ERL のビーム力学

1　はじめに

エネルギー回収型線形加速器 (Energy Recovery Lican, ERL) は基本的に線形加速器であるが、超伝導加速空洞で加速した電子ビームを再び同じ空洞を通して減速し、後続のビームにエネルギーを受け渡すことが大きな特徴となっている。このことによって、ERL では高出力（高繰り返し, 高平均電流）の高輝度電子ビームの利用が可能となる。本講義では, ER のなかの一連の流れ、高出力の高輝度電子ビームの生成、加速、輸送、減速、廃棄に関わるビーム力学について、試験加速器である compact ERL (cERL) の運転例を交えながら紹介する。

1.1　線形加速器とリング型加速器

高エネルギー電子加速器は、大まかに線形加速器とリング型加速器に分けられる。線形加速器 (図 1) は、電子ビームを生成するための電子源、それを高エネルギーまで加速するための高周波加速空洞 (RF 空洞)、加速された電子を利用する部分（放射光生成や他の荷電粒子との衝突など)、そしてビームを捨てるためのビームダンプから構成される。線形加速器では、基本的に電子ビームは一度だけ利用されて、捨てられることになる [1]。リング型加速器 (図 2) では、ある程度加速された電子ビームを線形加速器等から入射し、リング型の軌道上を周回させ続けることになる。リング型加速器内の電子は、残留ガスや電子同士の散乱等によって周回軌道上から外れない限りは、その軌道上を周回し続けることになる。リング型加速器で重要となるのは、安定に電子を周回させ続けられるかということである。このように、線形加速器とリング型加速器では大きく特徴が異なる。

電子ビームのダイナミクスから見たときの両者の違いは、線形加速器は基本的に電子ビームの性質が上流から下流に向かって伝搬するのに対して、リング型加速器では周回軌道が閉じているという性質から周期境界の下での運動となる。言い換えると、線形加速器の電子の運動は初期値問題ということになり、リング型加速器では周期境界条件下の問題ということになる。周回させ続けるという性質から、リング型加速器はそもそも安定化機構をもっていることになり、また、同じビームが周回し続けるためにフィードバックによってさらに安定化することが可能である。加速器の利用においては、ビームの安定性というのは重要な項目であり、リング型加速器はこの点で有利な形式の加速器である。一方、線形加速器ではリング型加速器のように周回運動の安定性を考える必要はないが、上流から下流へ影響が伝搬する性質を考慮する必要がある。仮に上流に何らかの電子ビームに対する外乱がある場合にはその影響が下流に伝播していくことになり、電子ビームの性能を確保するには上流から設計通りにビームを輸送することが要求される。また、上流で外乱が生じた場合にも、ビームは一回で通り過ぎてしまうためフィードバックによる制御が難しく、加速器の安定化のためにはそもそも外乱の原因を絶つという対策が必要となる。

[1] リング型加速器にビームを供給するための加速器使用される場合は、電子ビームは線形加速器から出射され、リング型加速器に蓄積されることになる。

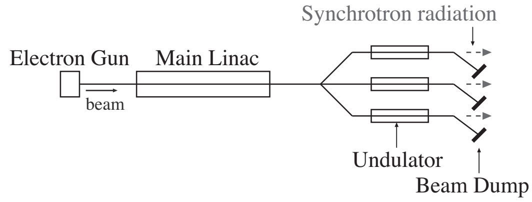


図 1: 線形加速器 (linac) の概略図。電子源、高周波加速空洞、利用部分 (放射光生成のための挿入光源)、ビームダンプによって構成される。基本的にビームは、電子源で生成されたあと、加速・利用され、ビームダンプに捨てられる。

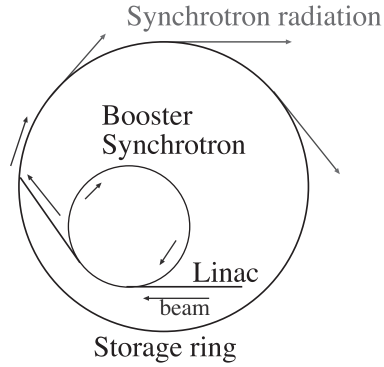


図 2: リング型加速器 (放射光用貯蔵リング型加速器) の概略図。線形加速器でビームを生成したあと、ブースターシンクロトロンで加速され、貯蔵リングに入射される。貯蔵リング内に設置された偏向電磁石、挿入光源によって放射光が生成される。貯蔵リングに入射された電子ビームは、残留ガスや電子同士の散乱等によって失われるまで閉軌道上を周回し続ける。

1.2　ビーム性能

線形加速器とリング型加速器の特徴を踏まえて、加速器中のビーム性能について考える。加速器中では一つの電子が運動しているわけではなく、多数の電子が集団となって運動している。一つの電子のみが運動している場合には、3 次元空間座標 (x, y, z) と運動量 (p_x, p_y, p_z) の 6 つの変数 (6 次元位相空間座標) が決まればその運動状態が定まったことになる。しかしながら、一つの電子のみを加速して利用するというのは、得られる出力（放射光の強度、衝突型加速器の場合には衝突頻度）が極めて小さく、実際の加速器の利用には適さない。出力を上げるために、実際の加速器では空間的・時間的に近接した多数の電子集団を同時に加速することになる。この場合、得られる出力は電子の個数に比例することになる。このような電子集団を電子バンチ (bunch、塊、房) と呼ぶ。

加速器では電子ビームの性能、あるいは品質という言葉を使うことが多いが、これは電子集団の運動状態がどれくらい揃っているかを表していることに対応する。電子集団を構成する全ての電子が同じ運動状態をもつということはできないが、これがなるべく揃っているのが品質の高いビームということになる。例えば水平方向の座標 x とその運動量 p_x の 2 つの変数で構成された位相空間 x-p_x を考えたとき、この位相空間上で電子集団の分布が作る面積を水平方向のエミッタンスと呼ぶ[2]。加速器では、この電子ビームのエミッタンスを小さくするということが一つの重要なテーマとなっている。

運動状態がなるべく揃っていることの利点は何かということを考える。その利点は、例えば電子ビームの空間的・時間的大きさを小さくできるということがある。集団の拡がりが小さくなるということは、電子密度が上昇することに対応し、電子集団のピーク強度が上昇するということに対応する。また、時間的な拡がりを小さくすることによって、数 10 fs という極めて短い時間構造を作ることも可能となる。電子加速器の放射光利用のときには、この短い時間拡がりの電子ビームから、極めて短い時間構造を持った放射光が生成されることになり、これを利用してより高い時間分解能での物質や生物のダイナミクスの測定が可能となる。以上のように大まかにではあるが、電子集団の運動状態をなるべく揃えることが加速器のビーム力学で重要となる。特に重要となるのが、ビーム進行方向である z 方向に対して直交する面内の運動 (この方向を横方向と呼ぶ)、水平方向 x と垂直方向 y のエミッタンスである。

それでは、水平方向の電子集団の運動状態は何によって、どのように決まるかということを加速器の形式毎に考察する。まず、リング型加速器の場合は、周回中の放射光の生成に起因して運動状態が変化する。放射光生成によって、放射減衰と放射励起という 2 つ現象が発生し、電子の運動状態 (電子のエネルギー、軌道) が変化することになる。リング型加速器のエミッタンスは、これら 2 つの現象の平衡状態で決まる。図 3 にリング型加速器における放射減衰と放射励起の模式図を示す。

一方線形加速器では、電子銃から生成されたビームは 1 回 (あるいは数回) のみ利用 (放射光生成や衝突など) され、そのあとすぐビームダンプに捨てられるため、ビームは放射励起・減衰の平衡状態に到達せず、電子源で生成されたビームの質が、利用箇所でのビームの品質を決定付けることになる。線形加速器の利点は、この電子源で生成されたビーム品質が放射減衰・励起に依らず、保持されるということである。これがどのような利点になるかというと、幾何エミッタンスが加速によって減少するということである。図 4 に加速によって、横方向の傾き x' が減少する様子を示す。加速されたあとの電子ビームで重要なのは幾何エミッタンスであり、加速してエネルギーを上げることによってこれを下げることができる。電子源から生成された電子ビームがもつ初期の規格化エミッタンスを ε_n とすると、運動量 $p_z = mc\gamma\beta$ をもつ電子ビームの幾何エミッタンスは、

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_n}{\gamma\beta}, \tag{1.1}$$

となり、電子ビームを加速するほど幾何エミッタンスが下がることになる。ここで、$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$、$\beta = v_z/c$、$c$ は光の速さである。これが、線形加速器を使う際の利点となる。

ERL も線形加速器の一つであるため、電子ビームの品質を向上させるには、電子源で低エミッタンスビームを生成し、如何にそれを悪化させずに輸送させるかということが鍵となる。

[2] 加速器では、p_x の代わりに p_x を進行方向運動量 p_z で規格化した物理量 $x' = p_x/p_z$ で位相空間を作りエミッタンスを求める。これを幾何エミッタンスといい、これは電子ビームのエネルギーに依存する。本テキストでは、単に幾何エミッタンスをエミッタンスと表現し、あとで出てくるエネルギーに依存しないエミッタンスを規格化エミッタンスと呼ぶ。

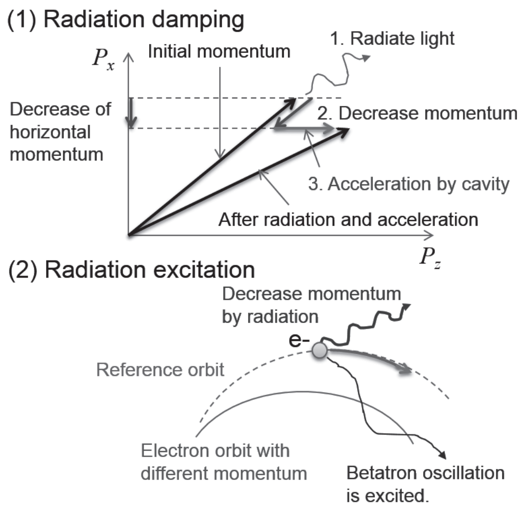


図 3: 放射減衰と放射励起の概略図。偏向電磁石内で電子の軌道が曲げられたときに放射光を接線方向に放射する。(a) 放射減衰: 放射光生成によって電子の接線方向の運動量が減少する。電子が x 方向の運動量をもっている場合、この方向の運動量も減衰する。加速空洞によって電子は加速され z 方向の運動量が増加する。このとき、傾き $x' = p_x/p_z$ は放射前の状態に比べて減少することになる。(b) 放射励起: 放射光生成によって電子の運動量が減衰するため、偏向電磁石の磁場の強さによって決まる周回軌道が変化する。このため、運動量が減少したあとの設計軌道から見ると、放射光を放射したあとの電子は軌道がずれていることになり、その設計軌道に対して振動しながら周回することになる。

1.3 ビーム電流と出力

加速器の出力を考えるときに重要となるのが、平均ビーム電流である [3]。電流の定義は、ある面を単位時間あたりに通過した電荷量である。線形加速器の場合は単純であり、基本的に電子源から生成された単位時間あたりの電荷量を考えれば良い。一方リング型加速器の場合には、電子ビームは周回し続けることになるため、ビーム電流は基本的に周回周波数 [4] と貯蔵電荷量の積として求められる。このため、リング型加速器の場合には、同じ電荷量を貯蔵している場合でも周回周波数が高いほど電流は高くなる。KEK にある放射

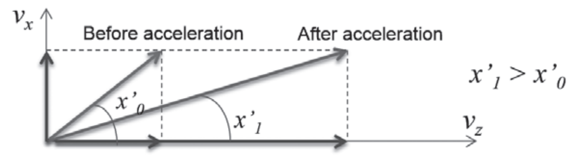


図 4: 加速による横方向運動量の変化。加速による運動量変化は基本的に、進行方向 (z 方向) のみに生じるため、加速によって横方向の傾き $x' = v_x/v_z$ は小さくなる。x-x' 位相空間上でのエミッタンス (幾何エミッタンス) は、加速によって減少することになる。

光源用リング型加速器である 2.5 GeV PF-ring [5] では、平均ビーム電流 450 mA で運転が行われている。PR-ring では高周波加速空洞の周波数は 500.1 MHz であり、加速器の中に 312 個の電子バンチを貯めることができるため、周回周波数は 500.1 MHz / 312 = 1.6029 MHz と求まる。加速器内に貯蔵されている総電荷量は 280.7 nC となる。リング型加速器でのエネルギー収支を考えると、ビーム損失を考えなければ、放射光生成によって失われた分を周回している電子ビームに供給するだけとなる。

一方、線形加速器の場合は、リング型加速器とは異なり常に電子源から電子が供給され続けることになるという大きな違いがある。線形加速器では、加速して一度利用したビームをそのまま捨ててしまうため、電子ビームを加速するのに必要な電力は、(ビーム電流) × (加速電圧) という単純な関係となる。ERL を放射光源に利用したときの最終目標は、ビームエネルギー 3 GeV で平均ビーム電流 100 mA となっているが、このときビームを加速するのに必要な出力を単純に考えると、3 GV × 100 mA = 300 MW という非常に大きな値となる。また、もう一つ問題となるのが、捨てる出力も極めて大きいということである。高エネルギービームを捨てるには、何らかの物質に当てて電子を止めることになるが、捨てるビームのエネルギーが熱あるいは放射線に変換されることになり、発熱量、放射線発生量ともに極めて大きなものとなる。このように、線形加速器で単純に平均ビーム電流を増強するというのは現実的ではない。

ERL というのは、図 5 に示すように、加速し利用された電子ビームを再び主加速空洞を通して減速し、エネルギーの下がったビームをビームダンプに捨てる

[3] ビーム電流として、ここではまず平均ビーム電流を考える。これは電子ビームがある時間構造をもっていたときに、その構造を考慮しないで、平均的な電流を考えるものである。一方電子ビームの時間構造を考慮して、一つの時間構造に注目してピーク電流というものを考える場合もある。

[4] 単位時間あたり何回周回するかを示す量。

[5] 加速器ではエネルギーの単位として eV (電子ボルト) を用いる。またエネルギーといっても運動エネルギーと全エネルギーの 2 つがあり、電子の場合には静止エネルギー $m_e c^2 = 0.511$ MeV 分差がでる。低エネルギー領域ではこの差が無視できないので、必要なときには運動エネルギーか全エネルギーかを明示する。

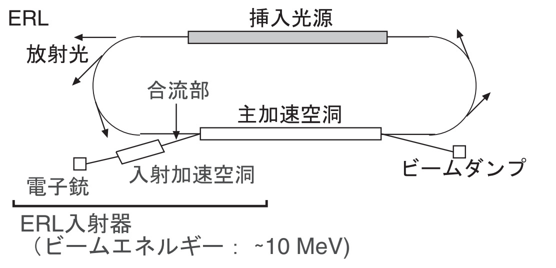


図 5: ERL の概略図。電子銃、加速空洞から構成される入射器、主加速空洞、周回部、ビームダンプによって構成される。入射器でのエネルギーは、またほぼビームダンプに捨てるビームのエネルギーとなる。このため、入射器のエネルギーが、捨てるビームの全出力を決めることになるため、増大させると放射線遮蔽の問題が厳しくなる。

というものである。減速されたビームが失ったエネルギーは電磁場として主加速空洞内に蓄えられ、次に来る入射ビームを加速することになり、エネルギーのやり取り (エネルギー回収) が行われることになる。主加速空洞内では最初に電磁場を作るための電力が必要となるが、一度エネルギー回収が成立したあとは基本的に大きな電力を必要としない。ERL では入射器で電子ビームを加速するための電力が必要となるが、例えばそのエネルギーを 10 MeV とすると、電子ビームの出力は 10 MeV × 100 mA = 1 MW となり、300 MW に比べると非常に小さくなる。また、ビームダンプに捨てる出力も 1 MW となり、ダンプの発熱量、放射線発生量も大幅に減少される。このように、ERL は電子源で生成された小さい初期エミッタンスのビームを利用するという線形加速器において、大平均ビーム電流を扱うための一つの方法である。

1.4 ERL の利用

ERL は線形加速器で大平均ビーム電流運転を可能とすることが大きな特徴であり、これを活かした利用法が検討されている。ERL の利用先は主に、放射光源利用 [1] と素粒子原子核実験用の利用の 2 つとなる。ともに低エミッタンスかつ大電流を扱うということが鍵となっている。

ERL を用いた放射光源利用では、電子銃から生成されたビームは 1 回（あるいは数回）のみ挿入光源を通過しビームダンプに捨てられるため、ビームは放射減衰・励起による平衡状態に到達せず、入射器で生成されたビームの質が放射光の質を決定付けるという特徴という線形加速器の特徴をもつ。ERL を利用した光源ではこれに加えて、平均ビーム電流の増強によって放射光の平均出力を高めようというものである。

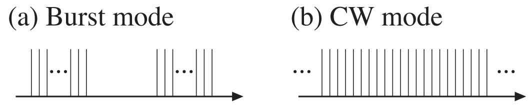


図 6: ERL の入射器で重要となる物理現象。ただし、光陰極電子銃でのレーザー整形などは除く。

線形加速器型光源の利用としては、X 線自由電子レーザー (X-ray Free Electron Laser, X-FEL) がすでに稼働しており、目覚ましい成果を上げている [2]。これまでの線形加速器型光源では、ビームの時間構造は図 6 (a) に示すようなマクロパルス構造 (バースト運転) となっている。マクロパルスは複数のパルスから構成され、この間はビームが加速されることになる。そのあと暫くビームがない状態となり、また次のマクロパルスが続くことになる。この場合は、ビームは間欠運転となり、時間構造全体で見たときの平均ビーム電流は低いものとなる。現在稼働している X-FEL 光源は、数 10 Hz ∼ 120 Hz 程度の繰り返し周波数で運転されている。これに対して、パルスが連続して続く運転モード (CW 運転, Continuous Wave Operation) がある。このときの時間構造を図 6 (b) に示す。X-FEL の次の発展として、米国の SLAC を中心とした研究機関で高い繰り返し周波数での運転を目指した LCLS-II 計画が進められている [3]。高繰り返し化によって、放射光の出力増強につながるが、単純に行うと先ほど述べたようにビームの出力が極めて高いものになってしまう。最も速い繰り返し周波数は、高周波加速空洞の周波数と同じ周波数でビームを加速することであるが、これを行うには平均ビーム電流が上昇しすぎるため、LCLS-II 計画では最大 1 MHz の繰り返し周波数が目標となっている。

ERL ではエネルギー回収によって完全な CW 運転が可能である。KEK の ERL では 1.3 GHz の周波数をもつ超伝導加速空洞が開発されており、この場合ビームの繰り返し周波数は最大 1.3 GHz となる。ERL 光源の目標は、超低エミッタンスや超短パルス長をもつ電子ビームによって、非常に高い平均輝度、空間干渉性の良い放射光の生成という線形加速器の大平均電流化の特徴を活かしたものである。これに加えて、ビームを再び主空洞まで輸送するために設置される周回部に、多数の放射光利用のビームラインを作ることが可能という特徴がある。このように、線形加

速器の特徴を活かした先進性、複数のビームラインを建設可能であるという汎用性が ERL 光源の大きな特徴である。現在日本では、KEK、JAEA を中心として日本の研究機関が協力して、ERL 型光源の実証機 cERL (compact ERL) [1] を用いたビーム運転が進められている [4]。

ERL の素粒子原子核利用においても、放射光源の場合と同様に、高品質かつ大平均ビーム電流の特徴を活かした利用が検討されている [5]。

1.5 ERL で重要な項目

ERL の特徴は、電子源・入射器でのビームの質を向上させれば放射光の質を向上させられるということである。逆に言えば、入射器で如何に超低エミッタンスビームを生成し、増大させずに挿入光源まで輸送するかということが、ERL を利用する上での最大の課題であるということを示している。特に、100 mA(繰り返し 1.3 GHz で 1 バンチあたり 77 pC) の大電流で規格化エミッタンス 0.1 mm mrad という超低エミッタンスビームを入射器で生成・輸送するというのは挑戦的な課題であり、大型の GeV クラスの ERL 光源を実現するためには、実証しなければならないテーマである。

超低エミッタンスビームを生成する上で克服しなければならない物理現象は、空間電荷効果とコヒーレント放射（CSR）によるビーム品質の低下である。図 7 に入射器近傍での重要となる物理現象を示す。空間電荷効果はビーム内電子間での Coulomb 力によるものであり、10 MeV 程度の低いビームエネルギーをもつ入射器内では、全体に渡ってその影響を考慮しなければならない。電子ビームが加速されたあとは、空間電荷効果は弱くなっていく。周回部までビームを輸送する間に、バンチ長をより短くするためのバンチ圧縮という操作を行うが、このときにも CSR の影響を如何に小さく抑えるかということが重要となる。CSR の影響を大まかに言うと、電子が偏向電磁石で曲げられた軌道を通るとき、電子ビームが放出した放射光が軌道長差（光は直進、電子は遠回り）によって元のビームに追いつき、元のビームを加速・減速させエネルギーを変化させるというものである。空間電荷効果や CSR は、単純化されたモデルでは解析的に取り扱えるが、現実のバンチ化されたビームでは集団的な効果として現れるため、解析的な扱いが困難である。このような事情から、主に数値計算による方法が用いられている。また、ERL の特徴である大平均ビーム電流

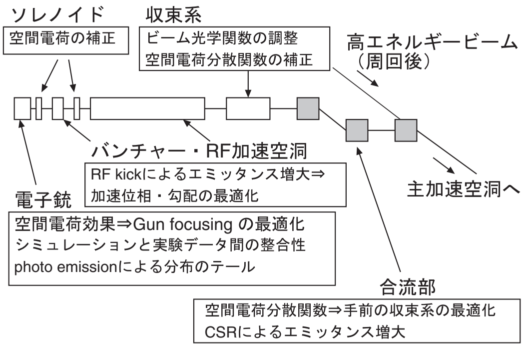


図 7: ERL の入射器で重要となる物理現象。ただし、光陰極電子銃でのレーザー整形などは除く。

を扱う場合には、ビームが加速空洞内に励起する電磁場によるビーム不安性現象を考慮する必要がある。

また、ERL はこれまでにない大電流を線形加速器で扱うということから、加速器システム全体としての総合開発が重要となる。ERL を光源加速器として利用する場合を考えると、そこで要求される性能は、安定な光 (変動しない、中断しない)、低いコスト (建設・運転) ということになる。光源利用に向けた ERL 加速器実現の課題 (未知数は何か？) についてまとめると次のようになる。

1. 高輝度・大電流電子ビームの生成: 100 mA を供給し続ける電子源はこれまでにない開発要素である。

2. 大電流電子ビームの加速: 100 mA を加速し続ける超伝導加速空洞はこれまでにない開発要素である。

3. ビーム性能: 入射器 (低いエネルギー領域) での試験、周回部での性能検証を行っていく必要がある。特に、大電流加速の影響、短バンチ長の影響 (CSR) の検証や、低エミッタンスビームを実証することが必要である。

4. 長時間・安定にかつ一様に運転するために必要な安定性: ERL は基本的に線形加速器型光源なので、貯蔵リングのような安定化機構がないので、変動源を断つことが必要である。また、ユーザー利用を中断する原因になりそうなのは、カソード交換 (寿命がどれくらいか？)、超伝導空洞の停止頻度であり、実際のビーム運転を通して検証していく必要がある。

5. 運転コスト: エネルギー回収は一見エコっぽく見えるが、ビーム出力とは別に、超伝導空洞を 2 〜

4 K に冷却するための冷凍機の運転にコストが掛かる。

6. 放射線遮蔽: エネルギー回収によってダンプに捨てる出力はかなり下がることになるが、輸送中にどこで、どれくらいビーム損失が起きるのかを、試験機で検証する必要がある。

このように、ERL を利用した光源を実現するには、要素技術開発とともに、光源加速器としての総合性能を検証する必要がある。これを行うために開発されたのが、cERL であり、2014 年から開始された総合運転で、上記の課題に対する回答を与えつつあるところである。ここでは、cERL 実証機での成果を紹介しながら、ERL で重要となるビーム力学についてまとめていく。

1.6 本テキストの流れ

本テキストでは [6]、ERL の中で行われる一連の流れ、生成、加速、輸送、減速、廃棄について紹介していく。ERL 入射器ではビームのエネルギーが低いために、空間電荷効果による集団効果が顕著に現れる。放射光源用の GeV クラスのリング型加速器では、電子ビームの運動は空間電荷効果による効果を無視して単粒子的に扱い、必要に応じてビーム不安定性などの集団効果を取り入れるという方法が取られる。一方、ERL 入射器ではビームのエネルギーが低く、また電荷密度も高いために、空間電荷効果の影響が支配的になり、そもそも単粒子的な取り扱いができない。このために、入射器中での電子ビームの物理は複雑になりがちである。現実の入射器の設計では、上流の要素の影響が下流に伝播していくため、ビームダイナミクスを考える際には入射器全体を取り扱う必要があり、多くの場合は数値計算による方法が採用されている。しかし、入射器を構成する各要素毎に電子ビームの物理を考え、その基本を抑えておくことは、数値計算を行う上でも重要である。

電子銃・入射器で生成された電子ビームは、超伝導空洞 (主空洞) によって低エネルギー領域から高エネルギー領域まで加速される。十分に高いエネルギーまで加速された場合には、空間電荷効果を無視して取り扱うことができる。十分加速されたあとのビームについては基本的に単粒子として解析することになる。ここでは、まず主空洞による加速・減速のビーム輸送条件 [7] について紹介する。主空洞を出たビームは、周回部 (周回ループ) を通って電子ビームを利用する区間まで輸送される。この際に、利用条件に合わせてビーム条件を制御する必要がある。例えば、ERL の光源利用では運転モードによって 100 fs 以下の短い電子バンチ長を実現することが要求されるが、この操作は主空洞と周回部を利用して行われる。バンチ長が短くなってくると、CSR による影響が顕著に現れてくるため、これを如何に制御するかということがバンチ圧縮において重要となる。

本テキストでは、電子ビームの物理をできるだけわかりやすく紹介しようと試みた。ERL 入射器では、単粒子についての相対論的な運動方程式から始めて、それをビームエンベロープ方程式に拡張し、空間電荷効果を取り入れるというアプローチをとる。円形加速器中でのビームダイナミクスの物理では、曲線座標系での単粒子の運動から始めて、Courant-Synder パラメタと呼ばれるビーム光学関数を考える方法が一般的な流れであるが、ここではその解説はしないで、入射器でのビーム物理を考える上で便利なアプローチをとることにした。本テキストの中でも、ビーム光学関数が出てくるが、それらについては、OHO'2008 の原田氏の講義や他の参考文献 [6,7] を参照して欲しい。

ここでは、まず対象とする ERL 加速器を構成する要素についてセクション 2 で紹介し、電子ビーム中で重要となる物理現象についてセクション 3 で紹介する。このなかで、特に重要となるのが空間電荷効果である。セクション 4 では、空間電荷効果による影響を評価する準備として、近軸光線近似を用いたビームエンベロープ方程式を導出し、空間電荷効果がない場合の外部から加えた電磁場に対する影響を紹介する。セクション 5 では、円筒対称性をもつビームに対して空間電荷効果を含んだビームエンベロープ方程式を導出する。ここで紹介する空間電荷効果についての議論の多くは、参考文献 [8,9] を参考にしている。セクション 6 ではビームエンベロープ方程式を拡張して、空間電荷効果によって射影エミッタンスが増大する様子を調べる。セクション 7 では、空間電荷効果を含んだビームシミュレーションについて紹介する。セクション 8 では電子銃近傍でのビーム物理について紹介し、実際の cERL 電子銃の解析モデルの補正について紹介する。セクション 9 では入射器の輸送条件の最適化について紹介する。セクション 10 では

[6] 2015 年 8 月 17 日版。テキストは随時更新していく予定なので、最新版については、OHO セミナーの web ページを参照して欲しい。

[7] ビーム輸送条件は、ビーム光学関数、ビームオプティクスによって記述される。

合流部で問題となる物理について概観する。セクション 11 では入射器から主空洞へのビーム輸送について紹介する。セクション 12 では主空洞による加速・減速輸送条件の設計について、セクション 13 では周回部での輸送条件について、セクション 14 ではビームの減速とビームダンプについて紹介する。セクション 15 では周回部でのバンチ圧縮について紹介する。セクション 12 ～ 15 は島田美帆氏によって作成された。また、本テキストは OHO'2008 のテキストをベースにして、加筆修正されたものである。

本テキストでは、ERL 入射器を例にとって、線形加速器中での空間電荷効果の影響を取り扱っている。円形加速器では線形加速器と異なり、運動が周期条件下で行われるという大きな違いがある。円形加速器中では、空間電荷効果による重要な影響としてチューンシフトと呼ばれる現象があるが、ここではそれについては取り扱わない。過去の OHO'2000 の町田慎二氏によるテキスト [10] を参照して欲しい。また、多くの有用な文献については、巻末にまとめたので参照していただきたい。

2　ERL 加速器を構成する要素

ERL は高輝度電子ビームを生成し加速する電子銃・入射器、エネルギー回収を行う主加速空洞、ビームを周回させる周回部、減速後のビームを捨てるビームダンプより構成される。これらの中で ERL の鍵を握る要素は、高輝度かつ大電流電子ビームを生成するための電子銃とそれらを加速するための超伝導加速空洞である。ここでは、これらの要素についての紹介する。

2.1　光陰極 DC 電子銃

ERL 入射器の性能を決定する上で、最も重要な要素は電子銃である。電子銃で品質の良いビームを生成できなければ、それ以降の要素でいくら品質を維持するようにしても、初期の品質以上にはできないからである。電子銃の開発では、光陰極表面での電子の生成の物理の理解、高い加速電圧の実現、高い量子効率の実現、カソード表面の長寿命化などの開発課題があり、現在着実な開発が進められている。

ERL 用の電子銃として現在用いられているのが、光陰極 (カソード, cathode) を用いた DC 電子銃である。cERL 用に最大加速電圧 500 kV の光陰極 DC 電子銃が開発され、cERL におけるビーム運転に用いられている。光陰極 DC 電子銃の模式図を図 ‘8 に示す。カソード面に GaAs のような光陰極材質を設置し、アノード電極間に電圧を印加しておく。電子ビームを取り出したいタイミングで励起レーザーを照射し、電子を取り出す。表面から取り出された電子は、カソードとアノード間の電圧によって加速され、ビームライン下流へ輸送される。

ERL に利用する電子銃では、高輝度かつ大平均電流の電子ビームを生成し続けることが要求される。電子銃の形式として、光陰極 DC 電子銃のほかに、DC 熱電子銃、高周波 (RF) 熱電子銃、常伝導光陰極 RF 電子銃、超伝導光陰極 RF 電子銃がある。熱電子銃の場合には熱電子放出を利用するため初期エミッタンスが大きくなるということがあり、また常伝導の RF 電子銃では大平均ビーム電流を出し続ける場合には、高周波電磁場を励起し続けることによる熱負荷の問題が生じる。超伝導光陰極 RF 電子銃は、ERL 電子銃に要求される性能を満たす可能性が高いが、まだ発展途上の技術であり、安定したビーム運転にはまだ開発が必要である。光陰極 DC 電子銃これまでに開発された技術を基礎しているため、ERL の要求を満たす最も現実的な電子銃となっている。

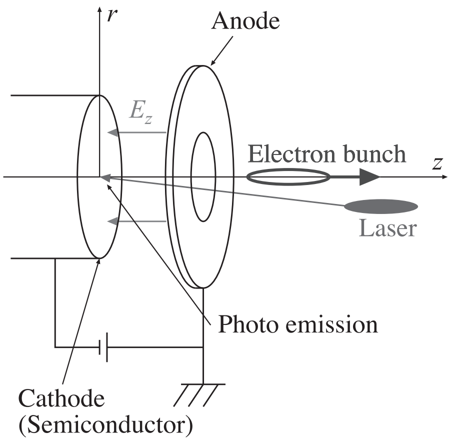


図 8: 光陰極を用いた DC 電子銃の模式図。カソード上に光陰極材質 (光電効果によって電子を生成) を配置し、アノード電極間との間に DC 電圧を印加する。励起レーザー光が照射されると電子が取り出され、カソードとアノード間の電圧によって電子が加速される。

ERL 加速器開発において、電子銃の開発は非常に重要な役割を担っているが、OHO’2015 では「電子銃」についての講義もあるため、ここでは電子銃についてはビーム力学に関する概略を紹介するのみとする。電子銃については、OHO’2008 の西森信行氏の講義や、OHO’2015 の山本将博氏の講義で詳しく紹介されるので、そちらを参照して欲しい。また多くの有用な文献 [11,12] もあるので、そちらも参照していただきたい。

2.2　光陰極による電子ビームの生成

cERL では光陰極の材質として、半導体の GaAs が用いられている。電子銃からのビームの品質は、まず第一に光陰極から生成される電子ビームの品質によって決まるため、GaAs の他に、GaAsP や GaInP [13]、超格子構造など多くの材質の検証が行われている。

カソード材質の物理で重要となるのが、初期エミッタンスと時間応答である。まず、初期エミッタンスについて考える。GaAs カソードの場合には、価電子帯にいる電子を励起レーザーによって伝導帯まで励起し、これをカソード表面化から真空準位に取り出すことになる (図 9)。このとき、電子を取り出し易くするために、伝導帯に対して真空準位を下げるような表面 (Negative Electron Afinity, NEA 表面) が作成される。この NEA 表面によって、照射したレーザー出

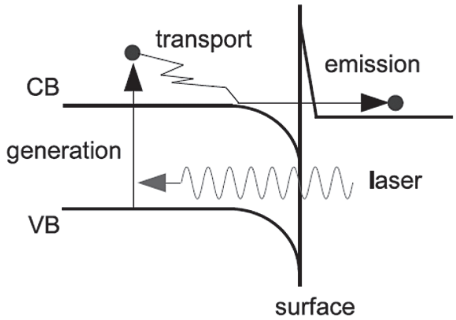


図 9: 光陰極からの電子の引き出し。励起レーザーによって電子が価電子帯 (VB) から伝導帯 (CB) に励起される。励起された電子は半導体中を表面まで移動する。真空準位は NEA 表面によって下げられているため、電子が真空に引き出される。

力に対してどれくらいの電子が取り出されるかを示す量、量子効率 (Quantum Efficiency) が上昇する。励起レーザーの波長は、伝導帯と価電子帯のエネルギー差に合わせたものか、それよりも大きいエネルギーをもつものが使用される。波長の短いレーザーを使った場合、真空準位よりも高いエネルギーをもった電子が増えるため、より多くの電子が真空に取り出されることになり、量子効率が上昇するという効果がある。一方で、真空に取り出されたときに電子が余分にもつエネルギーが、取り出された電子ビームの初期エミッタンスを決めることになり、エミッタンスを下げるという面では励起レーザー波長を短くするというのは得策ではない。

光陰極から取り出された電子ビームの初期エミッタンスから、光陰極表面を出たあとにどれくらいの余剰なエネルギーを持つかを見積もることができる。この余剰なエネルギーが横方向 (x、y 方向) の初期エミッタンスの起源となる。余剰エネルギーを k_BT [8] とすると、光陰極から生成された電子の規格化エミッタンスは、

$$\varepsilon_x = \sigma_x \sqrt{\frac{k_BT}{mc^2}} \tag{2.1}$$

と計算される [8,11]。ここで、k_B は Bolzmann 定数、m は電子の質量、c は真空中での光速である。σ_x はカソード表面での x 方向の rms ビームサイズである。これより、初期エミッタンスは k_BT と初期ビームサイズに依存することがわかる。式 (2.1) から、電子銃の後ろでエミッタンスが測定できれば、カソードに当てたレーザースポットサイズから、余剰エネルギー k_BT を推測することができる。ERL 計画が進められているコーネル大学では、光陰極 DC 電子銃のテストビームラインで、GaA sカソード、GaAsP カソードについての熱エミッタンスの測定が行われ、カソードでの k_BT の値が計測されている [14,15]。また KEK でも光陰極 DC 電子銃のテストビームラインを用いて GaAs の余剰エネルギーと励起レーザー波長の関係が測定されている [16]。

また、カソード材質で重要となるもう一つの性能が時間応答である。これは、照射したレーザーパルスに対して電子ビームがどれくらいの時間応答で取り出されるかということに対応する。もし、照射したレーザーパルスに対して、取り出された電子ビームが長いテールをもつとすると、テール部分は下流にある高周波加速空洞の最適な位相からずれた状態で加速されることになり、設計条件からエネルギーずれたエネルギーをもつことになる。エネルギーのずれた電子は偏向電磁石で軌道が曲げられる区間で、設計軌道からずれた領域を通過することになり、望まないビーム損失の原因ともなる。また、あとのセクションで紹介するエミッタンス補償に対しても悪い影響を与えることになる。カソードの時間応答は、励起レーザー波長とカソード材質の厚さに依存する。時間応答が遅れる原因は、カソード表面から遠くで (より奥で) 励起された電子が、拡散によって表面までたどり着くのに有限の時間が掛かるためである。仮にカソード材質が十分に薄ければ、表面に辿り着くまでの時間が短くなり、時間応答は速くなる。また、励起レーザー光がカソード内にどの程度まで侵入するかということも重要となる。これを示す物理量が侵入長 α であり、光がカソード面に侵入する強度は $\exp(-\alpha z)$ に比例する。波長 785 nm の場合には $\alpha \sim 1000$ nm となり、かなり奥まで侵入するため時間応答が遅くなる。波長 544 nm の場合には $\alpha \sim 100$ nm となり、表面近傍でのみ電子が生成されるため速い時間応答をもつことになる。励起レーザー波長が短い場合、時間応答と量子効率では得になるが、横方向のエミッタンスを考えると余剰エネルギーが増えることになり得ではない。このように、励起レーザー波長、量子効率、カソード材質、カソード厚さ、時間応答、初期エミッタンスを考慮して、運転条件を決めていく必要がある。

電子銃での重要な物理現象として、先に紹介した光陰極表面での電子の生成だけでなく、空間電荷効果、カソード表面での鏡像電荷の効果などの重要な物理がある。電子を生成する際には、パルス状のレーザーをカソード表面に当てて電子を生成するが、そのパルス

[8] MTE, Mean Transverse Energy と表示する場合もある。

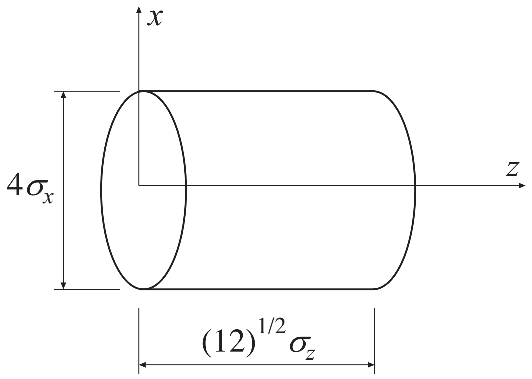


図 10: ビア缶型の粒子分布。円筒内では電荷密度は一定。σ_x は x 方向の rms ビームサイズ、σ_z は z 方向の rms バンチ長。

形状と横方向の分布形状が、空間電荷効果の影響を小さくする上で重要であることがわかっている。言い換えると、空間・時間両方向についてのレーザー分布の整形が低エミッタンスを得る上では重要となる。実際に時間方向と横方向のレーザー分布の形状を整形する技術開発が進められており、より低エミッタンスビームを実現するには、これらの制御によって如何に設計条件に近づけていくかということが鍵となる。

ERL 入射器のシミュレーションを行う際には、電子銃のカソード表面で電子がある分布をもって生成されると仮定して、粒子トラッキングが開始される。現実の電子銃ではどのような分布で電子が生成されるかを知ることは、計算機シミュレーションの精度を上げるためにも重要である。特に、光陰極電子銃では、熱電子銃とは異なり、レーザーの波長が取り出す電荷量やビームの初期エミッタンス、時間構造に影響を与えるため複雑である。電子銃の研究では、これらの測定も精力的に行われている [14,15]。

また、ERL 入射器で実現可能な最小エミッタンスを調べるために、初期の電子分布の形状を変化させ最適な分布を探す研究も行われている [17]。多くの場合には、ビア缶型の分布 (図 10) が初期分布として用いられているが、横方向の分布で中心分布の密度を下げた場合の方が、より空間電荷効果の影響を小さく抑えられることがわかっている [12]。

2.3 電子銃の電極形状

光陰極から生成された電子ビームは、カソードとアノード電極間に印加された電圧によって加速される。DC 電圧が印加されるため、カソードとアノード電極

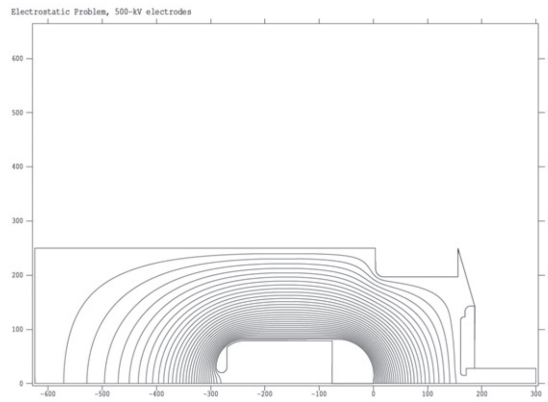


図 11: cERL の光陰極 DC 電子銃の電極形状。アノードとカソード間の距離は、160 mm となっている。2013 年からの運転では、390 kV を印加して運転を行っている。横軸は z 軸、縦軸は r 軸を表す。図は、z 軸周りに円筒対称性がある場合の断面の半分を示す。カソード（左側の円筒）からアノード（穴の開いた平板）に向かって、加速電場が形成される。

間には静電場が生じることになる。電子銃から下流に向けてビームを輸送する際に、この区間の電場分布が電子ビームに対して収束あるいは発散力を与える。電場分布は電極形状によって決まるため、ビーム輸送も考慮した電極形状設計が必要となる。ただし、電極形状はビームの輸送条件だけでなく、電極表面の最大電場にも影響する。電極表面の最大電場があまりに高いと放電を引き起こすことになり、安定な電圧印加を阻害することになるため、これらの複数の条件を考慮した設計が重要となる。

図 11 に cERL 実証機で使われている光陰極 DC 電子銃 [18] の断面形状を示す。カソード・アノード間のギャップは 160 mm である。ここで、電子銃は z 軸の周りに円筒対称性を持つとして、半分の断面を示した。図 12 に z 軸上での加速電場 $E_{z0}(z)$ を示す。電場は POISSON [19] によって計算された。対称性から、z 軸上では半径方向の成分 E_r、円周方向の成分 E_θ ともにゼロとなる。しかし、z 軸上から離れた場合 ($r \neq 0$)、E_r はゼロにはならない。より詳細な計算では、2 次元の電場のマップが必要になるが、z 軸近傍では $E_{z0}(z)$ から E_r を求めることができる。z 軸上の電場 $E_{z0}(z)$ を用いると、z 軸近傍で、$r \neq 0$ の場合の電場の成分は、

$$E_z(r,z) = E_{z0}(z) - \frac{1}{4}r^2\frac{\partial^2 E_{z0}(z)}{\partial z^2}, \quad (2.2)$$

$$E_r(r,z) = -\frac{1}{2}r\frac{\partial E_{z0}(z)}{\partial z} \quad (2.3)$$

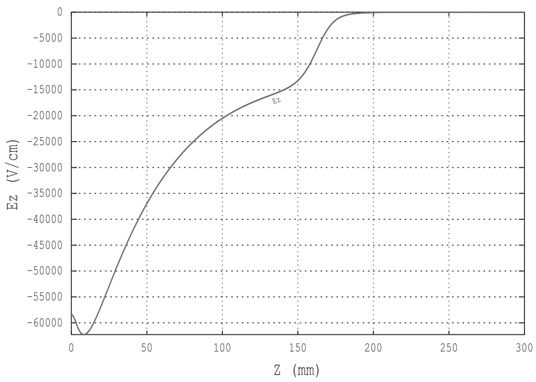


図 12: 電子銃 (図 11) が z 軸上に作る加速電場。z 軸周りの円筒対称性があるため、z 軸上では E_z 成分のみとなり、E_r および E_θ はゼロとなる。$z = 0$ (m) がカソード表面、$z = 0.16$ (m) がアノード表面。

と表すことができる。これは、横方向の電場 E_r は $\partial E_{z0}(z)/\partial z$ に依存することを示している。図 12 に示したように、$\partial E_{z0}(z)/\partial z > 0$ となるため、カソード近傍以外は負の電荷を持つ電子ビームに対して発散力が働くことになる。これを示すために、図 11 の電極形状が作る電場の中での電子のトラッキング (粒子追跡) 計算を行った。この結果を図 13 に示す。トラッキング計算では、電子間の空間電荷効果は無視している。図 12 の 1 次元電場分布から予想したように、カソード付近では収束力が働くが、電子銃全体としては発散力が働くことがわかる。このように、電極形状は横方向のビーム力学にも影響を与えるため、それらを考慮した設計が必要となる。

ERL 入射器のシミュレーションでは、空間電荷効果を含んだコードが使われるが、取り入れる物理現象と要求する精度によって、外部電磁場の与え方が異なってくる。高速に計算したい場合には、円筒対称性を持つビームを仮定し、ビーム進行方向 (z 軸) の近傍での運動を考え、上記のような 1 次元の外部電磁場を使用する。しかし、z 軸近傍での電磁場の展開が正しくない (ビームサイズが大きい場合)、あるいはより正確に電子銃の作る電場の影響を取り入れるには、2 次元、あるいは 3 次元の電場分布を与える必要がある。

2.4 ソレノイド

ERL 入射器では、電子銃の直後にソレノイド電磁石が設置される。ソレノイド電磁石が作る磁場には、セクション 4.3 で示すようにビームに収束力を与え、

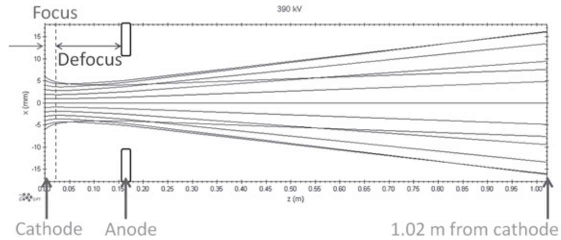


図 13: 電子銃 (図 11) の電極形状による収束・発散力の計算。カソード表面に z 軸の原点から r 方向に 1 mm ずつの間隔で電子を配置し、トラッキング計算を行った。電子銃全体としては発散力が働く。

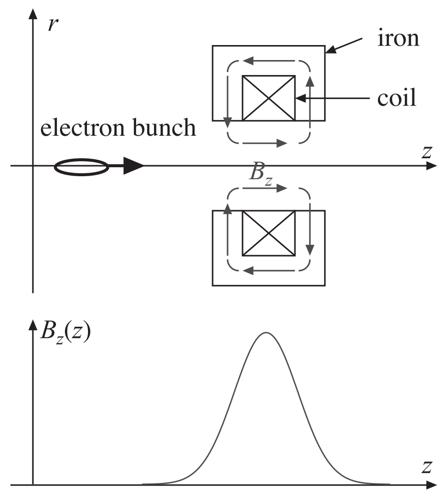


図 14: ソレノイド電磁石の模式図。ビーム軸 (z 軸) 上では、磁場 B_z のみが生じる。

またビームの (x-y) 断面での分布を回転させるという働きがある。図 14 にソレノイド電磁石の模式図を示す。ソレノイドの役割は、電子銃の電場と空間電荷効果により発散したビームサイズを収束効果により小さくするということの他に、セクション 6 で示すような射影エミッタンスを補償するということである。ERL 入射器では、多くの場合、電子銃下流とバンチャー空洞下流にソレノイドを設置する案が採用されている。

JAEA の 250 kV 光陰極 DC 電子銃で用いられているソレノイド電磁石の断面を図 15 に示す。電磁石は円筒対称性を持つため、断面の半分を示した。図 16 に z 軸上の磁場分布 $B_{z0}(z)$ を示す。電子銃との位置関係は、$z = 0$ が電子銃のカソード表面に対応する。このソレノイド電磁石は、主コイルの他に、カソード表面での磁場をゼロにするための補正コイルを持っている。もし、カソード表面で有限の磁場がある $B_{z0}(z = 0) \neq 0$ とすると、カソードで表面で生成さ

れた電子ビームは、セクション 4.2 の式 (4.20) で示すように、有限な初期の横方向運動量 p_θ を持つことになり、初期エミッタンスの増大を招く。これを避けるために、補正コイルを使用して、カソード表面での磁場をゼロに調整している。

電子銃の電場の議論のときと同様に、ソレノイド磁場の 1 次元分布 $B_{z0}(z)$ から、2 次元磁場分布を計算することができる。z 軸近傍では、$B_{z0}(z)$ から $r \neq 0$ の場合の磁場成分は、

$$B_r(r,z) = -\frac{1}{2}\frac{\partial B_{z0}(z)}{\partial z}, \qquad (2.4)$$

$$B_z(r,z) = B_{z0}(z) - \frac{1}{4}r^2\frac{\partial^2 B_{z0}(z)}{\partial z^2} \qquad (2.5)$$

と計算される。

図 15 のソレノイド電磁石を電子が通過したときの軌跡を図 17 に示す。ソレノイド入口で $x = -0.4, -0.2, 0, 0.2, 0.4$ mm の位置の電子を配置し ($y = 0$)、粒子トラッキングを実施した。ソレノイドの中心磁場の強さ 0.02, 0.04 T の二つについて計算した。図 17 に示すように、中心磁場が 0.04 T の場合には x, y 方向ともにある点で収束されることがわかる。また、収束力は中心磁場の強さによって変化する。図 18 に x-y 空間上の各電子の軌跡を示す。入口で x 軸上に並んでいた電子が、収束されるとともに回転し、y 方向成分をもつ。図 19、図 20 に x 方向と y 方向の位相空間上の各電子の軌跡を示す。入口では $y = 0$ だった各電子の座標が、ソレノイドによる回転によって出口では有限な値を持つことがわかる。このように、ソレノイドは収束作用とともに x-y 空間での回転を与えることになる。

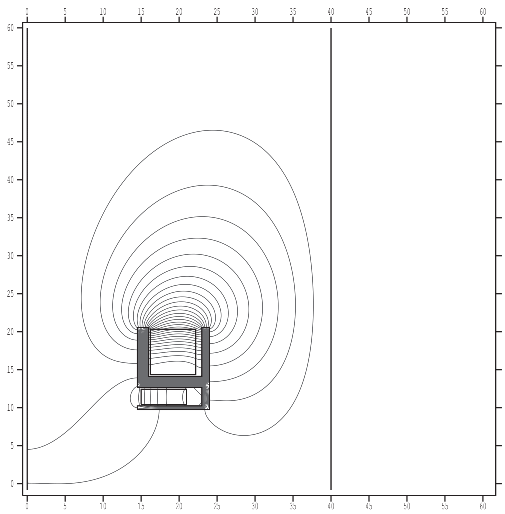


図 15: ソレノイド (JAEA-250 kV 光陰極 DC 電子銃用) の断面形状。横軸は r 軸、縦軸は z 軸を表す。図は、z 軸周りに円筒対称性がある場合の断面の半分を示す。$z = 0$ の位置が電子銃のカソード表面となる。カソード表面での磁場をゼロにするために、主コイル以外に補正コイルが用いられる。

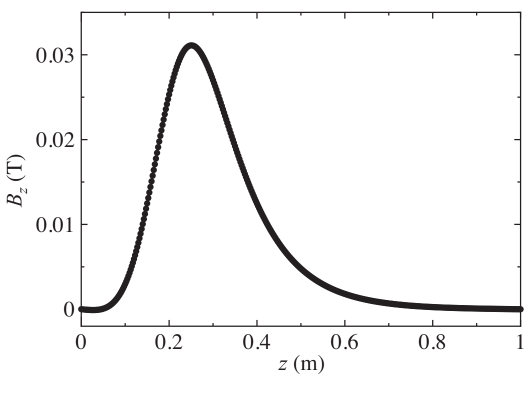


図 16: ソレノイド (図 15) が z 軸上に作る磁場 B_z。z 軸周りの円筒対称性があるため、z 軸上では B_z 成分のみとなり、B_r および B_θ はゼロとなる。

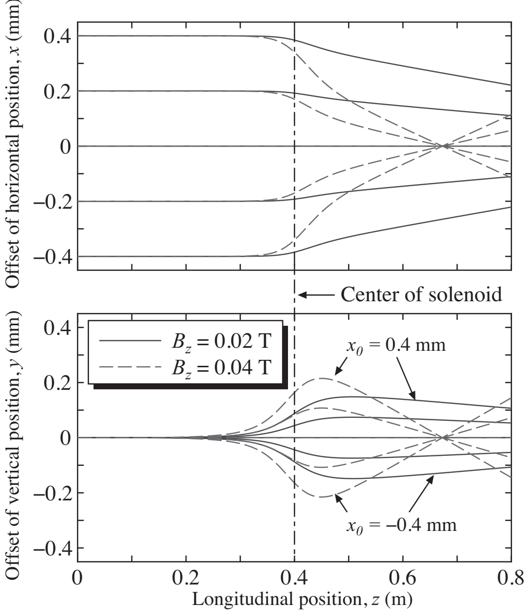


図 17: ソレノイドによる収束作用の計算。ソレノイド入口で $x = -0.4, -0.2, 0, 0.2, 0.4$ mm の位置の電子を配置し ($y = 0$)、粒子トラッキングを実施した。ソレノイドの中心磁場の強さ 0.02, 0.04 T の二つについて計算。

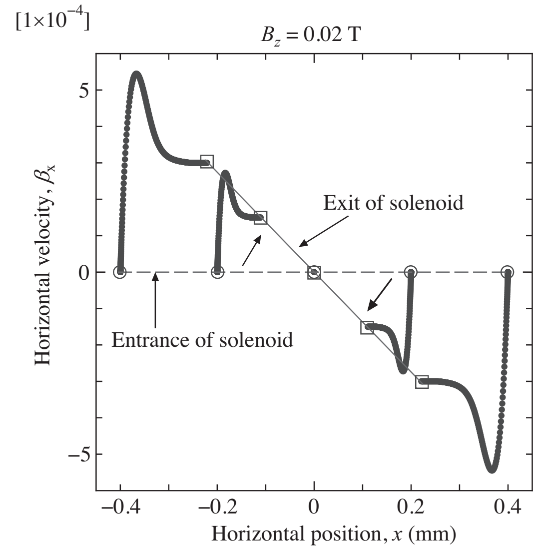


図 19: ソレノイドの中心磁場 0.02 T のときの、x-β_x 空間座標の変化。ここで、$\beta_x = v_x/c$。

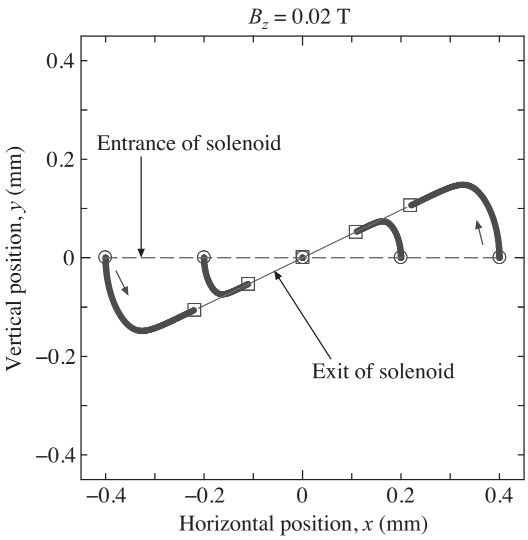


図 18: ソレノイドの中心磁場 0.02 T のときの、x-y 空間座標の変化。入口で x 軸上に並んでいた電子が、収束されるとともに回転し、y 方向成分をもつ。

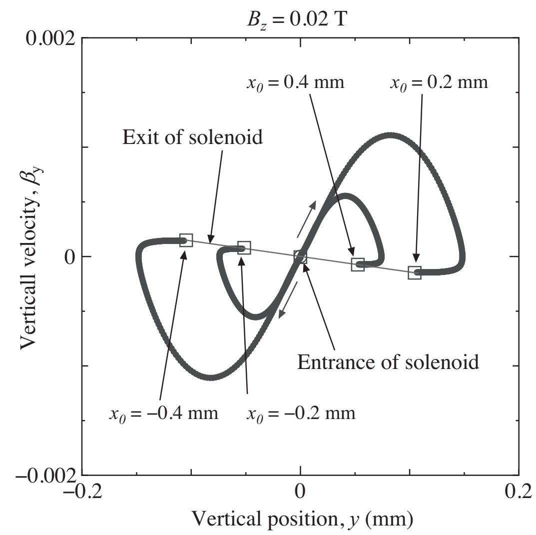


図 20: ソレノイドの中心磁場 0.02 T のときの、x-β_y 空間座標の変化。ここで、$\beta_y = v_y/c$。入口では $y = 0$ だった各電子の座標が、ソレノイドによる回転によって出口では有限な値を持つ。

2.5　バンチャー空洞

光陰極電子銃では、パルス状のレーザーを導入して、バンチ化された電子ビームを生成する。しかし、カソード直後ではビームのエネルギーが低いために、空間電荷効果の影響が強く働き、ビームは進行方向の発散力によって引き伸ばされる。ERL では、短いバンチ長の電子ビームが要求されるため、引き伸ばされた電子バンチを再度圧縮する必要がある。それを行うのが、電子銃の後に設置されるバンチャー空洞である。バンチ圧縮の模式図を図 21 に示す。バンチャーの役割は、電子銃で生成され、加速されたビームのバンチ長を短くすることである。この詳細については、セクション 4.5 で紹介する。

コーネル大学の ERL 計画で使用されるバンチャー用空洞の 1 次元電場分布 $E_{z0}(z)$ を図 22 に示す。系に円筒対称性を仮定した粒子トラッキングコードでは、電磁場として、z 軸上の電場 $E_{z0}(z)$ のみが入力データとして与えられる。これは、z のみ依存する関数で、時間依存は含まない。この場合、$E_{z0}(z)$ に時間依存を付け加えた $E_z(z,t)$ から、z 軸近傍での他の電磁場の成分を求めることができる。z 軸上で半径方向 r および円周方向 θ の成分は一定であると仮定して、$E_z(z,t)$ を Maxwell 方程式に代入すると、z 軸の近傍、すなわち r が小さい場合には、半径方向の電場 $E_r(z)$ および円周方向の磁場 $B_\theta(z)$ は

$$E_r(z,t) = -\frac{r}{2}\frac{\partial E_{z0}(z,t)}{\partial z}, \quad (2.6)$$

$$B_\theta(z,t) = \frac{r}{2c^2}\frac{\partial E_{z0}(z)}{\partial t} \quad (2.7)$$

と与えられる。ここでは、r について展開した後に、r についての 1 次の項のみを残している。TM モードの電磁場の場合、z 軸近傍では電磁場の成分は、

$$E_z(r,z) = E_{z0}(z)\cos(\omega t+\phi), \quad (2.8)$$

$$E_r(r,z) = -\frac{1}{2}r\frac{\partial E_{z0}(z)}{\partial z}\cos(\omega t+\phi), \quad (2.9)$$

$$B_\phi(r,z) = \frac{r\omega}{2c^2}E_{z0}(z)\sin(\omega t+\phi) \quad (2.10)$$

と計算される。ここで、ω は電磁場の角振動数、ϕ は初期位相である。このように、円筒対称性がある系では電場の 1 次元分布 $E_{z0}(z)$ から、他の成分も求めることができる。ただし、上記の展開は、r が小さい時のみ有効であり、ビームサイズが大きい場合などには、2 次元、3 次元の電磁場の分布が必要となる。

バンチャー空洞による影響を視覚的示すために、図 23 に示すようにバンチの中心と中心から進行方向 (z 方向) に ±6.9 mm の位置 (先端と後端) に電子を配置し、トラッキング計算を行った。図 24 にトラッキング結果を示す。x 軸上に 0.2 mm 間隔で 5 つの電子 ($x_0 = -0.4$, -0.2, 0.0. 0.2, 0.4 mm) を配置し、y 軸上の位置はすべてゼロ ($y_0 = 0$) としている。また、横方向の初期運動量はゼロ ($P_x = P_y = 0$、すなわち、$\beta_x = \beta_y = 0$) とした。電子は z 方向に進行するとし、250 keV の初期運動エネルギーを持つと仮定した。計算では、最大加速電場 1 MV/m、加速位相は最大加速を与える位相から −90 度 [9] とした。また電子間の空間電荷効果は無視している。図 24 に示すように僅かではあるがバンチャー空洞内で横方向の力を受けることがわかる。高周波電磁場は時間変動するので、バンチの進行方向の位置関係によってで受ける力が変化するが、このバンチャー空洞では、バンチ前後での横方向の力の変化は小さいことがわかる。バンチャー空洞では加速電場が小さいため、時間変化による影響は小さいが、次に示す超伝導空洞ではバンチの前後関係によって、収束力が変化することがわかる。

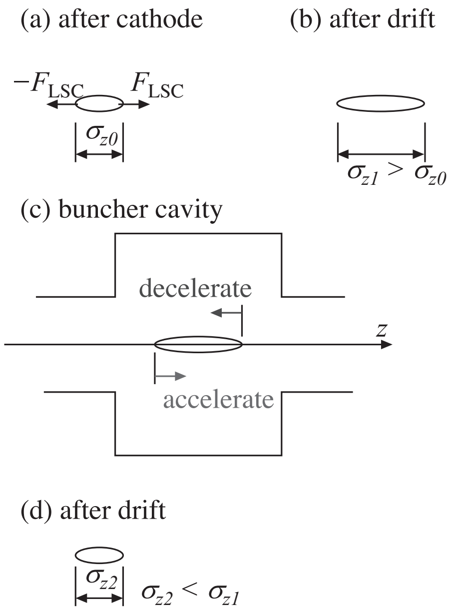


図 21: バンチ圧縮の模式図。電子銃を出たあとの電子ビームは空間電荷効果によって、バンチ長が伸びる。バンチャー空洞によって、バンチ先端を減速し、後端を加速することによって、バンチ圧縮をすることができる。この方法を速度変調によるバンチ圧縮というが、電子ビームの速度が光の速さよりも遅い低エネルギー領域でしか有効ではない。

[9] バンチ圧縮を行う位相。

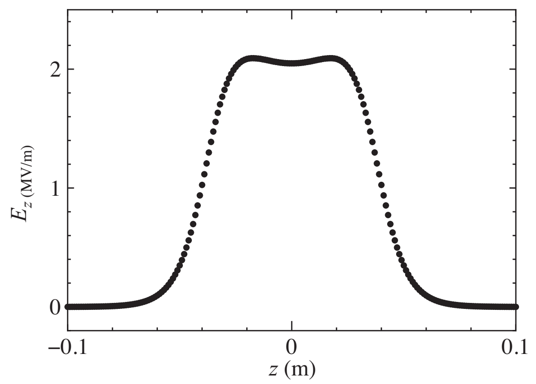


図 22: シングルセル・バンチャー空洞内での z 軸上の加速電場。z 軸周りの円筒対称性があるため、z 軸上では E_z 成分のみとなり、E_r および E_θ はゼロとなる。

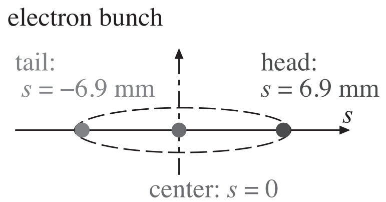


図 23: バンチの中心と、中心から進行方向 (z 方向) に ±6.9 mm の位置 (先端と後端) に電子を配置。

2.6 入射器超伝導加速空洞

ERL では、入射器用空洞および周回部用空洞 (主空洞) には、超伝導加速空洞 (Super conducting RF Cavity) が使用される。超伝導空洞が必要な理由は、連続波 (CW) で大電流ビームを加速し、また高い加速勾配を得るためである。RF 電磁場の周波数は、1.3 GHz (L-band) が使用される。cERL 計画では、入射器内に 3 台の 2 セル空洞を設置することで設計が進められている。

入射器用加速空洞の役割は、電子銃で生成した大電流ビーム (100 mA) を 10 MeV 程度 [10] まで加速することである。周回部の加速空洞はエネルギー回収を行うが、入射器用空洞ではエネルギー回収が行われないため、加速に必要なパワーは全て外部の RF 源から供給されなければならないという大きな違いがある。このため、RF パワーを空洞に入力する結合器（カップラー）は大電力に対応したものが必要となる。入射器用空洞での開発課題としては、

[10] cERL では周回部を通してエネルギー回収運転を実施するために入射器ビームの全エネルギーを 2.9 MeV に下げて運転を行っている。

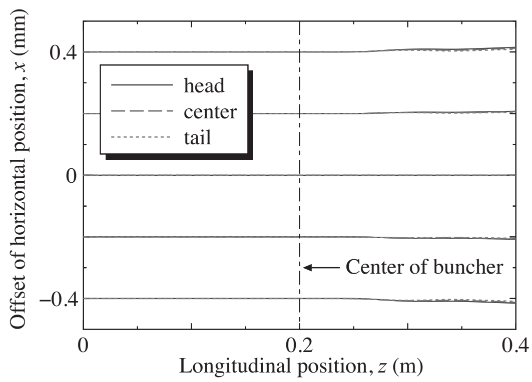


図 24: バンチャー空洞による電子の軌道変化。図 23 に示した初期粒子をトラッキングした。

- 250 kW 級の大電力を投入可能な入力カップラー
- 100 mA の連続運転 (CW 運転) に対応した HOM (Higher Order Mode, 高次高調波) カップラー
- エミッタンス増大を起こさない加速器の設計とその実現

というようなことがある [1]。リニアコライダー用の空洞開発の経験からは、30 MV/m の加速勾配の達成は十分可能であると報告されているが、加速勾配を 15 MV/m 程度に下げて、位相や加速勾配などの運転パラメタの自由度を確保した方が、低エミッタンスを実現する上で有利と考えられる。cERL の運転では、加速勾配 3 MV/m ∼ 7.1 MV/m 程度で入射器超伝導空洞は運転されている。

ERL 入射器内でのビームダイナミクスを考えたとき、RF 空洞は射影エミッタンスへの影響を与える要素の一つである。セクション 4.4 で紹介するように、RF 電磁場によってバンチ化されたビームの射影エミッタンスの増大が引き起こされる可能性がある。また、RF 電磁場の非線形性によってもエミッタンスの増大が引き起こされる。入射器空洞の RF 電磁場によるこれらの影響を極力抑えるために、空洞の運転パラメタである加速勾配と位相の調整が必要である。これが、最大加速勾配を下げても、自由度を確保した方が良いと考える理由である。

現実には、RF 電磁場による影響は、空洞に入ってくるビームの初期条件（分布やタイミング）によって影響され、また 3 台の加速空洞を調整する必要があるため、最適化すべきパラメタの数が多くなる。このため、パラメタ調整は計算機シミュレーションによって、入射器全体のパラメタに対して行われる。

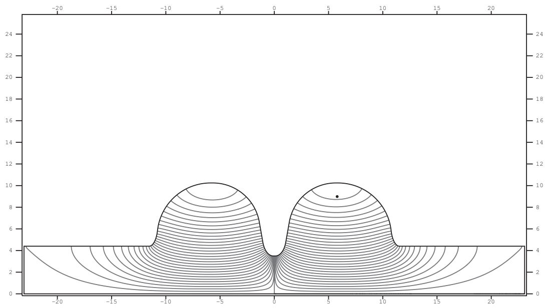


図 25: 2 セル空洞からなる入射器超伝導加速空洞の断面形状。横軸は z 軸、縦軸は x 軸を表す。図は、z 軸周りに円筒対称性がある場合の断面の半分を示す。

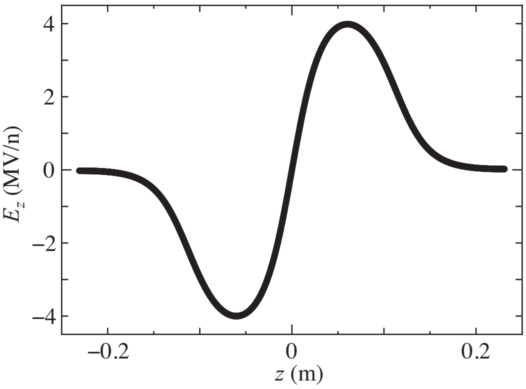


図 26: 入射器超伝導加速空洞 (図 25) が z 軸上に作る加速電場 E_{z}。z 軸周りの円筒対称性があるため、z 軸上では E_z 成分のみとなり、E_r および E_θ はゼロとなる。

図 25 に cERL 用の入射器加速空洞の断面図を示す。加速空洞は、2 つのセルを持つ。図 26 に、z 軸上での加速電場 $E_{z0}(z)$ を示す。この $E_{z0}(z)$ を用いると、バンチャー空洞の場合と同様に、電磁場の分布は式 (2.8)、(2.9)、(2.10) によって表される。

バンチャー空洞の場合と同様に、入射器超伝導空洞の影響を視覚的に見るために、粒子トラッキング計算を行った。図 27 に示すようにバンチの中心と中心から進行方向 (z 方向) に ±5.3 mm の位置 (先端と後端) に電子を配置し、トラッキング計算を行った。電子は z 方向に進行するとし、250 keV の初期運動エネルギーを持つと仮定した。計算では、最大加速電場 10 MV/m、位相は最大加速位相とした。図 28 に示すように、電子は加速空洞内で横方向の力を受ける。また、バンチ前後で横方向に受ける力の大きさが異なる。バンチの先端は発散力を受け、後端は収束力を受けることがわかる。図 29 に横方向位相空間 (x-β_x

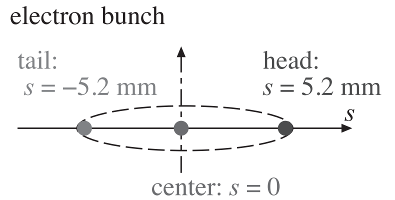


図 27: バンチの中心と、中心から進行方向 (z 方向) に ±5.2 mm の位置 (先端と後端) に電子を配置。

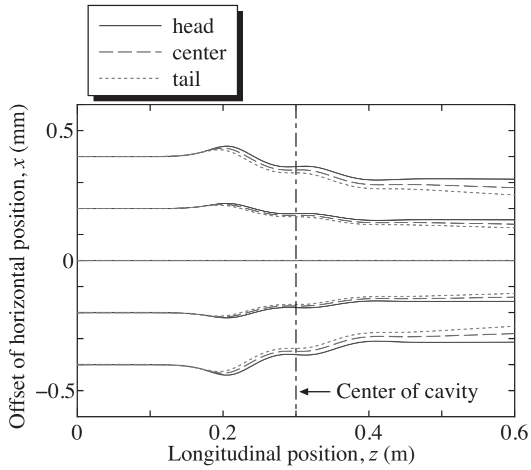


図 28: 2-cell 入射器超伝導空洞による電子の軌道変化。図 27 に示した初期粒子をトラッキングした。

空間) の軌跡の変化を示す。入射器超伝導空洞出口において、バンチ先端、中心、後端におかれた電子が作る直線を見ると、それぞれ傾きが異なっていることがわかる。これが射影エミッタンスを変化させる原因となる。この効果をうまく使うことで、空間電荷効果によってずれた位相空間分布を補償することができる。

2.7　4 極電磁石によるマッチング部

ERL 入射器では、入射器用加速空洞の後に、ビーム光学関数調整用に複数の 4 極電磁石が設置される。この部分をマッチング部と呼ぶ。cERL では、5 台の 4 極電磁石が設置されている。これらの 4 極電磁石の役割は、ビームサイズを調整するためだけなく、この後に続く合流部での分散関数とエネルギー拡がりによる射影エミッタンスの増大を避けるために、ビーム光学関数を調整することである。

電子銃から加速空洞までは、基本的に円筒対称性を持つ要素であったが、4 極電磁石は円筒対称性をもっていない。従って、マッチング部ではビームの円筒対称性が崩れることになる。

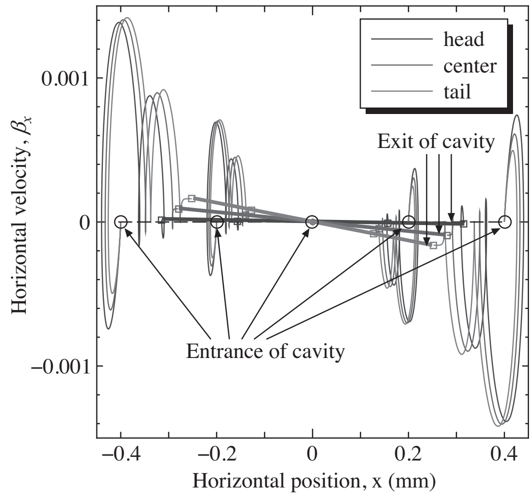


図 29: 2-cell 入射器超伝導空洞による横方向位相空間 (x-β_x 空間) の軌跡の変化。図 27 に示した初期粒子をトラッキングした。

2.8 合流部

合流部は、ERL 入射器からの低エネルギービームを、周回部からきた高エネルギービームと合流させる部分である。合流部は、一般に 3 つあるいは 4 つの偏向電磁石から構成される [20]。図 30 にコーネル大学 ERL 計画での合流部のレイアウトを示す。3 つの偏向電磁石と 2 つの 4 極電磁石から構成される。4 極電磁石は、合流部出口で分散関数がゼロとなるように調整される。また、4 極電磁石を含まない形式の合流部では、偏向電磁石の端の形状を調整し、そこでの収束力を利用して分散関数をゼロにするように設計される [1]。図 31 に、cERL 設計の初期に検討されていた合流部での分散関数を示す。ERL の合流部では、図 30 の合流部とは違い 4 極電磁石は含まれていない。その代わり、偏向電磁石の端部の形状を調整し、出口で分散関数をゼロにしている。

合流部で問題となる物理現象は、縦方向空間電荷力とコヒーレント輻射 (Coherent Synchrotron Radiation, CSR) によるエネルギー拡がりの増大である。分散関数がゼロでない部分でエネルギー拡がりが増大すると、分散関数を通して射影エミッタンスの増大が引き起こされる。しかし、縦方向空間電荷力、あるいは CSR による射影エミッタンスの増大は、合流部手前のマッチング部でビーム光学関数を調整することにより、最小に抑えることが可能であることが示されている [21,22]。

基本的に、合流部はその内部に 4 極電磁石を設置し

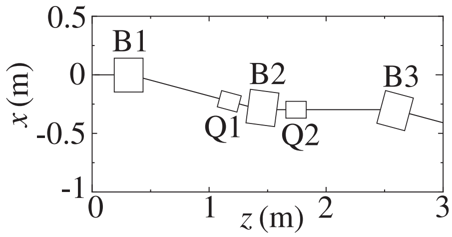


図 30: コーネル大学 ERL 計画の合流部のレイアウト。矩形偏向電磁石 3 台と、4 極電磁石 2 台から構成される。

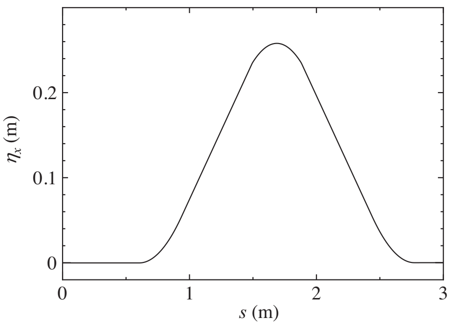


図 31: cERL 設計初期段階の合流部での分散関数 (4 極電磁石を含まない場合)。合流部出口で分散関数がゼロになるように、偏向電磁石の端部形状が調整されている。

ない限り、一度設計してしまうと自由に調整できるパラメタがない。このため、合流部から下流でのビームの質は、合流部手前のマッチング部のパラメタによって左右される。

2.9 エネルギー回収を行う超伝導加速空洞

入射器から合流部を経て輸送された電子ビームを加速するための超伝導空洞をここでは主空洞あるいは主加速空洞と呼ぶ。主空洞の大きな役割は、入射ビームを加速させるとともに、周回して再び戻ってきたビームを減速することである。エネルギー収支を考えると、入射器超伝導空洞はビームを加速するための電力を投入し続けなければならないが、主空洞では最初に高周波電磁場を励起するための電力が必要となるが、一度エネルギー回収が成立すれば基本的にビームを加速するための電力を必要としない。これが、入射器超伝導空洞との大きな違いとなる。また、現状の cERL では主空洞は 2 台しか設置されていないが、GeV クラスの ERL では 100 台規模の主空洞が設置されることになる。ビームが主空洞の中心からずれた軌道を通

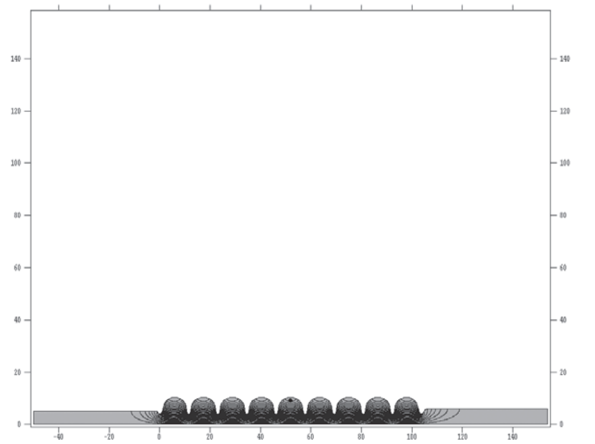


図 32: 9 セル空洞からなる入射器超伝導加速空洞の断面形状。横軸は z 軸、縦軸は x 軸を表す。図は、z 軸周りに円筒対称性がある場合の断面の半分を示す。

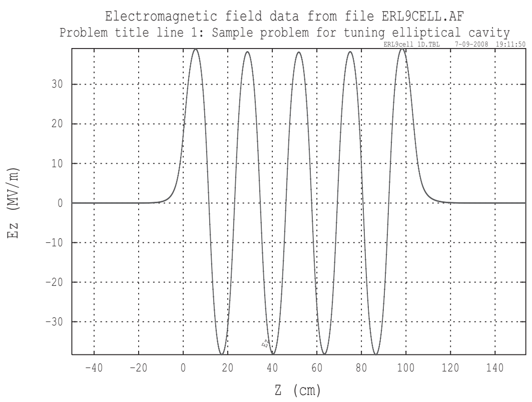


図 33: 主空洞 (図 25) が z 軸上に作る加速電場 E_z。z 軸周りの円筒対称性があるため、z 軸上では E_z 成分のみとなり、E_r および E_θ はゼロとなる。

るとき、空洞内にはビームを横方向にキックする高次高調波 (HOM) が発生することになる。このような高調波はビームのエミッタンスを悪化させたり、ビーム不安定性の原因となり、特に主加速空洞の台数の多い大規模な ERL では深刻な問題となる。主空洞の設計では、最大平均ビーム電流、主加速空洞の台数を考慮し、HOM の影響を抑えるような設計が重要となる。

図 32 に cERL 用の主空洞の断面図を示す。主空洞は、9 つのセルを持つ。図 33 に、z 軸上での加速電場 $E_{z0}(z)$ を示す。この $E_{z0}(z)$ を用いると、バンチャー空洞の場合と同様に、電磁場の分布は式 (2.8)、(2.9)、(2.10) によって表される。

2.10 周回部

周回部は主空洞で加速されたビームを輸送するとともに、エネルギー回収するために重要な周長補正やビーム利用に向けたバンチ圧縮等のビーム条件の制御を行うことが重要となる。

ここでは図 34 に示した cERL の概略図を用いて周回部の基本要素を紹介する。主空洞の下流にはダンプシケインが設置されるが、主空洞で加速されたビームはこのシケインを通過して第一アーク部に輸送される。第一アーク部ではバンチ圧縮を行うための輸送条件の調整や、あるいは周長補正が行われる。GeV クラスの ERL ではアーク部に放射光用ビームラインを設置して放射光利用が行われることになるが、cERL では第一アーク部下流の長直線部にビーム利用のための区間が設けられている。cERL の長直線部には、4 つの偏向電磁石で構成された周長補正シケインが設置される。この区間でのバンプの高さを調整することによって、ビームが主空洞に戻るタイミングを調整することができる [11]。cERL の周長補正シケイン下流には、レーザーと電子ビームを衝突させて X 線を発生させるための Laser Compton Scattering (LCS) 区間が設けられている [23]。この区間にはレーザーを蓄積するためのレーザー共振器が設置されている。レーザーと衝突させる際は、電子ビームは数 10 μm まで絞られる。長直線部の下流には、第二アーク部が設置される。第二アーク部では、圧縮されたバンチ長を復元するために、バンチ圧縮とは逆の過程のバンチ伸長が行われる。第二アーク部を取ったビームは、合流部シケインを通過して主空洞に再び戻ることになる。

エネルギー回収を行うためには、加速位相から 180 度ずらした位相に減速ビームを合わせる必要がある。このために、先ほど紹介したアーク部や周長補正を利用することになる。また、合流部シケインからダンプシケインの区間は入射ビームと減速ビームの 2 つのエネルギーの異なるビームが通過することになる。同じ区間をエネルギーの異なるビームが同時に通過するこの区間が ERL の特徴を表しているといえる。この区間の軌道調整は、基本的にエネルギーの低い側のビームに合わせて行うことになる。これは、エネルギーが高いビームは同じ磁場を通過してもその影響が弱くなるからである。

主空洞で減速されたビームは、ダンプシケインの最初の偏向電磁石によって強く曲げられ、ダンプライン

[11] 同様の周長補正をアーク部の軌道を変化させることでも行うことができる。

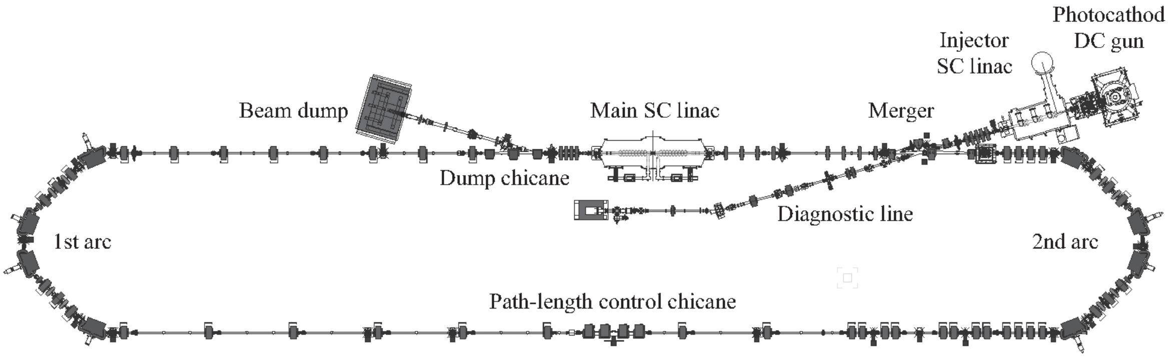


図 34: cERL の配置図。

に導かれることになる。

2.11　ビームダンプ

ダンプラインに輸送された減速ビームは、最終的にビームダンプに捨てられることになる。ここで重要となるのが、ある 1 箇所の集中した点にビームを捨て続けないということである。ビームダンプでは大平均電流のビームが捨てられ続けることになるため、その熱負荷を分散する必要があるためである。大電流ビームを捨てる際には、輸送路を調整してビームサイズをある程度広げるとともに、ビームダンプ上流に設置された軌道補正電磁石を時間変化させて、ビームが当たる位置を常に変化させることが必要である。

3　電子ビーム中の物理

荷電粒子からなるビームは、電磁場による相互作用を通して、さまざまな影響を受ける。ここでは、これらの相互作用を取り上げ、今回テーマとしているERL の電子ビームを支配する物理を紹介する。ただし、ビームの集団効果に起因するビーム不安定性については、ここでは触れない。それらについては、他の文献 [1,24] を参照して欲しい。

3.1　電磁場中の荷電粒子の運動方程式

ビームとは、単一の種類の粒子（電子や陽子など)、あるいは複数の種類の粒子が、ほぼ同じ速度を持って同一方向に進行する集団であると考えることができる。加速器中では、ビームは外部から加えられた電磁場から力を受けることになる。電磁場中での荷電粒子の運動の基本方程式は、Maxwell 方程式、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{3.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{J}, \tag{3.2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho, \tag{3.3}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{3.4}$$

$\boldsymbol{D}$ と$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ と$\boldsymbol{H}$ の関係式、

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \tag{3.5}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}, \tag{3.6}$$

電荷の連続の方程式、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \tag{3.7}$$

および運動方程式、

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \boldsymbol{\beta} c) = e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}), \tag{3.8}$$

である。加速器中での荷電粒子の運動を考えるときには、これらの運動方程式に外部から与えられた電磁場、あるいは荷電粒子間の相互作用など加えて、記述することができる。

3.2　ビームを支配する物理

ビームを支配する物理として、以下のようなことが考えれれる [25]。

1. 外部から加えた静電場・静磁場からの電磁力
2. 外部から加えた動電場・動磁場からの電磁力
3. 粒子間の Coulomb 相互作用（空間電荷効果）
4. ビーム自身が生成する電磁場（航跡場）
5. 偏向場による放射光の発生（放射減衰、CSR）
6. 放射光の量子化（放射励起）
7. 他のビームが作る電磁場（ビーム・ビーム相互作用）
8. 残留ガスとの散乱、イオン捕獲
9. 光電子による電子雲との相互作用

ERL 入射器で考慮すべき相互作用は、上記の物理から、ビーム・ビーム相互作用と光電子による電子雲との相互作用を除いたものである。ERL 入射器を設計する際に、まず重要となる相互作用は、これらの中でも、静電磁場による力、動電磁場による力、そして空間電荷効果の 3 つである。入射器ではビームのエネルギーが低いために、まずこれらの効果が支配的となる。より現実的な状況を考える場合には、航跡場やイオン捕獲の影響を導入する必要があるが、ERL 入射器の設計にあたっては、基本的に上記の 3 つの効果を考えれば良い。また、合流部での影響を考慮するときには、上記の 3 つの効果に加えて CSR による影響を考慮する必要がある。

現在放射光源として用いられている、GeV 程度のエネルギーの放射光ストレージリングでは、ERL 入射器とは異なり、通常空間電荷効果は無視され、多くの場合ビームは単粒子的に取り扱われる。では、どうして荷電粒子の集まりであるビームの中で、粒子間の Coulomb 相互作用を無視することが可能になるか？まずは、円筒対称性をもつ連続ビームを例にしてこのことを考えてみる。

3.3　空間電荷効果を無視できるビームエネルギー

粒子間の Coulomb 相互作用がビーム中ではどのようになるかを、次のような簡単なモデルに対して考える。z 方向に一様かつ連続なビームが、z 軸上を速度 v_z で移動しているとする (図 35)。ここで、ビームの断面は半径 r の円であると仮定する。また、電荷密度はビーム内で一様であるとする ($\rho_0 = \mathrm{const.}$)。このとき、ビームが作る電場、磁場も円筒対称性をもつ。

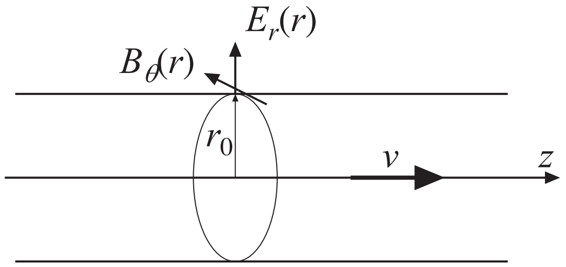


図 35: z 軸上を速度 v_z で移動する z 方向に一様かつ連続なビーム。ビームの断面は半径 r の円であるする。

さらに、z 軸方向の連続ビームとしたため、電場、磁場の z 方向成分は zero となり、E_r、B_ϕ のみが残る。Gauss の法則より、半径方向の電場は次のように与えられる。

$$E_r(r) = \frac{1}{2\varepsilon_0}\rho_0 r. \tag{3.9}$$

次に、Ampere の法則を用いて、円周方向の磁場成分を求める。電流密度は一様と仮定しているので、電流密度は次のように与えられる。

$$j = \rho_0 v. \tag{3.10}$$

これを用いると磁場は、

$$B_\phi = \frac{1}{2}\mu_0\rho_0 v r, \tag{3.11}$$

となる。このような E_r, B_ϕ 内での荷電粒子が受ける力は、Lorentz 力より次のように与えられる。

$$\begin{aligned} F_r &= e(E_r - vB_\phi) \\ &= e\left[\frac{1}{2\varepsilon_0}\rho_0 r - \frac{1}{2}\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\rho_0 v^2 r\right] \\ &= e\frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right] \\ &= \frac{1}{2}\frac{e}{\varepsilon_0}\frac{\rho_0}{\gamma^2}r. \end{aligned} \tag{3.12}$$

ここで、Lorentz 因子

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{3.13}$$

$\beta = v/c$、$c^2 = 1/(\varepsilon_0\mu_0)$ を用いた。式 (3.12) より、ビーム内の荷電粒子が受ける力は、$1/\gamma^2$ に依存することがわかる。高エネルギービーム、すなわち、γ が十分大きい場合には、ビーム内での Coulomb 相互作用を無視することができる。γ はビームの運動エネルギーを T とすると、

$$T = (\gamma - 1)mc^2, \tag{3.14}$$

と表される。またビーム全エネルギーは、

$$E = \gamma mc^2, \tag{3.15}$$

と表される。例えば T = 2.5 GeV の場合、$1/\gamma^2 = 4.2 \times 10^{-8}$ と十分小さい値となり、ビーム内での Coulomb 相互作用も小さくなることがわかる。一方、ERL 入射器では、$E_0 \sim 10$ MeV 程度であり、ビーム内での Coulomb 相互作用を無視することができない。

以上のように簡単なモデルから、空間電荷効果のエネルギー依存性を調べ、高エネルギービームの場合には、その影響が十分小さくなることを示した。このことから、GeV クラスの放射光貯蔵リング等では、空間効果電荷の影響を無視することができる。同様の結果は、ビームの静止系で Coulomb 力による電場を計算し、ビームが動いて見える実験室系に Lorentz 変換しても得られる。

空間電荷効果の影響がどの程度であるかを見る上では、セクション 5.1 で紹介するデバイ長を用いて、より詳細に議論する。

3.4 バンチ化されたビーム

ビーム (beam) には、光線といった意味や、建築物での梁という意味があり、連続して連なったものというイメージとなるようである。加速器でいうビームとは、単一の種類の粒子（電子や陽子など)、あるいは複数の種類の粒子が、ほぼ同じ速度を持って同一方向に進行する集団であると考えることができる。加速器でビームというときには、進行方向に集団で運動するということを指しているといえる。このため、粒子の分布が進行方向に一様に連続であるか、あるいは塊になっているかには関係なく、ビームという言葉を使っている。ERL での電子ビームは、進行方向に対してもある塊となっており、これをバンチと呼ぶ。本テキストでは、バンチ、あるいはバンチ化されたビームという表現を、粒子分布がある大きさを持っていることを強調するときに使う。セクション 5.3 で、空間電荷効果を含んだ相対論的な場合のビームエンベロープ方程式を求める際には、簡単のために、バンチ化されていない進行方向に一様なビームを考える。これに対して、射影エミッタンスの増減を考える際には、ビームエンベロープ方程式を拡張して、バンチ化された影響を電流分布の進行方向に対する依存性として取り入れる。進行方向に一様なビームとバンチ化されたビームを図 36 に示す。

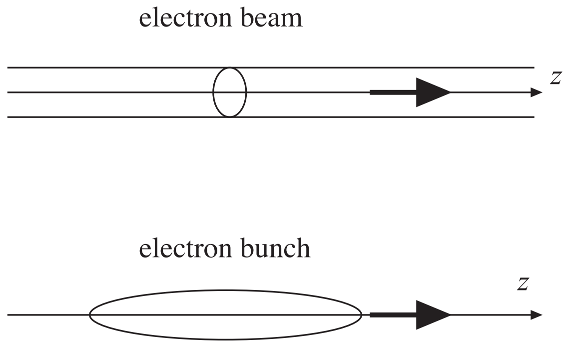


図 36: 一様連続ビーム (上図) と、バンチ化されたビーム (下図)。

ERL では短いパルス幅を持つ光を生成するために、バンチ長を短くすることが要求される。また、加速空洞でビームを加速する際には、ある程度短いバンチ長が必要とされる。これは、RF 電磁場による加速では、電磁場が時間とともに変化するため、バンチ長が有限である場合には、バンチ内での位置によってエネルギー差が生じるためである。入射器で要求されるエネルギー拡がりは、1 % 程度であるので、これを実現するためには、加速空洞に入る前にある程度バンチ長を短くしておく必要がある。このために、ERL 入射器では、電子銃と超伝導加速空洞の間に、バンチャー空洞を設置して、バンチ長を圧縮している。

3.5 ビームの性質を表すパラメタ

ビームは多数の粒子から構成されており、それらの性質は、6 次元位相空間での分布によって表現される。しかしながら、粒子数を N とすると、その分布は $6N$ 個の値を持つことになる。当然のことであるが、これらの位相空間の情報は非常に重要であり、ビームの性質を完全に表現しているが、実際にビーム同士の品質を比較する際には、幾つかのパラメタで表現できたほうが便利である。そこで、多くの場合 6 次元位相空間での分布から計算される、横方向のビームの rms サイズ、バンチ長、エミッタンス、エネルギー拡がり、ビーム光学関数などを用いる。ここでは、ビームの分布から、これらのパラメタの求め方を簡単に紹介する。

3.5.1 ビームサイズ、バンチ長

ビームの分布に対する物理量の平均を $\langle\rangle$ で表すとすると、横方向の rms ビームサイズ (σ_x, σ_y)、rms バンチ長 σ_z は、

$$\sigma_x^2 = \langle(x - \langle x\rangle)^2\rangle, \tag{3.16}$$

$$\sigma_y^2 = \langle(y - \langle y\rangle)^2\rangle, \tag{3.17}$$

$$\sigma_z^2 = \langle(z - \langle z\rangle)^2\rangle, \tag{3.18}$$

と表される。横方向のビームサイズは、現実の加速器では、スクリーンモニターやワイヤースキャナーなどによって測定される。バンチ長は、偏向 RF 空洞を用いて、バンチ長に横方向の速度変調を与え、自由空間を走らせた後に、スクリーンモニターで横方向の位置を測定することにより、測定することができる。このとき、時間方向の分布が RF 電磁場によるキックによって、横方向の分布に変換される。

3.5.2 エミッタンス

ビームの品質を表す重要なパラメタとして、エミッタンスがある。エミッタンスは、位相空間中でのビームの分布が占める面積により定義される。エミッタンスが小さいビームでは、ビームサイズが小さく、またその拡がりも小さいことなる。ここでは、位相空間での楕円分布の面積からエミッタンスを考え、その後に、現実の加速器で実際に測定される射影エミッタンスについて考える。

まずは、位相空間 (x, x') 上での分布が

$$ax^2 + 2bxx' + cx'^2 = 1, \tag{3.19}$$

で記述される楕円内で一様である場合を考える。ここで、a, b, c は楕円を記述するパラメタである。このとき、位相空間の面積は、

$$A_x = \frac{\pi}{(ac - b^2)^{1/2}}, \tag{3.20}$$

で与えられる。この面積よりエミッタンスは

$$\varepsilon_x = \frac{A_x}{\pi}, \tag{3.21}$$

と定義される。

Liouville の定理より、位置座標 x と力学的運動量 P_x とからなる位相空間での面積は、

$$\int\int dx dP_x = \text{const.} \tag{3.22}$$

というように不変量となる。このとき、位相空間 (x, x') での面積は、

$$A_x = \frac{1}{P}\int\int dx dP_x = \frac{1}{\gamma\beta mc}\int\int dx dP_x, \tag{3.23}$$

と表さる。Liouville の定理より $\int\int dxdP_x$ は一定であるので、A_x は $1/\gamma\beta$ に依存することがわかる。電子貯蔵リングのように、ビームのエネルギーが変化しない場合には ($\beta\gamma$ = const.)、A_x は一定、つまりエミッタンス ε_x は一定になる。しかし、ERL 入射器のように加速に伴いエネルギーが変化していく場合には、$\beta\gamma \neq$ const. であるので、エミッタンス ε_x は不変量とはならない。そこで、ERL 入射器などのエネルギーの変化する加速器では、エネルギーに依存しないエミッタンスを使用するのが便利である。これが、規格化エミッタンスであり、

$$\varepsilon_{nx} = \gamma\beta\varepsilon_x, \qquad (3.24)$$

と定義される。

位相空間での面積の代わりに、一般によく使用されるエミッタンスの定義に、rms エミッタンスがある。規格化 rms エミッタンスは、x, P_x の平均二乗偏差と結合項から、

$$\begin{aligned}\varepsilon_{n,x} &= \frac{1}{mc}\sqrt{\langle x^2\rangle\langle P_x^2\rangle - \langle xP_x\rangle^2} \\ &= \beta\gamma\sqrt{\langle x^2\rangle\langle x'^2\rangle - \langle xx'\rangle} = \beta\gamma\varepsilon_x,\end{aligned} \qquad (3.25)$$

と定義される。ここで、エミッタンスの式の中での $\langle x^2\rangle$ は平均二乗偏差を表しており、厳密に書けば、$\langle(x-\langle x\rangle)^2\rangle$ のことである。ここでは、エミッタンスの定義式内では、記述の簡単化のために上記のように記述するので、実際に計算する際には、適宜厳密な式に読み替えて欲しい。

Hamiltonian によって記述される系では、Liouville の定理が成り立ち、位相空間での粒子集団が占める面積は保存する。しかし、位相空間での面積が保存する場合でも、rms エミッタンスは保存しない場合があるので注意が必要である。Hamiltonian に非線形成分が含まれる場合には、位相空間での分布が捩れたりする。このとき面積は保存されるが、rms エミッタンスは増大する。rms エミッタンスが保存するのは、外力が線形でかつ他の方向との運動の結合がない場合である。

多くの場合、エミッタンスの定義として rms エミッタンスが用いられているが、実際に rms エミッタンスが放射光の品質へ与える影響がどうなるかを考える。電子ビームから放射光を発生させる場合、エミッタンスが小さい方が放射光の輝度が上昇することが知られている。これは、ビーム内の各々の電子が放射する放射光が小さくまとまっているほどよく干渉し、放射パワーが増大するということによる。仮に位相空間の面積が同じでも、分布が非線形効果などによって歪み、rms サイズ ($\sigma_x, \sigma_{x'}$) が増大している場合には、各電子からの放射光も拡がってしまい、放射パワーの減少を引き起こす。すなわち、位相空間での分布が歪んでいる場合、位相空間での面積が大きい場合と同様に放射光の質の低下を招く。このように、放射光源の輝度は rms エミッタンスで決まり、rms エミッタンスが小さいほど輝度が高くなる。このため、ビームの品質を表す尺度として、位相空間での面積で定義されたエミッタンスを用いるより、rms エミッタンスを用いた方が良い。

ここまでは、ビームは進行方向に対して一様であると考えてきた。ERL 入射器では電子ビームはバンチ化されているため、次にバンチ化されたビームのエミッタンスについて考える。バンチ化されたビームの場合、バンチを進行方向にスライスして、そのスライス毎の位相空間を考えることができる。すなわち、スライス毎にエミッタンスを定義することができる。これをスライスエミッタンスと呼ぶ。また、バンチ全体を進行方向に垂直な面に対して射影した位相空間も考えることができる。この位相空間から求められるエミッタンスを射影エミッタンスという。射影エミッタンスは、各スライスエミッタンスの重ね合わせになる。この射影エミッタンスが重要となるのは、RF 電磁場を通過した場合や、空間電荷効果の影響がある場合である。RF 電磁場を有限のバンチ長を持つビームが通過する場合、RF 電磁場が時間に依存するため、バンチスライスの位置によって受ける力が異なってくる。また、空間電荷効果がある場合には、バンチ中央と端の部分では電荷密度の違いにより、空間電荷効果による力が異なってくる。このような場合、バンチスライスの位置によって、位相空間での分布が変化する。すなわち、スライスによってエミッタンスが異なることになる。このとき、射影された位相空間では、各スライスの位相空間分布が一致しないため面積が増大する。つまり、射影エミッタンスの増大が生じる。図 37 にバンチ化されたビームについてのスライスエミッタンスと射影エミッタンスの関係を示す。スライスエミッタンスは、原理的に減少させることはできないが、射影エミッタンスは各スライスの位相空間分布を一致させることにより、減少させることが可能である。これが射影エミッタンスの補償である。空間電荷効果により増大した射影エミッタンスの補償方法については、セクション 6.2 でより詳細に検討する。

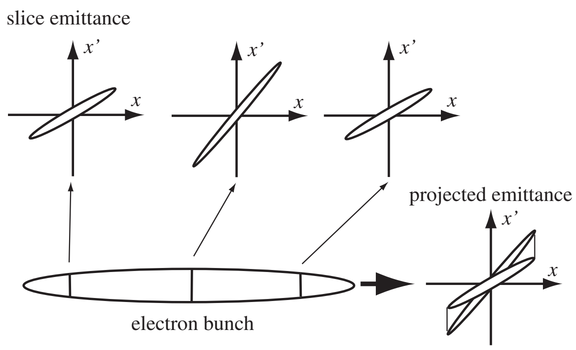


図 37: バンチ化されたビームでの射影エミッタンス。空間電荷効果や RF 電磁場などにより、スライスエミッタンスに不一致が生じているとき、射影エミッタンスは増大する。

3.5.3 エネルギー拡がり

ビーム内の粒子は、ほぼ同一のエネルギーを持っているが、全ての粒子が完全に同じエネルギーを持っているわけではない。すなわち、現実のビームはある有限のエネルギー拡がりを持ってる。ビーム内の粒子でエネルギー差がある場合には、磁場中で異なる軌道を描くことになり、これがさまざまな影響を引き起こす。例えば、ビーム内の粒子が有限のエネルギー差を持つ場合、偏向電磁石を通過すると軌道差が生じ、横方向の位置の差が生じる。このようなエネルギー差によって生じる横方向のずれの大きさを表す関数が、分散関数である。分散関数がゼロでない箇所では、分散関数にエネルギー拡がりを掛けた分だけ、横方向の分布の拡がりが生じる。ERL 入射器では、エネルギー拡がりは、電子ビーム生成時に生じるものの他に、RF 空洞での動電磁場によって生じるもの、進行方向の空間電荷効果によって生じるものがある。

エネルギー拡がりは、ローレンツ因子 γ から

$$\delta = \frac{\sigma_E}{E_0} = \frac{\langle(\gamma - \langle\gamma\rangle)^2\rangle^{1/2}}{\langle\gamma\rangle}, \tag{3.26}$$

と計算される。ここで、σ_E は rms エネルギー拡がり、E_0 はエネルギーの平均で $E_0 = mc^2\langle\gamma\rangle$ である。

3.5.4 ビーム光学関数

粒子分布からビーム光学関数 (Courant-Synder Parameters) $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$ は、次のように計算される。粒子の平均位置からのずれ、

$$x_c = x - \langle x\rangle, \tag{3.27}$$

$$x'_c = \beta_x - \langle\beta_x\rangle, \tag{3.28}$$

を用いるとエミッタンス項は

$$\varepsilon_{xc} = \sqrt{\langle x_c^2\rangle\langle x_c'^2\rangle - \langle x_c x'_c\rangle^2}, \tag{3.29}$$

と計算される。これを用いるとビーム光学関数は、

$$\hat{\alpha}_x = -\frac{\langle x_c x'_c\rangle}{\varepsilon_{xc}}, \tag{3.30}$$

$$\hat{\beta}_x = \frac{\langle\beta_z\rangle\langle x_c^2\rangle}{\varepsilon_{xc}}, \tag{3.31}$$

$$\hat{\gamma}_x = \frac{\langle x_c'^2\rangle}{\varepsilon_{xc}\langle\beta_z\rangle}, \tag{3.32}$$

と表される。y についても同様に計算することができる。ここで、規格化された粒子速度 β、Lorentz 因子 γ と、ビーム光学関数の "β"、"γ" を区別するために、ビーム光学関数には ^ をつけた。これらを用いることで、粒子トラッキングコードを用いて ERL 入射器のシミュレーションを行った後に、最後の粒子分布からビーム光学関数を計算することができる。これらを用いて、ERL 周回部でのビーム光学関数計算の初期値とすることができる。

4　相対論的なビームの単粒子的取り扱い

ここでは、相対論的なビームに対して、ソレノイドやRF電磁場によるビームに対する収束作用を示すために、空間電荷効果がない場合の運動方程式を導出する。簡単のために、ビームはバンチ化されておらず、進行方向に対して一様であるとしている。また、ここで求めるビームエンベロープ方程式はセクション6.1で紹介する、空間電荷効果による射影エミッタンスの変化を概観するための基礎となる。

4.1　運動方程式の導出

ここでは、荷電粒子の集団の運動を論じる前に、ビームを構成する個別の荷電粒子の運動を考える。荷電粒子は、相対論的な速度を持つとして、近軸光線近似を用いて運動方程式を導出する。対象とする系は、z 軸に沿って円筒対称性をもつとする。このとき、粒子の運動は円筒座標系で $(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}, z, \dot{z})$ によって表すことができる。ここで、$\dot{}$ は時間による微分 d/dt を表し、$'$ は z による微分 $\partial/\partial z$ を表すものとする。粒子は相対論的な速度をもって、z 軸上を進行するものとする。

運動方程式を求めるにあたって、近軸光線近似を用いることにする。まず、次のような仮定を導入する、

1. r は外部磁場を作るコイルや鉄心の径に比べて十分小さい
2. r' も十分に小さい $(r' \ll 1)$
3. v_θ も十分に小さい $(r\dot{\theta} \ll \dot{z})$

すなわち、荷電粒子は対称軸である z 軸の近くを変動すると仮定する。この仮定の下では、外部電磁場の高次の項を無視することが可能となる。

z 軸近傍で、外部電場による静電ポテンシャルは次のように展開できる。

$$\phi(r,z) = V - \frac{1}{4}V''r^2 + \frac{1}{64}V^{(4)}r^4 - \cdots. \tag{4.1}$$

ここで、$V(z)$ は z 軸上のポテンシャルで

$$V(z) = \phi(0,z), \tag{4.2}$$

で表される。このとき、進行方向および半径方向の電場は、

$$E_z(r,z) = -\frac{\partial\phi}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial z} = -V', \tag{4.3}$$

$$E_r(r,z) = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1}{2}V''r, = -\frac{r}{2}\frac{\partial E_z}{\partial z}, \tag{4.4}$$

となる。同様にして、磁場のポテンシャル $\phi_m(r,z)$ が

$$\phi_m(r,z) = \phi_m(0,z) - \frac{1}{4}\phi_m''(0,z)r^2 + \frac{1}{64}\phi_m^{(4)}(0,z)r^4 - \cdots, \tag{4.5}$$

と展開されるとすると、1次の項を残し $\phi_m' = -B$ とすると、磁場は次のようになる。

$$B_z(r,z) = -\frac{\partial\phi_m}{\partial z} = B, \tag{4.6}$$

$$B_r(r,z) = -\frac{\partial\phi_m}{\partial r} = -\frac{1}{2}B'r. \tag{4.7}$$

円周方向の電場、磁場は、円筒対称性の仮定より、$E_\theta = 0$、$B_\theta = 0$ である。

次に電磁場中での荷電粒子の運動を考える。運動方程式は、式 (3.8) から、

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \gamma m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + m\boldsymbol{v}\frac{d\gamma}{dt} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}), \tag{4.8}$$

で与えられる。この運動方程式は、円筒座標系 (r,θ,z) の場合には、

$$\frac{d}{dt}(\gamma m\dot{r}) - \gamma mr\dot{\theta}^2 = q(E_r + r\dot{\theta}B_z - \dot{z}B_\theta), \tag{4.9}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(\gamma mr^2\dot{\theta}) = q(E_\theta + \dot{z}B_r - \dot{r}B_z), \tag{4.10}$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma m\dot{z}) = q(E_z + \dot{r}B_\theta - r\dot{\theta}B_r), \tag{4.11}$$

となる。これに円筒対称性がある場合の E と B を代入すると、

$$m\frac{d}{dt}(\gamma\dot{r}) - m\gamma r\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}qV''r + qr\dot{\theta}B, \tag{4.12}$$

$$m\frac{d}{dt}(\gamma r^2\dot{\theta}) = -\frac{1}{2}q\dot{z}B'r^2 - r\dot{r}B, \tag{4.13}$$

$$m\frac{d}{dt}(\gamma\dot{z}) = -qV' + \frac{q}{2}r^2\dot{\theta}B', \tag{4.14}$$

となる。式 (4.12) の中の $\dot{\theta}$ は、式 (4.13) から決まるが、ここでは式 (4.13) の代わりに、系に円筒対称性があると仮定して、正準運動量の保存則から求めることにする。電磁場中での荷電粒子の Hamiltonian は、

$$H = c\sqrt{m^2c^2 + (\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})} + q\phi - mc^2, \tag{4.15}$$

と表される。ここで、$\boldsymbol{A}$ はベクトルポテンシャル、$\boldsymbol{P}$ は力学的運動量、$\boldsymbol{p}$ は正準運動量で、$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{P} + q\boldsymbol{A}$ である。ϕ と $\boldsymbol{A}$ が円筒対称性を持つ場合、Hamiltonian も同様の対称性を持つ。従って、Hamiltonian 方程式より

$$\frac{dp_\theta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial\theta} = 0, \tag{4.16}$$

となり、p_θ は保存量となる。

$$p_\theta = \gamma m r^2 \dot{\theta} + q r A_\theta = \text{const.} \tag{4.17}$$

磁束 $\Psi = \int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}$ を用いると、

$$\Psi = \int (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot d\boldsymbol{S} = \oint \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l} = 2\pi r A_\theta, \tag{4.18}$$

より、この Ψ を用いると、$A_\theta = \Psi/(2\pi r)$ となる。また、z 軸の近傍で $B_z(r,z) \simeq B_z(0,z) = B$ とすると、z 軸近傍の半径 r の円筒断面を貫く磁束は、

$$\Psi = \pi r^2 B, \tag{4.19}$$

と書ける。A_θ の代わりに B を用いると、保存則は、

$$p_\theta = \gamma m r^2 \dot{\theta} + \frac{q}{2} B r^2 = \text{const.} \tag{4.20}$$

となる。このとき、$\dot{\theta}$ は

$$\dot{\theta} = -\frac{qB}{2\gamma m} + \frac{p_\theta}{\gamma m r^2}, \tag{4.21}$$

あるいは、$\dot{z} = dz/dt \simeq \beta c$ として、

$$\theta' = \frac{d\theta}{dz} = \dot{\theta}\frac{dt}{dz} \simeq -\frac{qB}{2\gamma m \beta c} + \frac{p_\theta}{mc\beta\gamma r^2}, \tag{4.22}$$

となる。ここで考えている系に円筒対称性がある場合、円周方向の正準運動量は保存量となり、その値は式 (4.20) より、粒子位置 r、$\dot{\theta}$、γ そして B の初期値によって決まる。粒子が自由空間 ($B=0$) から出発する場合には、$p_\theta = \gamma m r^2 \dot{\theta}$ となる。さらに、円周方向の初期速度がゼロ ($\dot{\theta} = 0$) の場合には、$p_\theta = 0$ となる。

次に、z 方向の運動方程式 (4.14) から γ とポテンシャル V の関係を導く。$\dot{z} \simeq v = \beta c$ ($v_\theta = r\theta' \ll v$) とすると、式 (4.14) の右辺第 2 項を無視することができ、

$$m\frac{d}{dt}(\gamma \dot{z}) = -qV', \tag{4.23}$$

となる。つぎに左辺を計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\gamma \dot{z}) &= \frac{dz}{dt}\frac{d}{dz}(\gamma \dot{z}) \\ &= v(\gamma' v + \gamma v') \\ &= c^2(\gamma' \beta^2 + \gamma \beta' \beta), \end{aligned} \tag{4.24}$$

となる。ここで、$\beta' \simeq 0$、および $\beta \simeq 1$ とすると、

$$\frac{d}{dt}(\gamma \dot{z}) = c^2 \gamma', \tag{4.25}$$

と求まる。これより、式 (4.23) は、

$$mc^2 \gamma' = -qV', \tag{4.26}$$

あるいは、

$$\frac{d}{dt}(mc^2\gamma + qV) = 0, \tag{4.27}$$

となる。式 (4.27) を積分すると、

$$mc^2\gamma + qV = \text{const.} \tag{4.28}$$

となり、積分は定数となる。この定数に mc^2 を付け加えると

$$(\gamma - 1)mc^2 + qV = T + U = \text{const.} \tag{4.29}$$

となり、これはエネルギー保存則を示していることがわかる。ここで、T は運動エネルギー、U はポテンシャルエネルギーである。$T = 0$、つまり $\gamma = 1$ のとき $V = 0$ とすると、定数はゼロとなり、

$$(\gamma - 1)mc^2 + qV = 0, \tag{4.30}$$

となる。このとき γ は

$$\gamma = 1 - \frac{qV(z)}{mc^2} = 1 + \frac{|qV(z)|}{mc^2}, \tag{4.31}$$

と表される。

円周方向の正準運動量の保存から求めた式 (4.21) の $\dot{\theta}$ を r 方向の運動方程式 (4.12) に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\gamma \dot{r}) &= \frac{q}{2m}V'' r + \frac{r\dot{\theta}}{m}(m\gamma\dot{\theta} + qB) \\ &= \frac{q}{2m}V'' r - \frac{1}{4\gamma}\left(\frac{qB}{m}\right)^2 + \frac{p_\theta^2}{\gamma m^2 r^3}, \end{aligned} \tag{4.32}$$

となる。左辺の微分を計算すると、

$$\frac{d}{dt}(\gamma \dot{r}) = \dot{\gamma}\dot{r} + \gamma \ddot{r}, \tag{4.33}$$

となる。左辺の γ と r の微分は、

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \frac{dz}{dt}\frac{d\gamma}{dz} = \gamma' \beta c, \\ \dot{r} &= \frac{dz}{dt}\frac{dr}{dz} = r' \beta c, \\ \ddot{r} &= \frac{d}{dt}(r'\beta c) = r''\beta^2 c^2 + r'\frac{\gamma'}{\gamma^3}c^2, \end{aligned} \tag{4.34}$$

となる。ここで、$\gamma'/\gamma^3 = \beta\beta'$ を用いた。これを用いると、式 (4.33) は、

$$\frac{d}{dt}(\gamma \dot{r}) = c^2(\gamma \beta^2 r'' + \gamma' r'), \tag{4.35}$$

となる。これより、r 方向の運動方程式 (4.32) は、

$$\begin{aligned} c^2(\gamma\beta^2 r'' + \gamma' r') = & \frac{q}{2m}V'' r - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{qB}{2m}\right)^2 r \\ & + \frac{p_\theta^2}{\gamma m^2}\frac{1}{r^3}, \end{aligned} \tag{4.36}$$

となる。この式は V'' の項を含むが、エネルギー保存則から求めた式 (4.31) を用いることより、

$$qV'' = -mc^2\gamma'', \qquad (4.37)$$

と、γ'' を用いて表すことができる。式 (4.36) にこの V'' を代入して整理したものが、ここで求めたかった相対論的な粒子に対する近軸光線近似のもとでの運動方程式

$$r'' + \frac{\gamma'}{\gamma\beta^2}r' + \frac{\gamma''}{2\gamma\beta^2}r + \left(\frac{qB}{2mc\beta\gamma}\right)r - \frac{p_\theta^2}{m^2c^2\gamma^2\beta^2}\frac{1}{r^3} = 0, \qquad (4.38)$$

である。左辺第 2 項は断熱項、第 3 項は加速電場による収束の項、第 4 項はソレノイドによる収束の項、そして第 5 項は円周方向運動量による項である。

以上のように、ここでは近軸光線近似を用いて、相対論的な速度を持つ 1 粒子の運動方程式を導いた。実際のビームは粒子分布を持つため、その運動を考える際には粒子分布による影響を考慮する必要がある。ビームの集団としての運動を考える場合、個別の粒子の座標を全て記述するのではなく、粒子分布に対する rms ビームサイズの変化を考える方が便利である。横方向のビームの運動は、ビームエンベロープと呼ばれるビームの大きさを記述する包絡関数によって記述することができる。ビームエンベロープの時間発展を記述する方程式をビームエンベロープ方程式と呼ぶ。ビームが半径 r_m の円形断面をもち、電荷密度はビーム内で一様で、ビーム内の各粒子の軌道は交差しないと仮定すると、ビームサイズの変化 $r_m(z)$ は、式 (4.38) の中の r を r_m で置き換えたビームエンベロープ方程式で表される。しかし、この式では、位相空間中での粒子分布による影響が考慮されていない。ビームが有限なエミッタンスを持つ場合、ビームエンベロープ方程式にエミッタンスによる増大を表す項を追加する必要がある。次に、ビーム粒子の分布が位相空間上で楕円形状を持つとして、ビームエンベロープ関数とエミッタンスの関係式を導出する。

4.2 エミッタンス項

横方向の位相空間上 $(r, r' = dr/dz)$ で粒子分布が楕円形状を持つ場合、その楕円は係数 a、b、c を用いて次のように表すことができる。

$$ar^2 + 2brr' + cr'^2 = 1, \qquad (4.39)$$

このとき位相空間の面積は、

$$A = \varepsilon\pi = \frac{\pi}{(ac - b^2)^{1/2}}, \qquad (4.40)$$

と表される。ここで、$\varepsilon = 1/(ac - b^2)^{1/2}$ はエミッタンスである。次のような楕円の係数からなる行列

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\varepsilon^2}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}, \qquad (4.41)$$

を用いると、楕円の式 (4.40) は

$$^t\boldsymbol{r}\bar{\sigma}^{-1}\boldsymbol{r} = 1, \qquad (4.42)$$

と表される。ここで、

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix}, \qquad {}^t\boldsymbol{r} = (r, r'),$$

である。行列 $\bar{\sigma}$ は、r と r' についての二乗偏差から構成される σ 行列と

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_r^2 & \sigma_{rr'} \\ \sigma_{r'r} & \sigma r'^2 \end{pmatrix} = \varepsilon^4\bar{\sigma}, \qquad (4.43)$$

という関係がある。規格化された粒子分布密度 $\rho(r, r')$ $(\int \rho drdr' = 1)$ を用いると、

$$\sigma_r^2 = \int \rho(r - \langle r\rangle)^2 drdr', \qquad (4.44)$$

$$\sigma_{r'}^2 = \int \rho(r' - \langle r'\rangle)^2 drdr', \qquad (4.45)$$

$$\sigma_{rr'} = \int \rho(r - \langle r\rangle)\rho(r' - \langle r'\rangle) drdr', \qquad (4.46)$$

である。ここで、

$$\langle r\rangle = \int \rho r drdr', \qquad (4.47)$$

$$\langle r'\rangle = \int \rho r' drdr', \qquad (4.48)$$

とした。

簡単のために、電磁場による収束作用のない自由空間での、エミッタンスによるビームエンベロープの変化を考える。(r_1, r_1') を持つ粒子が、長さ z の自由空間を進んだとき、出口での座標は、自由空間での転送行列、

$$M = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (4.49)$$

を用いて、

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r_2' \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} r_1 \\ r_1' \end{pmatrix}, \qquad (4.50)$$

と表される。この転送行列を用いて、自由空間を進んだときの楕円分布のパラメタ (a, b, c) の変化を求める。転送行列 M に対して、行列 $\bar{\sigma}$ は、

$$\bar{\sigma_2} = M \bar{\sigma_1} {}^t M, \tag{4.51}$$

のように転送される。ここで、$\bar{\sigma_1}$ は M の入口での値、$\bar{\sigma_2}$ は出口での値である。自由空間入口のパラメタ

$$\bar{\sigma_1} = \frac{1}{\varepsilon^2} \begin{pmatrix} c_1 & -b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}, \tag{4.52}$$

から、自由空間出口のパラメタは、転送行列を用いて、

$$\begin{aligned} \bar{\sigma_2} &= \frac{1}{\varepsilon^2} \begin{pmatrix} c_2 & -b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & -b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \begin{pmatrix} c_1 - b_1 z + z(a_1 z - b_1) & a_1 z - b_1 \\ a_1 z - b_1 & a_1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{4.53}$$

と表すされる。これより、長さ z の自由空間では、楕円分布のパラメタは

$$a_2 = a_1, \tag{4.54}$$

$$b_2 = b_1 - a_1 z, \tag{4.55}$$

$$c_2 = a_1 z^2 - 2 b_1 z + c_1, \tag{4.56}$$

と転送される。これらのパラメタを用いて、ビームエンベロープの変化を計算する。自由空間出口でのビーム半径の最大値は、

$$R_2 = \sigma_{r,2} = \varepsilon \sqrt{c_2}, \tag{4.57}$$

と表される。これを 1 回微分すると、

$$R_2' = \frac{dR_2}{dz} = \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{\sqrt{c_2}} c_2', \tag{4.58}$$

となる。式 (4.56) を 1 回微分した $c_2' = 2(b_1 - a_1 z) = -2b_1$ を用いると、

$$R_2' = \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{\sqrt{c_2}} c_2' = -\frac{\varepsilon b_2}{\sqrt{c_2}}, \tag{4.59}$$

と求まる。これをさらに微分すると、2 階微分は

$$\begin{aligned} R_2'' &= \frac{\varepsilon}{2} \left(-\frac{1}{2} c_2^{-3/2} c_2'^2 + c_2^{1/2} c_2'' \right) \\ &= \frac{\varepsilon^2}{R_2^3}, \end{aligned} \tag{4.60}$$

となる。これより、自由空間でのエミッタンスによるエンベロープの変化は、

$$R'' - \frac{\varepsilon^2}{R^3} = 0, \tag{4.61}$$

と表される。これがエミッタンスによる項であり、エミッタンスがゼロでない場合には、ビームエンベロープ方程式 (4.38) にこの項を付け加える必要がある。

4.3 ソレノイドによる収束作用

ここでは、ソレノイド電磁石による収束作用を考える。γ が一定とし、また初期の円周方向の運動量をゼロとする ($p_\theta = 0$)。ソレノイドの磁場を B とすると、近軸光線近似のもとでの粒子の運動方程式は、式 (4.38) より、

$$r'' + k^2(z) r = 0, \tag{4.62}$$

となる。ここで、

$$k^2(z) = \left(\frac{qB(z)}{2mc\beta\gamma} \right)^2, \tag{4.63}$$

とした。この運動方程式をソレノイドの入口 (z_1) から出口 (z_2) まで積分すると、入口と出口でのビームの傾きの差は、

$$r'(z_2) - r'(z_1) = -\int_{z_1}^{z_2} k^2(z) dz, \tag{4.64}$$

と計算される。k^2 は常に正であることから、粒子の軌道がソレノイド内で z 軸を横切らない ($r \geq 0$) とすると、$r'(z_2) - r'(z_1) < 0$ となる。つまり、$r'(z_2) < r'(z_1)$ となり、このときソレノイド出口での傾きは、入口での傾きに比べて小さくなり、ソレノイドは収束力を及ぼしているということを示している。式 (4.64) が示すように、この積分は k^2 の積分、つまり $B(z)^2$ についての積分であるため、ソレノイドは磁場の向きに関係なく収束力を及ぼすことになる。

ソレノイドによる収束のもう一つの特徴として、xy 空間での分布を収束とともに回転させるという効果がある。円周方向の時間発展は、式 (4.22) により表される。ソレノイドの入口で、$\theta = 0$、$p_\theta = 0$ として、θ' を積分すると、粒子はビームの出口で、

$$\theta_r = -\int_{z_1}^{z_2} \frac{qB(z)}{2mc\beta\gamma} = -\int_{z_1}^{z_2} k(z) dz, \tag{4.65}$$

だけ回転することになる。この積分は、B^2 ではなく B についての積分なので、回転方向は B の符号、つ

まり磁場の向きに依存する。このように、ソレノイドはビームに対して収束作用とともに xy 空間での回転を引き起こす。

ソレノイドによる収束作用の焦点距離 f は、

$$\frac{1}{f} = -\frac{r'}{r} = \left(\frac{q}{2mc\beta\gamma}\right)^2 \int_{z_1}^{z_2} B^2(z)dz, \qquad (4.66)$$

と定義される。ソレノイドの中心磁場の強さを B_0 として、有効磁場長、

$$L_{sol} = \frac{1}{B_0^2}\int_{z_1}^{z_2} B^2(z)dz, \qquad (4.67)$$

を用いると、焦点距離は、

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{q}{2mc\beta\gamma}\right)^2 L_{sol}B_0^2, \qquad (4.68)$$

と表され、B^2 の依存性を持つことがわかる。

4.4 動電磁場による収束発散作用

ERL 入射器での重要な物理として、RF 電磁場を利用した加速、バンチ化がある。これらは、マイクロ波を加速空洞内に導入して共振させ、空洞内に動電磁場を形成し、それらと電子ビームを相互作用さることによって行われる。これらの動電磁場は RF (Radio Frequency) 電磁場と呼ばれる。電子ビームを加速する際には、電子ビームが空洞を通過するときに、電磁場の頂点 (最大値を与えるとき) にタイミングを合わせる必要がある。また、電子ビームをバンチ化させる場合には、セクション 4.5 で説明するように、電磁場のゼロ点と交差するようなタイミングでバンチを通過させ、バンチの前後で速度差を生じさせる。

ここでは、ERL 入射器で重要となる横方向の運動に着目しているので、RF 電磁場による横方向の収束発散作用についてのみ紹介する。進行方向についてのビームダイナミクスについては、線形加速器の教科書や他の参考文献を参照して欲しい。

まず、RF 電磁場による横方向の収束発散作用を調べるために、一つの空洞があると仮定し、その空洞内に円筒対称性を持った定在波 (TM01 モード) が出来ているとする。その中を電子ビームが通過した際に、横方向にどのような影響が生じるかを考える。具体的には、RF 光陰極電子銃がそれにあたる。RF 光陰極電子銃の模式図を図 38 に示す。空洞内での z 軸上の電場の z 成分は、

$$E_z(z,t) = E_0(z)\cos(kz)\cos(\omega t), \qquad (4.69)$$

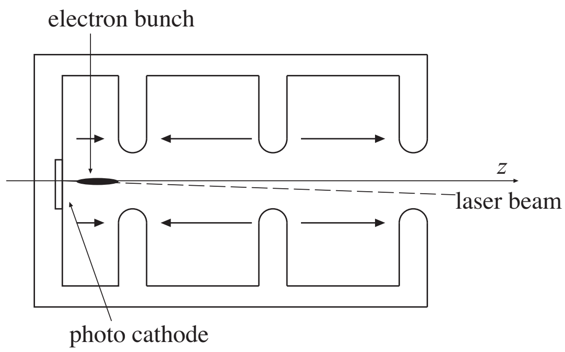


図 38: RF 光陰極電子銃の模式図。

ここで、ω は RF 電磁場の角振動数、k は波数で $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$、$\lambda$ は RF 電磁場の波長である。また、バンチの中心座標を z_0 とすると、位置 z にあるバンチ内の粒子の、バンチ中心からの相対位置は、$s = z - z_0$ で表される。電場の最大値 E_0 は、z の関数で空洞の入口、出口や口径が狭い部分以外では定数となり、また空洞外ではゼロとなる。ここでは、簡単のために、E_0 は定数であるとする。z 軸近傍では、式 (2.6) および式 (2.7) より、$E_r(z,t)$ および $B_\theta(z,t)$ は、

$$\begin{aligned} E_r(z,t) &= -\frac{r}{2}\left[\frac{\partial E_0}{\partial z}\cos(kz)\cos(\omega t)\right. \\ &\quad \left. - E_0\sin(kz)\cos(\omega t)\right], \qquad (4.70) \\ B_\theta(z,t) &= \frac{r\omega}{2c^2}E_0\cos(ks)\sin(\omega t), \qquad (4.71) \end{aligned}$$

と計算される。半径方向の運動方程式は、

$$\frac{dP_r}{dt} = q\left(E_r - vB_\theta\right), \qquad (4.72)$$

であるから、これに上記の E_r と B_θ を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{dP_r}{dt} &= -\frac{qr}{2}\left[\frac{\partial E_0}{\partial z}\cos(kz)\cos(\omega t)\right. \\ &\quad - E_0\sin(kz)\cos(\omega t) \\ &\quad \left. -\frac{\omega}{c}\beta E_0\cos(ks)\sin(\omega t)\right], \qquad (4.73) \end{aligned}$$

となる。ビーム粒子の RF 電磁場についての位相、

$$\varphi = \omega t - kz, \qquad (4.74)$$

を導入すると、

$$\begin{aligned} \frac{dP_r}{dt} &= \frac{r}{2}kqE_0\left[-\frac{1}{kE_0}\frac{\partial E_0}{\partial z}\cos(ks)\cos(ks+\varphi)\right. \\ &\quad +\frac{1}{2}(1+\beta)\sin(2ks+\varphi) \\ &\quad \left. -\frac{1}{2}(1-\beta)\sin(\varphi)\right], \qquad (4.75) \end{aligned}$$

となる。これより、半径方向の力は位相 φ に依存、すなわち、バンチ内での粒子の相対的な位置に依存して変化する。この式は、RF 電子銃に限らず、一般の RF 加速空洞に適用することができる。この横方向の収束発散の効果は、低エネルギーのイオン線形加速器や、高い加速勾配を持つ電子ビーム用入射器やバンチャー、RF 電子銃などで重要となる。ここで、ビームは電子ビーム $(q = e)$ であるとして、電子ビームは速やかに $\beta \simeq 1$ に加速されると考える。このとき、$\partial E_0/\partial z$ の項は、通常それほど重要ではないため、議論を簡単にするために、ここではこの項を省略する。これらの仮定の下では、半径方向の運動方程式を

$$\frac{dP_r}{dt} = \frac{r}{2} keE_0 \sin\varphi, \tag{4.76}$$

と近似することができる。これより、位相が $-\pi/2 < \varphi < 0$ の場合には、RF 電磁場による半径方向の力は、発散力となる。次に、この方程式を積分して、半径方向の運動量を求める。初期条件として、$z = 0$ で、$P_r = 0$ とし、また半径方向の粒子の位置は一定に保たれる $(r \simeq \mathrm{const.})$ とし、RF 空洞の入口から出口まで積分すると、半径方向の運動量 P_r は、

$$P_r = \frac{erE_0}{2c} \cos\varphi_1, \tag{4.77}$$

となる。ここで、φ_1 は空洞入口での粒子の位相である。

次に、この位相 φ_1 を、バンチの中心での位相 φ_{01} とその周りでの微小な位相 $\Delta\varphi$ で、

$$\varphi_1 = \varphi_{01} + \Delta\varphi, \tag{4.78}$$

と展開できるとする。このとき、微小な位相は $\Delta\varphi \simeq -k(z - z_0) = -ks$ と表すことができる。これを用いると、バンチ中心の粒子 (x, z_0) と、中心から s だけ離れた粒子 (x, z) の運動量の差は、

$$\Delta P_x = P_x(x, z) - P_z(x, s_0), \tag{4.79}$$

となる。ここで、後で定義する横方向の rms エミッタンスを x 方向に対して計算するために、r を x で置き換えた。式 (4.77) より、$0 < \varphi_0 < \pi/2$ のとき運動量の差は

$$\Delta P_x = \frac{eE_0 k}{2c} |\sin\varphi_{01}| xs, \tag{4.80}$$

と計算される。これより、x 方向の運動量の差は、横方向の位置 x と、バンチ中心からの進行方向の位置 s の積で表されることがわかる。s に依存するということは、すなわちバンチスライスによって、発散力が異なることを表しており、射影エミッタンスの増大を引き起こすことになる。バンチが位相空間内である分布を持つとし、ΔP_x と x、そして s についての二乗平均から RF 電磁場の発散作用によるエミッタンスの増大量を計算することができる。$\langle\rangle$ を粒子分布に対しての平均とすると、x 方向の規格化エミッタンスの増大量は、

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_{nx,rf} &= \frac{\left[\langle x^2\rangle\langle \Delta P_x^2\rangle - \langle x\Delta P_x\rangle^{1/2}\right]^2}{mc} \\ &= \frac{eE_0 k}{2mc^2}\sigma_x^2\sigma_z |\sin\varphi_{01}|,\end{aligned} \tag{4.81}$$

と計算される。ここで、$\sigma_x = \langle x^2\rangle^{1/2}$、$\sigma_z = \langle s^2\rangle^{1/2}$ とした。このように、バンチ中心での位相 φ_{01} によって、エミッタンスの増大が生じることが示された。

次に、横方向の運動量のバンチ中心からの距離 s に対する依存性から、上記の場合と同様にエミッタンスの変化を検討する。横方向の運動量 P_x は、

$$\begin{aligned}P_x(x, s) = P_x(0, 0) + \frac{\partial P_x}{\partial x} x + \frac{\partial P_x}{\partial z} z \\ + \frac{\partial^2 P_x}{\partial x \partial z} xz + \cdots,\end{aligned} \tag{4.82}$$

と展開することができるとする。このとき、右辺第 3 項は RF 電磁場によるキックを表し、第 4 項は収束発散作用を表す。図 39 に、位相空間中での RF 電磁場によるキックと収束発散作用の影響を示す。キックによる影響は、スライスによって位相空間での分布が P_x 方向に平行に移動することであるが、それに対して収束発散作用による影響は、粒子の位置 x にも依存する。キックの影響は、ビームラインの下流側でキャンセル可能であるのに対して、収束発散作用による影響は一般的にはキャンセルできないという大きな違いがある。キックと収束発散作用によるエミッタンスの増大は、

$$\Delta\varepsilon_{kick} = \frac{1}{mc}\left|\frac{\partial P_x}{\partial z}\right| \sigma_x\sigma_z, \tag{4.83}$$

$$\Delta\varepsilon_{focus} = \frac{1}{mc}\left|\frac{\partial^2 P_x}{\partial s \partial x}\right| \sigma_x^2\sigma_z, \tag{4.84}$$

と表すことができる。これらより、RF 空洞での規格化エミッタンスの増大は、

$$\varepsilon_{nx}^2 = \varepsilon_0^2 + (\Delta\varepsilon_{kick})^2 + (\Delta\varepsilon_{focus})^2, \tag{4.85}$$

とすることができる。ここで、ε_0 は RF 空洞入口でのエミッタンスである。

このように、ここでは簡単なモデルを用いて、RF 電磁場によって射影エミッタンスの増大が引き起こさ

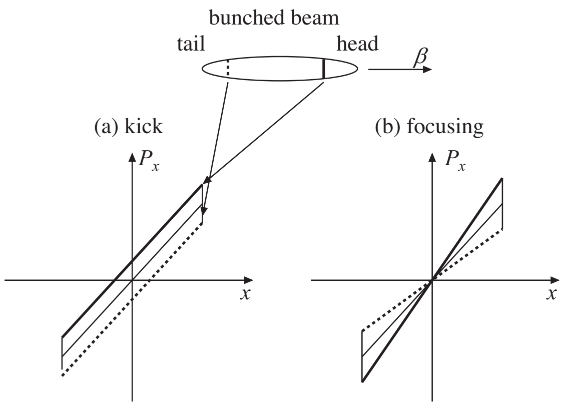


図 39: RF 電磁場によるキックと発散収束作用が位相空間分布に及ぼす影響。(a) キックによるスライスの変化、(b) 発散収束作用によるスライスの変化。

れることを見てきた。実際の ERL 入射器では、複数の RF 加速空洞が導入されるため、低いエミッタンスを持つビームを生成するためには、これらの位相や加速勾配を調整する必要がある。さらに、実際の加速電場の分布は一般に加速空洞の形状に依存し、また空間電荷効果の影響も考慮しなければならないため、これらの多数のパラメタを解析的に最適化するのは難しい。このため、通常は粒子トラッキングによるシミュレーションの繰り返しによるパラメタの最適化が行われる。

また、低エミッタンスビームを得る上で、RF 空洞の設置精度も重要である。設置誤差により、RF 電磁場の中心軸に対して、ビーム軌道のオフセットや傾きが生じるが、これらはエミッタンスの増大を引き起こす。実際の ERL 入射器では、これらの設置誤差についても考慮しなければならない。

4.5 バンチャーによるバンチ長の圧縮

ERL 入射器用の光陰極電子銃からは、パルス状のレーザーを用いて、バンチ化されたビームが取り出される。短いバンチ長を得るためには、レーザーのパルス幅を短くすれば良いが、実際には空間電荷効果があるため、生成直後のバンチ長は保存されない。特に、カソード近傍の電子ビームが生成された直後では、ビームのエネルギーが低いために、空間電荷効果によるバンチ長が引き伸ばされる効果が顕著に現れる。同じ電荷量のバンチを生成する場合、レーザーのパルスを短くすると、電荷密度が増大することになり、空間電荷効果がより強く現れることになる。このため、レーザーのパルス幅は、要求される電荷量、バンチ長、エミッタンスに合わせて最適な値にしなければならない。

電子銃で生成されたバンチは、空間電荷効果によって急激に増大するため、入射器の出口で短いバンチ長のビームを得るには、電子銃の後ろにバンチャー空洞を設置して、速度変調によってバンチ長を短くする必要がある。このようなバンチングの方法をドリフトバンチング (drift bunching)、あるいは速度バンチングという。また、もう一つのバンチングの方法として、磁場バンチングがある。これは、磁場中で運動量の異なる粒子は異なる軌道を取るという性質を用いている。バンチ内の粒子に適当な運動量の差を生じさせておけば、適切な磁場中の軌道を通してやることにより、ある地点でのバンチ長を短くすることが可能となる。このためには、運動量差を生じさせるための RF 電磁場、そして適切な軌道を形成するための電磁石系が必要となる。

この 2 つのバンチングの方法では、それぞれ次のような特徴がある。ドリフトバンチングの場合は、バンチ内の速度差が重要であるため、ビームのエネルギーが十分高い場合 ($\beta \sim c$) の場合には、十分な速度差が得られず、うまく機能させることが出来ない。このため、ドリフトバンチングはエネルギーの低い領域で用いられる。また、ドリフトバンチングの場合には、速度変調を与えるバンチャー空洞があればよいので、その装置はコンパクトになる。従って、ビームのエネルギーがまだ低いということ、そして小規模なシステムであるということで、入射器では主にドリフトバンチングが用いられている。磁場バンチングの場合には、運動量の差による磁場中での軌道長の変化を利用するため、ドリフトバンチングに比べると大規模なシステムとなる。しかし、速度変調を利用していないため、高いエネルギーのビームでもこの方法は有効である。ERL 周回部では、バンチ長を圧縮するために磁場バンチングが用いられる。運動量差は、主加速空洞によって与えられ、周回部のビーム光学関数を最適化することにより、挿入光源の位置でバンチ長を短くすることが可能である。

次にドリフトバンチングの概念について、簡単なモデルを用いてを紹介する。ERL 入射器ではあまり使われない磁場バンチングについては、他の文献を参照して欲しい。ドリフトバンチングでは、バンチに速度変調を与えるために、バンチャー空洞を通過させる。

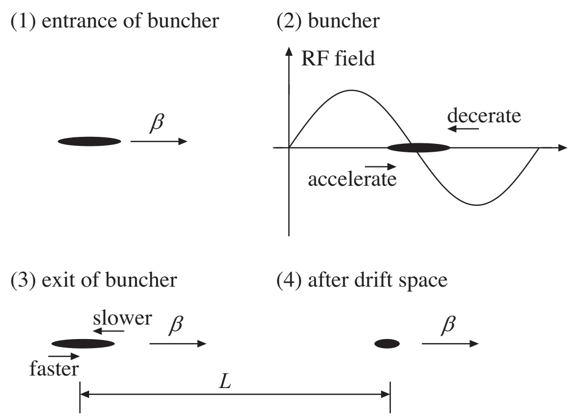


図 40: RF 電磁場によるバンチング。バンチ中心でRF 電磁場がゼロになるようにして、バンチに速度変調を掛ける。バンチ前方は減速され、バンチ後方は加速されるため、ある距離 L だけ自由空間を進行した後、バンチ長は最小になる。

バンチャー内での RF 電磁場を

$$E_z = E_0 \sin(\omega t), \tag{4.86}$$

とすると、図 40 に示すように、$\omega t = 0$ ときにバンチの中心が通過するようにする。このとき、バンチ中心より前にいる粒子は減速され、後ろにいる粒子は加速される。位相 ωt がゼロ近傍にあるとすると、E_z は次のように

$$E_z \sim E_0 \omega t, \tag{4.87}$$

と、ωt の 1 次の関数として展開することができる。バンチャー空洞通過後は、図 41 に示すように、(z, P_z) 位相空間中で、分布が傾くことになる。自由空間を通過するときは、P_z は変化せず、z のみが P_z に依存して変化する。適当な距離進行すると、図 41 に示すように、分布の空間的拡がり、つまりバンチ長は最小となる。このように、ドリフトバンチングにより、バンチ長を圧縮することが可能である。

以上のモデルでは、空洞内での電場が E_0 で一様であるとして簡単化したが、現実には、RF 電磁場の非線形性や、相対論的な効果により、速度変調は非線形となる。このため、自由空間を最適な距離進んだ後でも、バンチ長は有限に留まり、ゼロとはならない。また、上で説明したように、空間電荷効果によるバンチ長を引き伸ばす効果があるため、現実の入射器でのバンチ長の圧縮は複雑になり、解析的にバンチ長の最小値を予測するのは難しい。このため、入射器の設計では、空間電荷効果を含んだ数値計算コードを用いて、加速電場の強さや位相、加速空洞間の距離などの多数のパラメタを最適化する必要がある。

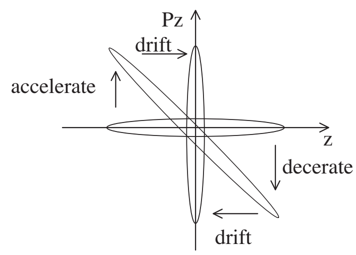


図 41: 進行方向の位相空間 (z, P_z) での RF 電磁場によるバンチング。バンチ入口で速度差のなかったビームが、バンチャーで速度変調を受け、その分布は傾く。自由空間では P_z は変化しないが、z はビームが進行するに従い変化する。自由空間をある距離進むと位相空間中での z の分布は最小になる。

5　空間電荷効果

ここでは、空間電荷効果の影響について紹介する。まずは、対象とするビームが空間電荷効果が重要な領域にあるか、あるいはエミッタンスによる効果が重要な領域あるかを判定するためのパラメタとして、Debye 長を導入する。その後、空間電荷効果による力が空間的に滑らかである場合について、セクション 4.1 で求めたビームエンベロープ方程式を拡張する。

5.1　空間電荷効果の分類

ビームは荷電粒子が集団でほぼ同じ速度で運動する状態である。荷電粒子間には当然ながら Coulomnb 相互作用が働き、同じ電荷符号の粒子間では斥力が働き、違う電荷符号の粒子間では引力が働く。ビームのように非常に多くの荷電粒子を含む場合には、離れた距離にある粒子集団からの相互作用の全体は空間的に滑らかな力として考えることができるが、この他に、近接粒子した粒子がいる場合には衝突的な力も考える必要がある。この状況をもう少し詳しく説明する。まず、ビームの静止系でビーム内の粒子の速度差が非相対論的であるとする。また、ビームは N 個の粒子からなり、各粒子は電荷 q を持つとする。このとき、粒子 j と粒子 i の距離を $\boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j$ とすると、粒子 j が粒子 i に及ぼす Coulomb 力は、

$$\boldsymbol{F}_{ij} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}_{ij}}{r_{ij}^3} \tag{5.1}$$

となり、粒子 i に対する全 Coulomb 力は、

$$\boldsymbol{F}_i = \sum_{j\neq i}^{N}\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}_{ij}}{r_{ij}^3} \tag{5.2}$$

と表される。Coulomb 力の性質として、ある程度粒子 i から距離が離れた粒子からの力も、$\boldsymbol{F}_i$ に寄与する。これら粒子からの多数の小さい力が集まることで、空間的に滑らかなポテンシャル $\phi_s(\boldsymbol{r}, t)$ が形成されるとみなすことができる。ただし、粒子 i に極めて近い距離にも幾つか粒子があることが考えられ、これらの力は粒子 i との位置関係に強く依存した衝突的な力となる。ここで、形式的に全 Coulomb 力を空間的に滑らかな項と衝突的な項に分けると、

$$\boldsymbol{F}_i = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\phi_s(\boldsymbol{r}, t) + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\sum\frac{\boldsymbol{r}_{ij}}{r_{ij}^3} \tag{5.3}$$

と表すことができる。ここで、右辺第 2 項は粒子 i に極めて近い位置にある粒子の和とする。どの程度の範囲までこの領域に入るとするかについては、後で導入する Debey 長がその指針となる。空間的に滑らかなポテンシャルは、電荷密度分布 $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ から、

$$\phi_s(\boldsymbol{r}, t) = \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}, t)}{4\pi\epsilon_0|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}dV \tag{5.4}$$

と計算することができる。

多くの空間電荷計算コードでは、空間的に滑らかな力のみを取り入れて空間電荷効果を計算しているが、場合によってはこの仮定が成り立たず、衝突力による効果が支配的になる場合も在り得る。正しく空間電荷計算コードを使用するためには、対象とするビームにおいて、どちらの力が支配的なのかを知る必要がある。

ここでは、プラズマ物理での基本パラメタである Debye 長の概念を電子ビームに適用し、空間電荷効果が滑らかな力として取り扱えるか、あるいは衝突的な力も考慮する必要があるかを分類する。また、空間電荷効果を含んだビームのシミュレーションでは、多くの場合マクロ粒子を使った粒子トラッキング計算が行われるが、マクロ粒子の数がどの程度必要かを把握するためにも、Debye 長の考えは有効である。ここでは、まず中性プラズマ中での Debye 遮蔽の効果を見た後に、相対論的ビームでの Debye 長、プラズマ振動数を導入する。最後に、Debye 長を利用して、電子ビームの空間電荷効果を分類する。

まず、中性なプラズマに対しての Debey 長を導入し、その効果を紹介する。一価の正のイオンと電子からなる中性なプラズマを考える。プラズマは温度 T で平衡状態にあるとする。簡単のために、球座標で考え、プラズマの中心 $(r = 0)$ にテスト電荷 q が置かれたとする。このとき、電荷分布は中性から外れ、ポテンシャル $\phi(r)$ が生じる。イオンと電子の分布は、熱平衡状態と仮定したので、Maxwell 分布で表され、

$$n(r) = n_0 \exp\left[-\frac{q\phi(r)}{k_B T}\right] \tag{5.5}$$

となる。ここで、$n_0 = n(0)$ である。このポテンシャルは、イオンと電子から作られる電荷分布のずれによって生じ、Poisson 方程式

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi(r) &= -\frac{q}{\epsilon_0}n_i(r) - n_e(r) \\ &= -\frac{q}{\epsilon_0}n_0\left[\exp\left(-\frac{q\phi(r)}{k_B T}\right)\right. \\ &\qquad \left.- \exp\left(\frac{q\phi(r)}{k_B T}\right)\right]\end{aligned} \tag{5.6}$$

によって計算される。ここで、右辺第 1 項はイオンによる項、第 2 項は電子による項である。$q\phi(r) \ll k_B T$

として、指数関数を展開し、1 次の項のみを残すと、

$$\nabla^2\phi(r) = \frac{q}{\epsilon_0}\left[\frac{2q\phi(r)}{k_BT}\right] = 2\frac{\phi(r)}{\lambda_D^2} \tag{5.7}$$

となる。ここで、λ_D は非相対論的な場合の Debye 長であり、

$$\lambda_D = \left(\frac{\epsilon_0 k_B T}{q^2 n_0}\right)^2 \tag{5.8}$$

と定義される。また、熱平衡状態での rms 速度 $\bar{v_x} = (k_BT/m)^{1/2}$ と、プラズマ周波数 $\omega_p = (q^2 n/\epsilon_0 m)^{1/2}$ を用いて、

$$\lambda_D = \frac{\bar{v_x}}{\omega_p} \tag{5.9}$$

と定義することもできる。式 (5.7) の解は、

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\exp\left(-\frac{\sqrt{2}r}{\lambda_D}\right) \tag{5.10}$$

となる。$r \ll \lambda_d$ の領域では、指数関数はほぼ 1 となり、ポテンシャルは

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \tag{5.11}$$

となり、真空中での電荷 q が作るポテンシャルと等しくなる。このことは、Debye 長より粒子間の距離が短い場合 ($r \ll \lambda$) には電荷 q が作るポテンシャルに等しくなるが、Debye 長より粒子間の距離が長い場合 ($r \gg \lambda_D$) にはポテンシャルは指数関数的に減少するということを示している。図 42 に示すように、Debye 長より外側では、裸の電荷のときと比べて電場が遮蔽されている。これがプラズマ中での Debye 遮蔽である。

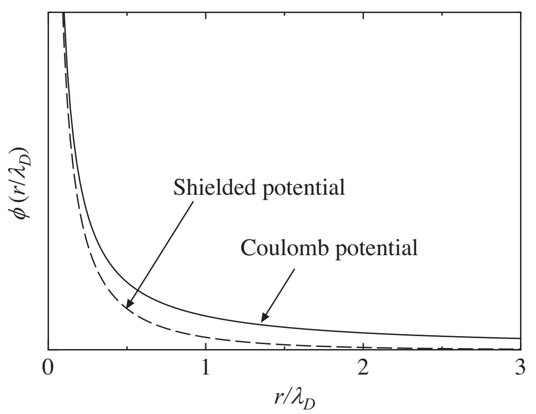


図 42: プラズマ中での Debye 遮蔽の効果。Debye 長より外側では、ポテンシャルが裸の電荷のときに比べて小さくなる。

電子ビームは非中性プラズマと考えることができ、これらの議論から Debye 長による粒子間相互作用の分類を類推することができる。電子ビームの場合には、異種電荷による遮蔽の効果はないが、粒子間の相互作用が空間的に滑らかであるか、あるいは衝突的であるかを示すのに Debye 長を使うことができる。

次に相対論的な速度を持つ電子ビームに対してのプラズマ周波数と Debye 長を定義する。セクション 3.2 で示したように、相対論的な速度を持つ電子ビームの横方向の運動方程式は、$\ddot{x} = \omega_p^2/2 = F_s/\gamma m$ と書ける。ここで、ビームは円筒断面を持つ連続ビームとすると、空間電荷効果による力は式 (3.12) より、$F_s = q^2 nr/(2\epsilon_0\gamma^2)$ と表される。これより相対論的な場合のプラズマ周波数を

$$\omega_p = \left(\frac{q^2 n}{\epsilon_0\gamma^3 m}\right)^{1/2} \tag{5.12}$$

と定義することができる。ここで定義したプラズマ周波数を用いて、相対論的な場合の Debye 長を

$$\lambda_D = \frac{\bar{v_x}}{\omega_p} = \left(\frac{\epsilon_0 m\gamma^3\bar{v_x^2}}{q^2 n}\right)^{1/2} \tag{5.13}$$

と定義する。平均速度 $\bar{v_x}$ は、ビームが実験室系の温度で熱平衡状態にあるとすると、$\gamma m\bar{v_x}^2 = k_BT$ の関係から、$\bar{v_x} = (k_BT/\gamma m)^{1/2}$ と求めることができる。これを上の式に代入すると、相対論的な場合の Debye 長は、

$$\lambda_D = \left(\frac{\epsilon_0\gamma^2 k_B T}{q^2 n}\right)^{1/2} \tag{5.14}$$

となる。

最後に、ここで定義した相対論的なビームに対する Debye 長を用いて、ビーム内での空間電荷効果の影響を分類する。まずは、ビーム内の粒子間平均距離を l_p として、$\lambda_D \gg l_p$ の場合を考える。この場合、Debye 長の内側には十分に多くの粒子が含まれることになり、電荷分布あるいはそれが作る電磁場は十分に空間的に滑らかであると考えられる。ビームの半径を a とすると、Debye 長に対する大きさの比から、次のような 3 つの領域が考えられる。

1. $\lambda_D \gg a$: 衝突的な力が強い、エミッタンスが支配的な領域
2. $\lambda_D \ll a$: 集団的な効果による空間的に滑らかな力が支配的な領域
3. $\lambda_D \sim a$: 衝突的な力、空間的に滑らかな力の両方が重要

1. の $\lambda_D \gg a$ の場合は、ビームエネルギーが高い、あるいはビームの温度が十分高い場合に起きる。ビーム

内の粒子はDebye長以内に収まるため、ビームの集団的な効果による空間的に滑らかな力よりも、数多くの粒子から受ける衝突的な力が支配的となる。また、衝突的な力によりビーム内の粒子間でエネルギーのやり取りが十分に行われるため、ビームは熱平衡状態に達し、その分布はMaxwell-Bolzmann分布で表される。このような状況では、統計力学からの類推により、個別の粒子間の相互作用は無視することができ、ビームを6次元の位相空間 $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{P})$ を持つ単粒子の集団として扱うことができる。この場合には、ビームの持つエミッタンスが重要な役割を果たす。

次に、2. の $\lambda_D \ll a$ の場合は、ビームを構成する粒子の多くはDebye長の外にあるため、空間的に滑らかな力が支配的となる。この場合には、個別の粒子間での相互作用より、ビームの集団的な効果による力が重要となる。空間電荷効果による力は空間的に滑らかであるとみなすことができ、外から加えた力と同様に扱うことができる。このため、粒子の運動は、外場中での単粒子のHamiltonianによって記述されることが可能であり、また、その6次元位相空間 $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{P})$ 中でのLiouvilleの定理も成り立つと考えることができる。セクション5.3で考える、ビーム内で軌道が交差しないビーム (laminar beam) の場合には、空間電荷効果は位置の線形な関数とすることができる。このような場合には、rmsエミッタンスも保存する。

3. の場合は、空間的に滑らかな力だけでなく、衝突的な力も考慮する必要があり、取り扱いは複雑になる。衝突的な力は粒子分布を変化させるため、空間電荷による力も非線形となる。しかし、上記の2つの場合と同様に、6次元位相空間 $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{P})$ での粒子分布として、その運動を表現することができる。

最後に、$\lambda_D \sim l_p$ の場合を考える。この場合、Debye長以内に入る粒子の数は限られてくる。このような状況は、ビームの温度が極端に低い場合か、粒子密度が高い場合に生じる。ある粒子を考えると、その周りにいる少数の非常に近接した粒子からの力は、他の離れた多数の粒子からの力に比べて、強いことになる。すなわち、近接した少数の粒子との瞬間的な相互作用（衝突）が重要となる。このような状況を図43に示した。よく使用される空間電荷計算コードでは、衝突的な相互作用は考慮されていないため、ビームがこの領域にある場合には、注意が必要である。

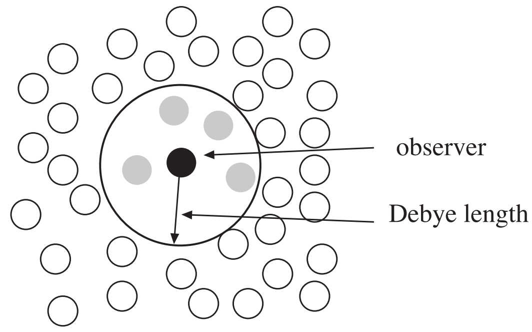


図43: $\lambda_D \sim l_p$ の場合の相互作用。着目する粒子の極近傍にいる少数の粒子からの力が支配的となる。

5.2 空間電荷効果の影響

横方向では、セクション3.3で見たように、電子ビームのサイズを広げる方向に、つまり斥力として空間電荷効果が作用する。また、進行方向でも同様の斥力効果を与えるが、もう一つ重要な効果として、ビームにエネルギー拡がりを与えるということがある。ビームのエネルギー拡がりが変化する場合、偏向電磁石から構成される合流部などの分散関数ある部分ではビームサイズの増大を引き起こす。また、バンチ化されたビームでは、バンチスライスの位置に依存したエネルギー拡がりが生じるため、射影エミッタンスの増大を引き起こす。この影響については、セクション6.2で紹介する。

5.3 空間電荷効果を含んだビームエンベロープ方程式

空間電荷効果を含んだビームエンベロープ方程式を求めるために、ここでは連続ビームを考え、次のような仮定を導入する。

1. ビームは半径 a の円形断面を持ち、半径 b の同心円ドリフト管の中を進行する。

2. ビーム軸上とドリフト管の壁面の間でのポテンシャルの差は、運動エネルギーに比べて十分小さい。

3. 同心円ドリフト管壁面での鏡像電荷がビームに及ぼす効果は無視する。

4. ビームの粒子密度は、ビーム内では一様、ビーム外ではゼロとする。2. よりビーム内の粒子の進行方向の速度は全て同じとすることができ、このときビーム内の電流密度は一様であるとできる。

5. 全てのビーム粒子は軌道上に沿って運動し、その軌道は交差しない。

6. ビームは安定状態にあるとする $(\partial/\partial t = 0)$。ビーム進行方向に沿ったあらゆる位置で、ビーム断面は時間に依存して変化しない。

7. 粒子の軌道は、近軸光線近似に従う（r' は小さい）

ビームの電荷密度 ρ と電流密度 $\boldsymbol{J}$ は、その点でのビームの速度を $\boldsymbol{v}$ とすると、連続の式より、

$$\boldsymbol{J} = \rho \boldsymbol{v} \tag{5.15}$$

と関係付けられる。また、電荷の線密度を ρ_L とすると、電流は、

$$I = \rho_L v \tag{5.16}$$

と記述される。ここで、$v_z \simeq v$ と仮定している。空間電荷により、ビーム軸上 $(r=0)$ とビームの端 $(r=a)$、真空チェンバーの壁面上 $(r=b)$ 上ではポテンシャルの差が生じる。ビームの運動エネルギーが一定であると仮定すると、軸上の粒子の運動エネルギーは、ビームの端にいる粒子よりも小さくなる。従って、粒子の速度は r の関数 $v(r)$ となる。一般に、ρ、v、$\boldsymbol{J}$ のうち一つが与えられれば、他のパラメタは Maxwell 方程式と運動方程式によりセルフコンシステントに決定されるが、ここでのモデルでは議論を簡単にするために、ビーム断面上では ρ、v、$\boldsymbol{J}$ は全て一様であり、r に依存しないとする。近軸光線近似の下では、$v_r \ll v$、$v_\theta \ll v$、$v_z \simeq v$ であるので、r 方向のポテンシャルの変化は粒子の運動エネルギーに比べて小さいと考えることができるので、それほど大きな差を与えない。従って、ここでの議論でこの近似を用いることはそれほど悪くない。この仮定のもとでは、ビーム電流から電流密度は $\rho_0 = I/(a^2\pi v)$ と表される。このとき電流密度、電荷密度は、$0 \le r \le a$ の場合、

$$J_z = J = \frac{I}{\pi a^2}, \tag{5.17}$$

$$\rho = \rho_0 = \frac{I}{\pi a^2 v}, \tag{5.18}$$

$r > a$ の場合は、$J = 0$、$\rho = 0$ となる。円筒形ビームで電荷密度が一定の場合、Gauss の法則より電場は半径方向成分だけになり、

$$E_r(r) = \frac{\rho_0 r}{2\epsilon_0} = \frac{Ir}{2\pi\epsilon_0 a^2 v}, (r \le a), \tag{5.19}$$

$$E_r(r) = \frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0 r} = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 v r}, (r > a), \tag{5.20}$$

と計算される。次に、磁場は、Ampere の法則より円周方向成分だけになり、

$$B_\theta(r) = \mu_0 \frac{Ir}{2\pi a^2}, (r \le a), \tag{5.21}$$

$$B_\theta(r) = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}, (r > a) \tag{5.22}$$

と計算される。

式 (5.19)、(5.20) を積分することにより、電場が作るポテンシャルを計算する。真空チェンバー壁面上 $(r=b)$ でポテンシャルがゼロ $(\phi = 0)$ とすると、

$$\phi(r) = V_s\left(1 + 2\log\frac{b}{a} - \frac{r^2}{a^2}\right) \quad (0 \le r \le a), \tag{5.23}$$

$$\phi(r) = 2V_s \log\frac{b}{r} \quad (a \le r) \tag{5.24}$$

となる。ここで、

$$V_s = \frac{\rho_0 a^2}{4\epsilon_0} = \frac{I}{4\pi\epsilon_0\beta_c} \tag{5.25}$$

である。

次に、ビームが作る電磁場中での運動方程式を考える。r 方向の運動方程式は、式 (4.9) の中で、外部電磁場による加減速がなく $(\gamma = \mathrm{const.})$、また、円周方向の速度 $r\dot{\theta}$ が十分小さいとして、$qr\dot{\theta}B_z$ の項を無視すると、

$$\frac{d}{dt}(\gamma m\dot{r}) = m\gamma\ddot{r} = qE_r - q\dot{z}B_\theta \tag{5.26}$$

となる。これに、ビームが作る電磁場、式 (5.19) の E_r と式 (5.21) の B_θ を代入すると、

$$m\gamma\ddot{r} = \frac{qIr}{2\pi\epsilon_0 a^2\beta c}(1-\beta^2) \tag{5.27}$$

となる。ここで、$\epsilon_0\mu_0 = c^{-2}$ と $\dot{z} = v = \beta c$ を使用した。左辺の時間による微分を z による微分で表現すると、

$$\ddot{r} = \frac{dz}{dt}\frac{d}{dz}\left(\frac{dz}{dt}\frac{dr}{dz}\right) = \beta^2 c^2 r'' \tag{5.28}$$

となる。これより、空間電荷効果を含んだ運動方程式は、

$$r'' = \frac{qIr}{2\pi\epsilon_0 mc^3\beta^3\gamma^3 a^2} \tag{5.29}$$

となる。これが、空間電荷効果によるビームの発散を表現する。ここで、空間電荷効果の影響を表現するための幾つかのパラメタを導入する。Lasown により導入された無次元パラメタである一般化されたパービアンス (generalized perveance) は、

$$K = \frac{I}{I_0}\frac{2}{\beta^3\gamma^3} = \frac{2\nu_B}{\beta^2\gamma^3} = \frac{\omega_p^2 a^2}{2\beta^2 c^2} \tag{5.30}$$

のように定義される。ここで、I_0 は空間電荷の特徴電流 (characteristic current)、

$$I_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 mc^3}{q}, \tag{5.31}$$

ν_B は Budker パラメター、

$$\nu_B = \frac{I}{I_0\beta}, \tag{5.32}$$

ω_p はプラズマ周波数、

$$\omega_p^2 = \frac{qI}{\pi\epsilon_0 mc\beta\gamma^3 a^2} \tag{5.33}$$

である。一般化されたパービアンスを用いると、空間電荷効果を含んだ r 方向の運動方程式は、

$$r'' = \frac{K}{a^2} r \tag{5.34}$$

と表される。

ここまでは、空間電荷効果のある場合のビーム内での荷電粒子の運動方程式を求めてきたが、これをビームエンベロープを記述する方程式に拡張する。式 (5.34) は、ビーム半径 a が z の関数として与えられれば、ビーム内 ($r \leq a$) の粒子に対して解くことができる。ビームを構成する荷電粒子の軌道が、互いに交差しない (laminar flow) と仮定すると、式 (5.34) より、全ての粒子の軌道は、r/a でスケールされる同じ形の軌道を持つ。このことより、ビームの端にある $r = a$ をもつ粒子は、時間発展後もずっとビームの端にいることになる。すなわち、式 (5.34) で $r = a = r_m$ としたものが、自由空間でのビームサイズ r_m の時間発展を記述する、ビームエンベロープ方程式

$$r''_m = K\frac{1}{r_m} \tag{5.35}$$

となる。また、実際のビームを扱う場合には、ビームの半径 a の代わりに rms ビームサイズ σ_x あるいは σ_y を使う方が便利である。ここでは、円形断面をもつビームを考え、その中での粒子密度は一定としているので、面密度 ρ_{S0} が一定であるとすると、rms ビームサイズは、

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \frac{1}{\rho_{S0}} r d\theta \int_0^{2\pi} dr x^2 \rho_{S0} \\ &= \frac{1}{\pi a^2}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta \int_0^a r^3 dr \\ &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 \end{aligned} \tag{5.36}$$

と計算される。ここで、$x = r\cos\theta$ を用いた。σ_y も同様に計算され、円形断面をもつビームでは、$a = 2\sigma_x = 2\sigma_y$ となる。$\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ とし、また $r = \sigma$ とすると、式 (5.34) より、rms ビームサイズについてのビームエンベロープ方程式は、

$$\sigma'' = \frac{K}{4}\frac{1}{\sigma} \tag{5.37}$$

となる。

この結果を使うと、外部電磁場がある場合のビームエンベロープ方程式は、式 (4.38) の中で $r = r_m$ としたものに、エミッタンスによる項を表す式 (4.61) と、空間電荷による発散を表す項の式 (5.35) を加えたものとなる。一般に外部電磁場が与えられた場合には、粒子のエネルギーの変化が生じるため、$\gamma = \text{const.}$ とはならない。この場合、エミッタンス ε はエネルギーに依存して変化してしまうため、あまり便利ではない。そこので、ε の代わりに粒子のエネルギーが変化しても不変となる規格化エミッタンス $\varepsilon_n = \beta\gamma\varepsilon$ を用いる。最終的に求めたいビームエンベロープ方程式は

$$\begin{aligned} & r''_m + \frac{\gamma'}{\gamma\beta^2} r'_m + \frac{\gamma''}{2\gamma\beta^2} r_m + \left(\frac{qB}{2mc\beta\gamma}\right) r_m \\ & -\frac{p_\theta^2}{m^2c^2\gamma^2\beta^2}\frac{1}{r_m^3} - \frac{\varepsilon_n^2}{\beta^3\gamma^2}\frac{1}{r_m^3} - K\frac{1}{r_m} = 0 \end{aligned} \tag{5.38}$$

となる。また、ビームの半径 r_m の代わりに、rms ビームサイズ σ を用いると、

$$\begin{aligned} & \sigma'' + \frac{\gamma'}{\gamma\beta^2}\sigma' + \frac{\gamma''}{2\gamma\beta^2}\sigma + \left(\frac{qB}{2mc\beta\gamma}\right)\sigma \\ & -\frac{p_\theta^2}{m^2c^2\gamma^2\beta^2}\frac{1}{\sigma^3} - \frac{\varepsilon_n^2}{\beta^3\gamma^2}\frac{1}{\sigma^3} - \frac{K}{4}\frac{1}{\sigma} = 0 \end{aligned} \tag{5.39}$$

となる。

次のセクションで、この空間電荷効果を含んだビームエンベロープ方程式から、エミッタンスの時間発展を紹介する。

6 空間電荷効果による射影エミッタンスの増大

ここでは、セクション 5.3 で導入した、空間電荷効果を含んだビームエンベロープ方程式を使って、平衡状態からの微小な振動を考え、エミッタンスが増減することを示す。その後、ソレノイドによる射影エミッタンスの補償の原理について説明する。

6.1 エミッタンスの増減

ここでは、Serafini と Rosenzweig が示した方法 [26, 27] を用いて、射影エミッタンスが増減することを示す。

射影エミッタンスの増減を示すモデルとして、円筒対称性を持ち、相対論的な速度で運動する連続ビームを考える。このようなビームの運動は、空間電荷効果を含んだビームエンベロープ方程式 (5.38) を用いて、

$$\sigma'' + \frac{\gamma'}{\gamma\beta^2}\sigma' + K_r\sigma - \frac{\varepsilon_n^2}{\beta^3\gamma^2}\frac{1}{\sigma^3} - \frac{I}{2I_0\beta^3\gamma^3}\frac{1}{\sigma} = 0 \tag{6.1}$$

と表される。ここで、σ は r 方向の rms ビームサイズであり、K_r はソレノイド、あるいは RF 電磁場による収束作用を表す係数である。ここでは、簡単のために一様な収束力 $K_r = \mathrm{const.}$ の下での運動を考える。また、初期の円周方向運動量はゼロ ($p_\theta = 0$) とする。ビームは外部電磁場により加速されない ($\gamma' = 0$) と仮定し、また、ビーム内では空間電荷効果が支配的であるとして、右辺第 2 項と、右辺第 4 項のエミッタンスによる項を無視する。このとき、ビームエンベロープ方程式は、

$$\sigma'' + K_r\sigma - \frac{I(\zeta)}{2I_0\beta^3\gamma^3}\frac{1}{\sigma} = 0 \tag{6.2}$$

となる。ここで、ビームはバンチ化されているとして、バンチの中心からの進行方向の距離を ζ として、バンチのスライス毎にビーム電流 $I(\zeta)$ を持つと考えている。$\sigma'' = 0$(Brillouin flow) とすると、あるスライスでのビームサイズは、

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{I(\zeta)}{2K_rI_0\beta^3\gamma^3}} \tag{6.3}$$

と計算される。ビームはこの σ_{eq} の周りで微小な振幅 $\delta\sigma$ で運動すると考え、1 次の項のみを残して、

$$\sigma(z,\zeta) = \sigma_{sq}(\zeta) + \delta\sigma(z) \tag{6.4}$$

と展開できるとする。これを式 (6.2) に代入すると、$\delta\sigma$ についての方程式は

$$\delta\sigma'' + 2K_r\delta\sigma = 0 \tag{6.5}$$

となる。これは、角振動数 $\sqrt{2K_r}$ を持つ、単振動を表す。K_r はスライスの位置 ζ に依存しない。初期条件 $\sigma(0,\zeta) = \sigma_{eq}(\zeta) + \delta\sigma(\zeta) = \sigma_0$、$\sigma'(0,\zeta) = 0$ を持つ場合、式 (6.5) の解は、

$$\sigma(z,\zeta) = \sigma_{eq}(\zeta) + \delta\sigma(\zeta)\cos(\sqrt{2K_r}z), \tag{6.6}$$

$$\sigma'(z,\zeta) = -\sqrt{2K_r}\delta\sigma(\zeta)\sin(\sqrt{2K_r}z) \tag{6.7}$$

と表される。位相空間では、この運動は σ_{eq} を中心とした楕円で表される。

次に、(σ,σ') を用いて、射影エミッタンスが増減することを簡単なモデルを例として紹介する。ビームスライスでの平均を $\langle\rangle$ とすると、(σ,σ') を用いて rms エミッタンスは、

$$\varepsilon(z) = \sqrt{\langle\sigma^2\rangle\langle\sigma'^2\rangle - \langle\sigma\sigma'\rangle^2} \tag{6.8}$$

と計算することができる。ここでは、議論を簡単にするために、ビームは 3 つのスライスから構成されると考える。各スライスはビーム電流 I_1、I_2、I_3 を持つとし、$I_1 < I_2 < I_3$ とする。また、ビームの初期値はどのスライスでも $(\sigma,\sigma') = (\sigma_0, 0)$ を持つと仮定する。このとき、3 つのスライスから計算される射影エミッタンスはゼロである。各スライスの中心ビームサイズ σ_{eq} は、スライスのビーム電流 $I(\zeta)$ に依存するため、図 44 に示すように位相空間中での楕円の中心位置はスライスによって異なる。位相空間での運動は、σ_{eq} を中心に楕円を描くが、$\delta\sigma$ の角振動数 $\sqrt{2K_r}$ は、ビーム電流には依存しないため、各スライスは同じ各振動数で振動することになる。図 45 に、各スライスが位相 $\sqrt{2K_r}z = 0, \pi/2, 3\pi/2, 2\pi$ を持つときの位相空間内での変化を示す。位相が 0 のときは、3 つのスライスが作る面積はゼロである。位相が $\pi/2$ になるとスライスが作る面積は最大になる。その後、位相 π でゼロになった後、再度 $3\pi/2$ で最大値を取り、またゼロに戻るようになる。

ここで取り扱った簡単なモデルの場合には、空間電荷効果の影響により、ビームが進行するに従い射影エミッタンスの増減が起きることを示した。同様の射影エミッタンスの増減は、DC 電子銃や入射器に対しての計算機シミュレーションでも観測される [28]。

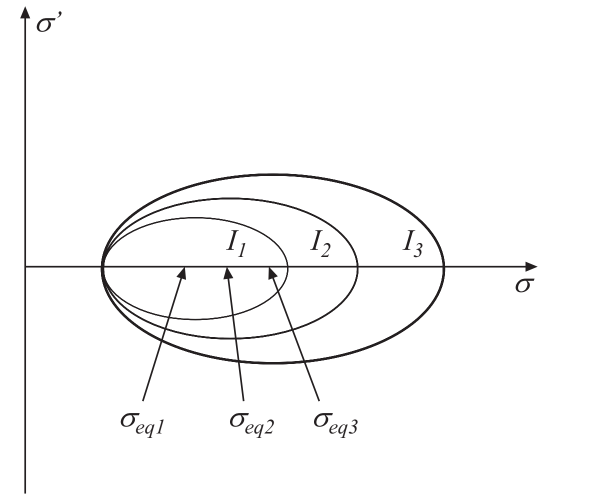


図 44: ３つのスライスがある場合の位相空間 (σ, σ')。各スライスのビーム電流は、I_1、I_2、I_3。

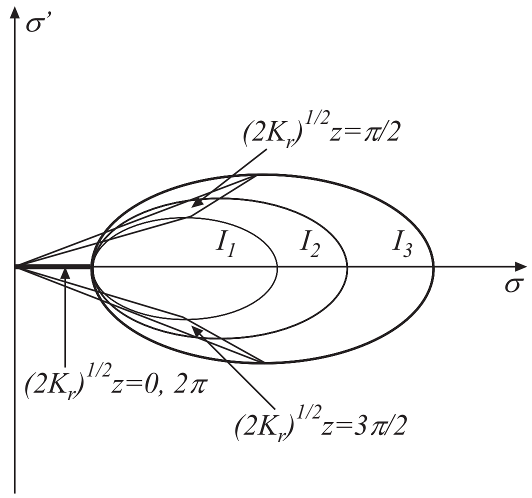


図 45: ３つのスライスがある場合の射影エミッタンスの変化。各スライスが位相 $\sqrt{2K_r}z = 0, \pi/2, 3\pi/2, 2\pi$ を持つときの位相空間内での変化を示す。

6.2 ソレノイドによる射影エミッタンスの補償

セクション 6.1 で見たように、一様な収束力の中では、射影エミッタンスが増減することがわかった。ERL 入射器の場合にも、電子銃で生成されたバンチは、バンチの前後で空間電荷効果による横方向の発散力が異なるため、各スライスでの位相空間分布のずれが生じ、射影エミッタンスが増大していく。これらを抑制するために、電子銃の後にソレノイドを設置し収束力を与え、射影エミッタンスを回復させるようにしている。ここでは、ERL 入射器用の電子銃で使われるソレノイドによる射影エミッタンスの補償の原理について説明する。セクション 6.1 での議論との違いは、ERL 入射器の場合には、一様な収束力が与えられるわけではなく、ソレノイドのある部分でのみ収束力が与えられるということである。このため、実際の入射器の設計では、ソレノイドの位置が重要となる。

まず、バンチ化されたビームでの、横方向空間電荷力による射影エミッタンスの増大を考える。この様子を、図 46 の (a)、(b) に示す。(a) は電子銃直後の横方向の位相空間分布で、x' の拡がりはカソード表面での温度等によって生じたものである。電子銃直後ではエネルギーが低いため、空間電荷効果による発散力の影響が強く働き、位相空間での分布の回転と変形が生じる。バンチ化されたビームでは、バンチ中央と前後では電荷密度が異なるために、異なる発散力により、各スライスでは位相空間分布にずれが生じることになる。バンチ中央では電荷密度が高いため、バンチの先端および終端に比べて、より位相空間分布の傾きが大きくなる。ソレノイド入口まで自由空間を進行したとき、各バンチスライスの位相空間分布にはずれが生じ、射影エミッタンスの増大が発生する。

このバンチがソレノイドを通過したときの位相空間分布が、図 46 の (c) である。ソレノイドによる力は、ソレノイドの磁場中心からの距離に比例した収束力となり、位相空間での分布の回転を引き起こすことになる。適切なソレノイドの強さを選ぶことにより、図 46(c) に示すような方向に分布を回転させることができる。ただし、ソレノイド直後ではまだ各スライス毎の分布の不一致は残っているために、射影エミッタンスは最小に到達していない。

ソレノイドの出口から、適切な距離を進むと、図 46(d) に示すように各スライスの分布が一致し、射影エミッタンスが最小になる。以上がソレノイドによる射影エミッタンス補償の原理である。

ここで、注意が必要なのは、射影エミッタンスが最小になる位置は、空間電荷力の強さ、ソレノイドの強さと位置、そしてエミッタンスを測定する位置に依存するということである。さらに、最小になった位置からバンチが進行すると、また射影エミッタンスの増大が生じ始めるということがある。このため、どこで射影エミッタンスを最小にするかということが重要となる。ERL 入射器では、入射器の後に続く周回部の主加速空洞の位置で射影エミッタンスが最小になるようにするのが望ましい。これは、エネルギーが高くなれば空間電荷力による横方向の力は相対的に弱くなり、

その力を無視できるようになるため、加速空洞の位置で最小になるようにしておけば、最小エミッタンスを保持したまま周回部を進むことができるからである。

現実の ERL 入射器では、RF 電磁場による射影エミッタンスの増大などもあり、最小エミッタンスを得るための設計には、計算機シミュレーションによる方法が用いられる。セクション 7 では、空間電荷効果を含んだビームの計算機シミュレーションについて紹介する。

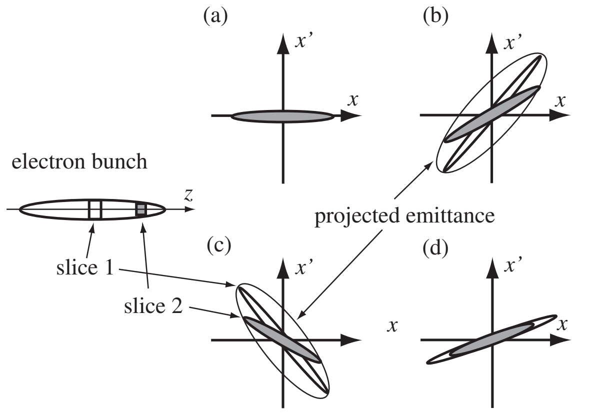


図 46: ソレノイド電磁石による射影エミッタンス補償の原理。(a) 電子銃から電子ビームが生成された直後。σ'_x は電子生成時に生じたものである。(b) ソレノイド入口。空間電荷効果により、スライスエミッタンスの不一致、つまり射影エミッタンスの増大が起きる。(c) ソレノイド出口。発散の大きさに比例した収束力を受け、位相空間での分布の回転が起きる。(d) ソレノイド下流。ある適切な距離自由間を進むと、スライスエミッタンスの不一致が解消され、射影エミッタンスが最小になる。

7 空間電荷効果の数値計算

空間電荷効果は、連続ビーム近似や特別な分布関数に対しては解析的に扱うことができるが、実際の加速器中での影響を解析的に扱うことは難しい。そのため、多くの場合には数値計算によって空間電荷効果の影響が調べられている。ここでは、空間電荷効果計算コードについて紹介した後、幾つかの空間電荷計算法について紹介する。

7.1 空間電荷効果を含んだシミュレーションコード

ERL では、典型的に 1.3 GHz の周波数で、100 mA のビームを考えている。このとき、一つの電子バンチ内には、$Q = -77$ pC の電荷が含まれることになる。これより、電子バンチ内の電荷数を計算すると、$N = Q/e = 4.8 \times 10^8$ と膨大な数となる。仮に、数値計算でこれら全ての電子間の Coulomb 相互作用を直接計算すると、それは 1 タイムステップあたり、$\sim N^2$ となってしまい、現実的ではない。このため、電子バンチの数値シミュレーションを行うには、電子バンチを表現するための他の方法が必要である。この方法としては、多くの場合次の 2 つの方法が用いられる。一つは、電子バンチを進行方向にスライスして、小さい幅を持つ多数の円筒スライスの集まりとして表現する方法である。もう一つは、同じ e/m を持ったマクロ粒子の集まりとして記述する方法である。電荷 Q を持つバンチを、N_m 個のマクロ粒子で表現すると、一つのマクロ粒子あたりの電荷は Q/N_m となる。マクロ粒子の個数の取り方については、Debye 長を計算して、空間電荷効果による電磁場が空間的に滑らかに記述できるかを考慮しておく必要がある。

空間電荷効果を含んだビームシミュレーションは、次のような 3 つのレベルに分けられる [29]。

1. 円筒スライスを用いた準解析的コード（スライス内では電荷密度が一定として、空間電荷効果による電磁場の非線形性を無視）
2. マクロ粒子を用い、ビームの静止系で静電場を計算するコード
3. 遅延ポテンシャルの効果を取り入れたコード (Lienard-Wiechert ポテンシャルを用いる)

レベル 1 の場合は、ビームを荷電粒子の集団としてではなく、円筒スライスの集まりと考える。スライス内では、進行方向、横方向ともに電荷密度が一定と仮定している。このとき、空間電荷効果による非線形な電磁場は無視することができる。スライスの運動は、各スライスの半径方向の大きさ (エンベロープ）の変化と進行方向の幅の変化により記述される。この方法の利点は、バンチを何個のスライスに分割するかに依存するが、基本的に取り扱うスライス数は少ないため、計算が高速であるということである。このため、円筒対称性があるビームに対して、パラメタ探索などの高速な計算が要求される場合に適している。

レベル 2 の場合は、ビームをマクロ粒子の集団として取り扱う。空間電荷効果の計算には、粒子分布を実験室系からビームの静止系に Lorentz 変換し、静止系での電荷分布から静電場を計算する方法である。静止系での静電場が求まった後は、逆 Lorentz 変換により静止系での静電場を実験室系での電磁場に変換し、粒子に相互作用を与え、時間発展させる。静電場の計算は、電荷密度から Poisson 方程式を解く方法や、静止系でのマクロ粒子間での Coulomb 相互作用を全ての粒子について計算するという方法がある。これらの計算で、前提となるのが、ビームの静止系を定義できるということである。エネルギー拡がりのないビームの場合には、厳密にビームの静止系を定義できるが、エネルギー拡がりが有限な場合には、厳密には静止系を定義できない。このため、レベル 2 の方法を用いる場合には、エネルギー拡がりを考慮する必要がある。この方法の利点は、マクロ粒子の数を増やせば、複雑な分布を表現できるということである。また、静電場の計算方法も幾つか選択できるため、比較的高速な計算も可能である。ただし、この方法では遅延ポテンシャルの影響が考慮されていないので、より厳密に計算するにはレベル 3 の方法を使用する必要がある。

レベル 3 の場合は、Lienard-Wiechert ポテンシャル解くことで、遅延効果を取り入れる。このため、レベル 3 の方法では、余計な仮定が含まれていないために、厳密な計算が可能である。しかし、一般に計算に時間が掛かるために、高速にパラメタ探索をしたい場合などには向かない。

空間電荷計算を含んだシミュレーションコードの代表的なものは、

1. HOMDYN (レベル 1) [30]
2. ASTRA (レベル 2、円筒対称ビーム) [31]
3. Parmela (レベル 2、円筒対称ビーム、3 次元空間電荷効果) [32]

4. GPT (レベル 2、3 次元空間電荷効果) [33]

5. TREDI (レベル 3) [34]

6. PETAR (レベル 3) [35]

である。これ以外にも多くの空間電荷計算を含んだコードが開発されているが、全てを紹介することはできないので、よく使われているコードを紹介するに留めた。

次に、マクロ粒子を使った粒子追跡計算での空間電荷の計算方法について、一般によく用いられているレベル 2 の方法について紹介する。これらの空間電荷の計算では、正確に計算することも必要であるが、また出来るだけ早く計算することも重要となってくる。それぞれの空間電荷の計算方法には、長所と短所があり、対象とする系および重要な物理現象を見極めて、適した計算コードを使用することが重要である。

7.2 点電荷間の力を計算する方法

空間電荷を含んだビームをシミュレートするコードでは、多くの場合、マクロ粒子を用いた粒子トラッキングが使われる。ここでは、点電荷間の相互作用を直接計算する方法を紹介する。点電荷間の力の直接計算では、ビームを構成する 2 つのマクロ粒子をその静止系に Lorentz 変換した後に、Coulomb の法則から静電場を計算し、再びそれを実験室系に逆 Lorentz 変換することにより、空間電荷効果を計算する。長所は、粒子の静止系での静電場を求めるにあたって、電荷密度や電磁場の平均化などの近似を導入していないということが挙げられるが、一方、粒子数が増えた場合には計算が膨大に増えるために、計算時間が長くなるという短所がある。また、マクロ粒子の数が少ない場合には、粒子間距離が近い場合に相互作用が非常に強くなる場合があり、数値的なノイズが生じるということがあるので、注意が必要である。

空間電荷効果を点電荷間の相互作用で計算する流れは次のようになる。ここで、ビームは電荷 Q を持つ N 個のマクロ粒子から構成されるとする。二つのマクロ粒子 i と j を考え、マクロ粒子 j が i の位置に作る電磁場を求める。実験室系で二つの粒子の位置は、$\boldsymbol{r}_i$、$\boldsymbol{r}_j$ で表されるとすると、粒子間の距離は

$$\boldsymbol{r}_{ji} = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j \tag{7.1}$$

となる。これを粒子 j の静止系から見ると、粒子間の距離は、

$$\boldsymbol{r}'_{ji} = \boldsymbol{r}_{ji} + \frac{\gamma_j^2}{\gamma_j + 1}(\boldsymbol{r}_{ji} \cdot \boldsymbol{\beta}_j)\boldsymbol{\beta}_j \tag{7.2}$$

となる。ここで、$\boldsymbol{\beta}_j$ は粒子 j の速度ベクトル、$\gamma_j = 1/\sqrt{1 - |\boldsymbol{\beta}_j|^2}$ は Lorentz 因子である。粒子 j の静止系では、静電場のみが存在し、Coulomb の法則より、

$$\boldsymbol{E}'_{ji} = \frac{Q\boldsymbol{r}'_{ji}}{4\pi\epsilon_0 |\boldsymbol{r}'_{ji}|^3} \tag{7.3}$$

と計算される。これを逆 Lorentz 変換して、実験室系での電磁場を求めると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_{ji} &= \gamma_j \left[\boldsymbol{E}'_{ji} - \frac{\gamma_j}{\gamma_j + 1}(\boldsymbol{\beta}_j \cdot \boldsymbol{E}'_{ji})\boldsymbol{\beta}_j, \right] && (7.4) \\ \boldsymbol{B}_{ji} &= \frac{\gamma_j \boldsymbol{\beta}_j \times \boldsymbol{E}'_{ji}}{c} && (7.5) \end{aligned}$$

となる。これで、実験室系で粒子 j が粒子 i の位置に作る電磁場が求まった。ビームは N 個の粒子から構成されるとしたので、ビーム全体が i の位置に作る電磁場は、自分自身を除いた $N-1$ に対して上記の計算を繰り返し、足し合わせることにより、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_{i} &= \sum_{j \neq i} \gamma_j \left[\boldsymbol{E}'_{ji} - \frac{\gamma_j}{\gamma_j + 1}(\boldsymbol{\beta}_j \cdot \boldsymbol{E}'_{ji})\boldsymbol{\beta}_j, \right] && (7.6) \\ \boldsymbol{B}_{i} &= \sum_{j \neq i} \frac{\gamma_j \boldsymbol{\beta}_j \times \boldsymbol{E}'_{ji}}{c} && (7.7) \end{aligned}$$

と計算される。この電磁場から粒子 i に対する力を計算し、次の時間ステップの粒子位置を計算する。これをマクロ粒子全てに対して繰り返すと、1 ステップの計算が終了する。すなわち、1 ステップの間に $N(N-1)$ の計算が必要となる。粒子数が増大した場合には、計算回数はほぼ N^2 になるため、計算時間が増大する。

7.3 ビームの静止系に設置した格子上で静電場を計算する方法

点電荷間の相互作用を直接計算するコードでは、近似が含まれていないという利点があるが、粒子数が増加したときの計算時間の問題、また粒子間の距離によっては数値的なノイズが生じるという問題がある。点電荷間の相互作用を計算する方法の他に、空間電荷を計算するためによく使われる方法として、ビームの静止系で静電場を計算する方法がある。この方法では、マクロ粒子から構成されるビームをその静止系

に Lorentz 変換した後に、ビームを含む空間上に格子を作成し、その格子上で電荷密度を計算し、それから Poisson 方程式を解くことにより、静電場を求める。求めた格子上の静電場を逆 Lorentz 変換により、実験室系での電磁場に変換し、各マクロ粒子に加わる力を求める。この方法では、空間上に格子を作るため、格子間隔内では粒子分布が平均化され、点電荷間の力の計算のような意図しない衝突的な力の影響を避けられる。しかしながら、格子間隔によっては細かい粒子分布の影響が見えなくなってしまう場合もあるので、格子サイズとマクロ粒子数の選び方が重要となる。また、Lorentz 変換をするにあたってビームの静止系というものを考えたが、ビームのエネルギー拡がりが大きい場合、ビームの平均速度の系に Lorentz 変換してもエネルギーのずれた粒子はその静止系に対して速度をもつことになり、静電場のみが現れる前提が正しくなくなる。このため、この方法はビームのエネルギー拡がりが大きい場合には使えないので、注意が必要である。

ビーム静止系の格子上で静電場を計算する流れは次のようになる。

1. ビームの静止系を求める
2. ビームを構成するマクロ粒子の位置と速度 ($\boldsymbol{r}_i$, $\boldsymbol{u}_i$) を、ビームの静止系に Lorentz 変換する ($\boldsymbol{r}'_i, \boldsymbol{u}'_i$)
3. ビームの静止系で、ビームを含む空間中に格子を作成し、格子点上での電荷密度 ρ を計算する
4. 電荷密度 ρ に対して Poisson 方程式を解き、静電ポテンシャル V を計算する
5. 静電ポテンシャル V から、各粒子の位置での静電場 $\boldsymbol{E}'_i$ を求める
6. 求めた静電場 $\boldsymbol{E}'_i$ を逆 Lorentz 変換して、実験室系での電磁場を求める
7. 実験室系での電磁場からマクロ粒子に加わる力を計算し、次の時間ステップの粒子の位置と速度を計算する

この流れに従って、計算方法を紹介する。まず始めに、ビームの静止系を定義する。ビームのエネルギー拡がりが有限である場合には、厳密にマクロ粒子が静止して見える系は存在しない。しかし、ここではビームのエネルギー拡がりが十分小さいとして、静止系とみなせるような系があると考える。そのような静止系の実験室系に対する速度 $\boldsymbol{\beta}_0$ は、

$$\boldsymbol{\beta}_0 = \frac{\sum \gamma_i \boldsymbol{\beta}_i}{\sum n_i \gamma_i} \tag{7.8}$$

と表される。ここで、マクロ粒子に番号 i をつけ、マクロ粒子内での電子数を n_i、実験室系での粒子の速度ベクトルを $\boldsymbol{\beta}_i$、Lorentz 因子を γ_i とした。また、和は、$n = 1$ からマクロ粒子の総数 N まで計算される。静止系についての規格化運動量 $\gamma_0\boldsymbol{\beta}_0$、および Lorentz 因子 γ_0 は、静止系の速度 $\boldsymbol{\beta}_0$ から

$$\gamma_0\boldsymbol{\beta}_0 = \frac{\boldsymbol{\beta}_0}{\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}_0^2}}, \tag{7.9}$$

$$\gamma_0 = \sqrt{1+\gamma_0^2\boldsymbol{\beta}_0^2} \tag{7.10}$$

と計算される。γ_0 を用いると、実験室系でのマクロ粒子の位置 $\boldsymbol{r}_i$ は、Lorentz 変換により、ビームの静止系での位置 $\boldsymbol{r}'_i$、

$$\boldsymbol{r}'_{i\parallel} = \gamma_0 \boldsymbol{r}_{i\parallel}, \tag{7.11}$$

$$\boldsymbol{r}'_{i\perp} = \boldsymbol{r}_{i\perp} \tag{7.12}$$

に変換される。ここで、$\boldsymbol{r}_\parallel$ はビーム進行方向の位置座標、$\boldsymbol{r}_\perp$ は進行方向に垂直な方向の座標である。これら二つをあわせると、粒子の座標は

$$\boldsymbol{r}'_i = \boldsymbol{r}_i + \frac{\boldsymbol{r}_i \cdot \gamma_0\boldsymbol{\beta}_0}{\gamma_0+1}\gamma_0\boldsymbol{\beta}_0 \tag{7.13}$$

と変換される。また、粒子の速度は

$$\boldsymbol{u}'_{i\parallel} = \frac{\boldsymbol{u}_{i\parallel}}{(1-\boldsymbol{\beta}_u\cdot\boldsymbol{\beta}_0)}, \tag{7.14}$$

$$\boldsymbol{u}_{i\perp} = \frac{\boldsymbol{u}_{i\perp}}{\gamma_0(1-\boldsymbol{\beta}_u\cdot\boldsymbol{\beta}_0)} \tag{7.15}$$

と変換され、まとめると

$$\boldsymbol{u}' = \frac{c}{\gamma_u\gamma_0 - \gamma_u\boldsymbol{\beta}_u\cdot\gamma_0\boldsymbol{\beta}_0} \times \left[\left\{\frac{\gamma_u\boldsymbol{\beta}_u\cdot\gamma_0\boldsymbol{\beta}_0}{\gamma_0+1} - \gamma_u\right\}\gamma_0\boldsymbol{\beta}_0 + \gamma_u\boldsymbol{\beta}_u\right] \tag{7.16}$$

と表すことができる。ここで、$\boldsymbol{\beta}_u = \boldsymbol{u}/c$、$\gamma_u = 1/(1-\boldsymbol{\beta}_u^2)^{1/2}$ である。また、静止系でのマクロ粒子の Lorentz 因子は

$$\gamma_{u'} = \gamma_0\gamma_u(1-\beta_0\beta_u) \tag{7.17}$$

と定義することができるが、これがある程度以上大きい場合には、静止系での粒子の速度差が無視できなくなるため、注意が必要である。

次に、静止系でビームを取り囲む空間上に境界ボックス Ω を設定し、その中に格子を作る。そして、粒子分布 $(\boldsymbol{r}'_i, \boldsymbol{u}'_i)$ から格子点上での電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r}')$ を求める。格子の取り方は、等間隔格子や非等間隔格子などがある。格子を設置する際に重要となるパラメタは、格子の総数である。格子の数が増えれば、より空間的に細かい情報が含まれることになるが、あまりに格子数を増やすと、電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r}')$ が不連続（一つのセル内に粒子が数個しか入らなくなる）になり、また格子点の数が増えるため長い計算時間が必要となる。従って、マクロ粒子の総数と要求する精度から、格子の数と間隔（あるいは境界ボックスの大きさ）を適切に設定する必要がある。

この電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r}')$ から Poisson 方程式

$$-\nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{7.18}$$

を解いて、静止系の静電場を求めることになる。ここでは、Poisson 方程式の解き方の詳細については触れないので、数値計算の文献などを参照して欲しい。ここでは、Poisson 方程式を解く際に重要となる、境界条件について紹介しておく。Poisson 方程式は、境界ボックス Ω 内に設置された格子上で解かれるが、この Ω の取り方と Ω 上での境界条件の取り方が重要となる。境界条件には、Dirichlet 境界条件 ($\partial\Omega$ 上で $V = 0$)、Open 境界条件 ($\lim_{r\to\infty} V = 0$)、Neumann 境界条件 ($\partial\Omega$ 上で $\partial V/\partial r' = 0$) がある。ここで、$\partial\Omega$ は境界を囲う境界面を表す。Dirichlet 境界条件は、境界上で $V = 0$ となり導体表面を表すことになる。ビームが金属製の真空チェンバー内を進行する場合には、Dirichlet 境界条件を使用し、境界ボックスを真空チェンバーと同サイズに取ることにより、導体表面の影響を表現することができる。ただし、境界ボックスを大きく取り、さらに格子数を増やすと、長い計算時間が必要となる。真空チェンバー表面での導体の影響を無視する場合には、Open 境界条件を使うことにより表現できる。このように、対象とする物理現象に合わせて境界条件と境界ボックスのサイズを選択する必要がある。また、境界条件は Poisson 方程式を数値的に解く場合の安定性にも影響するので、注意する必要がある。

Poisson 方程式を解いて得られた静電ポテンシャル V から、静止系での静電場は、

$$\boldsymbol{E}' = -\nabla V \tag{7.19}$$

と計算される。$\boldsymbol{E}'$ は格子点上での V から計算されるため、各マクロ粒子上での静電場 $\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r}'_i) = \boldsymbol{E}'_i$ は、$\boldsymbol{r}_i$ の周りの格子点上の値から内挿して計算しなければならない。

最後に、実験室系における粒子 i の位置での電磁場を求めるために、静止系での静電場 $\boldsymbol{E}'_i$ を逆 Lorentz 変換する。i での電磁場は、

$$\boldsymbol{E}_i = \gamma_0 \left[\boldsymbol{E}'_i - \frac{\gamma_0}{\gamma_0 + 1} (\boldsymbol{\beta}_0 \cdot \boldsymbol{E}'_i) \boldsymbol{\beta}_0 \right] \tag{7.20}$$

$$\boldsymbol{B}_i = \frac{\gamma_0 \boldsymbol{\beta}_0 \times \boldsymbol{E}'_i}{c} \tag{7.21}$$

と計算される。この電磁場を用いて、各粒子に加わる力を計算し、次の時間ステップでの各粒子の位置と速度を計算する。以上が、静止系の格子上で空間電荷効果を計算する流れである。

この方法での利点は、電荷密度を連続として扱うために、点電荷間の相互作用を直接計算する方法に比べて高速であるということがある。ただし、ビームのエネルギー拡がりが大きい場合には、一つの静止系を定義することができないために、注意が必要である。また、粒子密度が増大し、衝突的な力が支配的になる領域では、ここでの方法の滑らかな空間電荷力だけでは、正しい物理を取り入れたことにはならない。このため、対象とするビームの Debye 長を計算し、空間的に滑らかな空間電荷力が支配的か、あるいは衝突的な力も取り入れなければならないかを見極め、空間電荷の計算方法を選択する必要がある。

8　電子銃

ここでは、cERL での実際のビーム運転による結果を紹介しながら、実験結果を再現するための電子銃の解析モデル補正法と、電子銃近傍の空間電荷効果について紹介する。

8.1　電子銃の解析モデルの補正

8.1.1　電子銃による収束力

セクション 2.3 の図 13 に示したように、電子銃の静電場分布によって電子ビームに収束・発散力が与えられる。この収束・発散力は、電極形状によって電場の強度分布が変化することによって生じている。カソード面近傍ではエネルギーが低いために、この影響をより強く受けることになる。このため、実際の電子銃ではビームを使って電子銃の収束力を評価し、電子銃の解析モデルの補正を行う必要がある。ここでは、ビームを使った収束力の測定法と解析モデルの補正について紹介する。

8.1.2　電子銃の収束力の測定方法

cERL では光陰極 DC 電子銃が使われており、電子ビームを生成する際には光陰極にレーザーを照射している。カソード面上のレーザー照射位置は、ミラーを動かすことによって制御することができる。照射位置を変えながら下流にあるスクリーンモニタ上のビーム位置の変化を測定することによって、電子銃の収束力を評価する。ビーム位置の測定に利用したスクリーンモニタ MS1 の配置を図 47 に示す。電子銃とスクリーンモニタの間には、ソレノイド電磁石 SL1 とバンチャー空洞があるが、収束力測定の際にはこれらはすべてオフにされている。このため、電子銃からスクリーンモニタ間を自由空間 (ドリフト空間) とみなすことができる。

電子銃収束力測定法の模式図を図 48 に示す。カソード面上のレーザー照射位置を変えながら、MS1 上でのビームの重心位置の変化を測定する。測定では、空間電荷効果による影響を避けるためにバンチ電荷は 10 fC と非常に低い値に設定された。

レーザー照射位置を変えたときのビーム位置の変化の測定結果とシミュレーション結果を図 49 に示す。水平方向位置と垂直方向位置の測定結果はほぼ同じ応答となっており、これは電子銃収束力の軸対称性が保たれていることを示している。しかしながら、測定結果と解析モデルによるシミュレーション結果では応答のずれがみられた。輸送路上で外乱となるものはほぼ排除されているため、このずれは電子銃の収束力に起因するものと推測される。そこで、解析モデルの電子銃電極形状を僅かに変化させて、最も良く実験結果を再現する形状を探索することとした。

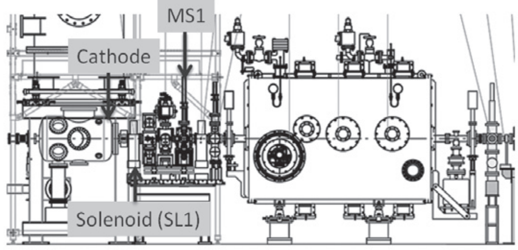


図 47: cERL 入射器近傍のレイアウト。電子銃、2 台のソレノイド電磁石、バンチャー空洞、2 台のスクリーンモニタ (MS1, MS2) によって構成される。

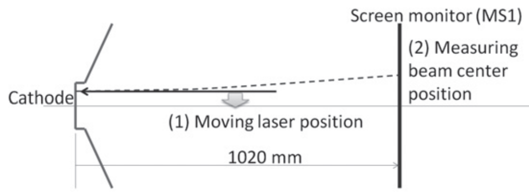


図 48: 電子銃の収束力測定法の模式図。励起レーザーを照射する位置を変えながら、スクリーンモニタ MS1 上でのビームの重心位置の変化を測定する。

8.1.3　電子銃解析モデルの補正

図 50 にカソード形状の拡大図を示す。電極中心付近に凹みがあり、この部分が電子銃近傍の収束力に影響を与える。GaAs 光陰極を保持するカソードパックは取り外しが可能な構造となっているため、この凹みが設計より僅かにずれる可能性がある。設計ではこの凹みは 0.5 mm となっている。図 49 の測定結果を見ると、実験結果の方がモデルよりも発散力が弱いことがわかる。これは、カソード中心付近の凹み量が設計よりも大きくなっていることを示している。凹み量が大きい場合は、カソード面上の E_{z0} が上昇 (絶対値では減少) することになり、$\partial E_{z0}/\partial z$ を減少させることになる。従って、カソード面上でより強い収束力が働くことになり、電子銃全体としては発散力が弱められることになる。

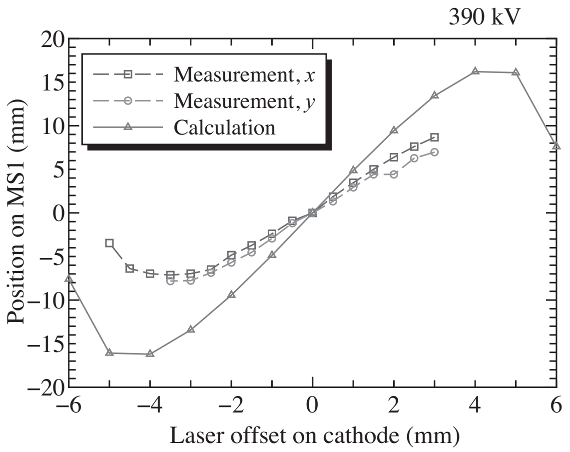


図 49: 電子銃収束力の測定結果。電子銃電圧は 390 kV。水平方向と垂直方向の測定結果とモデル計算による結果 (円筒対称性があるため一つのみ) を示す。

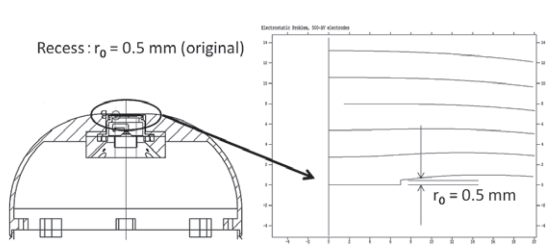


図 50: カソード形状の拡大図。電極中心付近に凹みがあり、この部分が電子銃近傍の収束力に影響を与える。カソードパックは取り外しが可能な構造となっているため、この凹みが設計より僅かにずれる可能性がある。

実験結果を解析モデルによるシミュレーションで再現するために、凹み量を 0.9, 1.0, 1.2 mm とした電極形状を作成し、シミュレーションを行った。図 51 に示されるように、凹み量 0.9 mm のときに最も良く実験結果を再現することとなった。これらの結果より、解析モデルを凹み量 0.5 mm から 0.9 mm に補正することにした。

ここまでは、ビームの重心位置のみを着目したため、ビームを単粒子として取り扱ったことになる。実際には、ビームは有限な拡がりをもつため、次の段階としてビームサイズに対する影響を調べることとした。このために、ソレノイド SL1 の磁場を変えたときの、MS1 上でのビームサイズの応答を測定した。

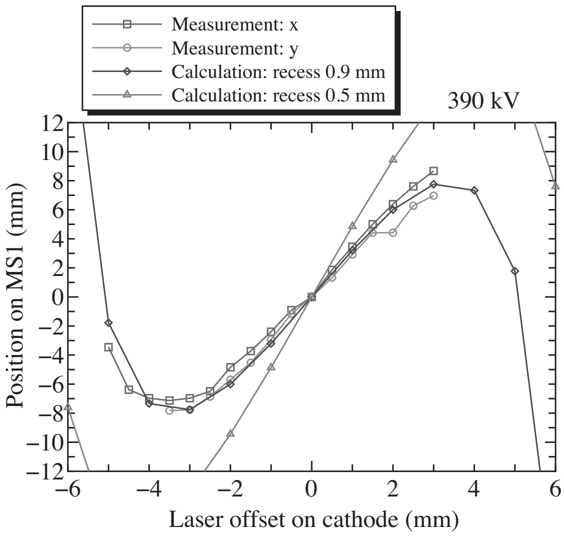


図 51: 電子銃電極形状の解析モデルの補正。図 49 の測定結果を再現するように、電極中心の凹みを補正した。

8.1.4 ビームサイズの測定

カソードから取り出される電子ビームの性質は、レーザーの条件 (照射直径、波長、時間幅、出力) に強く依存する。cERL のビーム運転では、波長 532 nm が用いられている。このとき初期エミッタンスを決める k_BT は GaAs 光陰極の場合、120 meV である [16]。レーザーの時間構造は、3 ps rms のガウス分布である。横方向の強度分布はピンホールで切り出してほぼ一様円分布となっている。電子ビームの横方向ビームダイナミクスを考えるとき、この初期レーザー直径が重要となる。これを実験的に検証するために、空間電荷効果を無視できる 10 fC のバンチ電荷のビームに対して、MS1 上でビームサイズの測定を行った。図 52 に SL1 を変えたときの MS1 上のビームサイズの応答の測定結果と、シミュレーション結果 (補正された電極形状を使用) を示す。シミュレーションでの初期レーザー直径は設計値である 1.2 mm とした。図 52 より、測定結果とモデル計算はかなり近いが、僅かにずれが残っていることがわかる。実験結果をより良く再現するために、モデル計算のレーザー直径を変えた計算を行った。図 52 に示すように、レーザー直径 1.1 mm のとき最も良く実験結果を再現することとなった。この結果を確認するために、直接レーザー直径を測定したところ、水平方向 1.02 mm、垂直方向 1.09 mm、平均 1.06 mm となり、ビームで測定した 1.1 mm とほぼ一致することが確認された。以上

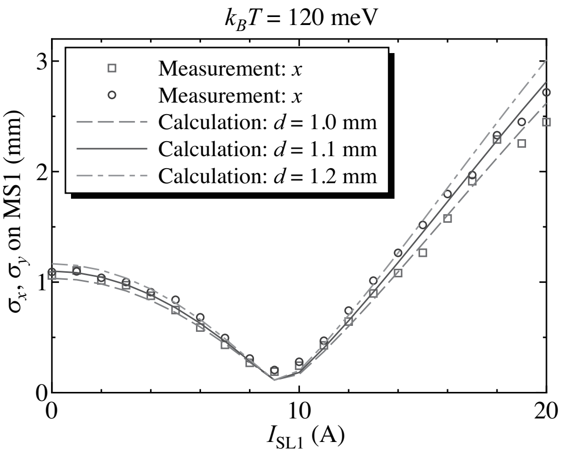


図 52: 空間電荷効果の効かないバンチ電荷で、ソレノイド電磁石 SL1 を変えたときのスクリーンモニタ MS1 上でのビームサイズの応答を測定。実験結果を再現するように、解析モデルの励起レーザー直径を修正した。$d = 1.1$ mm のときに最も良く実験結果を再現する。

の結果より、モデルのレーザー直径を 1.1 mm に補正することとした。

8.2 空間電荷効果の検証

解析モデルの電極形状と初期レーザー直径の補正が終わったあとに、電子銃近傍での空間電荷効果の測定を行った。測定したバンチ電荷は、0.5 pC と 7.38 pC である。図 53 にバンチ電荷 0.5 pC のときの SL1 スキャン結果を示す。空間電荷なしの場合の計算結果と比べると、空間電荷効果によってビームサイズの拡がりが大きくなっていることがわかる。また、電極形状を補正した解析モデルで実験結果を比較すると、ほぼ合っていることが確認された。

図 54 に、空間電荷効果が支配的になるバンチ電荷 7.38 pC に対してのソレノイド電磁石 SL1 のスキャン結果を示す。バンチ電荷を上げても、低バンチ電荷で電極形状を補正した解析モデルを用いて実験結果を再現できることが確認された。

さらにバンチ電荷を上げて空間電荷効果が強くなったときのビーム輸送では、図 55 に示すように励起レーザーパルスをスタックして初期電子バンチ長を伸ばして電荷密度低減を図る必要がある。この場合、初期レーザーパルス長を正確に制御することが要求されることになる。実際のビーム運転でパルススタッキングを行う場合には、スタッキングする間隔を変えたと

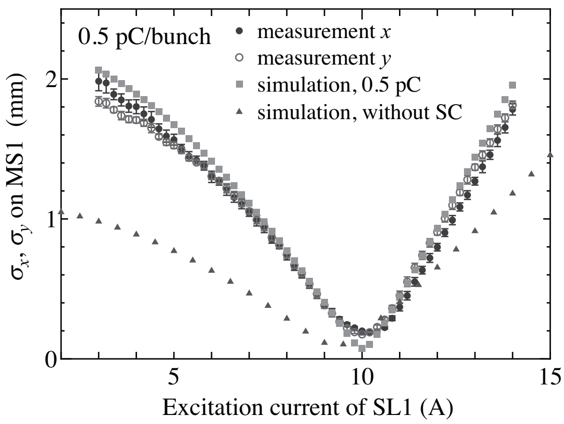


図 53: 空間電荷効果が現れはじめるバンチ電荷 0.5 pC に対してのソレノイド電磁石 SL1 のスキャン結果。空間電荷なしの場合の計算結果と比べると、空間電荷効果によってビームサイズの拡がりが大きくなっていることがわかる。電極形状を補正した解析モデルで実験結果を再現できている。

きの横方向、縦方向のビーム応答を測定し、初期レーザーパルス長をきちんと把握しておくことが重要である。

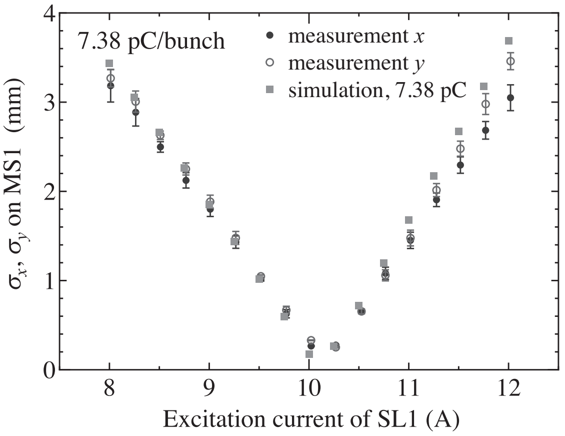


図 54: 空間電荷効果が支配的になるバンチ電荷 7.38 pC に対してのソレノイド電磁石 SL1 のスキャン結果。バンチ電荷を上げても電極形状を補正した解析モデルで実験結果を再現できている。

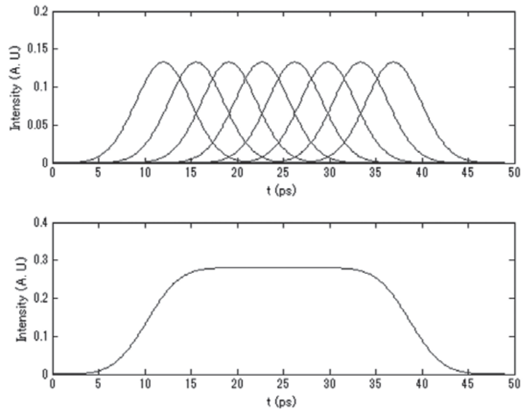


図 55: パルススタッキングによる、長い励起レーザーパルスの生成。3 ps rms ガウス分布のレーザー分布を 8 個スタッキングして、長いフラットトップをもつレーザーパルスを作る。電子ビームの時間方向に長くなり、バンチ内の電荷密度が低下し、電子銃直後での空間電荷力を弱められる。

9　入射器

ここでは、ERL 入射器の最適化計算の例について紹介する。バンチ電荷が上がってくると空間電荷効果が支配的になるため、ビームの運動を横方向と縦方向で独立に扱うことができず、6 次元位相空間分布を総合的に制御することが必要となる。また、線形加速器の特徴である上流から下流へ影響が伝播するという性質があるため、電子銃から入射器まで一体として考えていく必要がある。入射器ビームラインの設計においても、最小エミッタンスを狙うような設計を行う場合には、最上流の電子銃から入射器出口までを通したビーム輸送条件 [12] の最適化が必要となる。ここでは、数値計算を用いた ERL 入射器輸送条件の最適化例を紹介する。数値計算コードとして、General Particle Tracer (GPT) を用いている。

9.1　入射器輸送条件の最適化

電子銃から入射器を通って合流部出口でエミッタンスを最小化することを考える。このときの入射器の配置を図 56 に示す。500 kV 光陰極 DC 電子銃の後に、1 番目のソレノイド、バンチ圧縮用のバンチャー空洞、2 番目のソレノイドが設置され、その後に 2 セルの超伝導空洞が 3 台続く。このビームラインで調整可能なパラメタは、初期分布電子分布 [13] $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_t)$、電子銃電圧、ソレノイド 1 の強さ、ソレノイド 2 の強さ、バンチャーの加速電圧と位相、超伝導加速空洞 3 台についての位相と加速電圧の計 14 個である。これを表 1 に示す。合流部出口までを考えると、これらの他にマッチング部の 4 極電磁石の強さも加わり、多くの自由度があることになる。入射器の設計では、これらのパラメタを最適化する必要があるが、パラメタ数が多いということがこれを難しくしている。現実的な時間で最適化を行うためには、効率の良い探索方法が必要となる。入射器の最適化方法としては、これまでに遺伝的アルゴリズムを用いた方法など有力な方法が幾つか提案されており、入射器の設計に使われている [17, 36]。ここでは、マルチオブジェクティブ法と遺伝的アルゴリズム (Multi Objective Genetic Algorithm, MOGA) [17] を用いたビーム輸送条件の最適化結果について紹介する。

[12] ビーム輸送条件は電磁石の収束力や、加速空洞の加速勾配・加速位相によって決まるため、これらのパラメタを一纏めにしてビーム輸送条件と呼ぶ。

[13] 初期電子分布は励起レーザー分布、波長、カソード材質によって決まる。

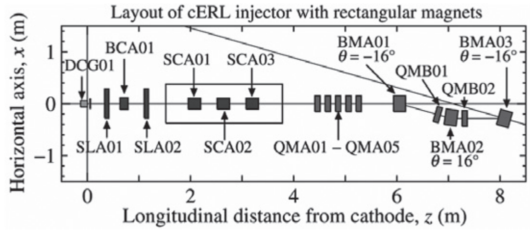


図 56: 輸送条件を最適化するための ERL 入射器配置例。合流部出口で、規格化エミッタンスとバンチ用の 2 つを同時に最小かすることを考える。DC が電子銃、SL がソレノイド電磁石、BC がバンチャー空洞、SC が 2 セルの入射器超伝導空洞、QM が四極電磁石、BM が偏向電磁石を表す。

9.1.1　MOGA を用いた最適化

MOGA の概要を簡単に紹介する。マルチオブジェクティブ法では、複数の量を同時に最適化 (最小化あるいは最大化) することを考える。入射器の場合には、出口での規格化エミッタンスとバンチ長を同時に最小化することが多い。規格化エミッタンスとバンチ長を同時に最小化しようと考えたとき、この 2 つの量は空間電荷効果を通して相反する関係になる。これは、バンチ長を短くすると電荷密度が上昇し空間電荷力が強くなり、エミッタンスが悪化するということを表している。このような相反する 2 つの量を同時に最小化することは、2 つの折り合いをつけるような条件を探すことに相当する。マルチオブジェクティブ法では、複数の最適化したい量を同時に最適化するための方法である。

入射器ビームラインでは、規格化エミッタンスとバンチ長はビーム輸送路条件によって決まる。入射器空洞出口までを考えたとき、ビーム輸送路条件を制御するのは表 1 に示した 14 個の変数となる。ここでは、この変数のセットを輸送条件セットと呼ぶことにする。一つの輸送条件セットはある 14 個の変数の値をもち、この値をもとにシミュレーションを実施することで、一つの輸送条件セットに対する規格化エミッタンスとバンチ長を得ることができる。マルチオブジェクティブ法では、同時に複数の輸送条件セットを保持して、それぞれに対して規格化エミッタンスとバンチ長を計算する。このとき、輸送条件セットの数だけ、規格化エミッタンスとバンチ長の組ができることになる。この規格化エミッタンスとバンチ長の組をそれぞれ水平軸、垂直軸としてプロットすると、最小化しようとしたときに相反する物理量であるため、反比例曲

1	電子銃電圧
2	レーザー初期分布 σ_{x0}
3	レーザー初期分布 σ_{y0}
4	レーザー初期分布 σ_{t0}
5	ソレノイド 1 の強さ
6	ソレノイド 2 の強さ
7	バンチャー空洞 (電場)
8	バンチャー空洞 (位相)
9	SC 空洞 1（電場)
10	SC 空洞 1（位相)
11	SC 空洞 2（電場)
12	SC 空洞 2（位相)
13	SC 空洞 3（電場)
14	SC 空洞 3（位相)

表 1: ERL 入射器で調整可能な項目。最適化計算ではこれらの項目を自由変数として調整することになる。ただし、電子銃の電圧は基本的に高ければ高いほど良いので、通常の最適化計算では印加可能な最大電圧に固定することが多い。

線のような線 (最前線) が形成されることになる。マルチオブジェクティブ法ではこのようにして形作られた最前線をなるべく原点に近づけるような (両方を同時に最小化するような) 輸送条件セットを探索することを行っている。例えば、ここで紹介する最適化例では、同時に 50 個の輸送条件セットを保持するようにしている。50 個の輸送条件から求めた規格化エミッタンスとバンチ長の組に対して、原点から近い条件を与える輸送条件セットをより適応度が高いと評価する。

ここまでは、異なる 50 個の輸送条件セットに対して、50 個の規格化エミッタンスとバンチ長の組を計算して、その結果からなるべく原点に近づくような最前線を得るということ考えてきたが、次に必要なのは、この輸送条件をどのように変化させていくかということである。MOGA で用いるのは遺伝的アルゴリズムである。遺伝的アルゴリズムの詳細はここでは省略するが、50 個の輸送条件に対して、選択、交叉、突然変異という操作を行い、次の世代の 50 個の輸送条件セットを作ることになる。これを繰り返して、適応度の高い輸送条件セットを探索していくことになる。具体的な計算の流れは次のようになる。

1. 50 個の初期輸送条件セットの設定 (乱数からスタートする場合が多い)
2. 50 個の輸送条件セットに対して、粒子トラッキング計算を行い規格化エミッタンスとバンチ長の組を得る
3. 50 個の規格化エミッタンスとバンチ長の組から、輸送条件セットの評価を行う
4. 遺伝的アルゴリズムで次の世代の 50 個の輸送条件セットの生成
5. 設定した世代 (繰り返し回数) に到達するまで、2. - 4. の操作を繰り返す

このような流れとなるが、1 世代毎に 50 個の輸送条件セットに対して空間電荷効果を含んだ粒子トラッキング計算を行うことになり、計算時間は膨大なものとなる。計算時間を短縮化するために、上記の 2. の手順は並列化して計算することが多い。ただしこの場合には、CPU の数が必要となる。このように MOGA を実際に行う場合には、強力な計算機環境が必要となる。

9.1.2 入射器最適化計算の例

図 56 に示す入射器に対して、電子銃から合流部出口までの輸送条件の最適化を行った例を紹介する。輸送条件セットは、表 1 のうちの電子銃電圧を除いた変数に、入射器空洞出口から合流部入口までの間に配置された 5 台の四極電磁石の強さを加えたものとなる。

最適化計算は次のような条件の下で行われた。初期分布の生成には、準乱数 [37] を使用した。また、トラッキング計算には GPT [33] を使用し、空間電荷効果の計算には 3 次元メッシュ法 (sc3dmesh) を用いた。初期電子分布はビア缶分布 (図 10) とした。バンチ電荷は -80 pC とした。また、最適化計算時の電子ビームを構成するマクロ粒子の数は 5 k 個とした。

MOGA を用いて輸送条件を最適化した結果を図 57 に示す。図 57 のように、規格化エミッタンスとバンチ長は相反する関係であることがわかる。表 tab:param に最適化されたビーム輸送条件セットの変数の値を示す。

最適化された輸送条件に対するマクロ粒子数の影響を図 58 に示す。図 58 は、マクロ粒子数を変えたときの規格化エミッタンスの変化が示されている。マクロ粒子数が少ないと計算結果が変化することがわかる。最適化計算では膨大な数の計算を行うため、最適化の初期段階では計算時間を節約するために少ないマクロ粒子数で計算を行っている。最終的な結果を得るには

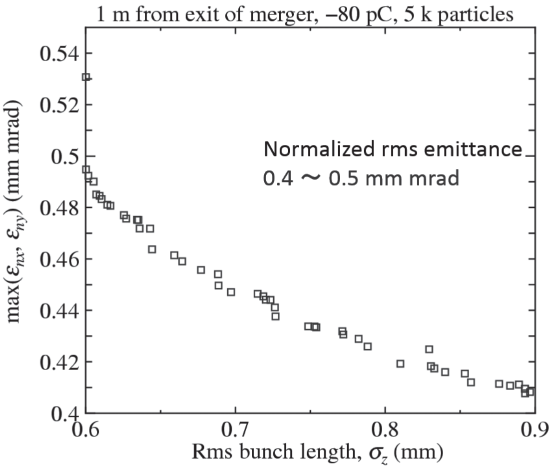


図 57: 最適化された輸送条件の下でのバンチ長とエミッタンスの関係。バンチ長とエミッタンスは合流部出口で計算された。最適化計算では 50 個の異なるビーム輸送条件のセットが作られ、マルチオブジェクティブ法を用いた遺伝的アルゴリズム (MOGA) によって最適化されている。図の中の点はそれぞれ異なるビーム輸送条件をもつ。バンチ長とエミッタンスは相反する関係であることがわかる。

粒子数を増やした計算を行い、結果が安定しているかを見る必要がある。

マクロ粒子数 5 k で最適化されたビーム輸送条件セットに対して、粒子数を 200 k にした計算結果を示す。図 59 に最適化されたビーム輸送条件セットに対する規格化エミッタンス $\varepsilon_{nx}, \varepsilon_{ny}$ の時間発展を示す。また、図 60、図 61 には、それぞれ横方向ビームサイズ σ_x, σ_y と、バンチ長 σ_z の時間発展、運動エネルギー T と、エネルギー広がり σ_E の時間発展を示す。図 62 に、最適化されたビーム輸送条件に対する水平方向位相空間分布を示す。このように、MOGA を用いた最適化計算によって、合流部出口で規格化エミッタンスとバンチ長の両方を同時に最適化することができる。

表 2: 最適化されたビーム輸送条件セット

Parameter	Value
σ_{x0}	0.34 (mm)
σ_{t0}	17.6 (ps)
B_{SLA01}	0.037 (T)
B_{SLA02}	0.024 (T)
V_{BCA01}	96.0 (kV)
$E_{acc,SCA01}$	7.6 (MV/m)
$E_{acc,SCA02}$	13.1 (MV/m)
$E_{acc,SCA03}$	15.0 (MV/m)
ϕ_{SCA01}	$-20.9°$
ϕ_{SCA02}	$-20.8°$
ϕ_{SCA03}	$10.0°$
$K_{1,QMA01}$	-27.4 (m^{-2})
$K_{1,QMA02}$	-4.6 (m^{-2})
$K_{1,QMA03}$	29.8 (m^{-2})
$K_{1,QMA04}$	-2.7 (m^{-2})
$K_{1,QMA05}$	-24.3 (m^{-2})
z_{SLA01}	0.38 (m)
z_{SLA02}	0.71 (m)
z_{BCA01}	1.14 (m)

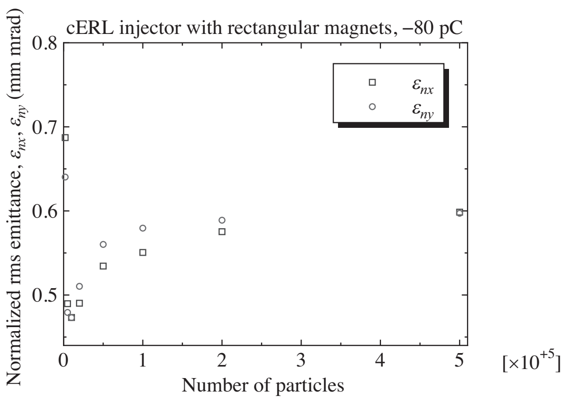


図 58: 最適化されたビーム輸送条件に対して、数値計算で使用したマクロ粒子数を変えたときの規格化エミッタンスの変化。シミュレーションではマクロ粒子でビーム分布を近似して計算するが、その数が少ないと計算結果が変わることになる。

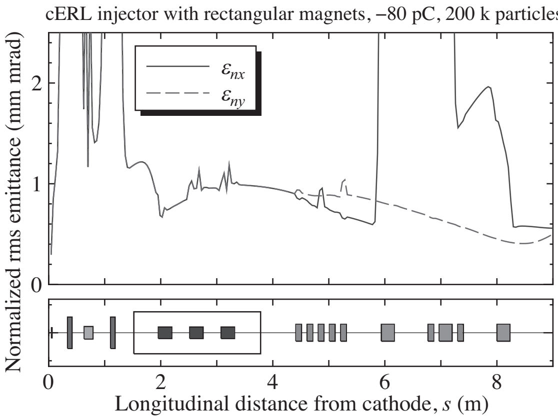


図 59: 最適化されたビーム輸送条件に対する規格化エミッタンス $\varepsilon_{nx}, \varepsilon_{ny}$ の時間発展。

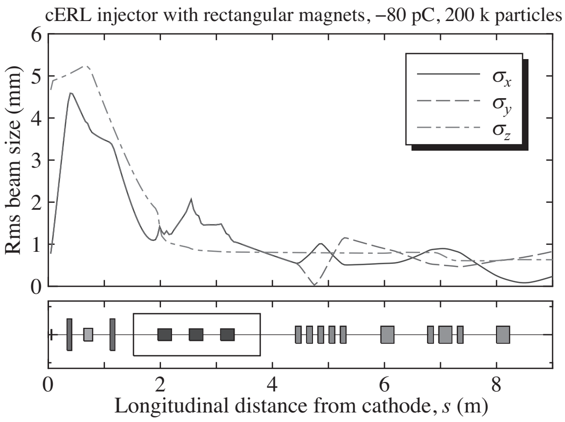


図 60: 最適化されたビーム輸送条件に対する横方向ビームサイズ σ_x, σ_y と、バンチ長 σ_z の時間発展。

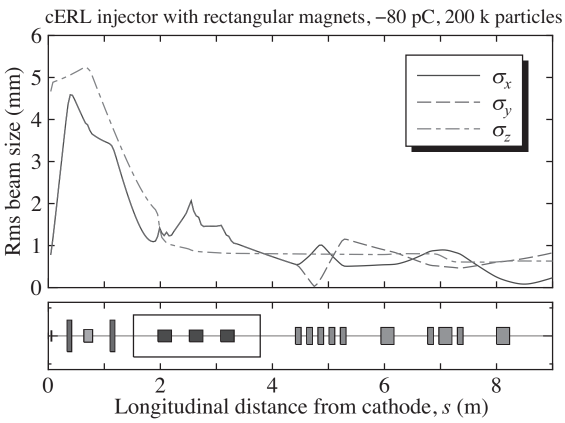


図 61: 最適化されたビーム輸送条件に対する運動エネルギー T と、エネルギー広がり σ_E の時間発展。

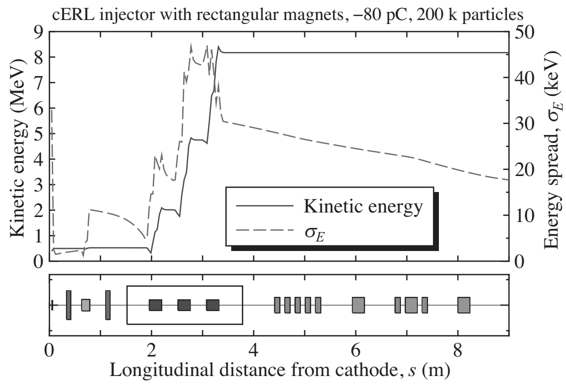


図 62: 最適化されたビーム輸送条件に対する水平方向位相空間分布。

10　合流部の物理

ERL の合流部は、入射器である程度のエネルギーまで加速されたビームを、主加速空洞のある周回部に繋ぐための部分である。この部分では、偏向電磁石を用いて入射器から来たビームを磁場により曲げて、周回部の軌道に合流するようにしている。合流部の最後ではビームの周回部を通ってきた高エネルギービームと入射器から来た低エネルギービームが合流することになる。

合流部手前までは、入射器を構成する要素は直線状に配置されるため、ビームの軌道が曲がることはない。このため、ビームにエネルギー拡がりが生じた場合にも、ビームは直進しているために、エネルギー拡がりが横方向の運動に影響を与えることはなかった。しかし、合流部では偏向電磁石によってビームが曲げられるため、エネルギー拡がりが分散関数を通して横方向の運動に影響を与えることになる。特に、空間電荷効果によって、ビームが合流部を通過する間にもエネルギー拡がりが変化する場合には、通常の分散関数を調整するだけでは、横方向の運動に対する影響を避けることが出来ない。そのため、合流部でのビームの物理を考える際には、空間電荷効果の影響を含んだ分散関数を考える必要がある。

また、合流部ではもう一つ重要な物理現象がある。それは CSR によるエネルギー拡がりの変化である。ERL では短いバンチ長のビームが要求されるため、ビームのエネルギーが低い場合にも、CSR の影響を考慮する必要がある。

ここでは、空間電荷効果によるエネルギー拡がりがビームが走った距離に線形に依存すると仮定して、横方向の射影エミッタンスに与える影響を考る。また、合流部のようなビームエネルギーの低い (~ 10 MeV) 場合での CSR の計算例を紹介する。

10.1　縦方向空間電荷力によるエミッタンス増大とその補償

ここでは、羽島氏によって提案された合流部での縦方向空間電荷力の線形解析 [21] について紹介する。

まず、考えている電子バンチが、合流部内でその横方向と縦方向の分布をほとんど変えないと仮定すると、縦方向空間電荷ポテンシャルは一定に保たれると考えることができる。このような仮定のもとでは、縦方向空間電荷力によって生じるエネルギー拡がりは、電子バンチが進んだ距離 $s - s_0$ に比例するみなせる。ここで、s を理想軌道上でのビーム進行方向の電子バンチの座標、s_0 を偏向電磁石入口の座標とした。以下の議論では、エネルギー拡がりというときに、ビームのエネルギー E_0 で規格化された $\delta = \delta_E/E_0$ を指すものとする。このような仮定のもとでは、線形近似による電子の水平方向の運動は、偏向電磁石の曲率半径を ρ、x を理想軌道からの水平方向のずれとすると、

$$x'' = -\frac{x}{\rho^2} + \frac{1}{\rho}\left(\delta_0 + \delta_{SC} + \kappa(s - s_0)\right) \qquad (10.1)$$

と記述される。ここで、$x'' = d^2x/ds^2$ である。δ_{SC} は、合流部入口までの上流部で縦方向空間電荷力によって生じたエネルギー拡がりである。δ_0 は $s = 0$ でのエネルギー拡がり、κ は要素中での縦方向空間電荷力による規格化されたポテンシャルである。このとき、合流部中での水平方向の運動は、

$$\boldsymbol{x} \equiv (x, x', \delta_0, \delta_{SC}, \kappa) \qquad (10.2)$$

によって記述することができる。この 5 次元のベクトルの $s_0 \to s_1$ についての時間発展は、1 次の転送行列 $R(s_1|s_0)$ を用いて

$${}^t\boldsymbol{x}(s_1) = R(s_1|s_0)\,{}^t\boldsymbol{x}(s_0) \qquad (10.3)$$

と記述できる。この式は、エネルギー拡がりがある場合の運動を記述する、3×3 の行列を拡張したものであり、次のように書くことができる。

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} & R_{15} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} & R_{25} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (10.4)$$

L は要素の長さ、$R_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$ は通常の 3×3 の転送行列である [14]。曲率半径 ρ、曲げ角 θ をもつセクター型偏向電磁石の場合、$R_{11} = \cos\theta$、$R_{12} = \rho\sin\theta$、$R_{13} = \rho(1-\cos\theta)$、$R_{14} = \rho(1-\cos\theta)$、$R_{15} = \rho^2(\theta - \sin\theta)$、$R_{21} = -1/\rho\cdot\cos\theta$、$R_{22} = \cos\theta$、$R_{23} = \sin\theta$、$R_{24} = \sin\theta$、$R_{25} = \rho(1 - \cos\theta)$ となる。また、他の要素 (自由空間、4 極電磁石など) については、各要素の $R_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$ と $R_{14} = R_{15} = R_{24} = R_{25} = 0$ で記述される。この新たな 5×5 の転送行列を用いると、次のように空間電荷分散関数 (ζ_x, ζ'_x) を定義する

[14] 各要素での転送行列については、参考文献 [38] などを参照して欲しい。

ことができる。

$$\begin{pmatrix} \zeta_x(s_1) \\ \zeta'_x(s_1) \\ 0 \\ L(s_1) \\ 1 \end{pmatrix} = R(s_1|s_0) \begin{pmatrix} \zeta_x(s_0) \\ \zeta'_x(s_0) \\ 0 \\ L(s_0) \\ 1 \end{pmatrix} \tag{10.5}$$

ここで、$L(s) = s$ は軌道長を表す。

この空間電荷分散関数 (ζ_x, ζ'_x) を用いると、縦方向空間電荷力による位相空間 (x, x') 中での位置のずれは、

$$\boldsymbol{d} = (\kappa\zeta_x, \kappa\zeta'_x) \tag{10.6}$$

となり、空間電荷分散関数と空間電荷ポテンシャルの積によって記述される。このとき、合流部出口での各バンチスライスは、位相空間中の $\zeta_x x' - \zeta'_x x = 0$ の直線状に整列する。この様子を図 63(a) に示す。

合流部出口におけるエミッタンスは、

$$\varepsilon^2 = (\varepsilon_0\beta_x + D)^2(\varepsilon_0\gamma_x + D'^2) - (\varepsilon_0\alpha_x + DD')^2 \tag{10.7}$$

で評価することができる。ここで、$(\alpha_x, \beta_x, \gamma_x)$ は合流部出口における Courant-Snyder パラメタ、ε_0 は合流部入口での初期エミッタンスである。(D, D') は位相空間中でのバンチスライスの rms 拡がりであり、

$$(D, D') \equiv \kappa_{rms}(\zeta_x, \zeta'_x) \tag{10.8}$$

から計算される。

このように、位相空間中での分布の傾きが、空間電荷分散関数によってバンチスライスが整列する方向とずれていると、図 63(a) に示すようにエミッタンスの増大が生じる。では、これを回避するにはどうすればよいか?合流部ではビーム光学関数を調整できる自由度がないため、合流部手前のマッチング部の 4 極電磁石を調整して、合流部出口でのビーム光学関数を調整してやればよい。合流部出口での位相空間の分布の傾きは、

$$\xi = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2\alpha_x}{\gamma_x - \beta_x}\right) \tag{10.9}$$

で与えられる。一方、縦方向空間電荷力によってバンチスライスが整列される方向は、

$$\xi_{LSC} = \arctan\left(\frac{\zeta'_x}{\zeta_x}\right) \tag{10.10}$$

で計算される。図 63(b) のように、$\xi = \xi_{LSC}$ の場合には、分布の長軸とスライスが整列される方向が一致し、エミッタンスの増大が最小に抑えられる。これを

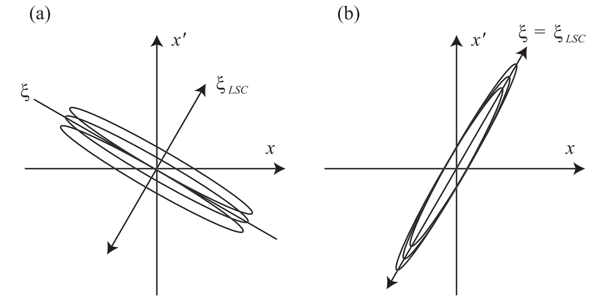


図 63: 合流部での縦方向空間電荷力による射影エミッタンスの増大とその補償。

実現するように合流部手前のマッチング部を調整必要がある。

また、CSR によるエネルギー拡がりによる効果も同様な線形近似によって解析することができ、CSR 分散関数を定義することができる [22]。現実の合流部では、これらの縦方向空間電荷分散関数と CSR 分散関数の効果を同時に最小にするようにしなければならない。

10.2 合流部での CSR の影響

ここでは、ERL 入射器合流部のようなエネルギーの低い領域での CSR について、Sagan による方法 [39] を用いて計算した結果を紹介する [40]。CSR の詳細については、島田氏のテキストや参考文献 [41] などを参照して欲しい。

10.2.1 GPT/CSR の開発

通常よく使用される CSR の 1 次元 wake 計算を含んだコード [43] では、超相対論的な条件が仮定されているため、ERL 入射器のような低エネルギー領域のビームダイナミクスに適用することができない。また、空間電荷効果と CSR の効果を全て含めてより厳密に計算するには、TREDI [44] や TraFic[4] [45] のように、Lienard-Wiechert ポテンシャルをセルフコンシステントに解くことが必要となるが、これは膨大な計算時間を必要とし、繰り返し計算を行うパラメタ最適化には向かない。これらの代わりに、合流部を含む ERL 入射器全体をシミュレートするために、空間電荷計算を含んだ粒子追跡コードである GPT [33] 用に、新たな CSR 計算ルーチン、GPT/CSR を開発した。GPT/CSR で使用しているアルゴリズム [42] では、超相対論的な条件は仮定されておらず、入射器の

ような低エネルギー領域の合流部やシケインでのビームダイナミクスの計算にも適用することができる。

ここでは、GPT/CSR の有効性を示すために、円形軌道上での CSR によるエネルギー損失およびエネルギー拡がりを計算し、`elegant` による結果と解析的な結果とを比較する。また、3 台の偏向電磁石からなる合流部に対して、CSR によるエミッタンス増大を計算した結果についても紹介する

10.2.2 GPT/CSR による計算結果

GPT/CSR は Sagan [42] の方法を用いて、1 次元 CSR wake を計算する。この方法は、電子ビームが超相対論的であるという近似 ($\gamma \gg 1$) を用いていないため、ERL 入射器のような 10 MeV 程度の低いエネルギー領域でも有効である。また、GPT/CSR は、任意のビーム軌道に対して、CSR wake を計算可能であり、安定状態だけでなく過渡状態も扱うことができる。さらに、GPT/CSR は、鏡像電荷を導入することにより、真空チェンバーによる CSR の遮蔽効果の影響も取り入れている。

10.2.3 エネルギー損失とエネルギー拡がり

GPT/CSR、`elegant`、解析式を用いて、半径 $\rho = 1.0\,\mathrm{m}$ の円形軌道に対して、安定状態のエネルギー損失とエネルギー拡がりを計算した。この計算では、バンチ長 $\sigma_s = 0.6\,\mathrm{mm}$、バンチ電荷 -80 pC とした。また、初期の粒子分布は進行方向、横方向ともに Gaussian 分布とした。図 64 に、エネルギー損失 $d\varepsilon/dt$、図 65 に、エネルギー拡がり $d\sigma_\delta/dt$ の計算結果を示す。図 64 中での赤線は、C. Mayes [46] によって導出された解析式による計算結果である。

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{3}\frac{(r_e m_e c^2)c\beta^4\gamma^4}{\rho^2}N\left(1 + (N-1)T(a)\right), \tag{10.11}$$

ここで、$a = 3/2 \cdot \gamma\, 3\sigma_s/(\beta\rho)$ であり、

$$T(a) = \frac{9}{32\pi}\frac{1}{a^3}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{(8a^2)}}\sqrt{\pi}K_{5/6}\left(\frac{1}{8a^2}\right) - 2\pi a\right), \tag{10.12}$$

$K_{5/6}(x)$ は変形ベッセル関数、N はバンチ内での電子数、m_e は電子の質量、r_e は電子の古典半径、c は真空中での光速、γ はローレンツ因子で、$\beta = (1-1/\gamma^2)^{1/2}$ となる。`elegant` は超相対論的な近似が用いられているため [43]、$E_0 > 40$ MeV の場合に限り解析値と一致する。一方、図 64 に示されるように、GPT/CSR は全てのエネルギー領域において解析値と一致している。

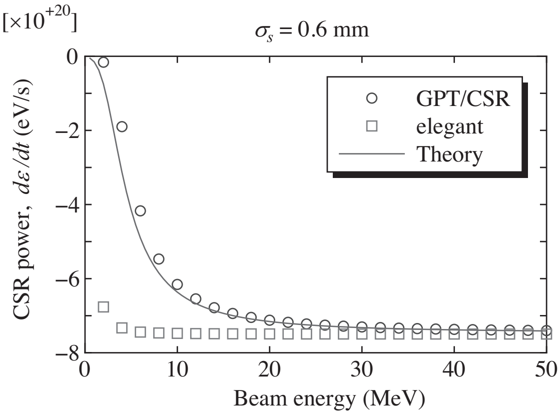


図 64: 安定状態での CSR によるエネルギー損失のビームエネルギー依存性。

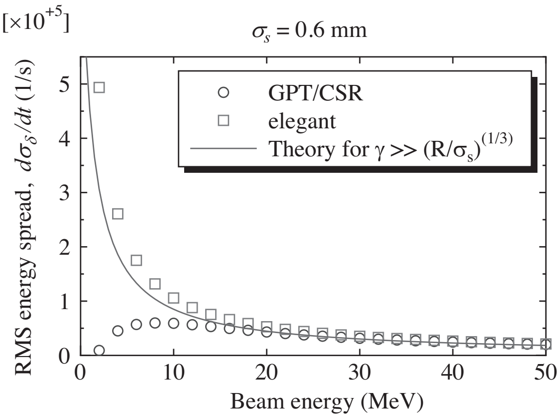


図 65: 安定状態での CSR によるエネルギー拡がりのビームエネルギー依存性。

図 65 の赤線は、$\gamma \gg (\rho/\sigma_s)^{1/3}$ の場合の近似式 [47, 48] から得られたエネルギー拡がりである。

$$\frac{d\sigma_\delta}{dt} \approx 0.22\frac{r_e N c\beta}{\gamma\rho^{2/3}\sigma_s^{4/3}}. \tag{10.13}$$

高いエネルギー領域 ($E_0 > 40\mathrm{MeV}$) では、GPT/CSR、`elegant` ともに近似式による結果を再現している。しかし、低エネルギー領域の極限 ($E_0 \to 0$) では、近似式と `elegant` ではともに発散してしまう。これに対して、GPT/CSR では 0 に近づき、予想通りの結果を示した。以上の結果が示すように、GPT/CSR は広いエネルギー領域で有効である。

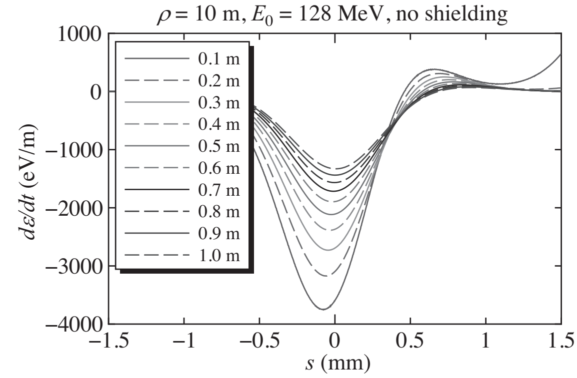


図 66: 遮蔽なしの場合の偏向電磁石出口以降の CSR wake の変化。初期のバンチ長は、0.3 mm。

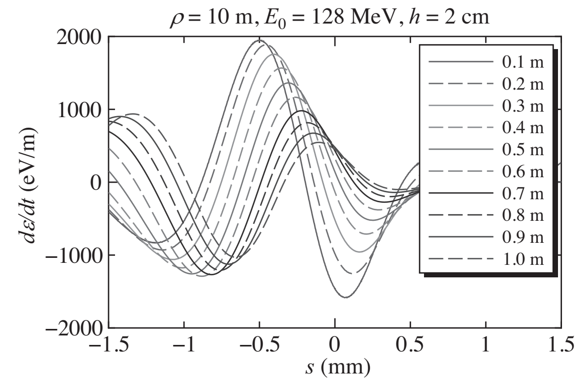


図 67: 遮蔽ありの場合の偏向電磁石出口以降の CSR wake の変化。真空チェンバーの高さは 2 cm。

10.2.4 過渡状態での CSR wake

偏向電磁石の入口や出口直後の過渡状態にある CSR の影響の計算結果を示すために、偏向電磁石出口から自由空間を進むビームについて、GPT/CSR を用いて CSR wake 関数の変化を計算した。計算では、ビームエネルギー 128 MeV、初期のバンチ長 0.3 mm、バンチ内の電荷 −80 pC とした。また、初期の粒子分布は進行方向、横方向とも Gaussian 分布とした。図 66 は遮蔽効果のない場合、図 67 は遮蔽効果のある場合の過渡状態の CSR wake の計算結果を示す。図 67 では、真空チェンバーの高さを 2 cm, 鏡像電荷の数を 32 とした。計算では、半径 $\rho = 10\,\mathrm{m}$ をもつ偏向電磁石の出口を $\Delta s = 0$ m として、この点で CSR は安定状態にあるとし、そこから自由空間を進むうちにどのように CSR wake が変化するかを求めた。図 66、67 が示すように、CSR wake は出口から離れると減少していく。

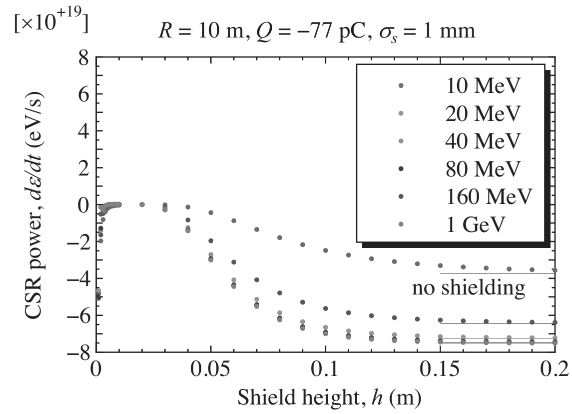


図 68: CSR によるエネルギー損失に対する遮蔽の高さの影響。CSR は安定状態。鏡像電荷の数は 32。

10.2.5 真空チェンバーによる CSR の遮蔽

GPT/CSR を用いて、CSR の遮蔽を $\rho = 10$ m の円形軌道上で計算した。この計算では、CSR は安定状態にあるとした。図 68 は、エネルギー損失の真空チェンバーの高さに対する依存性を示す。計算では、バンチ長を 1.0 mm、バンチ内の電荷を −77 pC、鏡像電荷の数を 32 とした。また、初期粒子分布は、進行方向、横方向ともに Gaussian 分布とした。図 68 の中での直線は、式 (10.11) から計算された遮蔽なしの場合の解析値を示す。遮蔽の高さが増加するに従い、エネルギー損失が解析値に近づくことがわかる。

10.2.6 合流部での CSR の影響

GPT/CSR を使った計算例として、コーネル大学 ERL 計画の合流部での CSR によるエミッタンス増大を計算し、`elegant` による計算結果と比較した。計算では、ビームの運動量を、(a) $p_0 = 10$ MeV/c、(b) $p_0 = 500$ MeV/c とした。また、CSR による効果のみを見るために、空間電荷効果は取り入れていない。図 30 に合流部のレイアウトを示す。合流部には、偏向電磁石 3 台の他に 4 極電磁石 2 台が配置され B3 の出口では分散関数が 0 になるように強さが調整される。また、2 つの運動量に対して同じビーム光学関数を与えるように、エネルギーによってスケールされる。図 69 に水平方向の RMS ビームサイズの変化を、図 70 に水平方向規格化 RMS エミッタンスの変化を示す。これらの図では、横軸は合流部入口からの進行方向の距離を表す。計算では、バンチ長を 0.3 mm、バンチ内の電荷を −80 pC、初期粒子分布を Gaussian 分布とした。図 69、 70 より、(a) $p_0 = 10$ MeV/c

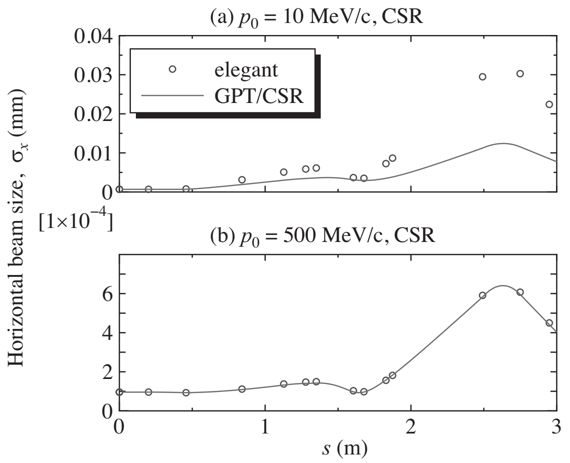


図 69: 合流部 (図 30) での CSR による水平方向 RMS ビームサイズの変化。

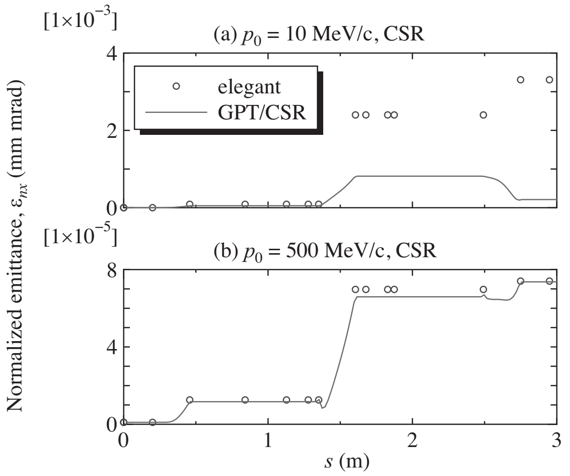


図 70: 合流部 (図 30) での CSR による規格化水平方向 RMS エミッタンスの変化。

のエネルギーが低い場合は、elegant と GPT/CSR の結果で違いが見られた。これは、elegant の CSR 計算が超相対論的な近似を含むため、低エネルギー領域で有効でないことに起因すると推測される。一方、(b) $p_0 = 500$ MeV/c の超相対論的な近似が成り立つ場合には、2 つのコードによる計算結果は良い一致を示した。これらのことから、GPT/CSR は広いエネルギー範囲で有効であることが確認できた。

11　入射器から主空洞へのビーム輸送

ここでは、入射器から主空洞まで低エネルギーの入射ビームを輸送することを考える。前のセクションでは、低エミッタンス輸送のために入射器の輸送条件を最適化する手法を各区間毎 (入射器、合流部) に紹介した。実際のビーム輸送では、低エネルギービームを主空洞で加速されるまで一貫して扱う必要がある。まず、入射器から主空洞までの輸送条件の設計手順について紹介する。そのあと、cERL で実際のビームを設計条件に近づけていくための調整方法 (ビーム光学関数マッチング) について紹介する。

11.1　ビーム輸送条件の設計手順

入射器空洞から主空洞へのビーム輸送条件の設計では、

1. エミッタンス悪化を避けること
2. バンチ長ある程度短く (1 ∼ 3 ps)
3. 周回部に輸送するためのビーム光学関数の調整

が要求される。3 つ目の主空洞出口におけるビーム光学関数の許容範囲は、周回部のビーム光学関数設計によって決まるため、入射器から来るビームの輸送条件をこの範囲内に合わせ込むことが必要となる。

入射器のビーム輸送条件の設計では、数値計算を利用して最適化アルゴリズムによってバンチ長とエミッタンスの 2 つを同時に最小化してきた。ただし、この最小化はある 1 点のみでビーム品質を見ていることになり、さらに下流に輸送する場合には、最適化した点から下流の輸送条件を調整していくことが必要となる。ただし、空間電荷効果が支配的な場合には、ある点で最適化してもその下流に輸送する途中で空間電荷効果によるエミッタンス悪化が生じる場合がある。このため、電子銃から主空洞出口まで一貫したシミュレーションが必要となる。

入射器出口から主空洞までの区間を考えてみると、主に 2 つの目的がある。一つは入射器から合流部の間に配置された四極電磁石によって合流部でのエミッタンス悪化を避けるということである。もう一つは合流部から主空洞までの間に配置された四極電磁石によって、周回部に向けた輸送条件を整えるということである。このように輸送条件を調整するための四極電磁石には、それぞれの役割があることがわかる。

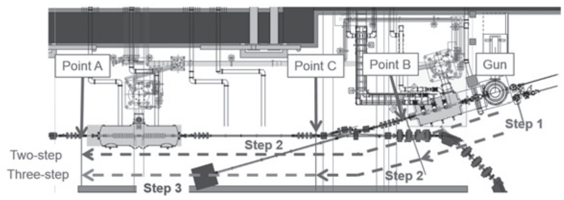


図 71: 電子銃から主空洞出口までの最適化手順。次の 3 つの方法がある。方法 1: 電子銃から主空洞出口まで一度に最適化 (1 段階法)。方法 2: 入射器空洞出口まで最適化したあと、主空洞出口まで最適化 (2 段階法)。方法 3: 入射器空洞出口まで最適化したあと、合流部出口までを最適化し、最後に主空洞出口まで最適化 (3 段階法)。主空洞出口では、周回部へのビーム光学関数マッチングのために、ビーム光学関数がある範囲に制限される。

電子銃から主空洞出口まで一貫したシミュレーションを行うには、途中の四極電磁石の調整も行うことが含まれる。しかしながら、この場合には調整可能な項目数 (自由度) が増えることになり (cERL の場合には、5 台 + 8 台の四極電磁石)、最適化計算がなかなか収束しないという事態に陥る。電子銃から主空洞出口までの一貫したシミュレーションによる輸送条件の最適化は、最良の輸送条件を見つける可能性もあるが、自由度が増えすぎることになり、そこに到達するのが難しいケースも多い。以上のことから考えると、輸送条件の最適化には次の 3 つの方法が考えられる。

1. 電子銃から主空洞出口まで一度に最適化 (1 段階法)
2. 入射器空洞出口まで最適化したあと、主空洞出口まで最適化 (2 段階法)
3. 入射器空洞出口まで最適化したあと、合流部出口までを最適化し, 最後に主空洞出口まで最適化 (3 段階法)

これを模式的に示したのが、図 71 である。電子銃から主空洞出口までの一貫したシミュレーションは、方法 1 に対応する。

ここでは、3 つの方法で最適化した結果について紹介する。まず、主空洞出口 (点 A) でのビーム光学関数の許容範囲は、

- $1 < \beta_x < 5$ m
- $6 < \beta_y < 18$ m
- $-0.3 < \alpha_x < -0.1$

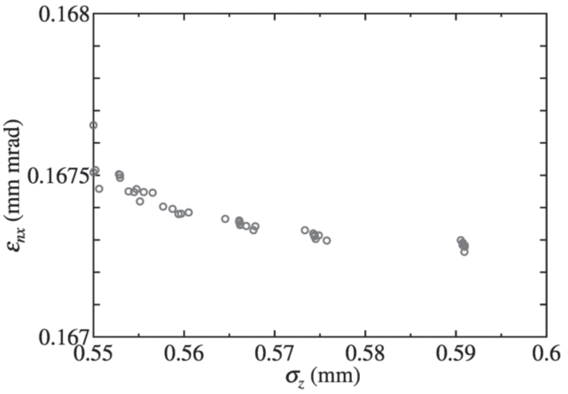


図 72: 入射器空洞出口 (point B) でビーム輸送条件を最適化した結果。$\sigma_z = 0.59$ mm 付近のビーム輸送条件を初期値として、下流の最適化を行う。

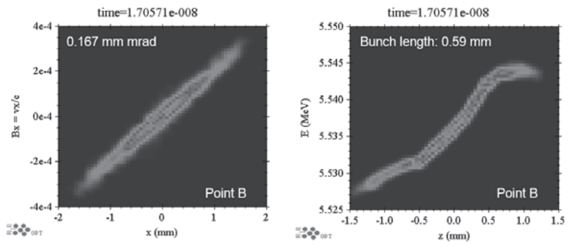


図 73: 入射器空洞出口 (point B) で最適化されたビーム輸送条件のときの位相空間分布。この条件を初期値として下流の最適化を行う。

- $2.5 < \alpha_y < 3.5$

となる。入射器から主空洞へ輸送する場合、最終的にこの条件を満たさなければならない。エミッタンスとバンチ長については、最適化計算ではともに最小化することを条件とした。ここで紹介する計算では、入射ビームのエネルギー 5 MeV、主空洞による加速後のエネルギーを 35 MeV としている。図 71 に示すように、2 段階法では入射器空洞出口 (点 B) を区切り点とし、3 段階法ではこれに合流部出口 (点 C) を区切り点として追加する。

図 72 に、点 B におけるビーム輸送条件を最適化した結果を示す。ここまでの最適化では、励起レーザー条件 (スポット径、時間パルス幅)、ソレノイド電磁石、バンチャー空洞 (加速電圧)、入射器超伝導空洞 (加速勾配と位相) が調整可能な項目となっている。2 段階法と 3 段階法では、図 72 の $\sigma_z = 0.59$ mm 付近のビーム輸送条件を初期値として、下流の最適化を行った。このときの横方向と縦方向の位相空間分布を図 73 に示す。

2 段階法では、点 B から点 A まで 13 台の四極電

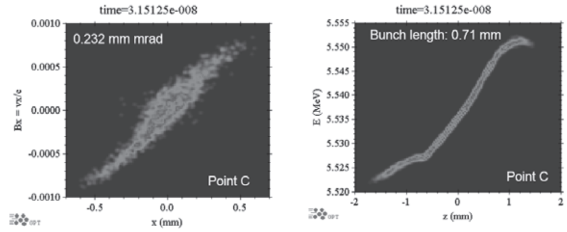


図 74: 合流部出口 (point C) で最適化されたビーム輸送条件のときの位相空間分布。入射器空洞から合流部の間にある 5 台の四極電磁石の強さが最適化された。この条件を初期値として主空洞出口までの最適化を行う。

磁石が調整されることになる。エミッタンスを悪化させずに、点 A のビーム光学関数が許容範囲に収まるように最適化計算が行われる。3 段階法では、点 C まで 5 台の四極電磁石が調整される。この場合は主に合流部でのエミッタンス悪化を最小に抑えるような調整をすることになる。図 74 に 3 段階法で実施した点 C における位相空間分布を示す。この条件を初期値として 点 A までの最適化 (8 台の四極電磁石の調整、目的は周回部に向けたビーム光学関数の調整) が行われる。

図 75 に 3 つの方法で最適化したときの電子銃から主空洞出口までの規格化エミッタンスの時間発展を示す。また、図 76 にビーム光学関数 β_x, β_y の時間発展を示す。1 段階法では点 A のビーム光学関数条件を満たすがエミッタンスが大きい、2 段階法ではエミッタンスはそこそこ小さいがビーム光学関数条件を満たさない、3 段階法ではエミッタンスが最も小さくかつ光学関数条件にかなり近いという結果となった。1 段階法の場合が最も良い輸送条件を探し当てることが可能なはずであるが、自由動が多いために最良の解に辿り着けない結果となった。

以上の結果を踏まえて、cERL の輸送条件の設計では、主に 3 段階法を用いている。ただし、3 段階法で得られた輸送条件を初期値として、1 段階法による輸送条件の最適化をさらに追加して、よりエミッタンスを下げる方法も試みている。

11.2 ビーム輸送路の調整方法

cERL では光陰極を用いた DC 電子銃から 390 keV [15] の電子ビームが生成され、入射器超伝導空洞で 2.4

[15] ここでは、運動エネルギー $T = (\gamma - 1)mc^2$ を用いる。

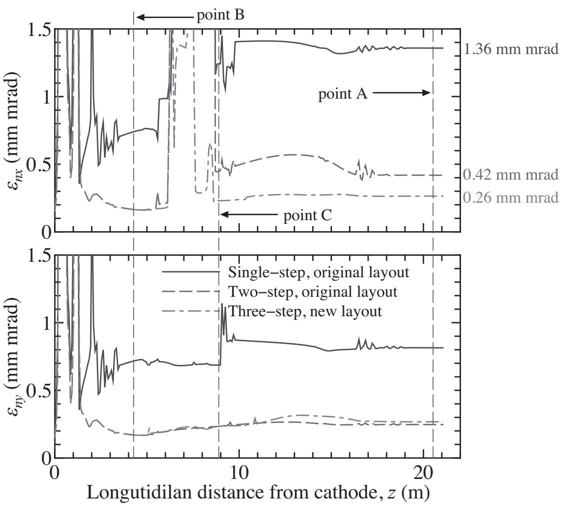


図 75: 3 つの方法で最適化したビーム輸送条件。電子銃から主空洞出口までの規格化エミッタンスの時間発展を示す。

MeV まで加速される。入射器で加速された電子ビームは、合流部で周回部軌道に入り、主空洞で 19.4 MeV まで加速される。19.4 MeV の電子ビームは周回部を通って再び主空洞に入り、エネルギー回収され主ダンプに輸送される。現在の典型的な運転条件は、バンチ電荷 0.5 pC、繰り返し周波数 162.5 MHz で平均ビーム電流 80 μA の CW 運転となっている。バンチ電荷 0.5 pC は、繰り返し周波数 1.3 GHz の CW 運転におけるピーク電流 0.65 mA に相当し、空間電荷効果が現れてくる電荷量となっている。特に、電子銃から主空洞までの区間では、エネルギーが 390 keV ～ 2.4 MeV と低いため、空間電荷効果の制御とともに、残留磁場や環境磁場等による影響も補正していく必要がある。この領域では、4 次元の横方向位相空間 (x, x', y, y') と、進行方向位相空間 (z, δ) が空間電荷効果を通して結合するため、6 次元位相空間を制御することが必要となる。ただし、実際のビーム調整では、横方向と縦方向の運動の結合を避けて、空間電荷効果の無視できる非常に低いバンチ電荷 (数 10 fC) から調整を開始している。横方向と縦方向をそれぞれ独立に調整して補正方法を確立したのちに、バンチ電荷を増強して空間電荷効果を含めた 6 次元位相空間制御を行っている。ここでは、横方向のビーム光学関数の補正方法開発とその試験結果について紹介したあと、縦方向のビーム輸送条件の試験結果について紹介する。

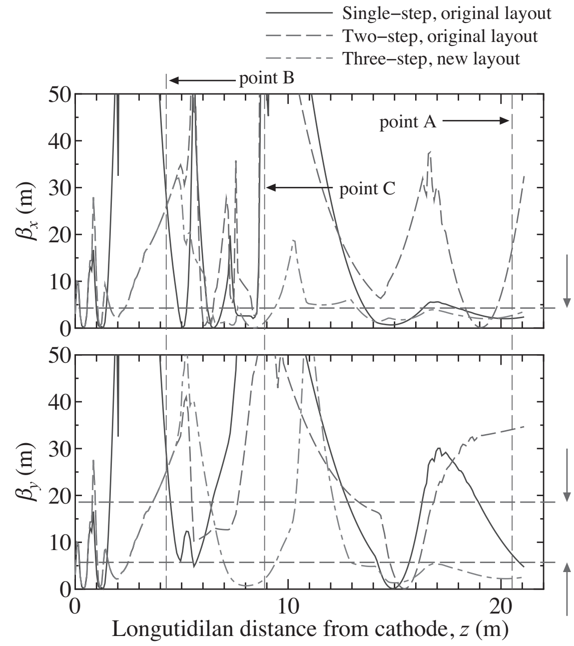


図 76: 3 つの方法で最適化したビーム輸送条件。電子銃から主空洞出口までのビーム光学関数 β_x, β_y の時間発展を示す。

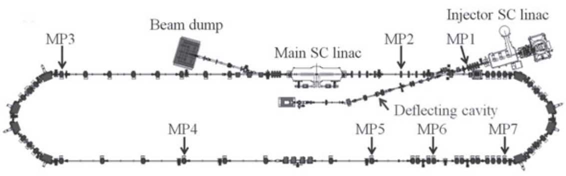


図 77: cERL におけるビーム光学関数マッチング箇所。MP1 ～ MP7 の 7 箇所でマッチングを行う。

11.2.1　ビーム光学関数の最適化手法

横方向のビーム光学関数を設計条件に合わせるための手法として、四極電磁石の k 値を変えたときのビームサイズの変化 (Q-scan の応答) を下流のスクリーンモニタで測定し、その応答が設計条件と同じになるように調整するという方法を用いる。測定された Q-scan の応答からビーム光学関数 α, β とエミッタンス ε を求めて、これらを補正することもできるが、空間電荷効果の支配的なエネルギー領域に適用するために、ビーム光学関数の代わりにビームサイズの応答を測定と設計条件で比較する方法を用いることとする。電子ビームが加速されて空間電荷効果を無視できるエネルギー領域では、ビームサイズの応答からビーム光学関数を求めて、それを補正するように拡張することは容易である。

まず、横方向のビーム光学関数の設計条件を合わせ

る手法について紹介する。図 78 に示すように、ここで紹介するビーム光学関数の最適化手法では、5 台の四極電磁石と 1 台のスクリーンモニターを用いる。補正の流れは以下のようになる。最下流の四極電磁石 (Q5) の収束力 (k 値) を変えながら、その下流にあるスクリーンモニターで rms ビームサイズを測定し、Q5 に対するビームサイズの応答関数を得る。この測定された応答関数を設計条件の応答関数（ターゲット）と比較し、この差が小さくなるように上流の四台の四極電磁石 (Q1, Q2, Q3, Q4) の k 値を補正する。

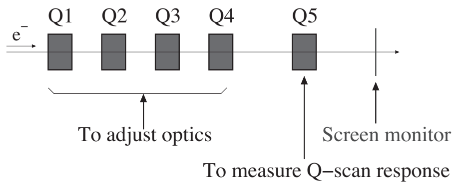


図 78: 5 台の四極電磁石とビームサイズ測定用のスクリーンモニタを用いたビーム光学関数マッチング法の模式図。

次に、具体的な最適化手順を示す。まず最初のステップとして、ターゲットとなる応答関数を求める。Q5 の収束力の値を k とし、これを Δk ずつ変化させ、そのときのスクリーンモニター上での水平・垂直方向の rms ビームサイズ σ_{xt}, σ_{yt} を計算する。具体的には、$i = 1, 2, ..., n$ として、n 個の収束力、

$$k_i = k_0 + \left(i - 1 - \frac{n-1}{2}\right)\Delta k, \tag{11.1}$$

に対してビームサイズを計算する。ここで、n は奇数とし、k_0 は設計条件の k 値であるとする。このとき、ターゲットの応答関数は、

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_{xt}(k_1) & \sigma_{yt}(k_1) & \dots & \sigma_{xt}(k_n) & \sigma_{yt}(k_n) \end{pmatrix}^T,$$

と求まる。空間電荷効果の支配的な場合には、空間電荷効果を含んだ粒子トラッキングコードを使用して、ターゲットの応答関数 T を求める。空間電荷効果を無視できる場合には、Q5 入口のビーム光学関数 α, β とエミッタンス ε を初期値として、Q5 とスクリーンモニタまでの転送行列を用いて、T を計算することもできる。

2 番目のステップとして、n 個の k_i に対して、実際の加速器でビームサイズ σ_{xm}, σ_{ym} を測定する。測定された応答関数を $M = (\sigma_{xm}(k_1)\ \sigma_{ym}(k_1)\ \dots\ \sigma_{xm}(k_n)\ \sigma_{ym}(k_n)\ )^T$ とする。ターゲット応答関数と測定された応答関数の差 $\Delta M = (M - T) = (\Delta\sigma_{xm}(k_1)\ \Delta\sigma_{ym}(k_1)\ \dots\ \Delta\sigma_{xm}(k_n)\ \Delta\sigma_{ym}(k_n)\ )^T$ を求める。この差が設計条件とのずれを表す。

3 番目のステップとして、これを補正するための応答行列を測定する。このために、Q1 の k 値を設計条件から ΔK だけずらした状態で、Q5 の応答関数を測定する。これを $M_{Q1} = (\sigma_{xm,Q1}(k_1)\ \ \sigma_{ym,Q1}(k_1)\ \dots\ \sigma_{xm,Q1}(k_n)\ \ \sigma_{ym,Q1}(k_n)\ )^T$ とする。ΔK を加える前の測定結果との差 $\Delta M_{Q1} = (M_{Q1} - M) = (\Delta\sigma_{xm,Q1}(k_1)\ \ \Delta\sigma_{ym,Q1}(k_1)\ \dots\ \Delta\sigma_{xm,Q1}(k_n)\ \ \Delta\sigma_{ym,Q1}(k_n)\ )^T$ は、Q1 に ΔK だけ加えたときの応答関数の変化量を表すことになる。Q1 の k 値を元の値に戻したあと、同様の測定を Q2, Q3, Q4 に対して行い、$\Delta M_{Q2}, \Delta M_{Q3}, \Delta M_{Q4}$ を求める。これらの測定結果から補正量を計算するための応答行列を求めることができる。応答行列は、

$$R = \begin{pmatrix} \Delta M_{Q1} & \Delta M_{Q2} & \Delta M_{Q3} & \Delta M_{Q4} \end{pmatrix}, \tag{11.2}$$

となる。ΔK が小さいとして応答が線形であると仮定すると、Q1, Q2, Q3, Q4 のそれぞれの四極電磁石の k 値を $(\Delta K_{Q1}\ \ \Delta K_{Q2}\ \ \Delta K_{Q3}\ \ \Delta K_{Q4}\ )^T$ だけ変化させたときの応答関数の変化量は、

$$\frac{R}{\Delta K}\begin{pmatrix} \Delta K_{Q1} \\ \Delta K_{Q2} \\ \Delta K_{Q3} \\ \Delta K_{Q4} \end{pmatrix}, \tag{11.3}$$

となる。これより、$(\Delta K_{Q1}\ \ \Delta K_{Q2}\ \ \Delta K_{Q3}\ \ \Delta K_{Q4}\ )^T$ が、ターゲット応答関数と測定された応答関数の差 ΔM を生じさせると考えると、

$$\Delta M = \frac{R}{\Delta K}\begin{pmatrix} \Delta K_{Q1} \\ \Delta K_{Q2} \\ \Delta K_{Q3} \\ \Delta K_{Q4} \end{pmatrix}, \tag{11.4}$$

とすることができる。このとき、R の逆行列 R^{-1} を求めることで、ターゲット応答関数と測定された応答関数の差 ΔM から Q1, Q2, Q3, Q4 の補正量を、

$$\begin{pmatrix} \Delta K_{Q1} \\ \Delta K_{Q2} \\ \Delta K_{Q3} \\ \Delta K_{Q4} \end{pmatrix} = \Delta K R^{-1} \Delta M, \tag{11.5}$$

と求めることができる。以上に示した方法で、Q5 の応答関数を設計と合わせることができる。手順をまとめると次のようになる。

1. ターゲット応答関数 T の計算
2. Q5 応答関数 M の測定
3. Q1, Q2, Q3, Q4 の応答行列 R の測定
4. Q1, Q2, Q3, Q4 の補正量の計算と設定

この手順をターゲット応答関数と測定された応答関数の差 ΔM が小さくなるまで繰り返す。

この方法では、応答は線形であるということ以外は何も仮定を導入していないため、現実の応答を利用して直接加速器パラメタの最適化を実施していることに対応する。このため、加速器のモデルに依存せずに補正できるところが長所となる。ただし、線形な応答を仮定しているため、設計条件と実際の条件が離れている場合には、設計条件に収束しない可能性もある。この方法では、ある程度設計条件に近い条件から開始して、繰り返し補正を実施することが必要となる。次のセクションでは、この方法を cERL 加速器に適用して、横方向のビーム輸送路光学関数の補正を行った例を紹介する。

また、縦方向のビーム輸送条件の補正についても、基本的には横方向の場合と同じ、加速器要素のパラメタを変えたときのビーム条件の応答を測定・補正する方法を用いることができる。縦方向の場合には、四極電磁石の k 値の代わりに、高周波空洞の加速電圧、加速位相を変えたときのバンチ長、エネルギー拡がりの応答を測定し、これを設計条件と合わせるように補正することになる。

11.2.2 cERL における横方向輸送条件の最適化

cERL では、前のセクションで紹介した方法を用いて、上流から横方向のビーム輸送路光学系の補正を行っている。縦方向については、基本的にエネルギーとエネルギー拡がりを測定しながら加速空洞の加速電圧と位相の調整を行っている。空間電荷効果が顕著になるバンチ電荷では、より精密な加速電圧と位相の調整が必要となるため、バンチ長に対する応答を測定する方法を試験した。

横方向の輸送条件の最適化にあたっては、最上流の電子銃から補正を行っている。cERL の電子銃は DC 光陰極電子銃を用いており、160 mm のギャップの間に 390 kV を引加して電子ビームを生成・加速している。この区間では、電極形状による横方向の収束・発散力が働き、これをモデルで正確に表現することが重要となる。まず、空間電荷効果の効かない極めて低い

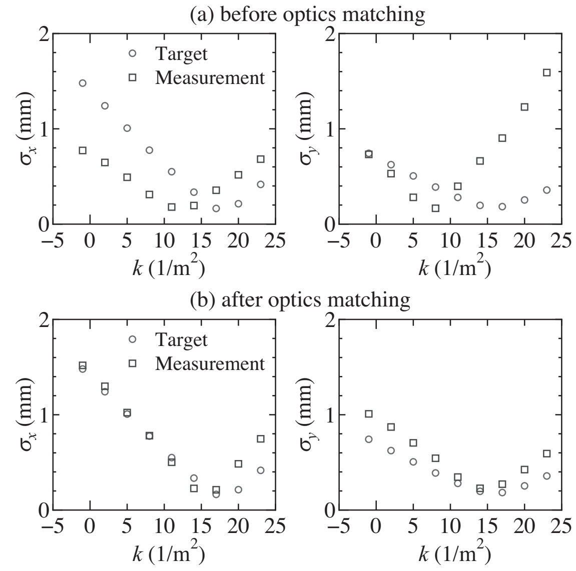
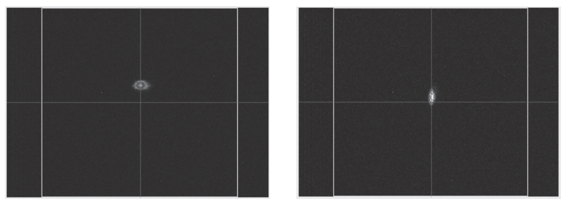


図 79: 合流部入口のマッチング点 MP1 におけるビーム光学関数のマッチング結果。マッチング前と後の Q5 の強さを変えたときのビームサイズの応答を示す。



(a) before optics matching　(b) after optics matching

図 80: 合流部入口のマッチング点 MP1 における横方向ビームプロファイルの測定結果。マッチング前と後のプロファイルの変化を示す。

バンチ電荷 (数 10 fC) で収束・発散力の測定を行い、実験結果をモデルで再現できるようにしている [49]。390 keV に加速された電子ビームは、ソレノイド電磁石による横方向の収束力を受けたあと、バンチャー空洞 [50] でバンチ圧縮され、入射器空洞で 2.4 MeV まで加速される。入射器空洞による加速では、電子ビームを空洞の中心に合わせて通すことが、低エミッタンスビームを保持するうえで重要となる。このために、入射器空洞の高次モード信号を利用したビーム位置モニタの開発を行い、これを用いて軌道調整試験を行っている [51]。このように入射器空洞上流では、電子銃、ソレノイド電磁石、バンチャー空洞と入射器空洞による影響を総合的に調整して、輸送条件の最適化を行っている。

入射器より下流では、輸送条件の調整のために四極電磁石を用いる。主空洞で加速されたあともビーム

エネルギーは 19.4 MeV と低いため、電磁石自身による残留磁場や、真空ゲージの磁石が作る環境磁場等の影響を強く受けてしまう。このため、設計の輸送条件に近づけるには、上流から四極電磁石の補正を行っていく必要がある。これを実施するために、前のセクションで紹介した、5 台の四極電磁石を一セットにした輸送条件補正法を用いている。周回運転のときには、図 77 に示す 7 箇所のマッチングポイント (MP) で補正を行っている。応答行列 R の逆行列を求める際には、特異値分解 (SVD 法) によって疑似逆行列を求めている。実際の補正では、測定誤差の影響を考慮して 4 個のうちの 2 個の固有値を用いて疑似逆行列を計算している。

ここでは、バンチ電荷 0.5 pC の運転条件時のマッチング結果について紹介する。図 79 に合流部にあるマッチングポイント MP1 における輸送条件補正の結果を示す。応答関数のターゲット値は、空間電荷効果を含む粒子トラッキングコードである General Particle Tracer (GPT) [33] を用いて計算された。図 79 の (a) は補正前の Q5 の応答関数を示している。補正前は、垂直方向の応答関数の測定値がターゲットから大きくずれていることがわかる。この状態から前のセクションで示した輸送条件の補正を実施した。補正を 3 回実施したあとの応答関数を図 79 の (b) に示す。完全に一致しているわけではないが、かなりターゲット応答関数に近くなっていることがわかる。図 80 に補正前後のビームプロファイルを示す。応答行列の測定時間は、1 回あたり 5 分程度であり、ここでの補正には 20 分程度を要している。MP1 ではエネルギーが 2.9 MeV であり、空間電荷効果がまだ残る領域であるが、この方法によって空間電荷効果を含めて輸送条件を補正できることが確認された。

図 81 に合流部と主空洞の間にあるマッチングポイント MP2 における輸送条件の補正結果を示す。こちらも 3 回補正を実施し、ほぼ設計条件に補正できていることがわかる。このように、5 台の四極電磁石を一セットにして、測定された応答行列を用いる方法で、横方向の輸送条件を補正できることが確認された。cERL の運転では、これらの補正は、毎日行うわけではなく、輸送条件を大きく変えたときに実施している。主空洞下流のエネルギー 19.4 MeV の領域も同様の方法でマッチングを実施し、ビームサイズを小さく抑えて輸送できることが確認されている。

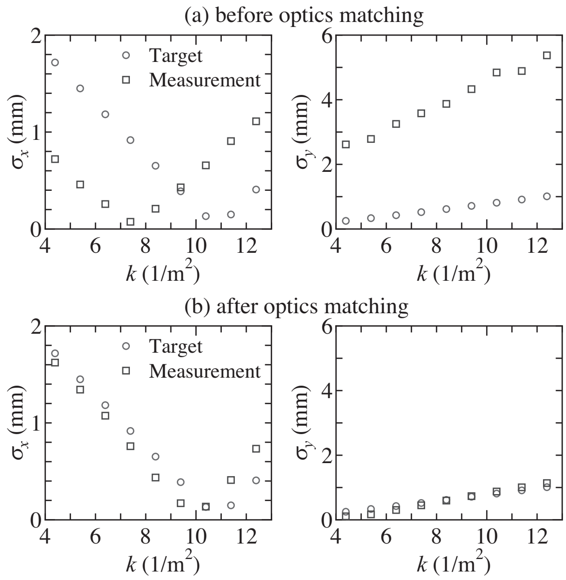


図 81: 主空洞入口のマッチング点 MP2 におけるビーム光学関数のマッチング結果。マッチング前と後の Q5 の強さを変えたときのビームサイズの応答を示す。

11.2.3 縦方向輸送条件の応答測定

縦方向の輸送条件の最適化には、高周波加速空洞の加速電圧と位相を補正することが必要となる。これまでの空間電荷効果が比較的弱いバンチ電荷では、各空洞下流のエネルギーが設計条件になるように調整を実施することで、輸送条件を補正してきた。しかしながら、バンチ電荷を増強して空間電荷効果が支配的になってくると、より詳細な加速電圧と位相の調整が必要となってくる。最終的には、バンチ長とエネルギー拡がりに対する、加速電圧と位相の応答を測定して補正することが目標であり、その準備として、バンチャー空洞の加速電圧とバンチ電荷を変えたときのバンチ長の応答関数測定を行った。バンチ長は、図 77 に示すように、入射器診断ラインに設置された偏向空洞 [52] を用いて測定された。

測定時のバンチ電荷は 7.7 pC であり、これは 1.3 GHz で平均ビーム電流 10 mA に相当する。バンチ電荷 7.7 pC では空間電荷効果が支配的であり、縦方向と横方向の輸送条件が結合する。まず、横方向の輸送条件の調整を実施したあとに、バンチ長の応答測定を行った。図 82 にバンチャー空洞の加速電圧を変えたときのバンチ長の応答を示す。シミュレーションの応答は GPT によって計算された。エネルギー合わせによる位相調整のみを実施したあとの測定結果であるが、バンチャー電圧に対するバンチ長の応答は、モデ

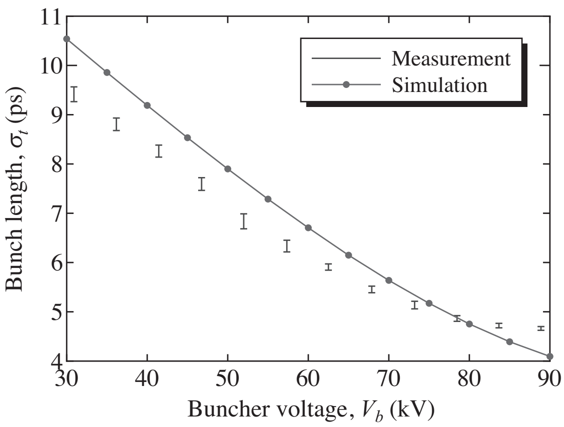


図 82: バンチャー空洞の加速電圧をスキャンしたときのバンチ長の変化の測定結果。バンチ長は図 77 の入射器診断ラインにある偏向空洞を用いて測定された。

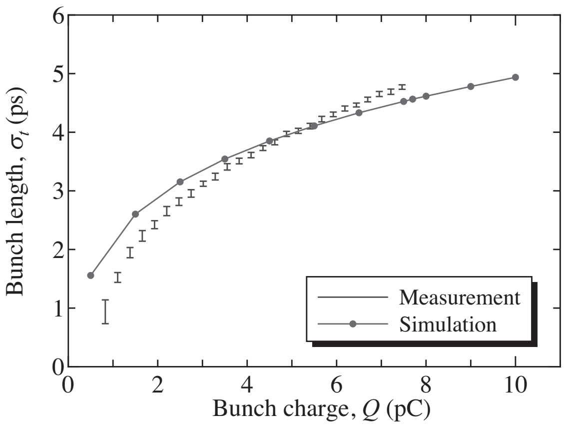


図 83: バンチ電荷を変えたときのバンチ長の変化の測定結果。バンチ長は図 77 の入射器診断ラインにある偏向空洞を用いて測定された。

ル計算から大きくずれていないことが確認された。

図 83 にバンチ電圧を変えたときのバンチ長の応答を示す。バンチ電荷は空間電荷効果の効かない微小電荷から、7.7 pC まで増強された。シミュレーションの応答と測定結果を比較すると、かなり近い応答になっていることが確認された。このことより、エネルギー合わせによる位相調整のみで、ある程度設計条件に近づけられることが確認された。

バンチ圧縮条件は、バンチャー空洞だけでなく入射器空洞の加速電圧と位相にも依存するため、次の段階として、それらの応答行列を測定し、それを用いた補正法の試験を行う予定である。また、空間電荷効果を介して、横方向の運動が縦方向の運動にも影響を与えるため、6 次元位相空間の応答を合わせるように補正法を拡張していく予定である。

12 加速・減速ビームのオプティクス設計

12.1 高調波による Beam Break Up (HOM BBU) [53–56]

ビームが空洞の中心からずれた場所 ($x \neq 0$) を通過すると、横方向にキックをする高調波（Higher-Order Mode, HOM）が発生する。このように、ビームに影響をあたえるような電磁場を wake field と呼び、エミッタンスが悪化したり、ビームを失ったりするビームブレークアップ（Beam Break Up, BBU）が発生する。これは、加速空洞が長距離並ぶ大型の線形加速器で問題になっており、リニアコライダー (ILC) でも懸念されている。一方、ERL では周回して戻ってきたビームが wake filed を強める場合もある。加速空洞が 100 台以上並ぶ GeV クラスの ERL で深刻な問題となっており、安定にビームを運転できる平均電流の上限を決めてしまう要因となっている。運動量 p の電子が空洞入り口で $x = 0$, $x' = 0$ で入射した場合を考える（実はキックを受ける側の電子が $x \neq 0$, $x' \neq 0$ であっても不安定性には寄与しない）。ここで、x' は x の軌道上の位置 s の微分であるが、水平方向の運動量を p_x で次のように書くこともできる。

$$x' = \frac{p_x}{p}, \tag{12.1}$$

空洞の数は一つで、加速量は十分小さいものとする。前方の電子バンチが空洞の中心から x だけずれた場所を通過すると、wake field, $V(t)$ を空洞の中に残す。この $V(t)$ は時間の関数である。時間 の電流が生成した wake field を時間 t の電子が感じるものとすると、電流 $I(t)$ と wake function, $W(t)$ と呼ばれる空洞特有の関数で表すことができる。

$$V(t) = \int_{-\infty}^{t} W(t-\tau)x(\tau)I(\tau)d\tau. \tag{12.2}$$

このときに後方の電子にキック $x'(x' \ll 1)$ を与える。すると、空洞出口の電子の角度 $x'(t)$ は次のように表すことができる。

$$x'(t) = \frac{p_x(t)}{p} = \frac{eV(t)}{pc}. \tag{12.3}$$

次に周回ループを通過することになる。図 84 に模式図を示す。周回ループのビーム輸送はシンプルに線形オプティクスのみで決まるとする。ここで、6 次元

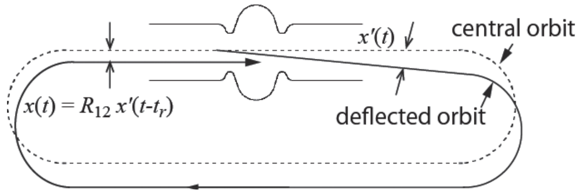


図 84: 空洞によるキックと周回ループの軌道の模式図。

ベクトル $(x, x', y, y', z, p/p)$ に対する転送行列 R を考える。転送行列 R_{12} の成分を用いると、再び空洞の入り口に戻った時の位置 $x(t)$ は次のようになる。

$$x(t) = R_{12}x'(t - t_r). \tag{12.4}$$

ここで、t_r は周回ループを通過するためにかかる時間である。式 (12.3) と (12.4) から、周回後の $x(t)$ について

$$x(t) = \frac{eR_{12}\int_{-\infty}^{t-t_r} W(t-t_r-\tau)I(\tau)x(\tau)d\tau}{pc}, \tag{12.5}$$

という式が導かれる。$R_{12} = 0$ のときは、ビームが $x = 0$ の位置に戻り、新たに wake field を増幅させることがないので安定である。しかし、$|R_{12}|$ が大きい時には、周回後に x 方向の位置のオフセットが拡大することもある。HOM BBU が発生するかどうかは、$V(t)$ が増幅するか減衰するかで決まる。具体的に不安定になる条件を求めるために $V(t)$ について書き下す。

$$V(t) = \frac{eR_{12}\int_{-\infty}^{t} W(t-\tau)I(t')V(\tau-t_r)d\tau}{pc}. \tag{12.6}$$

この積分方程式を解くために $V(t) \propto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ とすると、固有値方程式が得られる。$\mathrm{Im}(\omega)$ の符号が正の時には $V(t)$ は減衰し、負のときは増幅する。$\mathrm{Im}(\omega) = 0$ のときが BBU が発生しない平均電流の閾値 I_{th} であるとみなすことができる。簡単のためにある特定のモードの高調波周波数 m のみを考慮すると、次のような式が得られる。

$$I_{th} = -\frac{2pc}{e\frac{\omega_m}{c}\left(\frac{R_m}{Q_m}\right)Q_m R_{12}\sin(\omega_m t_r)}. \tag{12.7}$$

ここで、R_m はシャントインピーダンス、Q_m は振動の継続時間を表す無次元量で、空洞固有のパラメータである。その特定のモード m の wake function と次のような関係がある。

$$W(t) = \left(\frac{R_m}{Q_m}\right)\frac{\omega_m^2}{2c}\mathrm{e}^{-(\omega_m/2Q_m)t}\sin\omega_m t. \tag{12.8}$$

この単純化したモデルから、いくつかのことがわかる。

- R_m の大きいモードが、平均電流の閾値 I_{th} に一番影響がある。
- $R_{12}\sin(\omega_m t_r) > 0$ であれば常に安定（しかし、トラッキングの結果によると閾値が存在 [55])。
- $|R_{12}|$ の小さいオプティクスがいい。(すなわちベータ関数が小さい)
- 高調波の周波数 ω_m と周回時間 t_r の関係が重要。

これらの結果から、空洞の wake function と線形加速器と周回ループのオプティクスの最適化が必要不可欠であることがわかる。

これまでは、水平方向のみを考えてきたが、同じように垂直方向にも HOM BBU は発生する。ここで、水平・垂直方向の角度 のカップリングがある場合を考える。そのときは、電子の位置を

$$x \to x\cos\theta + y\sin\theta, \tag{12.9}$$

とし、転送行列の R_{12} を以下の式で置き換えて議論することができる。

$$\begin{aligned} R_{12}^{*} = R_{12}\cos^2\theta \quad &+ \quad (R_{14}+R_{32})\sin\theta\cos\theta \\ &+ \quad R_{34}\sin^2\theta. \end{aligned} \tag{12.10}$$

カップリングによっては R_{12}^{*} を小さくすることができるため、周回部のオプティクスのカップリングの調整で電流閾値を上げることができる。

実際には、wake function は

$$W(t) = \sum_m \left(\frac{R_m}{Q_m}\right)\frac{\omega_m^2}{2c}\mathrm{e}^{-(\omega_m/2Q_m)t}\sin\omega_m t, \tag{12.11}$$

と、モードの足しあわせになっており複雑である。また、100 台以上の空洞が並んで長大な上に、式 (12.3) では一定とした運動量 p が加速によって徐々に変化していく。ひとつの空洞であれば、 R_{12}^{*} や周回時間 t_r の最適な解が簡単なモデルでわかるが、数多くの全ての空洞に対して最適化するにはトラッキングによるシミュレーションが必要である。一方で、空洞が数多くあるときに、効果的に電流閾値を上げる方法がある。加速空洞毎に高調波の周波数を変える方法で、HOM randomization と呼ばれる。高調波の周波数が ω_m を中心に $\sigma_{\omega m}$ のばらつきがあると、式 (12.8) は、

$$W(t) = \left(\frac{R_m}{Q_m}\right)\frac{\omega_m^2}{2c}\mathrm{e}^{-(\omega_m/2Q_m)t}\mathrm{e}^{-\sigma_{\omega m}^2 t^2/2}\sin\omega_m t, \tag{12.12}$$

となる。Q_m が下がるような効果、すなわち振動の継続時間が減少する。加速周波数 1.3GHz はチューナーを用いて正確に合わせるが、高調波は製作精度のばらつきなどが原因で合わないこともあるほか、意図的にばらつきを与えることも可能である。

オプティクスの設計では、加速器全般にわたって $|R_{12}|$ を小さく抑えたり、影響の大きい高調波 ω_m に対して t_r を最適化したり、水平・垂直方向のカップリングを調整することによって、閾値電流を上げる工夫をする。次の章では、線形加速器のオプティクス設計について説明する。

12.2 3 GeV ERL の線形加速器のオプティクスデザイン [1, 57–59]

HOM BBU の電流閾値を上げるためには、$|R_{12}|$ を小さく抑えることが重要であることを説明した。ここで、加速器のオプティクス設計によく使われるベータ関数 と位相の進み で書き直す。空洞で加減速するため、ローレンツファクターを とし、エネルギーの変化も考慮する。転送行列 R の出発点を i、終着点を f の下付きで表すと、

$$R_{12}(i \to f) = \gamma_i\sqrt{\frac{\beta_i\beta_f}{\gamma_i\gamma_f}}\sin\Delta\phi, \tag{12.13}$$

となる。加速空洞が一つしかない場合は、$\Delta\phi$ をゼロに近づければいいが、多数の加速空洞がある場合は非常に困難である。それは、それぞれの空洞を通過するエネルギー（つまり ）が異なり、別の加速空洞で発生した wake field が隣接する空洞に伝わって増幅することもある（coupling HOM）ためである。その空洞の組み合わせはほぼ空洞の数の 2 乗あるため、すべてにおいて をゼロに近づけることは不可能に近い。そこで、ベータ関数を全体的に小さくすることが重要になる。

通常の線形加速器であれば、四極電磁石による収束力を強くすればベータ関数を小さくすることができる。しかし、ERL の場合、加速・減速ビームと同じパスを通過する。収束力はビームの運動量に反比例するため、高エネルギーのビームに対して強い収束力を与えることができず、そのような条件の中でベータ関数を小さくする必要がある。ここで、3 GeV ERL の設計方法を紹介する。

まず、加速空洞と電磁石のレイアウトを図 85 に載せる。加速空洞はクライオスタットの中に配置され、各クライオスタットの両側に 3 台一組の四極電磁石を

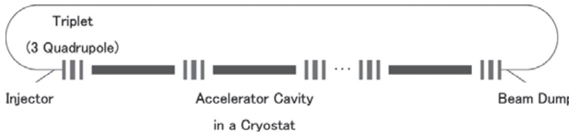


図 85: 3-GeV ERL の加速空洞の直線部のレイアウト。

配置する。3 GeV の線形加速器はこれを数 100 個並べたものである。この 3 台一組の四極電磁石を triplet と呼び、水平も垂直方向も収束することができる最小の組み合わせである。ここで、加速空洞の直線部の各要素でビームに働く転送行列を説明する。まず、距離 L のドリフトスペースは

$$\text{ドリフトスペース}: \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{12.14}$$

となる。四極電磁石の収束力は K 値という変数で表され、磁石内の磁場勾配を $\partial B/\partial$ とすると、

$$K = \frac{e(\partial B/\partial x)}{p}, \tag{12.15}$$

という関係がある。この転送行列は

$$\text{四極電磁石}: \begin{pmatrix} \cos\sqrt{K}s & \frac{1}{\sqrt{K}}\sin\sqrt{K}s \\ -\sqrt{K}\sin\sqrt{K}s & \cos\sqrt{K}s \end{pmatrix}, \tag{12.16}$$

となる。ここで、K 値が正のとき水平方向に対して収束することを示すが、この定義は人によって異なるので注意が必要である。線形加速器の場合、横方向の運動量 px は変わらぬまま加速され、全体の p が増加する [57]。すると、式 (12.4) に示した角度 x' は減少する。これを断熱減衰と呼び、転送行列を用いて、次のように表すことができる。

$$\text{断熱減衰}: \begin{pmatrix} 1 & \frac{\gamma_i}{\gamma'}\ln\frac{\gamma_f}{\gamma_i} \\ 0 & \frac{\gamma_i}{\gamma_f} \end{pmatrix}. \tag{12.17}$$

ここで $'$ は加速勾配を表し、加速のときに正である。ドリフトスペースの転送行列と類似しており、R_{12} 成分を実効的な長さとみなすことができる。600 m の加速空洞で 10 MeV から 3 GeV まで加速するときはおよそ 10 m であるのに対し、減速するときはおよそ 3 km となる。そのほかに加速空洞には RF による収束力が働く。これは、周期的な定在波が RF 空洞の中に立ち上がっている時に、Maxwell 方程式に従って電子を横方向にキックするような電磁場が発生するものである。最も加速できる位相（オンクレスト加速）の転送行列は、

$$\text{RF focus}: \tag{12.18}$$

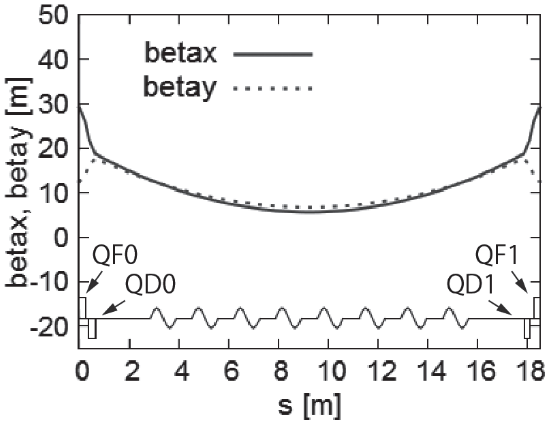


図 86: ひと組のクライオスタットと triplet とそのベータ関数。

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha - \sqrt{2}\sin\alpha & \sqrt{8}\frac{\gamma_i}{\gamma'}\sin\alpha \\ -\frac{3}{\sqrt{8}}\frac{\gamma'}{\gamma_f}\sin\alpha & \frac{\gamma_i}{\gamma_f}\left[\cos\alpha + \sqrt{2}\sin\alpha\right] \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{8}}\ln\frac{\gamma_f}{\gamma_i}, \tag{12.19}$$

となる [60]。

加速空洞の直線部オプティクスの設計は、以上の転送行列をもとに行う。まず、ひとつのクライオスタットと triplet の組み合わせを考え、空洞内でベータ関数を小さくするように triplet を最適化する。左右対称に設計した例が図 86 であり、左右の (QF0, QD0) と (QF1,QD1) は triplet の半分を示している。中央で加速もしくは減速するために、(QF0,QD0) と (QF1,QD1) でエネルギーが異なるが、同じ収束発散力が働くようにしている。3 GeV の線形加速器はこれをつなげていったもので、図 87 に示す。ここで、注意したいことは、ひとつの加速空洞で加減速を行うため、エネルギーの異なる 2 つのビームが通過することである。例えば、3 GeV まで加速した直後の四極電磁石には 10 MeV まで減速されたビームも通過する。原則的に四極電磁石はエネルギーの低い方に合わせて調整するため、式 (12.15) に示すように、エネルギーの高いビームに対して収束力が働かない。そのような条件の中で、オプティクスを最適化した結果が図 87 である。加速するビームのオプティクスのみを示しているが、減速ビームも全く対称なオプティクスになっている。まず、300 m 付近までの上流側は、加速ビームに合わせて設計し、図 86 のオプティクスをそのままつなげていく。下流側は同様に減速ビームに合わせるため、1.5 GeV から 3 GeV の加速ビームのベータ関数が大きくなってしまう。そのベータ関数を少しで

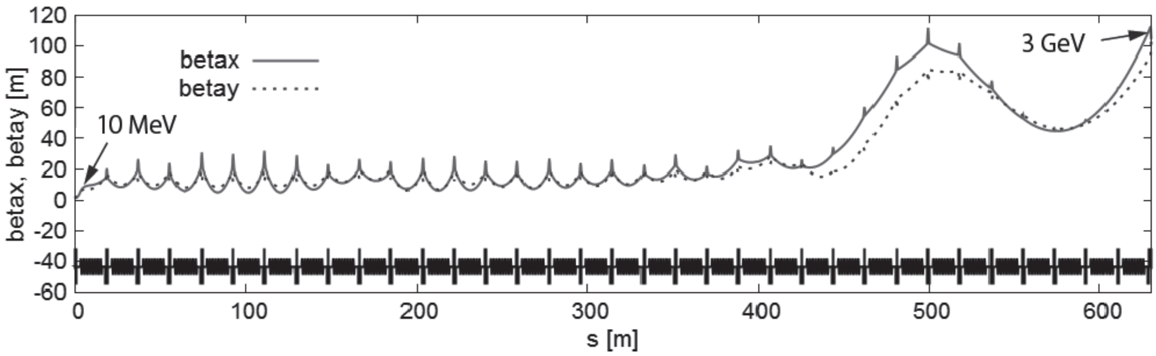


図 87: 線形加速器の 3 GeV に加速するビームのベータ関数。減速するビームはこれの対称なオプティクスになる。

も小さくするため、各 triplet の K 値を微調整する。この手法を variable triplet と呼び、図 87 の 500 m 付近でうねるような関数になる。上流のオプティクスで図 86 の周期的なオプティクスから崩れているのはそのためである。このオプティクスと周回ループの位相の進みから、HOM BBU の電流閾値を求めることができる。

汎用性のある放射光源のために平均電流 100 mA を目指しており、HOM BBU の問題は深刻である。超伝導空洞は ILC で開発されている 1.3 GHz の 9 セル空洞の研究開発が進んでいるが、電流閾値が数 10 mA に制限されてしまう恐れがある。そこで、ERL では、ILC 空洞をベースに形状を変えた空洞を開発している。現在、cERL ではその試験加速空洞をインストールしてビーム運転を行っており、安定に稼働している。ただし、cERL では数台の空洞しかインストールできず、HOM BBU は発生しないため、ビーム不安定性は起こらないと思われる。空洞設計や運転状況については、阪井氏の資料を参考にされたい。

12.3 cERL の線形加速器のオプティクスデザイン

cERL の加速空洞周辺のレイアウトを図 89 に示す。ここでは、3 MeV で入射部から合流したビームが主加速空洞で 20 MeV まで加速される。また、周回して戻ってきたビームは入射ビームと合流した後 3 MeV まで減速してダンプに誘導される。入射合流シケインやダンプシケインで入射・周回ビームの軌道を合流・分岐できるように、運動量比は 1:7 に設定している。設計オプティクスを図 88 に示す。最初に、入射合流部直後の QMAG01-08 の四極電磁石は空間電荷効果の大きい 3 MeV の入射ビームに対して最適化する。しかし、周回ビームも通過することを考慮し、収束力に上限を決めている。一方で、アークのオプティクスは分散関数の制約が大きいため、入射ビームとは独立に設計を行う。その後、アーク出口からダンプまでの減速ビームのオプティクスを、QMAD01-04 と QMAM05-08 の 8 台でベータ関数が小さくなるように最適化する。つまり、QMAD01-04 の 4 台は 20 MeV ビームも通過するが、3 MeV のダンプに向かうビームに最適化する。最後に、20 MeV に加速したビームは QMAD より後の QMAC01-04 と QMAM01-04 の 8 台でアーク部とのマッチングを行う。主加速空洞出口から数 m の間は強い収束力を与えることができないため、ベータ関数が大きくなりがちである。以上は、オプティクスを設計する手順であるが、実際のビーム調整も似た手順で行っている。初期にビームを周回させた時に、ダンプラインのビームで QMAD01-04 の

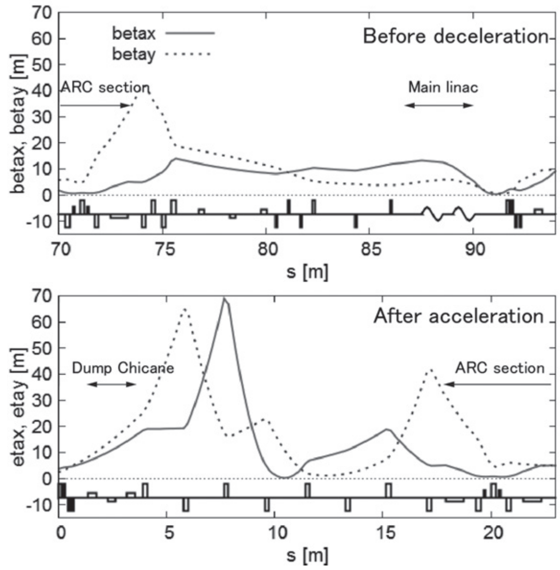


図 88: 主加速空洞付近のデザインオプティクス。

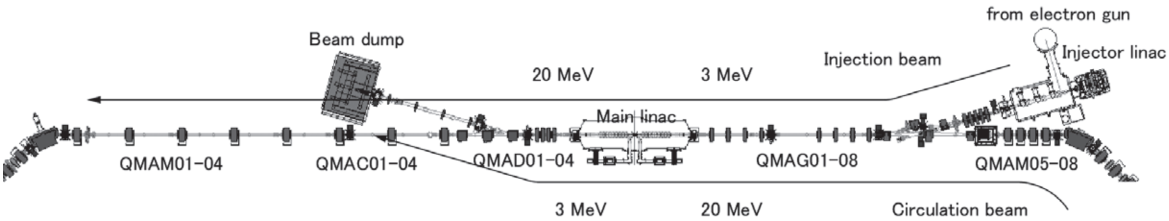


図 89: cERL の加速空洞付近のレイアウト。

収束力を決める。その後は、QMAD01-04 を変えずに、周回ループのマッチングを実施する。その後のリターンアークを戻ったビームは QMAM05-08 の 4 台のみを使って調整する。

13　周回ループの設計・調整

13.1　シンクロトロン放射による放射励起 [59, 61]

電子の軌道が曲げられるとき、放射光を放出してエネルギーを失う。そのときエミッタンスが減少する現象（放射減衰）と増加する現象（放射励起）が現れ、蓄積リングのエミッタンスはこれらの平衡状態で決まる。一方で、ERL の電子ビームは 1 度周回するだけなので、エミッタンスの変化は蓄積リングに比べて非常に小さい。従って、電子銃で低エミッタンスビームを大きく増加させることなく周回させることが可能である。しかし、1 周しかしないとはいえ、その間にエミッタンスの劣化は生じる。規格化エミッタンス 0.1 mm·mrad を目指すには、そのわずかなエミッタンス増加が問題となりうる。放射励起による 1 周の規格化エミッタンス増加は

$$\Delta\varepsilon_n \approx 0.54\mu\mathrm{m}\cdot\mathrm{rad}\left(\frac{16}{N_b}\right)^3\left(\frac{28\mathrm{m}}{\rho}\right)\left(\frac{E}{5\mathrm{GeV}}\right)^6, \tag{13.1}$$

となる。ここで、E は電子のエネルギー、ρ は偏向電磁石の曲率半径、N_b は偏向電磁石の数である。電子のエネルギー E の 6 乗に比例するため、エネルギーが高いほど曲率半径を大きくする必要がある。3 GeV の ERL では $\rho = 10$ m と設定している。周回部の偏向電磁石はおよそ 120 台であるので、$\Delta\varepsilon_n$ を見積もると 0.0002 μm·rad となり無視できるほど小さい。cERL はさらに電子エネルギーが小さいため、放射励起は問題にならない。敷地に限りがあったので、省スペースのために $\rho = 1$ m と小さくしている。放射励起によってエネルギーの広がりも大きくなり、電子エネルギーの 5/2 乗に比例する。

$$\frac{\Delta\sigma_E}{E} \approx 3.2\cdot 10^{-5}\left(\frac{28\mathrm{m}}{\rho}\right)\left(\frac{E}{5\mathrm{GeV}}\right)^{5/2}. \tag{13.2}$$

3 GeV ERL の場合、1 周で 3×10^{-5} 程度である。一方で、ERL のバンチ長は 2 ps 程度であり、1.3 GHz の RF のカーブによって 2×10^{-4} のエネルギー広がりが発生するが、この影響に比べて十分小さいと言える。

13.2　コヒーレントシンクロトロン放射による航跡場 (CSR wake) [48, 62]

ERL では 10^{-4} オーダーの小さいエネルギー広がりを目標としている。1.3 GHz の RF のカーブによって、バンチ長が長くなると、エネルギー広がりが大きくなってしまうため、通常の運転ではバンチ長をおよそ 2 ps としている。これは、蓄積リングの場合と比べておよそ 1 桁短い。そこで短バンチならではのビームダイナミクスが生じる。

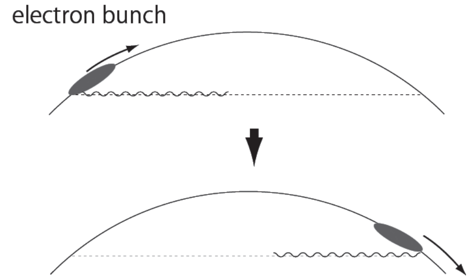


図 90: CSR wake の模式図。

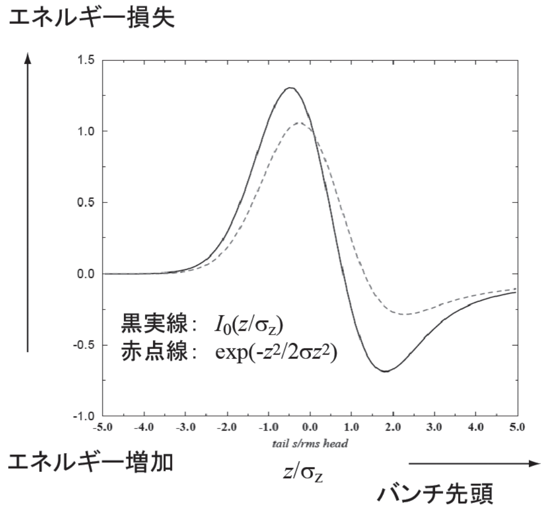


図 91: Gaussian 分布の線電荷密度と式 (13.3) の I_0 の関係。

前章で触れた放射光は一つの電子による電磁場をその電子のみが感じることによって発生するため、その強度は電子数に比例する。しかし、バンチ長よりも長い波長の放射光では、バンチ内の他の電子による電磁場を感じる。これをコヒーレント放射（Coherent Synchrotron Radiation, CSR）と呼ぶ。その放射光の強度はバンチ内の電子数の 2 乗に比例し、通常の電子バンチは $10^8 \sim 10^{10}$ 個の電子を含むため、その強度は桁違いに大きくなる。この CSR が電子バンチに与える影響を CSR wake と呼ぶ。模式図を図 90 に示す。波長の長い CSR は放射角度が大きい。すると、バンチ後方からの電磁波が曲線を描く電子バンチの前方に追いつき、相互作用をすることによって生じる。一方で、蓄積リングのバンチ長はチャンバーの cutoff

周波数の波長より長いため、CSR は発生しないと言われている。

CSR wake によるエネルギー変化は、HOM BBU のときと同様に wake function, $W_0'(z)$ で書くことができる。

$$\frac{dE}{cdt} = N r_e m_0 c^2 \int_{-\infty}^{z} W_0'(z-z')\lambda(z')dz'. \tag{13.3}$$

ここで、N、m_0、r_e、$\lambda(z)$ はそれぞれ電子の数、質量、古典半径および線電荷密度である。$W_0'(z)$ は $z^{1/3}$ に反比例する関数であり、次のように書き下すことができる。

$$W_0'(z) = -\frac{2}{(3\rho^2)^{1/3}}\frac{1}{z^{1/3}}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{13.4}$$

ここで、電子バンチの rms サイズが σ_z の Gaussian 分布であり、線電荷密度 $\lambda(z)$ が

$$\lambda(z) = (1/\sqrt{2\pi}\sigma_z)\exp(-z^2/2\sigma_z^2), \tag{13.5}$$

であるときを考える。すると、式 (13.3) は次のようになる。

$$\frac{dE}{cdt} = -\frac{2N r_e m_0 c^2}{\sqrt{2\pi}(3\rho^2\sigma_z^4)^{1/3}} I_0\left(\frac{z}{\sigma_z}\right), \tag{13.6}$$

$$I_0(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{dx'}{(x-x')^{1/3}}\frac{\partial}{\partial x'}\mathrm{e}^{-x'^2/2}. \tag{13.7}$$

I_0 を図 91 に示す。バンチ先頭の一部でエネルギーが上がる一方、中心から後方にかけてエネルギーは減少する。バンチ全体にわたって積分し、電子のエネルギー変化 ΔE とエネルギー広がり $\Delta\sigma_E$ の変化を求める。長さ L_B の偏向電磁石を通過した時には、それぞれ以下のように書き表すことができる。

$$\Delta E = -\frac{N r_e m_0 c^2 L_B}{\rho^{2/3}\sigma_z^{4/3}}\frac{2^{4/3}3^{1/6}\left[\Gamma(2/3)\right]^2}{\pi}, \tag{13.8}$$

$$\Delta\sigma_E \approx 0.22\frac{N r_e m_0 c^2 L_B}{\rho^{2/3}\sigma_z^{4/3}}. \tag{13.9}$$

バンチ全体の ΔE は負であり、エネルギーが下がっていることがわかる。各電子の ΔE は N に比例するため、バンチ全体としては N^2 に比例したエネルギーが放出されていることになる。ΔE や $\Delta\sigma_E$ は電子のエネルギーに依存しないので、3 GeV ERL に比べてエネルギーの低い cERL のほうが CSR wake の影響が大きい。ループ 1 周分の効果は $L_B = 2\pi\rho$ とすればよく、式 (13.8) や (13.9) に代入すると $\rho^{1/3}$ に比例する。cERL では ρ が 1 m と小さくなるが、その効果は少ない。そのほかに、チャンバーによって

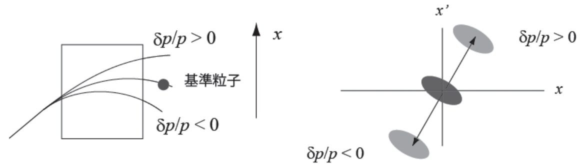


図 92: エネルギーのずれによる水平方向の位置変化とエミッタンスの増加。

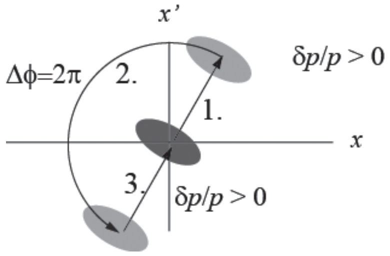


図 93: エミッタンス増加の相殺。

CSR wake が遮蔽される効果や短い偏向電磁石では transient effect があるため、式 (13.8) や (13.9) は複雑なものとなる。また、CSR wake によって水平方向のキックも発生するが、エネルギー変化の影響に比べて無視できるほど小さい。

13.3 CSR wake によるエミッタンス増加とその抑制 [63–65]

エミッタンスとは x, x' の平面上に広がるビームの面積に相当する。CSR wake によってエネルギーがわずかに δp だけずれた場合について考える。軌道がエネルギーによって変化しない直線部では、水平・垂直方向のビームにほとんど無視できる。しかし、偏向電磁石内でエネルギーの変化があった場合、図 92 に示すように水平方向の位置が変わってしまう。エネルギーのずれは、長手方向の位置によって異なるため、水平方向の位置の広がりが発生してしまう。これがエミッタンス増加のメカニズムである。エネルギーの変化は避けられないが、エミッタンスの増加はオプティクスで小さく抑えることができる。

効果的な方法として、ベータ関数が周期的なオプティクスで位相の進みを 180 度にする方法がある。これは同じ包絡線のビームプロファイルが繰り返す一方で、個々の電子の位相空間の位置は原点と点対称の場所に移動していることを示す。すると、図 93 に示すように、δp によって位相空間を移動した電子は、次の周期のオプティクスで元の位置に戻る。ただし、δp

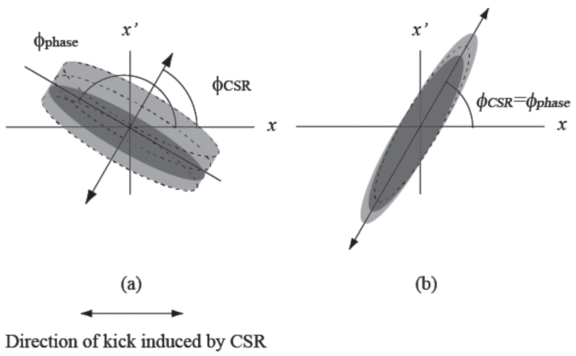


図 94: エミッタンス増加の最小化。

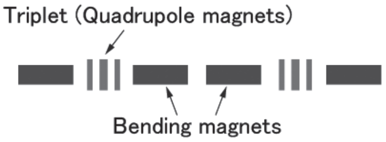


図 95: アーク部のレイアウト。

が変化しない、つまりバンチ長が変化しない、という条件付きである。GeV クラスの ERL では周回ループがいくつかの繰り返しのオプティクスを含むため、このような方法でエミッタンス増加を抑えることが可能である。しかし、3 GeV ERL では 77 pC/bunch で 2 ps のバンチ長を想定しており、トラッキングの結果によると CSR wake による影響は大きくない。一方で、cERL では周回ループが小さいため、周期的なオプティクスを作ることができず、この手法を使うことができない（リターンアーク出口でキャンセルすることはできる）。

しかし、エミッタンスを抑制する方法は他にもある。それは δp によって位相空間上を移動する方向 ϕ_{CSR} と位相分布の長手方向 ϕ_{phase} をあわせる方法で、図 94 に模式図を載せる。全ての偏向電磁石で位相をあわせることが難しいが、バンチ圧縮などで最もバンチが短く CSR wake が大きくなるところで合わせると効果的である。この方法によって、cERL のエミッタンスが 1/10 になることもある。

13.4 TBA のアーク部と 3 GeV ERL の周回ループ [1, 53, 59]

3 Gev ERL では挿入光源のための 6 m のスペースを 22 ヶ所、30 m は 6 ヶ所用意する予定である。挿入光源のある場所は分散関数 がゼロである必要があり、このような条件をアクロマートと呼ぶ。また、エネルギー回収のためにバンチ長を変えずに輸送しなければならず、この条件をアイソクロナスと呼ぶ。これらの条件をみたすために、アーク部は 3 つの偏向電磁石で構成される Triple Bend Achromat, TBA を採用した。図 95 に示したものは偏向電磁石が 4 つだが、オプティクスの観点から中央の 2 つをひとつの電磁石と同等とみなることができる。

偏向電磁石では δp によって軌道が異なることを図 92 に示したが、長手方向 z の位置もずれる。転送行列 R_{56} の成分を使って

$$\Delta z = R_{56}\frac{\delta p}{p} + R_{566}\left(\frac{\delta p}{p}\right)^2 + \cdots, \tag{13.10}$$

と表すことができる。R_{56} の符号の定義は人によって違うので、注意したい。R_{56} は分散関数 η を用いて、

$$R_{56} = \int \frac{\eta}{\rho} ds, \tag{13.11}$$

と表すことができる。直線部では $\rho = \infty$ であるため、積分は偏向電磁石のみとなる。アイソクロナスとは、この R_{56} がゼロであり、δp によって z 方向の位置が不変であることを指す。偏向電磁石の曲げ角はレイアウトした時点で決められており、アクロマートや R_{56} の調整は TBA の中の 3 つの四極電磁石（triplet）を用いる。図 95 の偏向電磁石はすべて曲げ角 θ_B、曲率半径 ρ_B として、簡単のためにエッジなどの効果を無視する。対称なオプティクスを考えて、TBA 中心で $\eta' = 0$ であるとする。このときの TBA 中心の分散関数を η_c とすると、R_{56} と以下のような関係になる。

$$\eta_c = \frac{\rho_B}{\sin\theta_B}(R_{56} - 2\theta_B + 2\sin\theta_B). \tag{13.12}$$

拘束条件が 2 つに対して、変数が 3 つあるため、ひとつの自由度が残っている。Triplet の極性の組み合わせは水平方向に Focus-Defocus-Focus が幅広い R_{56} の調整に向く一方、Defocus-Focus-Defocus では四極電磁石の K 値を小さく抑えることができ、ベータ関数のマッチングも容易である。

挿入光源のスペースで、できる限りベータ関数を小さくするためにマッチングが必要である。ドリフトスペースのベータ関数は 2 次関数となり、極小値のベータ関数を β_0 とすると、s だけ離れた場所では、

$$\beta(s) = \beta_0 + \frac{s^2}{\beta_0}, \tag{13.13}$$

となる。よって、6 m ドリフトスペースの中心で β_0 = 3 m となるように設計している。図 96 に 3 GeV ERL のアークの一部を載せている。

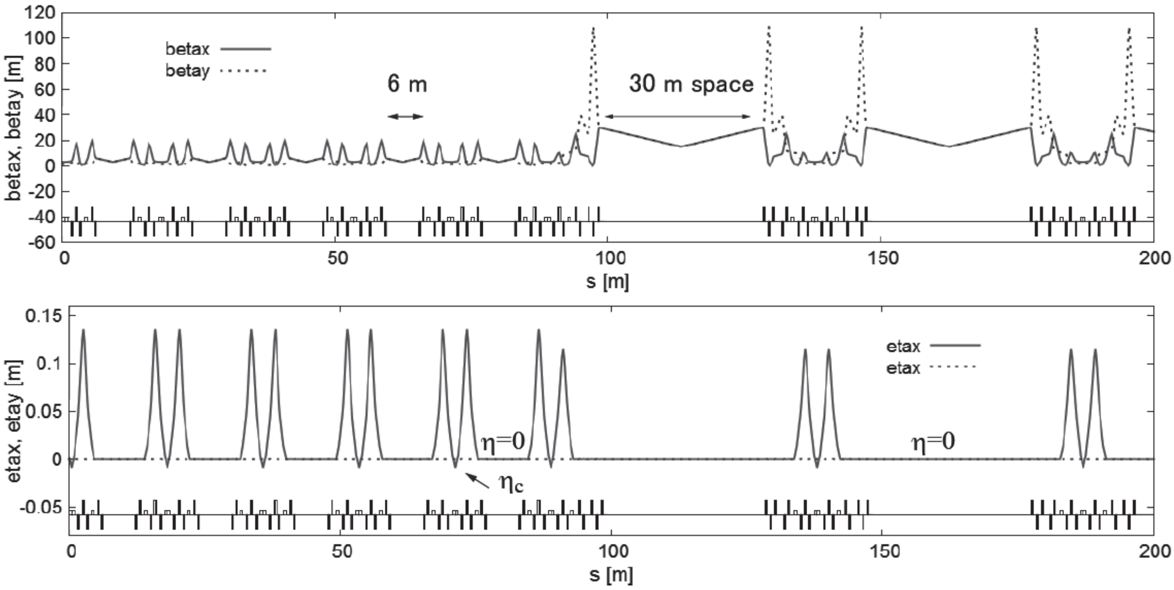


図 96: 3-GeV ERL のアーク部のラティスとベータ関数の一部。

13.5 cERL アーク部とオプティクスの調整 [66]

cERL では、偏向電磁石の曲げ角が 45 度であり、ひとつの TBA で 180 度も曲げている。レイアウトを図 97 に示す。敷地に限りがあるため、曲率半径は ρ =1 m と小さい（敷地に余裕があるように見えるが、主加速空洞の追加や 2 ループの建設を想定している）。そのためベータ関数のマッチングが難しくなることから、triplet は DFD とした。分散関数は、アーク内の四極電磁石でしか調整できない。そこで、実際のオペレーションでは、オプティクスのマッチングの前に分散関数を調整している。分散関数の調整は、主加速空洞の振幅を変えてエネルギーを 1 % 程度変え、そのときの軌道変化を見ながら行っている。軌道は BPM でリアルタイムに行うことが可能である。図 98 に測定結果とデザイン値を比較しているが、よく一致していることがわかる。cERL の場合、アーク部中央の分散関数 η_c が 0.24 m であればアイソクロナスである。垂直方向に分散関数が残っているため、アーク部にスキュー四極電磁石をインストールするなどの対策が必要である。

分散関数の調整の後に、アーク前後の四強電磁石でオプティクスのマッチングを行う。ベータ関数のデザイン値を図 99 に載せる。アーク部はアクロマート、アイソクロナスという条件を満たすために、結果として垂直方向に大きく発散するオプティクスになっている。マッチングではいかに垂直方向のビームを小さく保ちながら輸送するかが重要となる。アークのオプティクスは対称性を保つために、中心で $\alpha_x = \alpha_y = 0$ となるように設計している。ビームサイズが大きくなりすぎると、CSR wake によるエミッタンスの増加が顕著になるため、アーク中心で $\beta_x = \beta_y = 5$ m 目安としている。実際は Q scan 法と呼ばれる手法を基にマッチングを行っている。

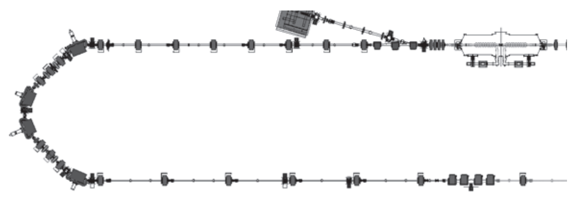


図 97: cERL のアーク部付近のレイアウト。

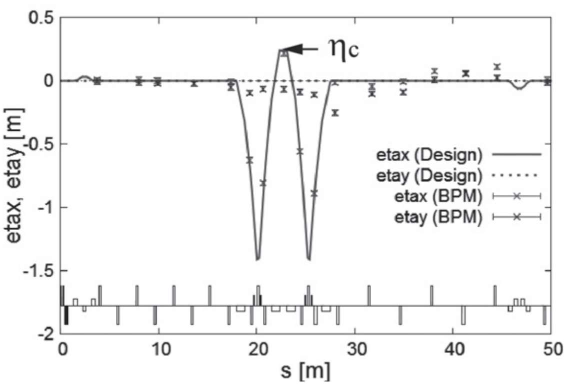


図 98: cERL 分散関数の測定値とデザイン値。

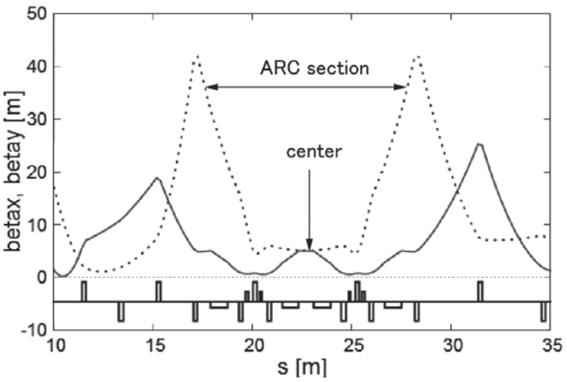


図 99: cERL アーク部付近のベータ関数。

14　ビームの減速とダンプ

14.1　ダンプラインの設計 [61]

ダンプエネルギーまで減速したビームは偏向電磁石でダンプラインへと導かれる。このダンプラインのエネルギーアクセプタンスが ERL 全体のエネルギーアクセプタンスを決めるといってもいい。GeV クラスの ERL では 10 MeV のダンプエネルギーに対し、およそ 20 % のエネルギーアクセプタンスを想定している。そのため、バンチ長が一定の運転では、周回エネルギーに関係なく $\Delta E \sim 2$ MeV までが許容範囲となる。（バンチ長が変わる場合については、後述するバンチ圧縮を参考にすること。）これまでに、放射励起や CSR wake の影響を紹介したが、これらによるエネルギー広がりは大きくても数 100 keV 程度であり、ダンプの輸送には問題ない。

cERL のダンプラインとそのオプティクスを図 100 に載せる。取り出しシケインの偏向電磁石と 4 つの四極電磁石からなり、水平方向の分散関数を小さく抑えることが困難である。そこで、ベータ関数は、垂直方向でやや大きめになってしまっても、水平方向で小さくなるように抑えて輸送している。ダンプラインのエネルギー広がりは入射部出口と同等、10^{-3} のオーダーである。ビームダンプの熱負荷低減のため、四極電磁石でビームサイズを小さく絞りすぎないようにして、ダンプラインの偏向電磁石で周期的にビーム軌道を振る対策（ラスタリング）を行っている。

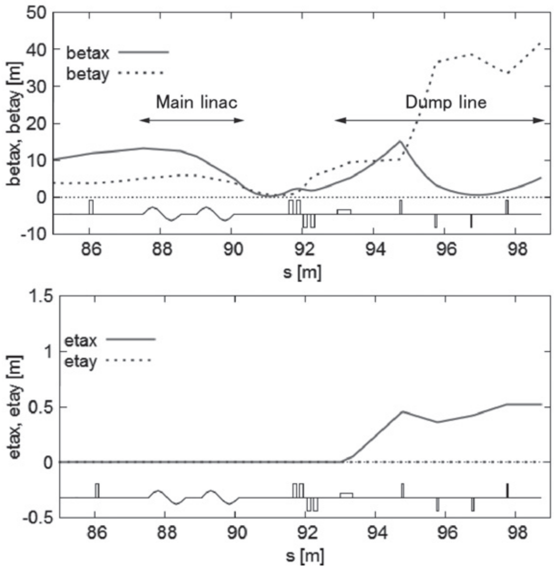


図 100: ダンプラインのオプティクス。

14.2　周長補正とビームの軌道調整 [66]

ここで、cERL の減速・ダンプビームの調整について紹介する。減速ビームを加速空洞に通すときは、すでに加速ビームが通過しているので、スクリーンモニターなどの破壊的な方法が使用できないため、ビームに影響を与えない BPM で測定している。ビーム調整のときは、パルス長 1 μs の矩形波で運転している。周回ループの長さがおよそ 100 m であるため、加速・減速ビームの 2 つパルスにおよそ 0.3 μs のタイミングのずれが生じる。すると、図 101 に示すように、2 つのビームを区別することができる。減速ビームのオプティクス調整は、入射合流部手前の QMAM05-08 で行う（図 89 と セクション 12.3 を参考）。その四極電磁石に軌道を調整するステアリング機能も備えている。

主加速空洞でエネルギーを回収するには、周回時間を 1.3 GHz の半整数倍に合わせる必要がある。cERL では周長を補正するために、2 つの方法を用いている。ひとつは 4 台の偏向電磁石で構成される周長補正シケインで直線部にバンプを立てる方法、もうひとつは各アークの頂点に 2 台一組のステアリングを設置して偏向電磁石の軌道を変える方法である。模式図を図 102 に示す。図 102 (b) のほうが調整範囲が広くビームオプティクスへの影響が少ない。しかし、この方法が有効であるのは、ひとつの偏向電磁石の曲げ角が 45 度と大きい場合のみであることに注意したい。

ERL ではエネルギー回収効率を上げることが非常に重要である。軌道・オプティクス調整中は平均電流が数 100 pA と低いため、主加速空洞でエネルギー回収効率を測定することができない。そこで、ダンプシケイン入口の偏向電磁石 BMAD01 の曲げ角でダンプエネルギーの推定を行っている。図 103 に BMAD01 とダンプライン入口のレイアウトを載せる。ビームの曲げ角が最大となる点を最もエネルギー回収効率がいい点であるとみなして、周長を調整している。図 102 (b) の方法で調整した例を図 104 に載せている。偏向電磁石の励磁電流から、減速ビームのエネルギーは入射エネルギーと同程度であると思われる。主加速空洞が減速ビームをキックする効果も含まれるため、ダンプエネルギーを正確に測定することは困難である。

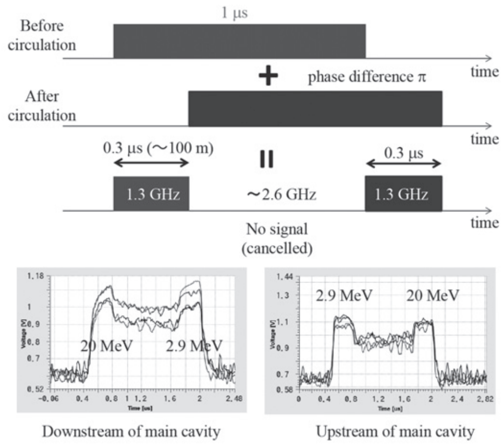


図 101: 加速・減速ビームの BPM の応答。

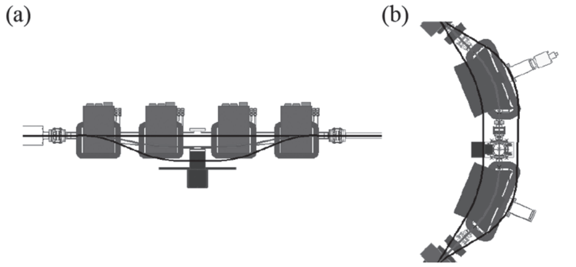


図 102: (a) 直線部に設置している周長補正シケイン、(b) cERL のアーク部に設置している周長補正ステアリング。

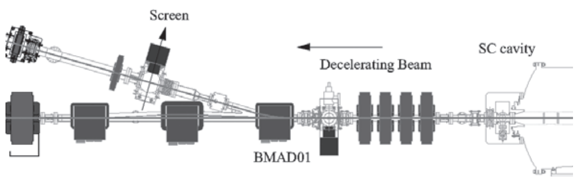


図 103: 取り出しシケイン付近のレイアウト。

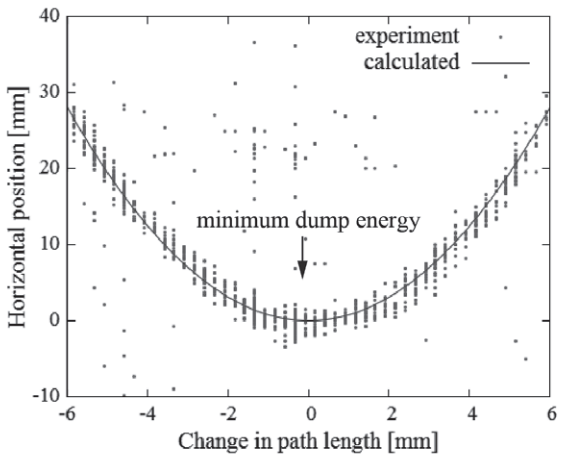


図 104: ダンプエネルギーの測定。

15 バンチ圧縮の原理とトラッキング [53, 62, 67]

ERL の特徴の一つは短いバンチ長であり、100 fs 以下のバンチ長を目指している。しかし、電子銃から短いバンチを輸送すると、超伝導加速空洞で高調波による発熱が増えてしまう。また、低エネルギーでは CSR wake の影響が大きいため、主加速空洞で加速した後にバンチ長を短くする方法を採用した。その模式図を図 105 に示す。アークでは四極電磁石による収束力があまり強くない場合、高いエネルギーが遠回りをして遅れる。このとき、予め前方の電子をエネルギーの高い状態にすると、バンチ長を短くすることができる。これは加速位相を ϕ_{RF} だけずらすことで行うことができる。主加速空洞の電場 E を z の関数で

$$E(z) = E_0 \cos(k_{RF} z + \phi_{RF}), \tag{15.1}$$

と表す。ここで、k_{RF} は加速波の波数で、1.3 GHz の周波数 f_{RF} とは、$k_{RF} = 2\pi f_{RF}/c$ という関係にある。式 (15.1) を z について微分し、式 (13.10) を用いると、最もバンチ長が短くなる条件は

$$k_{RF} \sin\phi_{RF} = \frac{1}{R_{56}}, \tag{15.2}$$

となる。R_{56} が大きいと ϕ_{RF} は小さくて済み、バンチ圧縮後のエネルギー広がり $\sigma^f_{\delta p/p}$ も小さい。一方で、バンチ圧縮後のバンチ長 σ^f_z は

$$\sigma^f_z \sim R_{56}\sigma^i_{\delta p/p}, \tag{15.3}$$

となり、バンチ圧縮前のエネルギー広がりが重要であることがわかる。R_{56} が小さい方が短くすることができるように見えるが、ϕ_{RF} が大きすぎると加速できなくなくなるという問題が生じる。cERL ではバンチ圧縮の時は $R_{56} = 0.1 \sim 0.2$ m でバンチ圧縮をする予定であるため、100 fs までバンチ圧縮するには $\delta p/p$ が 10^{-4} のオーダーでないといけない。

1.3 GHz の RF カーブの影響で $\delta p/p$ が z に対して線形でないため、バンチ圧縮後の縦方向の位相空間の分布は弓なりのようになり、テールが発生する。図 108 にそのトラッキングの図を載せる。この高次の影響を補正するため、アーク内に六極電磁石をインストールする予定である。六極電磁石は水平位置によって異なる収束力を与えることができるため、分散関数が大きい場所に設置すると式 (13.10) の R_{566} を調整することができる。図 108 に示したトラッキングの

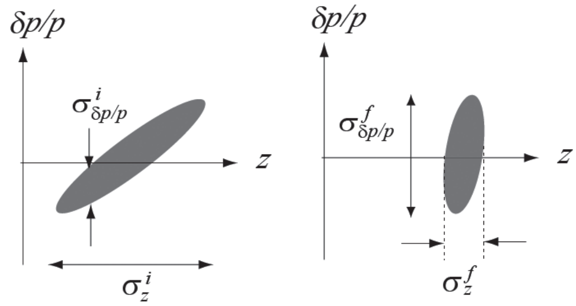


図 105: オフクレスト加速によるバンチ圧縮の原理（右）加速直後、（左）バンチ圧縮後。

データによると、六極電磁石によってテールがなくなり十分にバンチ圧縮ができていることがわかる。

バンチ圧縮したビームもエネルギー回収をしなければならない。そのためには主空洞の手前でバンチ長を伸ばしてもとに戻し、ダンプシケインでエネルギー広がりがエネルギーアクセプタンス以下になっていないといけない。それには 2 通りの方法がある。バンチ圧縮をした時と同じようにリターンのアークも R_{56} を同じ符号に設定して、高いエネルギーの電子をさらに遅らせてバンチ長を伸ばす方法である（図 107 (a)）。これはオーバーバンチングとも呼ばれる。この場合、後方の電子からより多くエネルギーを回収して、ダンプシケイン入口のエネルギー広がりを小さくする必要がる。すると、通常のアイソクロナスの運転とは角度 2 ϕ_{RF} に相当する分だけ周長を変える必要があり、現在の cERL の周長補正のシステムでは対応することが困難である。また、異なる位相でエネルギー回収を行うと、RF のパワーソースが不安定になる可能性がある。そこで、リターンアークでは高いエネルギーが進むようにオプティクスを設計し、バンチ圧縮前の状態に戻す方法を採択した（図 107 (b)）。リターンアークではより強い収束力が必要になるが、図 106 のトラッキングの結果によると、エネルギー回収に成功している。

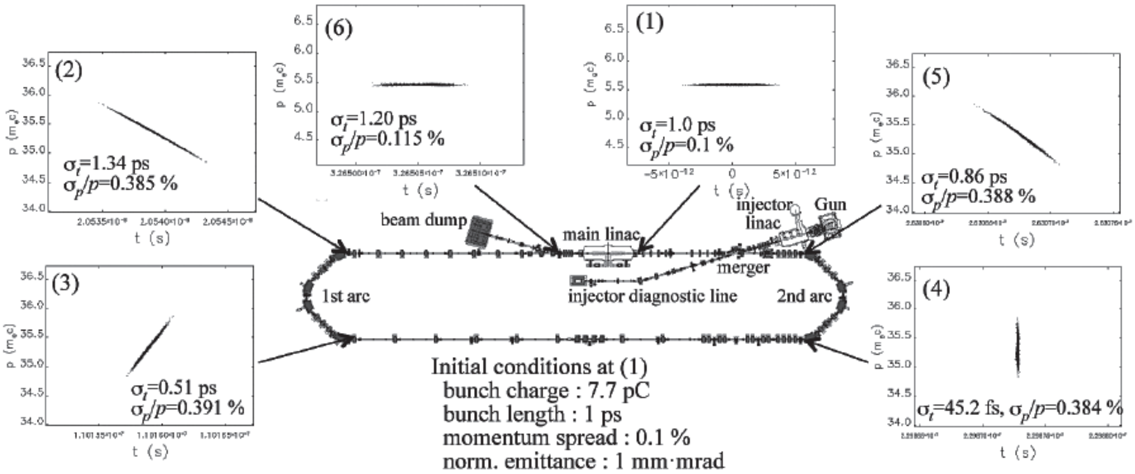


図 106: バンチ圧縮のときのビームプロファイルの変化。

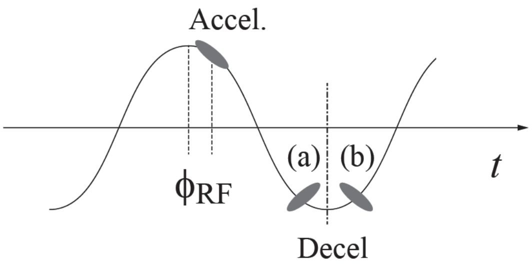


図 107: 減速ビームの位相。

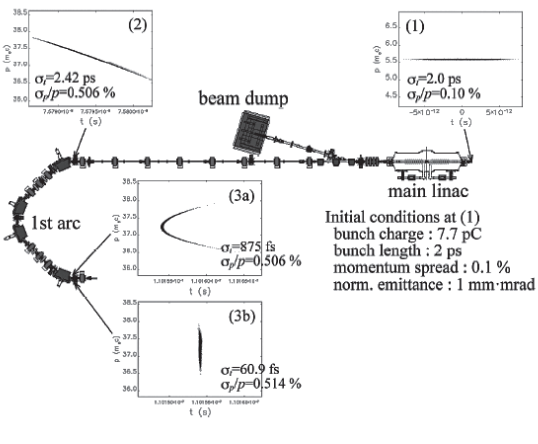


図 108: バンチ圧縮における 6 極電磁石の効果。

16　おわりに

まずはじめに、主空洞の線形加速器オプティクス設計 (セクション 12) からバンチ圧縮の原理 (セクション 15) までのセクションは島田美帆氏に作成していただいた。島田氏が中心となって進めてきた cERL の周回部コミッショニングの最新の結果も紹介されており、良い原稿を提供していただいたことを感謝する。

ERL を主題とした OHO’2008 の講義のときは、実証機である cERL はまだ設計段階のものであったが、2013 年春からまず cERL 入射器単体でのビームコミッショニングが開始され、2014 年からは cERL 全体での運転が開始されるまでになった。cERL のビームコミッショニングを通して多くのことを学ぶことができ、これを少しでも今回の OHO’2015 の講義でお伝えできたらと思っている。cERL の建設、ビームコミッショニングは非常に多くの方の協力の下で進めらてきた。今回の講義の内容も多くの方に支援の下で行われたことを基礎としている。ここに、ERL に関わった方皆様に感謝を申し上げたい。

本テキストでは、ERL におけるビームダイナミクスについて、最上流の電子銃から最下流のビームダンプまでの一連の流れを紹介してきた。しかしながら、本テキストでの内容は筆者が知っている内容に限られており、偏りがあることは否めない。ここに掲載した参考文献以外にも良い文献が多数あるので、それらを参照して補っていただければ幸いである。

本テキストを書くにあたって、これまで当たり前のように考えて、自分で計算していないことについても改めて勉強する機会が得られた。しかしながら、筆者の知らないことはまだ数多くあり、また筆者の理解が誤っている可能性があることは否定できない。誤りに気がついた場合には、教えていただければ幸いである。本テキストの内容についてのコメント、ご質問を歓迎する。

e-mail:tsukasa@post.kek.jp

また、本テキストの構想段階では、入射器空洞の軌道誤差によるエミッタンス増加の解析や、cERL における実験等ついても紹介する予定であったが、時間の都合で、本テキストでは割愛することにした。今後、本テキストの改訂版を OHO セミナーの web ページ上に公開したいと思っており、それに掲載できればと考えている。

参考文献

[1] 羽島良一, 中村典雄, 坂中章悟, 小林幸則編集, コンパクト ERL の設計研究, KEK Report 2007-7, JAEA-Research 2008-032, 2008.

[2] OHO’2013, “X線自由電子レーザー ～ ＳＡＣＬＡ”, 2013.

[3] J. Galayda *et al.*, ”The Linac Coherent Light Source-II Project”, in Proc. of IPAC’14, Dresden, Germany, 2014, pp. 935-937.

[4] S. Sakanaka *et al.*, “Recent Progress and Operational Status of the Compact ERL at KEK”, in Proc. of IPAC’15, Richmond, USA (2015), TUBC1.

[5] 宮島　司, “ERL　開発の現状と展望”, 先端放射光源に関する研究会　(2014), http://www.jssrr.jp/event/2014/sentan-siryou/miyajima.pdf

[6] S. Y. Lee, Accelerator Physics, World Scientific, 1999.

[7] H. Wiedemann, Particle Accelerator Physics, second edition, Springer, 1999.

[8] M. Reiser, Theory and design of charged particle beams, Wiley & Sons, 1996.

[9] J. D. Lawson, The physics of charged-particle beams, Oxford Press, 1988.

[10] 町田慎二, OHO’2000, 空間電荷効果, 2000.

[11] 栗木雅夫, OHO’2006, 粒子源の設計と現状, 2006. 栗木雅夫, OHO’2002, 電子源, 2002.

[12] I. V. Bazarov, G. A. Krafft and L. Merminga, USPAS course on Reciculated and Energy Recovered Linacs, http://casa.jlab.org/publications/lecture_2005.shtml, 2005.

[13] Xiuguang Jin et al., J. Appl. Phys. 116, 064501 (2014).

[14] Ivan V. Bazarov, Bruce M. Dunham, Yulin Li, Xianghong Liu, Dimitre G. Ouzounov, Charles K. Sinclair, Fay Hannon, and Tsukasa Miyajima, J. Appl. Phys. **103**, 054901 (2008).

[15] Ivan V. Bazarov, Dimitre G. Ouzounov, Bruce M. Dunham, Sergey A. Belomestnykh, Yulin Li, Xianghong Liu, Robert E. Meller, John Sikora, Charles K. Sinclair, Frank W. Wise, Tsukasa Miyajima, Phys. Rev. ST Accel. Beams **11**, 040702 (2008).

[16] S. Matsuba, et. al., Jpn. J. Appl. Phys. 51, 046402 (2012).

[17] I. V. Bazarov and C. K. Sinclair, Phys. Rev. ST Accel. Beams **8**, 034202 (2005).

[18] N. Nishimori et al., Phys. Rev. ST Accel. Beams 17, 053401 (2014).

[19] POISSON SUPERFISH, Los Alamos National Laboratory Report No. LA-UR-96-1834 (revision 14 March 2000).

[20] V. N. Litvinenko, R. Hajima and D. Kayran, Nucl. Instr. Meth. A **557**, 165 (2006).

[21] R. Hajima, Proc. of 1st Annual Meeting of Particle Accelerator Society of Japan and the 29th Linear Accelerator Meeting in Japan (August 4-6, 2004, Funabashi, Japan), 432 (2004).

[22] R. Hajima, Jpn. J. Appl. Phys. **42**, L974 (2003).

[23] R. Nagai *et al.*, "Demonstration of High-flux Photon Generation from an ERL-based Laser Compton Photon Source", TUPJE002, *These Proceedings*, IPAC'15, Richmond, USA (2015).

[24] A. W. Chao, Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerator, Wiley (1993).

[25] 森田昭夫, OHO'2004, 初等ビーム力学からの Optics Correction 入門, 2004.

[26] L. serafini and J. B. Rosenweig, Phys. Rev. E **55**, 7565 (1997).

[27] S. G. Anderson and J. B. Rosenweig, Phys. Rev. STAB **3**, 094201 (2000).

[28] B.E. Carlsten, Nucl. Instr. Meth. A **285**, 313 (1989).

[29] C. Ronsivalle *et al.*, "Simulations of the Emittance Compensation in Photoinjectors and Comparison with SPARC Measurements", Proc. of EPAC2008, (2008).

[30] M. Ferrario, "HOMDYN USER GUIDE", https://projects.astec.ac.uk /Plone /astec /Software /HOMDYN /HOMDYN%20User%20Manual.pdf.

[31] K. Floetmann, ASTRA, http://www.desy.de /∼mpyfloASTRA_dokumentation.

[32] L. M. Young, PARMELA, Los Alamos National Laboratory Report LA-UR-96-1835.

[33] Pulsar Physics, http://www.pulsar.nl/gpt/index.html.

[34] F. Ciocci *et al.*, Nucl. Instr. Meth. A **393**, 434 (1997).

[35] A. Bacci *et al*, Proceedings of PAC03, p. 3512

[36] R. Hajima and R. Nagai, Nucl. Instr. Meth. A **557**, 103 (2006).

[37] H. Niederreiter, Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods, SIAM Philadelphia (1992).

[38] A. W. Chao and M. Tigner, Handbook of Accelerator Physics and Engineering, World Scientific, 2006.

[39] D. Sagan, *Proceedings of EPAC06*, Edinburgh, Scotland, 2006, pp. 2829-2831.

[40] I. V. Bazarov and T. MIyajima, "Calculation of Coherent Synchrotron Radiation in General Particle Tracer" Proc. of EPAC2008, (2008).

[41] G. Bassi, it et al., Nucl. Instr. Meth. A **557**, 189 (2006).

[42] D. Sagan, *Proceedings of EPAC06*, Edinburgh, Scotland, 2006, pp. 2829-2831.

[43] M. Borland, Phys. Rev. ST-AB **4**, 070701 (2001).

[44] L. Giannessi, P. Musumeci, and M. Quattromini, NIM A **436**, 443 (1999)

[45] M. Dohlus, A. Kabel and T. Limberg, Nucl. Instr. Meth. A **445**, 338 (2000)

[46] C. Mayes, private communication.

[47] P. Emma and R. Brinkmann, *Proceedings of PAC97*, Vancouver, B.C., Canada, 1997, pp. 1679-1681.

[48] Ya. S. Derbenev. *et al.*, TESLA FEL-Report 1995-05.

[49] T. Miyajima *et al.*, "Low Emittance Electron Beam Transportation in Compact ERL Injector", in Proc. of IPAC'14, Dresden, Germany, 2014, pp. 3104-3106.

[50] T. Takahashi *et al.*, "Development of a 1.3-GHz Buncher Cavity for the Compact-ERL", in Proc. of IPAC'14, Dresden, Germany, 2014, pp. 3866-3868.

[51] 本田洋介他,"cERL 入射器超伝導空洞の高次モードによるビーム位置測定", THP089, in these proceedings.

[52] S. Matsuba *et al.*, "Deflecting Cavity for Bunch length Diagnostics at compact ERL Injector", in Proc. of IPAC'10, Kyoto, Japan, 2014, pp. 951-953.

[53] 横谷　馨、「ERL 入門」、高エネルギー加速器セミナー OHO'03, 2003.

[54] A. Rahman et al., "Benchmarking the multipass beam-breakup simulation code BI", OAG-TN-2008-029.

[55] G. H. Hoffstaetter and I. Bazarov, "Beam-breakup instability theory for energy recovery linacs", Phys. Rev. STAB, 7, 054401 (2004).

[56] E. Pozdeyev, "Regenerative multipass beam breakup in two dimensions", Phys. Rev. STAB, 8, 054401 (2005).

[57] I. V. Bazarov et al, "Linac optics for energy recovery linac", Proceedings of PAC, pp.3347-49, Chicago, (2001).

[58] 神谷　幸秀、「加速器の原理」、高エネルギー加速器セミナー OHO'84, 1984.

[59] "Energy Recovery Linac Conceptual Design Report", KEK Report 2012-4 (2012).

[60] J. Rosenzweig and L. Serafini, "Transverse particle motion in radio-frequency linear accelerators", Phys. Rev. E 49, p.1599-1602 (1994).

[61] Project Definition Design Report, "Cornell Energy Recovery Linac", 2012.

[62] 島田　美帆、「コヒーレントシンクロトロン放射光とビームダイナミクス」、高エネルギー加速器セミナー OHO'08, 2008.

[63] D. Douglas, "Suppression and enhancement of CSR-driven emittance degradation in the IR-FEL driver", JLAB-TN-98-012 (1998).

[64] R. Hajima, "Emittance compensation in a return arc of an energy-recovery linac", Nucl. Instrum. and Meth. A 528, p335-9, (2004).

[65] M. Shimada et al., "Lattice and beam optics design for suppression of CSR-induced emittance growth at the KEK-ERL test facility", Nucl. Intrum. Meth. A 575, p.315-320 (2007).

[66] 島田　美帆他、「コンパクト ERL コミッショニングの進捗状況」、加速器 11, pp.1-10 (2014).

[67] N. Nakamura et al., "Simulation study on bunch compression and decompression for the compact ERL", Proceedings of IPAC'15, pp.1591-3, Richmond, (2015).