レーザーと先端光源加速器

1　はじめに

近年、光源加速器の、とくにその性能を決める基本的なシステムに、レーザーの技術が利用されるようになってきている。既に、RF 空洞、電子源、電磁石、真空、モニターなどと並んで、加速器における基盤技術の一つと言っても良いであろう。

しかし一方で、加速器の分野に関わる多くの人には、レーザーはあまり馴染みの無いもの (で、危険なので近づかない方が良いもの) と思われているようでもある。これまでの OHO セミナーでもほとんど扱われて来なかった。今回、ドライブレーザー関係、というお題で講義の依頼を受けた。ドライブとは何の事やら分からないながらも、ERL や先端光源加速器で登場するレーザーについて、広く浅く、解説をすることにした。

加速器の分野に足を突っ込んでいるが、レーザーを専門にしている訳ではない方を念頭にして、打ち合わせや研究会で出くわす話を理解しようとする際のとっかかりになる解説にでもなればと思う。加速器と関係無くレーザーの専門書は沢山のものがあるので、正確で詳細な理解には、それらを参考にして頂きたい。

本講義では、まず基本に立ち返って、レーザーの原理について最低限の説明をする。その後、光源加速器での応用例として、電子銃のフォトカソード、シード FEL などのビームの変調、コンプトン散乱、について紹介する。(ビームモニターでのレーザーの利用も重要であるが、ドライブではないかなと思い、今回は除外した。)

2　レーザーの原理

そもそもレーザーとは、誘導放出による光増幅作用 (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation) である。ただ、現状では増幅作用のことだけでなく、その結果生成されるコヒーレントな光ビームのことをレーザー光またはレーザーと呼ぶようになっている。ともかく、誘導放出とはどういうものか、について説明しなければ話が始まらない。

大抵のレーザーの教科書は、誘導放出ありきで解説が始まる。おかげで理解した気にならないものである。誘導放出は量子力学的な現象で、そこから話を始めては読者が付いて来ないからであろうか。かといって、量子力学の教科書では、最後の方に申し訳程度に書かれていることが多く、そこまで飽きずに付いて来る読者もそんなにいない。というわけで、原理をあまり良く勉強しないままレーザーを扱うことになりがちである。せっかくの機会なので、できるだけ最短距離で原理から考えてみたい。

2.1　量子力学の復習

できるだけ前提とする知識無しに解説するため、量子力学の解説から始める。

2.1.1　波動性と粒子性

KEK では最近、コンパクト ERL(cERL) という試験加速器を建設した。cERL は、その利用研究に向けた一面として、レーザーコンプトン光源 (LCSS: Laser Compton Scattering Source) 試験加速器としての位置づけもあるようである。そこで、cERL の周回部にレーザー蓄積共振器なるものを設置した。

LCSS は、電子ビームとレーザー光を相互作用させて短波長の光を生成しようというもので、高強度の光源を実現するには強いレーザー光が必要である。レーザー蓄積共振器というものは、加速空洞でおなじみのマイクロ波空洞をレーザー光の波長で作った

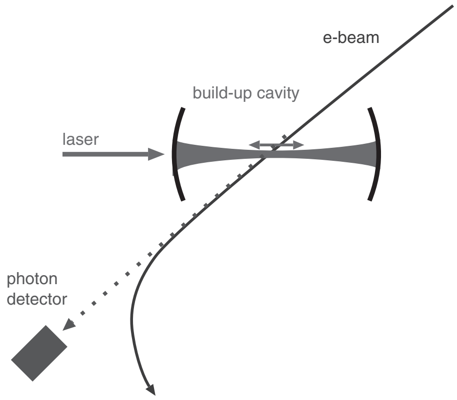

図 1: LCSS のセットアップ

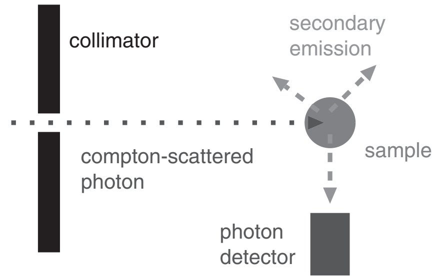

図 2: XRF のセットアップ

ものである。マイクロ波と同じく光も電磁波、つまり波動なので、波の干渉の性質があり、ある閉じた空間に波を重ね合わせていくことが出来る。蓄積共振器は、この性質を応用して、もともとのレーザー光源よりはるかに大きな振幅の電磁波を生成する装置である。

さて、この共振器に蓄積された、波動であるところのレーザー光に、ERL 周回中の電子ビームを衝突させてみた (図 1)。ビーム軸の前方に置かれた検出器の信号を見ていると、ある決まったエネルギーの信号がパラパラと観測された。エネルギーが粒子状に塊になったものが生成しているようである。レーザー光の強度を変えてみると、信号の頻度が変わるだけで、エネルギーの単位は一定である。何かエネルギーの粒子のようなものが、ビーム中の電子に跳ね飛ばされて出てきていると思われる現象である。どうやら、光は、波でありながら粒子のような側面も持っているらしい。

LCSS で単色の X 線が生成されたので、これを手近な物質に当ててみた (図 2)。今度は検出器を横に置き X 線が照射された物質から続いて出て来る信号を観測したところ、当てた X 線よりも低いエネルギーで、いくつかの決まったエネルギーの信号が見られた。物質を変えると、それぞれの原子組成に応じたエネルギーの信号が出て来るようである。原子というものは特定のエネルギー構造のようなものを持っているらしい。

加速器を周回していることから、電子は疑いなく電荷を持った粒子である。原子は正電荷の原子核の周りを負電荷の電子が回っているようなものだと考えると、特定のエネルギーというものは無さそうに思える。もし、電子が波のような性質を持つものであって、原子核にまとわりついた定在波として存在すると考えると、状態が離散的になり、従って離散的なエネルギー構造が出来てもおかしく無いかもしれない。

光は波動であって粒子でもあり、電子は粒子であって波動でもあるような、考え方をする必要がありそうである。

2.1.2 数学的準備

厳密な議論をしているふりをするために、最初に数学的な準備をする。量子力学をユニタリー空間で展開するが、そのためにまず、実数とは何かを示し、計量ベクトル空間の概念を示す必要があるからである。

可換群 二項演算が定義された集合で、その二項演算 (+) が次の条件を満たすとき、群とよぶ。

$$\text{結合則}\quad a+(b+c)=(a+b)+c \tag{1}$$

$$\text{零元の存在}\quad a+0=0+a \tag{2}$$

$$\text{逆元の存在}\quad a+(-a)=(-a)+a=0 \tag{3}$$

さらに

$$\text{交換則}\quad a+b=b+a \tag{4}$$

も満たすとき、可換群と呼ぶ。

a, b, c は任意の元である。

単系　二項演算が定義された集合で、その二項演算 $(\cdot)$ が次の条件を満たすとき、単系とよぶ。

$$\text{結合則}\quad a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c \tag{5}$$

$$\text{単位元の存在}\quad a\cdot 1=1\cdot a=a \tag{6}$$

体　加法と乗法という 2 つの二項演算が定義された集合で、次の条件を満たすとき、体とよぶ。

$$\text{加法に関して可換群 である} \tag{7}$$

$$\text{乗法に関して単系で 0 以外の元が群をなす} \tag{8}$$

$$\text{分配則}\quad a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \tag{9}$$

$$\text{自明でない}\quad 0\neq 1 \tag{10}$$

実数の定義　数学的体系として物理法則を記述するには、まず、実数の定義から導入する必要がある。少し正確に定義すると、

$$\text{体である} \tag{11}$$

$$x<y, x=y, x>y\text{ の一つだけが必ず成立} \tag{12}$$

$$x\leq y, y\leq z\text{ ならば }x\leq z \tag{13}$$

$$x<y\text{ ならば }x+z<y+z \tag{14}$$

$$x<y, 0<z\text{ ならば }x\cdot z<y\cdot z \tag{15}$$

$$\text{上 (下) に有界な部分集合は上 (下) 限をもつ} \tag{16}$$

となる。

つまり、四則演算が普通に出来て、順序が定義されており、連続な集合、が実数体 $\mathbb{R}$ である。

なお、この定義を満たす体は実質的に一意であることが証明できる。このため、通常想像するように、実数とは数直線上に連続に無限個の数字が並んだものと考えておけば良い。

複素数の定義　複素数体 $\mathbb{C}$ は、実数から定義することができる。つまり、実数の順序対 (a,b) として定義し、和と積を、

$$\text{和}\quad (a,b)+(c,d)=(a+c,b+d) \tag{17}$$

$$\text{積}\quad (a,b)\times(c,d)=(ac-bd,ad+bc) \tag{18}$$

と定める。通常、$a+bi$ と書く。$a+bi$ の複素共役を $\overline{a+bi}=a-bi$ と書く。

ベクトル空間　最初に線形代数の復習をし、ユニタリー空間 (計量が定義されたベクトル空間) で枠組みを与えることにする。ベクトル空間とは、足し算とスカラー倍が定義された集合である。つまり、ベクトル空間に属する 2 つの要素 $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$ からもう一つの要素 $\boldsymbol{w}$ を作る和という演算があること、要素 $\boldsymbol{v}$ を a 倍に拡大するスカラー倍という演算があること、である。厳密には、以下の公理を満たすように定義される。

$$\text{結合律}\quad \boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w} \tag{19}$$

$$\text{交換律}\quad \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u} \tag{20}$$

$$\text{単位元の存在}\quad \boldsymbol{v}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{v} \tag{21}$$

$$\text{逆元の存在}\quad \boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0} \tag{22}$$

$$\text{分配律}\quad a(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=a\boldsymbol{v}+a\boldsymbol{u} \tag{23}$$

$$\text{和の分配律}\quad (a+b)\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{v}+b\boldsymbol{v} \tag{24}$$

$$\text{スカラー積の分配律}\quad a(b\boldsymbol{v})=(ab)\boldsymbol{v} \tag{25}$$

$$\text{スカラー積の単位元の存在}\quad 1\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v} \tag{26}$$

計量ベクトル空間　ベクトル空間に内積という演算を追加したものを、計量ベクトル空間と言う。内積は要素の大きさや方向のような概念で、要素 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ にたいして、スカラー $\langle\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}\rangle$ を与えるものである。内積は、以下の公理を満足するものと定義する。

$$\text{共役対称性}\quad \langle\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}\rangle=\overline{\langle\boldsymbol{v}|\boldsymbol{u}\rangle} \tag{27}$$

$$\text{線形性}\quad \langle a\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}|\boldsymbol{w}\rangle=a\langle\boldsymbol{u}|\boldsymbol{w}\rangle+\langle\boldsymbol{v}|\boldsymbol{w}\rangle \tag{28}$$

$$\text{正定値性}\quad \langle\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}\rangle\geq 0 \tag{29}$$

とくに、複素数体上の計量ベクトル空間はユニタリー空間と呼ばれる。量子力学をユニタリー空間で記述できるものとして、以下考える。

ユニタリー空間は、正規直交基底をもつという基本的な性質がある。つまり、互いに内積が 0 で大きさが 1 の要素の集合を用いて任意の要素を展開できる。具体的に書くと、$\boldsymbol{e_i}$ $(i=1,2,...)$ の要素が、

$$\langle\boldsymbol{e_i}|\boldsymbol{e_j}\rangle=\delta_{ij} \tag{30}$$

を満たし、任意の要素 $\boldsymbol{x}$ が、

$$\boldsymbol{x}=\sum_i\langle\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e_i}\rangle\boldsymbol{e_i} \tag{31}$$

と表される。

2.1.3　量子力学の法則

状態の記述　物理法則が次のようになっていると考える。任意の物理状態 (世界) はユニタリー空間の 1 要素として表される。つまり、$\boldsymbol{\phi}$ とか $\boldsymbol{\chi}$ とかいうものの一つが今の世界を表す。そして、$\boldsymbol{\phi}$ という状態が $\boldsymbol{\chi}$ という状態に観測される確率は、それらの内積の大きさの 2 乗 $|\langle\boldsymbol{\chi}|\boldsymbol{\phi}\rangle|^2$ に比例する。

ユニタリー空間の性質から、世界を記述する正規直交基底 $\boldsymbol{e_i}$ $(i=1,2,...)$ を選ぶことが出来、状態 $\boldsymbol{\phi}$ は、正規直交基底で展開できる。展開する際の係数 (振幅)C_i を、

$$C_i = \langle\boldsymbol{e_i}|\boldsymbol{\phi}\rangle \tag{32}$$

とすると、

$$\boldsymbol{\phi} = \sum_i C_i\boldsymbol{e_i} \tag{33}$$

と書けるということである。結局は、C_i (i=1,2,...) の組を指定することが状態を記述することになる。正規直交基底の選び方はいくらでもあって、もちろんそれによって係数は異なって表現されるが、実際の物理状態としては同じものを表すし、物理法則が変わることは無い。

状態の変化　上述のように状態の記述を与えたので、次は状態が変化することを記述する必要がある。つまり、ユニタリー空間のある要素 (ある状態) が他の要素に変化することを表現すれば良い。

観測する際に全ての可能な状態の確率の和は 1 であるべきであるから、ある状態から別の状態に変化する際には大きさを保つような変換のみを扱えば良い。これはユニタリー演算と呼ばれる変換である。

状態 $\boldsymbol{\phi}$ にユニタリー演算 A を作用させて状態 $\boldsymbol{\chi}$ になる。というのは、

$$\boldsymbol{\chi} = A\boldsymbol{\phi} \tag{34}$$

と書く。正確には、ユニタリー演算は、全射で、任意の要素 u,v について内積を保つ演算として定義される。

$$\langle A\boldsymbol{u}|A\boldsymbol{v}\rangle = \langle\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}\rangle \tag{35}$$

ユニタリー演算 A にたいしてエルミート共役の演算 A というものを、

$$\langle A\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}\rangle = \langle\boldsymbol{u}|A^\dagger\boldsymbol{v}\rangle \tag{36}$$

で定義する。とくに、$\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$ を基底 $\boldsymbol{e_i}$ に選び、A を基底で展開して、

$$A_{ij} = \langle\boldsymbol{e_i}|A\boldsymbol{e_j}\rangle \tag{37}$$

と書くことが出来る。定義から分かるように、ユニタリー演算は $A^\dagger A = AA^\dagger = 1$ の性質がある。また、とくに $A^\dagger = A$ となる演算をエルミート演算と呼ぶ。

ユニタリー演算の重要な性質として、任意のユニタリー演算 U はエルミート演算 H を用いて

$$U = e^{iH} = 1 + iH + \frac{i^2}{2!}H^2 + ... \tag{38}$$

と表すことができることが挙げられる。

結局、状態の変化を記述するということは、作用を表現するエルミート演算 H を求めることに帰着する。

時間発展　例えば、時間発展による状態の変化について考える。$\boldsymbol{\phi(t)}$ を時間 t での状態とし、時間が t から $t+\Delta t$ に進む様子は、ユニタリー演算 $U(t+\Delta t, t)$ を用いて、

$$\boldsymbol{\phi(t+\Delta t)} = U(t+\Delta t)\boldsymbol{\phi(t)} \tag{39}$$

とかける。これを正規直交基底で展開して記述すると、

$$C_i(t+\Delta t) = \sum_j U_{ij}(t+\Delta t)C_j(t) \tag{40}$$

と書ける。

ユニタリー演算 U_{ij} をエルミート演算 H_{ij} で展開することが出来るが、Δt を微小として Δt に関して 1 次までとると、

$$U_{ij} = \delta_{ij} - \frac{i}{\hbar}H_{ij}(t)\Delta t \tag{41}$$

と書ける。(適当な係数 $-i/\hbar$ は、後で便利なように入れてある。) これを使って、

$$\frac{C_i(t+\Delta t) - C_i(t)}{\Delta t} = -\frac{i}{\hbar}\sum_j H_{ij}(t)C_j(t) \tag{42}$$

つまり、

$$i\hbar\frac{dC_i(t)}{dt} = \sum_j H_{ij}(t)C_j(t) \tag{43}$$

が得られる。正規直交基底で展開した係数 C_i の組の時間変化を記述する微分方程式が得られたことになる。

2.1.4 状態発展のいくつかの例

1 状態系　まず、一番簡単な、基底が 1 つの場合を考える。

$$i\hbar\frac{dC_1}{dt} = H_{11}C_1 \tag{44}$$

である。

この微分方程式の解は

$$C_1(t) = ae^{-(i/\hbar)H_{11}t} \tag{45}$$

である。時間が発展しても形は変わらず、位相だけが進む。エネルギー E を、時間発展の固有状態の固有値 (位相の進み方) として定義し、

$$E = H_{11} \tag{46}$$

とする。

2 状態系　基底が 2 つの場合は、

$$i\hbar\frac{dC_1}{dt} = H_{11}C_1 + H_{12}C_2 \tag{47}$$

$$i\hbar\frac{dC_2}{dt} = H_{21}C_1 + H_{22}C_2 \tag{48}$$

と書ける。

2 つの基底状態があるといっても、それがほとんど個別と見なせる場合は、

$$i\hbar\frac{dC_A}{dt} = E_A C_A \tag{49}$$

$$i\hbar\frac{dC_B}{dt} = E_B C_B \tag{50}$$

という独立な 1 状態系が 2 つあるだけのものであろう。この場合は、当然ながら、それぞれの状態に対応し、エネルギーが E_A と E_B の 2 つの解がある。

容易に想像できるように、ほぼ独立な 2 つの状態があって、その間に摂動的な弱い相互作用がある場合は、

$$i\hbar\frac{dC_A}{dt} = E_A C_A + \alpha C_B \tag{51}$$

$$i\hbar\frac{dC_B}{dt} = \alpha C_A + E_B C_B \tag{52}$$

となる。H_{ij} がエルミートであることから、対角項が位相共役で、また、全体の位相の任意性から、実数としても一般性を失わない。このため、$H_{12} = H_{21} = \alpha$ とおいた。

時間に依存した摂動のある 2 状態系　小さな摂動があるだけだと考えると、基本的には 1 状態系の解が少し変化した表式になるはずである。

$$C_A = \gamma_A e^{-(i/\hbar)E_A t} \tag{53}$$

$$C_B = \gamma_B e^{-(i/\hbar)E_B t} \tag{54}$$

の形に書けるであろう。ここで、γ_A,γ_B は t の関数で、ゆっくり変化するものである。

A の状態に観測される確率は、$|C_A|^2 = |\gamma_A|^2$、B の状態に観測される確率は、$|C_B|^2 = |\gamma_B|^2$、という意味である。

これを代入して整理し、

$$\omega_0 = -\frac{E_B - E_A}{\hbar} \tag{55}$$

とおくと、

$$i\hbar\frac{d\gamma_A}{dt} = \alpha\gamma_B e^{-i\omega_0 t} \tag{56}$$

$$i\hbar\frac{d\gamma_B}{dt} = \alpha\gamma_A e^{i\omega_0 t} \tag{57}$$

となる。

ここで、摂動として働く相互作用項が

$$\alpha = 2\alpha_0\cos(\omega t) = \alpha_0(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \tag{58}$$

の場合を考える。つまり、振動数 ω で変化する作用である。

$$i\hbar\frac{d\gamma_A}{dt} = \alpha_0(e^{i(\omega+\omega_0)t} + e^{-i(\omega_0-\omega)t})\gamma_B \tag{59}$$

$$i\hbar\frac{d\gamma_B}{dt} = \alpha_0(e^{i(\omega-\omega_0)t} + e^{-i(\omega_0+\omega)t})\gamma_A \tag{60}$$

$\omega = \omega_0$ の場合を考える。ω は速い振動とし、速い振動の項は平均的にはゼロとみなすと、

$$i\hbar\frac{d\gamma_A}{dt} = \alpha_0\gamma_B \tag{61}$$

$$i\hbar\frac{d\gamma_B}{dt} = \alpha_0\gamma_A \tag{62}$$

代入してまとめると、

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = -\left(\frac{\alpha_0}{\hbar}\right)^2\gamma \tag{63}$$

となる。

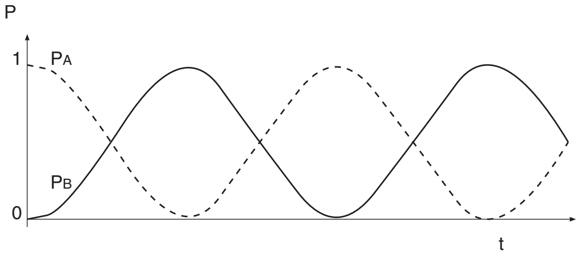

図 3: 2 つの状態の観測確率の時間発展

一般解は、

$$\gamma_A = a\cos\left(\frac{\alpha_0}{\hbar}t\right) + b\sin\left(\frac{\alpha_0}{\hbar}t\right) \tag{64}$$

$$\gamma_B = -ia\sin\left(\frac{\alpha_0}{\hbar}t\right) + ib\cos\left(\frac{\alpha_0}{\hbar}t\right) \tag{65}$$

例として $a = 1, b = 0$ の解を考えることにする。これは、初期状態で状態 A にある場合である。A の状態に観測される確率 P_A は、

$$P_A = |\gamma_A|^2 = \cos^2\left(\frac{\alpha_0}{\hbar}t\right) \tag{66}$$

B の状態に観測される確率 P_B は、

$$P_B = |\gamma_B|^2 = \sin^2\left(\frac{\alpha_0}{\hbar}t\right) \tag{67}$$

となる。はじめ A の状態にあったものが、時間が経つにつれて B の状態に移って行く (図 3)。つまり、2 つの固有エネルギー状態のエネルギー差に対応する周波数の摂動を外部から加えると、状態間の遷移が起こる。また、遷移確率は摂動振幅の自乗に比例する。ということが結果として得られる。

ここで言う 2 つの状態が原子のエネルギー準位で、摂動が光の電場としたとき、入力光によって誘導されて量子力学的状態が移り変わる、という現象が説明できる。つまり、誘導放出や吸収である。

周期的な多状態系　2 状態系の説明をしたついでに、もうすこし話を進めて、多数の状態が一列に並んだ系を考える。一次元の結晶のような場合である。それぞれの状態が独立であれば、

$$i\hbar\frac{dC_n}{dt} = EC_n \tag{68}$$

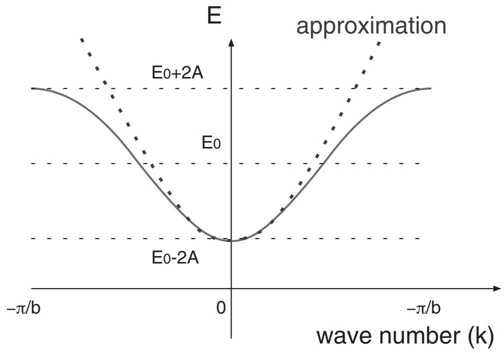

図 4: 一次元多状態系のエネルギー

で記述される。隣り合う状態との間に僅かな相互作用 A があるとすると、

$$i\hbar\frac{dC_n}{dt} = -AC_{n-1} + E_0C_n - AC_{n+1} \tag{69}$$

となる。

$$C_n(t) = \phi(z_n)e^{-(i/\hbar)Et} \tag{70}$$

と書き、空間的な周期を b とおくと、

$$z_{n+1} = z_n + b \tag{71}$$

と書けることを踏まえて、

$$E\phi(z_n) = -A\phi(z_n-b)+E_0\phi(z_n)-A\phi(z_n+b) \tag{72}$$

となる。

この方程式は、次の形の解、

$$\phi(z_n) = e^{ikz_n} \tag{73}$$

$$E = E_0 - 2A\cos kb \tag{74}$$

があることが分かる。つまり、波数 k でエネルギー E の進行波解が存在する。$-1 < \cos kb < 1$ なので、任意のエネルギーにたいして解がある訳ではないが、$E_0 - 2A < E < E_0 + 2A$ の範囲には連続的に解がある (図 4)。もともと、式 68 で記述される 1 つのエネルギーしかなかったものが、一列に規則正しく並んだことによって、連続的なエネルギーをとり得るようになったということである。

式 74 をエネルギーの最小値付近で展開すると、

$$m = \frac{\hbar^2}{2Ab^2} \tag{75}$$

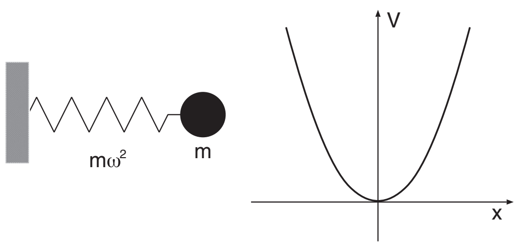

図 5: 調和振動子ポテンシャル

とおいて、

$$E = \frac{\hbar^2}{2m}k^2 \tag{76}$$

の関係となる。エネルギーと運動量の関係を与えるもので、分散関係と呼ばれ、古典力学的には、質量 m の自由粒子の運動を意味する。つまり、隣の状態との結合 (相互作用の大きさ A と距離 b) が質量を与え、それに従って、あたかも自由空間にある粒子のように状態が時間発展する。

運動方程式　周期ポテンシャルの議論を拡張し、離散化していた距離を無限小に持って行く。$Ab^2 = m$ を保った状態で、$b \to 0$ の極限を考えると、

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}C(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}C(x,t) \tag{77}$$

が得られる。さらに、運動エネルギーと等価なものとしてポテンシャル V を導入すると、

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}C(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}C(x,t) + VC(x,t) \tag{78}$$

となる。これを連続空間における粒子の運動を記述する方程式とする (シュレーディンガー方程式)。

2.1.5 調和振動子

運動方程式が得られたので、連続的な空間において、あるポテンシャルに束縛された粒子について考えてみる。

例として、古典的な調和振動子、つまりバネ定数 $m\omega^2$ のバネに取り付けられた質量 m の質点について考えてみる (図 5)。古典的な運動方程式は、

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \omega^2 x(t) = 0 \tag{79}$$

である。あるいは、ポテンシャルが

$$V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{80}$$

で与えられる系、ということである。

これを量子力学として記述したい。エネルギー固有状態を考える際には、$C(x,t)$ は時間に依存しない空間部分と、時間変化する位相部分に分けて書く事が出来る。

$$C(x,t) = u(x)e^{-(i/\hbar)Et} \tag{81}$$

式 78 に代入して空間部分だけ書くと次のようになる (時間に依存しないシュレーディンガー方程式)。

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V\right]u(x) = Eu(x) \tag{82}$$

ここで、

$$-i\hbar\frac{d}{dx} = p \tag{83}$$

と書くことにし、

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{i}{m\omega}p\right) \tag{84}$$

という演算子を導入する。簡単に確かめると、

$$aa^\dagger - a^\dagger a = 1 \tag{85}$$

の関係があることが分かる。これを使って書くと、調和振動子ポテンシャルの時間に依存しないシュレーディンガー方程式は、

$$(a^\dagger a)u(x) = \left(\frac{E}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}\right)u(x) \tag{86}$$

となる。つまり、やりたいことは $a^\dagger a$ の固有値問題を考えることに他ならないことが分かる。

$v_n(x)$ を、$a^\dagger a$ の固有値 n の固有状態とする。つまり、

$$(a^\dagger a)v_n(x) = nv_n(x) \tag{87}$$

である。このとき、

$$\begin{aligned} a^\dagger a(av_n(x)) &= (aa^\dagger - 1)av_n(x) && (88)\\ &= a(a^\dagger a - 1)v_n(x) && (89)\\ &= (n-1)(av_n(x)) && (90) \end{aligned}$$

また、

$$a^\dagger a(a^\dagger v_n(x)) = a^\dagger(a^\dagger a+1)v_n(x) \quad (91)$$
$$= (n+1)(a^\dagger v_n(x)) \quad (92)$$

の関係があることが分かるので、$av_n(x)$ は、固有値 $n-1$ の固有状態 v_{n-1}、$a^\dagger v_n(x)$ は、固有値 $n+1$ の固有状態 v_{n+1} に他ならない。

内積の正定値性から、

$$\langle av_n|av_n\rangle = \langle v_n|a^\dagger av_n\rangle = n\langle v_n|v_n\rangle \geq 0 \quad (93)$$

より、固有値 n は負には成り得ない。一方で、a を作用させるたびに固有値が 1 だけ下がった解をいつでも作る事が出来る。このことから、$a^\dagger a$ の固有値は $n=0,1,2,\cdots$ であると結論できる。

式 86 に戻って、調和振動子ポテンシャルのエネルギー固有値 E_n は、

$$E_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad (94)$$

ということになる。

つまり、調和振動子ポテンシャルに束縛された状態は、エネルギーがとびとびの値になる。また、基底状態 $(n=0)$ であっても、零点振動と呼ばれる $\hbar\omega/2$ のエネルギーがあることが分かる。これは調和振動子に限らず、ポテンシャルに束縛された系で一般に成り立つことで、例えば、原子核の正電荷のポテンシャルによって束縛された電子についても同様である。このことから、原子には離散化されたエネルギー準位構造があり、そのうちの 2 つの状態に注目すると、2 状態系の議論が出来ることが分かる。

基底状態 $v_0(x)$ から出発して、固有状態を具体的に求めることができる。$v_0(x)$ にたいして、固有値を 1 つ下げる演算をするとなくなってしまうので、

$$av_0(x) = 0 \quad (95)$$

の条件が得られる。これをあらわに書き直して整理すると、

$$\frac{1}{v_0(x)}\frac{d}{dx}v_0(x) = -\alpha^2 x \quad (96)$$

である。$\alpha = \sqrt{m\omega/\hbar}$ と置いた。この解は、

$$v_0(x) \propto e^{-\alpha^2x^2/2} \quad (97)$$

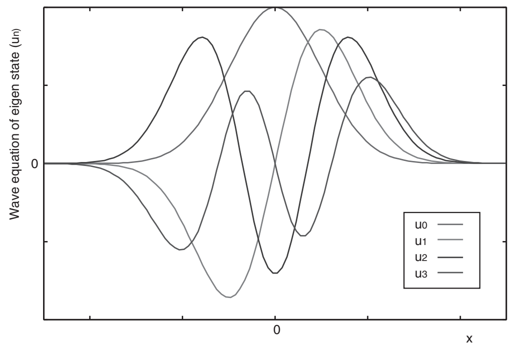

図 6: 調和振動子ポテンシャルの固有関数

規格化すると、

$$u_0(x) = v_0(x) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} e^{-\alpha^2x^2/2} \quad (98)$$

である。エネルギーが高い解は、これに $a^\dagger$ を作用させて作る事ができる。

$$u_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{n+1}}a^\dagger u_n(x) \quad (99)$$

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n u_0(x) \quad (100)$$

具体的には、

$$u_n(x) \propto H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \quad (101)$$

H_n は次数 n のエルミート多項式である。これを図 6 に示す。束縛された状態なので、無限遠に行くとゼロになる関数である。基底状態はガウス型、次数が上がる毎に節が増える関数になる事が分かる。

2.1.6 電磁場の量子化

次は、光が粒子の側面を持つ事を記述する。

電磁波の基礎方程式は、マクスウェル方程式と呼ばれるもので、4 元ベクトル $A_\mu = (\phi, A)$ と $j_\mu = (\rho, j)$ にたいして、

$$\Box^2 A_\mu = -\frac{j_\mu}{\epsilon_0} \quad (102)$$

および、電荷の保存則

$$\nabla_\mu j_\mu = 0 \quad (103)$$

である。

もう少し具体的に書くと、

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{j}{\epsilon_0 c^2} \quad (104)$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (105)$$

ここで、

$$\nabla \cdot A = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (106)$$

である。A をベクトルポテンシャル、ϕ をスカラーポテンシャルと呼ぶ。j は電流密度、ρ は電荷密度である。

電場 E と磁場 B は、

$$E = -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t} \quad (107)$$

$$B = \nabla \times A \quad (108)$$

で得られる。

とくに真空中 $(j = 0, \rho = 0)$ の場合は、E と B も同じ形になって、

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad (109)$$

$$\nabla^2 B - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0 \quad (110)$$

いずれにせよ、波動方程式

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (111)$$

を考えることに尽きる。$\psi(r,t)$ を、モード展開して表すことにする。時間部分 $q_l(t)$ と空間部分 $u_l(t)$ に分離して、

$$\psi(r,t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}}\sum_l q_l(t)u_l(r) \quad (112)$$

と書く。l はモードを表す。

$$\nabla^2 u_l(r) + \frac{\omega_l^2}{c^2}u_l(r) = 0 \quad (113)$$

$$\frac{d^2 q_l(t)}{dt^2} + \omega_l^2 q_l(t) = 0 \quad (114)$$

が得られる。ω_l はモードを特徴づける変数分離の定数である。式 114 は、式 79 に示した古典的調和振動子の運動方程式と全く同じ形である。

ここまでの古典電磁場を量子力学に置き換えるには、形式的に同じ手続きをすれば良いとする。つまり、

$$\frac{d}{dt}q_l(t) \rightarrow -i\hbar\frac{d}{dq} \quad (115)$$

という置き換えを形式的に行う、ということである。

そうすると、同じ形の式から出発したので、当然おなじ結果が得られて、固有エネルギーが

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_l \quad (116)$$

$n = 0, 1, 2\cdots$、となる。

電磁場のとり得るエネルギーは $\hbar\omega_l$ を単位としてとびとびである。つまり、光はエネルギーの粒子のように記述される。また、$n = 0$ の真空状態も零点振動の場が存在することが分かる。

2 状態系の遷移を考えた際、外部からの摂動によって状態が移り変わるとした。もし、摂動が無ければ永遠に同じ状態にあるということになるが、真空にも零点振動の場があるということなので、これによっても状態の遷移が起こる。つまり、入力光に依存しない遷移、それに伴って状態間のエネルギー差に対応する光が放出されるという現象である (自然放出)。

2.2 統計力学の復習

現実の世界では、多数の原子からなる系を扱う。多数の量子力学的状態の平均した分布を制御することでレーザー装置は動作する。統計力学的な扱いが必要である。

2.2.1 温度

エネルギーが E の閉じた系を考える。系に許される状態数を W とし、エントロピーと呼ぶ量 S を次のように定義する。

$$S = k_B \ln W(E) \quad (117)$$

k_B は、適当なスケール因子である。

仮に、この系が、エネルギーのやりとりが出来る 2 つの系から成っているとする (図 7)。それぞれの系

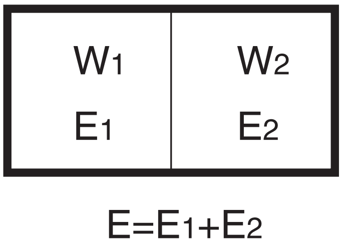

図 7: エネルギーのやりとりが出来る 2 つの系からなる系

のエネルギーを E_1,E_2、許される状態数を $W_1(E_1)$, $W_2(E_2)$ とすると、

$$W(E) = \sum_{E_1+E_2=E} W_1(E_1)\times W_2(E_2) \quad (118)$$

$$\sim W_1(E_1)\times W_2(E_2) \quad (\text{最大の項}) \quad (119)$$

である。(非常に多数の状態がある場合は、式 118 の和は最大の寄与をする項の付近で鋭いピークになるので、ほぼその最大の寄与をする項だけで近似することができる。)

全ての微視的状態は同じ確率で実現する、という原理 (等重率の原理) に従うものと考えると、実現される巨視的な状態は、微視的な状態数が最大のものになるはずである。つまり、全体のエネルギー E を保存して、全系の状態数が極大をとるときを考えると、2 つの系にどのようにエネルギーが分配された状態が実現するかが分かる。

$$dW = \frac{\partial W_1}{\partial E_1}W_2 dE_1 + W_1\frac{\partial W_2}{E_2}dE_2 = 0 \quad (120)$$

$dE_1 = -dE_2$ なので、

$$\frac{1}{W_1}\frac{\partial W_1}{\partial E_1} = \frac{1}{W_2}\frac{\partial W_2}{\partial E_2} \quad (121)$$

あるいは、それぞれの系のエントロピーで書くと、

$$\frac{\partial S_1}{\partial E_1} = \frac{\partial S_2}{\partial E_2} \quad (122)$$

の状態が実現すると理解できる。

温度 T を、

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} \quad (123)$$

で定義する。つまり、2 つの系が平衡状態にあるとは、温度が等しいということである。

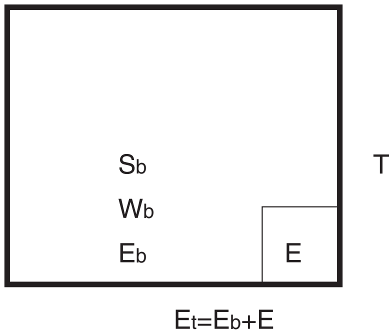

図 8: 熱浴と平衡状態にある系

2.2.2 ボルツマン分布

ある系が温度 T にあるとき、エネルギーが E の状態の一つが実現する確率はいくらか、という問題を考える。全体の確率で規格化するので、エネルギー E_1 と E_2 の微視的状態の実現確率 $P(E_1)$, $P(E_2)$ の比を考えれば十分である。対象としている系と、それより圧倒的に大きな熱浴となる系が温度 T で熱平衡状態にあり、全体として閉じた系にあると考える (図 8)。全体のエネルギーを E_t、熱浴系の状態数を W_b, エントロピーを S_b とする。確率の比は、熱浴系の状態数の比になるから、

$$\frac{P(E_2)}{P(E_1)} = \frac{W_b(E_t-E_2)}{W_b(E_t-E_1)} \quad (124)$$

$$= \exp\left[\frac{S_b(E_t-E_2)-S_b(E_t-E_1)}{k_B}\right] \quad (125)$$

である。ここで、熱浴に比べて対象としている系は十分小さいので一次で展開すると、

$$S_b(E_t-E) \sim S_b(E_t)+\frac{\partial S_b}{\partial E}E \quad (126)$$

$$= S_b(E_t)-\frac{E}{T} \quad (127)$$

と表すことができる。これを利用して式 125 は、

$$\frac{P(E_2)}{P(E_1)} = \frac{\exp(-E_2/k_BT)}{\exp(-E_1/k_BT)} \quad (128)$$

となる。つまり、温度 T のときにエネルギー E の状態の一つが実現する確率 $P(E)$ は、

$$P(E) \sim \exp\left(-\frac{E}{k_BT}\right) \quad (129)$$

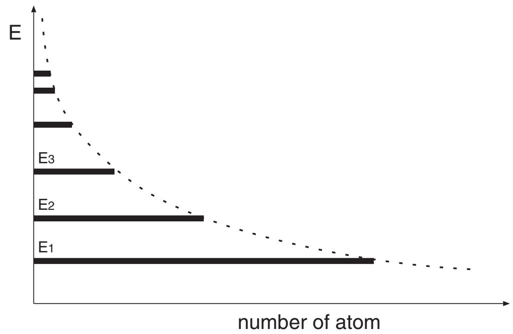

図 9: ボルツマン分布に従う原子状態の分布

に比例する (ボルツマン分布)。エネルギーが高い状態ほど、実現確率が低いということである。たとえば、原子にはいくつかエネルギー固有状態があり、多数の原子がある温度に置かれているとすると、個々の原子の状態の分布は、ボルツマン分布に従う (図9)。

2.2.3 電磁波の状態分布

既に述べたように、電磁波は調和振動子の集合として記述され、そのエネルギーは $\hbar\omega$ を単位としてとることが出来る。多数の調和振動子の状態の分布はボルツマン分布に従うと考えられる。このとき、調和振動子一つあたりの平均のエネルギー $\langle E\rangle$ を求める。簡単のため、$\alpha = e^{-\hbar\omega/k_B T}$ とおく。基底状態にある個数を N_0 として、n 番目の順位にある振動子の個数は $N_0\alpha^n$、そのエネルギーは $n\hbar\omega N_0\alpha^n$ となるので、

$$\langle E\rangle = \frac{N_0\hbar\omega(0\alpha^0 + 1\alpha^1 + 2\alpha^2 + \cdots)}{N_0(\alpha^0 + \alpha^1 + \alpha^2 + \cdots)} = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \tag{130}$$

となる。

空間には振動数の異なる振動子が無数に分布しており、その密度は振動数 ω に依存する。$\langle E\rangle$ に振動子の密度分布をかけると、温度 T で熱平衡状態にある電磁場のエネルギー分布を得る事が出来るはずである。

まず、一辺 L の立方体を仮定して、状態の個数を計算する (図 10)。境界条件より、この中の定在波電

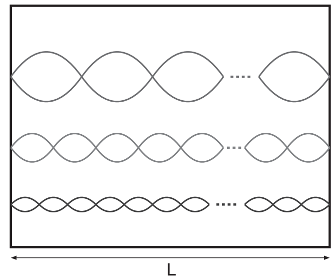

図 10: 一辺 L の境界における定在波電磁波モード

磁波モードは、

$$E = \sin\left(\frac{n_x\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n_y\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n_z\pi x}{L}\right) \tag{131}$$

の形で書けるものに限られる。ここで、

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \frac{L^2\omega^2}{\pi^2 c^2} \tag{132}$$

$(n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3\cdots)$ である。つまり、モード数は 3 次元空間の半径 $L\omega/\pi c$ の 1/8 球に含まれる格子点の数に相当する。電磁場の場合、偏光方向で 2 倍を含めて、モードの個数は、

$$\frac{1}{8}\frac{4\pi}{3}\left(\frac{L\omega}{\pi c}\right)^3 \times 2 \tag{133}$$

単位体積あたりにするには L^3 でわって、単位角周波数あたりの状態密度 $du/d\omega$ は、

$$\frac{du}{d\omega} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \tag{134}$$

結局、温度 T における光のエネルギー分布 $I(T,\omega)$ は、平均エネルギーと状態密度をかけて、

$$I(T,\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3(e^{\hbar\omega/k_B T} - 1)} \tag{135}$$

となる。つまり、温度 T の空間はこのようなエネルギー分布をもった電磁波 (光子) に満たされているということである (黒体輻射)。

2.3 光増幅の原理

ようやくここで、誘導放出による光増幅が説明できる。ここまでに議論してきた、2 状態系の遷移と統計力学による分布が基礎になる。

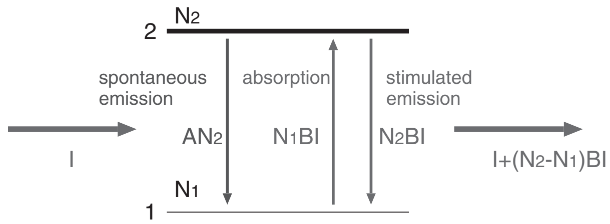

図 11: 反転分布による光の増幅

光が増幅されることが分かれば、あとは適当に帰還させれば発振器ができるし、それを種光として増幅させていけば強力な光が得られることは想像できるであろう。

2.3.1 2 状態系の放射係数

ω だけ離れた 2 つのエネルギー準位がある多数個の原子の系を考える。基底状態を準位 1、励起状態を準位 2、とする。この系に電磁波が入力される状況を考える (図 11)。

これまでの議論で分かった事をまとめる。まず、基底状態にある原子は、電磁波を吸収して励起状態に移ることができる (吸収)。これは、基底状態の原子数 N_1 と電磁波の強度 $I(\omega)$ に比例する頻度で起こる。一方、励起状態にある原子は、電磁波の摂動によって基底状態に遷移する (誘導放出)。これは、励起状態の原子数 N_2 と電磁波の強度 $I(\omega)$ に比例する頻度で起こる。さらに、電磁波の強度に依存せずに基底状態に遷移する場合もある (自然放出)。これは、励起状態の原子数 N_2 に比例する。

自然放出の係数を A_{21}、誘導放出の係数を B_{21}、吸収の係数を B_{12} とおくと、基底状態から励起状態へ変化する頻度 R_{12} は、

$$R_{12} = N_1 B_{12} I(\omega) \tag{136}$$

また、励起状態から基底状態へ変化する頻度 R_{21} は、

$$R_{21} = N_2[A_{21} + B_{21} I(\omega)] \tag{137}$$

となる。2 状態系の遷移の議論から、$B_{12} = B_{21}$ であることは分かっている。

出力される電磁波は、誘導放出による増加と、吸収による減少によって、

$$[1 + (N_2 - N_1)B]I \tag{138}$$

となる。もし、$N_2 > N_1$ (反転分布) であれば、入力より出力が大きくなり、光の増幅が起こることになる。ただし、熱平衡状態においては、ボルツマン分布で、エネルギーの高い状態ほど少ないはずである。つまり、通常の熱平衡状態にある系では光の増幅は起きない。

簡単な考察から、係数 A, B の関係が得られる。この系が温度 T で熱平衡状態にあるとすると、$R_{12} = R_{21}$ の条件になるはずで、これを解くと、

$$I(\omega) = \frac{A}{B(e^{\hbar\omega/k_B T} - 1)} \tag{139}$$

外部からの光無しに平衡状態にある場合は、$I(\omega)$ は式 135 の黒体輻射の分布になるはずである。このことから、2 つの係数 A, B の間に、

$$\frac{A}{B} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \tag{140}$$

の関係が成り立つ。つまり、自然放出が大きいものは誘導放出も大きい、という一般則が得られる。

2.3.2 レート方程式

2 準位の間に反転分布ができていれば、誘導放出によって、光の増幅が起こることが分かった。しかし、すでに述べたように反転分布は熱平衡では実現しない。そこで、外部からエネルギーが導入される非平衡状態を考える。増幅と吸収は同じ確率で起こるため、2 つの準位だけのシステムでは反転分布を作ることは出来ない。そこで、3 または 4 準位のシステムを考える必要がある。

3 準位系　3 準位から成る図 12 のようなシステムを考える。準位 1 と 2 の間に反転分布を形成するために、もう一つ上の準位 3 が必要である。

全体の原子数を N とし、それぞれのエネルギー準位にある原子数を N_1, N_2, N_3 とする。

$$N_1 + N_2 + N_3 = N \tag{141}$$

準位 3 は寿命が非常に短く、すぐに 3 → 2 の遷移が起こり、$N_3 \sim 0$ となるとする。1 → 3 に相当する励起エネルギー P を入力するときの吸収の係数を B_p とすると、$B_p N_1 P$ の速度で 1 → 3 の過程が起こる。1 → 2 に相当するエネルギーの信号光の強度を I とすると、誘導放出の係数を B とし、吸収による 1 → 2 過程は BN_1I、誘導放出による 2 → 1 過程は BN_2I の速度で起こる。また、自然放出の時定数を τ とすると、入力光に無関係に、N_2/τ の速度で 2 → 1 の過程が起こる。

これを微分方程式の形で表すと、

$$\frac{dN_2}{dt} = B_pN_1P - \frac{N_2}{\tau} - N_2BI + N_1BI \tag{142}$$

$$\frac{dN_1}{dt} = -B_pN_1P + \frac{N_2}{\tau} + N_2BI - N_1BI \tag{143}$$

となる。定常状態では、

$$\frac{dN_2}{dt} = \frac{dN_1}{dt} = 0 \tag{144}$$

となる。この条件で解いて、反転分布の大きさ $N_2 - N_1$ は、

$$N_2 - N_1 = \frac{N(P/P_0 - 1)}{1 + P/P_0 + 2I/I_s} \tag{145}$$

ここで、

$$B\tau = I_s, \quad \frac{1}{B_p\tau} = P_0 \tag{146}$$

とおいた。$N_2 - N_1 > 0$ が反転分布という意味であるから、反転分布の出来る条件は、$P > P_0$、つまりある閾値以上の励起エネルギーを投入することである。また、入力信号光を大きくしていって、$I > I_s$ になると、反転分布が消費されてゲインが飽和し始めることが分かる。

4 準位系　同様の計算を図 13 の 4 準位から成るシステムで行う。準位 3 は寿命が非常に短く、すぐに 3 → 2 の遷移がおきるとする。準位 1 は寿命が非常に短く、すぐに 1 → 0 の遷移がおきるとする。その結果、$N_3 \sim 0, N_1 \sim 0$ になるとする。

全く同様の計算をして、反転分布の大きさは、

$$N_2 - N_1 = \frac{NP/P_0}{1 + P/P_0 + I/I_s} \tag{147}$$

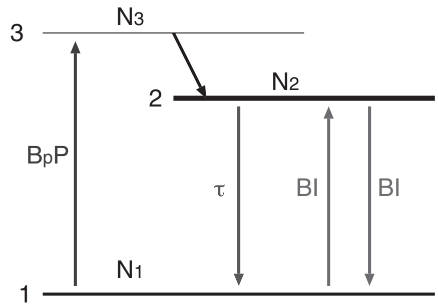

図 12: 3 準位システム

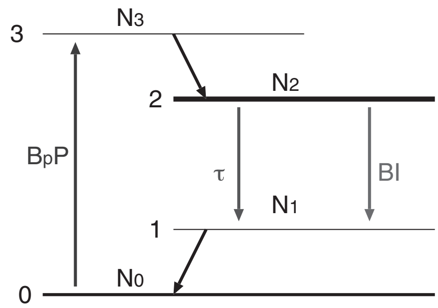

図 13: 4 準位システム

となる。4 準位のシステムでは、P が小さくても反転分布ができ、効率良く動作することが分かる。

2.4　光の伝搬

レーザー光が、狭線幅で回折限界の光であるためには、光の増幅と同時に帰還のメカニズムが重要な役割を果たしている。共振器とよばれる空間に光を閉じ込めることで、制限されたモードにエネルギーを集中する。共振器について議論するために、光の伝搬則の理解が必要である。この伝搬則が、レーザー光の横モードを決定する。

2.4.1　幾何光学

はじめに近軸光線の伝搬についてまとめておく。任意の位置 z における光線を、軸からの距離 r と、傾き $dr/dz = r'$ で表すことにする (図 14)。

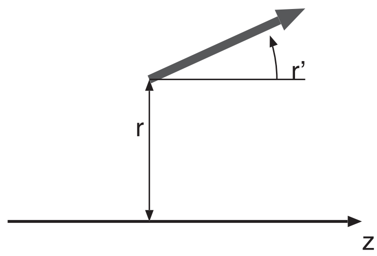

図 14: 光線

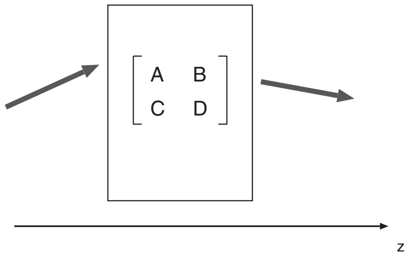

図 15: 光線の伝搬行列

$$\begin{pmatrix} r(z) \\ r'(z) \end{pmatrix} \tag{148}$$

地点 1 から地点 2 に向かって光線が伝搬するとき、2 点間の光線を 2×2 行列を使って、

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{pmatrix} \tag{149}$$

と書くことができる。間の光学要素がこの 2×2 行列によって表される (図 15)。

たとえば、距離 d の自由空間は、

$$\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{150}$$

焦点距離 f の薄レンズは、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \tag{151}$$

である (図 16)。半径 ρ の凹面鏡は、焦点距離 $\rho/2$ の凸レンズと同等である。ただし凹面鏡で入射が垂直で無く、反射全角 α で用いる場合は、焦点距離に補

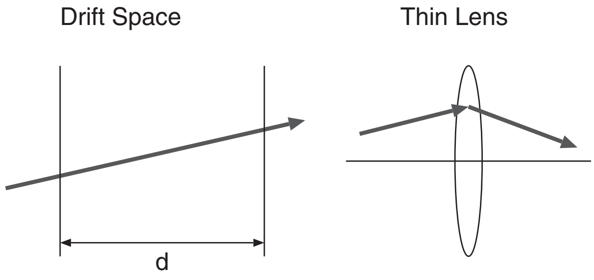

図 16: 自由空間と薄レンズ

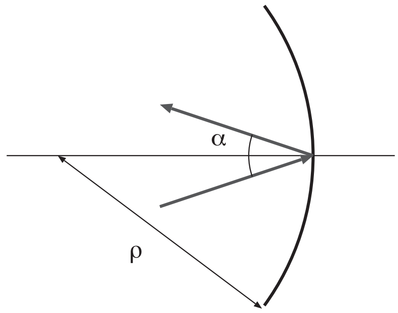

図 17: 凹面鏡の反射

正因子が入る。紙面方向 (tangential) の焦点距離 f_t と、紙面に垂直 (sagittal) の焦点距離 f_s は一致せず、

$$f_t = \frac{\rho}{2}\cos(\alpha/2) \tag{152}$$

$$f_s = \frac{\rho}{2\cos(\alpha/2)} \tag{153}$$

となる (図 17)。

また、光学要素が連続する場合は、行列の積によって、全体を表現する行列を得る事ができる。

これらは、加速器の単粒子力学において、四極電磁石などの収束要素を行列表現するのと全く同じである。

薄レンズをもう少し一般化し、収束作用が z 方向に連続的に分布する場合を考える (図 18)。これは、加速器の場合に厚みのある四極電磁石を扱う場合に相当する。空間を無限に細かく分割して、自由空間と薄レンズを交互に掛け合わせて表現すれば良く、

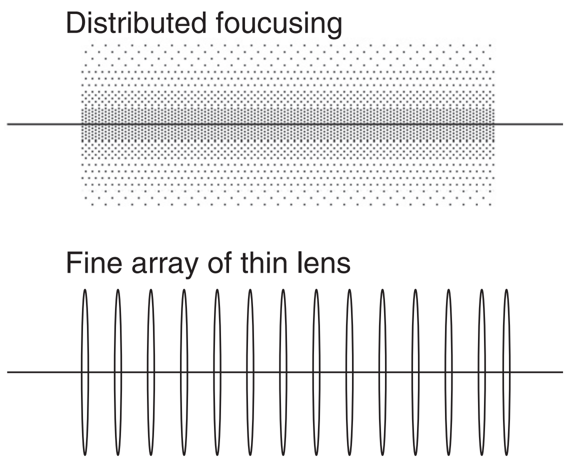

図 18: 連続分布する収束作用

分布した収束作用 (距離 d) は、

$$\begin{pmatrix} \cos(\sqrt{k_2/k}d) & \sqrt{k/k_2}\sin(\sqrt{k_2/k}d) \\ -\sqrt{k_2/k}\sin(\sqrt{k_2/k}d) & \cos(\sqrt{k_2/k}d) \end{pmatrix} \tag{154}$$

と表されることが分かる。(横方向に屈折率が $n = n_0(1-\frac{1}{2}\frac{k_2}{k})r^2)$ と変わる媒質に相当する。)

2.4.2 ガウスビーム

電磁場の波動方程式

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0 \tag{155}$$

を、単一周波数の場合について考える。

これを変数分離すると、

$$A = q(t)u(x,y,z) \tag{156}$$

と表され、空間部分については

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \tag{157}$$

$(k = \omega/c)$ が得られる。これは、ヘルムホルツ方程式と呼ばれる。

ここで、一様な自由空間の場合は k は定数であるが、後の展開の伏線として、

$$k^2 = k^2(1 - \frac{k_2}{k}r^2) \tag{158}$$

の形と仮定し、たまたま $k_2 = 0$ として考える。($r = \sqrt{x^2+y^2}$ である。)

今、伝搬方向を z とし、

$$u(x,y,z) = \psi(x,y,z)e^{-ikz} \tag{159}$$

と書き、近軸近似

$$\left|\frac{\partial\psi}{dz}\right| \ll k|\psi|, \quad \left|\frac{\partial^2\psi}{dz^2}\right| \ll \left|k\frac{\partial\psi}{dz}\right| \tag{160}$$

をすると、ヘルムホルツ方程式は、

$$i\frac{\partial}{\partial z}\psi = \frac{1}{2k}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi - \frac{k_2}{2}r^2\psi \tag{161}$$

とかける。これは、調和振動子ポテンシャルの場合のシュレーディンガー方程式と同じ形である。質量に相当するものが k で、復元力のバネ定数に相当するものが k_2 である。

ここで、ψ は、z と r^2 の関数で書ける解を仮定する。そのような解を、

$$\psi = \exp\left(-i(P(z) + \frac{k}{2q(z)}r^2)\right) \tag{162}$$

と書く事にする。これを式 161 に代入すると、

$$\frac{r^2}{k^2}\left[(\frac{1}{q})^2 + (\frac{1}{q})' + \frac{k_2}{k}\right] + 2k\left[P' + \frac{i}{q}\right] = 0 \tag{163}$$

となり、これが全ての場所 (任意の r) で成立するためには、

$$(\frac{1}{q})^2 + (\frac{1}{q})' + \frac{k_2}{k} = 0 \tag{164}$$

$$P' + \frac{i}{q} = 0 \tag{165}$$

となる。

ここで、

$$\frac{1}{q} = \frac{s'}{s} \tag{166}$$

を満たす関数 $s(z)$ を導入し、式 164 を置き換えると、

$$s'' + s\frac{k_2}{k} = 0 \tag{167}$$

となり、この一般解は次の三角関数の形である。

$$s(z) = a\sin(\sqrt{\frac{k_2}{k}}z) + b\cos(\sqrt{\frac{k_2}{k}}z) \tag{168}$$

これを q の表式として書き直すと、

$$q(z) = \frac{\cos[\sqrt{k_2/k}z]q_0 + \sqrt{k/k_2}\sin[\sqrt{k_2/k}z]}{-\sqrt{k_2/k}\sin[\sqrt{k_2/k}z]q_0 + \cos[\sqrt{k_2/k}z]} \tag{169}$$

ここで、$q_0 = q(z=0)$ である。

いったん戻って、$k_2 = 0$ の場合を考える。この場合、式 164 は、

$$q' = 1 \tag{170}$$

になるので、

$$q(z) = z + q_0 \tag{171}$$

そして、

$$P(z) = -i \ln \left(1 + \frac{z}{q_0} \right) \tag{172}$$

q_0 は、単に積分定数で、座標原点を決めるだけであるが、後の伏線として、

$$q_0 = i \frac{k w_0^2}{2} \tag{173}$$

と書く事にする。$\ln(a + ib) = \ln \sqrt{a^2 + b^2} + i \tan^{-1}(b/a)$ などを使って整理すると、近軸ヘルムホルツ方程式の軸対称最低次の解は、以下の形に表される。

$$\psi(r,z) = \frac{A w_0}{w(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{w(z)} \right) \exp\left(-i \frac{k r^2}{2R(z)} + i\phi \right) \tag{174}$$

ここで、

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} & (175) \\ w(z) &= w_0 \sqrt{1 + (\frac{z}{z_0})^2} & (176) \\ R &= z\left(1 + (\frac{z_0}{z})^2\right) & (177) \\ \phi &= \tan^{-1}(\frac{z}{z_0}) & (178) \\ z_0 &= \frac{\pi w_0^2}{\lambda} & (179) \end{aligned}$$

$\lambda = 2\pi/k$ である。

これは、図 19 に示すように、$z = 0$ の位置に収束点を持ち、断面の電場強度がガウス型の分布のビームである (ガウスビームと呼ばれる)。収束点でのサイズは w_0 で与えられる。これは、中心軸から w_0 だけ離れた位置で、電場強度が $1/e$ になるという意味である。光子密度は電場の 2 乗であるから、光子密度としては 2σ サイズに相当する。波長 λ が固定であれば、(z 方向の平行移動を除いて)w_0 が唯一のパラメータである。任意の位置でのサイズは $w(z)$ で表され、収束点から離れるにつれて大きくなっていく。収束点から z_0 だけ離れると、サイズが $\sqrt{2}$ 倍になる。z_0 をレイリー長と呼び、絞ったサイズが維持できる距離の指標である。R は波面の曲率半径を表す。ϕ は Gouy 位相と呼ばれ、図 20 に示すように、収束点を 1 回経由すると π だけ進む位相因子である。これは、ガウスビームが一様な平面波ではなく、軸上に局在化したビームであることから、導波管などと同じように位相速度が大きくなる現象に対応する。

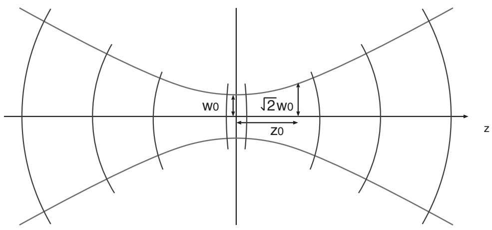

図 19: ガウスビームの発散の様子

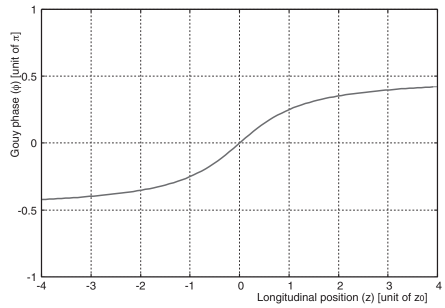

図 20: Gouy 位相の変化

レーザー光のような、単一周波数の回折限界光は、ガウスビームとして空間を伝搬する。

2.4.3 転送行列

式 169 を、任意の z のときの解と $z = 0$ のときの解を関係づける式と見ると、たとえば、q_1 から q_2 への関係は、

$$q_2 = \frac{A_1 q_1 + B_1}{C_1 q_1 + D_1} \tag{180}$$

q_2 から q_3 への関係は、

$$q_3 = \frac{A_2 q_2 + B_2}{C_2 q_2 + D_2} \tag{181}$$

これを合わせると、

$$q_3 = \frac{A_T q_1 + B_T}{C_T q_1 + D_T} \tag{182}$$

ここで、係数の A, B, C, D は、

$$\begin{pmatrix} A_T & B_T \\ C_T & D_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \tag{183}$$

と、行列の掛け算で表されることが確かめられる。

つまり、式 169 は行列で表すと、

$$\begin{pmatrix} \cos(\sqrt{k_2/k}z) & \sqrt{k/k_2}\sin(\sqrt{k_2/k}z) \\ -\sqrt{k_2/k}\sin(\sqrt{k_2/k}z) & \cos(\sqrt{k_2/k}z) \end{pmatrix} \tag{184}$$

ということで、幾何光学での光線の伝搬と全く同じ表式になる。

$k_2 \to 0$ で、自由空間を表すことになり、

$$\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{185}$$

収束作用を一点のデルタ関数に集約すると、薄レンズを表すことになる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \tag{186}$$

2.4.4 共振器

複数の鏡を使って閉じた空間を作ったものを共振器という。図 21 は、2 枚の凹面鏡を使った最も単純な構成である。凹面鏡はレンズと同等なので、この共振器内を往復する光は、レンズと自由空間が繰り返された光路を伝搬するものと考える事ができる。この状況は、図 18 と似ていることから、ガウスビームの定常解が存在すると期待出来る。

1 周期の伝搬行列を考えれば、共振器の特性を解析することが出来る。例えばこの場合、鏡の間隔を d とし、凹面鏡の収束力を f とする。共振器の中央を起点として 1 周期の伝搬行列は、

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{187}$$

である。選んだ起点によって、行列の表式は変わるが、共振器の安定性などの結果は同じになる。

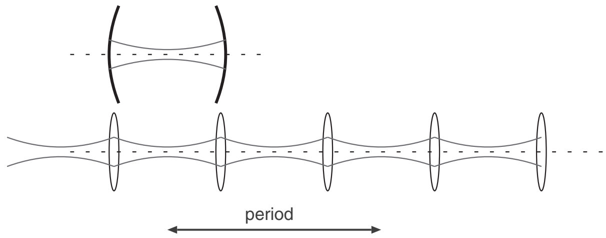

図 21: 共振器の例

共振器の定常解 (固有モード) は、一周して元に戻るという条件から、

$$q_s = \frac{Aq_s + B}{Cq_s + D} \tag{188}$$

を満たさなければならない。

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - i\frac{\lambda}{\pi w^2} \tag{189}$$

の対応があることから、$1/q_s$ の実部から波面の曲率半径が分かり、虚部からビームサイズが分かることになる。具体的に解を書くと、

$$R = \frac{2B}{D-A} \tag{190}$$

$$w^2 = \frac{\lambda}{\pi}\frac{|B|}{\sqrt{1-(D+A)^2/4}} \tag{191}$$

である。

ここで得られた R と w は、起点での値である。任意の点での値を知りたいときは、起点を変えてこの計算を繰り返せば良い。$w^2 < 0$ になる場合は、安定解が無く、共振器として成立しないことを意味する。

2.4.5 高次ガウスビーム

式 161 が調和振動子ポテンシャルのシュレーディンガー方程式と等価であることから、式 174 で得られた最低次の解の他に、高次の解がある。これは、横モードとも呼ばれる。高次の解の表式は、最低次の解に $a^\dagger$ を掛けていく事で、次のものが得られる。

$$\begin{aligned} \psi(x,y,z) = \quad & \frac{Aw_0}{w(z)} H_m\left(\sqrt{2}\frac{x}{w(z)}\right) H_n\left(\sqrt{2}\frac{y}{w(z)}\right) \\ \times \quad & \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{w(z)^2}\right) \exp\left(i\frac{k(x^2+y^2)}{2R(z)}\right) \\ \times \quad & \exp\left(i(m+n+1)\phi\right) \end{aligned} \tag{192}$$

H_n の具体的な表式は、$a^\dagger$ を掛けていく操作から想像できるように、

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2) \tag{193}$$

例えば、

$$H_0(x) = 1 \tag{194}$$
$$H_1(x) = 2x \tag{195}$$
$$H_2(x) = 4x^2 - 2 \tag{196}$$
$$H_3(x) = 8x^3 - 12x \tag{197}$$

である。図 6 で示したものと同じく、次数に応じて断面方向の節が増える。これを、エルミートガウスビームと呼び、HG_{mn} モードと書く。m,n はそれぞれ x,y 方向の次数を表す。図 22 に、高次のモードの断面プロファイルの例を示す。断面形状の他、Gouy 位相の進み方も次数に依存する。次数が高いほど、位相の進みが速い。

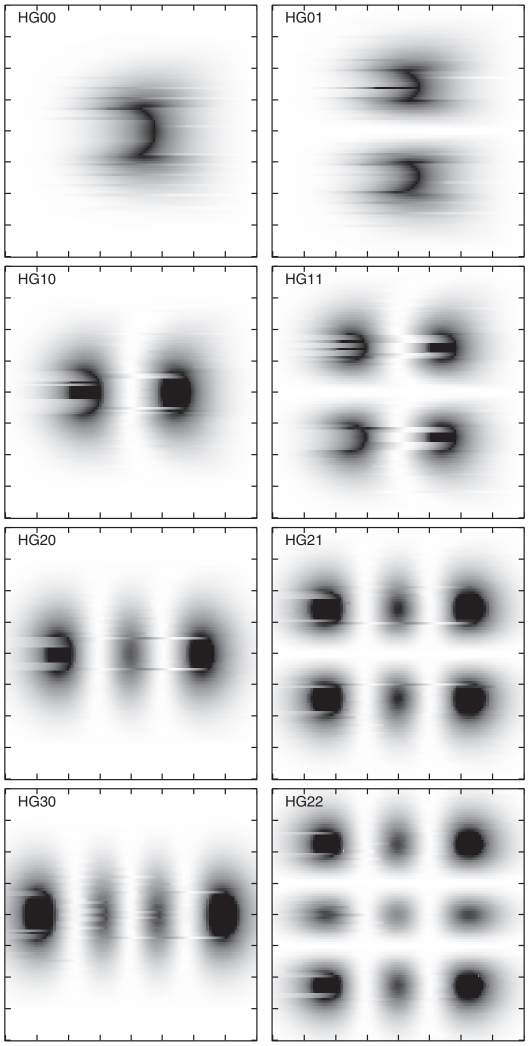

図 22: 高次ガウスビームの断面形状

2.5 縦モードとレーザー発振器

レーザー光の時間方向および波長方向の自由度は、縦モードと呼ばれる。これは、共振器の周長から決定される。

2.5.1 共振器の縦モード

共振器の進行方向の境界条件に注目する。簡単の為、2 枚の平面鏡が間隔 L で配置された 1 次元共振器を考える。(平面鏡では収束効果が無いので安定では無いが、今は無視して考える。また、Gouy 位相や鏡の反射による位相シフトの効果もここでは考え無い。) 共振器内に存在できる電磁波は、

$$2L = m\lambda \quad (m = 1, 2, 3, \cdots) \tag{198}$$

を満たすものに限られる。光周波数 ν としては、

$$\nu = \frac{mc}{2L} \tag{199}$$

で、これを共振器の縦モードと呼ぶ (図 23)。縦モードの間隔 $\Delta\nu = c/2L$ は、共振器の基本周波数 (光の速度で単位時間に共振器を何周回するか) に相当する。

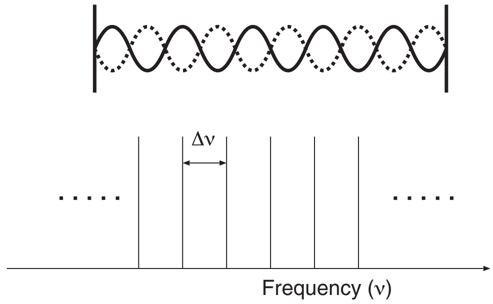

図 23: 共振器の縦モード

2.5.2　発振器

図 24 のように、共振器内部に光増幅器、つまり反転分布した媒質、を置く。これがレーザー発振器である。共振器内の光は離散的な縦モードおよび横モードとしてしか存在しない。はじめ、自然放出によって増幅器から、共振器とは無関係に光が放射される。その一部で共振器のモードに合ったものは、共振器に閉じ込められることになる。今度はそれが光増幅器の入力光として働き、誘導増幅によって増幅する。これが帰還的に起こり、共振器モードの光が成長する。各モードについて、ゲインが損失を上回っていればエネルギーが増大していく。レート方程式で議論したように、入力光が大きくなると光増幅器はあるところで飽和しゲインが低下する。最終的には、共振器の損失とゲインが釣り合って、全体のゲインが 1 となるところで定常状態が実現する。つまり、共振器によって横にも縦にも特定のモードを選択し、光を増幅したものがレーザー発振器で、いわゆるレーザー光として知られる、線幅が狭く指向性の良い光ビームが実現する。

光増幅器は、原子準位によって動作帯域が決まっており、ゲインは周波数依存性を持っている。共振器長が大きく、縦モード間隔が狭い場合は、増幅器の動作帯域内に多数の縦モードが存在する。複数の縦モードが同時に励起された状態を多縦モード発振と呼ぶ。一方、共振器長が小さく、縦モード間隔が十分広い場合は、1 つの縦モードだけが成長する条件になる場合があり、単一縦モード発振と呼ぶ。これは理想的な CW レーザーである。

共振器鏡の 1 つを、透過率のあるものとすると、光を共振器の外に取り出す事ができる。

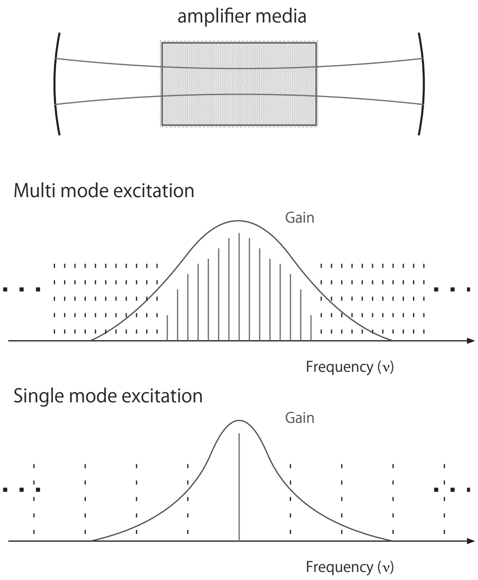

図 24: レーザー発振器

2.5.3　モードロック

多縦モード発振において、通常はそれぞれの縦モードは無関係に発振すると考えられるが、何らかの原因で各縦モードの位相関係が固定されたとする。縦モードが $2N+1$ 本あるとし、中心周波数を ω_0、縦モード間隔を $\Delta\omega$ とする。(ここでは角周波数で表すこととし、$\omega = 2\pi\nu$ である。) 簡単のため、全ての縦モードの振幅は等しいとする。全ての縦モードを足し合わせた電場は、以下のように計算される。

$$
\begin{aligned}
E(t) &= \sum_{n=-N}^{N} E_0 \cos[(\omega_0 + n\Delta\omega)t] && (200)\\
&= E_0 Re\left[\sum_{n=-N}^{N} \exp[-i(\omega_0 + n\Delta\omega)t]\right]\\
&= E_0 Re\left[e^{-i\omega_0 t}\sum_{n=-N}^{N}(e^{-i\Delta\omega t})^n\right]\\
&= E_0 \frac{\sin[(N+\frac{1}{2})\Delta\omega t]}{\sin(\Delta\omega t/2)}\cos(\omega_0 t) && (201)
\end{aligned}
$$

つまり、ω_0 で振動する電場が、振幅変調された形になる。光強度はこれを 2 乗して、

$$
I(t) = I_0 \frac{\sin^2[(N+\frac{1}{2})\Delta\omega t]}{\sin^2(\Delta\omega t/2)} \tag{202}
$$

となる。これを図 25 に示す。$1/\Delta\nu\ (= 2\pi/\Delta\omega)$、つまり共振器の基本繰り返しに相当するパルス列が得られることになる。また、縦モード数が大きい程、短いパルスになる。これが、モードロックパルスレーザーである。

どうやって多数の縦モードの位相を揃えるかが問題である。色々な手法が確立しているが、基本的には光の位相に直接働きかけるというよりは、強度の時間変化に働きかけて、強いところをより強く、弱

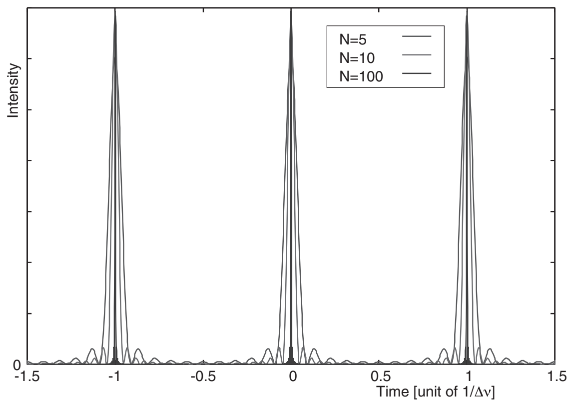

図 25: 縦モードの加算によるパルス列

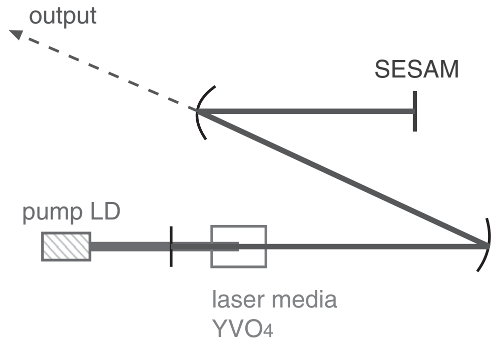

図 26: SESAM モードロック発振器

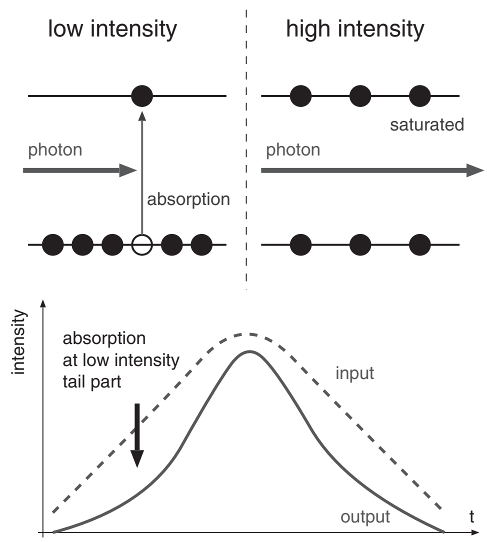

図 27: 可飽和吸収体によるパルスの生成

いところをより弱くするような仕組みを導入し、パルス構造を成長させるやり方をする。

代表的な例を 2 つ紹介する。図 26 は、可飽和吸収体を使ったモードロック発振器の構成である。可飽和吸収体とは、吸収体であって、その吸収の効果が光強度によって飽和するものである。つまり、弱い光に対しては光を損失するが、強い光に対しては損失が小さい。このようなものを半導体で出来た鏡として作ったものが SESAM(SEmiconductor Saturable Absorber Mirror) である。これを共振器を構成する鏡の一つとして用いる。図 27 で原理を説明する。通常は、2 準位系の下の準位にあって、光を吸収する (反射率が低い) が、高いピーク強度で光の吸収が進み上の準位が埋まってくると、吸収率がさがる (反射率が高い)。この作用によって、SESAM で反射される度にピークが成長し、最終的にモードロック状態になる。

図 28 は、ファイバ発振器で良く用いられる、非線形偏波回転 (NLPR: Non-Linear Polarization Rotation) モードロックと呼ばれる方式である。シングルモード光ファイバ中では、断面が小さいため光強度が強く、ファイバ (石英) の非線形効果の影響が見られる。強度に依存した屈折率の変化として現れ、偏光方向を回転させる効果になる。偏光板と偏光スプリッタ (PBS) の関係をうまく調整して、低強度では損失が大きく、高強度では損失が小さい状態にすると、ピークが成長し、モードロック状態が実現する。

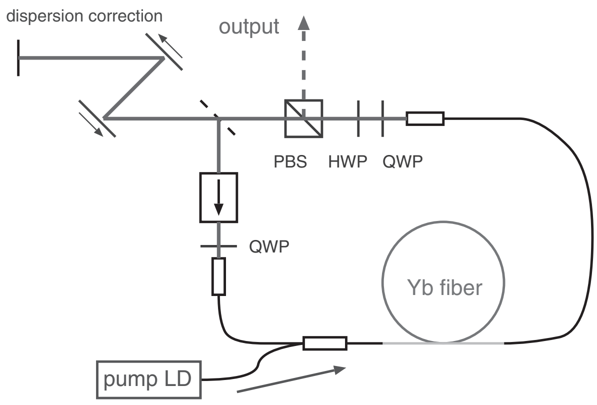

図 28: 非線形偏波回転によるファイバモードロック発振器

2.6 レーザー増幅器

反転分布を作って、そこに種光を通せば、増幅される。増幅器は、結晶であったり、ファイバであったりする。励起方法も色々である。(省略。適当な参考書を参照)

2.7 波長変換

レーザーは、原子準位の遷移によって光増幅を行うので、得られる波長は原子の種類で決まってしまう。必ずしも欲しい波長の光が直接に発振し、増幅できるとは限らない。そこで、波長を変換する技術が必要になる。特に、より短波長の光が欲しくなるのが常である。ここでは、波長変換の基本である 2 倍波発生について説明する。通常、波長 1 μm 程度の赤外で発振し、2 倍波変換して可視域、さらに 2 倍波変換して紫外域、と進んで行く。それ以上になると結晶では無理で、高次高調波という手法が用いられる。さらに短波長領域では、加速器を用いた自由電子レーザーの出番になる。その次はコンプトン散乱であろうか。

2.7.1 分極

ここでは、真空中ではなく、電流密度 j がある場合を扱う。

分極 P を導入し、

$$j = \frac{dP}{dt} \tag{203}$$
$$\rho = -\nabla \cdot P \tag{204}$$

ここでは、P は空間的に一様である場合に限って扱うので、式 103 より $\rho = 0$ である。

式 203 を式 104 に入れて、両辺に $\partial/\partial t$ して、E と ϕ の式に変換し、$\rho = 0$ から E の式だけが残って、

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \tag{205}$$

が得られる。

P は、

$$P = \epsilon_0(\chi^{(1)}E + \chi^{(2)}EE + \cdots) \tag{206}$$

($\chi^{(n)}$,EE とかはテンソル量) これを E にたいする線型部分 P_L と非線形部分 P_{NL} に分けて、

$$P_L = \epsilon_0 \chi^{(1)} E \tag{207}$$
$$P_{NL} = \epsilon_0(\chi^{(2)}EE + \chi^{(3)}EEE + \cdots) \tag{208}$$

式 205 を、E の線型部分と非線形部分に分けて書くと、

$$\nabla^2 E - \frac{1+\chi^{(1)}}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}\frac{\partial^2 P_{NL}}{\partial t^2} \tag{209}$$

である。$1 + \chi^{(1)} = n^2$ と書くと、

$$\nabla^2 E - \frac{1}{(c/n)^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}\frac{\partial^2 P_{NL}}{\partial t^2} \tag{210}$$

となる事から分かるように、これは、屈折率 n の空間に P_{NL} を起源とする放射源があると理解できる。(真空中と比べて伝搬速度が c/n になった。)

ここでは非線形分極は 2 次までを考えることにする。(2 倍波発生は、2 次の非線形現象である。)

$$P_{NL} = \epsilon_0 \chi^{(2)} EE \tag{211}$$

反転対称性がある系の場合、P と E を同時に符号反転しても変化しないはずである。

$$-P_{NL} = \epsilon_0 \chi^{(2)}(-E)(-E) \tag{212}$$

式 211,212 を見比べると、$\chi^{(2)} = 0$ でなければ辻褄が合わない。反転対称性がある系では 2 倍波発生は出来ないことが分かる。つまり、2 倍波発生のためには、反転対称性を持たない非線形結晶が必要ということである。

2.7.2　位相整合

入力する基本波が、発生する高次波に比べて十分大きい場合を考える。

分極の伝搬が、

$$P_{NL} = \overline{P_{NL}} \exp(i(\omega_{NL} t - k_{NL} z)) \tag{213}$$

で表される波として伝わるとする。($\overline{P_{NL}}$ は z によらない)

高次波の伝搬を、

$$E = E(z) \exp(i(\omega_{NL} t - k(\omega_{NL}) z)) \tag{214}$$

と書く。屈折率 n は周波数成分の関数であるとし、

$$k(\omega_{NL}) = (\omega_{NL}/c)^2 n_{\omega_{NL}} \tag{215}$$

の関係がある。

式 210 に代入して整理すると、

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial^2 E(z)}{\partial z^2} & -2ik(\omega_{NL})\frac{\partial E(z)}{\partial z} \\ & = \frac{\omega_{NL}^2}{c^2 \epsilon_0} \overline{P_{NL}} \exp(i(k(\omega_{NL}) - k_{NL})z) \end{aligned} \tag{216}$$

$E(z)$ は z にたいしてゆっくり変化するとすると、

$$\frac{\partial E(z)}{\partial z} = \frac{\omega_{NL}^2}{2i\epsilon_0 c^2 k(\omega_{NL})} \overline{P_{NL}} \exp(-i\Delta k z) \tag{217}$$

ここで、$\Delta k = k(\omega_{NL}) - k_{NL}$ である。

これを距離 L だけ積分すると、

$$E(L) \propto \exp(i\frac{\Delta k L}{2}) \overline{P_{NL}} L \frac{\sin(\Delta k L/2)}{\Delta k L/2} \tag{218}$$

強度 I は $|E|^2$ なので、

$$I(L) \propto L^2 \frac{\sin^2(\Delta k L/2)}{(\Delta k L/2)^2} \tag{219}$$

である。

$\Delta k = 0$ なら、L が大きいほど強くなるが、$\Delta k \neq 0$ の場合、$L = \pi/(2\Delta k)$ で減少に転じ、$L = \pi/\Delta k$ ゼロになってしまう。

2 倍波変換の場合は、$\Delta k = 0$ の条件は、$k_{2\omega} = 2k_\omega$ ということで、つまり、屈折率が、$n_{2\omega} = n_\omega$ ということである。

2.7.3　複屈折結晶

通常の透明媒質の場合、周波数が高くなるほど、屈折率が大きくなる。つまり、$n(2\omega) > n(\omega)$ である。

複屈折を持つ結晶 (ここでは 1 軸性を仮定で、図 29 のように入射するとする) の場合、偏光成分と進行方向に依存して屈折率が変わる。

$$n_o(\theta) = n_o \tag{220}$$

$$\frac{1}{n_e(\theta)^2} = \frac{\cos^2\theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2\theta}{n_e^2} \tag{221}$$

n_o は結晶軸と垂直方向の電場の偏光にたいする屈折率、n_e は結晶軸と平行方向の電場の偏光にたいする屈折率である。$n_e < n_o$ の場合を、負の一軸性結晶と呼ぶ。

式 221 より、$n_e(\theta)$ は、長軸半径が n_o で短軸半径が n_e の楕円の原点から θ 方向の距離と考える事が出来、図 30 のように示す事が出来る。$n_o(2\omega) > n_o(\omega)$, $n_e(2\omega) > n_e(\omega)$ だが、$n_e(2\omega) < n_o(\omega)$ となり得る場合がある。つまり、$n_e(2\omega)$ を示す楕円と、$n_o(\omega)$ を示す円が交わる条件の入射角 θ において、$n_e(2\omega) = n_o(\omega)$ が成立する。

2.7.4　高次高調波

より短波長のレーザー光が欲しいが、紫外域になってくると、そもそも透明な結晶が無い。そこで、結晶ではなく、ガスを利用することが考えられる。通常、キセノンなどのガスジェットにレーザー光を入射する。当然、ガスは反転対称性があるため、偶数次の高調波は発生しないが、奇数次は発生し得る。

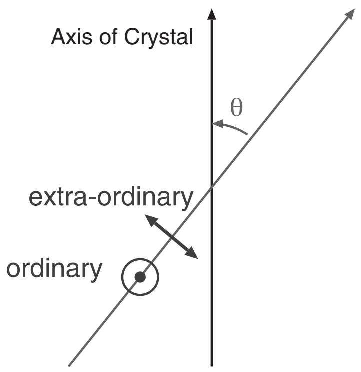

図 29: 一軸性複屈折結晶の結晶軸と入射光の関係

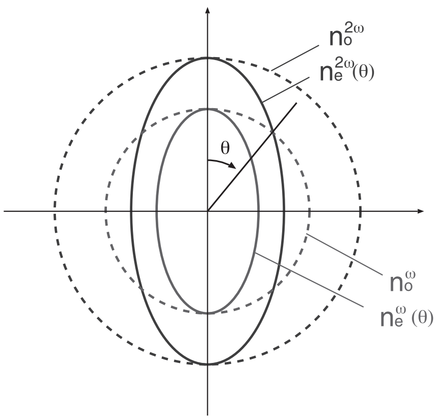

図 30: 位相整合

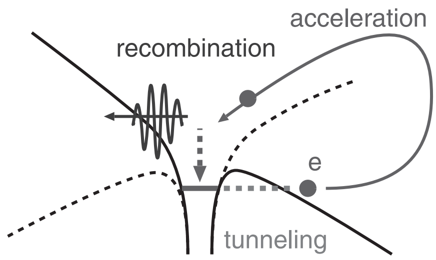

図 31: 高次高調波発生の 3 ステップモデル

この過程による高次高調波の発生は、図 31 のようなモデルで説明される。レーザーの光電場によって、ガス原子のポテンシャルが傾き、原子に束縛されていた電子が、トンネル効果で真空中に放出される。光電場は周期的に変動するため、放出した電子を加速して引き戻す。電子が再び原子に再結合する際に、運動エネルギーとイオン化エネルギーに相当するエネルギーを光として放出する。この過程が光電場の半周期毎に位相を反転しておこる。図 32 に示すような電場波形が生成され、これを周波数領域でみると、基本光の奇数次の高調波が生成されることになる。

自由電子が、振動電場中に置かれた場合、電場によって振動運動をする。このとき、電子が持つ平均の運動エネルギーはポンデロモーティブエネルギー U_p と呼ばれ、

$$U_p = \frac{eE_0^2}{4m_0\omega^2} \tag{222}$$

である。(電場の振幅を E_0、角周波数を ω、電子の質量を m_0、電荷を e とした。)

放出された電子が戻って来たときに得る運動エネルギーは、一声、これの 3 倍程度と考えられるので、光子として放出され得るエネルギーは、$I_p + 3U_p$ が最大である。

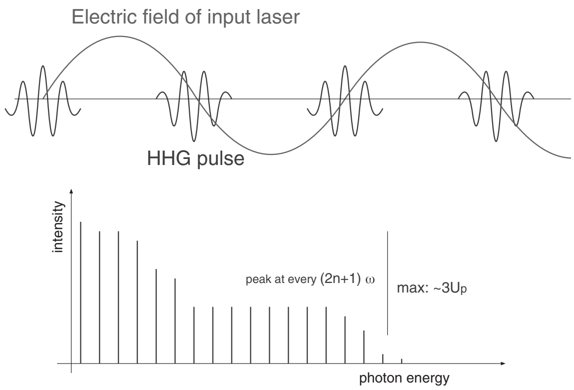

図 32: 高次高調波発生の 3 ステップモデル

3　光源加速器における応用

3.1　フォトカソードの励起

線型加速器による光源加速器では、ビームの性能は電子源できまる。このため、低エミッタンスの電子源が重要で、フォトカソード電子銃が用いられる。これは、電子銃の高電圧陰極部に備えられたフォトカソードをパルスレーザー光で照射して励起し、電子ビームを生成するものである (図 33)。

熱電子銃と比較して、フォトカソード電子銃は、電子の生成を時間的にも空間的にもレーザーによって制御することができる。特に、後段の RF 加速空洞での加速位相に合わせて電子バンチを生成する事が出来るため、短バンチで、エミッタンスの良いビームが得られる。

ここでは、極低エミッタンスが実現できることで知られる半導体フォトカソードを仮定して議論する。電子が真空中に取り出されて以降の事は他で説明があるはずなので、ここではレーザー光で半導体フォトカソードを励起し、電子が取り出されるまでの過程について説明する。

3.1.1　半導体のエネルギー準位

結晶は、内部の電子にとっては原子の並びによって設定された周期的なポテンシャルの空間である。これを、図 34 のように簡単なモデル化をして考える事ができる。周期が a の矩形ポテンシャルとして導入するが、障壁を、面積を一定にして幅をゼロに

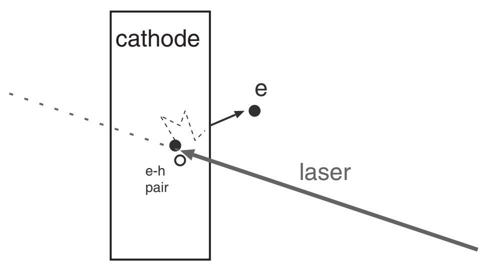

図 33: フォトカソード

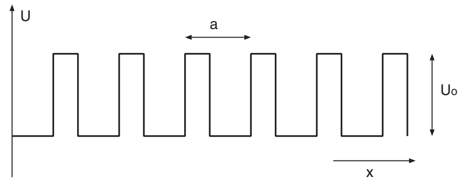

図 34: 周期ポテンシャル

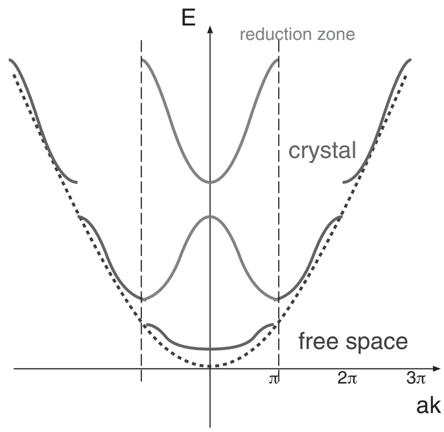

図 35: 周期ポテンシャルの分散関係

する極限をとり、デルタ関数として扱って、ポテンシャルの具体的な形状に依存しない議論になる (クローニッヒ-ペニーモデル)。シュレーディンガー方程式から固有エネルギーを求め、図 35 に示すような、エネルギーと波数の関係 (分散関係) が得られる。自由空間の場合は、連続な 2 次関数の分散関係が得られる (この 2 次の係数が有効質量を意味する) のにたいして、周期ポテンシャルの場合は、不連続点が出来、とり得ないエネルギー (バンドギャップ) があることが分かる。

ak について 2π の整数倍は高次のモードとして $0 < ak < \pi$ の範囲にまとめて表示 (還元ゾーン表記) すると、波数ゼロの付近で、バンドギャップの下側は上に凸、上側は下に凸の構造ができることが分かる。これを図 36 に示す。半導体結晶は、バンドギャップの下側の上端までが電子で埋まっている (価電子帯)。バンドギャップの上側の領域は伝導帯と呼ばれる。下に凸になっていることから分かるように、電子が運動エネルギーを持って自由に動き回ることが

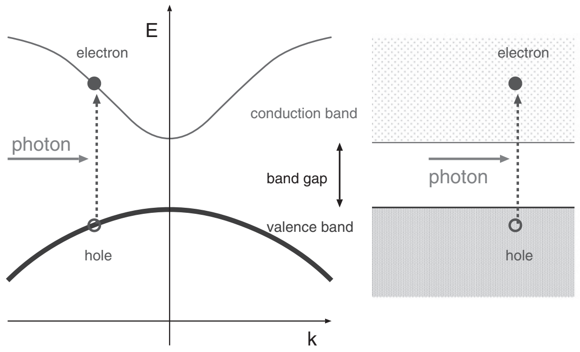

図 36: 周期ポテンシャルの分散関係

出来る状態である。

2 準位系と放射の相互作用で議論したように、準位間のエネルギー差に相当する光が入力されると、吸収および誘導放出が起こる。半導体では、下の準位である価電子帯が埋まっているので、光は吸収され、電子の状態は上の準位に遷移する、つまり伝導電子が生成することになる。

3.1.2 状態密度

半導体中の伝導電子は、質量 m が有効質量 m^* に置き換わっただけで、あたかも自由空間にあるように動く。つまり、エネルギー固有状態は、自由空間のシュレーディンガー方程式に従う波動として扱うことが出来る。

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*}\nabla^2\psi = E\psi \tag{223}$$

これは、式 113 と同じなので、電磁波モードと同じ手順で状態の数を計算することが出来る。

エネルギーと波数 k の関係が、

$$E = \frac{\hbar^2}{2m^*}k^2 \tag{224}$$

である点が、光と電子の違いであることに注意し、3 次元の半導体の場合について状態密度を計算する。式 133 と同様に、3 次元波数空間で格子点の数を数える計算を行い、状態密度関数 $S(E)$ は、

$$S(E) \propto 4\pi k^2\frac{dk}{dE} \tag{225}$$

$$\propto \sqrt{E} \tag{226}$$

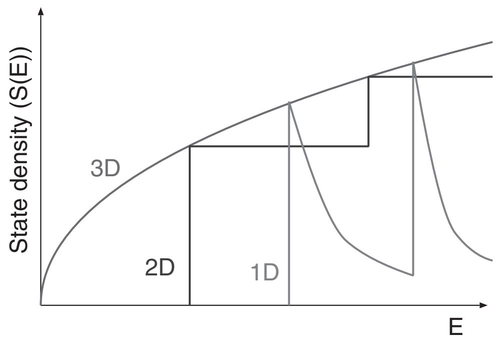

図 37: エネルギーと状態密度

となる。ついでに、2 次元の場合は、

$$S(E) \propto 2\pi k\frac{dk}{dE} \tag{227}$$

$$\propto const. \tag{228}$$

1 次元の場合は、

$$S(E) \propto \frac{dk}{dE} \tag{229}$$

$$\propto \frac{1}{\sqrt{E}} \tag{230}$$

である。

3 次元の自由度を持つ系の場合は、運動エネルギーが高くなる程、とり得る状態が増える (図 37) ことが分かる。

光のエネルギーと励起効率について考える。エネルギーがバンドギャップ以下の場合は、エネルギー保存が成り立たないので励起できず、光は吸収されない (透明)。バンドギャップより少し高いエネルギーの光を入力する場合は、生成される伝導電子の運動エネルギーは小さい。図 37 より、E が小さい領域の状態密度は小さい。遷移確率は状態数に比例するので、励起効率は低く、光の吸収は小さい (吸収長が長い)。光のエネルギーが高くなるに従って状態数が大きくなるので、励起効率が高くなり、吸収長が短くなる。つまり、波長の短いレーザー光を使うほうが、量子効率が高く、時間応答が短くなる。

図 37 を見ると、2 次元の系の場合は状態数が運動エネルギーに依らないので、運動エネルギーが小さい領域でも状態数が大きく、励起効率が高くなる可能性がある。ただ、2 次元ゆえに体積が稼げず、やはり励起効率で不利である。

3.1.3　伝導電子の輸送

図 36 に示すように、伝導電子は、ある運動エネルギーを持って生成する。光のエネルギーが大きい (波長が短い) ほど、初期運動エネルギーは大きい。理想的な周期ポテンシャルの空間であれば、あたかも自由空間のように伝導電子は抵抗無く移動するはずであるが、実際は不純物や格子振動によって周期性が崩れている。そのため、伝導電子は格子と散乱を繰り返し、初期運動エネルギーを失い、伝導体の底のエネルギーに落ち込み、最終的には室温の熱振動と平衡状態になる (緩和)。緩和した後は、結晶内を熱運動でランダムウォークして拡散する。

個々の伝導電子の動きを追いかけて考える事もできるが、ここでは、多数の伝導電子があるとして、伝導電子密度を $c(x,t)$ で表し、その時間発展で伝導電子の移動を議論することにする。拡散では、密度の勾配に比例して移動が起こり、それが電流密度 J_c であるから、

$$J_c(x,t) = eD\frac{\partial c(x,t)}{\partial x} \tag{231}$$

また、ある地点において流れ込む電流と流れ出す電流の差は、電荷の変化を意味するから、

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{e}\frac{\partial J_c(x,t)}{\partial x} \tag{232}$$

これらをまとめて、

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c(x,t)}{\partial x^2} \tag{233}$$

これは、拡散方程式と呼ばれる。D は拡散の速度を表す拡散係数で、結晶の物性で決まる。式 233 の意味する所を図 38 に示す。つまり、密度の高いところ (上に凸) は減少しようとし、密度の低い所 (下に凸) は増加しようとする。

微分方程式を解く際には、境界条件が必要である。例えば、カソード表面 ($x=0$) では、伝導電子が消滅する (外に取り出されるか、表面で再結合する) わけであるから、

$$c(x=0,t) = 0 \tag{234}$$

の境界条件を設定する。真空に放出されるビーム電流 I は、表面での電流に比例すると考えられるので、

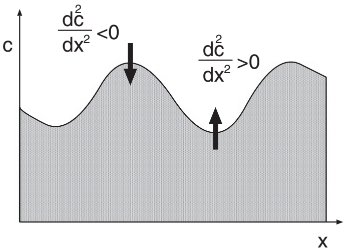

図 38: 拡散による時間発展

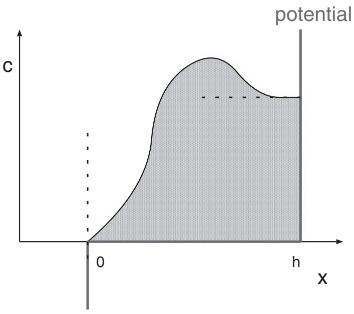

図 39: 境界条件の設定

式 231 を参考に、

$$I \propto \frac{\partial c(x=0)}{\partial x} \tag{235}$$

で得られる。

もし、図 39 の $x=h$ の地点のようにポテンシャル障壁の境界条件を仮定するなら、そこでの電流密度がゼロという条件より、

$$\frac{\partial c(x=h)}{\partial x} = 0 \tag{236}$$

を設定すれば良いことになる。

3.1.4　時間応答

取り出される電子ビームの時間構造は、伝導電子密度の時間発展を追いかければ計算できる。まず、カソードは十分厚い半導体結晶 (バルク) の場合を考えてみる。図 40 で説明する。カソードの表面からレーザーを照射すると、カソード深部に行くに従って、波長に応じた吸収長で指数関数的に光が減衰していく。光強度に比例して伝導電子の初期分布が生

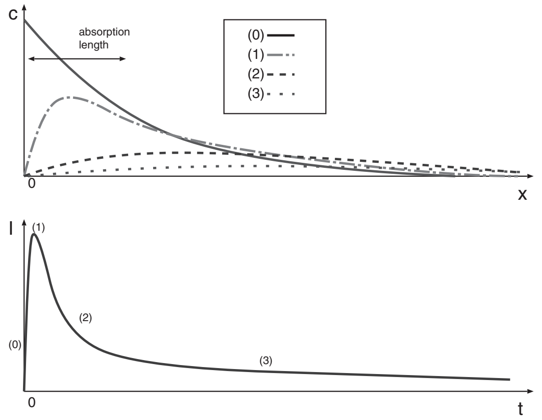

図 40: カソードの時間応答

成する。この分布から始まり、拡散方程式と表面の境界条件に従って、分布が時間発展していく (上図)。表面から電子が放出されると同時に、分布は深部にまで拡散していく。ビームとして取り出される電流は、下図のような時間応答をすることになる。初期分布からすぐに取り出された速い成分と、一旦深部まで拡散してから出てくる遅いテイル成分ができる。

テイル成分の無い速い時間応答を望むなら、吸収長の小さい、短波長光で励起するのが良い。初期分布が表面近傍に局在するので、相対的に速い成分が大きくなる。あるいは、厚みの薄い結晶を使い、深部に拡散しないようにすることで時間応用を良くすることも出来る。

3.1.5 初期エミッタンス

規格化 RMS エミッタンスは、

$$\varepsilon_n = \frac{1}{mc}\sqrt{\langle x^2\rangle \cdot \langle p_x^2\rangle - \langle x \cdot p_x\rangle^2} \tag{237}$$

で定義される。m は真空中の電子の質量、x は横方向の位置、p_x は運動量である。カソード上では位置と角度には相関が無い ($\langle x \cdot p_x\rangle = 0$) と考えられるので、

$$\varepsilon_n = \frac{1}{mc}x_{rms} \cdot p_{x_{rms}} \tag{238}$$

である。また、横方向 1 自由度辺りの運動エネルギー E_T

$$E_T = \frac{p_x^2}{2m} \tag{239}$$

を使い、カソード上でのビーム形状を半径 R の一様分布として、$x_{rms} = R/2$ を使うと、

$$\varepsilon_n = \frac{R}{2} \cdot \sqrt{\frac{2\langle E_T\rangle}{mc^2}} \tag{240}$$

となる。つまり、初期エミッタンスは、ビームサイズと、放出される電子の持つ横方向の運動エネルギーで決まる。

ビームサイズは、励起するレーザーのスポットサイズで決められ、小さい程、低エミッタンスになる。

伝導電子が結晶中で室温 (k_BT) まで緩和しているとすると、結晶中での横方向 1 自由度あたりの運動エネルギー $\langle E_T^*\rangle$ は

$$\langle E_T^*\rangle = \frac{1}{2}k_BT \tag{241}$$

と考えられる。

これが、真空中に放出される際、有効質量 m^* が真空中の質量 m に変化する。このときの横方向の運動量の保存を考えると、

$$m^*E_T^* = mE_T \tag{242}$$

が成り立たなければならない (質量効果、図 41)。これを踏まえると、

$$2\langle E_T\rangle = \frac{m^*}{m}k_BT \tag{243}$$

となる。例えば GaAs の場合、$m^* = 0.067m$ であるから、理想的な場合は室温の 1/15 に相当する極低エミッタンスが実現する可能性がある。

実際には、表面の状態によって、散乱や表面粗さの影響で、縦方向の運動エネルギーが横方向に回り込んでしまう。これが $\langle E_T\rangle$ を決めている。

短波長の光で励起すると、時間応答は良くなる一方で、完全に緩和する前に取り出される割合が増え、エミッタンスは増える傾向になる。

3.2 高次横モードレーザー加速

レーザーを使って荷電粒子を加速しようというアイデアは、古くからある。現在、レーザーで駆動したプラズマによる加速の研究は、国内外で多く行われているが、ここでのテーマである ERL による光

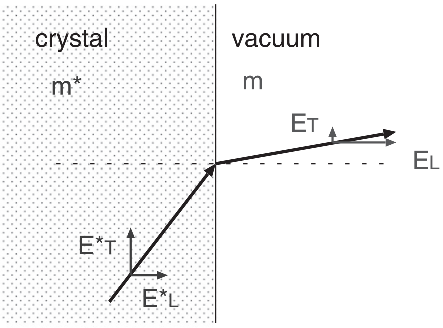

図 41: 表面での質量効果

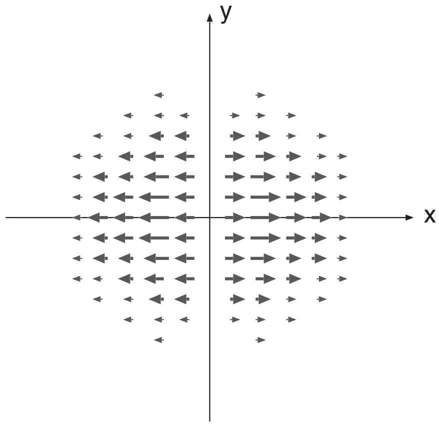

図 42: TM10 モードの横電場のプロファイル

源加速器と絡めた議論はあまりなされていない。ガスジェットを使うという特殊な状況が、既存の加速器とうまく組み合わせるのが難しくしているし、そもそも低繰り返しの超高強度レーザーを使う為、高繰り返しが利点の ERL とは整合しない。

ここでは、それらとは異なり、レーザーの光電場による真空中の直接加速の方式について紹介する。ERL 光源加速器においては、ビームの平均エネルギーを上げる (いわゆるビームの加速) というよりは、バンチ内粒子にエネルギー変調を与えるような応用が、まず考えられる。

3.2.1 進行方向電場

通常、光は横波で進行方向の電場を持たないので、荷電粒子の加速には使用できない (Lawson-Woodward の定理)。しかし、これは光が一様な平面波の場合の話で、特殊な場合については実際に荷電粒子を加速することが可能である。ここでは、空間的に一様でないレーザー光の場合には進行方向電場が存在し、電子ビームにレーザー光を重ねて伝搬させることで電子ビームにエネルギーを与えることが出来ることを説明する。

z 方向に伝搬するレーザー光を考える。電場は x 方向に直線偏光とし、磁場は z 方向成分を持たない、TM 波を考える。つまり、以下の条件である。(磁場と電場は独立では無いので、B_y と E_x は関係をもつ。)

$$E_y = 0 \tag{244}$$

$$B_x = 0 \tag{245}$$

$$B_y = \frac{1}{c}E_x \tag{246}$$

$$B_z = 0 \tag{247}$$

E_z は z 方向の進行波の形、$|E_z|\exp(i(\omega t-kz))$ とする。$\omega = kc$ である。マクスウェル方程式、

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \tag{248}$$

に代入して整理すると、

$$ikE_z = \frac{\partial E_x}{\partial x} \tag{249}$$

つまり、横方向の電場の空間変化があると、そこには進行方向の電場が存在することが分かる。

例えば、式 192 の高次ガウシアンモードで $n = 1, m = 0$ のもの、TEM_{10} モードは、簡単に書くと、

$$E_x \propto xe^{-x^2} \tag{250}$$

である (図 42)。この場合、進行方向電場は、

$$kE_z = (1-2x^2)e^{-x^2} \tag{251}$$

で与えられる。中央付近 $(x = 0)$ に、$1/k$ 相当の進行方向電場があることが分かる (図 43)。

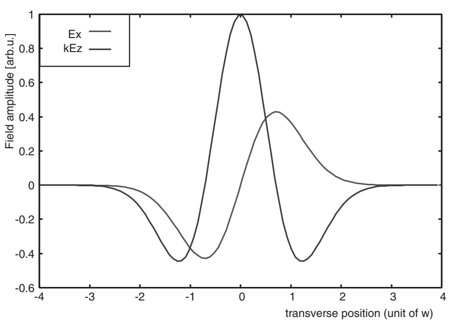

図 43: TM10 モードの横電場と縦電場

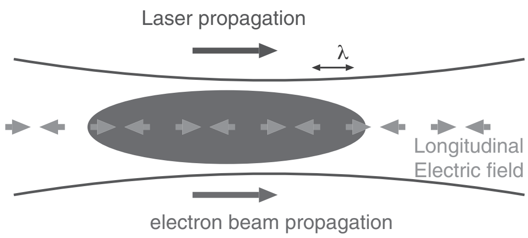

図 44: レーザーと電子ビームの伝搬

3.2.2 エネルギーゲイン

図 44 のように、電子ビームと同じ方向に進行方向電場を持つレーザー光を伝搬させる。電子ビームもレーザー光の位相速度も光速とすると、バンチ内の個々の粒子にたいする光電場の位相関係は固定されるので、進行方向電場が加速位相にある電子は常に加速され、減速位相にある電子は常に減速される状況になる。

横電場のピーク値を E_0 として、ウェストサイズ w_0 の場合、おおざっぱに、$\frac{\partial E_x}{\partial x} \sim \frac{E_0}{w_0}$ であるから、

$$|E_z| = \frac{E_0}{kw_0} \tag{252}$$

である。

レーザーのピークパワーが P の場合、パワー密度 S は、ひとこえ、

$$S = \frac{P}{w_0^2} = c\epsilon_0 E_0^2 \tag{253}$$

である。進行方向電場は、

$$E_z = \frac{1}{kw_0^2}\sqrt{\frac{P}{c\epsilon_0}} = \frac{1}{2z_0}\sqrt{\frac{P}{c\epsilon_0}} \tag{254}$$

z_0 はレイリー長で、収束されたレーザー光が維持できる距離に相当する。収束点から z_0 以上離れると、径が拡がってしまうことと、Gouy 位相の効果で位相が進んでしまうため、加速出来なくなってしまう。実効的に加速に効く距離は $2z_0$ 程度と考えられるので、エネルギーゲイン G は、

$$G = E_z \times 2z_0 = e\sqrt{\frac{P}{c\epsilon_0}} \tag{255}$$

となる。z_0 あるいは w_0 に依らず、レーザーのピークパワーのみで決まる。$P = 100$ MW で、$G = 200$ keV のエネルギー変調を与えることが出来る計算である。これは、100 MeV 程度のビームにたいして $\sim 10^{-3}$ のエネルギー変調を与えることに対応する。ビームのもともとのエネルギー広がりと同等以上の変調で、後述する位相空間の制御に応用するのに適している。ピークパワー 100 MW 程度のレーザー光は、例えば共振器蓄積の手法によって実現可能であると考えられる。

3.3 アンジュレータにおけるビームとレーザーの相互作用

前節では、レーザー光の進行方向電場を使ってビームと相互作用する方法を説明したが、アンジュレータと呼ばれる装置を使ってビームに軌道を横に振ると、レーザー光の横電場で相互作用させることができる。

これによって、ビームにエネルギー変調を与えたり、ビームからエネルギーを取り出したり、逆にビームにエネルギーを与えたりできる。

3.3.1 アンジュレータでのビーム軌道

アンジュレータは、周期的な磁場によって、ビーム軌道を蛇行させる装置 (図 45) である。アンジュレータの磁場を垂直方向とし、

$$B_y = B_0 \cos(k_u z) \tag{256}$$

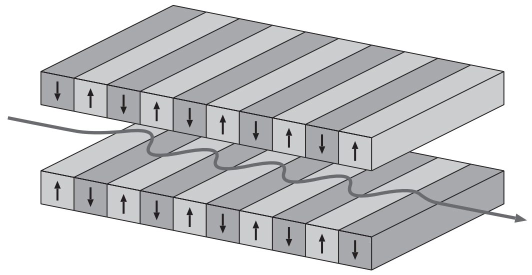

図 45: アンジュレータ

とする。アンジュレータの周期を λ_u とし、$k_u = 2\pi/\lambda_u$ とおいた。z は (蛇行運動を無視した) ビーム進行方向である。

この磁場中での電荷 e で質量 m_0 の電子の運動方程式は、

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{eB_0}{m_0\gamma}\frac{dz(t)}{dt}\cos(k_u z) \quad (257)$$

$$\frac{d^2z(t)}{dt^2} = \frac{eB_0}{m_0\gamma}\frac{dx(t)}{dt}\cos(k_u z) \quad (258)$$

と表す事が出来る。

式 257 を積分して、

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{cK}{\gamma}\sin(k_u z) \quad (259)$$

さらに積分して、軌道は

$$x(t) = \frac{K}{k_u\gamma}\cos(k_u z) \quad (260)$$

となる。ここで、

$$K = \frac{eB_0}{k_u m_0 c} \quad (261)$$

とおいた。

式 258 に代入すると、

$$\frac{d^2z(t)}{dt^2} = -\frac{eB_0cK}{m_0\gamma^2}\sin(k_u z)\cos(k_u z) \quad (262)$$

両辺を積分して、

$$\left[\frac{dz}{dt}\right]_0^z = \frac{eB_0cK}{2m_0\gamma^2}\int_0^z \sin(2k_u z)\frac{dt}{dz}dz \quad (263)$$

$dz/dt \sim \beta c$ と近似して、両辺それぞれ計算すると、

$$\frac{dz}{dt} - \beta c = \frac{K^2\beta c}{4\beta^2\gamma^2}(\cos(2k_u z) - 1) \quad (264)$$

$$\beta = 1 - \frac{1}{2\gamma^2} \quad (265)$$

の関係を代入して整理すると、

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= c\left(1 - \frac{1 + K^2/2}{2\gamma^2}\right) + \frac{K^2\beta c}{4\beta^2\gamma^2}\cos(2k_u z) \\ &\sim c\left(1 - \frac{1 + K^2/2}{2\gamma^2}\right) = \beta^* c \quad (266)\end{aligned}$$

振動する項は平均するとゼロなので無視した。

$$\beta^* = 1 - \frac{1 + K^2/2}{2\gamma^2} \quad (267)$$

は、進行方向の平均的な速度を意味する。蛇行運動するために、β より少し小さい。

3.3.2　共鳴

アンジュレータにおいて、電子は $\beta^* c$ の速度で z 方向に進むことが分かった。一方、電子に沿わせるように z 方向にレーザー光を入れると、当然ながら光は c の速度で進行する。

アンジュレータの 1 周期 λ_u だけ進んだとき、電子と光で到達時間にずれが生じるが、その差をレーザー光の波長 λ を単位として $n\lambda$ と表すことにする。

$$\left[\frac{\lambda_u}{\beta^* c} - \frac{\lambda_u}{c}\right] = \frac{n\lambda}{c} \quad (268)$$

これを整理すると、

$$n\lambda = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2}\left(1 + \frac{K^2}{2}\right) \quad (269)$$

n が整数の場合、1 周期毎にずれるが、丁度波長の整数倍ずれたので同じ位相にある、という条件が成立する。これを共鳴と呼ぶ。

3.3.3　ビームとの相互作用

アンジュレータに導入するレーザー光を x 偏光とし、電場 E_x を次のように表す。

$$E_x = E_0\cos(kz - \omega t + \phi_0) \quad (270)$$

式 260 の電子の横方向運動を合わせて考える。電場方向に電子が運動すると、電場が電子ビームに仕事

をすることになる。つまり、加速または減速の作用が起こる。電子が得るエネルギーは、

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{dt} &= \frac{2}{m_0}\frac{dx(t)}{dt}E_x \quad (271)\\ &= -\frac{eKE_0}{m_0 c\gamma}\sin(k_u z)\cos(kz-\omega t+\phi_0)\\ &= -\frac{eKE_0}{2m_0 c\gamma}[\sin((k_u+k)z-\omega t+\phi_0)\\ &\quad +\sin((k_u-k)z+\omega t-\phi_0)]\\ &= -\frac{eKE_0}{2\pi m_0 c\gamma}\sin\phi \quad (272)\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\phi = (k_u+k)z-\omega t+\phi_0 \quad (273)$$

とおき、速く振動する項はゼロとした。ϕ は電子とレーザーとの相対的な位相を表す。つまり、位相関係によって、加速だったり減速だったりする。

ϕ の変化を表す方程式は、

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dz}=\frac{d\phi}{dt}\frac{dt}{dz} &= k_u+k-\frac{\omega}{dz/dt} \quad (274)\\ &= k_u+k(1-\frac{1}{\beta^*}) \quad (275)\end{aligned}$$

となる。

エネルギーを共鳴条件を満たすエネルギー γ_r からの差分で

$$\gamma = \gamma_r + \Delta\gamma \quad (276)$$

と表現すると、最終的に一組の微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dz} &= 2k_u\frac{\Delta\gamma}{\gamma_r} \quad (277)\\ \frac{d(\Delta\gamma)}{dz} &= -\frac{eKE_0}{2m_0c^2\gamma_r}\sin\phi \quad (278)\end{aligned}$$

つまり、エネルギーと位相で表現した位相空間を回転する運動をすることが分かる。

この様子を図 46 に示す。$\Delta\gamma=0$ の直線上の分布を初期状態とする。つまり、共鳴エネルギーに一致したビームを入力する場合である。まず、式 278 に従って、サイン関数状にエネルギーが変調される。エネルギー変調が大きくなるにつれて、式 277 に従って、位相がシフトしていく。これを続けて行って、レーザー光の波長の周期構造で位相空間で回転すること

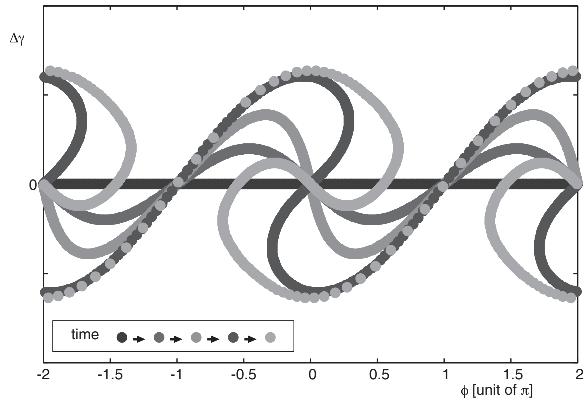

図 46: 位相空間上の運動 (共鳴エネルギー)

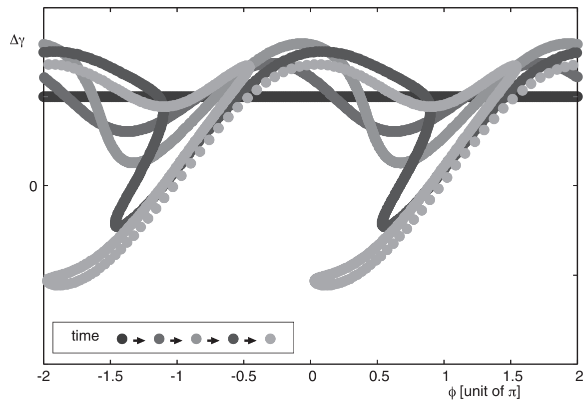

図 47: 位相空間上の運動 (共鳴エネルギーより少し高い場合)

になる。加速と減速が同時に起こるので、平均のエネルギーのやりとりは無い。

ビームエネルギーが、アンジュレータの共鳴エネルギーより少し高い場合について、同様に計算した結果が図 47 である。この場合、まずサイン関数状にエネルギーが変調されるのは同じであるが、位相空間では共鳴エネルギーを中心に回転するので、回転が進むと平均してエネルギーが下がってくる。ビームがエネルギーを失うわけであるから、このとき光のエネルギーが増大する。

3.3.4 長手方向分散

加速器のある領域をビームが通過する際、エネルギーの違いによって到達時間 (あるいは軌道長) が異なる場合がある。z_1,z_2 をそれぞれ、領域の入口と出口における、バンチの中心を原点とした前後方向の位置、δ をビームのエネルギーからのずれ ($\delta = \Delta\gamma/\gamma$) とし、

$$z_2 = z_1 + R_{56}\delta + T_{566}\delta^2 + \cdots \tag{279}$$

と表す。R_{56} は線型項、T_{566} は 2 次の項である。ここでは線型項だけ扱うことにする。ひとまず、ビームエネルギーが十分高く、エネルギーが変わっても速度変化しないと仮定すると、エネルギー差が軌道に影響するのは、分散があり、かつ、軌道が曲率をもつ領域、つまり偏向電磁石の部分だけである。この関係は、図 48 に説明される。曲率半径 ρ をもつ軌道の角度 $\delta\theta$ に対応するある微小区間を考える。この区間における分散を η、分散の変化率を η' とする。基準軌道の距離を δs とすると、

$$\delta s = \rho\delta\theta \tag{280}$$

エネルギーが $\Delta\gamma$ だけことなる場合の軌道長 $\delta s'$ は、

$$\begin{aligned} \delta s' &= \sqrt{((\rho+x)\delta\theta)^2 + (x'(\rho+x)\delta\theta)^2} \\ &\sim (\rho+x)\delta\theta \end{aligned} \tag{281}$$

単位長さあたりの軌道長の差 $(\delta s' - \delta s)/\delta s$ は、

$$\frac{\delta s' - \delta s}{\delta s} = \frac{x}{\rho} = \frac{\eta}{\rho}(\Delta\gamma/\gamma) \tag{282}$$

これより、R_{56} は、次式で計算できる。

$$R_{56} = \int \frac{\eta_x(s)}{\rho(s)} ds \tag{283}$$

図 49 に示すような単純なシケイン部の場合、エネルギーが高いほど軌道長が短くなるので、$R_{56} < 0$ である。

エネルギー変化による速度の違いが気になる場合は、それを含めて R_{56} と考えても良い。その場合は、曲率と分散の無い領域でも R_{56} は有限の値をもつ。

z と δ による長手方向の位相空間における、有限な R_{56} の要素の作用を図 50 に示す。$R_{56} > 0$ の場合、上半平面は右にシフトし、下半平面は左にシフ

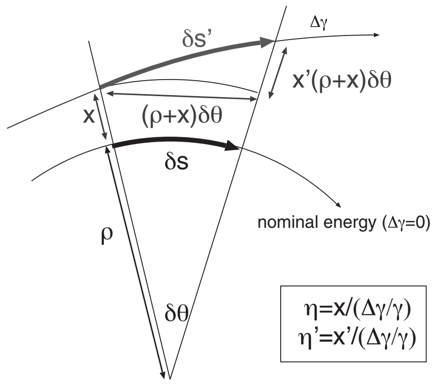

図 48: エネルギーによる軌道長の違い

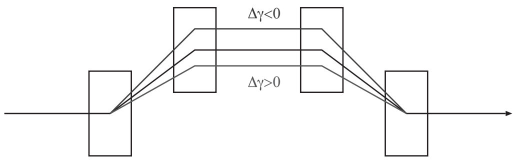

図 49: シケインの例

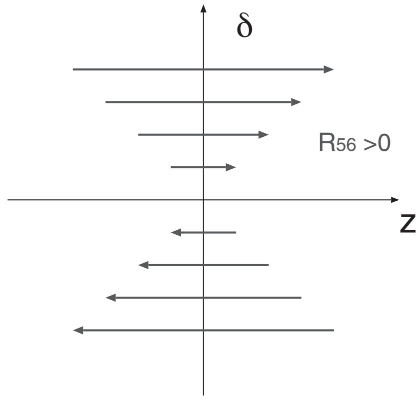

図 50: 長手方向位相空間での作用

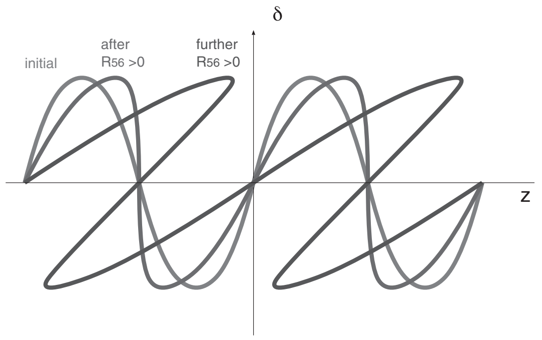

図 51: サイン型エネルギー変調構造の変化

トするような作用である。前節の式 277 は、アンジュレータ自体の分散関係である。

例えば、ビーム進行方向にサイン関数状にエネルギー変調の構造があるとし、これが有限な R_{56} の分散領域を通過した後でどう変化するかを考えてみる。図 51 に示すように、はじめサイン関数型だったものが横方向に引き延ばされる効果になる。

特に、

$$R_{56}\frac{\Delta\gamma}{\gamma} = \lambda/4 \tag{284}$$

の場合に、エネルギー変調がのこぎり状に立った状態になり、大きな密度変調が出来る。

3.4 レーザーによる位相空間の制御

前節の議論で、共鳴条件を満足する関係でアンジュレータを通過するビームにレーザー光を重ねて伝搬させると、レーザーの波長の周期でエネルギー変調を与えることが出来ることが分かった。さらに、エネルギー変調がついたビームをシケインなどの R_{56} を制御する区間に通過させることで、位相空間上で動かすことが出来ることも分かった。この手法には多彩な応用が考えられる。

3.4.1 レーザースライス

電子ビームのバンチ長が比較的大きい、蓄積リングなどにおいて、実効的に短いバンチを模擬するものとして、レーザーバンチスライシングという手法が知られている。これは、電子バンチより短いパル

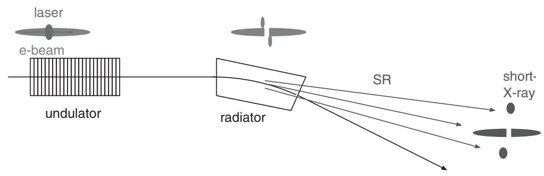

図 52: レーザースライシングによる短パルス X 線の発生

スレーザーを使って、バンチ内に時間方向に短い構造を作るものである。図 52 のように、アンジュレータ内で電子の一部に重なるようにレーザーを相互作用させ、エネルギー変調を生成する。下流の偏向電磁石等におけるシンクロトロン放射光を利用する際に、エネルギーの違いによる軌道と放射方向の違いで分離することで、短パルスの放射光を得ることが出来る。

このエネルギー変調が、下流の分散部を通過する際に、図 53 に示すように密度変調に変換される。結果的にレーザーと重なっていた部分が穴が開いた構造が出来る。短い時間構造からコヒーレント放射を効率良く放射することが出来、IR-THz 光源として利用できる。

3.4.2 レーザーヒータ

FEL 施設において、マイクロバンチ不安定性と呼ばれる現象によって性能が制限されることがある。この現象は図 54 に説明するようなものである。電子バンチの初期状態に僅かな密度分布があったとして、それが空間電荷等の影響を介してバンチ内のエネルギー変動を生み、さらに密度分布が成長していくというものである。結果的に、FEL の発振に重要なバンチ圧縮がうまく制御出来なくになってしまう。

これを解決する為、レーザーヒータと呼ばれる手法が用いられる (図 55)。マイクロバンチ不安定性が成長する前に、積極的にレーザーによって光の波長でエネルギー変調をかける。これを分散によって前後に引き延ばすことによって、密度分布を平坦化して、マイクロバンチ不安定性の種を解消することが

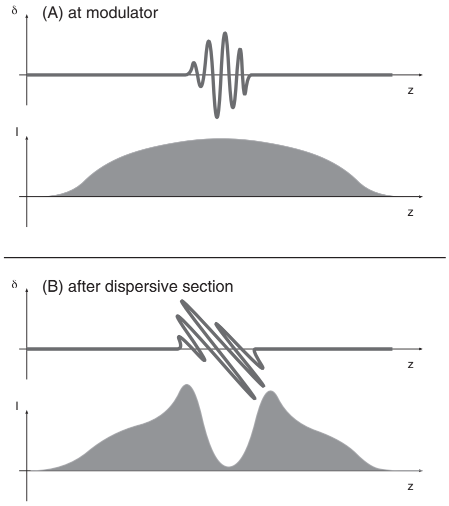

図 53: レーザースライシング

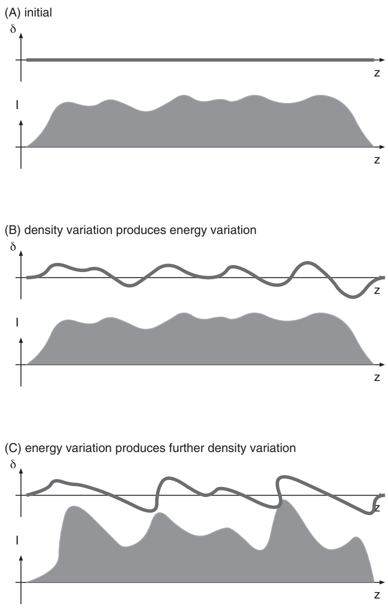

図 54: マイクロバンチ不安定性

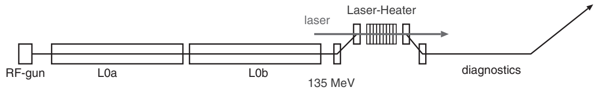

図 55: LCLS のレーザーヒータ

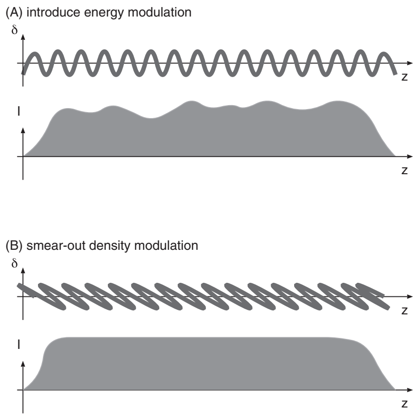

図 56: レーザーヒータによる密度分布の平坦化

出来る (図 56)。

3.4.3　光クライストロン

ところで、電磁波を使って電子ビームの密度に変調をかける、というのは、マイクロ波の増幅器として良く知られているクライストロンと同じである。図 57 にクライストロンの原理を簡単に示す。

レーザーとアンジュレータを使って、これと全く同じ事が出来る (図 58)。入力 RF の代わりがレーザーで、出力 RF の代わりがアンジュレータ放射である。1 台目のアンジュレータにおいて、入力したレーザー光で電子ビームにエネルギー変調を与え、途中の分散部の R_{56} (あるいはアンジュレータ自体の分散) を経由して、これが密度変調に変換される。

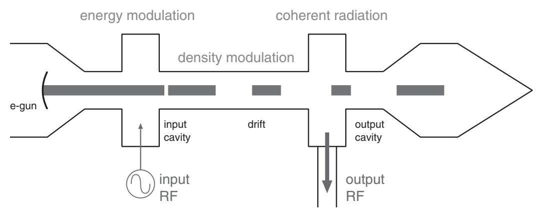

図 57: クライストロンの原理

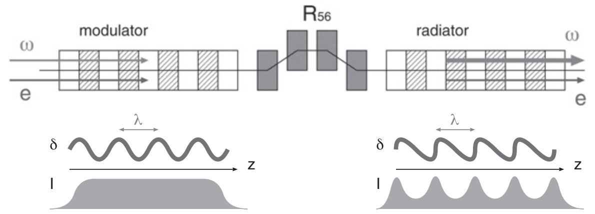

図 58: 光クライストロンの原理

2 台目のアンジュレータには、入力レーザーと同じ波長でプリバンチされた電子ビームが入力され、コヒーレントに放射が成長し、大きな出力を得る事ができる。これは、シード型 FEL の一種で、入力光として高次高調波レーザーを用いる事で、短波長のフルコヒーレント FEL が実現できる。

3.4.4 HGHG

もともとの電子ビームのエネルギー広がりが小さく、分散部が精密に調整されていると、サイン関数状につけたエネルギー変調が立ち上がって、鋭い密度変調が得られる事に成る。この場合、密度変調に高次の成分 $n\omega$ も十分に含まれるので、2 台目のアンジュレータを $n\omega$ の共鳴条件に設計しておくと、対応する波長でコヒーレント放射を起こすことが可能である (図 59)。これは、HGHG (High Gain Harmonic Generation) と呼ばれる。直接シードでは得られない、より短波長のシード FEL を実現する、有効な手法である。また、得られた高調波をを入力光として、多段に HGHG を構成することで、より短波長のコヒーレント放射を実現することが可能である。

HGHG でどれだけ高い次数の高調波を生成できる

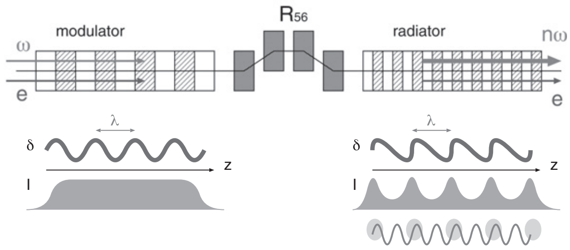

図 59: HGHG

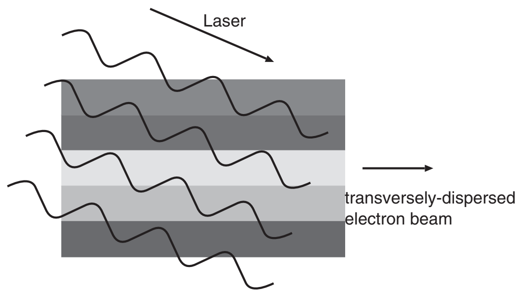

図 60: 分散部のアンジュレータにレーザーの斜め入射の配置

かは、どれだけ鋭い密度変調を作る事ができるかで決まる。もう少し凝った事を考えてピークを鋭くする案も考えられている。アンジュレータ部に分散を導入し、そこにレーザーを斜めに入力する (図 60)。実効的にエネルギーによってレーザーの位相をずらす効果を与える事が出来る。すると、位相空間での回転の中心位相がシフトし、丁度一致した位相でサイン関数が立ち上がるように出来 (図 61)、非常に鋭い密度分布が生成される (PEHG: Phase-merging Enhanced Harmonic Generation)。

3.4.5 EEHG

より細かな変調を作り出す手法として、変調を 2 段階で行う手法もある (EEHG: Echo-Enebled Harmonic Generation)(図 62)。まず、1 段目のアンジュレータでレーザーと相互作用させ、大きな振幅でサイン波状のエネルギー変調を付ける。次の分散部では、多数の横線が重なった状態 (横縞) になるまで大きく引き延ばす。これを 2 段目で変調すると、横縞

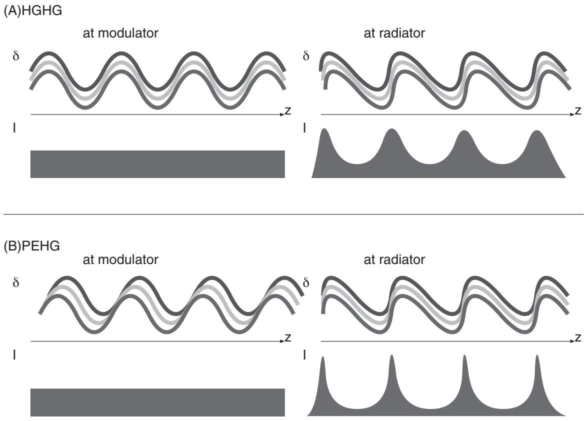

図 61: PEHG

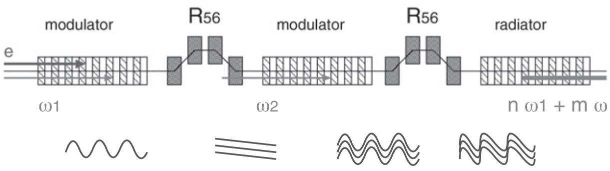

図 62: EEHG のレイアウト

全体にサイン波の変調を乗せる事が出来る。次の分散部で適当なシフトをおこなうと、1 段目に作った縞構造が発現し、細かな密度変調が出来る。HGHG では到達出来ない程の次数の高調波成分を生成することが出来る (図 63)。

3.4.6 ESASE

レーザーによる密度変調の生成は、シード型 FEL に限らず、SASE-FEL の場合でも有用である。SASE の発振においては、ビームのピーク電流が重要であるから、密度変調の効果で局所的にできた高電流部から SASE 発振がはじまることで、飽和に至る距離を短く改善することが可能である。これは、Enhanced SASE と呼ばれる手法である。

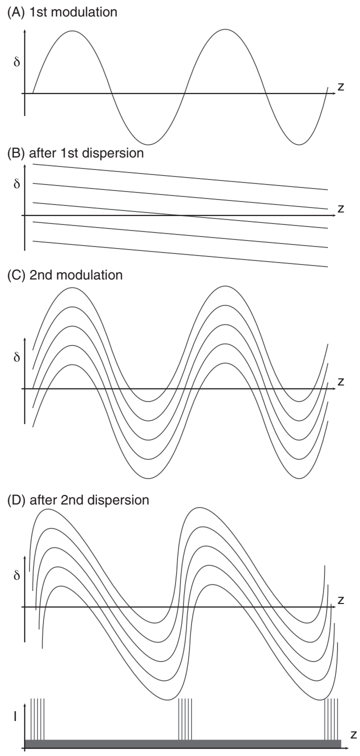

図 63: EEHG の位相空間分布の発展

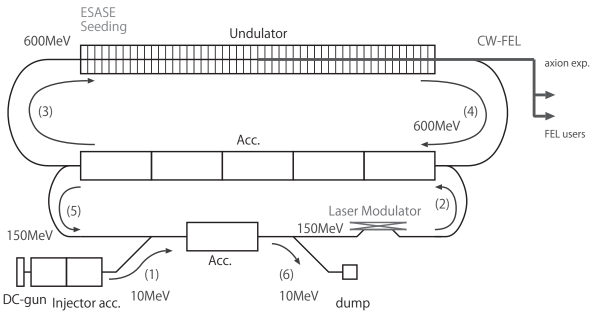

図 64: 高繰り返し ERL-FEL でのレーザー変調システム

3.4.7　高繰り返し FEL での検討

ここまで述べて来た、レーザーによるシード FEL の話は、低繰り返しの加速器で行われている。従って、高強度単一パルスのレーザーを使用すれば良く、比較的簡単なもので良い。一方で、ERL は高繰り返しの大平均電流であることが利点であるので、エネルギー変調システムを導入するとしたら、高繰り返しに対応したものである必要がある。典型的に必要とされるレーザーのパルスエネルギーは 100 μJ 程度であるが、これを 100 MHz で供給するとすると、10 kW もの平均パワーが必要になる。これは、最後に述べる蓄積共振器の手法で実現する事が出来ると考えられている。

式 269 より、アンジュレータの周期を $\lambda_u = 50$ mm、強さを $K = 2$ とすると、波長が $\lambda = 1$ μm のレーザー光と共鳴するビームエネルギーは 140 MeV 程度になる。ERL の構成の FEL を検討する際に、線型加速器を 2 段階に分けて、途中にエネルギー変調器を入れる構成が考えられる (図 64)。エネルギーの変調器と、そのあとに続くアークでの分散制御、主加速部の加速位相、を組み合わせる事で、様々な応用が可能になると考えられる。

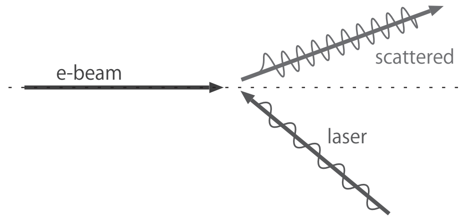

図 65: コンプトン散乱

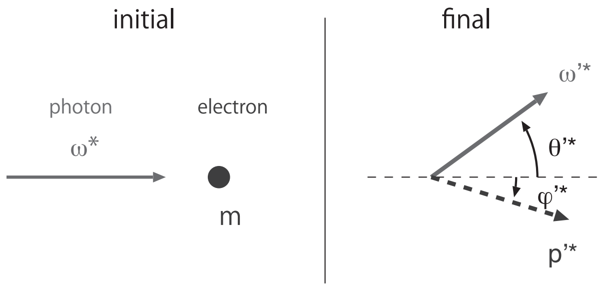

図 66: 電子静止系でのコンプトン散乱

3.5　コンプトン散乱

高エネルギー光子の光源として、レーザーを利用したコンプトン散乱光源 (LCSS) が考えられる (図 65)。

3.5.1　散乱断面積

これまで、電子は非相対論的な量子力学と、相対論的な古典力学で記述して来た。コンプトン散乱の断面積を計算するには、相対論的な量子力学が必要になるが、ここでは導出は省略し、結果だけ使用することにする。

電子の静止系での微分断面積は、クライン-仁科の公式呼ばれるものがある。これを使うのが便利なので、まず電子の静止系で、図 66 に示す散乱を考える。質量 m の電子にエネルギー ω^* の光子が衝突し、終状態では、エネルギー ω'^* の光子が角度 θ'^* の方向に、電子は運動量 p'^* で角度 ϕ'^* の方向に散乱される。

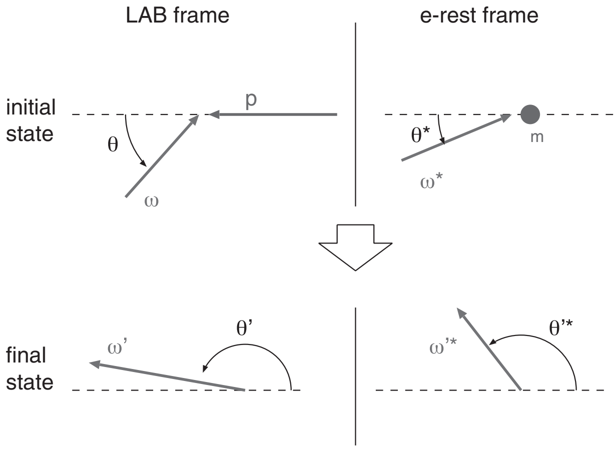

図 67: 電子静止系と実験室系

以降、電子の静止系の量は * をつけて、散乱後の量は $'$ をつけて表すことにする。

微分断面積は、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \frac{r_0^2}{2}\left(\frac{\omega'^*}{\omega^*}\right)^2\left[\frac{\omega^*}{\omega'^*} + \frac{\omega'^*}{\omega^*} - 1 + \cos^2\theta'^*\right] \tag{285}$$

r_0 は電子の古典半径である。

ここで、運動量の保存から、

$$\omega'^* = \frac{\omega^*}{1 + \frac{\omega^*}{m}(1 - \cos\theta'^*)} \tag{286}$$

の関係がある。ちなみに、入射光子エネルギーが電子質量と比較して十分小さい時 ($\omega^* \ll m$) は、$\omega'^* \sim \omega^*$ となり、入射光子と散乱光子のエネルギーは等しくなり、トムソン散乱と呼ばれる。

今、興味があるのは実験室系での量なので、ローレンツ変換をする。$\gamma = E/m$、$\beta = -p/m$ である。実験室系と電子静止系の関係を図 67 に示す。実験室系では、電子ビームにたいして角度 θ で光子が入射されるとした。

初期状態のローレンツ変換より、

$$\omega^* = \gamma\omega(1 - \beta\cos\theta) \tag{287}$$

$$\tan\theta^* = \frac{\sin\theta}{\gamma(-\beta + \cos\theta)} \tag{288}$$

の関係があることが分かる。$\gamma \gg 1$ とすると、$\theta^* \sim 0$ と近似して良い。

同様に終状態のローレンツ変換より、

$$\omega'^* = \omega'\gamma(1 - \beta\cos\theta') \tag{289}$$

$$\cos\theta'^* = \frac{-\beta + \cos\theta'}{1 - \beta\cos\theta'} \tag{290}$$

の関係がある。

また、2 つの系の立体角は、

$$\frac{d\Omega^*}{d\Omega} = \frac{1}{\gamma^2(1 - \beta\cos\theta)^2} \tag{291}$$

の関係がある。

まとめると、実験室系での散乱の微分断面積は、

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{d\sigma}{d\Omega^*}\frac{d\Omega^*}{d\Omega} \\ &= \frac{r_0^2}{2}\left(\frac{\omega'^*}{\omega^*}\right)^2\left[\frac{\omega^*}{\omega'^*} + \frac{\omega'^*}{\omega^*} - 1 + \cos^2\theta'^*\right] \\ &\quad \times\frac{1}{\gamma^2(1 - \beta\cos\theta)^2}\end{aligned} \tag{292}$$

となる。表式が複雑になるので、電子静止系の量も混ぜて書いているが、$*$ 付きの量はローレンツ変換に従って実験室系の量に置き換えれば良い。

最大エネルギーの光子が得られるのは、$\theta' = \pi$ の、ビーム軸上への散乱の場合で、

$$\omega'_{max} = \frac{2\gamma^2\omega(1 - \beta\cos\theta)}{1 + 2\gamma\frac{\omega}{m}(1 - \beta\cos\theta)} \tag{293}$$

特に、入射光子が正面衝突 $\theta = 0$ の場合、

$$\omega'_{max} = \frac{4\gamma^2\omega}{1 + \frac{4\gamma\omega}{m}} \tag{294}$$

で、ビームエネルギーが比較的低く、$\gamma\omega \ll m$ の時は、$\omega'_{max} \sim 4\gamma^2\omega$ となり、入射光子がビームのエネルギーで $\sim \gamma^2$ 倍にブーストされて出てくる。このことから、比較的小型の加速器でエネルギーの高い光子を生成できることが分かる。発散角は相対論的な放射が大抵そうであるように、$1/\gamma$ の広がりを持つ。

3.5.2　ルミノシティ

反応の頻度 (dY/dt) は、散乱断面積 σ とルミノシティ $\mathcal{L}$ を用いて、

$$\frac{dY}{dt} = \sigma\mathcal{L} \tag{295}$$

である。

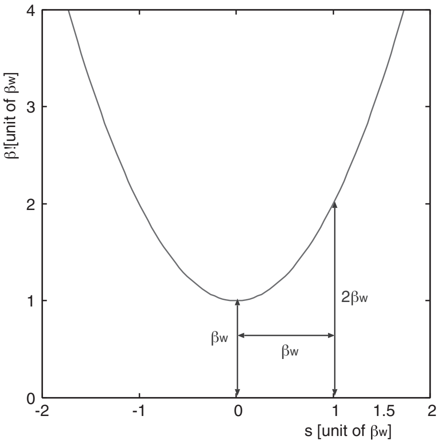

図 68: 収束点付近の電子ビームサイズ

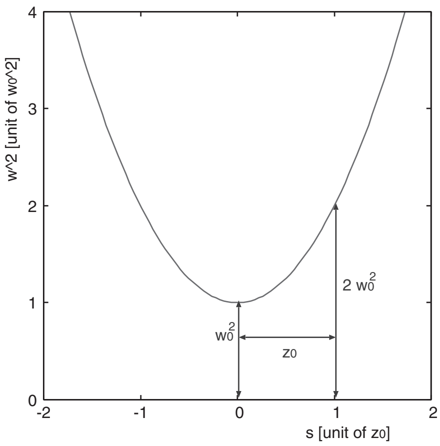

図 69: 収束点付近のレーザーサイズ

ルミノシティは、ビームとレーザーの強度と衝突の幾何学的な条件で決まる。ルミノシティを稼ぐ為に、ビームもレーザーも衝突点で収束するように設計される。

まず、電子ビームについて考える。ビームサイズが、エミッタンス ϵ とベータ関数 β だけで決まる理想的な場合を考える。

$$\sigma_e = \sqrt{\beta\epsilon} \tag{296}$$

ベータ関数の伝搬は、収束点での値 β_w だけで決まり、

$$\beta(s) = \beta_w + \frac{s^2}{\beta_w} \tag{297}$$

に従う。図 68 のように、極小値が β_w、そこから β_w だけ離れると 2 倍になるような具合である。

レーザーは、ガウスビームとして伝搬する。光子密度分布の RMS サイズ σ_l と、電場強度の $1/e$ 半径として定義した w は、

$$w = 2\sigma \tag{298}$$

の関係である。スポットサイズの伝搬は、図 69 のように、収束点でのサイズ w_0 だけで決まる。

$$w(z)^2 = w_0^2\left(1 + \frac{z^2}{z_0^2}\right) \tag{299}$$

z_0 はレイリー長で、$z_0 = \pi w_0^2/\lambda$ である。つまり、レーザー RMS サイズの伝搬は、

$$\sigma_l(z) = \frac{w_0}{2}\sqrt{1 + \frac{\lambda^2 z^2}{\pi^2 w_0^4}} \tag{300}$$

である。

時間に依存した 3 次元的な電子ビームプロファイル $D_B(x_B, y_B, z_B, t)$ を次のように記述する。座標軸を x_B,y_B,z_B と表し、z_B がビームの進行方向である。t は時間。

$$\begin{aligned} D_B &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{B_x}}\exp\left(\frac{-x_B^2}{2\sigma_{B_x}^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{B_y}}\exp\left(\frac{-y_B^2}{2\sigma_{B_y}^2}\right) \\ &\quad \cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{B_z}}\exp\left(\frac{-(z_B - ct)^2}{2\sigma_{B_z}^2}\right) \end{aligned} \tag{301}$$

σ_{B_x},σ_{B_y} は、x,y 方向のビームサイズで、z_B に依存する。σ_{B_z} はバンチ長である。

同様に、レーザーのプロファイル $D_L(x_L, y_L, z_L, t)$ は、座標軸を x_L,y_L,z_L、z_L がビームの進行方向として、

$$\begin{aligned} D_L &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{L_x}}\exp\left(\frac{-x_L^2}{2\sigma_{L_x}^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{L_y}}\exp\left(\frac{-y_L^2}{2\sigma_{L_y}^2}\right) \\ &\quad \cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{L_z}}\exp\left(\frac{-(z_L - ct)^2}{2\sigma_{L_z}^2}\right) \end{aligned} \tag{302}$$

σ_{L_x},σ_{L_y} は、x,y 方向のビームサイズで、z_L に依存する。σ_{L_z} はパルス長である。

図 70 のように、ビームとレーザーが衝突角 θ の配置とすると、それぞれの座標軸を次のように考えれば良い。

$$(x_B, y_B, z_B) = (x, y, z) \tag{303}$$

$$(x_L, y_L, z_L) = (x\cos\theta - z\sin\theta, y, -x\sin\theta - z\cos\theta) \tag{304}$$

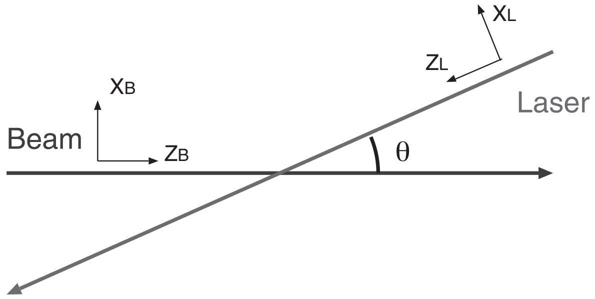

図 70: 電子ビームとレーザーの衝突角

ルミノシティ$\mathcal{L}$は、これらを積分して得られる。

$$\mathcal{L} \propto \int_x \int_y \int_z \int_t D_B \cdot D_L dxdydzdt \qquad (305)$$

3.5.3 蓄積共振器

光源として検討すると、やはりフラックスが重要になってくる。そのためには、平均強度の大きなレーザー光が必要である。エネルギーの保存から明らかなように、レーザー光源を励起するエネルギー (例えば数 100 W の LD) 以上のレーザー光を生成することは不可能である。そこで、共振器を使って、光を蓄積し実効的に大きな平均強度を実現することが考えられる。

共振器は、鏡などを使って構成した閉じた光路である。この中のレーザー光は共振器内部を周回するため、共振器内部で電子ビームとの衝突を行えば、レーザー光を何度も衝突に再利用することができる (図 1)。ルミノシティを稼ぐにはレーザー光を収束することが重要であるが、最も単純な 2 枚鏡の共振器では安定性が良くない。そこで、図 71 のような 4 枚鏡共振器が良く使われる。収束条件は凹面鏡で制御し、周長は独立に平面鏡で制御することができる。

発振器について議論した際には、共振器の内部に光増幅器が設置されたが、ここでは空の共振器に外からレーザー光を入力し、光を蓄積すること考える。簡単のため、2 枚鏡共振器で議論する。誘電体多層膜の共振器鏡で、2 枚とも反射率が R、透過率が T の場合を考える。ここの外部からレーザー光を入力するが、普通に考えると、入口の鏡でほぼ反射され

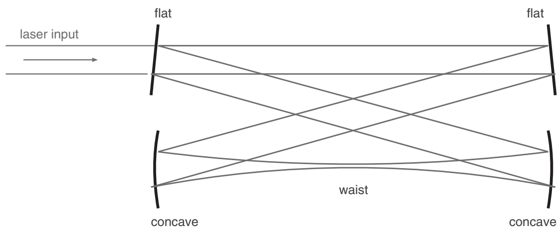

図 71: 収束点を持つ 4 枚鏡共振器

て、共振器の中には入って行かないように思える。ただし、共鳴条件 (共振器内部で定在波が立つ条件) では、共振器としての反射率が下がり、内部にパワーが入って行く。これは、加速器でおなじみのマイクロ波空洞と同じである。

振幅足し合わせを考えれば、共振器としての動作が理解できる。鏡の振幅反射率 r と透過率 t は、

$$r = \sqrt{R} \qquad (306)$$
$$t = \sqrt{T} \qquad (307)$$

である。図 72 に概念的に示すように、振幅 1 で入射した光は、各共振器鏡で反射と透過の振幅に分けられ、振幅として重ね合わされる。共振器としての反射振幅 r_{cav} と透過振幅 t_{cav}、内部の片道の振幅 s_{cav} は、

$$r_{cav} = r + trte^{i\phi} + trrrte^{i2\phi} + \cdots \qquad (308)$$
$$t_{cav} = tt + trrte^{i\phi} + trrrrte^{i2\phi} + \cdots \qquad (309)$$
$$s_{cav} = t + trre^{i\phi} + trrrre^{i2\phi} + \cdots \qquad (310)$$

となる。ϕ は共振器の周長に対応した一周での位相の進みである。共振器としての反射率 R_{cav}、透過率 T_{cav}、蓄積強度 (片道)S_{cav} は、振幅を自乗して得られ、

$$R_{cav} = R + T - \frac{T(1-R^2-TR)}{(1-R)^2 + 4R\sin^2(\frac{\phi}{2})} \qquad (311)$$
$$T_{cav} = \frac{T^2}{(1-R)^2 + 4R\sin^2(\frac{\phi}{2})} \qquad (312)$$
$$S_{cav} = \frac{T_{cav}}{T} \qquad (313)$$

となる。周回位相、つまり共振器の周長を波長で割ったもの、と蓄積強度の関係を図 73 に示す。共鳴条件

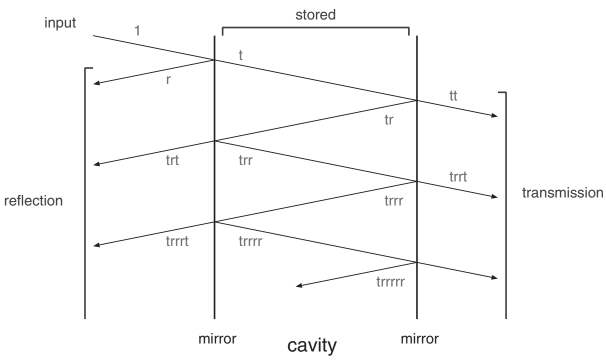

図 72: 共振器内の振幅の重ね合わせ

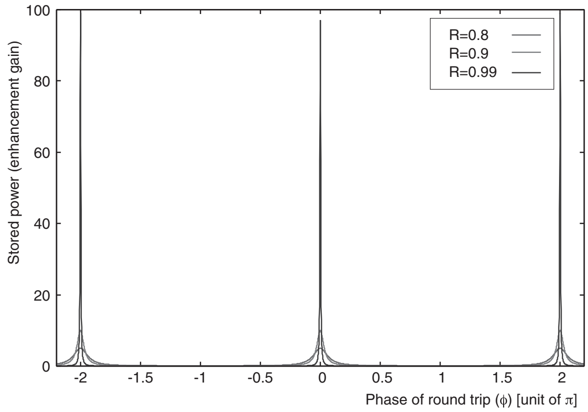

図 73: 周回位相と共振器内強度

が成立するときに、共振器内部にレーザー光が蓄積されることが分かる。蓄積される強度は、共振器鏡の反射率が大きい (つまり共振器の損失が小さい) ほど大きくなる。ただし、反射率の高い共振器鏡を用いると、共鳴幅が狭くなることが分かる。

多数の鏡からなる共振器で、それぞれの鏡の反射率を $R_1, R_2, R_3, \cdots$ とした場合、実効的は反射率 (あるいは周回効率) なるものは $R_{eff} = \sqrt{R_1 R_2 R_3 \cdots}$ となる。フィネス F と呼ぶ量を、

$$F = \frac{\pi\sqrt{R_{eff}}}{1 - R_{eff}} \tag{314}$$

と定義すると、共鳴幅は波長にたいして $\sim 1/F$ の関係になる。

共鳴条件を制御するには、共振器の長さを制御するか、レーザー光の波長を制御する必要がある。具体的には、蓄積共振器あるいはレーザー発振器の共振器を構成する鏡を機械的にピエゾで駆動するようにし、共振器長をフィードバック制御する。より高速な制御が必要になった場合は、レーザー発振器内に位相変調器を導入し、電気的な制御を行うことも考えられる。高フィネスになると、外乱や波長のふらつきの影響を受け、共鳴を維持するのが技術的に難しくなってくる。

超高フィネスになった場合、人為的なフィードバック制御による共鳴維持が難しくなってくる。そこで、光そのものに働いてもらうという図 74 のような案がある。独立なレーザー発振器を使用せずに、蓄積共振器と高ゲインの増幅器を一体にしたシステムで

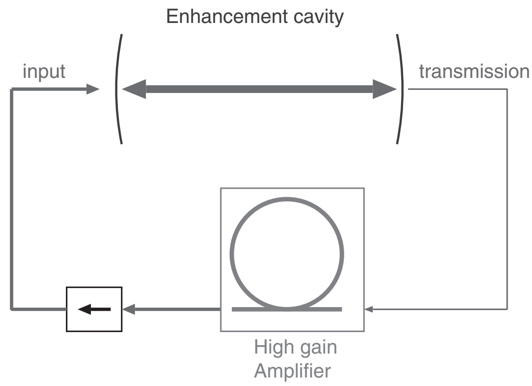

図 74: 発振型の構成

ある。発振は増幅器の自然放出光のノイズを種として始まる。自然放出光が共振器に入力され、そのうち共振器の共鳴条件を満たした成分だけが蓄積される。共振器の透過光は、共振器で共鳴したものが漏れて出て来ているものであるから、必ず共振器の共鳴条件を満たしたものである。これを増幅し、再び入力光として利用することで、常に共鳴条件に合った光が入力されるようになる。これが帰還的におこり、定常状態では、周回の損失と増幅器のゲインがバランスする状態で、自動的に共振器の共鳴が維持されることになる。

ここまでの議論は、単一周波数の CW レーザーを念頭に行って来た。モードロックパルスレーザーの場合はどうなるか考えてみる。図 75 上に示すように、モードロックレーザーは、パルス繰り返しの周

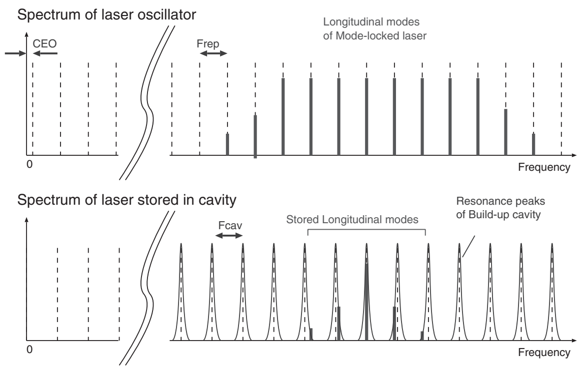

図 75: モードロックレーザーの蓄積

波数間隔 F_{rep} の多縦モードのレーザーである。縦モードの一つ一つは CW レーザーと変わらない。図 73 で見たように、共振器の共鳴ピークも有限の共鳴幅を持った多数の縦モード構造である。周波数軸で書くと、図 75 下のように共振器の基本周波数 F_{cav} 間隔に共鳴線があることになる。これに、入力するモードロックレーザーの多数の縦モードを重ねて見て、共振器の共鳴幅に受け入れられたものが蓄積出来る事になる。発振器と共振器の絶対長が合っている、つまり F_{rep} と F_{cav} が一致していると、全ての縦モードを受け入れる事ができ、パルスでの蓄積ができることになる。(少しずれていると、一部のモードしか共鳴条件を満たせず、効率が落ちるし、パルス長が伸びる。)

より短パルスレーザー (より多数の縦モード) で、より高フィネスの共振器に蓄積しようとすると、パルス内位相 (CEP: キャリアエンベロープ位相) の影響も考えなければならない。図 76 に示すように、モードロックレーザーの各パルス内部の電場波形の位相は、発振器の分散関係に起因して、シフトしていく場合がある。これは、図 75 上に示すように、周波数軸で縦モード構造の見た時の起点となるオフセット周波数 (CEO:キャリアエンベロープオフセット と呼ぶ) と関係するものである。有限の CEO があると、パルス間の位相が重ならず、蓄積効率が低下してしまう。

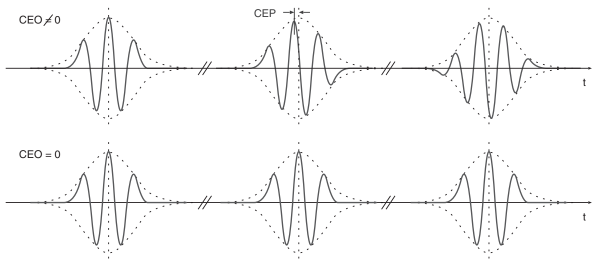

図 76: キャリアエンベロープ位相

3.5.4 LCSS の利用

LCSS は、とくに γ 線領域の高エネルギーで、単色で偏光を制御できる光源としてほぼ唯一の方式であろう。目先の予算の獲得ができそうな産業、医学などの応用研究だけにとどまらず、基礎科学での利用が期待出来ることを忘れてはならない。アクシオン探索や真空複屈折の観測、リニアコライダーにおける偏極陽電子源、$\gamma\gamma$ コライダーによるヒッグスファクトリ、など、LCSS があって初めて可能になる実験が考えられている。

4 おわりに

KEK では、ERL 試験加速器である cERL が建設され、ビームコミッショニングを行っているところである。エネルギー回収しながら、連続運転でビームが周回するようになり、なんとかはじまりのおわりくらいまで来た、あるいはこれからようやく本格的なビーム運転の始まり、といったところである。思えば、KEK で最初の ERL 専任として仕事を初めて以来、今となっては人もかなり増えて一つの加速器の運転が出来るまでになった。果たしてこれから、試験加速器の成果を踏まえて本格的な実機の開発に発展して行くのであろうか、はたまたここを潮時に縮小に転じるのであろうか。いずれにしても、これから数年は ERL をめぐる動向からは目が離せない時期であろう。

そもそも、レーザーの専門という訳でもないが、余計な事に手を出すのにさして抵抗を感じない性格のためか、所外の某研究所に任せていた電子銃のレー

ザーの開発がいよいよ cERL の建設に間に合わないとなったところで、首を突っ込んでしまったばっかりに、いつの間にか電子銃レーザー担当みたいな立場に置かれてしまった。ひとたび電子銃レーザーの人と見られてしまうと、いつでもその話を期待されるようになってしまうし、それ以外の議論の際には除外されてしまうことさえある。今回はきっと、cERL の電子銃レーザーシステムの解説を期待されたような気もするが、あえてそこは避けて通ってみた。今後の ERL などの光源加速器の展開を考えると、レーザーの開発にもっと力を入れる必要があるし、レーザーだけでなく加速器全体を見据えた設計検討が必要であることを示したつもりである。

謝辞

本稿の執筆にあたって、赤木智哉氏と小菅淳氏に査読コメントをいただいた。この場を借りて感謝いたします。

なお、本研究の一部は、光・量子融合連携研究開発プログラムによるものである。

参考文献

[1] ラング, "線形代数学", ちくま学芸文庫

[2] ファインマン他, "ファインマン物理学 V", 岩波書店

[3] キッテル, "熱物理学", 丸善

[4] Amnon Yariv, "光エレクトロニクス", 丸善

[5] Siegman, "LASER", University Science Books

[6] キッテル, "固体物理学入門", 丸善

[7] U. Keller *et al.*, "Semiconductor Saturable Absorber Mirrors (SESAM's) for Femtosecond to Nanosecond Pulse Generation in Solid-State Lasers", IEEE J. of Selected Topics in Quantum Electronics, Vol. 2, No. 3 (1996) p435

[8] Z.F.Li *et al.*, "Multiple-harmonic generation in rare gases at high laser intensity", Phys. Rev. A, 39, 5751 (1989)

[9] P. Hartmann *et al.*, "A diffusion model for picosecond electron bunches from negative electron affinity GaAs photocathodes", Journal of Applied Physics, Vol. 86 , 4 (1999) p2245

[10] Z. Liu *et al.*, "Narrow cone emission from negative electron affinity photocathodes", J. Vac. Sci. Technol. B, 23 (6) (2005) p2758

[11] M. O. Scully *et al.*, "Simple laser accelerator: Optics and particle dynamics", Phys. Rev. A, Vol. 44, pp2656 (1991)

[12] 本田洋介, "高繰り返しシード型自由電子レーザーのためのレーザーエネルギー変調器", 第 11 回加速器学会 (2014)

[13] 亀井亨, 木原元央, "加速器科学 (パリティ物理学コース)", 丸善

[14] R.W. Schoenlein *et al.*, "Generation of femtosecond X-ray pulses via laser-electron beam interaction", App. Phys. B 71 1-10 (2000)

[15] M. Shimada *et al.*, "Intense Terahertz Synchrotron Radiation by Laser Bunch Slicing at UVSOR-II Electron Storage Ring", Jpn. J. App. Phys. Vol. 46, No.12, (2007) p7939

[16] Z.Huang *et al.*, "Measurements of the linac coherent light source laser heater and its impact on the x-ray free-electron laser performance", Phys. Rev. ST-AB, 13, 020703 (2010)

[17] 稲垣隆宏 , "大電力高周波源", OHO13

[18] H. Tomizawa *et al.*, "Stable Operation of HHG-Seeded EUV-FEL at the SCSS Test Accelerator", Proc. of FEL2013, New York, thoano01 (2013)

[19] L. H. Yu *et al.*, "First Ultraviolet High-Gain Harmonic-Generation Free-Electron Laser", New Journal of Physics 16 (2014) 043021

[20] H. Deng *et al.*, "Using Off-Resonance Laser Modulation for Beam-Energy-Spread Cooling in Generation of Short-Wavelength Radiation", Phys. Rev. Lett., 111,084801 (2013)

[21] C. Feng *et al.*, "Three-dimensional manipulation of electron beam phase space for seeding soft x-ray free-electron lasers", Phys. Rev. ST-AB, 17,070701 (2014)

[22] G. Stupakov, "Using the Beam-Echo Effect for Generation of Short-Wavelength Radiation", Phys. Rev. Lett, 102,074801 (2009)

[23] A. A. Zholents *et al.*, "Current-Enhanced SASE using an Optical Laser and its Application to the LCLS", SLAC-PUB-10713 (2004)

[24] 本田洋介 他, "発振型光蓄積装置の開発",　第 7 回加速器学会 (2010)

[25] 本田洋介 , "将来光源加速器による新粒子の探索",　第 11 回加速器学会 (2014)

[26] T. Omori *et al.*, "Conceptual Design of a Polarized Positron Source Based on Laser Compton Scattering", KEK Preprint 2005-60

[27] T. Akagi *et al.*, "Development of a three dimensional four mirror optical cavity for laser-Compton scattering", Nucl. Instr. Meth. A 724 (2013) 63-79

[28] S.A. Bogacz *et al.*, "SAPPHiRE: a Small Gamma-Gamma Higgs Factory", arXiv:1208.2827v1 [physics.acc-ph]