

リニアコライダービーム力学

$$\frac{d^2y}{ds^2} = -k(s)y \quad (1-2)$$

1. はじめに

本稿では、ILCの加速器のうち、ダンピングリングとその下流部分のビーム力学について、重要と思われる基礎的な事柄を筆者のできる範囲で述べる。本稿のかなりの部分は、筆者の過去のOHOセミナーでの講義ノート([1][2])をもとにしている。

1.1. 座標系

座標 x, y, z として Fig 1.1 のような曲線直交座標を使用する。ビームの(設計上の)進行方向を z 、それと直交する水平方向を x 、これらに直交する方向を y とする。 x, y の方向を「横方向」と呼ぶ。 z の方向(ビーム軸方向)は「縦方向」と呼ぶ。(垂直方向のことを「縦」と呼ぶのは誤りだと思う。)

独立変数として時間ではなく設計ビーム軌道に沿った距離 s を使用する。 s で微分した量には「 $'$ 」を付ける。例えば、

$$x' \equiv \frac{dx}{ds} \quad (1-1)$$

である。

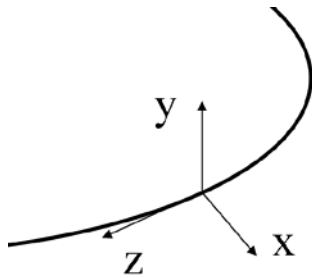


Fig 1.1 曲線直交座標

1.2. 線形運動

高エネルギー加速器では、ビームの輸送、あるいは収束に4極磁場が使われる。これは4極磁石によって作られる。4極磁場では各粒子は(厳密ではないが、非常に良い近似である)、

$$\frac{d^2x}{ds^2} = k(s)x$$

のように、水平方向と垂直方向それぞれで独立に線形の運動をする。 s はビーム方向に沿った距離、 $k(s)$ は4極磁場の強さであり、 $k(s) < 0$ は水平方向の収束、 $k(s) > 0$ は水平方向の発散となり、垂直方向には逆の作用になる。 $k(s)$ はビーム粒子のエネルギーに反比例するが、ここでは頭には書かなかった。特別な場合として、何もない空間(ドリフト空間)では $k(s) = 0$ である。

1.3. エミッタンス

ビームの品質を表す量に「エミッタンス」がある。横方向のエミッタンスは、

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &\equiv \left[\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \langle (x' - \langle x' \rangle)^2 \rangle - \langle (x - \langle x \rangle)(x' - \langle x' \rangle) \rangle^2 \right]^{1/2} \\ \varepsilon_y &\equiv \left[\langle (y - \langle y \rangle)^2 \rangle \langle (y' - \langle y' \rangle)^2 \rangle - \langle (y - \langle y \rangle)(y' - \langle y' \rangle) \rangle^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (1-3)$$

のように定義される。ここで、 $\langle \rangle$ はビーム内の全粒子に対する平均を表す。エミッタンスの小さなビームは品質が良い(大きさが小さく運動方向がそろっている)ことを意味する。

このエミッタンスが、線形運動で、すなわち4極磁場中で不変であることは簡単に確かめられる。(定義式を s で微分し、運動方程式(1-2)を使う。)

エミッタンスは4極磁場とドリフト空間では変化しないが、ビームが加速されると減少する。これは、ビーム軸方向に加速されることによって、横方向の運動の角度がエネルギーに反比例して減少するからである。加速によってエネルギーが E_1 から E_2 になるとすると、 $x' \rightarrow x' \times (E_1/E_2)$ 、 $y' \rightarrow y' \times (E_1/E_2)$ のように変化するので、

$$E_2 \varepsilon_{x(y)}(E_2) = E_1 \varepsilon_{x(y)}(E_1) \quad (1-4)$$

であることがわかる。

ビームの品質を表すのに、加速によって変化するエミッタンスでなく、「規格化エミッタンス(normalized emittance)」

$$\varepsilon_{n,x(y)} \equiv \gamma \varepsilon_{x(y)} \quad (1-5)$$

を使用することも多い。ここで、 γ はビームのエネルギーをビーム粒子の質量で割ったもの

$$\gamma \equiv \frac{E_{\text{beam}}}{mc^2} \quad (1-6)$$

である。

エミッタンス、規格化エミッタンスは、(角度)×(長さ)の次元を持ち、radian m 等で表す (radian を省略して単に長さの単位で表すこともある。)

2. ダンピングリング

ここでは、ILC のダンピングリングについて述べるが、ビーム力学上の重要な事柄のほとんどは他の円形(陽)電子加速器 (放射光リング、B ファクトリーなどの円形コライダー) の場合と変わらない。円形加速器のビーム力学については多くの教科書があり、過去の OHO セミナーでも多くの講義がある。ただし、他のストレージリング加速器と異なる点は、ビームをリング内でなく取り出して使うということである。

ILC ダンピングリングの主要なパラメータを Table 2.1 に示す。

Table 2.1, ダンピングリング標準パラメータ [3]

Circumference	3.238 km
Beam Energy	5 GeV
Repetition rate	5 Hz
Number of bunches	1312
Particles/ bunch	2E10
Max. beam current	389 mA
Longitudinal damping time	12 ms
Transverse damping time	24 ms
Momentum compaction factor	3.3E-4
Energy loss/turn	4.5 MeV
RF frequency	650 MHz
Total RF Voltage	14 MV
Parameters of Extracted beam	
Normalized horizontal emittance	6 μm
Normalized vertical emittance	20 nm
Bunch length	6.0 mm

Energy spread	0.11%
---------------	-------

ダンピングリングの最も重要な役割は、いうまでもなく、ビームを「ダンプ(damp)」すること、すなわち、エミッタンスを小さくすることである。後で述べるように、最終的に電子と陽電子のビームを衝突させた結果のルミノシティを大きくするためには、ビームのエミッタンスが小さいことが必要である。

Table 2.2 に、ダンピングリングに入る前と後の規格化エミッタンスを示す (ビームのエネルギーは入射・取り出しともに 5GeV で変化しない)。ダンピングリングによってエミッタンスは桁違いに小さくなる、特に陽電子の垂直方向のエミッタンスは 1/50000 になる。また、入射される粒子のエネルギーのずれの許容値は約 0.75% であるのに対して、取り出されるビームのエネルギーの拡がり (energy spread) は約 0.1% である。さらに、(陽) 電子円形加速器では、時間とともに、ビームの形がきれいな正規分布に近づいていき、軌道やエネルギーも安定になる。

Table 2.2 ダンピングリング入射ビームと取り出されるビームの規格化エミッタンス (ビームエネルギー : 5 GeV) [3]

		電子	陽電子
Before Damping Ring	$\gamma\epsilon_x$	~7E-5 m	~1E-2 m
	$\gamma\epsilon_y$	~7E-5 m	~1E-2 m
After Damping ring	$\gamma\epsilon_x$	6E-6 m	6E-6 m
	$\gamma\epsilon_y$	2E-8 m	2E-8 m

リングにビームを周回させていると、自然にエミッタンスやエネルギーの拡がりが減少していく。これは、すぐ後で述べるように制動放射によるエネルギー損失と、加速空洞によるエネルギー補填を繰り返すことで起こる。

「エミッタンスやエネルギーの拡がりが減少していく」ことは、ビーム内の個々の粒子の運動としての「ベータトロン振動 (横方向の振動) とシンクロトロン振動 (縦方向の位置とエネルギーの振動) が減衰していく」ことの結果である。(ベ

ータトロン振動・シンクロトロン振動、磁場中の制動放射の基礎的な性質などについては、一昨年のOHO2012での筆者の講義ノートでやや詳しく述べた。また、以下の節で簡単に述べる放射減衰・放射励起などについても本稿よりも詳しく書いてある。）

2.1. 閉軌道、ベータトロン振動

円形加速器では、粒子のエネルギーに依存した「閉軌道(Closed Orbit)」が存在する。この閉軌道上にあるエネルギー一定の仮想的な粒子は、常にこの軌道を周回する（リングを一周してきたとき、元と同じ位置と角度を持っている）。実際の粒子は、この閉軌道の周りを振動しており、これが「ベータトロン振動(betatron oscillation)」である。

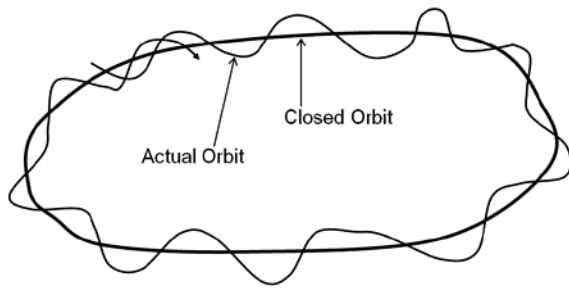


Fig 2.1 閉軌道とベータトロン振動

閉軌道は粒子のエネルギーに依存するが、この依存度を「ディスページョン」とよぶ。ある場所 s でのエネルギーの相対的なずれ ($\delta \equiv \Delta E / E$) に対する閉軌道の位置を $x_c(\delta), y_c(\delta)$ と書き、 δ の1次までとって、

$$\begin{aligned} x_c(\delta) &= x_c(0) + \eta_x \delta \\ y_c(\delta) &= y_c(0) + \eta_y \delta \end{aligned} \quad (2-1)$$

のように書く。 η_x と η_y を其々水平方向と垂直方向のディスページョン関数 (dispersion function) と呼ぶ。また、これらの s 微分 η_x' と η_y' を角度ディスページョン関数 (angular dispersion function) と呼び、

$$\begin{aligned} x_c'(\delta) &= x_c'(0) + \eta_x' \delta \\ y_c'(\delta) &= y_c'(0) + \eta_y' \delta \end{aligned} \quad (2-2)$$

である。なお、これらは全て s の関数である。

ベータトロン振動は、閉軌道からのずれを x, y として、式(1-2)のような線形2階の微分方程式として表される。これは、

$$x(s) = a\sqrt{\beta(s)} \cos(\phi(s) + \phi_0) \quad (2-3)$$

の形の解を持つ(以下 x について書くが y も同様)。 $\beta(s)$ はベータ関数と呼ばれ、 $\beta(s) = 1/\phi'(s)$ という関係があり、全粒子に対して共通である。また、 a と ϕ_0 は各粒子の初期条件から決まる定数である。

円形加速器の場合、その周長を L として、 $k(s+L) = k(s)$ のような周期条件を持つことから、ベータ関数にも同様の周期条件 $\beta(s+L) = \beta(s)$ を課すことで、ベータ関数を一意的に決めることができる。また、一周当たりの位相の進みを 2π で割ったもの

$$\nu_x \equiv (\phi_x(s+L) - \phi_x(s)) / 2\pi \quad (2-4)$$

を「チューン (tune)」と呼び、これは s に依らない。

また、各粒子毎の保存する量である「Courant-Snyder 不変量」

$$J_x \equiv \left(\frac{1}{\beta} x^2 + \beta \left(x' + \frac{\alpha}{\beta} x \right)^2 \right) = a^2 / 2 \quad (2-5)$$

が定義される。ただし α は、アルファ関数

$$\alpha(s) \equiv -\beta'(s) / 2 \quad (2-6)$$

である。

また、ビーム内の粒子全部を考えて、ある s において

$$\begin{aligned} \beta_x &= \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle} / \varepsilon_x \\ \alpha_x &= -\sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)(x' - \langle x' \rangle) \rangle} / \varepsilon_x \end{aligned} \quad (2-7)$$

という関係が成り立てば、線形運動では、他の全ての s でも同じ関係が成り立つ。このような状態を「マッチングが取れている状態」と呼び、ビームラインとビーム内の粒子の分布が合致していることを表す。(円形加速器でベータ関数に周期条件を課す場合) マッチングのとれたビームの粒子の分布の2次のモーメント、

$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle, \langle (x' - \langle x' \rangle)^2 \rangle, \langle (x - \langle x \rangle)(x' - \langle x' \rangle) \rangle$ は周回によって変化せず、何周しても同じ場所でのビームの形は同じである。また、この時エミッタンスは

Courant-Snyder 不変量の全粒子についての平均に等しい。

$$\varepsilon_x = \langle J_x \rangle \quad (\text{Matched}) \quad (2-8)$$

2.2. シンクロトロン振動

粒子が高周波加速空洞を通過するとき、空洞を通過する時刻（粒子の縦方向の位置に依存）での高周波の位相に依存してエネルギーが変化する。ある特定の縦方向位置では、リング一周分の制動放射によるエネルギー損失を丁度補うようなエネルギーが粒子に与えられる。これが「中心位置」である。また、粒子のエネルギーによって閉軌道の長さ（周長）が異なるため、周回毎に粒子が通過する時刻での高周波の位相は一般には変化する。しかし、閉軌道を周回する時間が高周波の波長の丁度整数倍になるようなビームエネルギーがあるはずで、このエネルギーが「中心エネルギー」である。「中心位置」と「中心エネルギー」を持つ仮想的な粒子は何回周回してもこの同じ位置とエネルギーを保つ。実際の粒子は、「中心位置」と「中心エネルギー」を中心とした振動を行い、これが「シンクロトロン振動(synchrotron oscillation)」である。

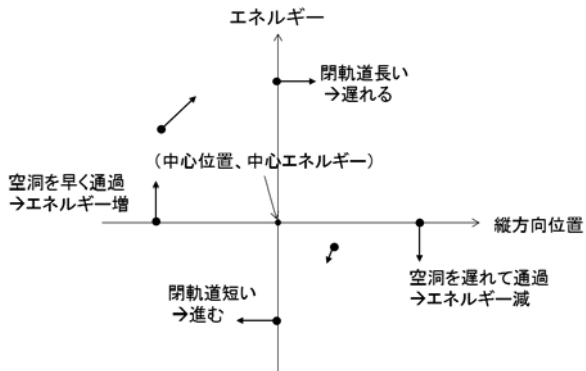


Fig 2.2 シンクロトロン振動の説明

中心位置からのずれを z 、中心エネルギーからの（相対的な）エネルギーのずれを δ とすると、リング一周当たりの変化として、

$$\begin{aligned} z &\rightarrow z + \eta_c L \delta \\ \delta &\rightarrow \delta - V_a z \end{aligned} \quad (2-9)$$

のように書ける (Fig 2.2) (L は周長)。ただし、これらは z と δ の一次の項のみを残す近似式である。例えば2番目の式は、

$$\begin{aligned} \delta &\rightarrow \delta + \frac{eV}{E} \sin(\phi_0 - \omega z/c) \\ &\approx \delta - \frac{eV\omega}{Ec} \cos \phi_0 z \end{aligned} \quad (2-10)$$

のような近似から

$$V_a = \frac{eV\omega}{Ec} \cos \phi_0 \quad (2-11)$$

として得られる。 V は加速空洞のピーク電圧、 ω は加速高周波の周波数、 ϕ_0 は中心位置での位相であり、リング一周当たりの平均エネルギー損失を U_0 とすると ϕ_0 は、

$$U_0 = eV(\omega/c) \sin \phi_0 \quad (2-12)$$

で与えられる。また、 η_c は、「momentum compaction factor」と呼ばれる定数で、リングのビーム光学設計から決まる。中心エネルギーを持つ粒子がリング一周に要する時間を $T_0 = L/c$ とすると、これらの式は、微分形で、

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= c \eta_c \delta \\ \frac{d\delta}{dt} &= -(V_a/T_0)z \end{aligned} \quad (2-13)$$

となり、

$$\begin{aligned} z &= a_z \sin(\Omega t + \Theta) \\ \delta &= a_\delta \cos(\Omega t + \Theta) \end{aligned} \quad (2-14)$$

のような調和振動が得られる。ただし、

$$\begin{aligned} \Omega &= \sqrt{c \eta_c V_a / T_0} \\ a_z &= \sqrt{c \eta_c T_0 / V_a} a_\delta \end{aligned} \quad (2-15)$$

である。

以上から、ビームのエネルギー拡がりやバンチ長は、

$$\begin{aligned} \sigma_E &\equiv \sqrt{\langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle} = E_0 \sqrt{\langle \delta^2 \rangle} = E_0 \sqrt{\langle a_\delta^2 \rangle / 2} \\ \sigma_z &\equiv \sqrt{\langle (z - \langle z \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle a_z^2 \rangle / 2} = \sqrt{c \eta_c T_0 / V_a} \sigma_E / E \end{aligned} \quad (2-16)$$

であることもわかる ($\langle \rangle$: 全粒子についての平均)。

2.3. ベータトロン振動の放射減衰

制動放射によってビームがエネルギーを失うとき、各粒子の進行方向に平行な運動量が減少する。従って、制動放射では各粒子の方向は変化しない、つまり x, x', y, y' は変化せずエミッタンスも変化しない。一方、加速空洞でエネルギーを補填される際には、全ての粒子が共通のビーム軸方向の運動量を得る。従って、 x', y' がエネルギーの相対的变化の逆数に比例して減少する。エネルギーが $E \rightarrow E + \Delta E$ となれば、

$$x' \rightarrow \frac{E}{E + \Delta E} x', \quad y' \rightarrow \frac{E}{E + \Delta E} y \quad (2-17)$$

と変化する。結果として、

$$\varepsilon_{x,y} \rightarrow \frac{E}{E + \Delta E} \varepsilon_{x,y} \approx \varepsilon_{x,y} \left(1 - \frac{\Delta E}{E} \right) \quad (2-18)$$

のように変化する。さらに放射と加速を繰り返すことでエミッタンスが減少していく (Fig 2.3)。これを「放射減衰」と呼ぶ。(エミッタンスは加速のときに減少するが、規格化エミッタンスは加速でなく放射のときに減少する。)

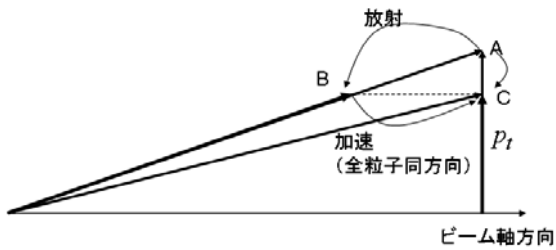


Fig. 2.3 横方向の運動の放射減衰の原理の説明。放射によって運動量が $A \rightarrow B$ 、加速によって $B \rightarrow C$ と変化し、結果として横方向の運動量が減少する。

リング一周に要する時間を T_0 、一周当たりのエネルギー損失 U_0 がビームエネルギーに比べて小さい ($U_0 \ll E_0$) とすると、式(2-18)は、時間 t の微分の形で、

$$\frac{d\varepsilon_{x,y}}{dt} \approx -\frac{U_0}{E_0 T_0} \varepsilon_{x,y} \quad (2-19)$$

$$\varepsilon_{x,y}(t) \approx \varepsilon_{x,y}(0) \exp\left(-\frac{U_0}{E_0 T_0} t\right) \quad (2-20)$$

と書ける。「ダンピング時間 (damping time)」 $\tau_{x,y}$ は、振動の振幅が $1/e$ に減衰する時間と定義されるので、エミッタンスが $1/e^2$ になる時間

$$\tau_{x,y} \approx 2T_0 \frac{E_0}{U_0} \quad (2-21)$$

である。

2.4. シンクロトロン振動の放射減衰

ビーム中のエネルギー E の粒子が磁場 B の中で制動放射で失う時間当たりのエネルギーは $E^2 B^2$ に比例する。

$$P(E) \propto E^2 B^2 \quad (2-22)$$

従って、エネルギーの高い粒子は制動放射によってより多くのエネルギーを失い、エネルギーの低い粒子はエネルギーの損失が小さい。これが、シンクロトロン振動が減衰する理由である。

設計エネルギー (中心エネルギー) を E_0 、設計エネルギーの粒子の一周当たりのエネルギー損失を U_0 とすると、エネルギー E の粒子が一周で失うエネルギーは、

$$U = \left(\frac{E}{E_0}\right)^2 U_0 \quad (2-23)$$

エネルギーのずれを $\delta = (E - E_0)/E_0$ で表すと、

$$U = (1 + \delta)^2 U_0 \approx (1 + 2\delta) U_0 \quad (2-24)$$

となり、(2-13)第2式は、

$$\frac{d\delta}{dt} = -(V_a/T_0)z - 2(U_0/E_0 T_0)\delta \quad (2-26)$$

のように修正される。(2-13)第1式と合わせて、

$$\delta = a_\delta \exp\left(-\frac{U_0 t}{E_0 T_0}\right) \cos(\Omega' t + \Theta) \quad (2-28)$$

という結果が得られる。ただし、

$$\Omega' = \sqrt{\frac{c\eta_c V_a}{T_0} - \left(\frac{U_0}{E_0 T_0}\right)^2} \quad (2-29)$$

である。

従って、シンクロトロン振動のダンピングタイムは

$$\tau_z \approx T_0 \frac{E_0}{U_0} \quad (2-30)$$

となる。シンクロトロン振動はベータトロン振動よりも2倍速く減衰することがわかる。

2.5. シンクロトロン振動の放射励起

シンクロトロン放射によるエネルギー損失と、加速電圧によるその補填によって粒子の振動は減衰する。しかし一方では、(前節では考えに入れてなかった) シンクロトロン放射の量子論的效果により粒子のエネルギーにでたらめな変化が生じるため、粒子の振動を励起する作用もある。これを「放射励起」と呼ぶ。ここでは、放射による粒子のエネルギーの損失が量子効果によってばらつくことから、大雑把に放射励起を説明する。(2012年のOHOセミナーの講義ノートでは少し詳しく述べたので、興味のある方はそちらも見ていただきたい。)

まず、ビームのエネルギー拡がり (energy spread) の2乗の、微小時間 Δt の間の制動放射による増大は、

$$\overline{\Delta\delta^2} = N \frac{\overline{u^2}}{E_0^2} \Delta t \quad (2-31)$$

と表される。ここで、 $\overline{\quad}$ は確率的な平均と考えるとよく、 $\delta \equiv E/E_0 - 1$ 、 $E_0 = \langle E \rangle$ は中心エネルギー、 N は時間当たりの放射光子数の平均、 $\overline{u^2}$ は放射光子1個当たりのエネルギーの2乗の平均である。これらの量は、時間当たり1ビーム粒子当たりの放射パワーの平均

$$P_\gamma \approx \frac{2r_e e^2 c^3}{3(mc^2)^3} E_0^2 B^2 \quad (2-32)$$

と光子の「critical energy」

$$u_c \approx \frac{3e\hbar c^2}{(mc^2)^3} E_0^2 B \quad (2-33)$$

を使って、

$$N = \frac{15\sqrt{3}}{8} \frac{P_\gamma}{u_c} \quad (2-34)$$

$$\overline{u^2} = \frac{11}{27} u_c^2 \quad (2-35)$$

と書ける。量子論的效果とは、 $\overline{u^2}$ がゼロでないということである。

以上から、シンクロトロン振動の振幅の平均的増大は、エネルギー拡がりの2乗の増大として、式(2-31)から直接、

$$\left(\frac{d\langle\delta^2\rangle}{dt} \right)_{\text{excite}} = N \frac{\overline{u^2}}{E_0^2} = \frac{55\sqrt{3}}{36} \frac{r_e e^3 \hbar c^5}{(mc^2)^6} E_0^4 B^3 \quad (2-36)$$

のように増大することがわかる。磁場の3乗のリング一周での平均を $\overline{B^3}$ と書いて、長い時間スケールでは、

$$\left(\frac{d\langle\delta^2\rangle}{dt} \right)_{\text{excite}} = \frac{55\sqrt{3}}{36} \frac{r_e e^3 \hbar c^5}{(mc^2)^6} E_0^4 \overline{B^3} \quad (2-37)$$

と書くことができ、増大する速さは振幅に依らず一定である。

2.6. ベータトロン振動の放射励起

ここで、制動放射によるエネルギーのでたらめな変化がディスパージョンのあるところで発生する結果として、ベータトロン振動の振幅が増大することを見る。

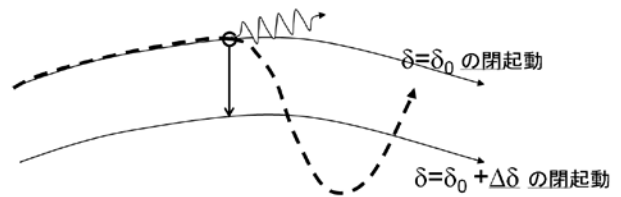


Fig 2.4 ベータトロン振動がディスパージョンのある場所での制動放射によって励起されることの簡単な説明。

まず、簡単な説明として Fig 2.4 のような過程が考えられる。あるエネルギーのずれ δ_0 を持つ粒子が、 δ_0 に対応する閉軌道にいったとする。閉軌道にあるということはベータトロン振動の振幅が0ということである。この粒子のエネルギーのずれが制動放射によって $\delta_0 + \Delta\delta$ に変化したとする。放射によって粒子の位置は変わらず方向もほとんど変わらないので、この粒子は元の軌道にあるが、エネルギーのずれが変化したためディスパージョンがあれば、この軌道は $\delta_0 + \Delta\delta$ に対応した閉軌道ではない。従って、この粒子は、以後ベータトロン振動をする。これが、ベータトロン振動の放射励起である。

次に、もう少し定量的に考察する。各粒子の位置と角度を、閉軌道の分(x_c)とその周りのベータatron振動の分(x_β)とに分けて、

$$x = x_c(\delta) + x_\beta = x_c(0) + \eta_x \delta + x_\beta$$

$$x' = x_c'(\delta) + x_\beta' = x_c'(0) + \eta_x' \delta + x_\beta' \quad (2-38)$$

と書く。エネルギーのずれが $\Delta\delta$ 変化するとき、 x_β と x_β' は、(x と x' は変化しない)

$$x_\beta \rightarrow x_\beta - \eta_x \Delta\delta$$

$$x_\beta' \rightarrow x_\beta' - \eta_x' \Delta\delta \quad (2-39)$$

と変化する。従って、各粒子の Courant-Snyder 不変量 J_x は、

$$\left(\frac{1}{\beta} x_\beta^2 + \beta \left(x_\beta' + \frac{\alpha}{\beta} x_\beta \right)^2 \right) / 2 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta} x_\beta^2 + \beta \left(x_\beta' + \frac{\alpha}{\beta} x_\beta \right)^2 \right)$$

$$- \frac{1}{2} \left(2 \frac{(1+\alpha^2)\eta_x}{\beta} x_\beta + \alpha \eta_x x_\beta' + \alpha \eta_x' x_\beta + 2\beta \eta_x' x_\beta' \right) \Delta\delta$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{(1+\alpha^2)\eta_x^2}{\beta} + 2\alpha \eta_x \eta_x' + \beta \eta_x'^2 \right) (\Delta\delta)^2 \quad (2-40)$$

のように変化する。

ここで、 $\Delta\delta$ と $(\Delta\delta)^2$ の確率的な平均 (結果として、全粒子についての平均と等しい) を考える。 δ は中心エネルギー (平均エネルギー) からのずれであるから、 $\Delta\delta$ は「平均からのずれ」の変化であり、 $\Delta\delta$ の平均は (この定義から、明らかに) 0 である。時間当たりの $(\Delta\delta)^2$ の確率的な平均はシンクロトロン振動の励起の所に出てきた $d(\delta^2)/dt$ の平均と同じである。

従って、Courant-snyder 不変量の時間当たりの変化は、

$$\frac{d\langle J_x \rangle}{dt} = H_x \frac{d\langle \delta^2 \rangle}{dt} \quad (2-41)$$

ただし、

$$H_x \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{(1+\alpha^2)\eta_x^2}{\beta} + 2\alpha \eta_x \eta_x' + \beta \eta_x'^2 \right) \quad (2-42)$$

であり、 $d\langle \delta^2 \rangle/dt$ の平均は、式(2-37)で与えられる。

従って、マッチングのとれているビームに対して、エミッタンスの変化は、

$$\left(\frac{d\varepsilon_x}{dt} \right)_{\text{excite}} = \frac{55\sqrt{3}}{36} \frac{r_e e^3 hc^5}{(mc^2)^6} E_0^4 \overline{B^3 H_x} \quad (2-43)$$

と書ける。ここで、 $\overline{B^3 H_x}$ は $B^3 H_x$ のリング一周についての平均である。

(ここでの議論は y 方向も全く同様に成り立つ。)

2.7. 平衡状態と取出ビーム

円形加速器に長時間ためられているビームは、放射励起と放射減衰が釣り合ったところで平衡状態になる。

時間当たり 1 粒子当たりの放射パワーの平均が、

$$U_0 = T_0 \overline{P_\gamma} \approx T_0 \frac{2r_e e^2 c^3}{3(mc^2)^3} E_0^2 \overline{B^2} \quad (2-44)$$

であることと、式(2-19)、(2-30)、(2-37)、(2-43)等から、

$$\langle \delta^2 \rangle_{\text{eq}} \approx \frac{55\sqrt{3}}{24} \frac{ehc^2}{(mc^2)^3} E_0^3 \frac{\overline{B^3}}{B^2} \quad (2-45)$$

$$\varepsilon_{x(y),\text{eq}} \approx \frac{55\sqrt{3}}{24} \frac{ehc^2}{(mc^2)^3} E_0^3 \frac{\overline{B^3 H_{x(y)}}}{B^2} \quad (2-46)$$

となる (添え字 eq は equilibrium の意)。この第 1 式と式(2-15) から、平衡バンチ長も決まる。

横方向の平衡エミッタンスは $\overline{B^3 H_{x(y)}}$ が大きい場合、つまり 2 極磁場のある場所でのディスパージョンが大きい場合に大きくなる。ディスパージョン (角度ディスパージョン) は軌道が曲げられるところで発生する。ダンピングリングの設計ビーム軌道は水平面上にあるので、水平方向に必ず軌道が曲がる場所があり、そこには必ず 2 極磁場があるので、 $B^3 H_x$ が存在する。一方、垂直方向のディスパージョンは設計上はゼロであり、従って設計上の $B^3 H_y$ はゼロで、平衡エミッタンスは非常に小さくなる。実際、水平方向の平衡エミッタンスはほぼ設計上の $\overline{B^3 H_x}$ から決まるのに対し、垂直方向の平衡エミッタンスは、設計からのずれ (誤差) の大きさによって決まる。結果として、垂直方向の平衡エミッタンスは水平方向よりもかなり小さくできる。

平衡状態になるのは、理論的にはビームの入射から無限の時間が経過した後であるが、実際のビームは有限の時間で取り出される。入射からの時刻 t でのエネルギー拡がり $\langle \delta^2 \rangle$ とエミッタンスは、放射励起と放射減衰を同時に考慮した微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \delta^2 \rangle}{dt} &= \left(\frac{d\langle \delta^2 \rangle}{dt} \right)_{\text{excite}} - \frac{2}{\tau_z} \langle \delta^2 \rangle \\ \frac{d\varepsilon_{x(y)}}{dt} &= \left(\frac{d\varepsilon_{x(y)}}{dt} \right)_{\text{excite}} - \frac{2}{\tau_{x(y)}} \varepsilon_{x(y)} \end{aligned} \quad (2-47)$$

を解くことにより、

$$\langle \delta^2 \rangle(t) = \langle \delta^2 \rangle(0) \exp\left(\frac{-2t}{\tau_z}\right) + \langle \delta^2 \rangle_{\text{eq}} \left[1 - \exp\left(\frac{-2t}{\tau_z}\right) \right] \quad (2-48)$$

$$\varepsilon_{x(y)}(t) = \varepsilon_{x(y)}(0) \exp\left(\frac{-2t}{\tau_{x(y)}}\right) + \varepsilon_{x(y),\text{eq}} \left[1 - \exp\left(\frac{-2t}{\tau_{x(y)}}\right) \right] \quad (2-49)$$

と、求められる。

2.8. ILC のダンピングタイム

Table 2.1 にあるように、ILC ダンピングリングのダンピングタイムは縦方向 12 ms、横方向 24 ms である。繰り返し周波数 5 Hz から、ビームの滞在時間は約 200 ms であり、エネルギー拡がり $\langle \delta^2 \rangle$ とエミッタンスの取り出しまでの減衰係数は、

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{2t_{\text{extraction}}}{\tau_z}\right) &\sim 3 \times 10^{-15} \\ \exp\left(-\frac{2t_{\text{extraction}}}{\tau_{x(y)}}\right) &\sim 6 \times 10^{-8} \end{aligned} \quad (2-50)$$

である。

一方、取り出し時と入射時の設計値の比は、

$$\begin{aligned} \frac{\langle \delta^2 \rangle_{\text{extraction}}}{\langle \delta^2 \rangle_{\text{injection}}} &\sim 10^{-2} \\ \frac{\varepsilon_{x,\text{extraction}}}{\varepsilon_{x,\text{injection}}} &\sim \begin{cases} 6 \times 10^{-4} (e^+) \\ 0.1 (e^-) \end{cases} \\ \frac{\varepsilon_{y,\text{extraction}}}{\varepsilon_{y,\text{injection}}} &\sim \begin{cases} 2 \times 10^{-6} (e^+) \\ 3 \times 10^{-5} (e^-) \end{cases} \end{aligned} \quad (2-51)$$

であり、ダンピングタイムは十分短く、取り出される時点ではビームはほぼ平衡状態になっている

ように設計されている。特に陽電子の垂直方向のエミッタンスのために、全長約 100 m のウィグラー (damping wiggler) を使って制動放射によるエネルギー損失を大きくし、ダンピングタイムを短くしている。

さらに、エネルギーの低い領域での実験では 10 Hz の運転をすることになっている (陽電子生成用の高エネルギー電子ビームを別途作るため)。この場合は、ビームがリングに滞在する時間が半分の約 100 ms になるため、特に陽電子リングの wiggler を強くしてダンピングタイムをより短くする必要がある。

2.9. x-y カップリング

これまで、水平方向(x)と垂直方向(y)の運動は分離して考えてきたが、実際のリングには x-y カップリングがある。

x-y カップリングがある線形の運動は、

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{ds^2} &= k(s)x + k_s(s)y \\ \frac{d^2y}{ds^2} &= -k(s)y + k_s(s)x \end{aligned} \quad (2-52)$$

で表される。 $k_s(s)$ がカップリングをもたらす源であり、スキュー 4 極磁場 (通常の 4 極磁場を 45 度傾けたもの) による。

ここでは詳しい議論はしないが、x-y カップリングがある場合でも 4 x 4 行列 $U(s)$ を使って

$$\begin{pmatrix} X \\ X' \\ Y \\ Y' \end{pmatrix} = U(s) \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix} \quad (2-53)$$

で表せる新しい座標 (X, X', Y, Y') により、カップリングのない 2 自由度の運動 (2 つの固有振動数の異なるベータatron 振動) に分離できる。 (X, X') 、 (Y, Y') をそれぞれ固有モードと呼び、対応する固有エミッタンス (ε_X , ε_Y)、ベータ関数、チューン、ディスパージョン関数 ($\eta_X, \eta_X', \eta_Y, \eta_Y'$) 等も定義でき、平衡固有エミッタンスも式(2-46)と同様に表すことができる。

カップリングが小さければ、 $U(s)$ を適当に選ぶ ($U(s)$ は一意的には決まらない) ことにより、 (X, X') 、 (Y, Y') は物理的な方向 (x, x') 、 (y, y') に

近いものにでき、「ほぼ水平」と「ほぼ垂直」な運動に分けることができる。カップリングがある場合でも、物理的な方向の射影エミッタンスは、式(1-3)で定義することができる。固有エミッタンスのうち小さい方(「ほぼ垂直」)は必ず2つの射影エミッタンスのどちらよりも小さくなる。

ところで、ダンピングリングから取り出された後のビームラインには、カップリング補正を行うための領域がある。これは、4極磁石とドリフト空間からなるビームラインの適当な場所に4個以上のスキュー4極磁石を挿入したものである。その下流には、カップリング測定のために(水平・垂直方向だけでなく斜め方向のビームサイズを測定する)ビームサイズ測定装置を4か所以上設置する必要がある。下流では、固有モードを物理的な水平・垂直方向の運動と一致させることができる。この結果、下流での射影エミッタンスとリング内の固有モードのエミッタンスが同じになる。従って、結果として垂直方向のエミッタンスの小さいビームを得るためには、リング内で固有エミッタンスのうちの1つを小さくすることが重要である。([4,5])

2.10. 低エミッタンス調整

先に述べたように、垂直方向のエミッタンスは設置誤差などのエラーの大きさで決まる。垂直エミッタンスを小さくすることはルミノシティを大きくするために非常に重要であり、エラーをできるだけ小さくするための調整が行われる。

x-y カップリングが大きくなれば、どちらの固有モードも軌道の水平方向の曲りによる大きなディスパージョンの影響を受け、 H_x だけでなく H_y も大きくなり、結果として ϵ_y が大きくなってしまう。結局、x-y カップリングは小さくしなければならず、「ほぼ垂直」エミッタンスを小さくすることが重要となる。

x-y カップリングが小さくても、垂直方向に軌道が大きくずれていれば垂直方向のディスパージョンが発生し(H_y が大きくなる)、エミッタンスを大きくする原因となる。

以上をまとめると、低エミッタンスのための調整は、

1. 「ほぼ垂直」固有モードのベータatron振動の方向を全周にわたって真の垂直方向に近づける。
2. 垂直方向のディスパージョンを小さくする。ということになる。

固有モードのベータatron振動の方向は、固有ベータatron振動数で共鳴が起こるようにビームを蹴り、振動に同期したビーム位置の変化として測定できる(多数のturn by turn BPMを使用)。ディスパージョンは、シンクロtron振動を起こさせ(振動数に合わせて加速空洞の電場を変えることで共鳴を起こさせる)、エネルギーの振動に同期した位置の変化を見ることで測定できる。測定結果をもとに、2極磁石・スキュー4極磁石を設定して補正を行う。[3]

これらの補正を効果的にし、エミッタンスを小さくするためには、BPMの精度が本質的に重要である。

2.11. エミッタンスを大きくする他の要因

磁石の設置誤差や強さのエラー以外にも、エミッタンスを大きくする原因がある。ビームと残留ガスとの散乱、ビーム内の粒子同士の散乱(intra-beam scattering)、wakefield によるビーム不安定、残留ガスから発生するイオンとビームの相互作用による不安定、電子雲による不安定、等がある。これらはリニアコライダーに限らず、全ての低エミッタンスリングで問題になり得ることである。

これらの要因のうちILCダンピングリングで最も重要と考えられているのが、陽電子リングでの電子雲による不安定性である。シミュレーションなどの検討の結果、第一段階(約1300バンチ、390 mA)では問題ないが、ルミノシティ増強のためバンチ数とビーム電流を倍増した場合には不安定性が起こる可能性がある。この場合には陽電子ダンピングリングをもう1つ作ることであり、そのためのスペースを確保する設計になっている。[3]

2.12. 入射・取出し

低エミッタンスのみでなく、入射・取り出しにも重要なことがある。ILCのビームはバンチ数約1300でバンチ間隔約550 ns、パルスの長さは約0.7 ms ある。これをそのままダンピングリング

に入れようとする、リングは周長は200 kmを超える巨大なものになってしまう。

実際に必要な周長はバンチの数とバンチ間隔の積なので、なるべくリング周長を短くするためリングの中ではバンチ間隔をなるべく小さくする。そのためにはリングの中にバンチ間隔を詰めて入射し、取り出しも何個かおきに取り出す必要がある。その際、前後のバンチに影響を与えないように立ち上がり・立下りの速いキッカーを使用する (Fig 2.5)。

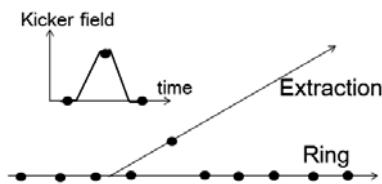


Fig 2.5 速いキッカーによるバンチの取り出し

ダンピングリング内のバンチ間隔は6.15 ns (650 MHzの高周波4周期分)であり、キッカーの立ち上がり・立下りはこれ以下でなければならない。この要求を満たすため、数台のストリップライン型のキッカーに高電圧の短いパルスを提供するという設計になっている。この速いキッカーシステムの実証試験はKEKのATFで行われた。[6]

3. リターンライン

ダンピングリングから取り出されたビームはバンチ圧縮器・主リナックの入り口まで、主リナックのトンネルの中を逆方向に運ばれる。この間、ビームのエミッタンスは小さいままにしなければならない。

ビームが一度だけ通過する輸送ビームラインであっても、制動放射による長さ当たりのエミッタンスの増大は $B^3 H_{x(y)}$ に比例して発生する。長いリターンラインは地球の曲率に沿って垂直方向に曲がっているがほぼ直線であり、ここでの制動放射は問題にならないが、最後の180度方向転換をするライン (turn around) では制動放射を考慮した設計が必要である。具体的には、曲率半径をある程度大きく (B を小さく、結果としてビームラインを長く) すること、収束を強くしたビーム光学設計により H_x を小さくすることなどである (H_y の設計値はゼロ)。

その他にエミッタンスを増大させてしまう原因としては、4極磁石の設置誤差、残留ガスとの

散乱によって発生するイオン (電子ビームとの相互作用による不安定性) などが重要になる。

また、ダンピングリングの取り出しキッカーの強さの変動や、長いリターンライン全体での外部からの磁場の変動などによる軌道の変化にも注意しなければならない。Turn around 内で軌道がずれると dispersive effect (4.6節参照) によりエミッタンスが増大するからである (長いリターンラインではあまり問題にならない)。

4. 主リナック

主リナックは LC の中で最も重要な部分と言ってもよいであろうが、ビームダイナミクスの観点からは単純な基本要素の繰り返しであり、構成要素の数が非常に多いことを除き、LC のほかの部分と比べて複雑な部分ではない。同じ要素の多数の繰り返しであるため、ある程度解析的な計算が有力である場合も多い。しかしながら、軌道の補正などを含めるには解析的な計算のためには問題が複雑になりすぎる。したがって、ほとんどの場合、計算機を使ったシミュレーションが欠かせないものとなっている。

なお、この部分は 2006 年の OHO セミナーでの筆者の講義ノートをもとにしたものである (大幅に省略)。2006 年の講義ノートでは本稿よりも詳しい記述があるので、そちらも見ていただければありがたい。

4.1. パラメーターと基本構成単位

Table 4.1 に、重心系エネルギー 500 GeV の場合の主リナックパラメーターのうち、ビームダイナミクスに特に関係するものを示す。

Table 4.1, Parameter of ILC Main Linac (ECM=500 GeV)

Beam energy	15 GeV to 250 GeV
Acc. Gradient (average)	31.5 MV/m
Bunch Population	2 x10 ¹⁰ /bunch
Number of bunches	1312
Bunch spacing	554 ns
Bunch Length	0.3 mm
Emittance x	8.4-9.4 x10 ⁻⁶ m-rad

Emittance y (at DR exit/ML exit)	2.4-3.0 x10 ⁻⁸ m-rad
-------------------------------------	---------------------------------

主リナックのビーム光学設計は、単純な FODO であり、FODO セル当たりの位相の進みは水平方向 75 度、垂直方向 65 度で、リナックのどこでも一定である。

また、長い距離にわたって超伝導空洞に液体ヘリウムを供給するための技術的な理由から、主リナックのクライオモジュール（に沿ったヘリウム供給ライン）は、重力に対して垂直（水平面に対して平行）に設置されるのが望ましい。つまり、主リナックは地球の表面に沿った曲線になる。この曲がり具合は滑らかで緩やかなので、ビームダイナミクスの観点からは問題にならないと考えられるが、これはきちんと確認しておく必要がある。

4.2. ビームの質

主リナックの役目は、当然ながらビームを加速することであるが、「ビームダイナミクス」を検討することの主な目的は、「いかに質の良さを保ちながらビームを加速するか」であると言える。「ビームの質」とはなにか？大雑把には、全ての方向についてビームのばらつきが小さいことであると言える。この「方向」は、縦方向（ビーム軸方向）と横方向に分けられる。

ビームの「質の良さ」は基本的にダンピングリングで作られ、その下流では、この質をいかに保っていくかが課題になる。

4.3. エネルギーの広がり と 安定性

まず、縦方向を考える。主リナックの場合、ビームエネルギーが高く、超相対論的であることから、縦方向の位置は固定されていると考えてよい。縦方向の位置の変化はバンチ圧縮装置では非常に重要になるが、主リナックでは、エネルギーの分布の変化のみを考えておけばよい。

従って、主リナックに関係するビームの縦方向の質は、

- (1) エネルギーの安定性、
- (2) エネルギーの広がりの小さいこと、

である。

4.3.1. 単バンチのエネルギーの広がり

まず、単バンチのエネルギーを考える。高周波による加速と加速空洞でのウェーク場を考慮する必要がある。線電荷密度を $\lambda(z)$ 、ウェーク関数を $W(z)$ とすると、位置 z にある粒子がウェーク場のために失うエネルギーは

$$E_{\text{loss}}(z) = e \int_{-\infty}^z dz' \lambda(z') W(z-z') \quad (4-1)$$

と書ける。

加速空洞によるビームのエネルギー増加は、高周波によるエネルギー増、ウェーク場によるエネルギー減、の合計である。

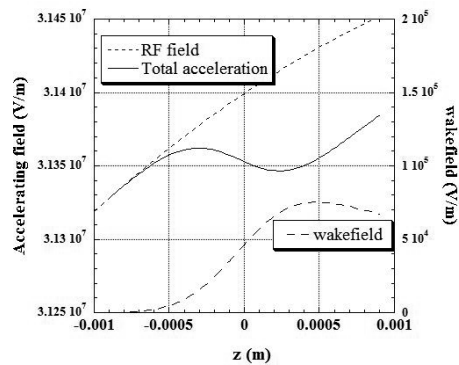


Fig. 4.1, Energy gain from RF field, energy loss due to wakefield and total energy gain per unit length.

図に示したように、エネルギーの広がりを最小にするためにバンチの中心は高周波電場のピークではなく約 5 度ずれたタイミングに置いている。結果としてエネルギーの広がりリナックの中ではあまり増加しない。加速があるために相対的なエネルギーの広がり減少する。

エネルギーの広がりが設計よりも増大する要因としては、高周波の位相のずれなどが考えられるが、エネルギー（の中心）の安定性からの要求に比べれば、要求される精度は非常に緩い。

4.3.2. バンチ間のエネルギーのばらつき

バンチ内のエネルギーの広がり避けられないものであるから、バンチ間の差はこれに比べて十分に小さくなっていけばよい。

バンチ毎のエネルギーの安定性は、「ローレンツ デチューニング」やビーム入射時に変動するビームローディングなどを補償する、高周波の制御の精度に依存している。バンチ内では（短距離の）ウェーク場が重要であったが、バンチ間で働く長距離の高次モードのウェーク場はあまり問題にならない。減衰と、周波数が空洞ごとにわずかながらばらつくことにより、バンチが多数あってもウェーク場の影響が蓄積しないためである（横方向のウェーク場の議論も参照）。

4.3.3. エネルギーの安定性

エネルギーは当然なるべく安定であったほうがよいが、要求される安定性の目安は、単バンチのエネルギーの広がりより（十分）小さいということである。

エネルギーの安定性は、高周波電場の振幅と位相の安定性から決まる。ただし、ゆっくりした変動はフィードバックによって補正することが可能であり、ILC の繰り返しの 5 Hz よりも十分遅い変動に対する許容値は緩いものとなる。

4.4. 横方向のビームの質

良質のビームとは、高いルミノシティの得られるビームである。横方向の運動を考えた場合、

- (1) 衝突点でのビーム位置の安定性。
- (2) 衝突点でのビームの広がり（ビームサイズ）が小さいこと。

の 2 つだと言える。しかし、主リナックでの軌道の安定度は、衝突点でのビーム位置の安定度に直結するわけではない。それは、ビーム位置を安定にするため、各所で軌道のフィードバックをするからである。（4.8 節参照）

後で述べるように、衝突点でのビームサイズを小さくしてルミノシティを確保するためにはビームのエミッタンスが小さくしなければならない。また、衝突点でのビーム-ビーム相互作用の考察から、ビームの断面の形は丸でなく扁平なほうがよく、ILC の設計値は垂直方向のエミッタンスは水平方向の 1/500、衝突点での垂直方向のビームサイズは水平方向の約 1/100 である。そのため、

ビーム位置の安定性や、ビームサイズの増大によるルミノシティの減少は、垂直方向の影響が水平方向に比べて非常に大きい。従って、垂直方向の低エミッタンスを保つことが最も重要である。

主リナックにおいて、エミッタンスの悪化する要因は主に、

- (1) 加速空洞の横方向ウェーク場
- (2) エネルギーに依存した軌道のずれ (dispersive effect)

である。

4.5. 加速空洞の横方向ウェーク場によるエミッタンス悪化

荷電粒子が加速空洞などの構造の中を通過すると、そこに電磁場を励起する。この電磁場をウェーク場 (wakefield) と呼ぶ。

加速空洞内がビーム軸に対してほぼ回転対称であるため、横方向のウェーク場（後方の荷電粒子に横方向の力を与える）は、荷電粒子が加速空洞の中心からずれた位置を通過することによって励起される。従って、ウェーク場の影響は、

- (1) 先行する粒子の横方向の振動（ベータトロン振動）が後方の粒子の振動を励起してその振幅を増大させる効果 (BBU: Beam Break Up)
- (2) 加速空洞の設置誤差により（軌道と空洞中心が相対的にずれる）横方向ウェーク場が励起され、後方の粒子の軌道を変化させる効果。

の 2 つに分けて考えることが出来る。（厳密には、(2) の効果で励起された振動により、さらに後方で (1) の効果が生ずる。この 2 つは完全に分離することは出来ないが、実際上分けて考えてよい場合が多い。）

又、ウェーク場は、バンチ内で働く短距離のウェークと、バンチ間で作用する長距離でのウェークに分けることが出来る。

4.5.1. BBU(Beam Break Up)

ビームが何らかの理由で横方向に振動（ベータトロン振動）するとき、先行する粒子の励起するウェーク場によって後方の粒子の振動が増大する可能性がある。この効果が大きいと、エミッタンスが増大し、さらに振動が大きくなるとビームの

一部が失われてしまう。これを、BBU (Beam Break Up)と呼んでいる。

以下、この効果を2粒子モデルを使って簡単に調べてみる。先行する粒子とその後方の粒子の2個だけを考え、後方粒子が受けるウェーク場の影響を計算する。 $y_0(s)$ と $y_1(s)$ を距離 s での先行する粒子と後方の粒子の横方向の位置とし E_0 、 E_1 をエネルギー、 K を収束力、 q を先行粒子の電荷、 W をウェーク関数とすると、それぞれの粒子の運動方程式は、

$$y_0''(s) = -\frac{K}{E_0} y_0(s) \quad (4-2)$$

$$y_1''(s) = -\frac{K}{E_1} y_1(s) + \frac{eqW}{E_1} y_0(s) \quad (4-3)$$

と書ける。空洞等の設置誤差はないとする。ここで、 E_0 、 E_1 、 K 、 q 、 W を s によらない定数とし(加速なし、一定の連続した収束力)、さらに $E_0 = E_1$ と仮定すると、先行粒子は単振動、後方の粒子は強制振動が加わり、

$$y_0(s) = y_0(0) \cos(ks) + y_0'(0) \sin(ks)/k \quad (4-4)$$

$$y_1(s) = y_1(0) \cos(ks) + y_1'(0) \sin(ks)/k + s \frac{eqW}{2E_0 k} (y_0(0) \sin(ks) - y_0'(0) \cos(ks)/k) \quad (4-5)$$

となる。ただし、 $k \equiv \sqrt{K/E_0}$ とした。上の式から、後方の粒子の強制振動の振幅は、距離に比例して増大することがわかる(加速なしの場合)。

一定の加速 g がある場合に振動の振幅の変化を計算してみると、リナック入り口から距離 s でのエネルギーを $E(s) = E(0) + gs$ とすると、 s での先行粒子の振幅はエネルギーの平方根に逆比例して小さくなり、

$$a_0(s) \approx a_0(0) \sqrt{E(0)/E(s)} \quad (4-6)$$

となる(加速によって角度が減少するため)。後方の粒子の強制振動の振幅は、

$$a_1(s) \approx \begin{cases} a_0(s) eqW \beta \log\left(\frac{E(s)}{E(0)}\right) / 2g & (g > 0) \\ a_0(s) eqW \beta s / 2E_0 & (g = 0) \end{cases} \quad (4-7)$$

のように相対的に増加することがわかる。($\beta = 1/k$ はベータ関数。)

ILCの1個のバンチを前後2つに分け、各々がバンチ半分の電荷を持ち、距離が2シグマ離れているという2粒子モデルを考えよう。

$$(q \approx 1.6 \text{ nC}, W \approx W(0.6 \text{ mm}) \approx 30 \text{ V/pC/m}^2)$$

主リナックのパラメーター、 $E(0) = 15 \text{ GeV}$ 、

$E(\text{final}) = 250 \text{ GeV}$ 、 $\beta \approx 70 \text{ m}$ 、 $g \approx 31.5 \text{ MeV/m}$ 、

を入れ、リナックの最後での前のバンチの振動と後のバンチの強制振動の振幅比を計算すると、

$$\frac{a_1(s)}{a_0(s)} \approx \frac{eqW \beta \log(E(s)/E(0))}{2g} \approx 0.15 \quad (4-8)$$

となる。即ち、バンチの後半は、バンチの前半のベータatron振動の励起するウェーク場によって、その振幅の0.15倍の強制振動を励起される。

4.5.2. BNS ダンピング

バンチ内のウェーク場によるBBUを抑制する方法として、BNS ダンピング、あるいはAuto-phasing というものがよく知られている。

これは、バンチの前部と後部のエネルギーに差をつけることによって共鳴による強制振動の増大を抑えようとするものである。

式(4-3)において、もし

$$\frac{K}{E_0} = \frac{K}{E_1} - \frac{eqW}{E_1} \quad (4-9)$$

であれば、

$$y_1(s) = y_0(s) \quad (4-10)$$

が後方の粒子の運動方程式の解になることが容易にわかる。即ち、ウェーク場の効果とエネルギー差の効果がちょうど釣り合って、(初期状態が同じであれば)後方粒子は前方粒子と完全に同じ軌道を持ち、強制運動の振幅が増大していかない。これを「Auto-phasing」と呼んでいる。

さらにバンチの前部と後部のエネルギーの差を大きくすると、初期状態が同じ後方粒子の振幅を小さくすることが出来る。これは、ウェーク場が振動を抑える方向に働くからである。これを3人の提案者の名前の頭文字を取って「BNS ダンピング」と呼んでいる。[7]

このようなバンチの前部と後部のエネルギーに差をつけるためには、加速高周波電場のバンチ中心に対する相対的な位相をずらしてやればよい。ただし、リナック途中でのenergy spreadが

大きくなり、後で述べる **dispersive effect** が大きくなってしまふ。ILC においては短距離のウェーク場がそれほど小さくなく、BBU は深刻な問題ではない。このため、BNS ダンピングなどの手段を使う必要はないと考えられる。

4.5.3. 加速空洞の設置誤差による影響

ビームのベータatron振動がない、あるいは非常に小さい場合でも、加速空洞が横方向にずれて設置されていればそのためにビームの後方の粒子が横に蹴られる。ここでは、その効果を近似的に表す式を導いてみる。

i 番目の加速空洞の設置誤差を a_i 、空洞の長さを L_c 、横方向ウェーク関数を $W_i(z)$ とすると、 k 番目の電子（又は陽電子）が受ける横方向の角度変化は、

$$\begin{aligned}\Delta\theta_{k,i} &= -\frac{ea_iL_c}{E_i} \sum_{z_l < z_k} eW_i(z_k - z_l) \\ &= -\frac{ea_iL_c}{E_i} S_{k,i}\end{aligned}\quad (4-11)$$

となる。ただし、 z_l は l 番目の粒子の縦（ビーム軸）方向の相対的な位置であり、和は k より前方の全粒子についてとる。 E_i はこの空洞の場所でのビームエネルギーである。また、 i 番目の加速空洞の k 番目の電子（又は陽電子）に対する「sum-wake」を以下のように定義した。

$$S_{k,i} \equiv \sum_{z_l < z_k} eW_i(z_k - z_l) \quad (4-12)$$

この角度変化による、リナック終点での位置と角度の変化は、それぞれ **transfer matrix** の 3-4 成分と 4-4 成分を掛けて求めることができ、これらの成分は、

$$\begin{aligned}R_{34}(i) &= \sqrt{1/EE_i} \sqrt{\beta\beta_i} \sin\varphi_i \\ R_{44}(i) &= \sqrt{1/EE_i} \sqrt{\beta^{-1}\beta_i} (\cos\varphi_i - \alpha \sin\varphi_i)\end{aligned}\quad (4-13)$$

である。ただし、 E, β, α はリナック終点でのビームエネルギー、ベータ関数、アルファ関数で、 φ_i は i からリナック終点までの位相の進みである。多数の空洞の寄与を足し合わせて、リナック終点での k 番目の電子の位置のずれは、

$$y_k = -e \sum_i a_i L_c S_{k,i} \sqrt{1/EE_i} \sqrt{\beta\beta_i} \sin\varphi_i \quad (4-14)$$

ウェーク関数は全ての空洞で同じなので、 $S_{k,i}$ は i に依らず S_k と書け、

$$y_k = -e S_k \sum_i a_i L_c \sqrt{1/EE_i} \sqrt{\beta\beta_i} \sin\varphi_i \quad (4-15a)$$

角度のずれも同様に、

$$y'_k = -e S_k \sum_i a_i L_c \sqrt{1/EE_i} \sqrt{\beta^{-1}\beta_i} (\cos\varphi_i - \alpha \sin\varphi_i) \quad (4-15b)$$

である。

空洞の設置誤差の結果エミッタンスがどの程度増加するかを計算してみる。ウェークがない場合のリナック終点での位置と角度を y_0, y'_0 、ウェークによるずれを y, y' とすると、エミッタンスの 2 乗は (y_0 と y'_0 の平均はゼロとする)、

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 &= \langle (y_0 + y - \langle y \rangle)^2 \rangle \langle (y'_0 + y' - \langle y' \rangle)^2 \rangle \\ &\quad - \langle (y_0 + y - \langle y \rangle)(y'_0 + y' - \langle y' \rangle) \rangle^2 \\ &= \langle y_0^2 \rangle + \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2 \langle y_0'^2 \rangle + \langle y'^2 \rangle - \langle y' \rangle^2 \\ &\quad - \langle y_0 y'_0 \rangle + \langle y y' \rangle - \langle y \rangle \langle y' \rangle^2\end{aligned}\quad (4-16)$$

となる。ここで、 $\langle \rangle$ は全粒子についての平均だが、式(4-14),(4-15)などでの k についての平均に対応する。従って、

$$\begin{aligned}\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2 &= -e^2 \langle S^2 \rangle - \langle S \rangle^2 \\ &\quad \times \left(\sum_i a_i L_c \sqrt{1/EE_i} \sqrt{\beta\beta_i} \sin\varphi_i \right)^2\end{aligned}\quad (4-17)$$

$$\begin{aligned}\langle y'^2 \rangle - \langle y' \rangle^2 &= e^2 \langle S^2 \rangle - \langle S \rangle^2 \\ &\quad \times \left(\sum_i a_i L_c \sqrt{1/EE_i} \sqrt{\beta^{-1}\beta_i} (\cos\varphi_i - \alpha \sin\varphi_i) \right)^2\end{aligned}\quad (4-18)$$

$$\begin{aligned}\langle y y' \rangle - \langle y \rangle \langle y' \rangle &= e^2 \langle S^2 \rangle - \langle S \rangle^2 \\ &\quad \times \left(\sum_i a_i L_c \sqrt{1/EE_i} \sqrt{\beta\beta_i} \sin\varphi_i \right) \\ &\quad \times \left(\sum_i a_i L_c \sqrt{1/EE_i} \sqrt{\beta^{-1}\beta_i} (\cos\varphi_i - \alpha \sin\varphi_i) \right)\end{aligned}\quad (4-19)$$

である。

個々の空洞の設置誤差が独立なランダム (rms a) とすると、確率的な期待値として、

$$\overline{\left(\sum_i a_i L_c \sqrt{1/EE_i} \sqrt{\beta\beta_i} \sin\varphi_i \right)^2} \approx A\beta \quad (4-20)$$

$$\begin{aligned} & \overline{\left(\sum_i a_i L_c \sqrt{1/EE_i} \sqrt{\beta^{-1}\beta_i} (\cos\varphi_i - \alpha \sin\varphi_i) \right)^2} \\ & \approx A \frac{(1+\alpha^2)}{\beta} \end{aligned} \quad (4-21)$$

$$\begin{aligned} & \overline{\left[\left(\sum_i a_i L_c \sqrt{1/EE_i} \sqrt{\beta\beta_i} \sin\varphi_i \right) \right.} \\ & \left. \times \left(\sum_i a_i L_c \sqrt{1/EE_i} \sqrt{\beta^{-1}\beta_i} (\cos\varphi_i - \alpha \sin\varphi_i) \right) \right]} \\ & \approx A\alpha \end{aligned} \quad (4-22)$$

となる。ここで、

$$A \equiv a^2 L_c \frac{\bar{\beta}}{2Eg} \log \frac{E}{E_0} \quad (4-23)$$

であり、 $\bar{\quad}$ はリナック全体での平均を表す。また、 $\overline{\quad}$ は、ランダムな設置誤差に対応する期待値（多数のリナックを考えた場合の平均）を表す。ビームエネルギーとベータ関数の間には相関がないと仮定し、

$$\begin{aligned} \beta_i & \rightarrow \bar{\beta} \\ \cos^2 \varphi_i, \sin^2 \varphi_i & \rightarrow 1/2 \\ \cos \varphi_i \sin \varphi_i & \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (4-24)$$

等とした。また、

$$\sum_i \frac{1}{E_i} \rightarrow \frac{1}{gL_c} \int_{E_0}^E dE' \frac{1}{E'} = \frac{1}{gL_c} \log \frac{E}{E_0} \quad (4-25)$$

を使った。

一方、

$$\begin{aligned} \langle y_0^2 \rangle & = \varepsilon_0 \beta \\ \langle y_0'^2 \rangle & = \varepsilon_0 \frac{1+\alpha^2}{\beta} \\ \langle y_0 y_0' \rangle & = \varepsilon_0 \alpha \end{aligned} \quad (4-26)$$

である（ ε_0 はウェークのない場合のエミッタンス）ことから、「sumwake の variance」を

$$v_{sw} \equiv \langle S^2 \rangle - \langle S \rangle^2 \quad (4-27)$$

として、

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_0 + e^2 v_{sw} A \quad (4-28)$$

であることがわかる。従って、規格化エミッタンスの増加の期待値は、

$$\overline{\Delta(\gamma\varepsilon)} = e^2 v_{sw} a^2 L_c \frac{\bar{\beta}}{2mc^2 g} \log \frac{E}{E_0} \quad (4-29)$$

になるという結果が得られた。なお、ビームの進行方向の線電荷密度を $\lambda(z)$ 、全電荷を q とすると、

$$S(z) = \int_{-\infty}^z \lambda(z') W(z-z') dz' \quad (4-30a)$$

$$v_{sw} = \frac{1}{q} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(z) (S(z))^2 dz - \left(\frac{1}{q} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(z) S(z) dz \right)^2 \quad (4-30b)$$

である。

4.5.4. 単バンチの効果

加速空洞の短距離の（バンチ内に影響を及ぼす）ウェーク場の強さは、空洞の細かい部分の形状にはあまり依存せず、空洞のアイリス部分（セル間のくびれている部分）の径でほぼ決まってしまう。ここでは TESLA 型の加速空洞のウェーク関数を仮定して、空洞の設置誤差の単バンチでの効果を見てみる。TESLA 空洞で計算されているウェーク関数によると、バンチ長 0.3 mm、バンチ電荷 3.2 nC で計算した単バンチに対する「sumwake の variance」は

$$v_{sw} \approx (2.5 \times 10^4 \text{ V/m}^2)^2 \quad (\text{single bunch})$$

である。空洞設置誤差の RMS (a) が 0.5 mm とすると、式(4-29)にいて、

$$\overline{\Delta(\gamma\varepsilon)} \approx 1.0 \times 10^{-9} \text{ m} \quad (\text{single bunch})$$

であり、ダンピングリンクからの規格化エミッタンスの設計値 (20 nm) の約 5% である。この結果は、より正確なトラッキングシミュレーションとよく一致する。

4.5.5. 多バンチの効果

長距離ウェークによる多バンチ間の効果についても単バンチと同様に取り扱うことが可能である。横方向のウェーク場は短距離では距離とともに単調に増加するが、長距離のウェーク場は多くの振動（共振）するモードの和として表される。

長距離のウェーク場の距離（時間と言ってもよい）に依存した変化はバンチの長さに比べて緩やかなので、長距離ウェーク場の影響を考える場合、各バンチを1個の大きさのない荷電粒子とみ

なす。そうすると、「 k 番目のバンチに対する sum-wake」が、 $W(z)$ をウェーク関数、 q_l を l 番目のバンチの電荷として、

$$S_k \equiv \sum_{l < k} q_l W(z_k - z_l) \quad (4-31)$$

と定義できる。

Sum-wake の大きさは、バンチ間隔に強く依存するので注意が必要だが、TESLA-TDR[8]に報告されているウェーク場のモードについて単純に計算すると sum-wake がバンチ内（短距離）の sum-wake よりもはるかに（1桁）大きいことがわかる。実際にこのようなウェーク場があれば、後方のバンチが大きな横方向の力を受け、バンチごとの軌道の差が大きくなってしまう。

この長距離ウェーク場の問題を解決するのが、減衰（damping）とデチューニング（detuning）である。

超伝導空洞では、空洞内部での電磁場エネルギーの損失がほとんどないので、励起されたウェーク場を減衰させるためには空洞の外に引き出す必要がある。このために、HOM（Higher Order Mode）カプラーと呼ばれるカプラーを取り付ける。これは、問題を引き起こすウェーク場（HOM：高次モード）は外に引き出すが、加速に使われる電磁場（加速モード）は閉じ込めておくような特別な構造でなければならない。重要な高次モードについて、 Q 値（電磁場のエネルギーが何周期で $1/e$ になるかという値。小さいほど減衰が強い。）が 10^4 から 10^5 以下になるようにする。この減衰をいれて sum-wake を計算すると 50 バンチ目あたりから後ろのバンチ全てに対しては sum-wake がほとんど一定になる。しかし、この程度の減衰では 5 バンチ分の距離程度まではあまり効かない。この比較的短いところでウェーク場の影響、（特に BBU）を抑えるのが「デチューニング」である。

BBU を考えると、ベータトロン関数程度の長さ（ベータトロン振動の周期の $1/2\pi$ ）ではあまり位置が変化せず、その間にある加速空洞から同じ方向のウェーク場を受ける。ここで、ベータトロン関数程度の長さの中にある加速空洞の数を n とおくと、この n 個の空洞でのウェーク場の影

響は、これらの空洞のウェーク関数の和から決まる。「デチューニング」を簡単に説明するために、1 個の高次モードのみ考え、 i 番目の加速空洞でのこのモードの角周波数を ω_i とすると、 n 個の空洞のウェーク関数の和は、

$$W_{\text{effective}}(z) = \sum_{i=1}^n W_i(z) = \sum_{i=1}^n W_0 \sin(\omega_i z / c) \quad (4-32)$$

と書ける。ただし、 $W_i(z)$ は、 i 番目の加速空洞のウェーク関数、 W_0 はこのモードのウェーク関数の振幅（全ての空洞で共通と仮定）で、減衰は無視する。 ω_i が全加速空洞で等しければ、これは当然 n 倍になるだけ、

$$W_{\text{effective}}(z) = nW_i(z) \quad (4-33)$$

である。この時、ウェーク場の 2 乗の平均は、

$$n^2 W_0^2 \overline{\sin^2 \omega_i} = n^2 W_0^2 / 2 \quad (4-34)$$

である。

ω_i が δ_ω 程度の幅でばらつきをもっていたらどうか。 $z/c \approx 2\pi/\delta_\omega$ となるような長距離では、 ω_i がでたらめに分布し、従って、 $W_{\text{effective}}(z)$ の 2 乗の平均は、

$$W_0^2 \left(\overline{\sum_i \sin \omega_i} \right)^2 = W_0^2 \sum_i \overline{\sin^2 \omega_i} = nW_0^2 / 2 \quad (z/c \approx 2\pi/\delta_\omega) \quad (4-35)$$

となる。すなわち、(4-34) と比べて、実質的にウェーク場の振幅を $1/\sqrt{n}$ にできる。ILC では、 $n \approx 60$ であり、約一桁減らせることになる。このデチューニングを有効にするため、 $\delta_\omega = 0.001$ 程度の周波数のばらつきがあればよく、空洞製作上の自然なばらつきによってもたらされると考えられている。

4.5.6. ウェーク関数のスケールリングについて

主リナックに超伝導空洞を使用する ILC においては、常伝導空洞で設計されていた GLC, NLC などと比べて、ウェーク場の影響がはるかに小さい。これは、超伝導空洞の場合、比較的周波数が低いため、周波数に反比例して空洞の大きさ、特に開口部の大きさが増大し、その結果ウェーク場が弱くなるためである。（ILC の高周波は 1.3GHz。常伝導 LC では 10GHz 以上。この違い

は、RF エネルギーをビームに伝える効率の最適化の結果が超伝導と常伝導ではまったく異なることによる。)

完全に相似形の空洞の場合、ウェーク関数の各モードの振幅は $|W| \propto f^3$ のように、周波数の3乗に比例し、 $z \rightarrow 0$ でのウェーク場の傾きは、 $dW/ds \propto f^4$ のように4乗に比例する。従って、減衰やデチューニングを考えず、又ビームパラメーターが同じであれば、1.3GHz の ILC では、10GHz の常伝導 LC に比べて、ウェーク場の影響が長距離 (バンチ間) で 1/500、短距離 (バンチ内) では 1/3500 程度ということになる。(実際には、アラインメント、減衰やデチューニングのやり易さ、ビームパラメーターの違いなどのためこれほどの大きな差はない。)

4.6. Dispersive Effect によるエミッタンス悪化

4.6.1. Dispersive Effect とは

異なるエネルギーを持つ荷電粒子は、同じ電磁場によって横方向に同じ力を受けたときの軌道の角度変化が異なる (角度変化はエネルギーに反比例)。そのため、ビームエネルギーの広がりがあると、それに伴い軌道にも広がりが生じる可能性がある。その結果エミッタンスの増大につながる。このような、エネルギーに依存して横方向の運動の差が生じる効果を *dispersive effect* と呼ぶ。

リナックの終点や最終収束系付近では必ずビームの計測が行われ、エネルギーに依存した横方向の位置の分布が時々測定されるはずである。この依存の1次の成分が「1次 dispersion」であるが、測定できればこれを補正することは比較的容易である。また、リナックは地球の曲率に沿って曲がっているので、必ず dispersion が生ずるが、これもリナックの終点以降で必ず補正されなければならない。

従って、問題となるのは1次 dispersion を補正した後で残るもの (高次の dispersion) であり、リナックでの変動しないエラーによって引き起こされるエミッタンスの増大を考える場合には、

「1次 dispersion を補正後のエミッタンス」を見る必要がある。(補正が追いつかないような速く変化するエラーが引き起こすエミッタンス増大を調べる場合には、このような補正を考慮してはいけない。)

4.6.2. 入射誤差による Dispersive Effect

まず設計通りで全く誤差のないリナックで、入射位置 (角度でもよい) のずれがある場合。Fig. 4.2 は filamentation と呼ばれる現象を簡単に示している。横軸と縦軸は基本的に、粒子の位置と角度を表し、1個の丸はあるエネルギーを持つ粒子の分布を表す。エネルギーに差があると、ベータatron振動の位相の進みが異なるために、このように粒子の分布が位相空間上で広がっていく。右上のような状態ならば、dispersion が線形に近いので、1次の補正が有効だが、左下のようになってしまうと、(実際には、他の要因から作り出される dispersion も重なり合って複雑になるため) これを補正するのはほとんど不可能であろう。

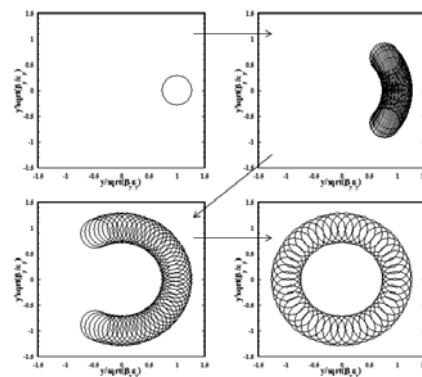


Fig. 4.2, Schematic explanation of filamentation.

4.6.3. 4極磁石の横方向設置誤差による Dispersive Effect

Dispersion がない場所では、4極磁石の磁場中心と粒子の軌道のずれは (エネルギーに反比例した角度変化をもたらすので) 1次の dispersion を作る。1次の dispersion ある場所ではエネルギーの異なる粒子は4極磁石の異なる場所を通るため異なる磁場を感じ、さらに異なる角度変化を受け、結局2次の dispersion も作られる。以下同

様にして、 n 個の 4 極磁石を通過すると、 n 次の dispersion まで作られる。4 極磁石の場所での 1 次の dispersion が大きいと、それによって作られる 2 次の dispersion も大きくなってしまい、問題を生ずる。

シミュレーションによると、4 極磁石の設置誤差の RMS(Root Mean Square)を 1 ミクロンとして軌道補正を全くしない場合には、1 次ディスパージョン補正なしのエミッタンスは約 50%増大し、1 次ディスパージョン補正後のエミッタンスは 5%増大する。この値は、設置誤差の 2 乗に比例する。従って、設置誤差が 100 ミクロンあれば、1 次ディスパージョン補正後のエミッタンスは元の 500 倍にもなり、とても許容できない。設置誤差は数百ミクロンと見積もられているため、何らかの補正が必須であることがわかる。一方、補正が効かないような速い 4 極磁石の振動が 100 nm 程度あれば、エミッタンスは 0.5%程度増大することになる。

4.6.4. 加速空洞の傾きによる Dispersive Effect

4 極磁石の設置誤差の他に、もう一つ dispersive effect をもたらす重要な誤差が、加速空洞の傾き (x 軸の周りの回転) である。

加速空洞が傾いていると、本来ビーム軸方向にしかない加速電場によって横方向に力を受ける。このとき変化する横方向の運動量は粒子のエネルギーによらない。従って、変化する角度は粒子のエネルギーに反比例する。これが、エネルギーに依存した軌道の変化をもたらす。これだけなら、1 次の dispersion であるが、ビームはこの後 4 極磁石を通過するので、結局高次の dispersion も発生する。

空洞の傾きの RMS を 10 マイクロラジアンとして補正を全くしない場合のシミュレーションによると、1 次ディスパージョン補正後のエミッタンスは約 5%増大、1 次ディスパージョン補正なしのエミッタンスは約 25%増大する。この値は、傾き誤差の 2 乗に比例する。従って、傾きが 100 マイクロラジアンなら、1 次ディスパージョン補正後のエミッタンスは 5 倍になり許容でき

ない。設置誤差による傾きは数百マイクロラジアンと見積もられているため、何らかの補正が必須であることがわかる。一方、補正が効かないような速い振動による傾きの変化が 1 マイクロラジアンであれば、エミッタンスは 0.25%程度の増大と予測できる。

4.7. 時間変化のないエラーによる横方向の運動の補正

前節でみたように、現実的な設置誤差を仮定した場合、何も補正をしなければエミッタンスが巨大になってしまう。ILC の場合、このほとんどが dispersive effect による。ここではいくつかの補正方法を述べる。

4.7.1. Quad Shunting による BPM の位置校正

ビーム位置の測定に基づく多くの補正方法では、4 極磁石の磁場中心と、その磁石に付けられている BPM (ビーム位置モニター、Beam Position Monitor) の中心 (読みがゼロとなる位置) を正確に合わせておく必要がある。

1 つの 4 極磁石の強さを変えて、その下流のビームの軌道の変化を測定する。軌道の変化から、その磁石の場所での角度の変化がわかる。この角度はビームと 4 極磁石の中心のずれに比例するはずであり、これからビームの磁場中心に対する位置が計算できる。このときの BPM の読みと比べることにより、磁場中心と BPM の相対的なずれがわかる。BPM のデータに対してこのずれを補正すれば磁場中心と BPM の中心を合わせることが出来る。

この結果の、4 極磁場中心と BPM の中心の相対的な位置の誤差は、BPM の相対位置測定精度 (設置精度などは含まない、ビーム位置の変化量に対する誤差) に比例し、4 極磁石の強さの変化量に反比例する。

4.7.2. 逐次位置補正

最も単純な補正として、ビーム位置を BPM の読みが全てゼロになるように、2 極磁石を使って上流から軌道補正していく方法がある (逐次位置補正)。ILC の今の設計では全ての 4 極磁石に BPM

と補正用の2極磁石が付けられているので、上流から1個1個軌道を合わせていくことになる(one to one correction)。

このような補正では、4極磁石の設置誤差0.3 mm(RMS)とした場合(他の誤差は無し)、リナック終点ではエミッタンスが約3倍になってしまふことがわかっている。4極磁石の設置誤差をこれより小さくすることは困難と考えられるので、この補正だけではエミッタンスの増大を抑えられないことになる。

4.7.3. DFS (Dispersion Free Steering)

Dispersive effect を抑える自然な方法は、dispersion が小さくなるように軌道を変えることであろう。

ビームエネルギーの差に依存した軌道の変化を最小にする軌道補正が DFS (Dispersion Free Steering) と呼ばれる。一般的には、正規のビームエネルギーでの軌道と、ビームエネルギーを変化させた場合の軌道の差が小さくなるように、補正用の2極磁石をセットする。各補正磁石に対して、それぞれのエネルギーのビーム軌道がどう変化するかはオプティクス設計から(ある誤差の範囲で)わかるので、実際にエネルギーを変化させてビーム位置を測定することでどのように補正磁石の強さを変えればよいか計算できる。

DFS といってもいろいろなバリエーションが世界中で研究されているが、基本的には、

$$\chi^2 \equiv \sum_{\text{BPM}} \left[w_1 (\Delta y_{\text{measure}} - \Delta y_{\text{design}})^2 + w_2 (y_{\text{measure}} - y_{\text{design}})^2 \right] \quad (4-36)$$

を最小にするように補正用2極磁石を設定する。ただし、 y_{measure} は BPM の読み、 $\Delta y_{\text{measure}}$ はエネルギーの異なるビームに対する BPM の読みの差、 y_{design} と Δy_{design} はこれらの設計値(リナックが曲がっているためゼロとは限らない、) w_1 と w_2 は重み係数であり、BPM について和をとる。 w_1 との比 w_2 は、BPM の絶対的な誤差と相対的な(2つの測定値の差の)誤差の比の2乗程度にするべきである。

シミュレーションによると、BPM の精度(resolution) 1 ミクロンの場合、補正後の dispersive effect によるエミッタンス増加は数%以下になると期待される。

4.7.4. 蹴角最小化 (Kick Minimization)

Dispersive effect の大きな原因の一つは、4極磁石の場所で(ビームが磁場中心からずれた位置を通ることにより)ビームが横方向に蹴られることである。4極磁石の隣には補正用の2極磁石が付けられているので4極磁石による蹴りと補正磁石による蹴りととの合計がその場所での実質的な蹴りである。この実質的な蹴り角を小さくしようとするのが「Kick Minimization」である。

この補正では基本的に、

$$\chi^2 \equiv \sum_{\text{BPM}_i} \left[w_1 (y_{\text{measure}} - y_{\text{design}} - \theta_i/k_i)^2 + w_2 (y_{\text{measure}} - y_{\text{design}})^2 \right] \quad (4-37)$$

を最小にするように補正2極磁石を設定する。 θ_i は各 BPM に対応する(同じ4極磁石についての)補正2極磁石による蹴り角、 k_i は BPM に対応する4極磁石の k 値である。従って、

$$(y_{\text{measure}} - y_{\text{design}}) k_i \quad (4-38)$$

は、4極磁石による余分の蹴り角、

$$(y_{\text{measure}} - y_{\text{design}} - \theta_i/k_i) \quad (4-39)$$

は、4極磁石と補正2極磁石両方を合計した余分の蹴り角を k 値で割ったものになり、これを小さくすることは、ここでの蹴り角を小さくすることになる。

この補正は4極磁石で生ずる dispersive effect には非常に有効であるが、加速空洞の傾きに対する補正ができないということに注意しなければならない。従って、加速のない RTML・BDS などで有効である。主リナックでこの補正を採用する場合は加速空洞の傾きの効果は別途補正する必要がある。

4.8. 時間変化するエラーの補正

これまでは磁石や加速空洞の設置誤差といった「固定された誤差」をどう補正するかを述べた。実際には加速器のいろいろな誤差は時間とともに変化している。この変化の速さが、補正（ビーム測定、補正量の計算、補正の設定）に必要な時間より十分ゆっくりしたものであれば、実質的に固定された誤差とみなせる。しかし、例えば DFS などの補正には数分あるいは数十分の時間が必要と思われ、その間の変動に対しては別に対処する必要がある。

先に述べたように、ビーム軌道が変動しても、軌道自体は、主リナックの下流の軌道フィードバックによって衝突点のビーム位置には大きな悪影響は及ぼさない。しかし、主リナックの途中にはパルス内のバンチ毎のフィードバックはない。主リナック内で軌道が変動するとディスパージョンが発生し dispersive effect によりエミッタンスが増大してしまう。増大したエミッタンスを、パルス内で補正することは不可能であり、主リナック内でも結局あまり大きな軌道変動は許容できない。

ビーム軌道の変動をもたらす主リナック内の主要な原因は、

- (1) 4 極磁石の振動
- (2) 4 極・2 極磁石の磁場強度の変動
- (3) 傾き誤差のある加速空洞の電場の変動と考えられる。

4 極磁石が垂直方向に動くと、ビーム軌道の角度がこの場所でこの位置変化と磁石の強さに比例して変化する。

軌道補正用の 2 極電磁石が励磁されている場合、ビーム軌道が 4 極磁石の中心からずれている場合、これらの磁石の磁場強度が変動するとビームの軌道も変動する。主リナックは地球の重力に沿って曲がっているため、少なくともこの曲りの分の磁場が存在する。しかし、実際には、4 極磁石の設置誤差からもたらされる軌道の 4 極磁石の中心からずれ、補正するための 2 極磁石の強さの方が大きいと見積もられている。

加速空洞が傾いていると、加速モードの電場（エラーがなければビーム軸方向のみ）によって、ビームが横方向に蹴られる。この角度が変動すれば軌道が変化する。また、傾きがある場合に電場が変動すれば、蹴り角も同じ割合で変動するため、結果としてビームの軌道が変化する。従来、加速電圧の制御は「vector sum」と呼ばれる 1 台のクライストロンに対応する全空洞（ILC 第一段階では 39 台）による加速電圧の合計を一定に保つようにするのが一般的であった。しかし、各空洞の傾きはばらばらであると思われるので、加速電圧を各空洞毎に一定にしなければならず、特別な制御が必要になる。

これらの変動に対する許容値とそれによって予測される軌道変化とエミッタンス増大の大きさを Table 4.2 にまとめた。

Table 4.2 変動する誤差の許容値とその影響

Source	Tolerance	Induced orbit jitter*	Induced emittance growth**
Quad offset change	100 nm	1.5 σ	1%
Magnet strength jitter	1E-4	1 σ	0.5%
Cavity voltage change***	1%	0.8 σ	2.5%

*1 σ is nominal beam size assuming normalized emittance in DR

** relative to normalized emittance in DR (20 nm)

*** assuming 0.3 mrad (rms) fixed tilt

この表からもわかるように、軌道変動によるエミッタンス増加は数%以下にできるが、軌道はビームサイズと同程度の変動がある。以下では、主リナックのみの問題ではないが、時間的に変動するビーム軌道に対する補正について簡単に述べておく。

4.8.1. 折り返しでのフィードフォワード

ダンピングリングから取り出されるビームの軌道がバンチ毎に異なっている可能性がある。この変動はほとんど取り出しキッカーのパルス電源の変動からくると考えられる。

このバンチ毎の変動の補正を直線部分で行うことは（光速を超える通信ができないので）不可能である。従って、ビーム輸送ラインの端にある折り返し部分（turnaround）を利用してフィードフォワードをする。折り返しの前のバンチの軌道を測定し、その変動を打ち消すように主リナックに入る前（バンチ圧縮機に入る前）に補正する。

4.8.2. パルス内の軌道フィードバック

ILC のビームパルスの長さは約 0.73 m s、バンチ数 1300~2600 程度あるので、パルス内の前方のバンチの測定結果を使って後方のバンチを補正することが出来る。主リナックの出口（BDS, Beam delivery system, の入り口）、と衝突点で、少なくとも以下のようなパルス内のフィードバックが行われる予定である。

1. リナック出口でビーム位置を（水平、垂直方向 各々 2 箇所以上）測定し、軌道を補正する。
2. 衝突点の前の BPM でビーム位置を測定し、衝突点でのビーム軌道の角度を補正する。（垂直方向）
3. 衝突後（ビーム-ビーム相互作用により、ビーム間の相対位置に依存して、衝突後のビーム重心の角度が変わる）のビーム位置を測定し、衝突点でのビーム軌道の位置を補正する。（垂直方向）
4. 衝突点での位置と角度を走査しながらルミノシティ最大となるところを探す。（垂直方向）

ILC ではパルスの繰り返しが遅いためにパルス間の変動が大きく、このようなパルス内でのフィードバックが重要になる。ただし先にも述べたが、パルスの先頭の方のバンチは補正されないのでパルス間の変動の影響をそのまま受け、この部分からのルミノシティは期待できない。

4.8.3. パルス間のフィードバック

ILC の繰り返し 5 Hz よりもゆっくりした変動に対しては、パルス間のフィードバックが有効になる。ダンピングリング出口から、衝突点の近くま

での領域全体にわたって、多数の BPM と補正用の 2 極磁石を使ったビーム軌道のフィードバックが行われる。基本的には、BPM の読みを一定に保つような補正である。

又、エネルギーのフィードバックは、リナックの入り口、リナックの出口などで行われる。これには、ディスパージョンのある場所での精密な位置測定が必要になる。

5. 最終収束

5.1. ビーム収束の基礎（やや大雑把な話）

高いルミノシティを実現するためには、衝突点で横方向のビームサイズを小さくする必要がある。ある瞬間のルミノシティは、

$$L = \int dx^3 \rho_1(\vec{x}) \rho_2(\vec{x}) |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \quad (5-1)$$

のような式で表すことができる。 $\rho_1(\vec{x})$ 、 $\rho_2(\vec{x})$ は 2 つのビーム粒子それぞれの空間密度、 \vec{v}_1 、 \vec{v}_2 は 2 つのビームの速度である。これを単位時間で積分したものが平均ルミノシティである。

粒子密度が

$$\rho_{1,2}(\vec{x}) \propto \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma_x^{*2}} - \frac{y^2}{2\sigma_y^{*2}}\right] \quad (5-2)$$

という正規分布に従い、衝突の間その形が変わらない場合には、平均ルミノシティは

$$L = \frac{fn_b N^2}{4\pi\sigma_x^* \sigma_y^*} \quad (5-3)$$

と書ける。 σ_x^* と σ_y^* は水平・垂直方向のビームサイズ、 f は繰り返し周波数、 n_b はパルス当たりのバンチ数、 N はバンチ当たりの粒子数である。

衝突点では、水平・垂直両方向で収束しなければならない。収束の最後には 2 つの強い 4 極磁石があり、その様子は Fig 5.1 のようになっている。しかし、まず簡単のため、とりあえず 1 方向のみ考え、ビーム収束の様子は、Fig 5.2 のようなものを考える。また、ここではビーム内の粒子のエネルギーは全て同じであるとする。エネルギーのばらつきの効果については後で議論する。

もしも、4極磁石の場所でのビーム粒子の軌道が全て平行であれば粒子の軌道は全て一点（焦点）で交わるはずである。しかし、実際にはある程度の角度のばらつきがあるため、完全に1点には収束せず、ビームの大きさはゼロになりえない。

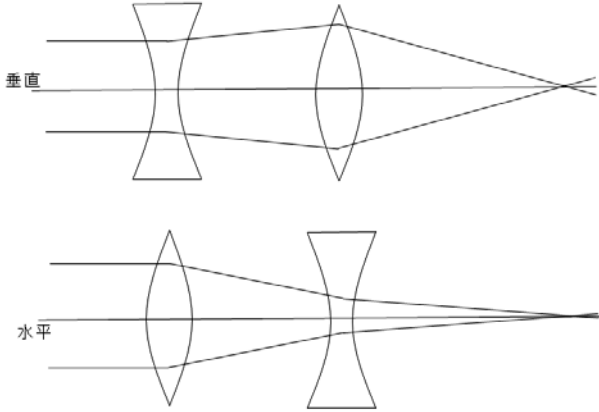


Fig. 5.1 ビーム収束の様子 (x, y)

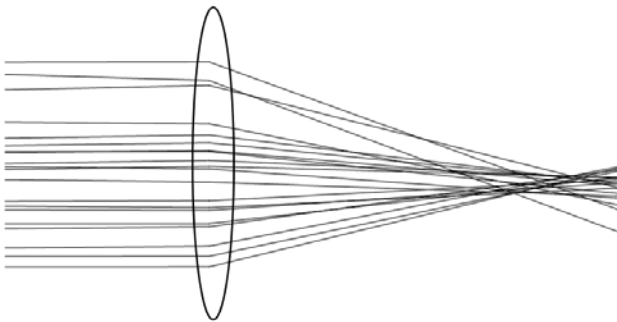


Fig. 5.2 ビーム収束の様子 (1次元)

収束された結果のビームサイズを定量的に扱うのに、エミッタンスを考えるのが便利である。エミッタンスは4極磁石による収束の過程で変化しない。(以下の議論で x を y と入れ替えてもよい。) さらに、ビームサイズ (σ_x) と角度広がり (angular divergence、 $\sigma_{x'}$) とエミッタンスの間には、

$$\varepsilon_x \leq \sigma_x \sigma_{x'} \quad (5-4)$$

という関係がある。位置と角度の相関がない場所では、

$$\varepsilon_x = \sigma_x \sigma_{x'} \left(\langle (x - \langle x \rangle)(x' - \langle x' \rangle) \rangle = 0 \right) \quad (5-5)$$

である。ここで、

$$\sigma_x \equiv \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle} \quad (5-6)$$

$$\sigma_{x'} \equiv \sqrt{\langle (x' - \langle x' \rangle)^2 \rangle} \quad (5-7)$$

とした。また、ベータ関数を

$$\beta_x \equiv \sigma_x^2 / \varepsilon_x \quad (5-8)$$

と定義することができる。

4極磁石の所で、 $x_1' = 0$ である粒子は、焦点で $x^* = 0$ の点に集まる (以下、4極磁石の場所での量には添え字 1 を付け、焦点では * を付ける)。4極磁石と収束の焦点との距離 (4極磁石の焦点距離) を L^* とすると、各粒子について、

$$x^* = L^* x_1' \quad (5-9)$$

と書ける。従って、

$$\sigma_{x^*} = L^* \sigma_{x_1'} \quad (5-10)$$

となる。

従って、焦点で小さなビームサイズにするためには、焦点距離の短い4極磁石を使い、4極磁石の場所での角度広がりを小さくする必要がある。焦点距離を短くするには強い磁石を使わなければならないのでこれには限界がある。4極磁石の場所での角度広がりが小さいということは、エミッタンスが与えられているとすると、 $\varepsilon_x \leq \sigma_x \sigma_{x'}$ であるので、この場所でのビームサイズを大きくするということになる。すなわち、一旦ビームサイズを大きくしておいて、最後に急激に収束させるわけである。焦点でのビームサイズ (σ_{x^*})、エミッタンス (ε_x)、最終4極磁石の焦点距離 (L^*) が与えられれば、4極磁石でのビームサイズは、

$$\sigma_{x_1} \geq \varepsilon_x / \sigma_{x_1'} = L^* \varepsilon_x / \sigma_{x^*} \quad (5-11)$$

と逆算することができる。

5.1.1. 砂時計効果

焦点付近でのビームサイズの変化をみると、各粒子は直線運動をするから x' が一定 ($x'' = 0$) であり、

$$\frac{d(\sigma_x^2)}{ds} = 2 \langle (x - \langle x \rangle)(x' - \langle x' \rangle) \rangle \quad (5-12)$$

$$\frac{d^2(\sigma_x^2)}{ds^2} = 2 \langle (x' - \langle x' \rangle)^2 \rangle = 2 \sigma_{x'}^2 = \text{const} \quad (5-13)$$

等となり、

$$\sigma_x^2 = \sigma_{x'}^2 s^2 + \sigma_{x^*}^2 \quad (5-14)$$

又は、エミッタンスと焦点でのベータ関数を使って、

$$\sigma_x^2 = \varepsilon_x \beta_x^* (1 + (s/\beta_x^*)^2) \quad (5-15)$$

と表される。ただし、 s は焦点からの距離である。(焦点では、 $\langle(x-\langle x \rangle)(x'-\langle x' \rangle)\rangle = 0$ であることに注意。)

この式から、焦点でのベータ関数 β_x^* が焦点深度に対応していることがわかる。すなわち、焦点から β_x^* だけ離れた場所では、ビームサイズが $\sqrt{2}$ 倍になる。このことは、与えられたエミッタンスに対して焦点でのサイズを小さくするためにベータ関数を小さくすると焦点深度が浅くなってしまふことを意味する。ビームのバンチは有限の長さを持っており、この長さ全体にわたっての衝突がルミノシティに寄与する。従って、焦点でのサイズを小さくするためベータ関数（焦点深度）をバンチ長に比べて極端に小さくすると、却ってルミノシティを小さくしてしまう結果となる。焦点付近でのビームの形状が砂時計に似ていることから、これを「砂時計効果 (hourglass effect)」と呼んでいる。

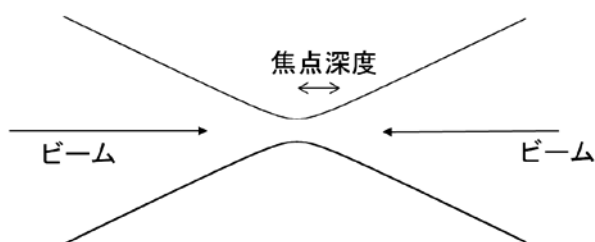


Fig 5.3 衝突点付近のビームサイズの様子。砂時計を横にしたような形になる。

焦点でのベータ関数（焦点深度）の最適値はバンチ長と同程度のはずである。ILC の設計では、バンチ長 0.3 mm に対して、焦点でのベータ関数 0.48 mm である。

ここで得られる最も重要な結論は、ルミノシティを最大にするような最適なビームサイズは、エミッタンスの平方根に比例すること、従って、大きなルミノシティを実現するためには、ビームのエミッタンスを小さくしなければならない、ということである。

5.1.2. 生出リミット

砂時計効果を考えなくてよい場合（バンチ長が極めて短い場合等）には、さらにサイズを小さくしてルミノシティを上げることができるであろう。そのためには上で述べたように、強い4極磁石を使い、その磁石の場所でのビームサイズを大きくする必要がある。そうすると、多くの粒子は4極磁石の強い磁場中を通過して大きく曲げられることになる。高エネルギーの荷電粒子が磁場中を通過するので、制動放射が発生する。制動放射の量子力学的な効果のため、ビーム粒子のエネルギーにランダムなばらつきが生じ、その結果、粒子の軌道にもランダムなばらつきが生じ、焦点がランダムにばらつき、ビームサイズが増大してしまう。この効果は磁場が強いほど大きい。つまり、焦点でのビームサイズを小さくしようとして、4極磁石を強く（焦点距離を短く）するほど、また、磁石の場所でのビームサイズを大きくするほど、この効果が大きくなる。磁石の場所でのビームサイズはエミッタンスとベータ関数に依存する。従って、ビームのエミッタンスが与えられた場合、焦点でのビームサイズを最小にする最適なベータ関数があるはずである。このような制動放射の効果による焦点でのビームサイズの制限は生出氏により初めて指摘され[9]、「生出リミット (Oide-limit)」と呼ばれている。

詳しい計算によると最適な焦点でのベータ関数はエミッタンスの $3/7$ 乗に比例する[9]。ILC のエミッタンスとビームエネルギー (250 GeV) では、焦点でのベータ関数の設計値 0.48 mm は、生出リミットよりも約 200 倍大きく、最終収束磁石での制動放射が衝突点でのビームサイズに及ぼす影響は小さい。ただし、CLIC のようにさらにビームエネルギーが高く、ビームサイズを小さくしようとする場合には生出リミットを考慮する必要がある。

5.2. 色収差 (chromatic aberration)

焦点で極小ビームサイズを実現するためには2つの重要な条件がある。それは、

- (1) ビームのエミッタンスが小さいこと、

(2) 最終収束ビームラインでの収差等によるビーム変形が小さいこと、である。(1)については、まずダンピングリングで極小エミッタンスビームを生成すること、その低エミッタンスを保持したままビームを輸送、加速することが必要である。これらについては既に述べた。(2)に関して、最終収束系の設計上重要なのが色収差 (chromatic aberration) である。

色収差 (chromatic aberration) は、ビーム内の粒子のエネルギーの違いによる焦点距離のずれであり、磁場から受ける角度変化がエネルギーによって異なる (反比例する) ことから発生する。これを表す量「クロマチシティ(chromaticity)」を、 $x(y)$ 方向について以下のように定義する。

$$\xi_{x(y)} \equiv -\frac{d\phi_{x(y)}}{d\delta} \quad (5-16)$$

ここで、 $\phi_{x(y)}$ はベータatron振動の位相、 δ は相対的なエネルギーのずれの割合である。(円形加速器でのクロマチシティの定義と係数 2π だけ異なっていることに注意。) 4極磁場のみによる (6極磁場による補正がされていない) クロマチシティを「natural chromaticity」と呼び、これは、

$$\xi_{x(y)} = (-)\int K(s)\beta_{x(y)}(s)ds \quad (5-17)$$

のように計算できる。ここで、 $K(s)$ は 4極磁場の強さ、 $\beta_{x(y)}$ はベータ関数で、 s はビームラインに沿った距離である。

垂直方向の設計ビームサイズは水平方向よりもはるかに小さいので、簡単のため、以下では垂直方向のみ考えることにする。計算してみると、Natural chromaticity の大部分は、最後の収束磁石からの寄与であり、

$$\xi_y \approx -\int_{\text{final-q}} K(s)\beta_y(s)ds \approx -(KL)_{\text{final-q}}\beta_{y,\text{final-q}} \quad (5-18)$$

のように書けることがわかる。ここで、積分は最終磁石の磁場のある部分で行い、 $(KL)_{\text{final-q}}$ と $\beta_{y,\text{final-q}}$ は、4極磁石の強さとベータ関数である。 L^* を磁石から焦点までの距離とすると、これは4極磁石の焦点距離にほぼ等しいので、

$$L^* \approx -(1/KL)_{\text{final-q}} \quad (5-19)$$

と書ける。また、 β_y^* を焦点でのベータ関数として (焦点ではアルファ関数がゼロである)、焦点から距離 l の場所でのベータ関数は、 $\beta_y^* + l^2/\beta_y^*$ と表されるので、

$$\beta_{y,\text{final-q}} = \beta_y^* + L^{*2}/\beta_y^* \approx L^{*2}/\beta_y^* \quad (5-20)$$

と書けることがわかる (β_y^* は 1 mm 未満、 L^* は 1 m 以上なので、 $\beta_y^* \ll L^*$ を使った)。以上のことから、

$$\xi_y \approx L^*/\beta_y^* \quad (5-21)$$

が得られる。

次に、クロマチシティがあるとエネルギー拡がりによって、焦点でビームサイズが増大することを定量的に調べよう。一般に、

$$\phi = \int \frac{ds}{\beta(s)} \quad (5-22)$$

であるから、微小なエネルギーの相対的なずれ δ によって、焦点の位置が $\Delta s(\delta)$ だけずれるとすると、

$$\Delta\phi(\delta) \approx \Delta s(\delta)/\beta^*(0) \quad (5-23)$$

と書けるはずである。また、焦点の位置が $\Delta s(\delta)$ だけずれている場合の、元の焦点でのベータ関数は、

$$\beta^*(\delta) \approx \beta^*(0) + (\Delta s(\delta))^2/\beta^*(0) \quad (5-24)$$

と表すことができる。ビームサイズの2乗はエミッタンスとベータ関数の積で表されるので、

$$\sigma(\delta) = \sqrt{\varepsilon\beta^*(\delta)} \approx \sqrt{\varepsilon\beta^*(0)}\sqrt{1+(\Delta\phi(\delta))^2} \quad (5-25)$$

となる (ε はエミッタンス)。位相のずれはクロマチシティとエネルギーのずれの積なので、大雑把な式として

$$\sigma(\delta) \sim \sigma(0)\sqrt{1+(\xi\sigma_\delta)^2} \quad (5-26)$$

が得られる。ここで、 σ_δ はビームのエネルギー拡がり (energy spread) である。以上の計算は、 $\xi\sigma_\delta \ll 1$ の場合に成り立つ近似であることに注意が必要。ILC では、 $\xi \sim 10^4$ 、 $\sigma_\delta \sim 10^{-3}$ 程度なので、このような近似は成り立たないが、より詳しい計算からもクロマチシティによってビームサイズが 10 倍程度増大することがわかる。

5.3. 色収差補正

クロマチシティは、6極磁石を水平方向ディスパージョンのある場所に置くことによって補正することができる。ディスパージョンとは、粒子の位置がそのエネルギーに比例してずれるということであり、6極磁石の磁場は水平方向の位置に比例した収束力を持つので、結果として粒子のエネルギーに比例した収束力を与えることができる。6極磁場によって作られるクロマチシティは、

$$\xi_{x(y),s} = (-) \int K_s(s) \eta_x(s) \beta_{x(y)}(s) ds \quad (5-27)$$

と表すことができる。ここで $K_s(s)$ は6極磁場の強さ、 $\eta_x(s)$ は水平方向のディスパージョンである。

4極磁場によるクロマチシティを6極磁場によって打ち消すことで合計のクロマチシティをゼロにできる。しかしそれで話は終わらない。6極磁石の非線形磁場のため、新たな収差が発生する。エネルギーのずれに依存しないビーム位置の広がり（ビームサイズ）のために生じる **geometrical aberration** や、高次のディスパージョンであり、これも含めて補正しなくてはならない。

補正方法には基本的に2つの方法がある。「global correction」と「local correction」である。

5.3.1. global chromatic correction

「global chromatic correction」では、Fig. 5.4に示すように、chromaticityのみで他の収差を生じないような領域をビームラインの上流に挿入する。「global」と呼ぶのは、その主な発生源である最終収束4極磁石と、その補正のための領域が離れているからである。水平・垂直両方向の補正のため2つの領域が必要である。それぞれの領域には等しい強さの6極磁石2つが、ビーム光学的に対称な位置に置かれる。すなわち、2つの6極磁石の場所では、同じ大きさのベータ関数と水平方向のディスパージョンを持ち、間の **transfer matrix** が $-I$ であるようにする。このような対称性によって、重要な高次の収差をそれぞれの領域内で自動的に相殺させることができる。

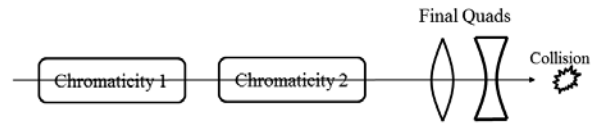


Fig. 5.4 Global Chromatic Correction 概念図

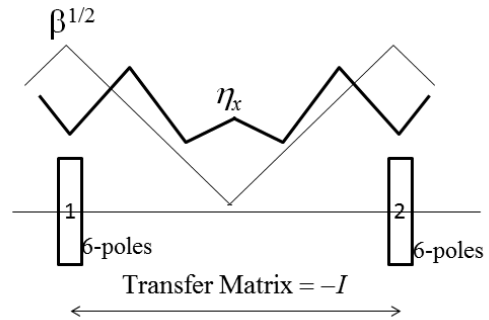


Fig. 5.5 Global Chromatic Correction の各 Chromaticity 領域の概念図

Fig. 5.5の領域がクロマチシティのみに寄与することを確認してみよう。簡単のため、各6極磁石を非常に薄いものとし、強さを K_s 、置かれた場所でのディスパージョンを η_s とする(角度ディスパージョン η' はこの場所でゼロとする)。そして、ある粒子の水平方向の位置と角度、垂直方向の位置と角度、エネルギーの相対的なずれ、 (x, x', y, y', δ) が、上流の6極磁石の直前から下流の6極磁石の直後でどうなるかを計算してみる(δ はエネルギーのずれを設計エネルギーで割ったもの、 $\delta = \Delta E / E$ であり、ここでは各粒子について変化しないとする)。ただし、水平方向にはディスパージョンがあるので、

$$x = x_\beta + \eta \delta \quad (5-28)$$

のように、ベータatron振動の成分(geometric part)とエネルギーのずれに比例した成分(chromatic part)に分ける。今の場合、どこでも $y = y_\beta$ 、 $y' = y'_\beta$ であり、6極磁石の位置では $x' = x'_\beta$ であるので、 x', y, y' に対しては添え字 β を省略する。上流の6極磁石の直前で、

$$(x_\beta, x', y, y') = (x_{\beta 0}, x'_0, y_0, y'_0) \quad (5-29)$$

であるとする、上流の6極磁石の直後では(添え字1を付ける)、

$$x_1 = x_0 = x_{\beta 0} + \eta\delta$$

$$x'_1 = x'_0 + (K_s/2)(x_0^2 - y_0^2) = x'_0 + (K_s/2)((x_{\beta 0} + \eta\delta)^2 - y_0^2)$$

$$y_1 = y_0$$

$$y'_1 = y'_0 - K_s x_0 y_0 = y'_0 - K_s (x_{\beta 0} + \eta\delta) y_0 \quad (5-30a)$$

となる。ここからの transfer matrix が $-I$ である下流の 6 極磁石の直前では (添え字 2)、

$$x_{\beta 2} = -x_{\beta 1} \rightarrow x_2 = -x_{\beta 0} + \eta\delta$$

$$x'_2 = -x'_1 = -x'_0 - (K_s/2)((x_{\beta 0} + \eta\delta)^2 - y_0^2)$$

$$y_2 = -y_1 = -y_0$$

$$y'_2 = -y'_1 = -y'_0 + K_s (x_{\beta 0} + \eta\delta) y_0 \quad (5-30b)$$

となる (transfer matrix はベータトロン振動の成分に対するものであることに注意)。

最後に、下流の 6 極磁石の直後では (添え字 3)

$$x_3 = x_2 = -x_{\beta 0} + \eta\delta \rightarrow x_{\beta 3} = -x_{\beta 0}$$

$$x'_3 = x'_2 + (K_s/2)(x_2^2 - y_2^2) = -x'_0 - 2K_s \eta\delta x_{\beta 0}$$

$$y_3 = y_2 = -y_0$$

$$y'_3 = y'_2 + K_s x_2 y_2 = -y'_0 + 2K_s \eta\delta y_0 \quad (5-31)$$

この結果から、上流の 6 極磁石の直前から下流の 6 極磁石の直後までの transfer matrix (ベータトロン振動成分) が、

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2K_s \eta\delta & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2K_s \eta\delta & -1 \end{pmatrix} \quad (5-32)$$

と書けることがわかる。すなわち、 $-I$ に加えて、 $2 \times (6 \text{ 極磁石の強さ}) \times (6 \text{ 極磁石の位置でのディスパージョン}) \times (\text{エネルギーのずれの割合})$ の強さの 4 極磁場があるのに相当する。この強さは (エネルギーのずれの割合) に比例している、すなわち、この領域で発生するクロマチシティを表している。また、 $(x_{\beta 3}, x'_3, y_3, y'_3)$ の結果には $(x_{\beta 0}, x'_0, y_0, y'_0)$ の 2 次の項が全く含まれていないこと、すなわち、2 次の geometric aberration が全て相殺されていることがわかる。

なお、式(5-27) からわかるようにクロマチシティへの寄与はベータ関数に比例するので、現実的な強さの 6 極磁石で十分な補正を行うためには 6 極磁石の場所でのベータ関数を大きくする必要がある。

この方法を採用した最終収束ビームラインのオプティクス設計の例を Fig. 5.6 に示す[10]。

ベータ関数がピークになっている場所に 6 極磁石が置かれる。

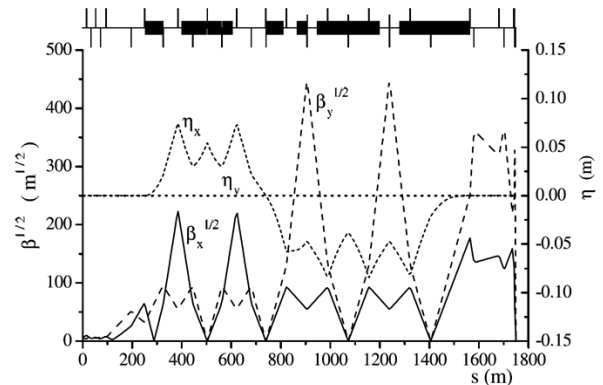


Fig. 5.6 Global correction を採用した最終収束系のオプティクスの例[10]

5.3.2. local chromatic correction[10]

「local chromatic correction」では、Fig. 5.7 に示すように、6 極磁石を最終収束 4 極磁石のすぐ隣に置いて chromaticity をその場 (local) で補正してしまう。一方この 6 極磁石によって発生する geometrical aberration 等余分の収差は、上流に 2 台 (以上) の 6 極磁石を置いて補正する。「global chromatic correction」では chromatic aberration は global に補正するが、geometrical aberration は local に補正される。一方「local chromatic correction」では chromatic aberration は local に補正するが、geometrical aberration は global に補正される。

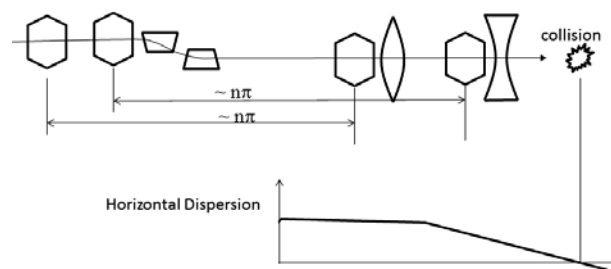


Fig. 5.7 Local Chromatic Correction 概念図

Local correction では、Fig. 5.7 のように 4 台の 6 極磁石が分離されることなく含まれるシステムとなっていて、手で計算するのは煩雑であるの

で、その原理を説明するため、簡略化して Fig. 5.8 のものを計算する。

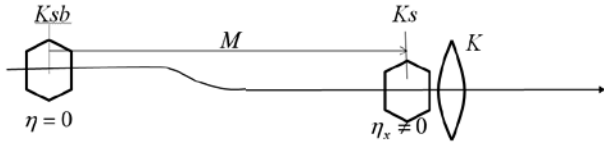


Fig. 5.8 簡略化した Local Chromatic Correction

強さ K の最終収束 4 極磁石、その隣に chromaticity 補正のための強さ K_s の 6 極磁石、上流に geometrical aberration 補正のための強さ K_{sb} の 6 極磁石がある。上流の 6 極磁石の直前で $(x_0, x'_0, y_0, y'_0, \delta)$ の粒子が、最終収束 4 極磁石の後でどうなるかを計算する。

2 つの 6 極磁石の間の transfer matrix を

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \quad (5-33)$$

とし、すべての磁石の長さを無視する。上流の 6 極磁石の直後では (添え字を 1 とする)、

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 \\ x'_1 &= x'_0 + \frac{K_{sb}}{2}(x_0^2 - y_0^2) \\ y_1 &= y_0 \\ y'_1 &= y'_0 - K_{sb}x_0y_0 \end{aligned} \quad (5-34)$$

となり、下流の 6 極磁石の直前 (添え字 2) では、

$$\begin{aligned} x_2 &= m_{11}x_1 + m_{12}x'_1 + \eta_2\delta \\ x'_2 &= m_{21}x_1 + m_{22}x'_1 + \eta'_2\delta \\ y_2 &= m_{33}y_1 + m_{34}y'_1 \\ y'_2 &= m_{43}y_1 + m_{44}y'_1 \end{aligned} \quad (5-35)$$

となる。ここで、 η_2 はこの位置でのディスパージョン、 η'_2 は角度ディスパージョンである。

最終 4 極磁石の直後 (添え字 3) では、

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 \\ x'_3 &= x'_2 + \frac{K}{1+\delta}x_2 + \frac{K_s}{2}(x_2^2 - y_2^2) \\ y_3 &= y_2 \\ y'_3 &= y'_2 - \frac{K}{1+\delta}y_2 - K_sx_2y_2 \end{aligned} \quad (5-36)$$

である。

以上から、

$$\begin{aligned} x_3 &= m_{11}x_0 + m_{12}x'_0 + \eta_2\delta + m_{12}\frac{K_{sb}}{2}(x_0^2 - y_0^2) \\ x'_3 &= (m_{21} + Km_{11})x_0 + (m_{22} + Km_{12})x'_0 + (\eta'_2 + K\eta_2)\delta \\ &\quad + \frac{K_{sb}}{2}(m_{22} + Km_{12})(x_0^2 - y_0^2) \\ &\quad + \frac{K_s}{2}[(m_{11}x_0 + m_{12}x'_0)^2 - (m_{33}y_0 + m_{34}y'_0)^2] \\ &\quad + (-K + K_s\eta_2)(m_{11}x_0 + m_{12}x'_0)\delta \\ &\quad + (-K + K_s\eta_2/2)\delta^2 \\ y_3 &= m_{33}y_0 + m_{34}y'_0 - m_{34}K_{sb}x_0y_0 \\ y'_3 &= (m_{43} - Km_{33})y_0 + (m_{44} - Km_{34})y'_0 \\ &\quad + (-m_{44} + Km_{34})K_{sb}x_0y_0 \\ &\quad - K_s(m_{11}x_0 + m_{12}x'_0)(m_{33}y_0 + m_{34}y'_0) \\ &\quad + (K - K_s\eta_2)(m_{33}y_0 + m_{34}y'_0)\delta \end{aligned} \quad (5-37)$$

が得られる。ただし、 $x_0, x'_0, y_0, y'_0, \delta$ の 2 次の項まで残り、3 次以上は無視した。

この結果から、2 次の geometrical aberration (x_0, x'_0, y_0, y'_0 の 2 次の項)をゼロにするためには、

$$\begin{aligned} m_{12} &= m_{34} = 0 \\ m_{11} &= m_{33} \\ K_{sb} &= -\frac{m_{11}^2}{m_{22}}K_s = -\frac{m_{11}^2}{m_{44}}K_s \end{aligned} \quad (5-38)$$

でなければならないことがわかる。また、transfer matrix の行列式は 1 であるから、

$$m_{22} = m_{44} = 1/m_{11}$$

であり、

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1/m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m_{43} & 1/m \end{bmatrix} \quad (5-39)$$

と表されることが必要である。そして、2 台の 6 極磁石の強さの関係

$$K_{sb} = -m^3K_s \quad (5-40)$$

も得られる。

以上の条件を満たせば、残りの aberration (Δ を付けて表す) はエネルギーのずれ δ を含む項であり、

$$\begin{aligned} \Delta x'_3 &= (-K + K_s\eta_2)mx_0\delta \\ &\quad + (-K + K_s\eta_2/2)\delta^2 \\ \Delta y'_3 &= -(-K + K_s\eta_2)my_0\delta \end{aligned} \quad (5-41)$$

となる。 $x_0\delta$ と $y_0\delta$ の項はそれぞれ水平、垂直方向の chromaticity、 δ^2 の項は2次のディスパージョンを表している。

ここで、問題があるように見える。 $K_s = K/\eta_2$ と6極磁石の強さを設定すればこのシステムで発生する chromaticity をゼロにできるが、2次のディスパージョンを消すには2倍の強さ、 $K_s = 2K/\eta_2$ が必要である。従って、このシステムから発生する chromaticity と2次のディスパージョンを同時に消すことはできない。この問題は、「実際にはこのようなシステムが2つある (Fig. 5.7 には Fig.5.8 のシステムが2つ含まれている)」ことと、「chromaticity はここで考えていなかった4極磁石からも発生する」ということによつて解決できる。大雑把に説明するため、ここで計算したような2つのシステム (添え字1, 2で表す) で発生する水平、垂直方向の chromaticity (C) と2次の水平方向ディスパージョン (D) を、 $C_{1x}, C_{1y}, D_1, C_{2x}, C_{2y}, D_2$ とし、他の場所で発生する水平、垂直方向の chromaticity を C_{0x}, C_{0y} とすると、

$$\begin{aligned} C_{1x} + C_{2x} + C_{0x} &= 0 \\ C_{1y} + C_{2y} + C_{0y} &= 0 \\ D_1 + D_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5-42)$$

の、3個の要求を満たせばよい。

一方、ここで計算したように、geometrical aberration をゼロにするためには各システムについて自由に変えられるパラメータは1つ (K_s) だけである (すなわち、 $C_{1x}, C_{1y}, D_1, C_{2x}, C_{2y}, D_2$ のうち、独立なパラメータは2個)。要求は3個あるのでもう一個以上自由に変えられるパラメータが必要で、それが C_{0x}, C_{0y} である。つまり、ビームラインの他の部分の (線形) オプティクスを調整することにより、2次までの収差をすべて消すことができる。(逆に言えば、この方法では任意の線形オプティクスの補正ができるわけではない。)

この方法を採用した最終収束ビームラインのオプティクスの設計の例を Fig. 5.9 に示す[10]。

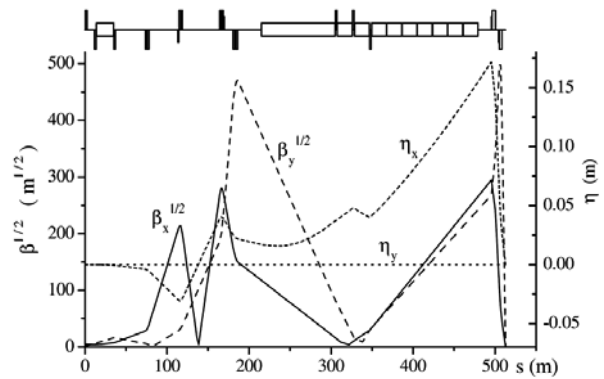


Fig. 5.9 Local correction を採用した最終収束系のオプティクスの例[10]

5.3.3. global, local correction の比較

「global chromatic correction」と「local chromatic correction」を比較すると、local のほうが必要なビームラインが短いという利点がある。Fig. 5.6 と Fig. 5.9 からも Local correction のビームラインが短いことがわかる。また、「energy band width」が広い、すなわち、焦点で小さなビームサイズが得られるビームエネルギーのずれの幅が大きいという利点もある[10]。この利点のために、ILC では local chromatic correction の方法を採用する。

しかし、前節までで述べたように、global correction では2台の6極磁石による補正のための領域2つが分離されているのに対し、local correction では一応2台ずつの対にはなっているが2組の領域が重なり合っており、簡単に分離して考えることができない。どちらの方法でも、高次の収差まで消すような設計には計算機を使うわけであるが、local correction の場合には global correction のような簡単な対称性がないために設計の最適化はより複雑なものになってしまう。また、実際のビームでは様々な誤差の影響があるため、ビームの状態を測定しながら調整していくことが必須である。local correction では2組の領域が分離していないこと、最終収束磁石の場所に水平方向のディスパージョンがなければならず、そのため衝突点 (焦点) では水平方向の角度ディスパージョンを0にすることができない、といったことのために local correction の場合の方がビ

ーム調整が複雑で難しくなることが予測される。このような難しさは、5.4 節で述べる ATF2 での実証実験をする動機になっている。

5.3.4. 最終収束でのエネルギー変化の問題

これまで述べた chromatic correction は、最終収束ビームラインで各粒子のエネルギーが変化しないことを前提にしている。実際には、制動放射や wakefield などにより各粒子のエネルギーは変化する。例えば、ディスパージョンを作るための 2 極磁石の中やその下流でビーム粒子のエネルギーがばらばらに大きく変化すると、補正をする 6 極磁石の場所で、「水平方向の位置がエネルギーに比例する」という前提が崩れ、chromatic correction がうまくいなくなる。言葉を変えれば、「最終収束ビームラインで発生する energy spread に対しては、chromatic correction は効果がない」。

このような効果を抑えるため、最終収束ビームラインの 2 極磁石は非常に弱くして（ビームエネルギー 250 GeV で約 0.04 T）制動放射の影響を小さくしており、また、wakefield を小さくするためビームパイプの内面は銅（またはアルミ）を使用することになっている。

5.4. 実証実験

Global correction によるビーム収束は、1994 年に SLAC の FFTB で実証実験が行われた ([11])。一方、local correction は 2001 年頃になって提案され、ILC の基本設計に採用され、その後 KEK における ATF2 で実証実験がすすめられている。ATF2 計画は、ATF のダンピングリングで得られる低エミッタンスビームを用いて最終収束の試験をビームラインを延長して行っているものである。ATF2 は ILC 最終収束系の試作模型として設計されている。Table 5.1 に ATF2 と ILC 最終収束の主なパラメータを示す。ATF2 は ILC と同様のエネルギー拡がりを持つ。ビームエネルギーが異なるためビームラインの長さは大きく異なるが、磁石の並び方、それぞれの役割は同じであり、ビームオプティクスはほぼ同じである。

るが、磁石の並び方、それぞれの役割は同じであり、ビームオプティクスはほぼ同じである。

Table 5.1 ILC と ATF2 の最終収束パラメータ

Parameter	ILC	ATF2
Beam Energy [GeV]	250	1.3
Energy Spread (e^+/e^-) [%]	0.07/0.12	~0.07
Final quad – IP distance (L^*) (SiD/ILD detector) [m]	3.5/4.5	1.0
Vertical beta function at IP (σ_y^*) [mm]	0.48	0.1
Vertical emittance [pm]	0.07	12
Vertical beam size at IP (σ_y^*) [nm]	5.9	37
L^*/β_y^* (SiD/ILD detector)	7300/9400	10000

2012 年以降に local correction の有効性を実証する結果が得られている [12,13]。また、これまで (2014 年 6 月まで) 最小のビームサイズとして 44 nm という値が報告されている [14,15]。これは ATF2 の設計値 37 nm よりもまだわずかに大きい、6 極磁石による chromatic correction をしない場合のビームサイズの計算値 (450 nm) の 1/10 以下である。

参考文献

- [1] 久保浄、「単粒子ビーム力学」OHO2012 テキスト
- [2] 久保浄、「リニアコライダのビームダイナミクス」OHO2006 テキスト
- [3] ILC Technical Design Report, (2013), <https://www.linearcollider.org/ILC/Publications/Technical-Design-Report>
- [4] 生出勝宣「ビーム力学入門」(1992), <http://www-jlc.kek.jp/2003oct/subg/ir/lib/DOC/japanese/Lecture.beam.dynamics.pdf>
- [5] K. Kubo, ATF Internal Report, ATF-99-02 (1999)
- [6] T. Naito, et.al., Phys.Rev.ST Accel. Beams 14 (2011) 051002
- [7] V.E. Balakin, A.V. Novokhatsky and V.P. Smirnov, Proceedings of the 12th International Conference on High Energy Accelerators, Fermilab (1983)

- [8] TESLA Technical Design Report (2001),
http://tesla.desy.de/new_pages/TDR_CD/start.html
- [9] K. Oide, PRL vol. 61, p1713 (1988)
- [10] P. Raimondi and A. Seryi, PRL 86, 3779 (2001).
- [11] V. Balakin et al., PRL 74, 2479 (1995)
- [12] G. White, et.al., PRL 112, 034802 (2014)
- [13] 久保浄、奥木敏行、Proceedings of 10th Annual Meeting of Particle Accelerator Society of Japan, SAOTP1 (2013).
- [14] K. Kubo, Proceedings of IPAC14, WEZA01 (2014)
- [15] K. Kuroda, “ATF2 for final focus test beam for future linear colliders” in ICHEP 2014 (2014)