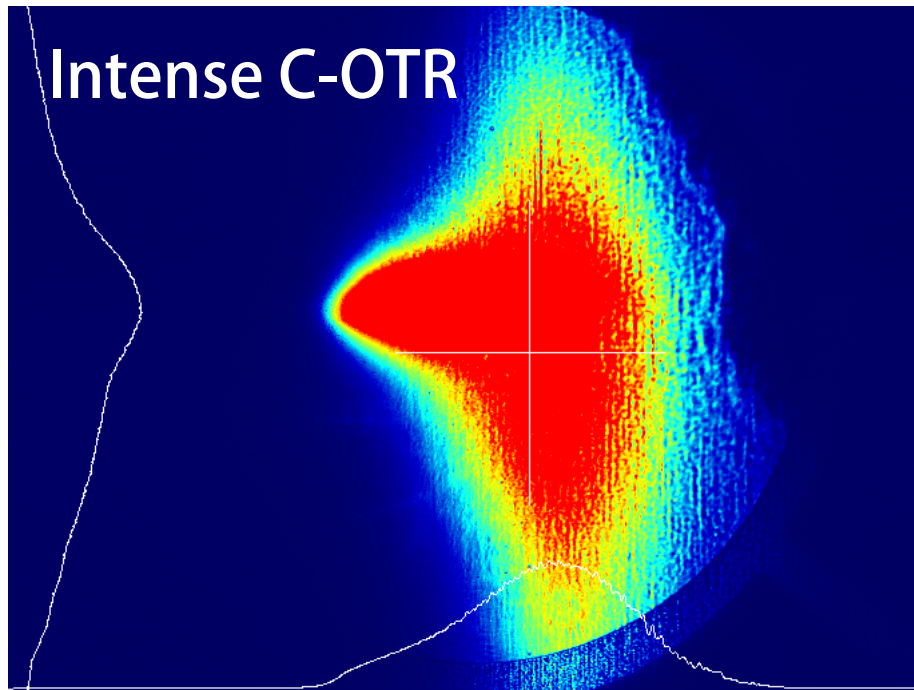
YAG:Ce
(0.1mm thick)



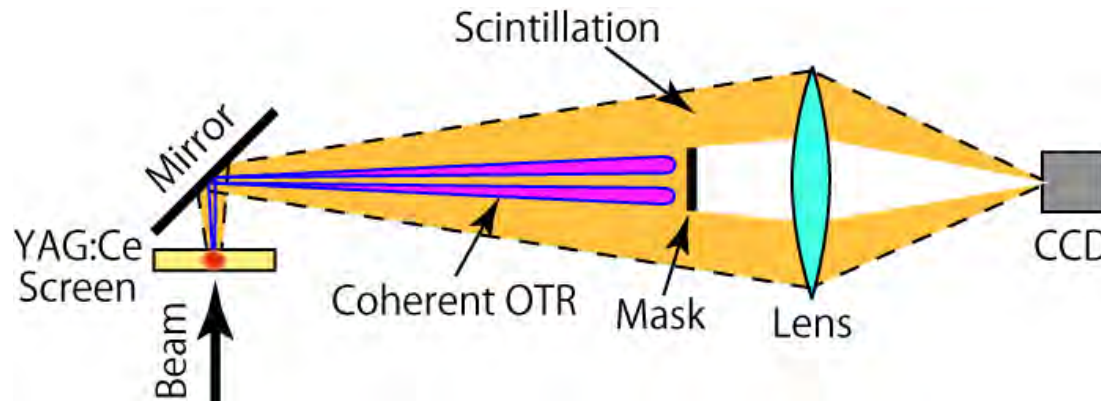
15.8 μm
(std. dev.)

- SCSS試験加速器にて測定
 - ビームエネルギー: 250 MeV
 - 四極電磁石で水平方向に収束
- 10 μm あまりのビーム幅 (標準偏差) を適切に測定
 - SCSS試験加速器で得られる最も細いビーム
- YAG:Ceの幅が少し広いが分解能の悪化は10 μm 以下

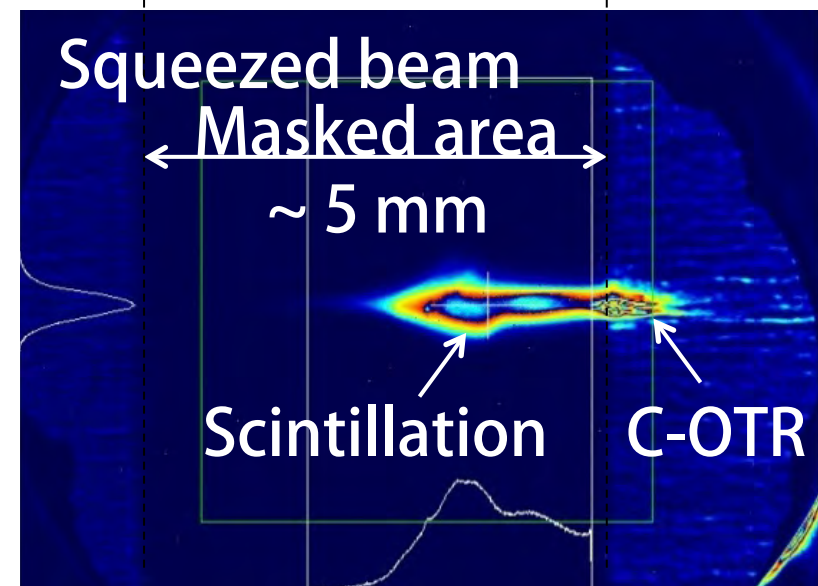
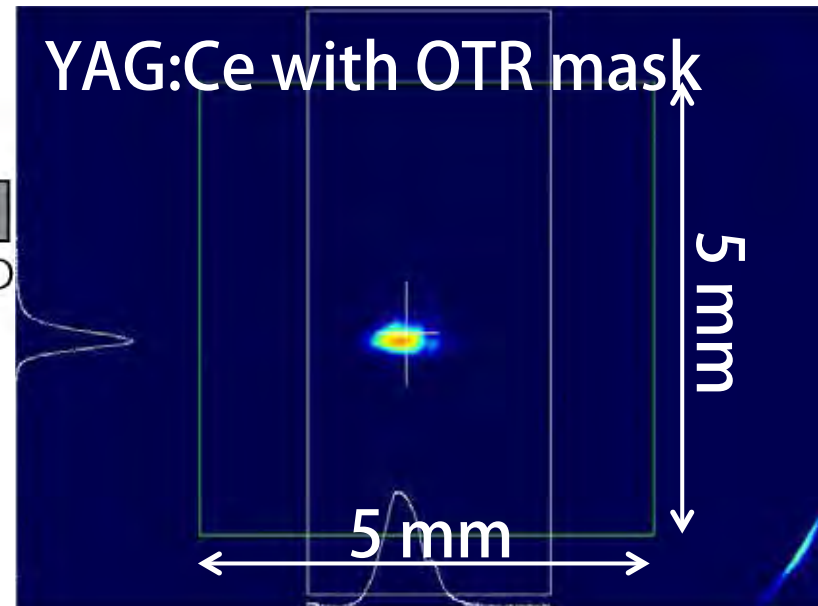


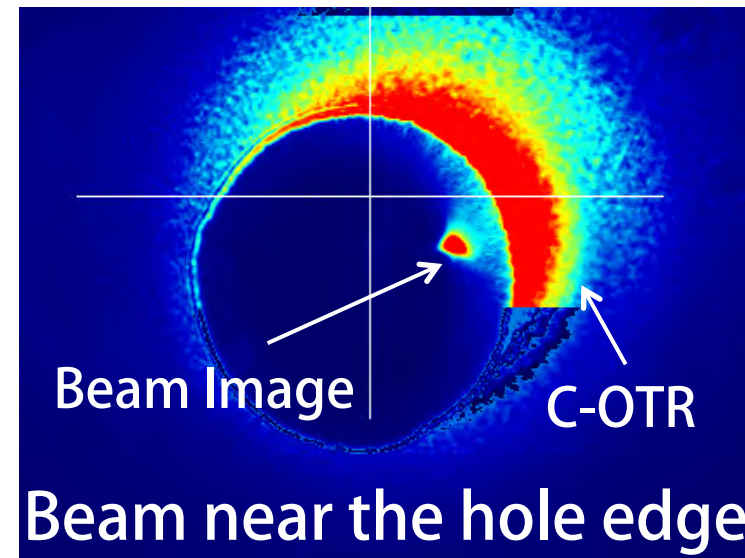
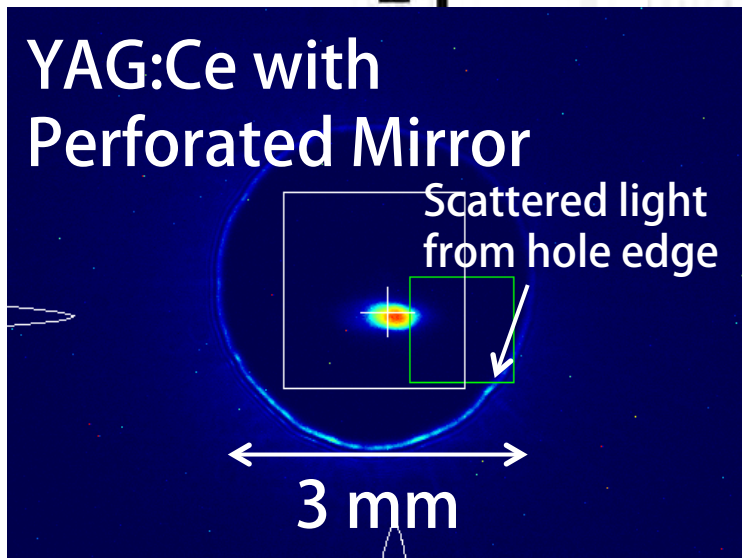
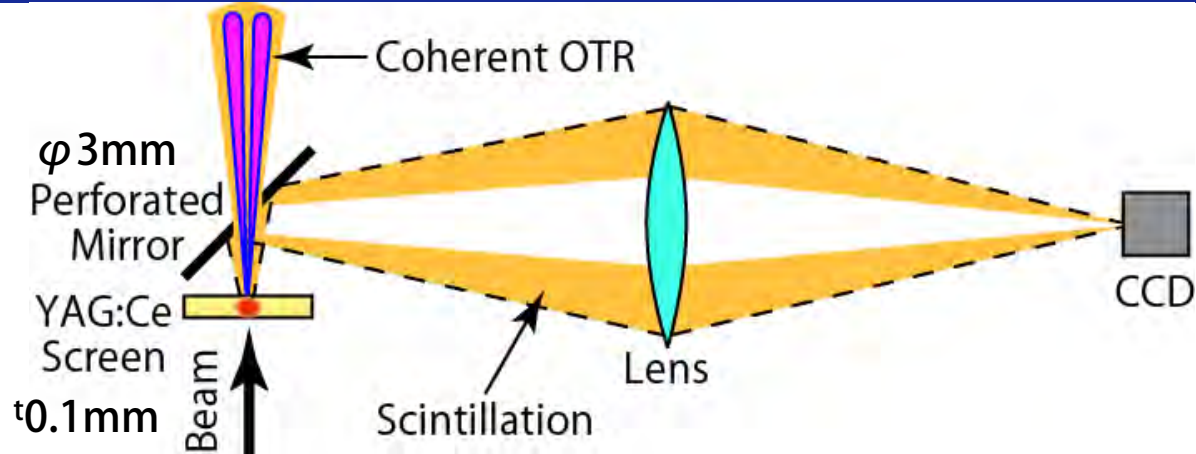


- バンチ長が 100 fs 以下になると、コヒーレント OTR (C-OTR) による異常発光がみられた
 - 電子ビームに可視光の波長と同程度の時間構造がある
ようだ
- ターゲットをYAG:Ceに変えても依然としてC-OTRが発生



- ターゲットを YAG:Ce とした
 - C-OTR は依然として発生
 - YAG:Ce の蛍光は方向性をもたない
- OTRマスク
 - OTR は $1/\gamma$ [rad] の前方に放射
 - 5 mm 幅のマスクを設置
- これで YAG:Ce の蛍光だけが結像され、ビームプロファイルを測定できるようになった

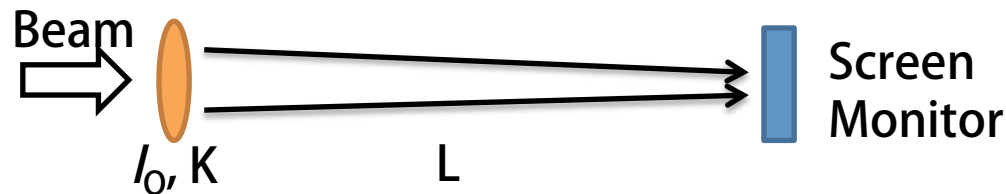




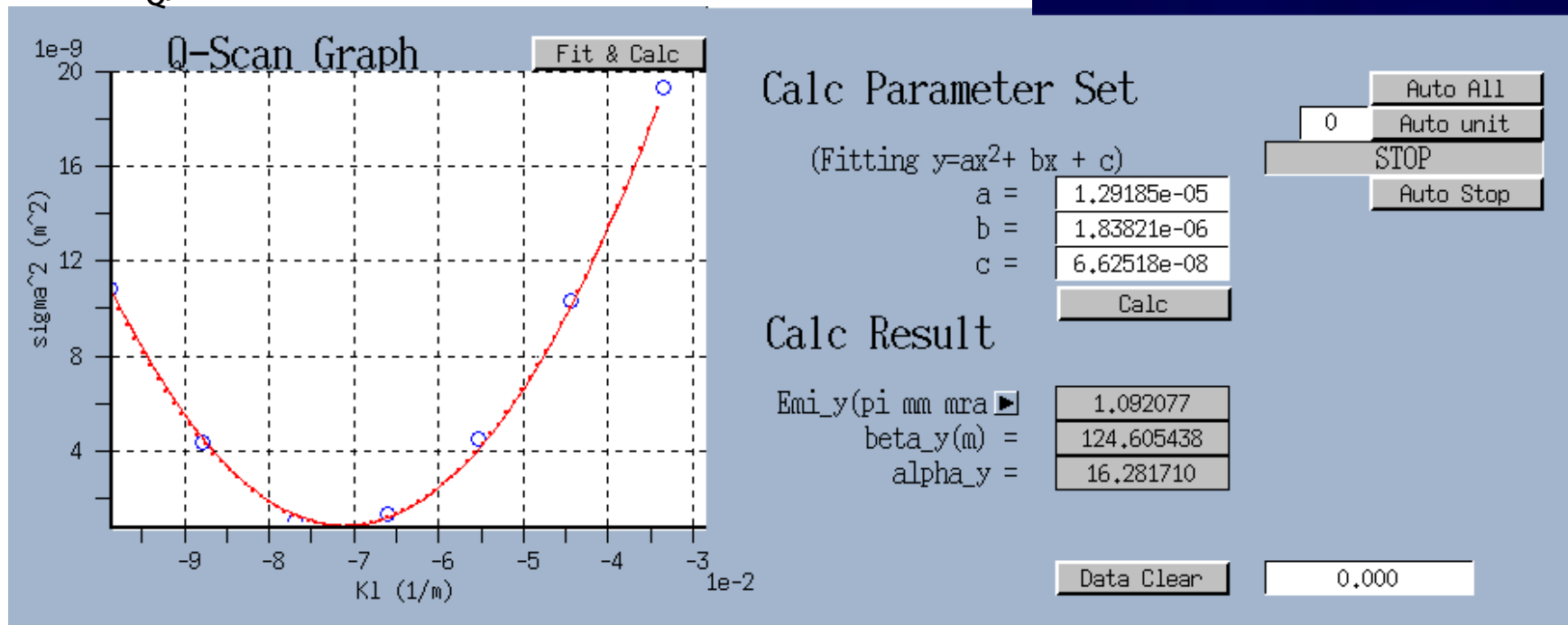
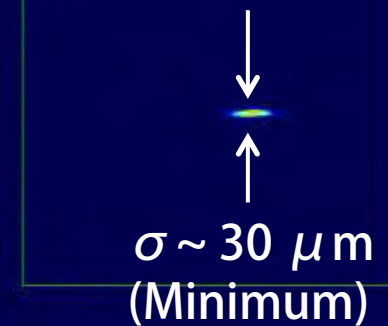
- 電子ビームや YAG:Ce からの C-OTR はそのすぐ後ろのミラーの穴から下流へ逃がす
- 蛍光だけを穴あきミラーで反射
- ビームを穴のエッジに近づけると C-OTR が観測される

Qスキャン法

$$\sigma_x^2 = \beta\varepsilon \left(Ll_Q K + \frac{\alpha L}{\beta} - 1 \right)^2 + \frac{\varepsilon L^2}{\beta}$$



YAG:Ce with OTR mask
($t \approx 0.1\text{mm}$)



規格化エミッタンス： 1.09 mm mrad

- 電子ビームに付随する磁場をコイルでピックアップする検出器
 - Current Transformer
- 計算例
 - 半径 a の円筒にエネルギー $\gamma m_e c^2$, 電荷 q の電子ビームが通っている
 - 電流の z 依存性は矩形とする

ビーム電流 I_{beam}

$$I_{\text{beam}}(t) = \begin{cases} \frac{q}{T} & (0 \leq t \leq T) \\ 0 & (t < 0, T < t) \end{cases}$$

表面電荷密度 σ

$$\sigma(t) \simeq \begin{cases} \frac{q}{2\pi a c T} & (0 \leq t \leq T) \\ 0 & (t < 0, T < t) \end{cases}$$

γ が十分大きく, 表面電荷の幅とビームの幅が同じとした

表面の電磁場

$$E_\rho(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a c T} \quad (0 \leq t \leq T)$$

$$B_\phi(t) = \frac{E_\rho}{c} = \frac{\mu_0 q}{2\pi a T} \quad (0 \leq t \leq T)$$

等価回路の微分方程式

$$RI + L \frac{dI}{dt} = - \frac{d\Phi}{dt} = -A \frac{dB_\phi}{dt} = - \frac{A\mu_r\mu_0 q}{2\pi a T} [\delta(t) - \delta(t - T)]$$

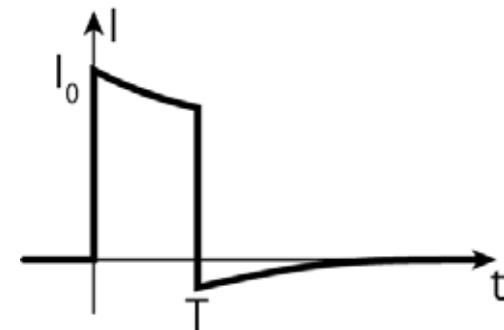
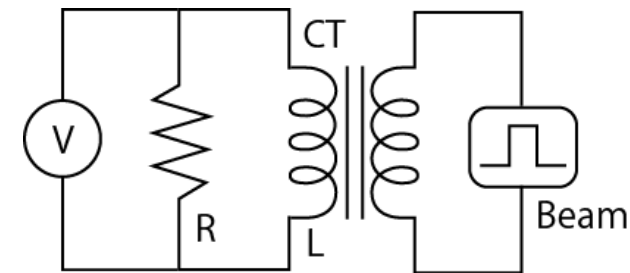
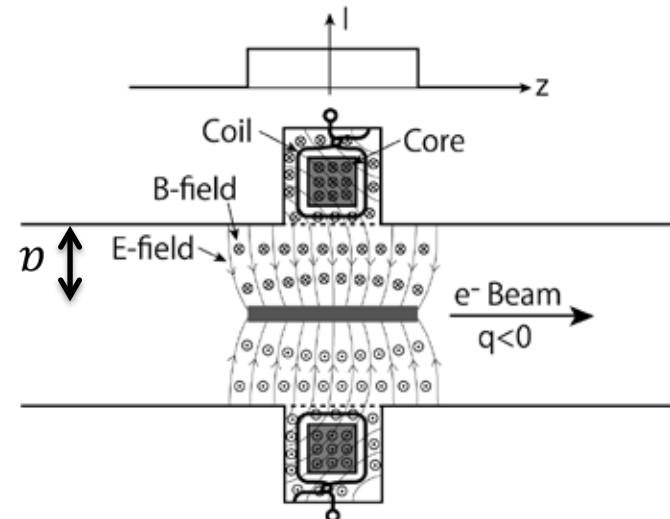
$\delta(t)$ はディラックのデルタ関数

この方程式はラプラス変換を使うと容易に解ける

解

$$I = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ I_0 e^{-\frac{R}{L}t} & (0 \leq t < T) \\ -I_0 (1 - e^{-\frac{R}{L}T}) e^{-\frac{R}{L}(t-T)} & (T \leq t) \end{cases}$$

$$I_0 = - \frac{A\mu_r\mu_0 q}{2\pi a T L}$$



- 実際の状況に近いパラメータ

- $A = 100 \text{ mm}^2$
 $\mu_r = 10$
 $q = 1 \text{ nC}$
 $T = 10 \text{ ps}$
 $a = 10 \text{ mm}$
 $L = 0.1 \text{ }\mu\text{H}$
 $R = 50 \text{ }\Omega$

- CTのピーク電流 I_0

$$I_0 = 20 \text{ A}$$

- 時定数

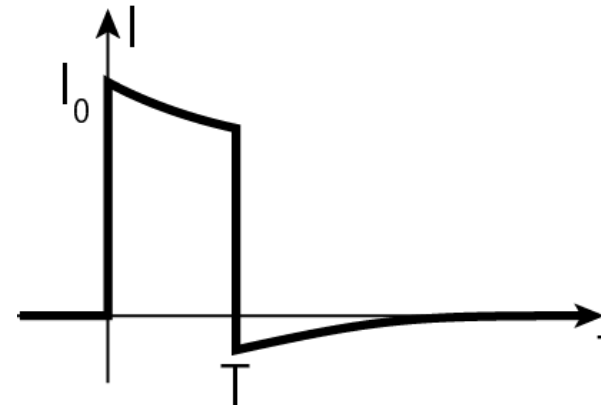
$$- \frac{L}{R} = 2 \text{ ns}$$

- このように、CTの信号にはビーム電流とバンチの時間構造の情報が含まれる
- しかし、実際のCTではコイルの有限の大きさや寄生容量、コアの周波数特性などの影響で波形がなまされて出てくる
- したがって、ビーム電流が測定できるのは信号の立ち上がり時間よりバンチ長が長い場合に限られる

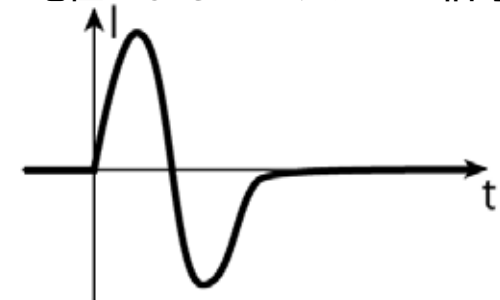
- バンチ長が短い場合は積分された波形が出ることになるので、電荷量しかわからない

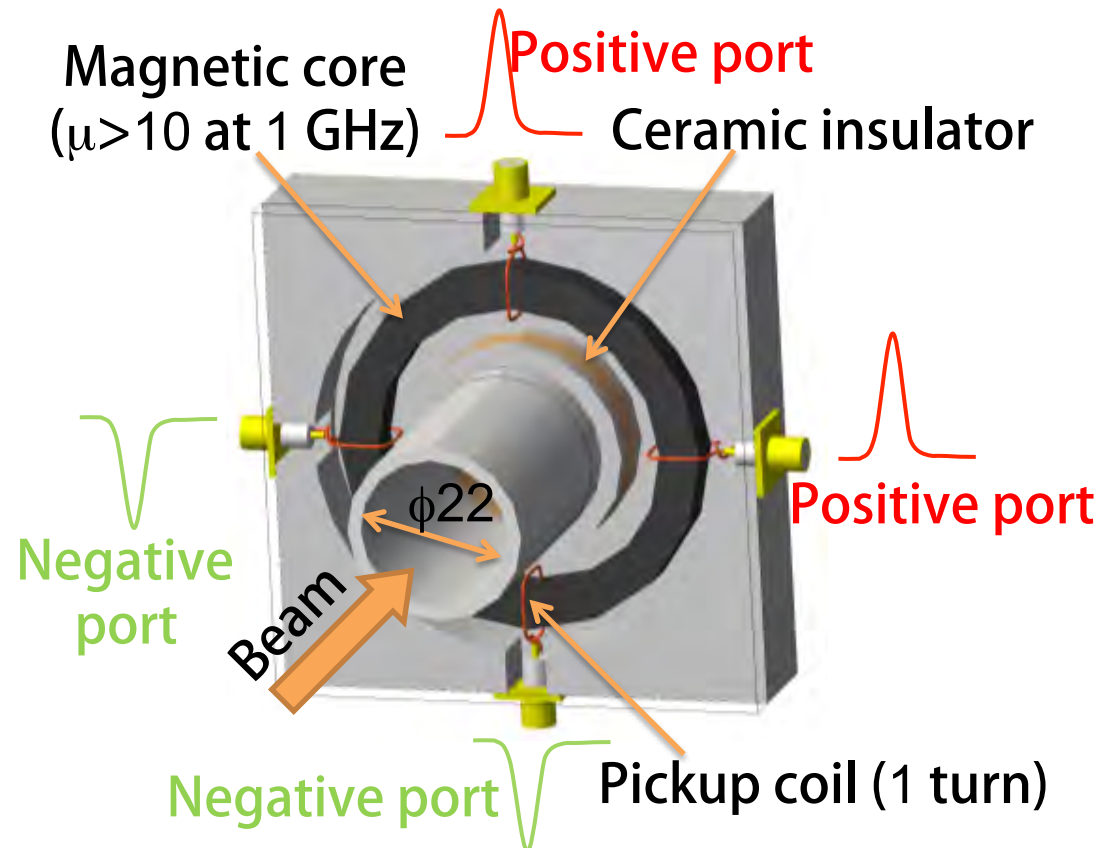
- CTの特長

- 電荷量を測定するには、RF-BPMの基準空洞を使う方法やボタン電極・ストリップライン電極を使う方法も考えられる
 - RF空洞を使う場合、ケーブルでの損失などの関係で他の検出器との比較がしづらい
 - 電極によるピックアップでは+と-の信号が続いて出てくるので、後段の回路で積分されると信号が残らない
 - それに対し、CTは単極のパルスが得られるので、簡単な回路でビーム電流や電荷量を測定することができる

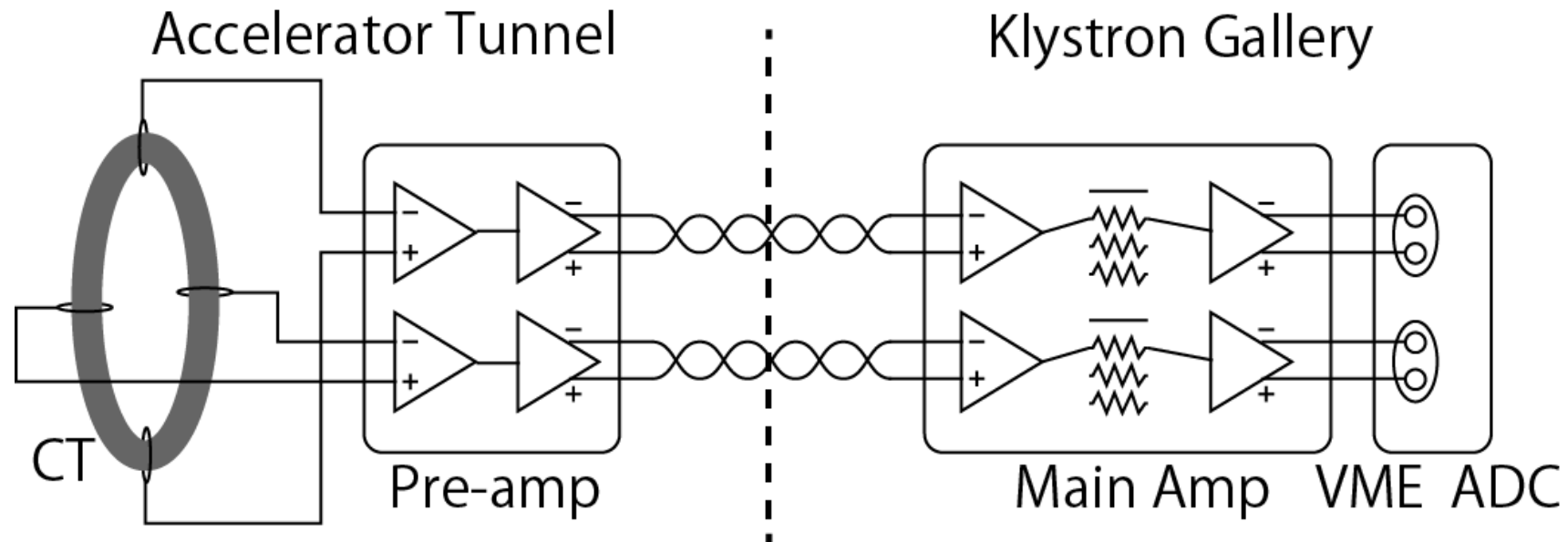


電極によるピックアップ信号

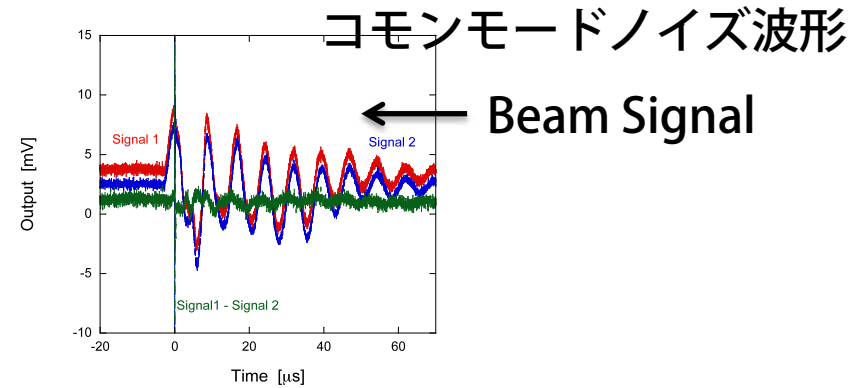
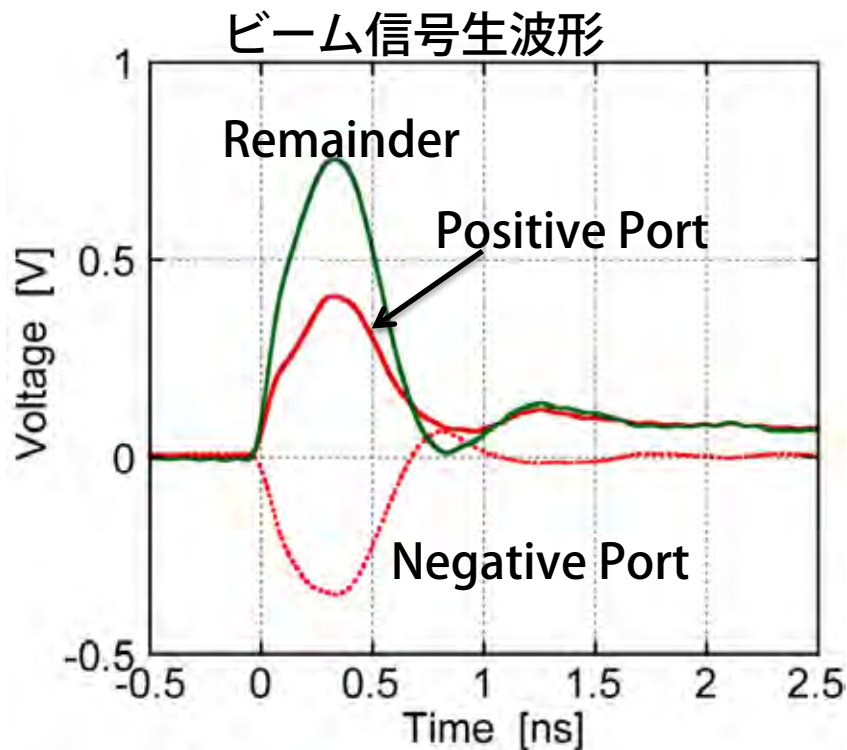




- 4ポートあり, 2つは正, 残りの2つは負の信号を出す
 - コイルを逆向きに巻いてある
 - コモンモードノイズをキャンセルできる
- 立ち上がり ~ 200 ps (10 - 90 %)
 - コイルは1巻
 - 高周波のコアを使用

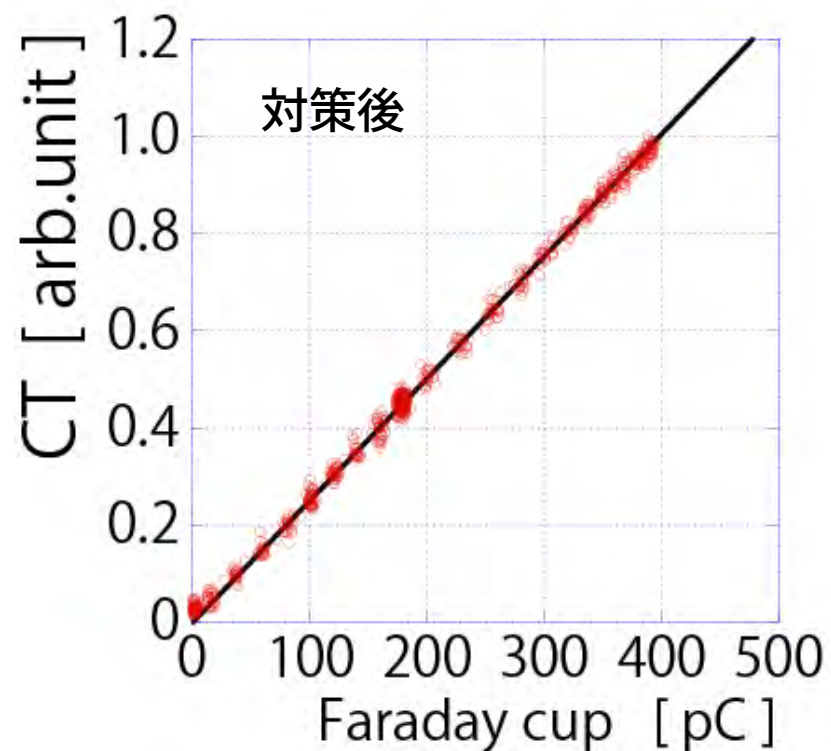
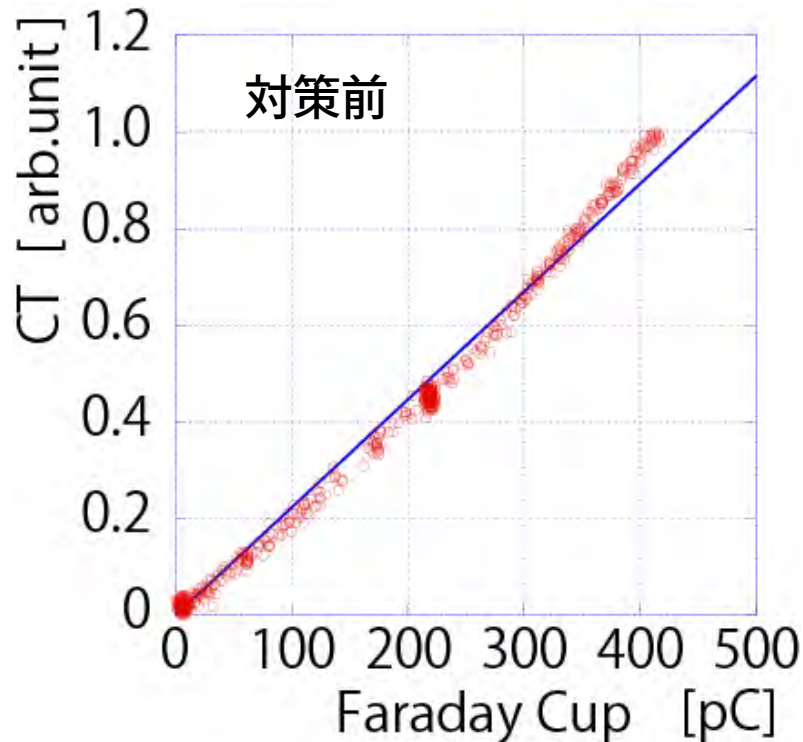


- **CTのすぐ近くにプリアンプを設置**
 - CTが拾ったコモンモードノイズを除去
 - 波形整形し高周波用差動平衡ケーブルをドライブ
 - 差動ケーブルを用いることで伝送途中でのノイズの混入を防ぐ
- **クライストロンギャラリーの主アンプで増幅・ゲイン調整し, AD変換器へ**
 - 初段アンプで伝送線路に載ったコモンモードノイズを除去
 - 切替式減衰器でゲイン調整
 - 後段のVME 238 MSPS 波形記録ADボードに送る



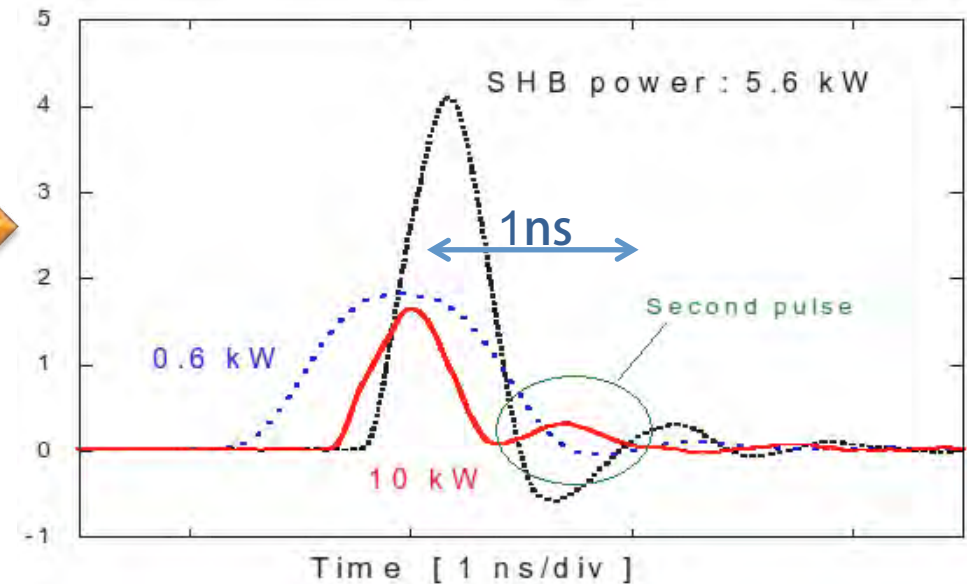
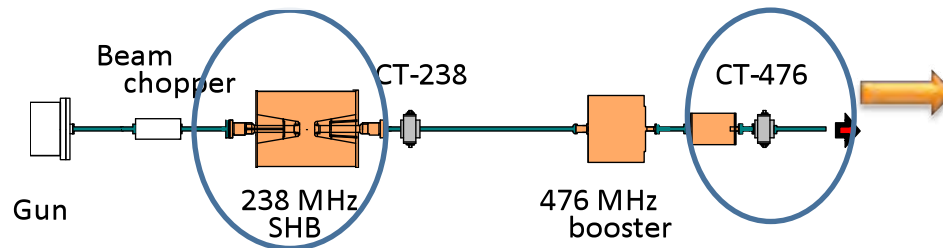
- 生波形をオシロスコープで取得
 - ビームバンチ長 < 1 ps
 - 電荷量 0.3 nC
 - オシロスコープ帯域 12 GHz
- 立ち上がり 約 200 ps (10-90%)
 - 500 ps 程度以上のバンチ長であれば測定可能
- コモンモードノイズ
 - 広い時間レンジで見ると 約 10 μ s 周期のコモンモードノイズが見える
 - 差動信号を差し引くことで、コモンモードノイズを約 1/10 に低減

- BC3の下流にファラデーカップを設置しており、それと直近の高速差動CTとを比較
 - 高速差動CTは検出回路を通してAD変換器でとった値
- 左図：高速差動CTとプリアンプの間を短い同軸ケーブルで接続
 - 当初、プリアンプの非線形性が見えていた
 - 高速差動CTからの信号が速すぎて初段アンプが非線形な応答をしていた
- 右図：高速差動CTとプリアンプとの間に30 mの細い同軸ケーブル（外径約1 mm）を接続
 - 同軸ケーブルで高周波成分を減衰させると線形な応答をするようになった

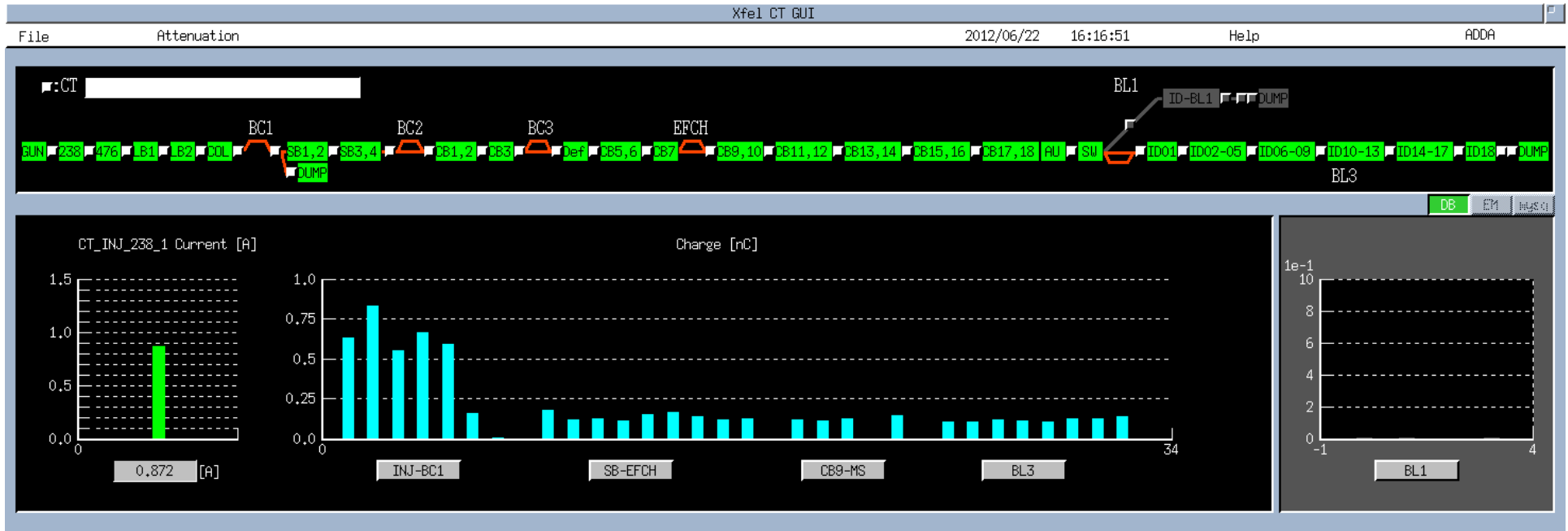


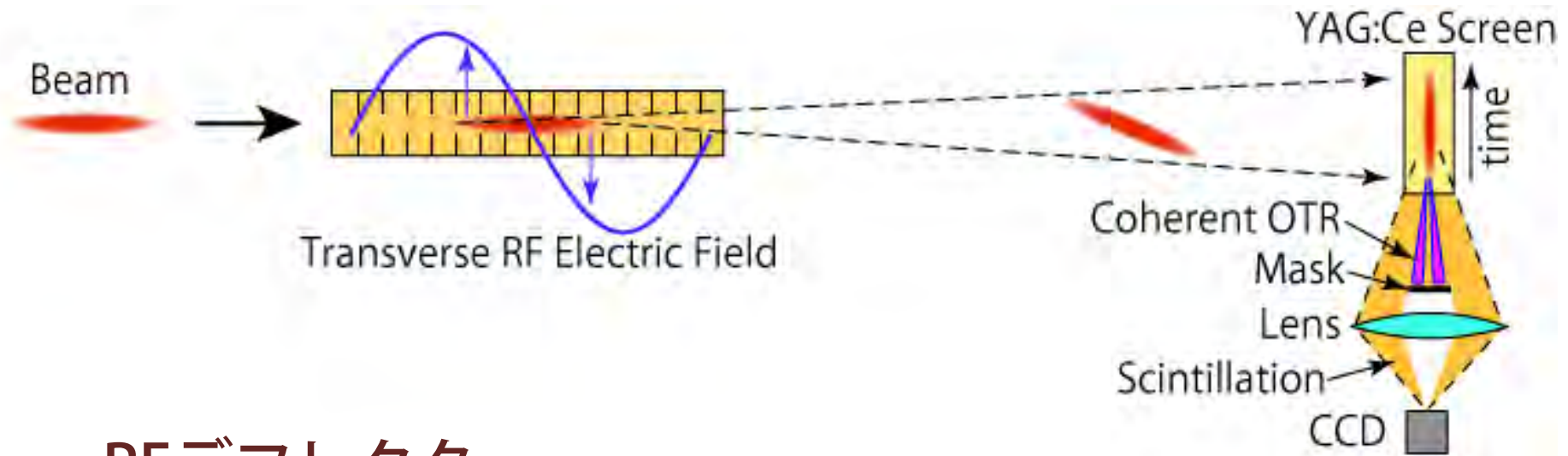
CT-476 の生波形

238 MHz SHB 空洞の加速電圧を変えたときの波形の変化を見た



- 生波形から速度変調バンチングの様子がわかる
 - 238 MHz SHB (Sub-Harmonic Buncher) のパワーを変えて CT-476 でのバンチ長を変えた
 - 生波形は 12 GHz 帯域のオシロスコープで取得
 - 400 ps (FWHM) くらいまでのバンチ長が測定可能





- RFデフレクタ
 - ビームの進行方向に対して横方向に加速する加速管
- ビームをゼロクロス位相に載せると時間に比例したキックを与えられる
- 時間構造を空間構造に変換
 - 時間掃引
- その空間プロファイルをスクリーンモニターで撮像
- 必要とされる分解能: 10 fs

- キック電圧

$$V = V_T \cos \omega t$$

- ゼロクロス位相でのキック電圧の時間微分

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_0 = V_T \omega$$

- キック後, 距離 L のドリフトしたときの位置のシフト量 Δy

$$\Delta y \approx \frac{e \left. \frac{dV}{dt} \right|_0 \Delta t}{pc} L = \frac{e V_T \omega \Delta t L}{pc}$$

Δt : ゼロクロスタイミングからのずれ

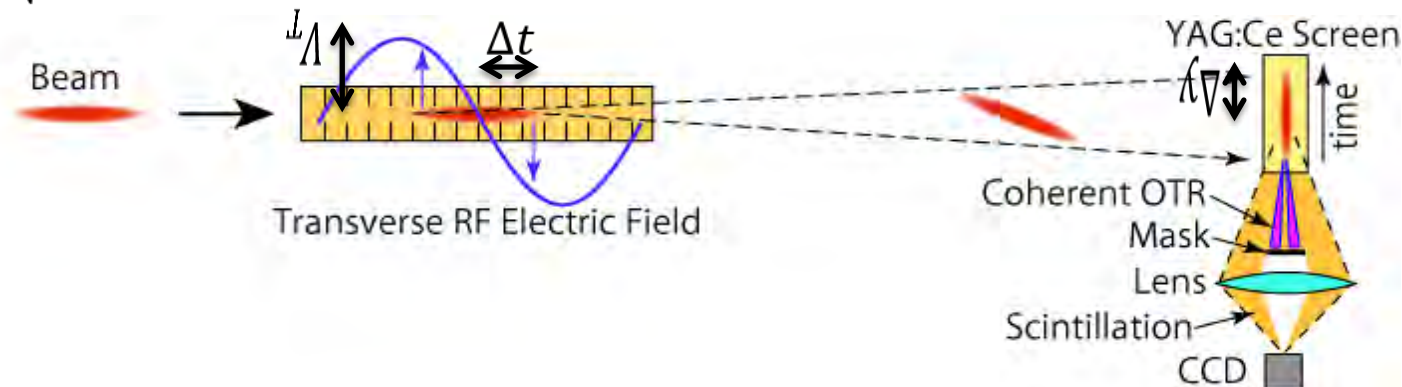
p : ビームの運動量

e : 素電荷

- 空間プロファイルのサイズ σ_y

$$\sigma_y \approx \sqrt{\sigma_{y_0}^2 + \left(\frac{e V_T \omega \sigma_t L}{pc} \right)^2}$$

σ_{y_0} : RFデフレクタがOFFのときの RMSビームサイズ



- RFデフレクタの時間分解能 σ_{t_0}

$\Delta y = \sigma_{y_0}$ となるときの Δt

$$\sigma_{t_0} = \frac{\sigma_{y_0} pc}{eV_T \omega L}$$

- SACLAでの例

- BC3 でのビームエネルギー: 1.4 GeV

- RF周波数: 5.712 GHz

- スクリーン上のビームサイズ: $\sigma_{y_0} = 100$ [μm] RMS

- ドリフト距離: $L = 10$ [m]

- キック電圧と時間分解能の関係

$$\sigma_{t_0} \simeq \frac{390}{V_T} \text{ [fs/MV]}$$

10 fs の時間分解能を得るには 39 MV 以上のキック電圧 V_T が必要

- RFデフレクタとスクリーンモニタの間がドリフトスペースでない場合
- 転送行列の一般式

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} (\cos \psi + \alpha_1 \sin \psi) & \sqrt{\beta_1 \beta_2} \sin \psi \\ -\frac{1 + \alpha_1 \alpha_2}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} \sin \psi + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} \cos \psi & \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} (\cos \psi - \alpha_2 \sin \psi) \end{pmatrix}$$

α_1, β_1 : 転送前のTwissパラメータ
 α_2, β_2 : 転送後のTwissパラメータ
 ψ : 転送前後のベータトロン位相進み

- キック量から位置への変換は1行2列要素をかければよい

$$\Delta y = \frac{eV_T}{pc} \omega \Delta t \sqrt{\beta_d \beta_s} \sin \Delta \Psi$$

β_d : RFデフレクタでのベータトロン関数
 β_s : スクリーンモニタでのベータトロン関数
 $\Delta \Psi$: RFデフレクタとスクリーンモニタの間のベータトロン位相進み

Hill's Equation

$$y''(s) + K(s)y(s) = 0$$

を Floquet Transformation

$$y(s) = w(s) e^{\pm j\psi(s)}$$

を使って解けば得られる

$$\beta(s) = [w(s)]^2$$

$$\alpha(s) = -w(s) w'(s)$$

$$\psi'(s) = [w(s)]^{-2}$$

- キック後のビームサイズ

$$\sigma_y = \sqrt{\sigma_{y_0}^2 + \left(\frac{eV_T \omega \sigma_t}{pc}\right)^2 \beta_d \beta_s \sin^2 \Delta\Psi}$$

- 時間分解能を少しでも上げるためのポイント

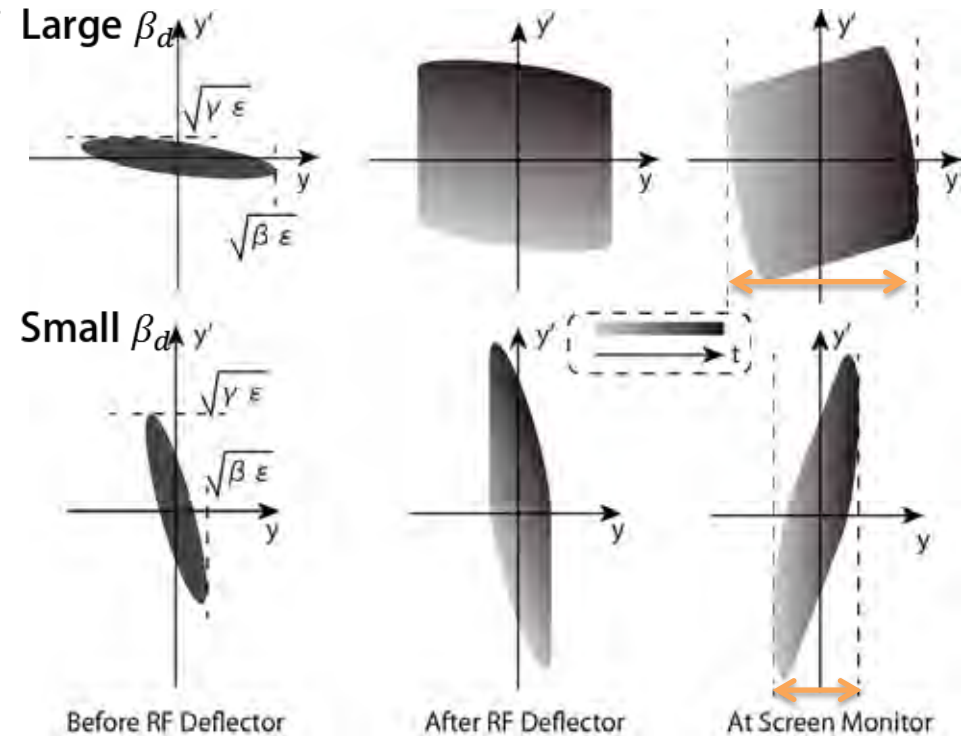
ϵ はエミッタンス

$\sigma_{y_0} = \sqrt{\beta_s \epsilon}$ が小さいほうがよい
 $\beta_d \beta_s$ が大きいほうがよい
 $\Rightarrow \beta_d$ が大きいほうがよい
 これは、Twissパラメータの
 関係式

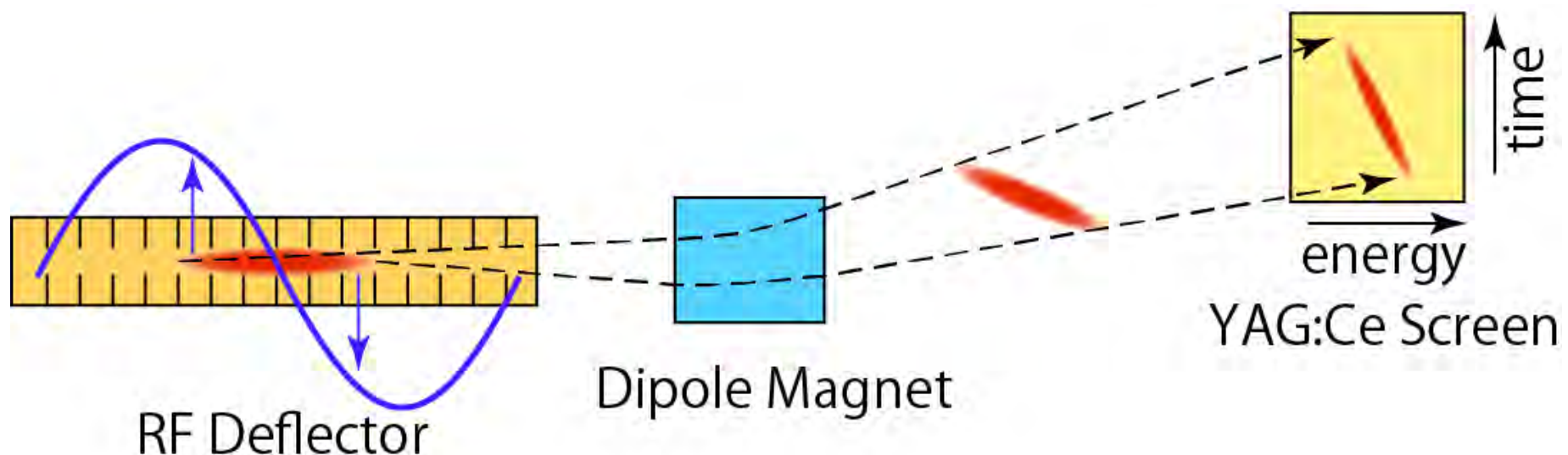
$$\beta\gamma = 1 + \alpha^2$$

からもわかるように、RFデフレクタでの γ を下げることで、すなわち、RFデフレクタで角度発散が小さいこと

RFデフレクタは角度変調を与えることから当然の結果



- バンチ内の時間とエネルギーの関係 (E-t位相空間) がわかると, バンチ圧縮の振る舞いがわかりやすい
 - 磁場シケインは E-t 位相空間を回転させる働きをもつため
- RFデフレクタのキック方向と直角方向にエネルギー分散を出せばよい
- RFデフレクタで掃引後に偏光電磁石で曲げる方法
 - 方法は単純だがセットアップが大がかりになりがち



- RFデフレクタ上流の磁場シケインからエネルギー分散を下流に漏らす方法

- シケイン中間のエネルギー分散があるところに四極電磁石を設置する

- スクリーンでのエネルギー分散 (η_1, η'_1) は

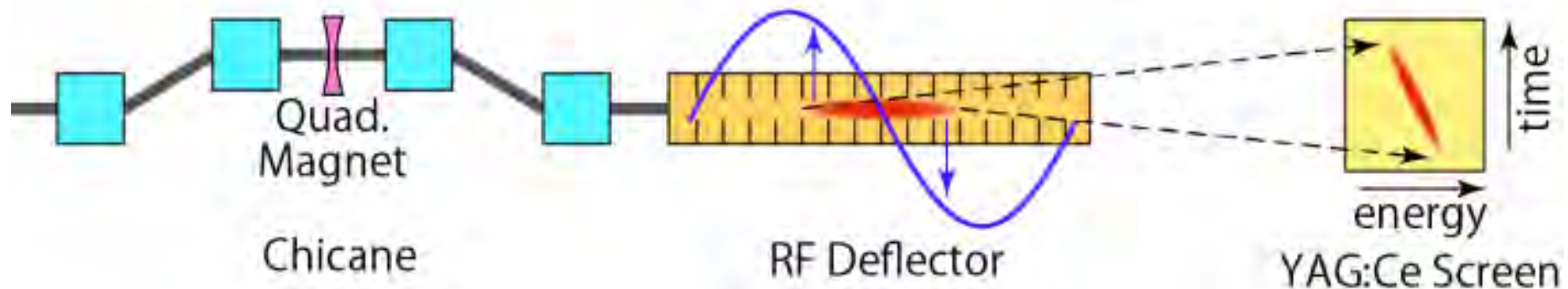
$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta'_1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_Q} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \eta_0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{\eta_0}{f_Q} \begin{pmatrix} L \\ 1 \end{pmatrix}$$

η_0 : シケイン中間でのエネルギー分散

f_Q : 四極電磁石の焦点距離

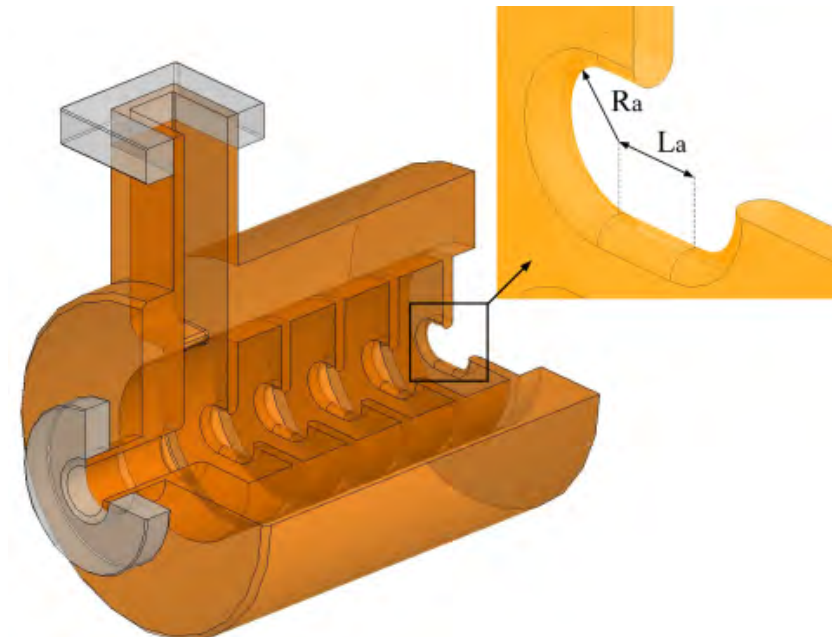
L : 四極電磁石からスクリーンまでの距離

- セットアップが比較的手軽



- **CバンドRAIDEN空洞を開発**
 - Racetrack-shaped iris-coupling deflection structure
 - 詳細は惠郷先生の講義を参照されたい
- **特徴**
 - 円筒導波管のTM₁₁モードとTE₁₁モードの混成双極モード HEM₁₁ を使用
 - X方向とY方向のモードの縮退を, レーストラック型の結合孔で解いている
 - 群速度と位相速度が逆向きのため, RFパワーは下流から印加する
- **SACLAでのセットアップ**
 - 有効長 1.7 m の空洞 2 本を 50 MW クライストロンで励振して 40 MV 以上のキック電圧を出す

必要横方向偏向電圧	V_T	> 40	MV
バンチ長	s_z	< 200	fs
解析ビームのエネルギー	cp_z	1.4	GeV
共振周波数	f_a	5712	MHz
セル間遷移位相(セル移相)	bD	5p/6	rad
群速度 (光速比)	v_g/c	-2.13	%
加速管充満時間	T_f	0.27	ms
無負荷Q	Q_a	11200	
シャントインピーダンス	r_T	27.7	MW/m
加速管タイプ	定インピーダンス型		
共振モード	HEM ₁₁		
セル数	77+2カップラーセル		
加速実効長 (加速管長)	L	$\frac{1706}{(1807)}$	mm
加速管台数		2	台

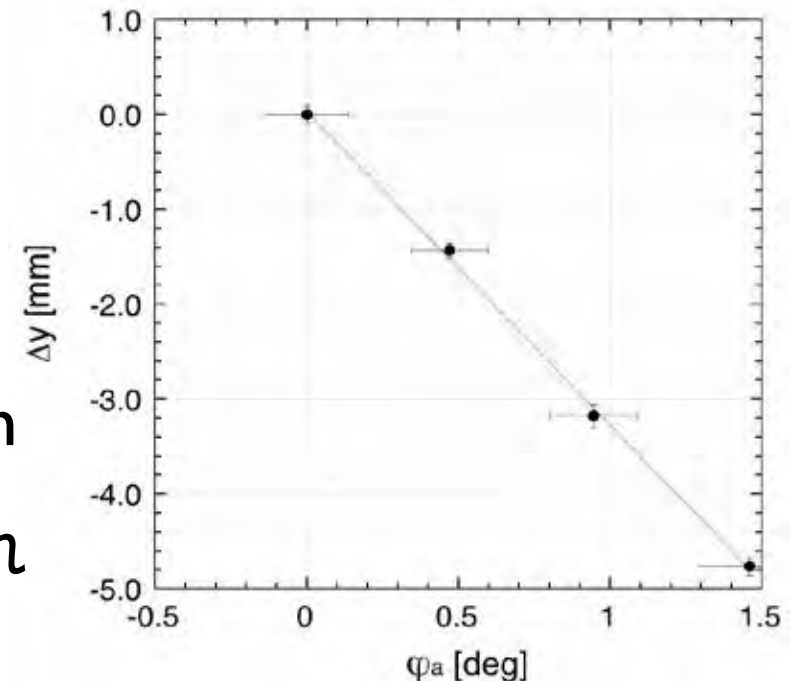


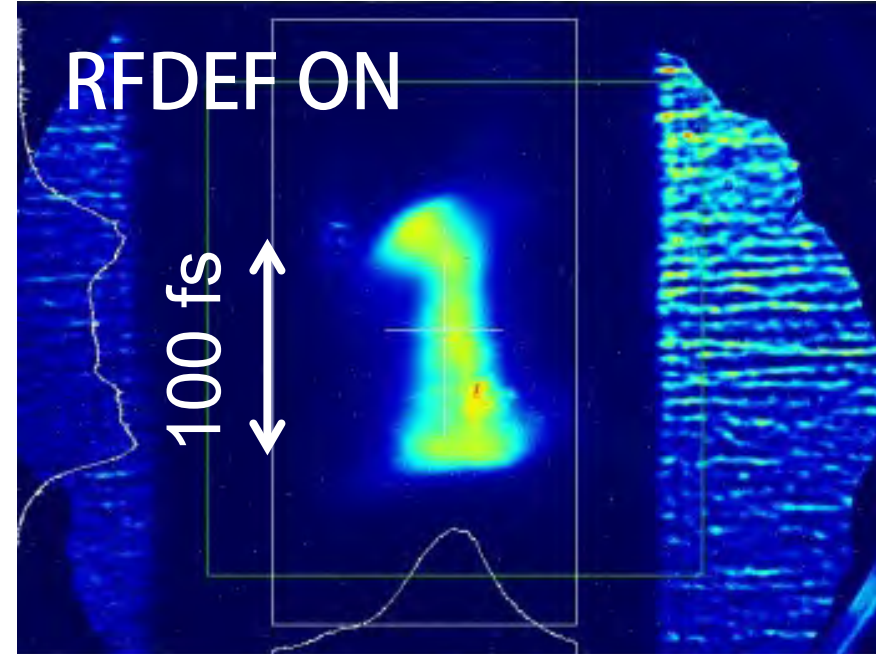
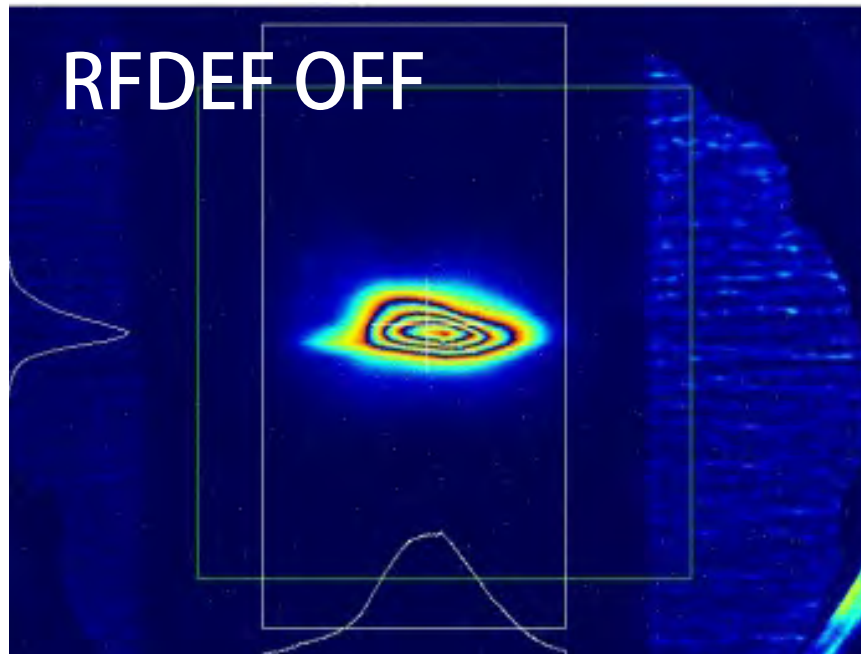
RF位相の決定

- RFデフレクタの位相はゼロクロスなので、RFデフレクタをONにしたときに電子ビームの重心位置が動かなければよい
- RFデフレクタがONのときに位相を調整し、スクリーンモニタの中央に電子ビームが来るようにする

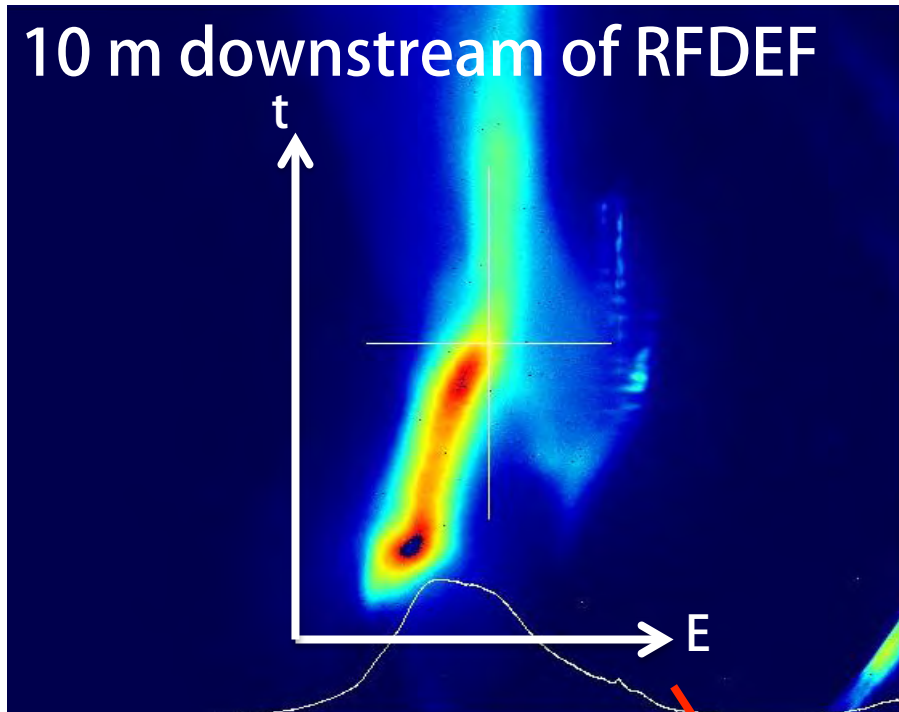
キック電圧の較正

- RF位相の設定値をわずかに変化させたときのスクリーン上でのビーム重心位置の変動を見る
- キック電圧 22 MV のときのデータ
- 位相 1 度 に対して 約 3 mm 移動している
- 5.712 GHz の 1 度は 約 500 fs なので、1 mm あたり 約 170 fs
- キック電圧が 40 MV になれば 1 mm あたり 100 fs 以下
- ビームサイズが 100 μm RMS であれば 10 fs の時間分解能

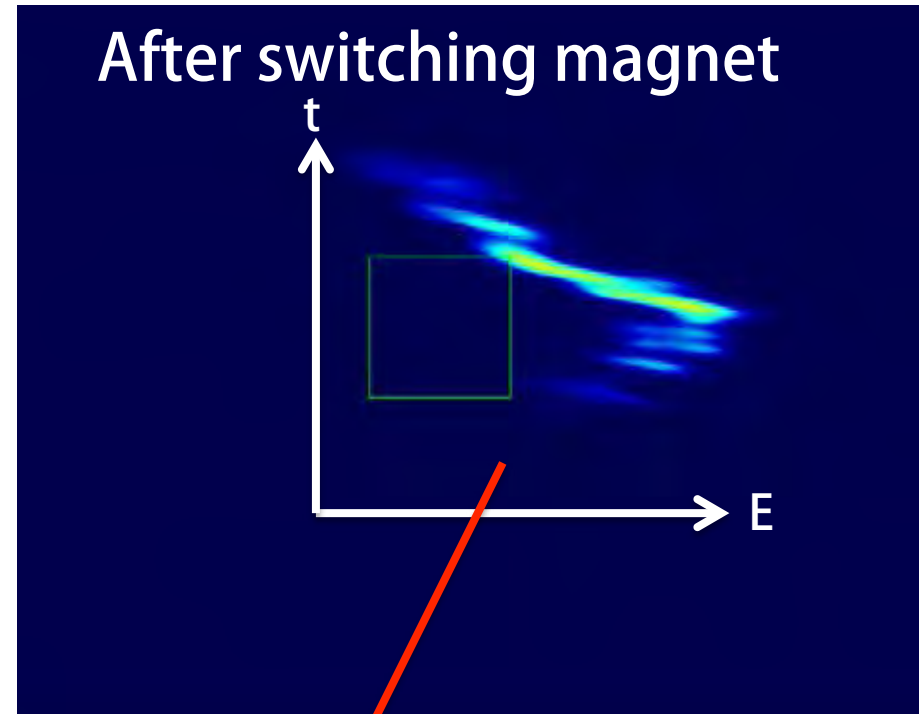




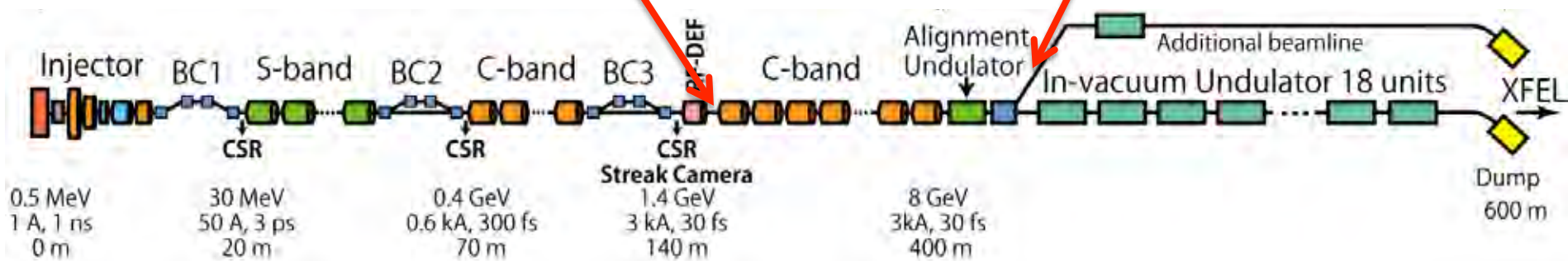
- パラメータ
 - エネルギー： 1.4 GeV
 - ドリフト距離： 約 10 m
 - キック電圧： 約 40 MV
- 10 fs 程度の分解能がありそうである
- スクリーンモニタにはYAG:CeとOTRマスクを使用



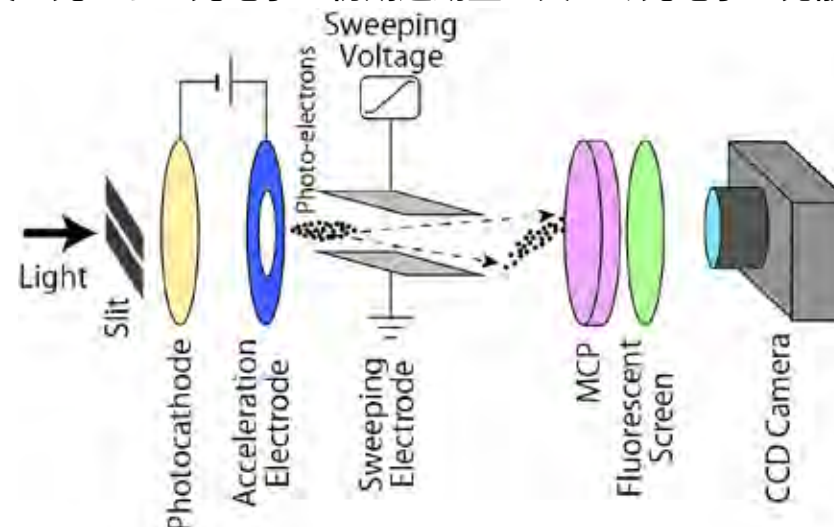
シケインのエネルギー分散を漏らして測定



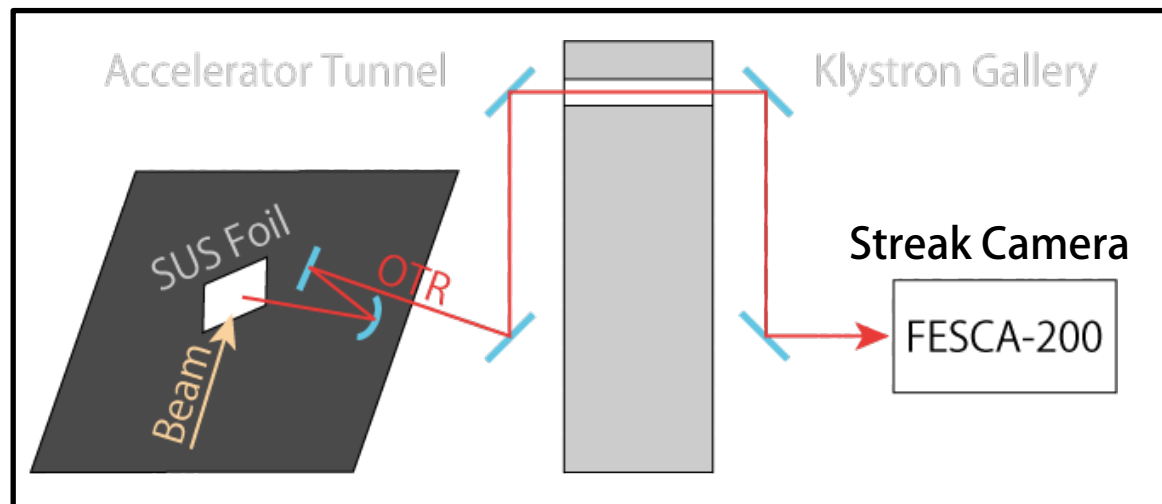
偏向電磁石で曲げてエネルギー分散を発生

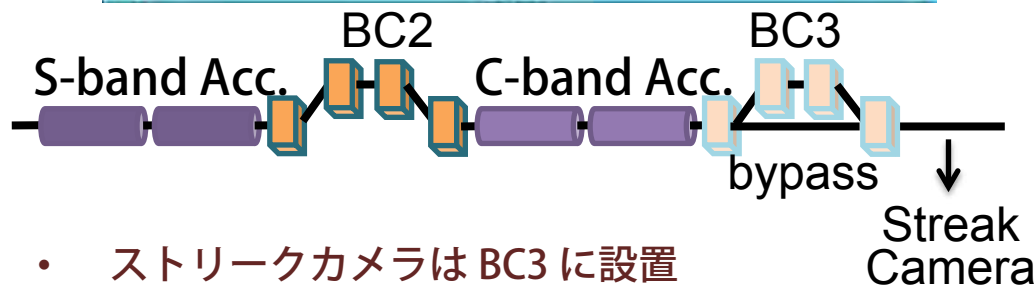
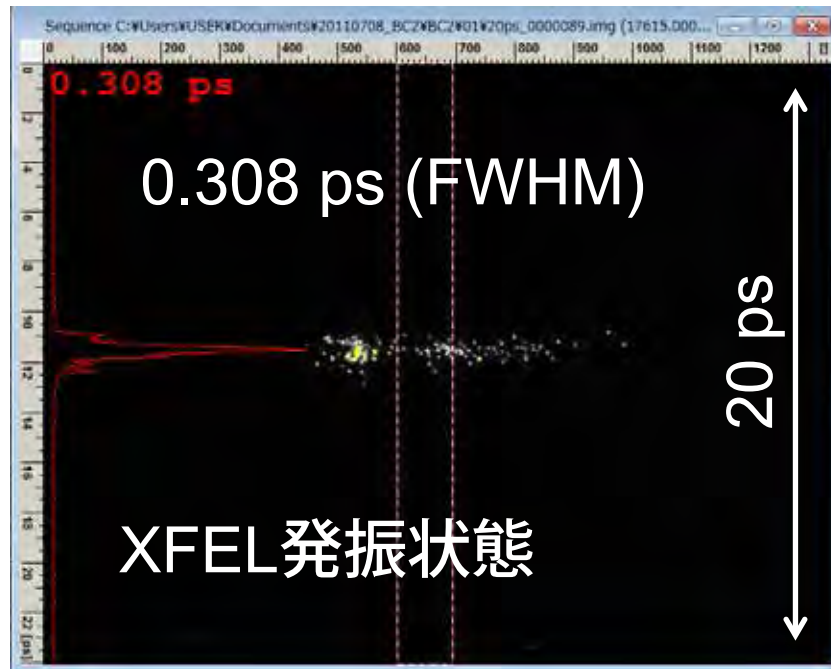


- OTRの時間構造をストリークカメラでとらえれば、電子ビームの時間構造がわかる
 - ストリークカメラの時間分解能は最速のもので 200 fs (FESCA-200, Hamamatsu Photonics)
- ストリークカメラの検出原理
 - 入射光を光電面に当てて光電子を出す
 - 光電子を加速し、それを時間掃引する
 - 掃引された光電子を MCP (Micro-Channel Plate) で増倍
 - その電子を蛍光面に当て、それをCCDカメラで撮像
- 注意点
 - 入射光が強すぎると空間電荷効果の影響で光電子が発散して分解能が悪化
 - 入射光が弱すぎると像がまばらになって正確な測定ができない
 - 入射光の波長は光電面の感度領域の長波長側に合わせるのがよい
 - 短波長の光からの光電子は初期運動量が大きく光電子が発散しやすい

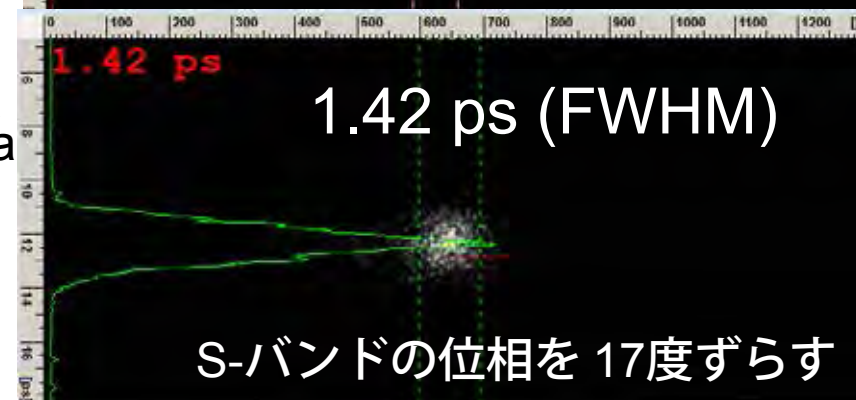
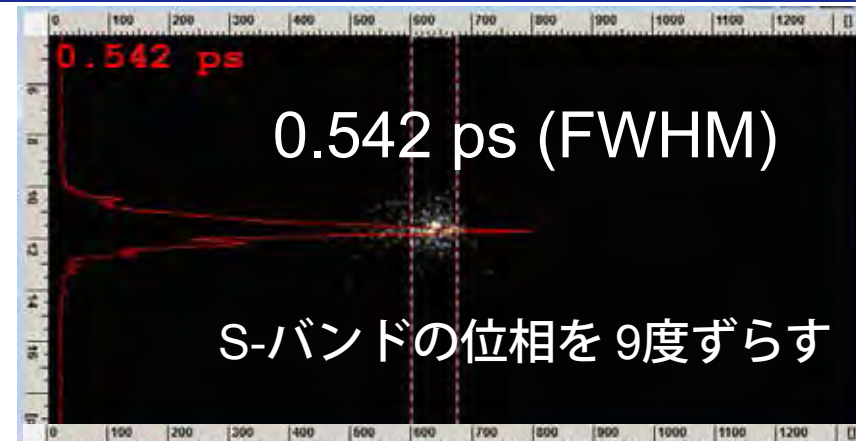


- ストリークカメラはさまざまな微調整が必要のため加速器トンネル内に設置するのは困難
 - OTR をトンネル外に伝送しなければならない
- OTR はもともと光量が多くない
 - 収束デバイスでコリメートして平行光にして伝送する必要がある
 - 反射率の高いミラーの使用
- 収束デバイス
 - レンズのような分散のあるデバイスを使用すると分解能が悪化
 - 石英ガラスの場合、波長が 100 nm 変わると屈折率が約 0.4% 変わる
 - 屈折率 1.46, 厚さ 10 mm の石英ガラスを通過すると波長 100 nm あたり 200 fs の伝播時間差が生じる
 - したがって、凹面ミラーなどの反射光学系が必要
- 光電面の長波長端付近を通すバンドパスフィルタの使用



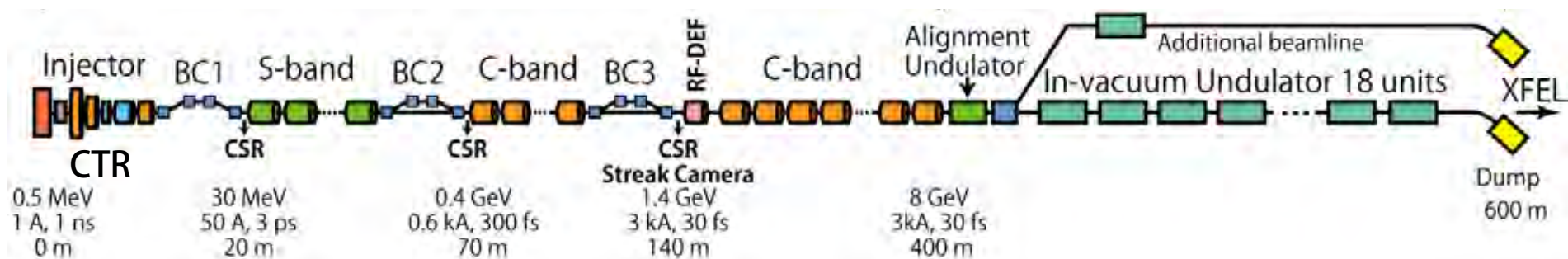


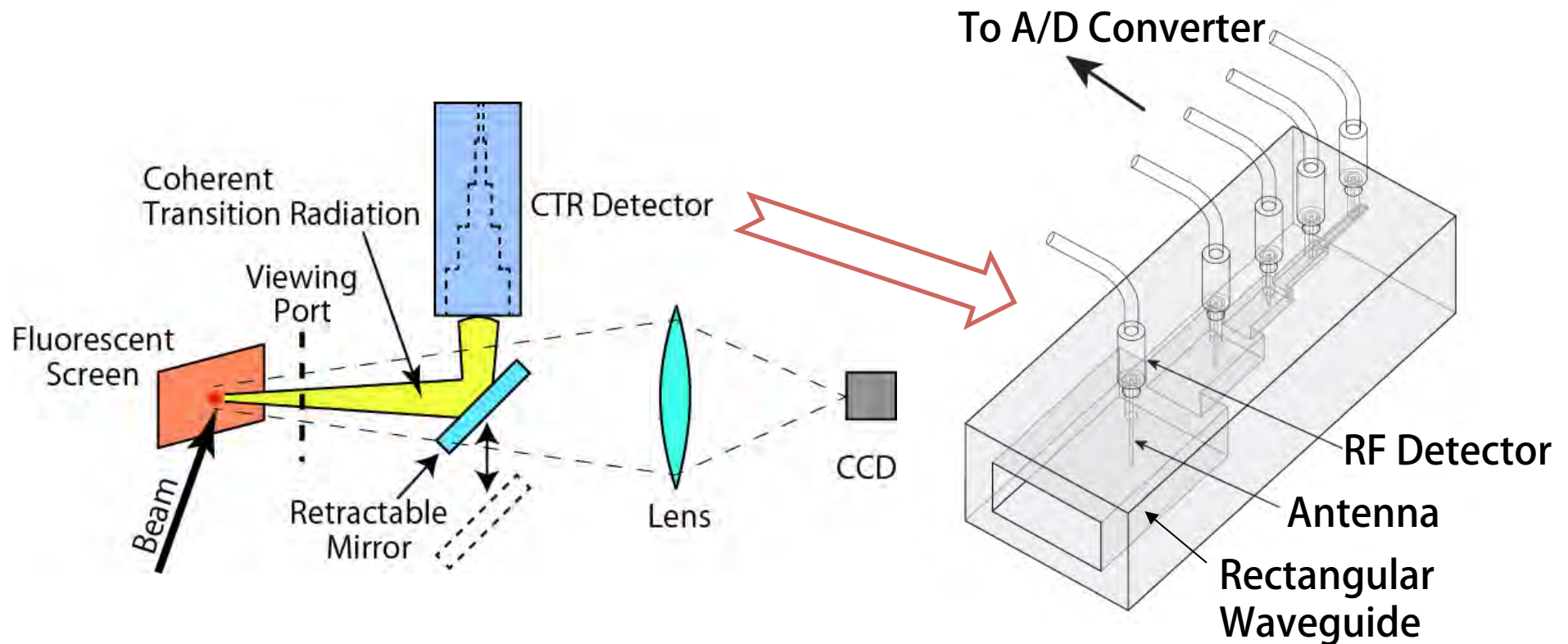
- ストリークカメラは BC3 に設置
- BC3 をバイパスし、BC2 のバンチ長を測定
- Sバンド位相を振ってバンチ長を変えた
- 1ショットでは光量が足りなかったため 50ショット積算
- 1 ps (FWHM) 以下のバンチ長が測定できた



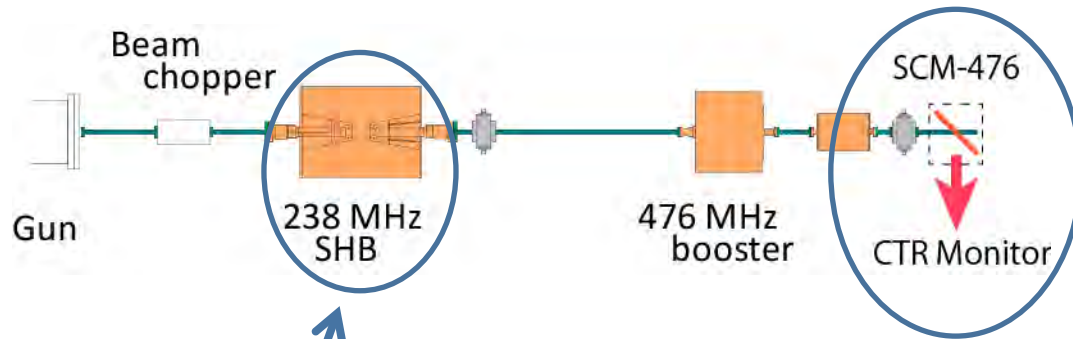
- 遷移放射やシンクロトロン放射はバンチ長と同程度の波長になるとコヒーレントな成分が出る
 - $P(\lambda) \sim P_e(\lambda)[N_e + N_e^2 F(\lambda)]$
- コヒーレント放射からバンチ長が類推できる
- SACLAでは
 - 入射部にてコヒーレント遷移放射 (CTR) 検出器
 - 各バンチ圧縮器にてコヒーレントシンクロトロン放射 (CSR) 検出器

を設置してバンチ長をモニタ

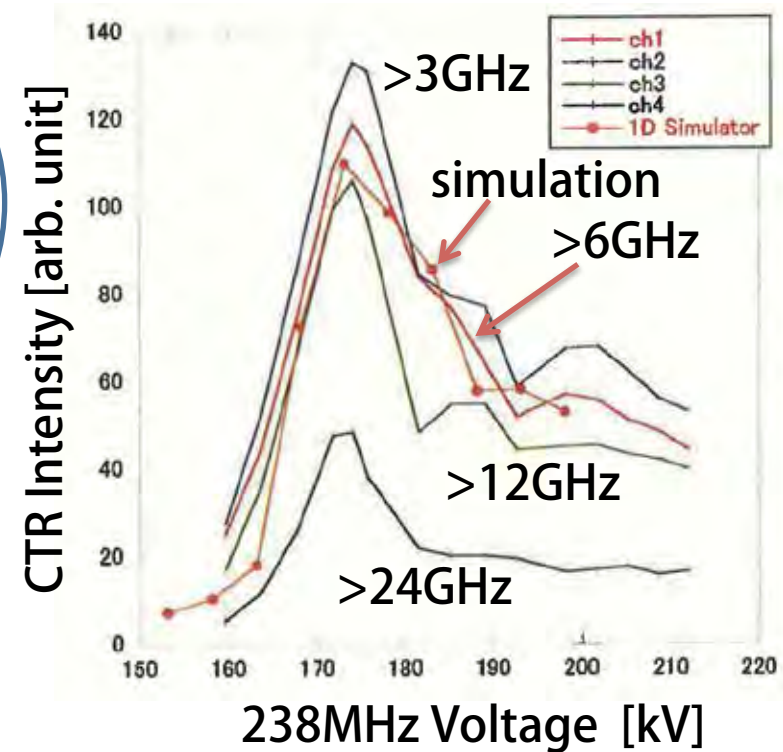




- 入射部のバンチ長: 1 ns → 数 10 ps
- CTRの波長: 1 GHz – 数 10 GHz
- スクリーンモニタの蛍光板からの CTR を検出
- 検出器にはRF波長計を使用
 - 断面の異なる矩形導波管を並べており, それぞれにRF検波器を取り付け
 - 導波管の遮断周波数を利用したハイパスフィルタとなっている
 - おおまかなスペクトルをとることができる



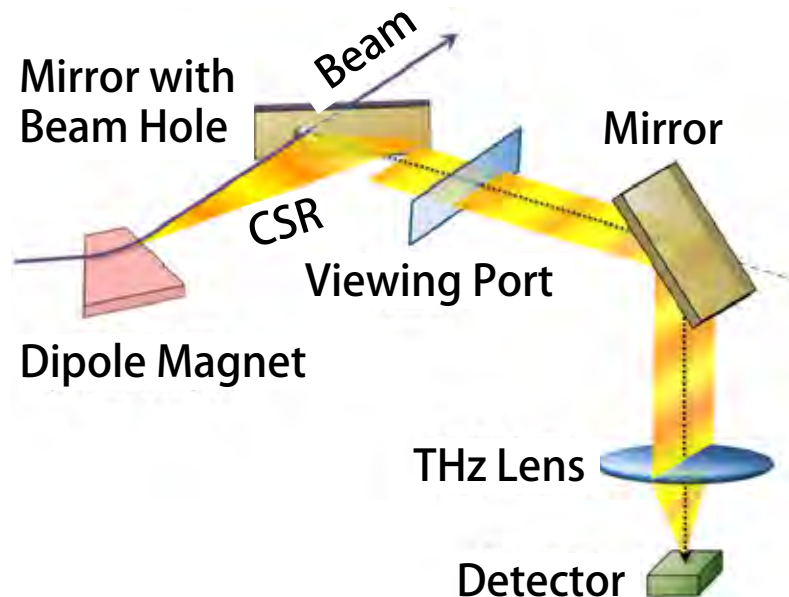
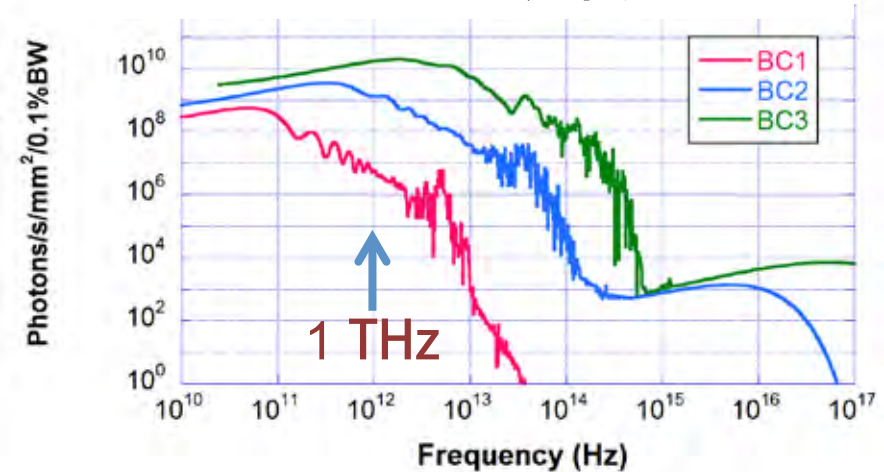
238MHz SHB の電圧をスキャン
476 MHz 空洞は OFF



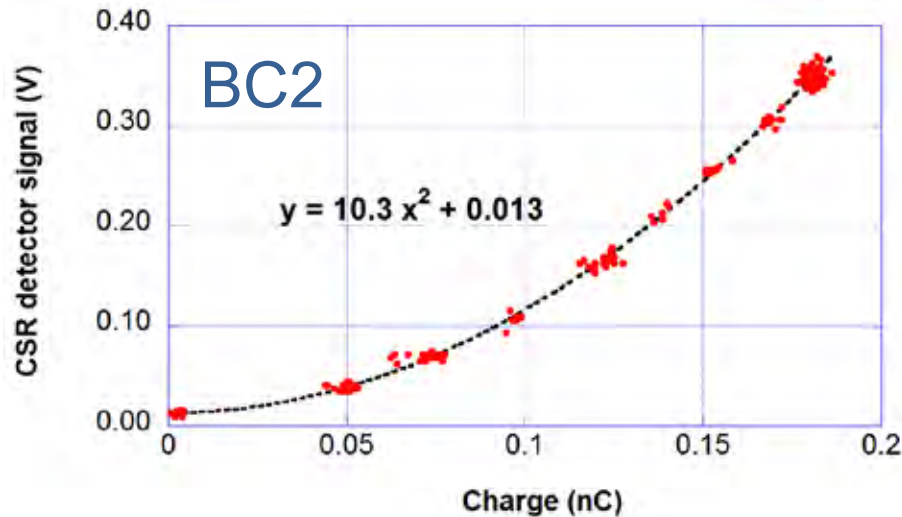
- 238 MHz SHB の電圧を上げるとバンチ長が短くなり、CTR強度が増える
- 175 kV 付近でバンチ長が最短
- それ以上の電圧ではオーババンチングされてバンチ長が長くなる
- シミュレーションとよく一致

- CSR の波長はバンチ長と強い相関がある
 - 波長はテラヘルツ領域
- バンチ圧縮器の偏向電磁石からのCSR強度を焦電検出器 (Pyroelectric Detector) で測定
 - シケインの4台の電磁石のうち、最下流の電磁石からのCSRを検出
- 非破壊で測定可能
- ビューポート
 - BC1, BC2 は合成石英を使用
 - BC3 はシリコン単結晶を使用
 - 合成石英は数THz以上を透過しないため

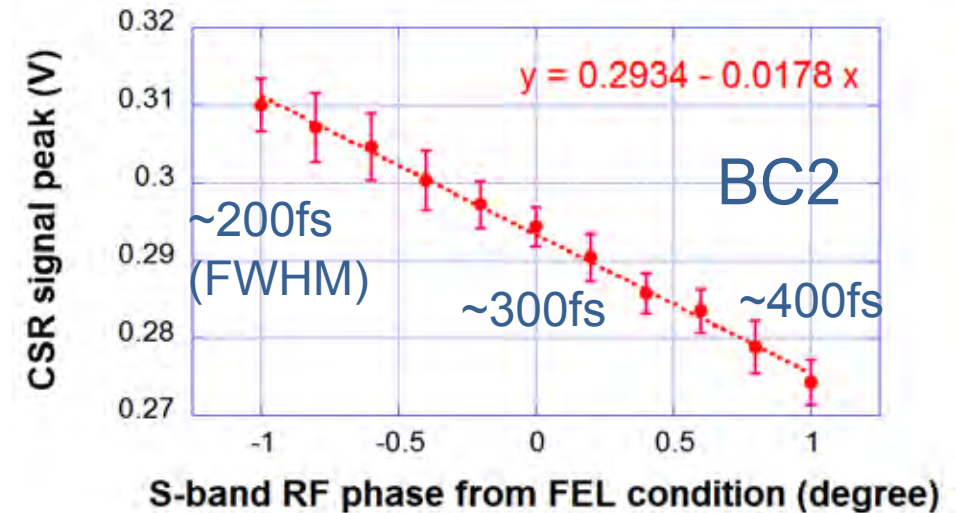
CSRのスペクトル



電荷量依存性

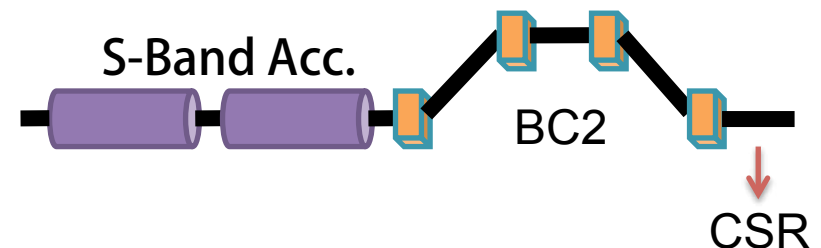


バンチ長依存性

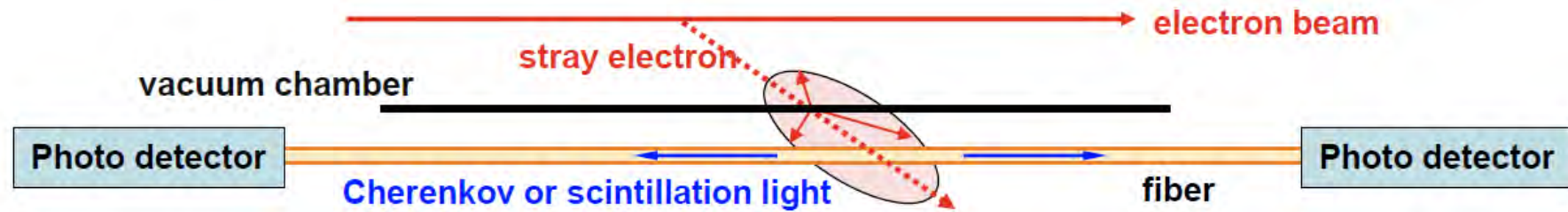


- BC2 の下流の CSR 検出器のデータ
- 電荷量依存性
 - CSR強度は電荷の2乗に比例
- バンチ長依存性
 - Sバンド位相を振ってバンチ長を変えた
 - バンチ長 ~ 300 fs (FWHM)
 - XFEL 発振時
 - 位相変化 1度 → バンチ長変化 ~ 100 fs
 - バンチ長に十分な感度がある

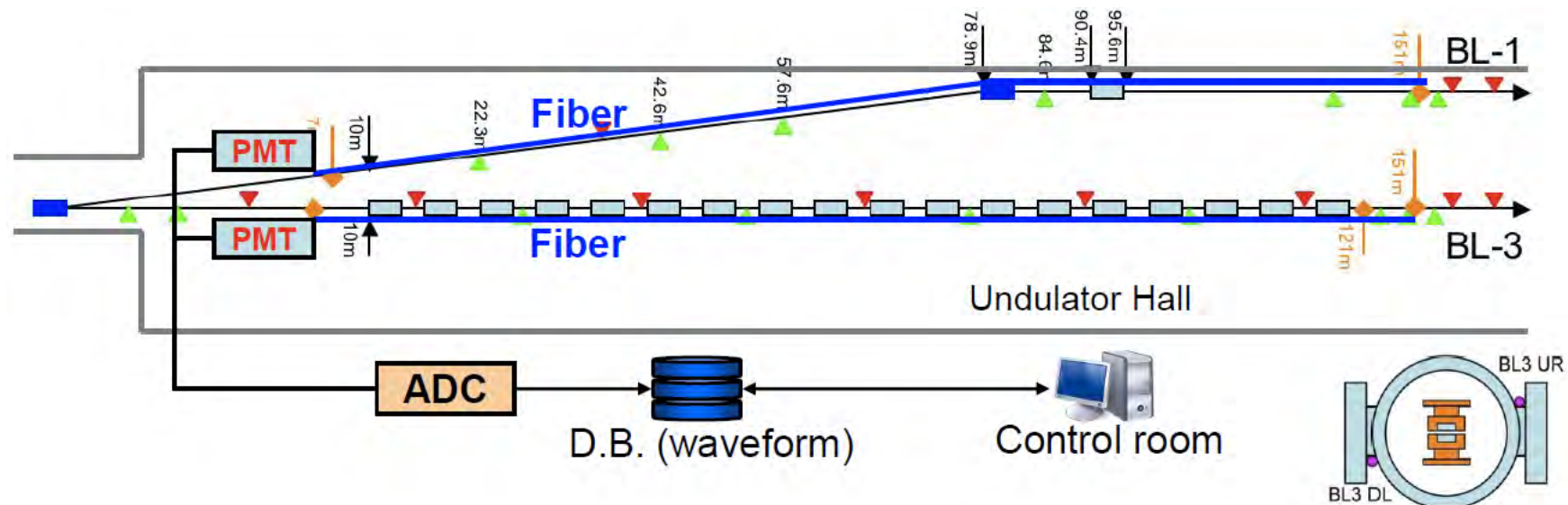
エラーバーは
ばらつきの標準偏差



- アンジュレータにてビーム損失が発生したり、ビームハローが永久磁石にあたったりすると、永久磁石が減磁してアンジュレータの性能が悪化
- ビーム損失やビームハローをモニタし、永久磁石へのダメージを最小限にとどめなければならない
- 許容量
 - 1ショットあたり、1 fC 以下
- SACLAでの構成
 - 光ファイバ型ビームロスモニタ
 - ダイヤモンドハローモニタ



- ビーム損失にともなって発生した電磁シャワーの電子・陽電子が光ファイバに当たって生じるチェレンコフ光を検出
 - チェレンコフ光は光ファイバを伝播し，端の光電子増倍管で検出される
 - 信号強度から損失電荷量がわかる
 - 信号のタイミングから損失の起こった場所がわかる
- SACLAのアンジュレータ区間に光ファイバ型ビームロスモニタを設置
 - 使用する光ファイバはコア径が $400\ \mu\text{m}$ と太いものを使用して十分なチェレンコフ光強度を確保
 - 光電子増倍管からの信号は 2 GSPS の高速AD変換ボードで読み出し，強度と時間の両方を記録



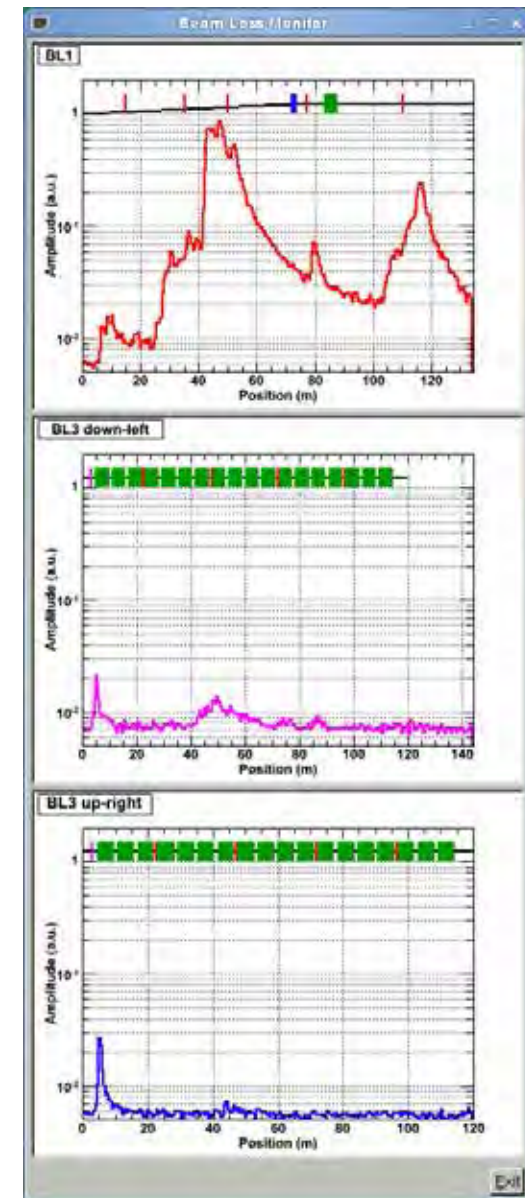


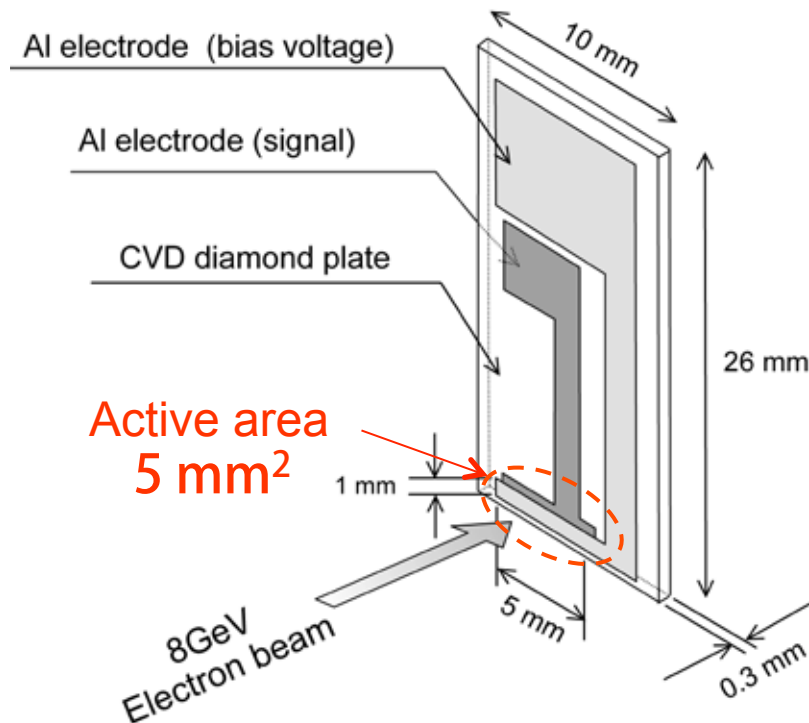
PMT: Hamamatsu H6780-02
with FC connector



ADC: CAEN V1729A Switched-Capacitor Digitizer
4 Channel, 14 bit, 2 GS/s (300 MHz bandwidth)

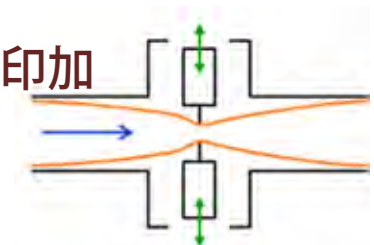
- ビーム損失は右図のように位置の関数として常時プロットして監視
 - ここではBL1の上流付近でビーム損失を発生させている
- ビーム損失の感度は 0.5 pC

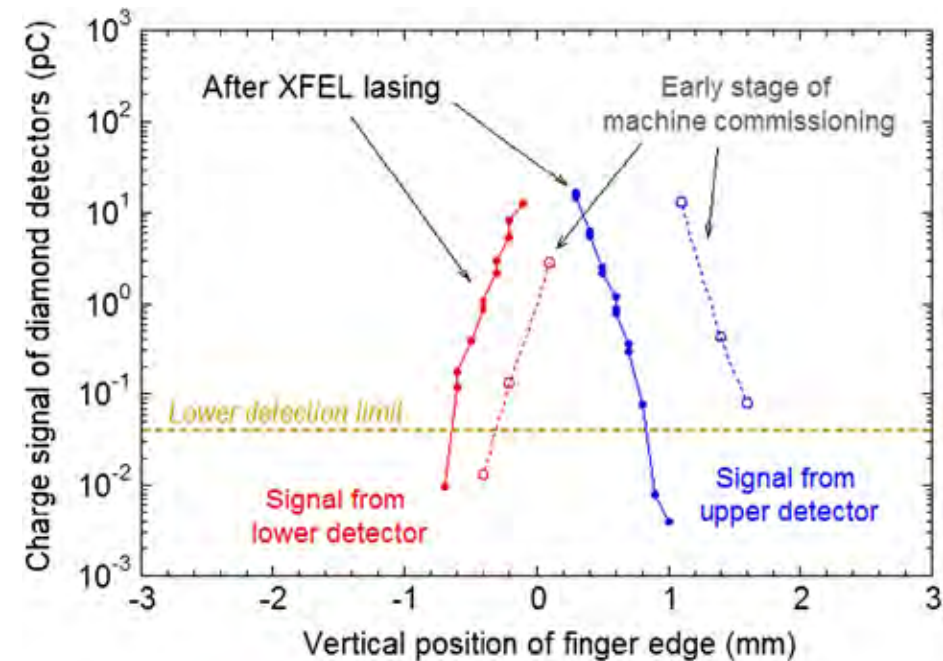
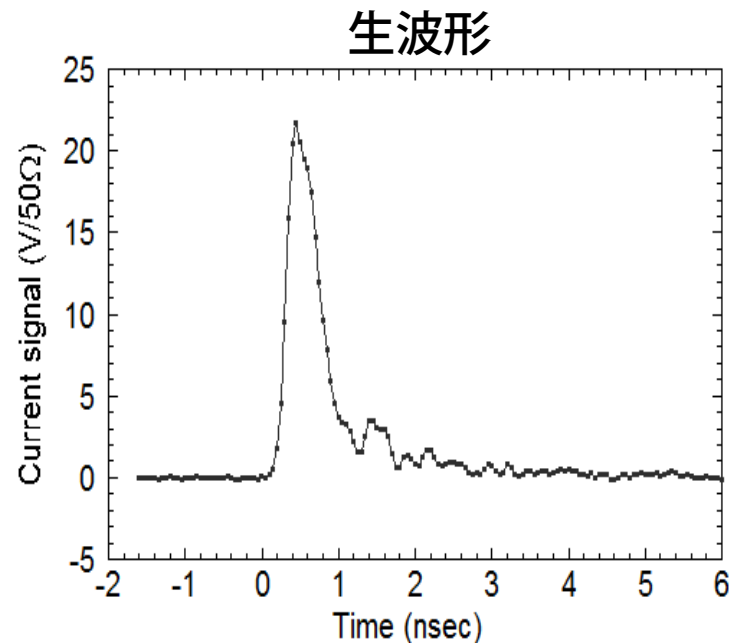




Seen from on the axis

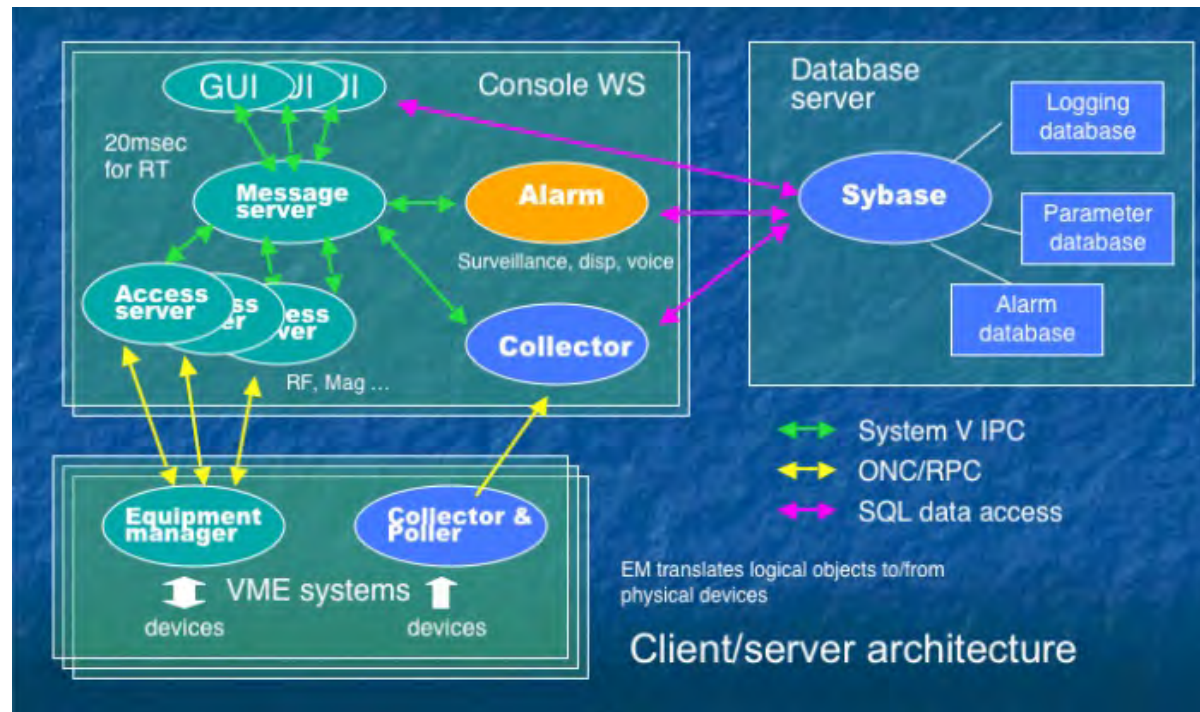
- 電子ビームがダイヤモンド板を通過した際に生じる電子・ホールペアを電極で検出
- ダイヤモンドを使う理由
 - 耐放射線性に優れる
 - 絶縁耐圧が大きい
 - 熱に強い
- SACLAでは厚さ 0.3 mm のダイヤモンドに 100 V のバイアス電圧を印加
- アンジュレータ区間上流に設置
- 電子ビームの航跡場によるノイズを防ぐため、RFコンタクトで覆っている



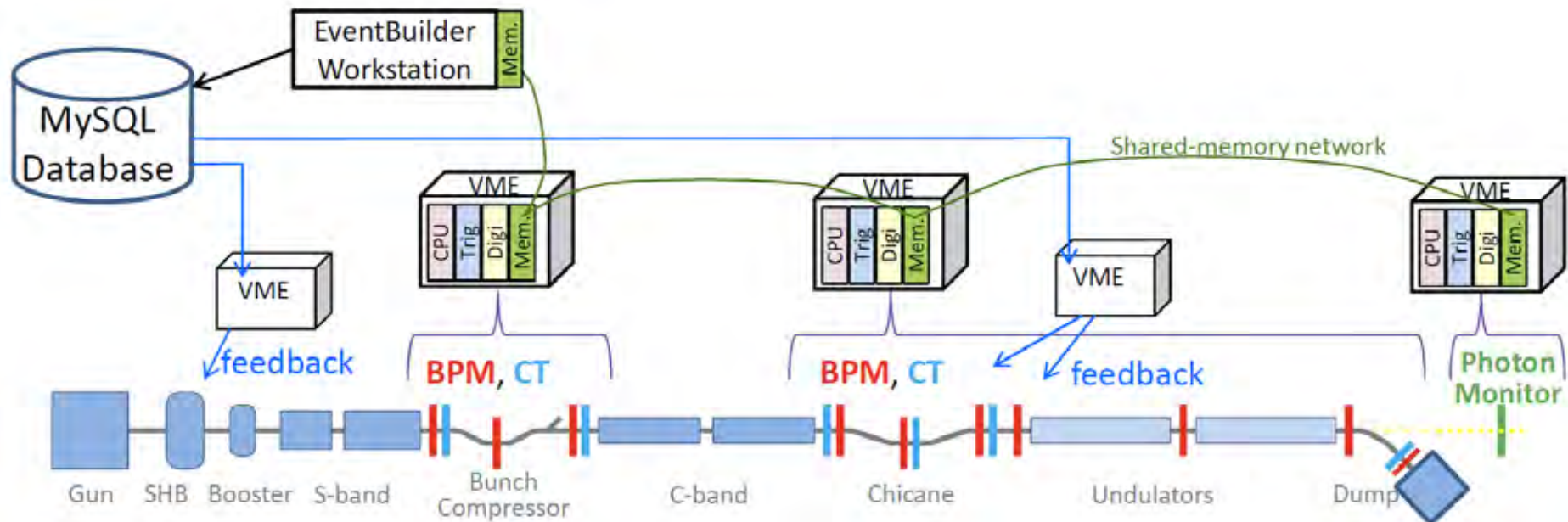


- 1 ns 幅の生信号
- ダイヤモンドをビームから 1 mm 以内に近づけるとハローが検出されている
- ハローの電荷量はダイヤモンドで検出される電荷量の約 1/100
- ビーム中心から 0.2 mm 以上離れたビームハローは 0.1 pC 程度
- 1 mm 以上離れると検出限界の 0.3 fC 以下
 - 通常, アンジュレータのギャップは 3.5 mm (ビーム中心から 1.75 mm) 以上で運転しているので, ビームハローが当たる心配は無い

- SACLA では SPring-8 の制御システム MADCA を使用
 - Message And Database-Oriented Control Architecture
- 制御室の制御端末，加速器各所に分散されたVMEシステム，データ保存用のデータベースシステムからなる
 - GUIからの命令は， Message Server, Access Server を経由してVME上のEquipment Manager (EM) に送られる
 - EM は命令に応じてVME機器を制御したりデータを取ったりして結果をGUIに返す
 - VMEシステム上には Poller プロセスが動いており，定期的にデータをデータベースに保存している
 - データベース上のデータは常時閲覧でき，時間変動や相関関係を調べるのに便利



- SACLAのような線型加速器ではショットごとにビームの初期条件が異なる
 - ショットが違うデータは比較する意味がないことが多い
 - たとえば, RF-BPM の位置分解能の解析ではこのことが必須
- SACLAではショットごとのデータの同期をとった上で収集するシステムを導入
 - RF-BPM, CT, FEL強度などのデータは全ショット収集
 - スクリーンモニタの画像は全ショットではないがタグをつけて他のデータと同期がとれる
- 同期データ収集システム
 - トリガモジュールなどのボードで加速器のマスタトリガ信号をカウント
 - カウント値はあらかじめ全VMEシステムで値を合わせておく
 - トリガが来たときに割り込みを発生
 - 割り込み発生時に必要なデータを収集し, トリガカウント値のタグをつけてデータベースサーバへ転送
 - データの転送にはリフレクティブメモリネットワークを使用
 - 60 pps で全ショットのデータを収集可能



- 今後、ビーム診断機器をデザインしたりする場合に、ここに述べた電子ビームと検出器との相互作用や、各種ビーム診断機器の測定原理や測定データが参考になれば幸いである



謝辞

- このような講義をする機会を与えていただいた古屋貴章教授をはじめ、高エネルギー加速器セミナーに関係する方々に厚く感謝いたします
- ここでお話したことは、大竹雄次チームリーダー、新竹積前主任研究員をはじめ、SACLA加速器の各種スタッフの方々のご指導、ご協力のもとに開発・製作してきたものです
- SCSS試験加速器の立ち上げからSACLAの供用にいたるまでの間、多岐にわたる貴重な経験をさせていただき、その経験が本講義に非常に役に立ちました
- この場を借りて深く御礼申し上げます