

# 電子加速器の加速管

## 1 はじめに

本講義では主に電子を加速する目的で用いられる高周波 (radio frequency; RF) 加速管を取り上げ解説する。ここでは電子の進行方向への速度は光速とほぼ等しい ( $v_e \cong c$ ) と仮定する。従って、直流型 (direct current; DC) の加速管や、内部で速度が変化するような使い方をする加速管は対象外とする。

RF 加速管は現代の加速器を支える必須要素であるため、1984 年の初回高エネルギー加速器セミナー (OHO) 以降、度々 OHO のテーマとして取り上げられている。今回私に与えられたテーマは「電子加速器の加速管」であり、進行波・定在波型加速管の双方を解説するよにということであった。私自身は現在 KEK フォトンファクトリー (PF) で PF 型空洞を、PF-AR (advanced ring) で APS 空洞を用いた加速器運転に携わっている。「加速機運転に携わっている」と書いたのはこれら空洞の開発に私自身は関与していないからである。実際、私は粒子加速に必要とされる大出力の RF 加速管を開発した経験は無い。

そこで本テキストでは、実際の加速器で用いられている加速管の先端的・技術的な内容には言及せず、加速管に対する基礎的・教科書的な内容を紹介することを目標とする。私にとって OHO と言えば加速器を勉強するための良質な教科書群であり、私の加速器に対する知識の多くは OHO テキストから得られたものである。今回、改めて加速器の基礎中の基礎である「電子加速器の加速管」を執筆するにあたり、今後加速器分野での活躍を狙う人たちの理解をほんの少しでも助けることができればと思う。

### 1.1 電子の加速

電子の加速を考える際、ほとんどの場合において加速管内での速度変化を考えなくても良いという点が他の陽子など重い粒子を加速する場合と異なる。電子は静止質量エネルギー 511 keV、電荷  $e = -1.602 \times 10^{-19}$  C を持つ素粒子であり、例えば 3 MeV まで加速すると速度は光速の 0.990 倍に達する。従って、電子の加速においては、一連の加速器の電子生成直後ごく一部のみ速度変化を考慮すれば良いことになる。実際の加速器では電子源として RF 電子銃を採用し、電子銃部のみで数 MeV の運動エネルギーを与えるような設計になっているものもある。この場合、コンパクト

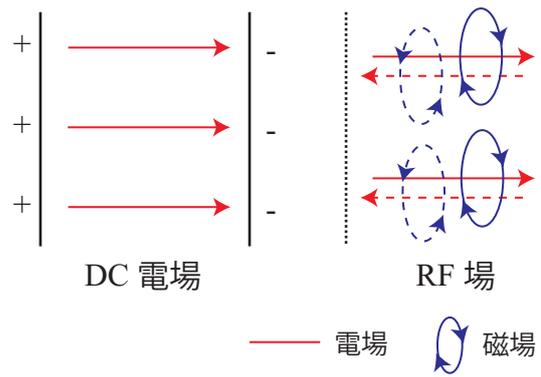


図 1: DC 電場と RF 電場の模式図。DC 電場を得るには静的な電位差が必要となる。動的な電場があれば必ず磁場も存在する (RF 場)。

トな電子銃装置のみで電子を相対論的速度まで加速できる。このように短い距離で比較的簡単に相対論的速度を達成できることが電子加速の特徴といえる。

これに対し、陽子は電子の約 1836 倍の静止質量エネルギーを持つため、相対論的速度を得るためにはより大規模な加速装置が必要になる。例えば、陽子を加速し光速の 0.990 倍の運動速度を得るには、5.71 GeV の運動エネルギーを与えることが必要となる。

以上の考察から、加速管を使って粒子を加速する場合、電子と陽子またはその他の重い粒子など対象となる粒子によって考え方、設計思想などが大きく異なってくるのが予想できる。電子の場合は入射器の初段部を除いてその進行方向への速度を光速として設計して良いが、陽子の場合は加速器の大部分 (数 GeV クラスまでの加速器の場合) において速度が徐々に変化するためこれを考慮する必要が出てくる。本テキストでは相対論的速度まで加速され、ほぼ光速で運動する電子を念頭に議論を進める。

### 1.2 DC と RF 加速

荷電粒子を加速するには電場が用いられる。DC (静) 電場と RF (動) 電場の物理的な違いは電場が時間的に振動するか否かであり、電場が時間的に振動する場合には Maxwell の方程式に従い磁場も存在することになる (図 1 参照)。RF 磁場は時には加速管の発熱に寄与し加速管の性能を制限するが、導波管から加速管への RF 場の導入や加速管内部での高周波の電気的な結合などにも用いられる。また、加速管内に励振される磁場も電場と同様に電子ビームと相互作用する。これはビームをキックする (進行方向を曲げる) 目的で

使われることもある。

RF 電場を加速に用いる場合、荷電粒子を加速管に複数回通過させることで繰り返し加速が可能となる。例えば、RF 加速管を直列に複数並べることで荷電粒子を多段加速することが可能となる、また荷電粒子を円軌道を描くように周回させ任意位置の RF 加速管に複数回通すことでも多段加速が可能となる。このように、RF 加速管を用いることで DC 加速管では得られない非常に大きな運動エネルギーを効率的に粒子に与えることが可能となる<sup>1</sup>。

### 1.3 常伝導と超伝導

常伝導と超伝導の違いについても簡単に述べておくと、加速管パラメータとしての大きな違いは Quality factor (Q 値) にある。例えば、500 MHz 帯で Q 値について実際の比較すると、KEK-PF 型常伝導空洞は  $Q_0 = 40000$  [1], KEK-B 型の超伝導空洞は  $Q_{ext} = 2 \times 10^8$  [2] とその差は 4 桁にも及ぶ。また、システムとしてみるならば、極低温まで空洞温度を下げるための冷凍機システムが必要かどうか、材料は超伝導体かどうかなどといったことも相違点となる。

本テキストでは加速管の基礎物理を解説するつもりなので、基本的には常伝導と超伝導を区別しない。解説は常伝導加速管を想定して進めるが、ここで触れる内容は超伝導加速管を勉強するにおいても基礎となるはずである。

### 1.4 本テキストの流れ

本テキストでは今年度のテーマ「マイクロ波の基礎」の他のテキスト等で説明されるであろう、基本的なマイクロ波の理論、RF 空洞の基本的なパラメータについては既知であると考え、新たに定義を示したり詳細を述べたりはしない。ここでいうパラメータとは Q 値、シャントインピーダンス等であり、もしこれらの量について初耳であれば本テキストを読み進める前に少なくとも定義ぐらいいは抑えておいて頂ければと思う。また、マイクロ波を取り扱うのに必要な電磁気学の基本、Maxwell 方程式についても学部卒業生程度の知識はあることが望ましい。本テキストではこれら知識を前提に加速管 (導体内) に閉じ込められたマイ

クロ波について物理的な特徴を数式とともに紹介していく。

RF による粒子加速を安定・効率的に行うためには加速管内に励振される電磁場の 3 次元空間分布と時間構造を理解し、目的に応じた最適の加速管を製作・運用する必要がある。電子加速管と一言と言っても目的に応じて構造や考慮すべき物理は様々である。例えば、リニアック等で加速勾配を重視する場合は進行波型加速管を用い、リング型加速器など加速勾配よりも粒子運動の安定性を追求する場合は単セルの定在波型加速管を用いることが多い。また、電磁波の周波数、加速繰り返し (数 Hz から CW 運転)、被加速電荷量も加速管設計の重要なパラメータである。しかし、このような実際的な加速管の設計・製作・運用に関することには本テキストでは踏み込まない。このような内容に興味のある方は過去のテーマに沿った OHO テキストを参考にして頂ければ良いかと思う。

本テキストでは、加速管に閉じ込められたマイクロ波の基本的な物理を理解すべく、まず導波管について解説する。これをもとに進行波型加速管、定在波型加速管を順に取り上げることで加速管全般について俯瞰的・基礎的な知識を得ることを目的とする。

<sup>1</sup>DC 電場でも多段化することは可能であるが、グラウンドレベルに対して高い電圧を保つ必要があるため数十 MV 程度が限界となる。さらに DC の加速管で高電圧を実現するためには装置が極端に大型化するという欠点もある。

## 2 導波管

### 2.1 自由空間と導波管

自由空間を伝播<sup>2</sup>する電磁波は平面波 (図 2 参照) であり、エネルギーに応じた周波数で振動しながら空間を光速で進む。この際、電磁場は進行方向に垂直な平面内で振動し、同方向に進行する荷電粒子を加速することはできない。平面波は電磁波の進行方向に電磁場成分を持たないため、**TEM 波** (transverse electric and magnetic wave) に分類される。また、電磁波はエネルギーを伴って進行する。単位面積を単位時間あたりに通過する電磁場のエネルギーは、電場ベクトル  $\vec{E}$  と磁場ベクトル  $\vec{H}$  の外積で与えられる (Poynting's vector)。

**RF 加速管**とは中空の導体<sup>3</sup>に電磁場 (高周波) を伝播させ、粒子の運動エネルギーを増加させる (加速)<sup>4</sup>ために用いられる加速器装置である。周囲を導体で取り囲み、内部に高周波を閉じ込めたものを空洞もしくは **RF 空洞**と呼ぶ。RF 加速管, RF 空洞を理解するには、導体内での高周波の振る舞い・様子を知ることが近道だと思われる。まずはこれを目的とし導波管とその中を伝播する電磁波について説明する。

**導波管**とは空洞の対向する一軸方法の導体を取り払い (電磁波の入口と出口を作る)、高周波を通過できるようにしたものであり、加速器では**高周波源**で発生した特に大強度の高周波を空洞等に導く際に用いられる。導波管内の高周波は導体の境界面で一定の条件 (境界条件) を満たしながら反射・回折され、これらが重ね合わさり (干渉) ながら波面を形成する。ここで導波管内を入口から出口側に伝播する高周波を**入射**

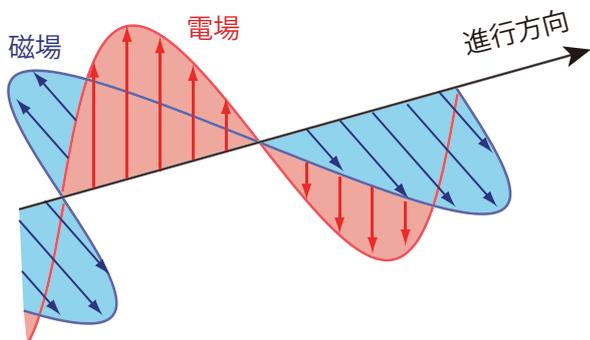


図 2: 自由空間を伝播する電磁波の模式図。

<sup>2</sup>波動が媒質の中を広がっていくことを「伝播」もしくは「伝搬」といい、現在はこちらも使用されているが、本テキストでは「伝播」に統一する。

<sup>3</sup>一般的には金属が用いられる。

<sup>4</sup>場合によっては減速も行う。

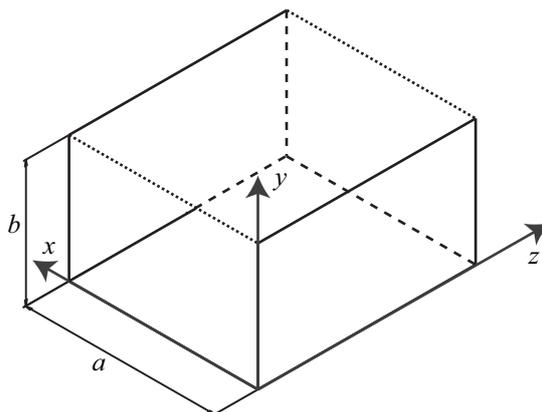


図 3: 矩形導波管の模式図。電磁波は  $z$  軸に沿って負から正方向に向け伝播するものとする。ここでは  $z$  軸方向は無限と考える。

**波**もしくは**進行波**<sup>5</sup>、導体で反射された波を**反射波**と呼ぶ。高周波は導体に侵入・透過できないため<sup>6</sup>、一般的な波の議論でくる屈折・透過波は導波管では考えない。

導波管内に形成される波面は導波管の形状により決定され、その様子により**伝播モード**が定義される。普通、伝播モードは複数存在し、各伝播モードにおける波面は導波管内の境界面 (矩形の場合は 6 面中 2 面が取り除かれているため、残りの 4 面に境界が存在する) からの反射波らの重ね合わせ (干渉) の結果により形成される。これは導波管内高周波の伝播方向に直交する面での境界条件「導体面での電場の接線成分がゼロ」を考慮して Maxwell 方程式 (この場合、Helmholtz 方程式になる) を解くことで求められる。導波管を伝播する高周波は平面波 (TEM 波) ではなく<sup>7</sup>、**TE** (transverse electric wave; 電場は横方向だけ) または **TM** (transverse magnetic wave; 磁場は横方向だけ) 波に分類される。

### 2.2 導波管内の電磁場

例として矩形導波管を伝播する TE モード ( $E_z = 0$ ) の電磁場の時間 ( $t$ ) 発展の様子を数式を用いて書き下す。ただし、矩形導波管は  $xyz$  座標において  $x$  軸方向に  $a$ 、 $y$  軸方向に  $b$  の長方形断面を持つものとし、電磁波は  $z$  軸に沿って負から正方向に伝播すると考える

<sup>5</sup>後述する物理量である位相速度  $v_p$  と群速度  $v_g$  を用いて、 $v_p \cdot v_g > 0$  の条件を満たすものが「進行波」、 $v_p \cdot v_g < 0$  となるものが「後進波」と定義される。

<sup>6</sup>金属は完全導体ではないが、ここでは表面抵抗が十分に小さいとし、完全導体と同様に考える。

<sup>7</sup>TEM 波は導波管内を伝播できない [3]。

(図 3 参照)。

## TE-mode

$$H_z = H_{mn} \cos(k_x x) \cos(k_y y) e^{i\omega t - \gamma z} \quad (2.1)$$

$$E_x = \frac{i\omega\mu k_y}{k_c^2} H_{mn} \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{i\omega t - \gamma z} \quad (2.2)$$

$$E_y = -\frac{i\omega\mu k_x}{k_c^2} H_{mn} \sin(k_x x) \cos(k_y y) e^{i\omega t - \gamma z} \quad (2.3)$$

$$H_x = \frac{\gamma k_x}{k_c^2} H_{mn} \sin(k_x x) \cos(k_y y) e^{i\omega t - \gamma z} \quad (2.4)$$

$$H_y = \frac{\gamma k_y}{k_c^2} H_{mn} \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{i\omega t - \gamma z} \quad (2.5)$$

$$\gamma = \sqrt{k_c^2 - \omega^2/c^2} \quad (2.6)$$

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (2.7)$$

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, k_y = \frac{n\pi}{b} \quad (2.8)$$

ここで、 $\mu$  は透磁率、 $\omega$  は電磁波の角周波数、 $i$  は虚数単位である。 $m, n$  はそれぞれ、 $m(n) = 0, 1, 2, \dots$  の値をもつ正の整数であり、これらの組み合わせ  $(m, n)$  により  $TE_{mn}$  として伝播モードを区別する。ただし、 $TE_{00}$  モードは存在せず<sup>8</sup>、 $m, n$  のうち少なくともどちらか一方は 1 以上の整数とする必要がある。 $H_{mn}$  はモード毎に与えられる定数であり、磁場  $H_z$  の振幅に対応している。また、 $k_c$  が導波管のカットオフを決める波数であり、カットオフ (遮断) 周波数は  $f_c = ck_c/(2\pi)$  となる。

上で示した矩形導波管内の電磁場の式を眺めると、 $E_x, E_y$  はそれぞれ  $\sin(k_y y), \sin(k_x x)$  という関数を含むことがわかる。これら三角関数は、 $E_x$  については  $y = 0, b$ 、 $E_y$  については  $x = 0, a$  において成分がゼロになることを保証しており、先に述べた「導体面での電場の接線成分がゼロ」という境界条件を満たす。また、指数  $m, n$  が大きくなると、電磁場の各成分がそれぞれの軸方向に持つ節の数が大きくなることわかる。図 4 に  $TE_{mn}$  モードの  $xy$  平面における電場の様子を示す。

式 (2.1 から 2.5) には透磁率  $\mu$  が明示的に含まれており、誘電率  $\varepsilon$  を用いると媒質中での光速  $c$  は、

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad (2.9)$$

と書ける。導波管では伝播させる電磁波の電力 (特にピーク電力) に応じて内部に充填するガス種が選ばれ

<sup>8</sup>(0, 0) を選ぶ場合、 $k_x = k_y = 0$  となり、 $H_z$  を除く全ての成分は恒等的にゼロとなる。しかし、 $H_z$  が時間的に変動すると Maxwell の式に従い、 $x, y$  方向に電場が生じなければならず矛盾が生じる。

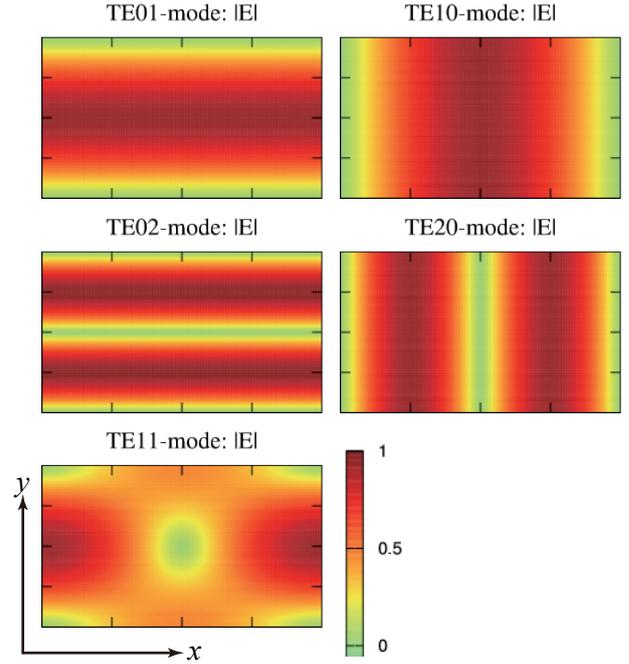


図 4:  $TE_{mn}$  モードの  $xy$  平面における電場の絶対値の様子。

る。それほどピーク電力が大きい場合は空気のままが良いが、ピーク電力が大きい場合は  $SF_6$  ガス等を加圧充填するか、もしくは内部を真空排気して用いられる。これは導波管内での放電を避けるのが目的である。

## 2.3 伝播係数

式 (2.1 から 2.5) で示す電磁場の各成分において変数  $z$  に対する依存性は、等しく  $\exp(-\gamma z)$  という関係で与えられる。 $\gamma$  は伝播係数と呼ばれる量であり、 $k_c^2$  と  $\omega^2/c^2$  の大小関係により、正の実数か正符号の純虚数となる。前者は入射波が  $+z$  方向に進むにつれて減衰<sup>9</sup>することを、後者は減衰することなく  $+z$  方向に伝播することを意味する。 $\gamma$  が純虚数の場合、 $\gamma = i\beta$  とおくと、式 (2.6, 2.7) より、

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_c^2 + \beta^2 = k_x^2 + k_y^2 + \beta^2 \quad (2.10)$$

という関係が導かれ、各成分の波数と角周波数の関係性について見通しがよくなる (と筆者は思う)。また、この場合に式 (2.1 から 2.5) を眺めると、 $H_z$  以外の成分には虚数単位  $i$  がかかっている。これは、 $H_z$  とこ

<sup>9</sup>ここでの減衰とは、ジュール熱によるものではなく、導波管の導体面において反射が起こり電磁波が伝わらないことを意味する。

れ以外の成分で強度のピークを与える位相が  $\pi/2$  ずれることを意味している。

## 2.4 カットオフ周波数

$\gamma$  が正符号の純虚数のときに、電磁波が伝播可能であるという条件から、

$$\omega > ck_c \equiv \omega_c \quad (2.11)$$

という関係が導かれる<sup>10</sup>。すなわち、導波管内を伝播する電磁波は導波管の幾何学的な形状により決まるカットオフ周波数より大きくなければならない。これがカットオフ周波数という名の由来である。

式 (2.7, 2.8) からわかるように、導波管を伝播するモードによりカットオフ周波数は異なり、指数 ( $m, n$ ) が大きくなると (高次のモードになると) その値は大きくなる。ここで、図 3 において  $a = 2b$  を仮定すると、カットオフ周波数の一番低いモード (基本モードと呼ぶ) は  $TE_{10}$  であり、その次に大きいのが  $TE_{01}$  と  $TE_{20}$  モードとなる ( $\omega_c^{(10)} < \omega_c^{(01)} = \omega_c^{(20)}$ )。ここで、 $TE_{01}$  と  $TE_{20}$  モードは各々が全く異なる電磁場成分 ( $xy$  平面内の電磁場分布) をもつが、同じカットオフ周波数を持つ。このような状態を**モード縮退**していると呼び、実際の導波管や加速管を使用するときに高周波源の周波数を制限しても複数のモードが励振される可能性があるため注意が必要となる。従って、 $\omega_c^{(10)} < \omega < \omega_c^{(01)}$  となる電磁波を導波管に入射すれば、導波管内には基本モードだけが伝播することになる。

## 2.5 平面波の合成

導波管を伝播する電磁波の波面は導体面での反射波の重ね合わせで形成されると先に書いた。これについて  $TE_{10}$  モードを例として説明する。ただし、損失のない反射面を仮定する。 $TE_{10}$  モードの  $H_z$  は、時間に依存する項を除いて以下のように表される。

$$H_z = H_{10} \cos(k_x x) e^{-i\beta z} \quad (2.12)$$

$$= \frac{H_{10}}{2} \left\{ e^{i(k_x x - \beta z)} + e^{i(-k_x x - \beta z)} \right\} \quad (2.13)$$

ここで、 $k_y = 0$  と、式 (2.10) より、

$$k_x = (\omega/c) \sin \theta \quad (2.14)$$

$$\beta = (\omega/c) \cos \theta \quad (2.15)$$

<sup>10</sup> $k_c$  は正とする

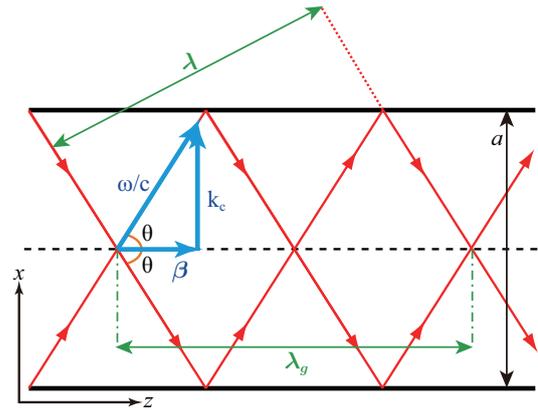


図 5: 平面波の合成としてみた導波管内での電磁波。 $xz$  平面

という関係が成り立つ。これは  $z$  軸を対称に  $\theta$  だけ傾いた方向に進む 2 つの平面波の重ね合わせと考えることができる。つまり、導波管内では平面波は導体面で反射されながらジグザグに進んでいると理解できる。ここでは矩形導波管の  $TE_{10}$  モードについて説明したが、他の形状の導波管、他の  $TE, TM$  モードについても同様である。以上を図 5 に示す。

ここで、 $\theta$  の極限を考える。まず、 $\theta \cong 0$  の場合、 $k_x \cong 0, k_y \cong 0$  となり、電磁波は  $TE$  モードとしては伝播できなくなる。これは先に議論した  $TE_{00}$  モードが存在しないのと同様な状況であり、 $TE$  モードを仮定して得られた式 (2.1 から 2.5) を用いては議論できない。この場合、導波管に入射された電磁波は導体面を意識することなく<sup>11</sup> (導波管を励振することなしに)  $TEM$  波として直進を続ける。いわば、境界が遙か彼方にある空間を電磁波が進むような状態と考えられる。

次に導波管を進む波の周波数がカットオフ周波数と一致する場合、 $\omega/c = k_c$  であるから、 $\theta = \pi/2$  となる。この場合、図 5 より、電磁波は  $x$  軸方向を往復するのみで  $+z$  軸方向には進まない。

## 2.6 分散関係と位相速度

カットオフ周波数より大きい周波数を持つ電磁波は導波管を伝播できることを先に述べた。導波管を伝播する際、周波数の違いは伝播にどのような影響を与えるのだろうか? 図 6 に式 (2.10) を  $\omega/c$  について解き、 $\beta$  の関数としてプロットしたもの (赤の曲線) を示す。

<sup>11</sup>一方の導体面で反射されても、他の導体面は波長と比べ十分遠くにあるため、他の導体面で反射された波とは干渉できない。

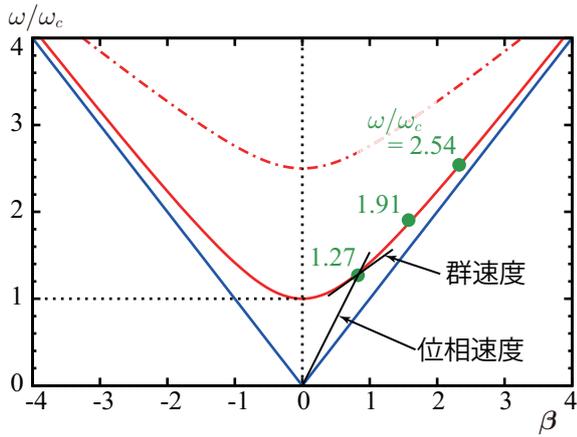


図 6: 導波管を伝播する電磁波の分散関係

赤の実曲線が基本モード、一点鎖線が次のモードの分散関係を意味する。ただし、縦軸はカットオフ角周波数  $\omega_c$  で規格化し、 $\beta < 0$  の領域も含め図示した。青色の実線は  $z$  軸方向に光速で進む波を表す。

原点から分散関係を示す曲線（分散曲線）の一点をつないだとき、その傾きが位相速度を、交点における接線の勾配が群速度を表す。位相速度は波面の進む速度であり、一般的な導波管において電磁波の位相速度はいずれの周波数においても光速より大きい。また、カットオフ周波数に近づくにつれ位相速度はさらに大きくなり、カットオフ周波数と一致する点では無限大になる。これと反対に、周波数が大きくなると、位相速度は漸近的に光速に近づいていく。群速度は進行波のエネルギーが伝わる速度であり、カットオフ周波数ではゼロとなる。これはエネルギーが伝送されないことを意味し、節 2.4 で論じたように、カットオフ周波数と同じ周波数を持つ波は  $z$  軸方向には進まないという考察と一致する。

図 6 において、 $\beta > 0$  の領域では群速度は正、 $\beta < 0$  では負となることがわかる。これはエネルギーの伝わる方向が前者は  $+z$ 、後者は  $-z$  方向であることを示している。

図 7 に基本 ( $TE_{10}$ ) モードのカットオフ周波数に対し 1.27, 1.91, 2.54 倍の周波数を持つ高周波の成分  $E_y$ ,  $H_z$  について、 $tx$  平面での伝播の様子を示す。いずれの周波数においても伝播モードが同一であるため  $xy$  平面での電磁場の様子は同じであるが、 $tx$  平面での様子が異なることがわかる。また、 $E_y$ ,  $H_z$  で最大強度を取る時間が  $\pi/2$  位相ずれていることも確認できる。

図 7 は  $tx$  平面を  $zx$  平面としても ( $z$  軸の図示範囲をうまく選ぶことで) 全く同様の描像が得られる。 $zx$

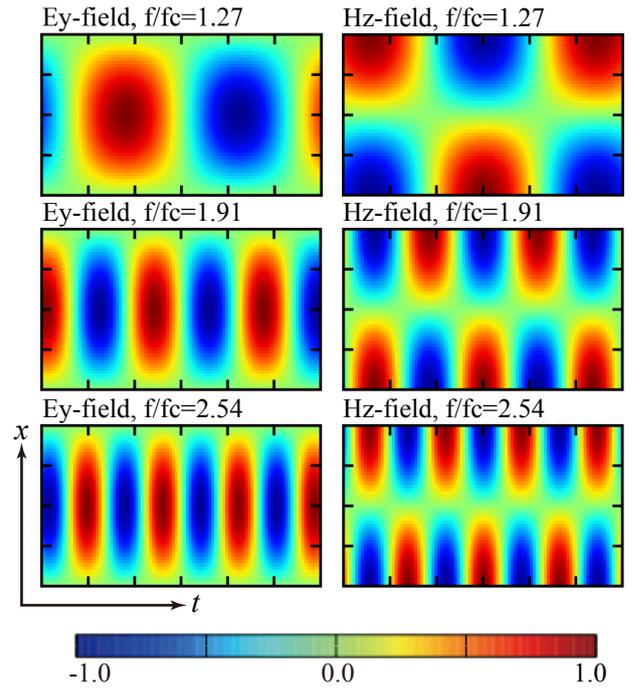


図 7: ある  $z$  位置における  $TE_{10}$  モードの異なる周波数における  $tx$  平面での  $E_y$ ,  $H_z$  の伝播状態の変化。加速管形状、図示範囲は全プロットで共通。

平面として図 7 を眺めると、周波数が高くなるにつれ位相進み量（位相速度）が小さくなっていることがわかる。この結果は、図 6 で各点の位相速度を比較してみても成り立つことがわかる。 $zx$  平面で電磁場分布を眺めたときの位相の単位繰り返しの距離を管内波長と呼ぶ。

ここで、これまで出てきた各物理量について数式を示しておく。

- 位相速度

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \quad (2.16)$$

- 管内波長

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v_p}{f} \quad (2.17)$$

- 群速度

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{\beta}{\omega/c} c = \frac{\lambda}{\lambda_g} c \quad (2.18)$$

ただし、 $\omega$ ,  $\lambda$  など添字の無い量は、全て導波管を伝播する電磁波に関する量である。式 (2.18) の 2 つめ以降の等号は式 (2.10) 及び式 (2.16, 2.17) を用いて導くことができる。さらに、式 (2.16, 2.17) より位相速度と群速度は以下の関係を満たすことがわかる。

$$v_p v_g = c^2 \quad (2.19)$$

表 1: 矩形導波管 WR-1500 のカットオフ周波数

m	n	カットオフ周波数
1	0	393.7 MHz
2	0	787.4 MHz
0	1	787.4 MHz
1	1	880.3 MHz

表 2: 矩形導波管 WR-1500 の TE<sub>10</sub> モードを異なる周波数で励振した場合の伝播に関わるパラメータ。

周波数	位相速度	群速度	管内波長
MHz	-	-	m
( <i>f</i> )	( <i>f</i> / <i>f<sub>c</sub></i> )	( <i>v<sub>p</sub></i> / <i>c</i> )	( <i>λ<sub>g</sub></i> )
500	1.27	1.62	0.97
750	1.91	1.17	0.47
1000	2.54	1.09	0.33

## 2.7 KEK-PF の矩形導波管

矩形導波管は主に大電力高周波を加速管に導くために用いられる。通常用いられるのは基本モードとなる TE<sub>10</sub> モードであり、断面の長辺 *a* と短辺 *b* が *a* = 2*b* となるものが用いられる。先に図示したその電磁波の様子については全て上記条件 (*a* = 2*b*) を満たしている。

KEK-PF では EIA 規格で WR-1500 と呼ばれる導波管を使用しており、*a* = 381 mm, *b* = 190.5 mm の内部断面形状をもつ。この導波管の基本モードと幾つかの高次モードについてカットオフ周波数を表 1 に示す。この導波管の TE<sub>10</sub> モードのカットオフ周波数は 393.7 MHz であり、一つ上のモードでは 787.4 MHz となる。KEK-PF で用いられている RF 空洞の共振周波数は 500.1 MHz であるため、高次のモードを励振すること無く基本の TE<sub>10</sub> モードで高周波を伝播できることになる。ところで、表 1 では TE<sub>20</sub>, TE<sub>01</sub> のカットオフ周波数は全く同じであり (縮退している)、さらに TM モードの基本モードである TM<sub>11</sub> モードも TE<sub>11</sub> も縮退している。

矩形導波管に関する記述の最後に、参考として WR-1500 の TE<sub>10</sub> モードを異なる周波数で励振した場合の伝播に関わるパラメータについて表 2 にまとめた。ここまで説明してきたように、以下の項目が確認できる。

- 導波管内での位相速度は光速より大きいこと、電磁波の周波数が高くなるにつれて光速に近づくこと

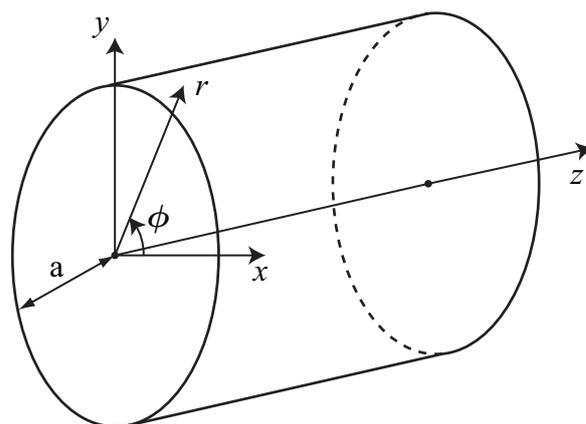


図 8: 円筒型導波管の模式図。電磁波は *z* 軸に沿って負から正方向に向け伝播するものとする。円筒部の内半径を *a* とする。

- 群速度は周波数が高くなるにつれて大きくなり、光速に近づくこと
- 位相速度と群速度の積は光速の二乗となること

また、表 1 と表 2 を見比べるとわかるように表 2 で示した最大周波数 1000 MHz は WR-1500 の TE<sub>20</sub>, TE<sub>01</sub>, TE<sub>11</sub> モードのカットオフ周波数より大きい、この場合、本来利用したいモード TE<sub>10</sub> モード以外の伝播モードも励振される可能性がある。このため、WR-1500 導波管は周波数 787 MHz に幾らかの余裕をみた値以下の周波数をもつ電磁波を送送するのに用いられる。実際に導波管のカタログをみてみると、WR-1500 導波管の周波数帯域は 0.49 から 0.75 GHz となっている。低い方の周波数帯域が 0.49 GHz とカットオフ周波数 0.39 GHz より 100MHz 程度大きくなっているのは、群速度が遅くなりすぎるからだと思われる。図 6 からわかるように、周波数 500 MHz (図の  $\omega/\omega_c = 1.27$  の点) 以下の領域では群速度は極端に低下する。

## 2.8 円筒型導波管

以上、電子加速管についての説明で前提となる概念及び各種物理量について説明したつもりである。加速管としては矩形ではなく、高周波特性や加工性の観点から対称性の良い円筒形のものが一般的に用いられる。ここでは、次節以降のために円筒導波管について具体的な電磁場成分の形を紹介しておく。円筒導波管においても、カットオフ周波数を *k<sub>c</sub>* と示す。矩形導波管の *k<sub>c</sub>* を円筒型導波管と *k<sub>c</sub>* として置き換えること

で、ここまでに矩形導波管を念頭に置いて紹介した各物理量やそれらの関係はそのまま適応できる。

図8で示した内半径  $a$  の円筒導波管の TM, TE モードの電磁場の様子を数式を用いて以下に書き下す<sup>12</sup>。円筒導波管の場合、電磁場の各成分はベッセル関数と三角関数を用いて表現でき、 $r$  方向の依存性はベッセル関数に  $\phi$  方向は三角関数に従う。

### TM-mode

$$E_z = E_{mn} J_m(k_c r) \cos(m\phi) e^{i\omega t - \gamma z} \quad (2.20)$$

$$E_r = \frac{-\gamma}{k_c} E_{mn} J_m'(k_c r) \cos(m\phi) e^{i\omega t - \gamma z} \quad (2.21)$$

$$E_\phi = \frac{\gamma m}{k_c^2} E_{mn} \frac{J_m(k_c r)}{r} \sin(m\phi) e^{i\omega t - \gamma z} \quad (2.22)$$

$$H_r = \frac{-i\omega \varepsilon m}{k_c^2} E_{mn} \frac{J_m(k_c r)}{r} \sin(m\phi) e^{i\omega t - \gamma z} \quad (2.23)$$

$$H_\phi = \frac{-i\omega \varepsilon}{k_c} E_{mn} J_m'(k_c r) \cos(m\phi) e^{i\omega t - \gamma z} \quad (2.24)$$

$$k_c = \frac{\rho_{mn}}{a} \quad (2.25)$$

### TE-mode

$$H_z = H_{mn} J_m(k_c r) \cos(m\phi) e^{i\omega t - \gamma z} \quad (2.26)$$

$$E_r = \frac{i\omega \mu m}{k_c^2} H_{mn} \frac{J_m(k_c r)}{r} \sin(m\phi) e^{i\omega t - \gamma z} \quad (2.27)$$

$$E_\phi = \frac{i\omega \mu}{k_c} H_{mn} J_m'(k_c r) \cos(m\phi) e^{i\omega t - \gamma z} \quad (2.28)$$

$$H_r = \frac{-\gamma}{k_c} H_{mn} J_m'(k_c r) \cos(m\phi) e^{i\omega t - \gamma z} \quad (2.29)$$

$$H_\phi = \frac{\gamma m}{k_c^2} H_{mn} \frac{J_m(k_c r)}{r} \sin(m\phi) e^{i\omega t - \gamma z} \quad (2.30)$$

$$k_c = \frac{\rho_{mn}'}{a} \quad (2.31)$$

ここで、TM, TE モードにおいて  $\gamma$  と  $k_c$  の関係(分散関係)は同一の式(2.6)で与えられる。また、 $J_m$  は第1種ベッセル関数であり、プライムは変数での微分を意味する。 $m=0$  については  $J_0' = -J_1$  の関係がある。 $\rho_{mn}, \rho_{mn}'$  はそれぞれ  $J_m, J_m'$  の  $n$  番目の根である。これらの低次における具体的な値を表3, 4にて、 $J_0(x), J_1(x)$  の様子を図9に示す。

ベッセル関数の変数は全て  $k_c r$  で与えられ、 $k_c$  はベッセル関数の根(大きさがゼロとなる値)と円筒半径  $a$  の比となる。このため、TM, TE のいずれのモードにおいても  $E_z$  及び  $E_\phi$  は  $r=a$  つまり円筒の内半径(導体面)で必ずゼロとなる。これは「導体面での電場の接線成分がゼロ」という境界条件を常に満たすことを意味する。

<sup>12</sup>本式を導出する際、積分定数として  $\phi_0$  が三角関数内に得られるが、本質的に意味を成さないためここでは  $\phi_0 = 0$  とする。

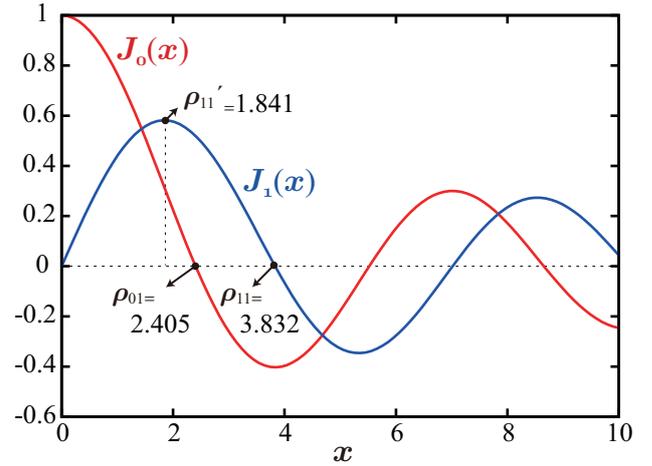


図9: ベッセル関数  $J_0, J_1$  の様子

表3: ベッセル関数  $J_m$  の根

$n \backslash m$	0	1	2
1	2.405	3.832	5.136
2	5.520	7.016	8.417
3	8.654	10.173	11.620

表4: ベッセル関数  $J_m'$  の根

$n \backslash m$	0	1	2
1	3.832	1.841	3.054
2	7.016	5.331	6.706
3	10.173	8.536	9.969

円筒導波管の伝播モードのうち最もカットオフ周波数が低いのは、ベッセル関数の根が最も小さくなる場合である。従って、表3, 4から、最もカットオフ周波数が低いのは  $TE_{11}$  モードであることがわかる。また、次にカットオフ周波数が低いモードは  $TM_{01}$ 、その次には  $TM_{11}$  と  $TE_{01}$  が  $\rho_{11} = \rho_{01}'$  となり同じ値で続く。これは先に述べた  $J_0' = -J_1$  というベッセル関数の性質によるものであり、一般的に  $TM_{1n}$  と  $TE_{0n}$  は互いに縮退する関係にある。これらの伝播モードの円筒断面での電磁場の様子を図10に示す。

図10に示した伝播モードのうち一般に加速管で電子ビームを加速するのに用いられるのが  $TM_{01}$  モードであり、 $E_z$  の最大値は円筒部中心に存在する。もし、電子速度と  $TM_{01}$  モードの位相速度が等しければ、電子ビームを加速管に通過させることで累積的な加速が可能となる。しかし、図6で示したように通常

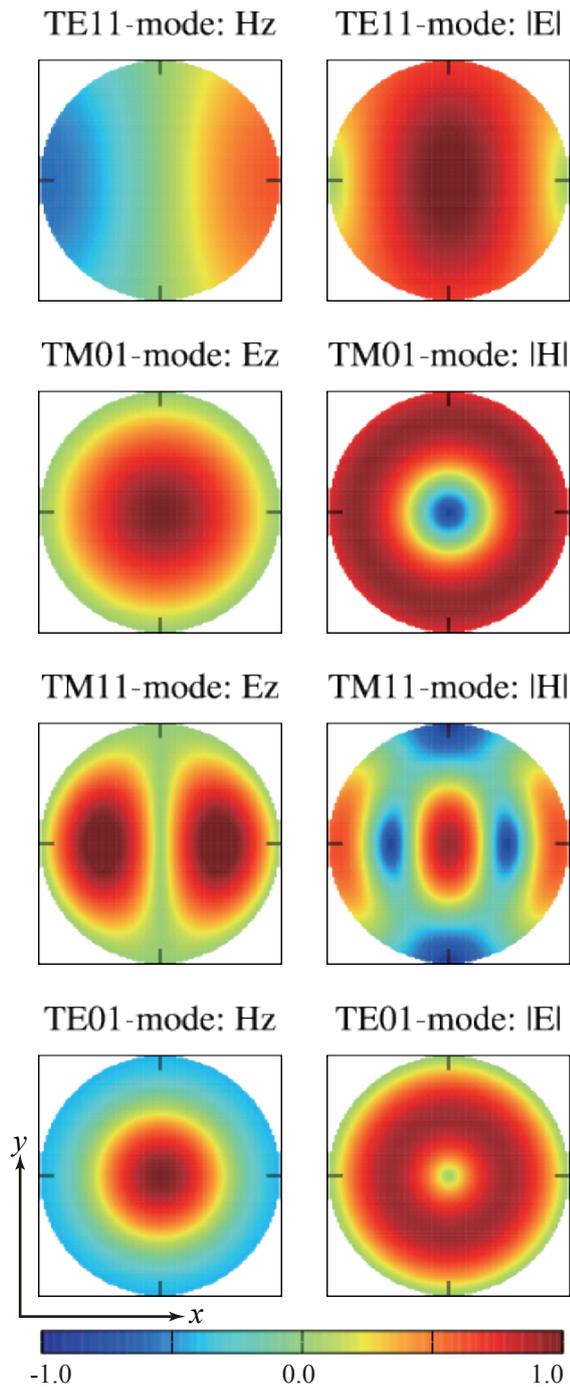


図 10: 円筒導波管の代表的な伝播モードの電磁場の様子。カットオフ周波数の低いものを順に4つ示す。

の導波管は全ての周波数において光速を上回る位相速度を持っており、電子速度をこれと等しくすることは原理的に不可能である。そこで、実際には加速管内での電磁波の位相速度を遅くするような工夫を講じる。これについては次節以降で説明する。

最後に  $TE_{01}$  モードについて少し補足しておく。図 10 に示したように、 $TE_{01}$  モードでは電磁場は共に円

筒管内部に集中しており、導体のある外周部では弱くなっている。これは他の伝播モードと比べ導体面での損失が少ないことを示唆しており、解析的にもこの結果を導くことができる [4]。実際、 $TE_{01}$  モードは周波数に対し減衰が単調減少するという特性を持ち、ミリ波など高い周波数を持つ電磁波の長距離伝送に向いている。これはより高次の  $TE_{0n}$  モードでも同様である。

### 3 進行波型加速管

前節の導波管についての議論をもとに、電子加速管、本節ではまず進行波型加速管について説明する。進行波型加速管の模式図を図 11 に示す。進行波型加速管では高周波源から導かれた高周波は減衰しながら加速管を進み、端部に達した後は加速管から取り出されダミーロードに捨てられる。

#### 3.1 ディスクロード加速管の電磁波

円筒導波管を伝播する電磁波の TM モードは管軸方向に電場成分が存在するため、これを電子ビームと時間的に同期させることで加速が可能となる。しかし、前節で説明したように導波管を伝播する電磁場の位相速度は光速より大きい場合、いかなる荷電粒子とも同期できない。この問題を解決するために最もよく用いられている手段が、中心に穴の空いた金属の仕切り (ディスク) を管軸方向に周期的に挿入する方法である。図 12 にその模式図を示す。この 2 枚のディスクに仕切られた円筒形状の区間をセル構造 (セル) と呼び、特に図 12 のような加速管はディスクロード型構造体 (disk-loaded structure) と呼ばれる。

管軸方向にディスクが存在する場合、伝播する電磁波がディスクを通過する度に入射波と反対方向に進む反射波が生じることになる。つまり、導波管では節 2.5 で説明したように平面波がジグザクに折れ曲がりながら  $+z$  方向に進むと考えることができたが、ディスクロード型加速管では  $-z$  方向に進む成分も考慮する必要が出てくる。特にディスクが複数存在しその間隔  $l$  が周期的な場合、伝播される電磁波の波面は导体側面に加え各ディスクからの反射波との周期的な重ね合わせとなる。

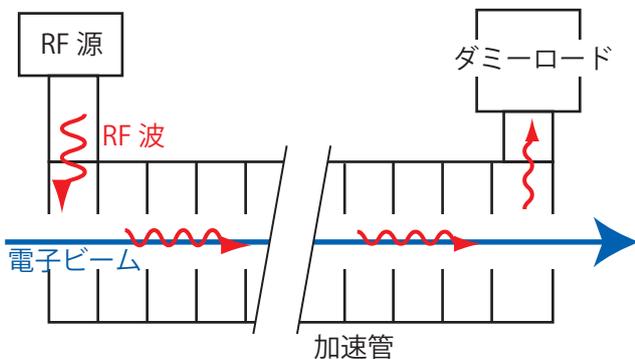


図 11: 進行波型加速管の模式図。

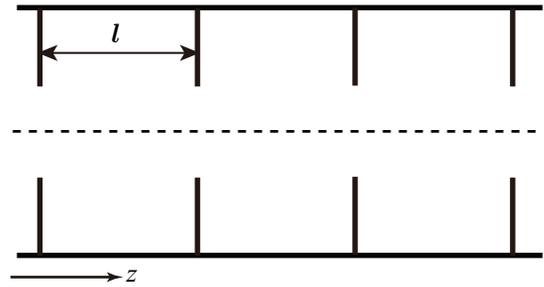


図 12: 周期的に穴のある円盤 (ディスク) を入れた加速管の模式図。z 軸方向に周期  $l$  で無限にディスクが並ぶと仮定する。

#### 3.2 基本波と空間高調波

無限にディスク構造が連なる加速管に角周波数  $\omega$  の電磁波を伝播させると、周期的境界条件を満たし同じ周波数となるが位相速度の異なる電磁波が無数に現れ、電磁場の各成分はこれらの和として表現される。例として  $TM_{mn}$  モードを考えると、その軸方向電場  $E_z$  は式 (2.20) より次のように書ける<sup>13</sup>。

$$E_z = \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_s J_m(k_{c,s} r) \cos(m\phi) e^{i(\omega t - \beta_s z)} \quad (3.1)$$

$$\beta \equiv \beta_s = \beta_0 + \frac{2\pi s}{l}, (s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (3.2)$$

$$k_{c,s}^2 = (\omega/c)^2 - \beta_s^2 \quad (3.3)$$

これはフーリエ級数の和となっており、 $a_s$  はフーリエ級数の各係数、 $\beta_0$  は第 1 ブリルアンゾーン (brillouin zone) で考えたときの伝播係数となる。式 (3.1) は空間的に  $l/s$  の周期を持った波の合成とみなせ、 $s = 0$  の波は基本波、その他の  $s = \pm 1, \pm 2, \dots$  で与えられる波は空間高調波 (spatial harmonics) と呼ばれる。空間高調波は全て基本波と同じ周波数・群速度を持つが位相速度は異なり、以下の式で与えられる。

$$v_{p,s} = \frac{\omega}{\beta_s} = \frac{\omega}{\beta_0 + 2\pi s/l} \quad (3.4)$$

また、式 (3.1, 3.2) で与えられる関係は並進対称性を持ち、Floquet の定理または固体物理学でいう Bloch の定理を満たす<sup>14</sup>。

一般に空間高調波の振幅  $a_s$  は基本波 ( $s = 0$ ) が最も大きく、次に ( $s = -1$ ), ( $s = 1$ ) と次数が大きくなるに連れて小さくなる。従って、周期的な加速構造をもったほとんどの加速管では基本波を電子と同期させるよう設計される。

<sup>13</sup>他の成分も同様に書き下すことができる。

<sup>14</sup>Floquet の定理、Bloch の定理は使用される分野が異なるだけで意味は同じである。

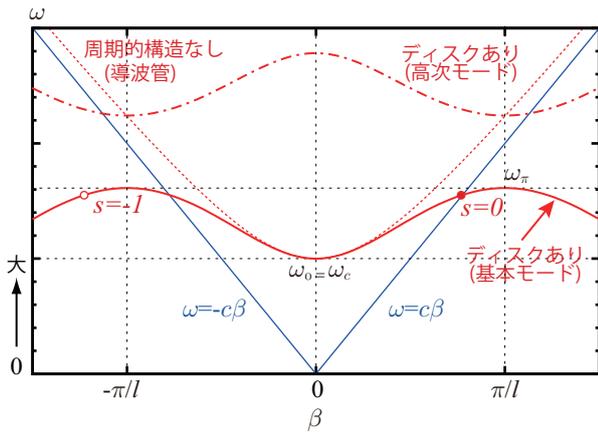


図 13: ディスクロード加速管の分散関係。赤色の実線がディスクロード加速管の基本モードの分散関係であり、赤色の点線が素の導波管のものである。また、一点鎖線の曲線は高次モードの分散関係、青色の実線が光速の電子の軌跡となる。

### 3.3 ディスクロード加速管の分散関係

式(3.2, 3.3)よりディスクロード加速管の分散関係が周期性を持つことがわかる。加速管の分散関係は等価回路を用いた解析により比較的簡単に求められる [5]。セル間の電磁波が電場により結合する場合 [6-8] の分散関係は、

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 + \kappa_C(1 - \cos \beta l)} \quad (3.5)$$

磁場により結合する場合は

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \kappa_L(1 - \cos \beta l)}} \quad (3.6)$$

となる。それぞれ  $\kappa$  はセル間の結合の強さを表す定数(結合定数)であり、下付文字の  $C, L$  はそれぞれ等価回路の静電容量  $C$  とインダクタンス  $L$  に由来している。 $\omega_0$  はゼロモードでの角周波数であり、この意味は後に説明する。また、同様に  $\pi$  モードの角周波数を  $\omega_\pi$  と表す。

結合定数  $\kappa$  は電場・磁場結合のいずれの場合においても、ディスク管の開口が小さい極限では  $\kappa = 0$  となり、 $\omega = \omega_0$  となる。この状態ではセル間の結合がなくなり、各セルは独立となる。

ディスクの開口が比較的大きい(すなわちセル間の結合が大きい)場合について、ディスクロード加速管の分散関係を図 13 に示す。基本モードとして実線(赤色)で示したものが、セル間が電場で結合する場合の分散曲線、高次モード(赤の一点鎖線)として示した

ものが、セル間が磁場で結合する場合の分散曲線である。横軸は、セル間の電磁場の位相進みに対応しており、位相進み量に応じた電磁場の伝播モードを位相モードとして区別する。式(3.5)や図 13 からわかるように、電場で結合する場合はゼロモード( $\beta = 0$ との交点)が最も周波数が低く、 $\pi$  モード( $\beta = \pi/l$ )が最も周波数が高い。磁場で結合する場合はこの傾向は逆転する。これらの傾向は電磁場分布の様子により、ディスクを隔てた両側の電磁場のエネルギーが増加するか減少するかで決まる。加速管内の電磁波が電場・磁場のどちらで結合するかは各伝播モードの電磁場分布によって異なる。

図 13 において、双曲線で示される点線(赤色)が素の円筒導波管の分散関係であり、実線(赤色)がディスクロード加速管の基本モードの分散関係である。第 1 ブリルアンゾーン( $-\pi/l \leq \beta \leq \pi/l$ )において両者を比べるとゼロモード付近( $\beta \cong 0$ )では分散関係はあまり変化しない。しかし、 $\pi$  モードに近づくにつれて、その変化は大きくなる。これは管内波長の半分  $\lambda_g/2$  が周期間隔  $l$  に近くなり、一つ前のディスクと次のディスクでの反射波が同位相に近い状態で重なり合うようになるためである。この場合、多くのディスクからの反射波が互いに強めあい、伝播する波の群速度が遅くなる。

### 3.4 パスバンドとストップバンド

図 13 において電磁波が基本モードで伝播できる周波数は  $\omega_0$  から  $\omega_\pi$  までの区間であり、これをパスバンド(pass band)という。さらに周波数を上げていくと、一点鎖線で示した次の伝播モードの  $\omega_\pi$  以上になるまで電磁波は伝播できない、この区間をストップバンド(stop band)という。このような分散関係が生じるのは管軸方向( $z$  軸)に設けられた周期性によるもので、固体物理学において結晶が超格子構造を持つとエネルギー分散関係に不連続性が生じる現象と類似している。

### 3.5 $\pi$ モードとその他のモード

管内波長の半分  $\lambda_g/2$  がセル間隔  $l$  と一致( $\beta = \pi/l$ )したとき<sup>15</sup>、隣り合うセル間の電磁場の位相差は  $\pi$  となる(図 14 参照)ため、反射波どうしは  $2\pi$  の位相差を持つことになる。つまり、全ての反射波は同じ位相

<sup>15</sup> 波長に対し 2 枚のディスクがちょうど管内波長の半分の位置関係となる時。

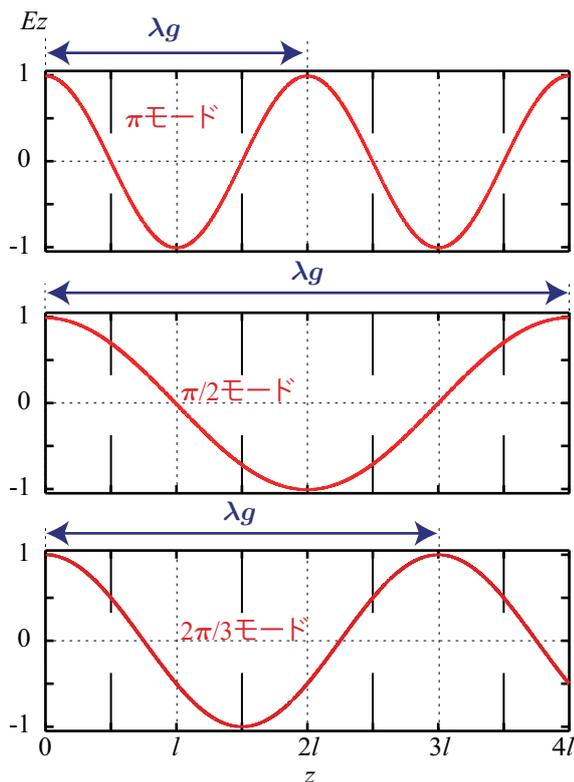


図 14: 各位相モードにおける  $E_z$  の様子。

で完全に重なりあう<sup>16</sup>。従って、加速管が無限に長く電磁波の壁損失がなければ、反射波は定常状態では入射波と同じ振幅になる。これは、入射波と反射波で**定在波**が生じることを意味し、定在波では波は進行しないため、群速度はゼロとなる。この位相モードは  $\pi$  モードと呼ばれ、定在波型加速管でよく用いられる。

また  $\pi/2$  モードについても同様に、管内波長の 4 分の 1 ( $\lambda_g/4$ ) がセル間隔  $l$  と一致するとき<sup>17</sup>(図 14 参照)、セル間の電磁場の位相差は  $\pi/2$  となる。この場合、隣り合うディスクからの反射波の位相差は  $\pi$  となり、互いに打ち消し合うことになる。つまり、反射波は存在しないものとみなせる。これが加速管が進行波型加速管として成立する状態である。ゼロと  $\pi$  モード以外の全ての位相モードにおいても同様の議論は成立し、反射波は打ち消され、進行波型加速管として成立する。ただし、位相モードに応じて反射波が完全に打ち消し合うために必要なディスク数がより多く必要となる。また、群速度は  $\pi/2$  モードが最も大きく、ゼロや  $\pi$  モードに近づくにつれ小さくなる (図 13 参照)。

### 3.6 電子との同期

図 13 で青線で示したのが  $\omega = \pm c\beta$  となるブリルアンゾーン中での光速の電子ビームの軌跡であり、この直線と分散曲線とが交わる点 (図中の赤丸) の位相モードが電子と同期できる。つまり、上記位相モード (加速モードとも呼ばれる) が電子の累積的な加速に寄与する。さらに、電子の軌跡を辿っていくと高次伝播モードの分散曲線とも交わることがわかる。これは高次モードが存在する場合、交点で与えられる高次伝播・位相モードの影響も電子は累積的に受けることを意味し、加速管に高次モードが存在する場合は注意が必要となる。

次に、目的とする伝播・位相モードを実現する周波数の電磁波のみを加速管に伝播させることを考える。この場合、前述した空間高調波も同時に伝播される。図 13 において赤白丸で表した点が  $s = -1$  の空間高調波を示し、 $s$  の値の異なる同様な点は図示した範囲外にも無数に存在する。前述したように、空間高調波は加速モードと同じ群速度 (曲線の勾配) をもつが位相速度が異なるため、電子と累積的な相互作用をすることはできず、十分な加速管距離を走るうちに空間高調波から電子が得る加速ゲインはゼロとなる。

図 15 にディスクロード型加速管を進行する電磁波とこれに同期して進む電子ビームの模式図を一定時間毎のスナップショットとして示す。時間発展に伴い、電磁波と電子ビームが加速管を進むが、電子ビームと電磁波の相対位相は常に保たれる。このため電子ビームは加速管を通過している間、累積的に加速されることになる。また、図 15 では空間高調波を示していないが、これらは加速管内に存在し、これらと基本波の和が実際の電場となる。その意味では、図 15 は単なる模式図で有り、正確ではない。

ところで、式 (3.3) において、基本波 ( $s = 0$ ) の位相速度が光速及び電子速度と一致する場合、

$$k_{c,0}^2 = (\omega/c)^2 - \beta_0^2 = 0$$

となる。従って、式 (3.1) において  $m = 0$  の場合、 $J_0(k_{c,0}r) = J_0(0) = 1$  という関係が成り立つため、 $E_z$  は  $r$  に依存しないことになる。この場合、電子ビームが径方向にある大きさを持っていても、受ける加速電場は同じとなる。

<sup>16</sup>固体物理学に出てくる Bragg 条件を満たす。

<sup>17</sup>1 波長に対し 4 枚のディスクを等間隔に設けるときの

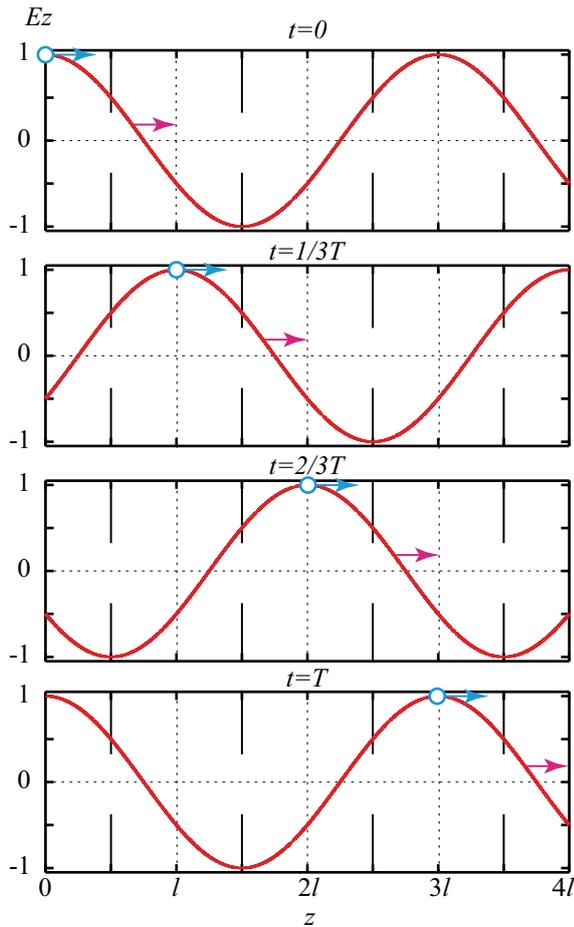


図 15: 加速管を進む電磁波 (赤線) と電子ビーム (青丸) のスナップショット。伝播する電磁波は位相モード  $2\pi/3$  の基本波のみを图示した。

### 3.7 群速度

群速度は加速管の設計において周波数の次に重要なパラメータだといえる。管内に電磁波が充填されるのに必要な時間、フィリングタイムは加速管の長さ  $L$  として

$$\tau_f = L/v_g \quad (3.7)$$

と与えられる。フィリングタイムが長いと電磁波が加速管を満たすのに時間がかかるため、入射波には長いパルス幅が必要とされる。

さらに、加速管内の高周波電力  $P$  は単位長さあたりの蓄積エネルギー  $w$  と以下の関係にある。

$$P = w \cdot v_g \quad (3.8)$$

従って、ある高周波電力を仮定したとき、群速度が小さいと単位長さあたりの蓄積エネルギーは大きくなり、空洞に励振される加速電場も大きくなる。これは

初期の加速効率は大きいですが、高電界を励振するための壁消費電力により、高周波電力が急速に失われることを意味する。一方、群速度が大きい場合、蓄積エネルギーと加速電場は小さくなり、加速効率が相対的に低くなる。群速度はこのような事情を踏まえバランス良く決定されるべきである。

### 3.8 シャントインピーダンス

加速管のもう一つのパラメータ、ディスク間隔 (位相モード) は単位長さあたりのシャントインピーダンス (shunt impedance)  $r_{sh}$  が最大となるよう選ばれるのが望ましい。この条件を求めるために、始めに加速管が 1 セルで構成される場合、つまりピルボックス (pillbox) 型の RF 空洞<sup>18</sup>についてネットのシャントインピーダンス  $R_{sh}$  を考える。そして次に多セルの加速管について話を発展させる。 $r_{sh}$  と  $R_{sh}$  の違いは、前者が単位長さあたりの量、後者が空洞 (加速管) 全体としての量として定義される点である。

#### 3.8.1 ピルボックス型空洞

本テキストではシャントインピーダンス  $R_{sh}$  は、P.B. Wilson [9] の定義を用いる<sup>19</sup>。

$$R_{sh} = \frac{V_c^2}{P_c} = \frac{(E_z T l)^2}{P_c} \quad (3.9)$$

$P_c$  と  $l$  はそれぞれ壁消費電力とセルの長さであり、 $V_c$  は正弦波で時間変化する電場内を電子ビームがセル 1 つを通り抜ける間に受ける加速電圧である。 $T$  は  $V_c$  と  $E_z$  を結びつける係数であり、トランジットタイムファクター (transit time factor) と呼ばれ、常に 1 以下となる。

$P_c$  はセル内の蓄積エネルギー  $U$  と負荷の無い場合の Q 値  $Q_0$  に対し、以下の関係を持つ。

$$Q_0 = \frac{\omega U}{P_c} \quad (3.10)$$

従って、式 (3.9) より、 $T^2$  と  $Q_0$  が共に大きければ  $R_{sh}$  も大きくなると予想できる。

ここで  $TM_{0m0}$  モードを仮定し、 $T$  について変数を明示して定義すると次のようになる。

$$T \equiv \frac{\left| \int_{-l/2}^{l/2} E_z(r, z) e^{i\omega z/v_e} dz \right|}{\int_{-l/2}^{l/2} E_z(0, z) dz} \quad (3.11)$$

<sup>18</sup>ただし、加速管との比較が目的であるため  $z$  軸方向の指数 ( $TM_{mnp}$  としたときの  $p$ ) を 0 とする。

<sup>19</sup> $R = V_c^2/P_c$  と定義することもあるため注意が必要。

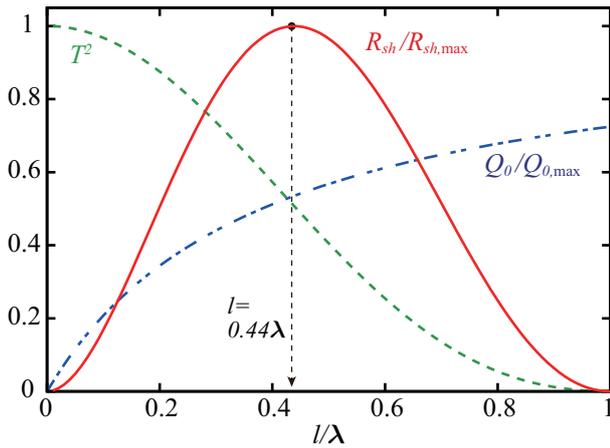


図 16: ピルボックス型 RF 空洞のシャントインピーダンスのセル長依存性。

また、電子ビームが管軸上 ( $r = 0$ ) を通過する場合、 $T$  は以下のように書き下すことができる。

$$\begin{aligned} T &= \frac{\sin\{\omega l/(2v_e)\}}{\omega l/(2v_e)} \\ &= \frac{\sin\{\pi l/(\beta_e \lambda)\}}{\pi l/(\beta_e \lambda)} \end{aligned} \quad (3.12)$$

ただし、 $\beta_e = v_e/c$  である。

電子速度を光速とみなし、変数を  $x = \pi l/\lambda$  とすると最適な  $R_{sh}$  を与えるセル長は電磁波の周波数と独立に決めることができる [8]。例として  $\text{TM}_{010}$  モードの  $R_{sh}(x)$  を以下に示す。

$$R_{sh}(x) = A_R \frac{4x^2}{\rho_{01}(\rho_{01} + 2x)} T(x)^2 \quad (3.13)$$

$A_R$  は  $E_z$  や  $Q_0$  の導出時に表れる定数をまとめたものであり、 $x$  には依存しない。

式 (3.13) を用いて  $R_{sh}/R_{sh,max}$  をプロットすると図 16 のようになる。ただし、セルの長さと言長の関係をわかりやすくするため、横軸は  $\pi$  に値を代入し  $l/\lambda$  とした。  $R_{sh}$  が最大を与えるのは  $l = 0.44\lambda$  のときであり、ピルボックス型 RF 空洞の  $\text{TM}_{010}$  モードでは高周波の半波長よりわずかに短いセル長を選ぶことで最大の加速効率を得られることがわかる。  $T^2$  と  $Q_0$  の  $l/\lambda$  依存性も興味深いため、参考として図 16 に示した。

### 3.8.2 進行波型加速管

進行波型加速管についての議論に戻る。進行波型加速管のように非常に多くのセルが存在する加速管

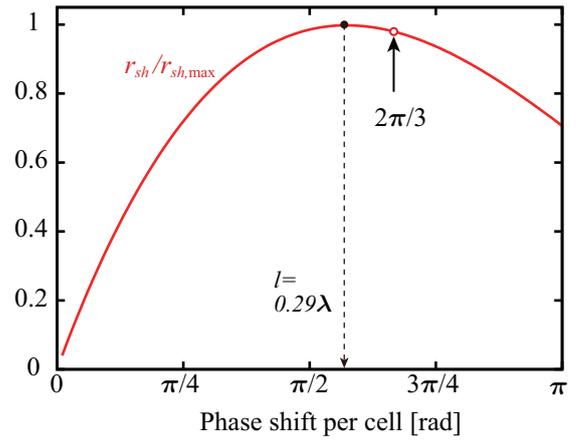


図 17: 進行波型加速管の単位距離あたりのシャントインピーダンス。横軸はセルあたりの位相進みであり、位相モードに対応する。

では、 $R_{sh}$  の代わりに  $r_{sh}$  が用いられ、その関係は  $\text{TM}_{01}$  モードの場合、以下で与えられる。

$$r_{sh} = \frac{R_{sh}}{l} \quad (3.14)$$

従って、 $\text{TM}_{01}$  モードの  $r_{sh}(x)$  は次のようになる。

$$r_{sh}(x) = A_r \frac{4x}{\rho_{01}(\rho_{01} + 2x)} T(x)^2 \quad (3.15)$$

また、式 (3.10) を進行波型加速管の場合に書き直すと

$$Q_0 = -\frac{\omega w}{dP/dz} \quad (3.16)$$

と書ける。負号は  $dP/dz < 0$  となるためである。

式 (3.15) についてセルあたりの位相進みを横軸として、関係をプロットしたのが図 17 である。進行波型加速管の場合、 $r_{sh}$  はセル長を  $l = 0.29\lambda$  とすることで、最大となることがわかる。進行波型加速管では図中に赤丸で示した波長の約 3 分の 1 をセル長とする  $2\pi/3$  モードがよく用いられる。これは上述したことが理由である。また、 $\pi$  モードと  $l = 0.29\lambda$  のモードもしくは  $2\pi/3$  モードを比べると、 $l = 0.29\lambda$  では 1.40 倍、 $2\pi/3$  モードでは 1.38 倍の  $r_{sh}$  が得られる。節 3.5 で論じたように、 $\pi$  モードでは加速管を伝播する電磁波は定在波となり、後述するように定在波型加速管では  $\pi$  モードにおいて最も高い  $r_{sh}$  が得られる。従って、高い加速勾配を得るには進行波型加速管の方が定在波型加速管より有利となる。高い加速勾配を得ようとするリニアック (線型加速器) における主加速管として定在波型ではなく進行波型が採用されることが多いのはこのためである。

### 3.9 加速型式

前節までで進行波型加速管について一般的な性質を説明したが、加速管伝播中の高周波電力の減衰については無視してきた。しかし、実際には加速管に入射された電磁波は距離をすすむにつれて電力を失う。減衰定数 (total attenuation parameter)  $\tau_0$  は減衰係数  $\alpha(z)$  を用いて次のように書ける。

$$\tau_0 = \int_0^L \alpha(z) dz \quad (3.17)$$

$L$  は実効的な加速管の長さである。また、ここでも管軸方向を  $z$  とする。

#### 3.9.1 定インピーダンス型

加速管のセル形状が全長にわたり等しい場合、単位長さあたりのシャントインピーダンスは加速管全長にわたり一定となる。この場合、高周波電力は加速管を進むにつれ一定の比率で減衰するため、各セルでの高周波電力は指数関数的な減衰傾向を持つ。このような加速型式は定インピーダンス (constant impedance : CI) 型と呼ばれる。まず、CI 型の加速管について特徴を説明する。

CI 型ではセル形状が加速管全長において一定であるため、 $\alpha(z)$  も  $z$  に対して一定となり、減衰定数は

$$\tau_0 = \alpha L \quad (3.18)$$

となる。また、減衰係数は

$$\alpha = \frac{\omega}{2v_g Q} \quad (3.19)$$

で与えられ、 $v_g$  及び  $Q$  が大きい程小さくなる。CI 型での高周波電力  $P_{CI}(z)$  及び電場の大きさ  $E_{CI}(z)$  は式 (3.8, 3.16, 3.19) と関係式  $E(z) \propto \sqrt{P(z)}$  から求められる。

$$P_{CI}(z) = P_0 e^{-2\tau_0 z/L} \quad (3.20)$$

$$E_{CI}(z) = E_0 e^{-\tau_0 z/L} \quad (3.21)$$

ここで、単位長さあたりのシャントインピーダンス  $r_{sh}$  と  $z=0$  での高周波電力  $P_0$  に対して、 $E_0$  は以下のような関係がある。

$$E_0^2 = -r_{sh} \left. \frac{dP}{dz} \right|_{z=0} = \frac{2r_{sh} P_0 \tau_0}{L} \quad (3.22)$$

従って、加速管全体を通しての加速電圧は、

$$\begin{aligned} V_{CI} &= \int_0^L E_0 e^{-\tau_0 z/L} dz \\ &= \sqrt{r_{sh} P_0 L} \sqrt{\frac{2}{\tau_0}} (1 - e^{-\tau_0}) \end{aligned} \quad (3.23)$$

と求まる。

CI 型の加速電圧は  $\tau_0$  についてピーク値を持った関数系として表される。最大値は  $\tau_0 = (e^{\tau_0} - 1)/2$  を満たすときであり、 $\tau_0 \simeq 1.26$  の場合である。

#### 3.9.2 定加速勾配型

CI 型に対し、加速管内での高周波電力減衰に合わせてセル形状を変更し、加速管全長に渡って加速電圧が等しくなるように設計される加速管を定加速勾配 (constant gradient : CG) 型と呼ぶ。CG 型の場合、加速管長さに応じてディスク開口を搾り電力の減衰傾向と群速度の減少傾向を一致させるよう設計する。この加速型式についても同様に加速電圧を求める。ただし、群速度  $v_g$  と減衰係数  $\alpha$  はディスク開口の変化に敏感であるが、 $Q$  値と  $r_{sh}$  はあまり敏感ではない。そこで、 $Q$  値及び  $r_{sh}$  は CG 型の加速管においても一定であると仮定する。

CG 型では加速管全長に渡って加速電圧が等しいため、単位長さあたりの高周波電力減衰量は一定となる<sup>20</sup>。従って、 $z=L$  での高周波電力を  $P_L$  とすると以下の関係が成立する。

$$\frac{dP}{dz} = P_0 + \frac{P_L - P_0}{L} z \quad (3.24)$$

また、 $P_L$  は式 (3.17) で与えられる減衰定数を用いて、 $P_L = P_0 e^{-2\tau_0}$  と求められるため、管内の高周波電力の  $P_{CG}(z)$  は、

$$P_{CG}(z) = P_0 \left\{ 1 - \frac{z}{L} (1 - e^{-2\tau_0}) \right\} \quad (3.25)$$

と書ける。つまり、CG 型では高周波電力は  $z$  に対し指数関数ではなく線型の関係で減衰する。

CG 型の場合、単位長さあたりのシャントインピーダンス  $r_{sh}$  と高周波電力  $P_0$  に対する  $E_0$  の関係は以下のようなになる。

$$E_{CG}^2 = -r_{sh} \frac{dP}{dz} = \frac{r_{sh} P_0}{L} (1 - e^{-2\tau_0}) \quad (3.26)$$

従って、加速管全体を通しての加速電圧は、

$$\begin{aligned} V_{CG} &= \int_0^L E_{CG} dz \\ &= \sqrt{r_{sh} P_0 L (1 - e^{-2\tau_0})} \end{aligned} \quad (3.27)$$

<sup>20</sup>一定となるように減衰係数  $\alpha$  を調整する

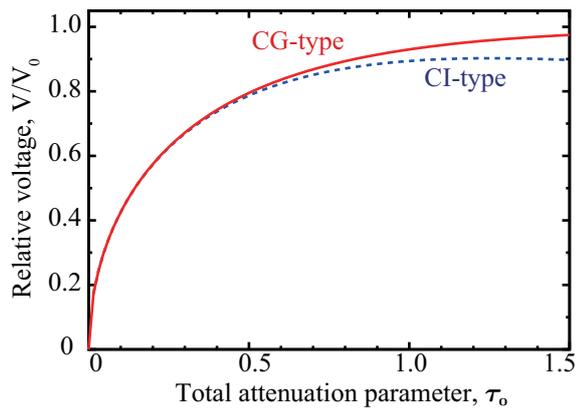


図 18: 定インピーダンス (CI) 型と定加速勾配 (CG) 型進行波型加速管の加速電圧。

と求まる。CG 型の場合、加速電圧は  $\tau_0$  について単調増加の傾向をとる。

### 3.9.3 加速型式の比較

CI 型及び CG 型について得られた加速電圧の式 (3.23, 3.27) について  $\tau_0$  依存性を図 18 に示す。ただし、相対的な傾向を知るのが目的であるため、共通の定数  $\sqrt{r_{sh} P_0 L} \equiv V_0$  を用いて規格化してある。両者の加速電圧は  $\tau_0 < 1$  ではほとんど差がないが、 $\tau_0 > 1$  より大きくなるにつれて CG 型の方が加速効率がよくなることわかる。

CG 型の場合、加速電圧は  $\tau_0$  の増加に対して単調増加するため、 $\tau_0$  を大きくする程効率が良い。この無限大の極限は加速管に全てのエネルギーを移動させることを意味する。また、 $\tau_0$  を大きくすることは  $v_g$  を小さくすることを意味し、これは式 (3.7) よりフィリングタイムが大きくなることにつながる。従って、実際の加速管で  $\tau_0$  を大きくすることは現実的ではない。この他、本テキストは詳しく述べないが、ビーム負荷、各種誤差に対する耐性を考慮すると  $\tau_0$  が小さい ( $v_g$  が大きい) 方が望ましい。

CG 型の加速管は構造が複雑になるため製作上のコストが大きくなる問題はあるが、加速管としては CI 型よりも優れていると考えられる。CI 型では加速管入口で最も加速電圧が大きく出口側では低い。このため、CI 型で CG 型と同程度の加速効率を得ようとすると、入口側の電圧は必ず CI 型の方が大きくなってしまう<sup>21</sup>。加速管内の加速電圧は高電界が引き起こす放電で制限されることが多いため、これは CI 型の加

<sup>21</sup> CG 型の電圧が CI 型の平均の電圧と等しくなる状況を考えている。

速管にとって大きなデメリットになる。また、CI 型では加速管内での高周波損失が一律でないため、加速管自体の発熱も一律ではなくなる。このため冷却についても注意が必要となる。

実際の加速管を調べてみると、米国 SLAC の 3 m 加速管 (周波数 2856 MHz) [10] では  $\tau_0 = 0.57$ 、理研 SACL A の 1.8 m 加速管 (周波数 5712 MHz) [11] では  $\tau_0 = 0.53$  が選ばれている。これらはすべて (準<sup>22</sup>)CG 型の加速型式である。

<sup>22</sup> 「準」というのは、コスト削減など製作上の都合で全てのセル形状を変化させるのではなく、セル形状の変化を一定数のセル毎にするなど構造を簡略化していることを意味する。

## 4 定在波型加速管

定在波管の模式図を図 19 に示す。定在波管では高周波源から導かれた入射波は加速管内を何度も往復し、理想的な場合は全ての高周波電力が加速管内で消費される。ただし、実際の運転では運転条件に応じて少なからず空洞からの反射波が存在するため、高周波機器の保護を目的とした装置 (ダミーロード等) は必要となる。

加速管の中では電磁波は両端の壁で反射され進行方向の異なる波どうしが重ね合わさった (干渉した) 状態になり、定在波をつくっている。定在波とは波が重なり合っ、波形が進行せずその場に留まって振動しているようにみえる波のことである。進行波型加速管では基本的に一方向に進む波のみを考える点が、定在波型加速管と異なっている。

本節ではまず定在波型加速管の最も単純な例として、ピルボックス形状をもつ単セルの定在波型加速管 (ピルボックス型 RF 空洞) について述べる。一般的な単セルの加速管ではセルの長さ (管軸方向距離) が有限でありセル内に構造的な周期性は無いため、前節までの進行波型加速管の議論で適用した  $xy$  軸に対する境界条件に加え  $z$  軸方向も同様に考慮する必要がある<sup>23</sup>。この場合、3 次元立体構造に対し 3 組の束縛条件が適用されるため分散曲線は曲線ではなく点となり、モード縮退を考えなければ<sup>24</sup>電磁場の各固有モード<sup>25</sup>に対し 1 つの共振周波数が割り当てられる<sup>26</sup>。

本節ではピルボックス型 RF 空洞に続き、セル数を

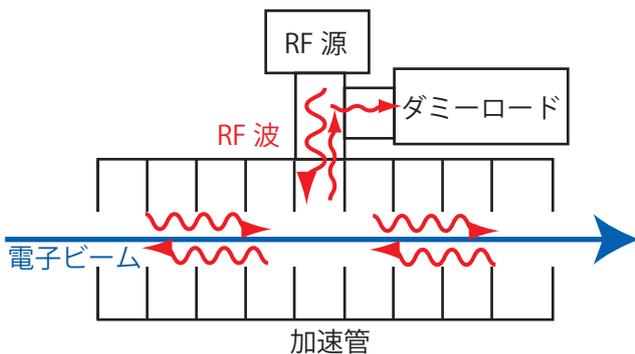


図 19: 定在波型加速管の模式図。

<sup>23</sup>境界条件は 3 軸に対して電氣的短絡 (導体面での電場の接線成分がゼロ) である。

<sup>24</sup>モード縮退がある場合は、複数の固有モードが同じ共振周波数をもつことになる。

<sup>25</sup>定在波型加速管の場合、伝播モードの代わりに固有モードという単語を用いる。

<sup>26</sup>各固有モードに対する共振周波数は各 Q 値に応じて有限の周波数拡がりを持つ。

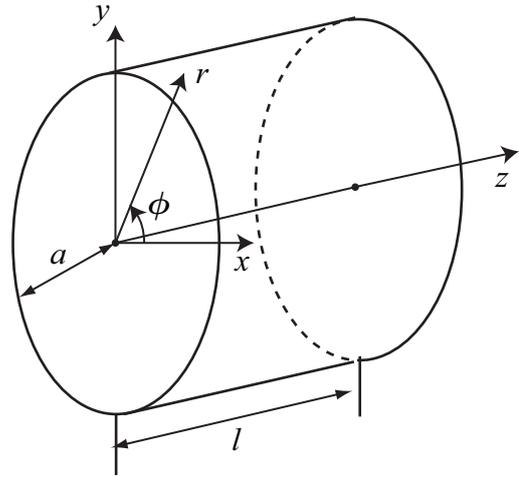


図 20: ピルボックス型 RF 空洞の模式図。電磁波は  $z$  軸においても閉じ込められる。円形部の内半径を  $a$ 、セル長を  $l$  とする。

増やしたディスクロード型の定在波型加速管を例に多セルの場合について取り扱う。この場合、管軸方向にはセル数に応じた自由度が許容されることになり、再度、進行波型加速管の場合とほぼ同様の位相モード (分散曲線) を考慮する必要が生じる。

### 4.1 単セル定在波型空洞 (ピルボックス)

#### 4.1.1 共振モードの電磁波

ピルボックス型 RF 空洞 (図 20 参照; 内半径を  $a$ 、セル長を  $l$ ) について TM, TE モードの電磁場の各成分の様子を数式で示す<sup>27</sup>。

#### TM-mode

$$E_z = E_{mnp} J_m(k_c r) \cos(m\phi) \cos(k_z z) \quad (4.1)$$

$$E_r = -\frac{k_z}{k_c} E_{mnp} J_m'(k_c r) \cos(m\phi) \sin(k_z z) \quad (4.2)$$

$$E_\phi = \frac{mk_z}{k_c^2} E_{mnp} \frac{J_m(k_c r)}{r} \sin(m\phi) \sin(k_z z) \quad (4.3)$$

$$H_r = -\frac{i\omega\epsilon m}{k_c^2} E_{mnp} \frac{J_m(k_c r)}{r} \sin(m\phi) \cos(k_z z) \quad (4.4)$$

$$H_\phi = -\frac{i\omega\epsilon}{k_c} E_{mnp} J_m'(k_c r) \cos(m\phi) \cos(k_z z) \quad (4.5)$$

<sup>27</sup>TE-mode の指数  $p$  が 1 から始まるのは、 $p=0$  の場合、 $H_z$  を除く全ての成分がゼロとなり、動電磁場とはみなせなくなるからである。

$$k_c = \frac{\rho_{mn}}{a}, k_z = \frac{p\pi}{l} \quad (4.6)$$

$$\begin{cases} m = 0, 1, 2, \dots \\ n = 1, 2, 3, \dots \\ p = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

### TE-mode

$$H_z = H_{mnp} J_m(k_c r) \cos(m\phi) \sin(k_z z) \quad (4.7)$$

$$E_r = \frac{i\omega\mu m}{k_c^2} H_{mnp} \frac{J_m(k_c r)}{r} \sin(m\phi) \sin(k_z z) \quad (4.8)$$

$$E_\phi = \frac{i\omega\mu}{k_c} H_{mnp} J_m'(k_c r) \cos(m\phi) \sin(k_z z) \quad (4.9)$$

$$H_r = \frac{k_z}{k_c} H_{mnp} J_m'(k_c r) \cos(m\phi) \cos(k_z z) \quad (4.10)$$

$$H_\phi = -\frac{mk_z}{k_c^2} H_{mnp} \frac{J_m(k_c r)}{r} \sin(m\phi) \cos(k_z z) \quad (4.11)$$

$$k_c = \frac{\rho_{mn}'}{a}, k_z = \frac{p\pi}{l} \quad (4.12)$$

$$\begin{cases} m = 0, 1, 2, \dots \\ n = 1, 2, 3, \dots \\ p = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

ただし、全ての成分に共振周波数に従い時間的に振動する項  $e^{i\omega_{res}t}$  がかかる。上式で与えたピルボックス型 RF 空洞と円形導波管での電磁場の式 (2.20 から 2.24), 式 (2.26 から 2.30) 及び、進行波型加速管 (ディスクロード型加速管) の式 (3.1) と比較して、最も特徴的なのは管軸 ( $z$  軸) 方向の依存性が三角関数で与えられることであり、電磁波は  $z$  方向に伝播せず一定の空間内で振動する。

#### 4.1.2 ピルボックス型 RF 空洞の分散関係

TM, TE モードにおける共振角周波数  $\omega_{res}$  は前節で示した  $k_c, k_z$  を用いると共通に以下のように与えられる。

$$\omega_{res} = c\sqrt{k_c^2 + k_z^2} \quad (4.13)$$

このように共振角周波数は、各  $mnp$  の組み合わせにつき 1 つの値をとるようになる。また、セル数が 1 であるため、進行波型加速管の場合のような位相モードや空間高調波という概念はなくなり、代わりに  $k_z$  が管軸方向に電磁場の節が幾つあるかに対応する量となる。

ここで、 $TM_{01p}$  モードについて  $k_z$  を変数としてプロットした分散関係を図 21 に赤丸で示す。ピルボッ

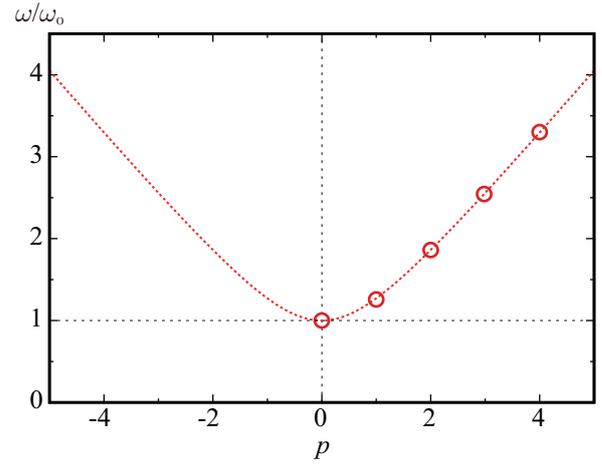


図 21: ピルボックス型 RF 空洞の分散関係。

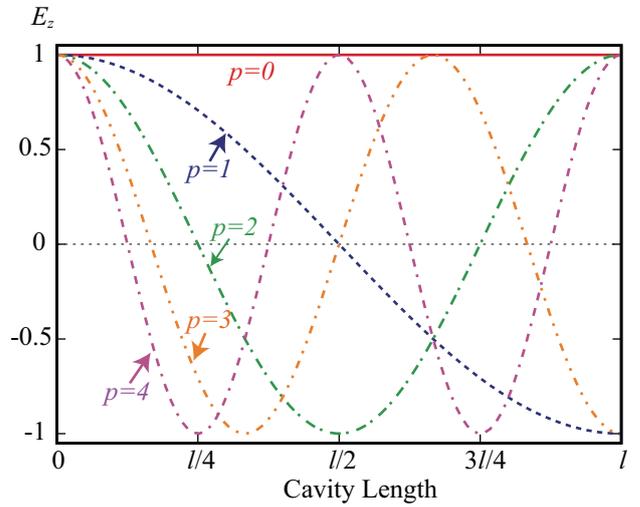


図 22: ピルボックス型 RF 空洞  $TM_{01p}$  モードの  $E_z$  ( $p = 0, 1, 2, 3, 4$ ) の様子。

クス型 RF 空洞では  $k_z$  は指数  $p$  によって決まり、分散関係は離散的な点として表現される。また、それらつなぐ近似曲線は導波管の場合と同様な双曲線を描く。

参考として、図 21 に示した、 $p = 0, 1, 2, 3, 4$  について  $TM_{01p}$  モードの  $E_z$  の様子を図 22 に示す。 $p = 0$  が加速管のゼロモード、 $p = 1, 2, 3, 4$  が加速管の  $p\pi$  モードに対応していることがわかる。

#### 4.1.3 加速モードと高次モード

単セル RF 空洞は数 GeV 程度の比較的エネルギーの低いリング型電子加速器でよく用いられる。これは必要とされる加速電圧がそれほど高くないことやビーム不安定性の問題を考慮すると、単セル RF 空洞の方が対策を講じるのが有利であるからである。多くのリ

表 5: ピルボックス型 RF 空洞の最適セル長時の  $TM_{010}$  とその高次モードの種類と周波数比

モード名称	$f/f_{(TM_{010})}$
TM010	1.00
TE111	1.37
TM011	1.51
TM110	1.59
TE211	1.70
TM111	1.96
TE011	1.96
TM210	2.14
TM020	2.30
TE112	2.40
TM012	2.48
TE121	2.49

リング型電子加速器では同じ RF 空洞を大電流の電子ビームが連続 (CW) 的に通過するため、電子ビームのウェイク場 (wake field) によって加速モード以外の寄生モードが空洞内に励振され<sup>28</sup>ビーム自身に悪影響を与えることが問題となる。電子ビームの加速管内の電磁波との相互作用やビーム不安定性については文献 [12–14] など詳しく説明されている。従って、リング型電子加速器の加速管では寄生モードを効果的に減衰させる工夫が重要となる。このような観点からは構造的にシンプルな単セル RF 空洞を用いた方が有利となる。実際に工夫が施された RF 空洞は減衰空洞 (damped-cavity) と呼ばれ、数多くの方式が報告されている [1, 15–18]。

電子ビームの加速には電子ビームの進行方向と等しい電場成分をもつ電磁場モードが必要であり、できるだけ低次のモードを加速モードに選ぶ方が寄生モードを避ける観点から有利である。そのため、加速モードには最も低次の  $TM_{010}$  モードが用いられることが多い。RF 加速空洞の設計ではビーム負荷を考えなければ<sup>29</sup>、一般にシャントインピーダンスを高くするよう最適化する。ピルボックス型 RF 空洞の  $TM_{010}$  の場合、節 3.8.1 で説明したようにセル長を共振周波数の波長の 0.44 倍に選ぶとシャントインピーダンスは最大となる。

<sup>28</sup> 基本的に加速管は目的とする電磁場モードのみを励起するため、目的の周波数の高周波のみが供給される。しかし、ウェイク場はビーム形状に応じた周波数成分を含み、これが空洞の高次モードを励振する。

<sup>29</sup> ビーム負荷による空洞同調角 (デチューニング角) 低減については  $R/Q$  が小さい方が有利となる。周長の長い円形加速器ではビーム不安定性を抑制するため同調角を抑える必要がある。

表 5 にピルボックス型 RF 空洞においてセル長を共振波長の 0.44 倍に選んだ場合における、加速モード ( $TM_{010}$ ) と他の固有モードとの周波数比を幾つか示す。実際に RF 空洞を設計するときはビームパイプをつけたり、さらに Q 値やシャントインピーダンスを改善するような工夫をするため、ピルボックス型 RF 空洞をそのまま加速空洞の基本構造とすることは少ないが、ピルボックス型 RF 空洞の高次モードについて知っておくことは有益だと思われる。表 5 に示した固有モードのうち、ビーム不安定性の観点から特に注意が必要なものは指数  $m$  が 0 (monopole mode) または 1 (dipole mode) をとるものである。これら注意が必要なモードについては、図 23 に電磁場の様子を示す。空洞を設計する際は、各固有モードの電磁場の様子を把握し、加速モード以外の寄生モードを十分に減衰させるような構造 (工夫) を実装することが重要になる。

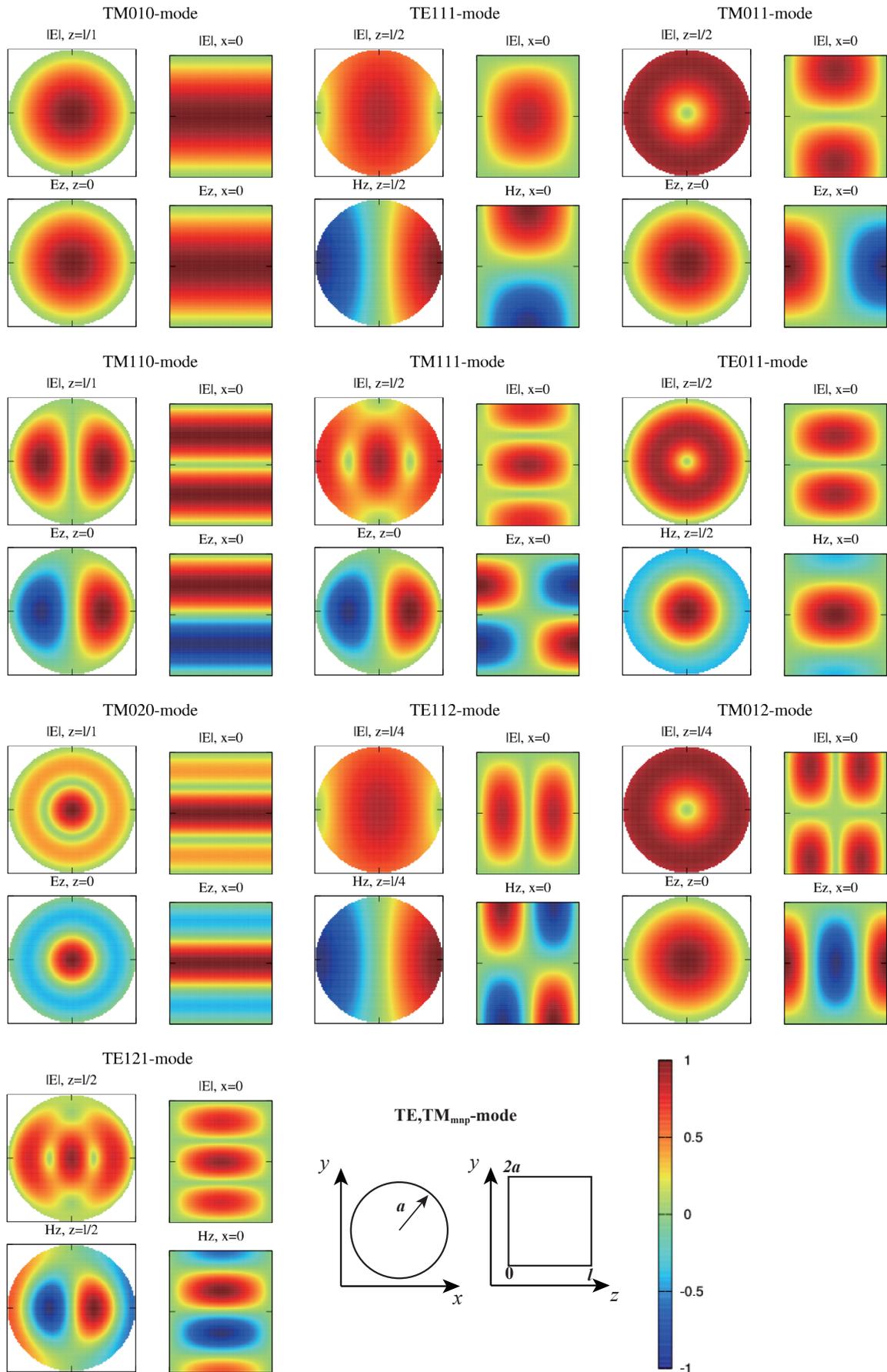


図 23: ピルボックス型空洞の代表的な共振モードの電磁波の様子。

## 4.2 多セル空洞

より高い加速電圧を短い区間で得るには、空洞のセル数を増やすことを検討する価値がある。現実的なことを忘れて極端な話をすると、1台の空洞で2倍の加速電圧を得るためには、 $P_c = V_c^2/R_{sh}$  の関係から4倍のRF電力が必要とされるが、加速器に導入するRF空洞を1台増やせば高周波電力は2倍ですむ。さらに、2台の空洞を連結すれば、RF空洞の間のビームパイプなど空間的なスペースを節約できるため、実質的な加速効率は向上する。このように単セル空洞複数台によって構成されるRF装置を多セル空洞のシステムに変更することは、各種リソースの限られた中で可能な限り高い加速性能を得る上で有効である。

多セルの定在波型加速管は単セルのRF空洞が高周波(電気)的につながった構造だと考えられる。定在波型加速管の進行波型加速管との違いは、管軸方向の前方のみではなく後方に進む波が同時に存在し、それらの干渉により定在波として波面が形成されるという点であり、単セルRF空洞と多セルRF空洞との違いはセル間の位相進みを考慮した管軸方向の電磁場分布を考える必要があるという点である。

### 4.2.1 加速管構造の定義

定在波管を議論する上で加速管構造の定義、セル数の数え方等に注意する必要がある。これらはテキストや論文によって統一されておらず時に誤解を招く。本テキストではそのような誤解を極力避けるために、まず加速管構造について定義しておく。

図24で本テキストで前提とする加速管構造を定義する。(N+1)セルは長さl/2の半セルを両端に持つ長さlのフルセル(通常セル)(N-1)個で構成されるとする。この場合、空洞番号は端の半セルをn=0、隣のフルセルをn=1というように、n=0,1,2,...,Nとする。また、セル間の位相進みは $\pi q/N$ で表わされ、qはq=0,1,2,...,Nの範囲となる。位相進み量は位相モードの名称にも用いられ、q=0はゼロモード、q=Nは $\pi$ モードに対応する。従って、(N+1)セルで励起される位相モード数は(N+1)個である。

(N+1)セルでのn番目の空洞での定在波電場は、

$$E(n) = E_0 \cos \frac{n\pi q}{N} e^{i\omega_q t} \quad (4.14)$$

となり、これは端部を除く空洞(フルセル)では中心位置、端部セル(半セル)では境界面での電場振幅を表す。これらは図24における空洞模式図下部の座標

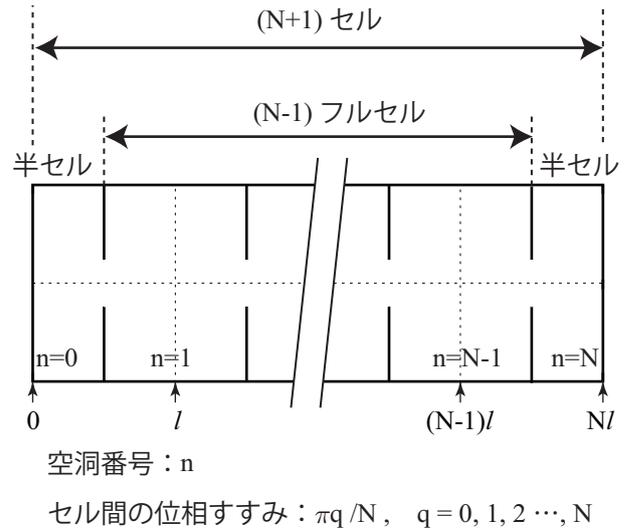


図24: (N+1)セル定在波型加速管構造の定義。(N-1)個のフルセル(長さl)と2つの半セル(長さl/2)で構成される一式の加速管を(N+1)セルとする。

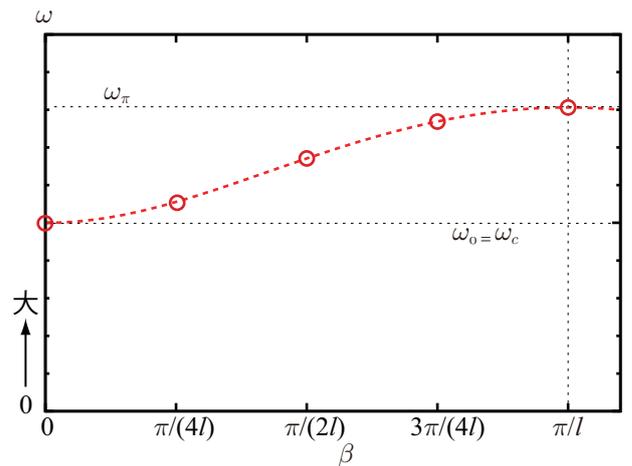


図25: 定在波型加速管の分散関係。赤丸は(4+1)セルの空洞を仮定した場合の位相モード。

{0, l, \dots, (N-1)l, Nl}に相当する位置にあたる。セル間の位相進み量の数え方も同様である。 $\omega_q$ は各位相モードにおける共振角周波数である。また、式(4.14)は管軸方向の前方及び後方に進む電磁波の和として、

$$E(n) = \frac{E_0}{2} \left\{ e^{i(\omega_q t - \pi q n / N)} + e^{i(\omega_q t + \pi q n / N)} \right\} \quad (4.15)$$

ともかける。

### 4.2.2 ディスクロード型加速管の分散関係

ディスクロード型定在波型加速管は進行波型加速管と同様に空洞内部を伝播できる電磁波の周波数はある

限られた範囲となり、その分散曲線は図 13 に類似している。ただし、加速管のセル数に応じて分散曲線は連続的では無く離散化される。次式は  $(N+1)$  セル加速管の分散関係であり、 $\omega_{\pi/2}$  は  $\pi/2$  モードでの周波数である。

$$\omega_p = \frac{\omega_{\pi/2}}{\sqrt{1 + \kappa \cos(\pi q/N)}} \quad (4.16)$$

$\kappa$  は隣接したセル間の結合定数である。

例として、セル数が  $(4+1)$  の定在波型加速管について、分散曲線の中で取り得る位相モードを図 25 に赤丸で示す。ただし定在波型加速管の場合、波の進行方向は考える必要が無いため、図は第一象限のみを示した。

ここで、 $\kappa \ll 1$  の場合、パスバンドの幅  $\delta\omega$  は、

$$\delta\omega_p = \omega_{\pi/2}\kappa \quad (4.17)$$

と求められる<sup>30</sup>。この幅はセル数  $N$  に依存しないため、セル数が増えると分散曲線を埋める位相モードが混み合い、隣り合うモードの間隔が狭くなることが予想できる。従って、各モードが持つバンド幅  $\delta\omega_p = \omega_p/Q_p$  ( $Q_p$  は各位相モードにおける  $Q$  値) が隣り合うモード間隔より大きくなると、本来採用したいモードに加え隣接したモードも励振されることになる。また、加速管の製作誤差等でセル毎の周波数にエラーが生じた場合も同様であり、このような場合、電場振幅やセル間の位相差が乱れる。次節で詳しく述べるが  $\pi$  モードでセル間の位相差が乱れると、加速効率の大幅な減少 (最大半分) が起こるため致命的な問題となる。

この影響は分散曲線の曲率 (群速度) が小さくなる  $\pi$  モード付近で顕著となり、最も曲率 (群速度) の大きい  $\pi/2$  モード付近で小さくなる。 $\kappa \ll 1$  の場合、 $\pi$  モード付近で隣接するモード間の周波数差は、

$$\frac{\delta\omega}{\omega_p} = \frac{\kappa}{2} \left( \frac{\pi}{N} \right)^2 \quad (4.18)$$

$\pi/2$  モード付近では

$$\frac{\delta\omega}{\omega_p} = \frac{\kappa}{2} \left( \frac{\pi}{N} \right) \quad (4.19)$$

と求められる<sup>31</sup>。これより、 $\pi$  モードではセル数  $N$  の二乗で安定性が失われるのに対し、 $\pi/2$  モードではセル数  $N$  に比例することがわかる。

<sup>30</sup> パスバンド幅  $\omega_0 \{1/\sqrt{(1-\kappa)} - 1/\sqrt{(1+\kappa)}\}$  を  $\kappa \ll 1$  で展開することで求まる。

<sup>31</sup> 式 (4.16) を微分し、それぞれ  $q = N, N/2$  付近で展開することで求められる

#### 4.2.3 位相モードとシャントインピーダンス

定在波型加速管の最適な (単位長さあたりのシャントインピーダンスが最大となる) 位相モードについて、R.H. Miller に倣って考えてみる [19]。

$(N+1)$  個のセルが連結した定在波型加速管を考える。このとき、 $n$  個めのセルの電圧は式 (4.15) を用いて、

$$V(n) = V_0 \cos \frac{n\pi q}{N} \cos \omega_p t \quad (4.20)$$

となる。セル長を  $l$  とすると、電子ビームが  $n$  個めの空洞に到着する時間は、次のように書ける。

$$t = \frac{z}{v_e} = n \frac{l}{v_e} \quad (4.21)$$

従って、 $V(n)$  は次のように書き換えられる。

$$V(n) = V_0 \cos \frac{n\pi q}{N} \cos \omega_p \frac{nl}{v_e} \quad (4.22)$$

最大の加速効率が得られるのは電子ビームのセル間の移動時間と電磁場の位相進み量が同期したときなので、

$$\frac{\omega l}{v_e} = \pi \left( \frac{q}{N} + 2p \right) \quad (4.23)$$

となる。ここで、 $p$  は整数である。

以上より、加速管全体での合計電圧は

$$V = \sum_{n=1}^N V(n) = V_0 \sum_{n=1}^N \cos^2 \frac{n\pi q}{N} \quad (4.24)$$

$$\begin{cases} V = \frac{NV_0}{2}, (q \neq 0, N) \\ V = NV_0, (q = 0, N) \end{cases} \quad (4.25)$$

となる。

加速管全体での壁消費電力  $P_t$  は、空洞 1 セル分のシャントインピーダンス  $R_c$  を用いて

$$P_t = \frac{1}{R_c} \sum_{n=1}^N V^2(n) = \frac{1}{R_c} \sum_{n=1}^N \left( V_0 \cos \frac{n\pi q}{N} \right)^2 \quad (4.26)$$

$$\begin{cases} P_t = \frac{NV_0^2}{2R_c}, (q \neq 0, N) \\ P_t = \frac{NV_0^2}{R_c}, (q = 0, N) \end{cases} \quad (4.27)$$

となる。従って、加速管全体でのシャントインピーダンス  $R_t$  は次のように求められる。

$$R_t \equiv \frac{V^2}{P_t} \quad (4.28)$$

$$\begin{cases} R_t = \frac{NR_c}{2}, (q \neq 0, N) \\ R_t = NR_c, (q = 0, N) \end{cases} \quad (4.29)$$

これらの結果より、位相モードゼロ、 $\pi$  モード以外においては加速管全体のシャントインピーダンス  $R_t$

は、空洞1セル分のシャントインピーダンス  $R_c$  とセル数  $N$  との積の半分になることがわかる。この結果はゼロ、 $\pi$ モード以外では加速管内を伝播している波(管軸方向を  $+z, -z$  に進む成分)のうち、電子ビームと同じ方向にすすむ成分のみが電子ビームと同期し加速に寄与していると考えると理解できる。一方、ゼロ、 $\pi$ モードでは群速度がゼロとなるため、管軸方向を  $+z, -z$  に進む成分は区別がつかなくなる。例えば、 $\pi$ モードの場合に式(4.15)における  $e$  の係数が  $-\pi n, \pi n$  となるが、これらは等価である<sup>32</sup>。従って、加速管全体のシャントインピーダンス  $R_t$  としては定在波を形成する両方の波の効果を受けることができ、その他の位相モードのように半分とはならない。

ところで、進行波型加速管のシャントインピーダンスについて述べた節 3.8.2 において、 $\pi$ モードでは加速管内の電磁波は定在波とみなせると説明したが、これは  $\pi$ モードでの加速管全体もしくは単位長さあたりのシャントインピーダンスは加速管内の高周波電力が同じ場合、定在波型加速管と進行波型加速管で等しくなることを意味する。

ピルボックス型セルを基本周期構造とする進行波型加速管では、 $0.58\pi(l = 0.29\lambda)$  の位相モードを採用することで最大加速効率( $\pi$ モードの約1.4倍)が得られたが、定在波型加速管で最大加速効率を得られるのは  $\pi$ モードであり、そのシャントインピーダンスは適当な位相モードを選んだ進行波型加速管よりも小さくなる。つまり、ビームの繰り返し等運転条件による効果を考えなければ進行波型加速管の方が高い加速効率を得られることを意味する。

#### 4.2.4 電磁場シミュレーション結果との比較

定在波型加速管についてももう少し理解を深めるために電磁場シミュレーションコード CST MWstudio [20] を使って計算した具体的な例を紹介する。

計算では図 26 に示すモデルを仮定し  $TM_{01}$  モードを仮定した計算を行った。モデルはフルセルの長さ  $l$  とする  $(4+1)$  セルの加速管構造を用いた。モデルの境界条件は  $xyz3$  軸に対し  $E_t = 0$ (導体面での電場の接線成分が存在しない)とした。計算では導体面でのロスはないと仮定し、電磁場は固有値解析 (Eigen mode) ソルバにより求めた。

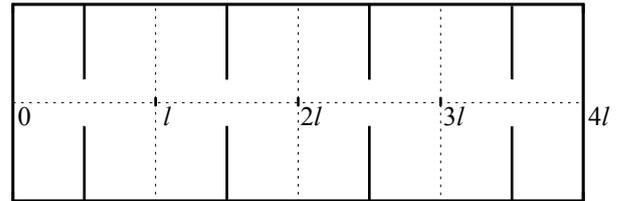
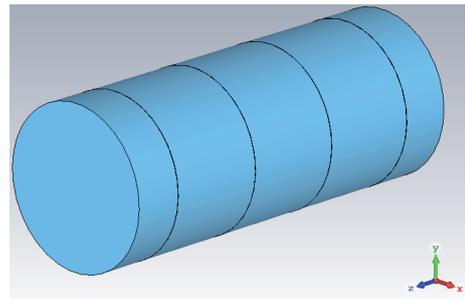


図 26: 定在波型加速管の計算モデル。(4+1)セル構造。

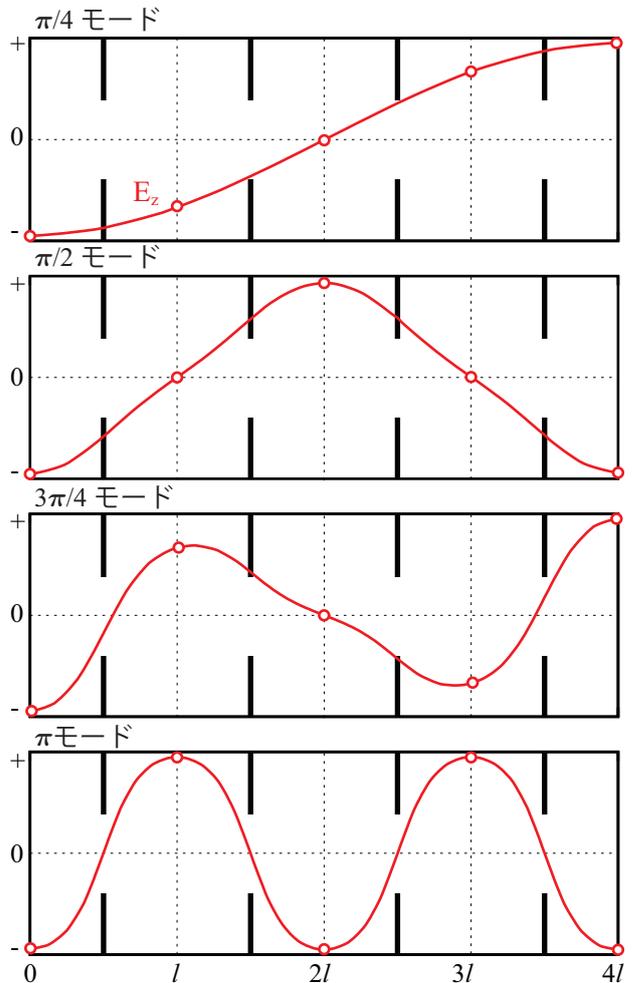


図 27:  $(4+1)$ セル定在波型加速管の各位相モードの電場 ( $E_z$ )。図 26 を用いて電磁場解析により得られた。

<sup>32</sup>図 25 の分散曲線では、 $\pi$ モードに近づくとき 2 つの波が座標  $(\pi/l)$  に  $\beta < \pi/l$  と  $\beta > \pi/l$  の両方から近づいてきて、 $\pi$ モードでは 2 つの波が座標  $(\pi/l)$  で完全に重なると説明できる。

計算で得られた定在波型加速管の  $\pi/4$  から  $\pi$  までの各位相モードについて管軸方向の電場  $E_z$  を図 27 に示す<sup>33</sup>。ただし、計算は対象とする位相モードの数だけ行い、その度毎にセル長  $l$  と円筒径を調整した。これは計算対象となる位相モードの位相速度と固有周波数を全ての場合で等しくするためであり、位相速度は光速の電子ビームと同期するよう選んだ。

図 27 はグラフ枠と内部の実線でディスクを含む加速管境界を示している。また、縦軸は最大値で規格化した電場の大きさを示している。横軸はセル長の整数倍に目盛を示してあり、1 セル分に占める電場の位相進み量が位相モードに対応していることがわかる。

定在波型加速管では赤実線で示した電場強度が  $e^{i\omega t}$  に従い時間的に振動する。進行波型加速管では電子ビームと電磁波の位相が同じ速度で進むため、一旦、波の頂点(クレスト)に電子を乗せれば隣のセルにおいてもそのまま最大の電場を受けながら電子は加速される。一方、定在波型加速管では各セルの電磁場振幅は反射波との合成で与えられ波は進行しないため、図 27 のように電子ビームが進むセル毎に電場の振幅が異なり加速管全体での加速エネルギーは進行波型加速管よりも低くなる。ただし、 $\pi$  モードだけは例外でセル間での電場振幅は一定となり、想定される最大の加速エネルギーが得られる。これが前節で数式を用いて行った考察の定性的な説明となる。

図 28 は同様の計算で得られた電場分布から光速で走る電子のシャントインピーダンスを求めプロット(赤丸)したものである。ただし、4セルではプロット点が少なかったため8セルのモデルで計算を行い、 $\pi$  モードの結果については、得られたシャントインピーダンスの半分の値を参考として赤三角で示した。図 28 では式 (3.15) の係数  $A_r$  を任意に調整し、計算値( $\pi$  モードを除く点でのシャントインピーダンス)の近似曲線(実線)として示した。式 (3.15) が電磁場シミュレーションで得られたシャントインピーダンスの変化傾向を良く再現していることがわかる。点線は実線を2倍した曲線であり、進行波型加速管のシャントインピーダンスを意識したものである。図より、電磁場シミュレーションで得られた結果は、おおよそ解析計算と同じ傾向を再現していることがわかる。ただし、位相モードが  $\pi$  に近づくにつれ傾向が異なってくる。これは電磁場シミュレーションのメッシュサイズ等の問題と思われる。

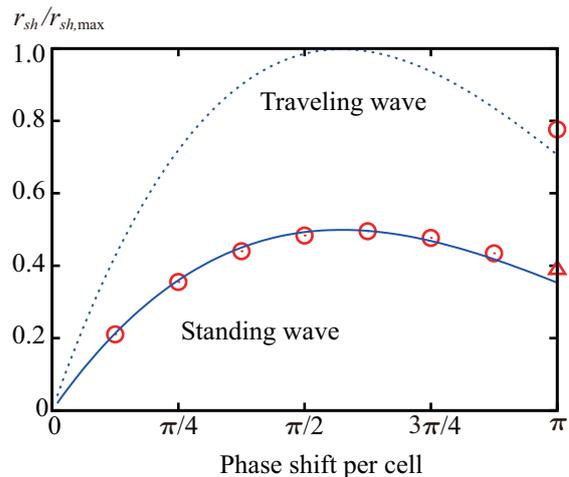


図 28: 定在波型加速管の相対シャントインピーダンス。赤丸のプロットは半セル2つ(単位周期, 長さ  $l$ )を8周期分連結したモデルでの計算結果。実線は節 3.8.2 で求めたシャントインピーダンスの解析計算結果で電磁場シミュレーション結果を近似した曲線であり、点線はこれを2倍したもの。

#### 4.2.5 陪周期構造加速管

節 4.2.3 と 4.2.4 において、定在波型加速管を用いる場合に最も加速効率が良いのは  $\pi$  モードを採用したときであることを説明した。しかし、 $\pi$  モードには節 4.2.2 で指摘したように群速度がゼロになることに起因した問題があり、実際にこのモードをそのまま加速管に採用するのは得策ではない。特にセル数が大きい場合、加速効率が急激に劣化するため常伝導方式では5セル程度が実用上の限界だと考えられている [8, 22]<sup>34</sup>。

一方、 $\pi/2$  モードは群速度が最大であるため、節 4.2.2 で指摘した  $\pi$  モードの問題を避け、セル数をより増やした定在波型加速管が実現できる。しかし、定在波型加速管の  $\pi/2$  モードは、図 27 でも示したように1セルおきに電場振幅がゼロとなるため、シャントインピーダンスは半減する。 $\pi$  モードの高いシャントインピーダンスと  $\pi/2$  モードの安定性を両立すべく提案されたのが**陪周期構造** (biperiodic structure) であり、その代表的なものが**APS** (alternating periodic structure) 構造 [23, 24] である。

APS 構造では  $\pi/2$  モードで電場振幅がゼロとなるセルの長さをもう一方と比較して短くすることで、加

<sup>33</sup>同様な結果は数値計算に頼らずとも等価回路モデルを用いた計算でも得られる [8, 21]。

<sup>34</sup>超伝導方式の空洞では Q 値が高いためこの効果は緩和され、現実に9セルの  $\pi$  モード定在波型加速管が多くの加速器システムで採用されている。

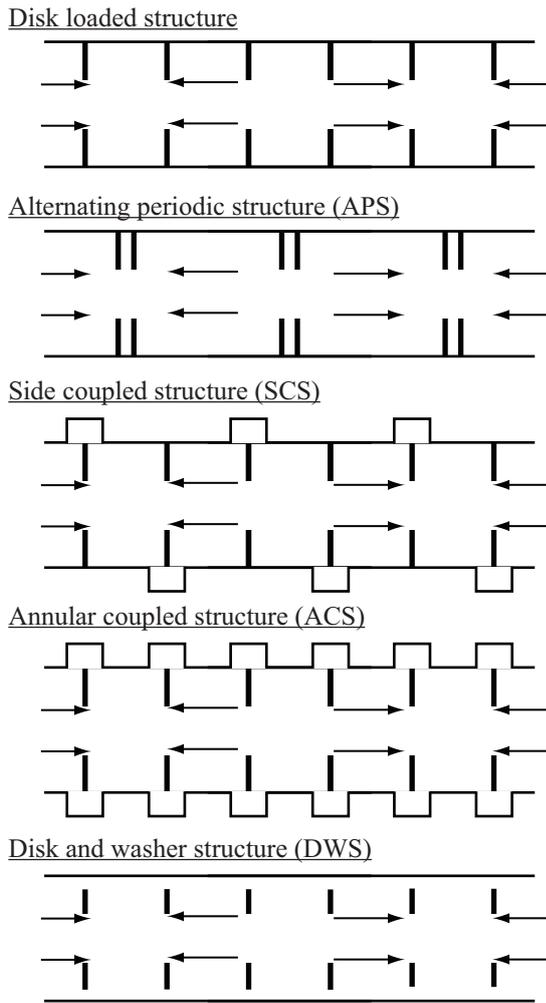


図 29: 陪周期構造加速管の例、ディスクロード型, APS 型, SCS 型, ACS 型, DW 型の模式図。図中の矢印は  $\pi/2$  モードの電場の様子を示している。

速管全体としての加速効率を向上させている。この他、陪周期構造の加速管としてはサイドカップル型構造 (SCS: side coupled structure) [25]、環状結合構造 (ACS: annular coupled structure) [26]、ディスク・アンド・ワッシャー構造 (DAWS: disk-and-washer structure) [27] などがある (図 29 参照)。これらの空洞では電場振幅がゼロとなるセルを APS 空洞のように短くするのではなくビーム軸から外側にずらしており、電子ビームが通過するセルは実質的には  $\pi$  モードとなるようになっていく。つまり、これらの空洞では電子ビームからみると  $\pi$  モードで励振しているが、電気的には外側のセルを介して  $\pi/2$  モードで結合していると考えられる。

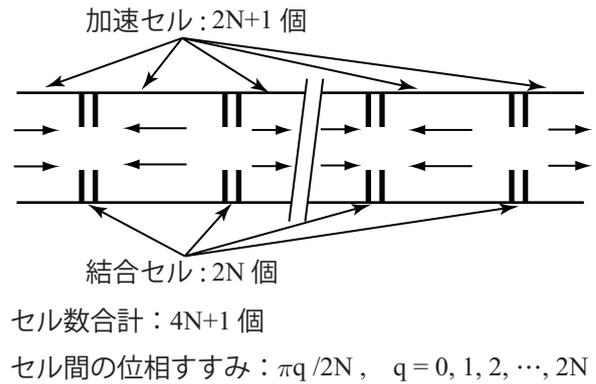


図 30: 軸上結合構造加速管の計算モデル。

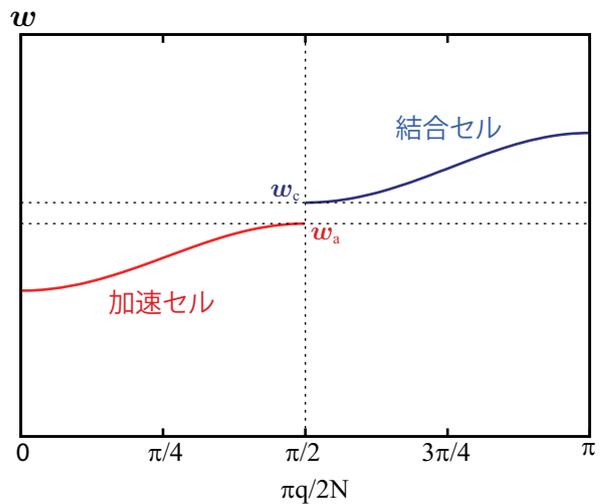


図 31: 軸上結合構造加速管の分散関係 (加速モードと結合モードの周波数が異なる場合)。

#### 4.2.6 陪周期構造加速管の分散関係

陪周期構造加速管について理解するため、APS 構造に代表される軸上結合構造 (on-axis coupled structure) を例として分散関係を考える。ここで、陪周期構造加速管のセルのうち、電場が存在する方のセルを加速セル (accelerating cell)、存在しない方を結合セル (coupling cell) と呼ぶことにする。

軸上結合構造加速管の計算モデルを図 30 に示す。加速管は  $2N$  個の結合セルと  $2N + 1$  個の加速セルで構成されるとし、合計  $4N + 1$  個のセルを考える。この場合、セル間の位相進みは  $\pi q / (2N)$  で表される。ただし、 $q = 0, 1, 2, \dots, 2N$  である。

分散関係は加速セルの周波数を  $\omega_a$ 、結合セルの周波数を  $\omega_c$  とすると、これら両セル間の結合係数を  $\kappa$

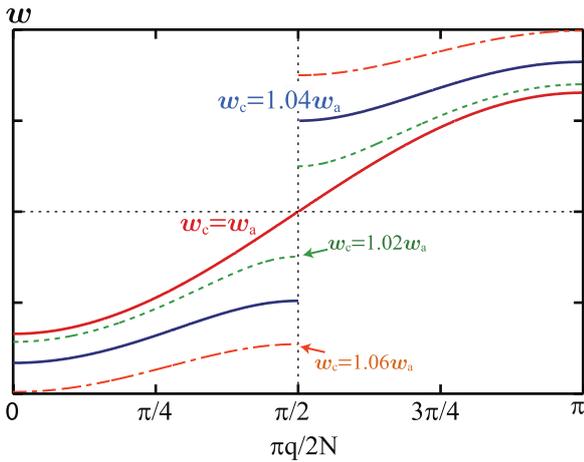


図 32: 軸上結合構造加速管の分散関係 ( $\omega_a = \omega_c$  及び  $\omega_a \cong \omega_c$ )。

として、以下のように与えられる<sup>35</sup>。

$$\kappa^2 \cos^2 \frac{\pi q}{2N} = \left(1 - \frac{\omega_a^2}{\omega_q^2}\right) \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega_q^2}\right) \quad (4.30)$$

$\omega_q$  は任意の位相モードにおける固有周波数である。ここで  $q = N$ 、つまり  $\pi/2$  モードでは、式 (4.30) の左辺はゼロとなり、 $\omega_p$  は  $\omega_a$  と  $\omega_c$  の 2 つの解を取り得る。図 31 に  $\omega_a < \omega_c$  の場合の分散関係を示す。結合係数は  $k = 0.05$  とし、セル数  $N$  は無限とした。 $\omega_a \neq \omega_c$  の場合、 $(4N + 1)$  セル加速管としては分散曲線が 2 つに分離し、特に  $\omega_a < \omega_c$  の場合は、加速セル内で 0 から  $\pi/2$  モードが、結合セルで  $\pi/2$  から  $\pi$  モードが励振されるようになる。しかし、加速モードとして考えている  $\pi/2$  モードでの群速度は通常の加速管の  $\pi$  モードと同様にゼロになってしまう。

陪周期構造加速管ではこの状況からさらにセル形状を、 $\omega_a = \omega_c$  となるよう調整する。 $\omega_a = \omega_c$  を実現した場合の分散曲線を図 32 に赤色の実線で示す。参考として  $\omega_a \cong \omega_c$  の場合の曲線も合わせて示す。図中、青色の実線が図 31 で示した分散曲線と同じパラメータでの解析計算結果 (スケールは変わっている) である。図より、 $\pi/2$  モードにおける加速セルと結合セルの固有周波数を近づけていくことで、徐々に  $\pi/2$  付近の分散曲線が変化し遂には滑らかにつながることがわかる。また、この条件における  $\pi/2$  モードの群速度は他の伝播モード中で最大となっていることがわかる。この  $\omega_a = \omega_c$  の関係は**合流 (confluence)** 条件と呼ばれる。以上により、 $\pi$  モードと同等の加速効率と  $\pi/2$  モードの安定性を持った定在波加速管が実現する。こ

<sup>35</sup>式 (4.30) も等価回路を用いて求めることができる。詳細は [8] や [28]などを参照のこと。

のような合流条件を実現する陪周期構造を**合流型陪周期構造**と呼び、一般に結合空洞型加速管というと合流型陪周期構造を備えた加速管を指すことも多い。

合流型陪周期構造は複雑であり製作も手間がかかるが、 $\pi/2$  モードの合流型加速管は高い性能が得られるためよく用いられる。KEK のトリスタン加速器では 9 セルの APS 空洞が 104 台用いられ、現在は KEK-AR(6.5GeV) で同様のものが 6 台運用されている。また、理研 SACLA の低エネルギー部では、進行波型加速管の場合に入力カプラのつくる電磁場の非対称性を避けるため L バンドの APS 空洞が用いられている [11]。この他、高出力と小型化が必要な医療用加速器等でも多く用いられている。

## 5 おわりに

以上、電子加速管という題目で、前提となる導波管に関する物理をもとに、進行波型加速管・定在波型加速管について基礎的な知識を紹介した。本テキストではこれら電子加速管について俯瞰的な理解を得ることを目的に、あまり現実・実務的な内容には踏み込まず、一般的な内容に留めてきたつもりである。電子加速管についてこれから勉強を行う方には本テキストの内容をもとにして、より深く専門的な知識を身につけて頂ければと思う。

本テキストには私の理解不足による正確では無い記述や間違った解釈も存在すると思われる。これから実際に RF 関連の勉強をする人は、本テキストを鵜呑みにせず是非自分の手と頭を動かして活きた知識を身につけてもらいたい。

また、本テキストの構想段階では、

- 実際の加速器での RF 加速管の運用方法 (電子ビームとの相互作用を含めて)
- 実際に開発・運用された RF 加速管の独創的な工夫や特徴

などを記述するつもりであったが、テキスト全体のバランスや時間の都合で割愛した。しかし、その結果、50 分 2 コマの講義としては適切な内容量になったのではないかと考えている。興味のある読者は本テキストの基礎的な知識をもとに実際の RF 加速管を調べてみるとより深く勉強できると思われる。

## 謝辞

歴史ある OHO 加速器セミナーでテキストを作成させて頂く機会を下さった高エネルギー加速器研究機構の小林幸則氏、道園真一郎氏に感謝します。また、高エネルギー加速器研究機構 加速器研究施設で同グループに所属する坂中章悟氏、高橋毅氏にはテキスト執筆に多大な御理解を頂き、通常業務の軽減・資料の提供など協力して頂きましたこと心から感謝しています。さらに、坂中章悟氏には上記に加えテキスト内容に関する相談、原稿のチェックなど多大な協力を頂きました。

## 参考文献

- [1] T. Koseki, M. Izawa, and Y. Kamiya. Damped-structure cavity for a high-brilliant vacuum ultraviolet and soft xray storage ring. *Review of Scientific Instruments*, Vol. 66, No. 2, pp. 1926–1929, 1995.
- [2] T. Furuya, K. Akai, K. Hara, K. Hosoyama, A. Kabe, Y. Kojima, S. Mitsunobu, Y. Morita, H. Nakai, and T. Tajima. Recent status of the superconducting cavities for KEKB. In *Proc. of SRF9*, pp. 31–36, 1999. paper MOP001.
- [3] 中島将光. マイクロ波工学, 第 2 章, p. 44. 森北出版, 1975.
- [4] 吉田光宏. 電子線形加速器における高周波デバイスの基礎～シミュレーション～製作・試験. ビームエネルギー回収型高輝度放射光光源 - ERL -. KEK, 2008.
- [5] Thomas P. Wangler. *Principles of RF Linear Accelerators*, chapter 3, p. 66. A Wiley-Interscience, 1998.
- [6] 山口誠哉. 加速管・立体回路. OHO テキスト 電子線形加速器の基礎, 第 3.1.1 章, p. 5.4. KEK, 2002.
- [7] 恵郷博文. 高周波加速管. OHO テキスト X線自由電子レーザー～SACLA, 第 3.2 章. KEK, 2013.
- [8] 高田 耕治. 高周波加速の基礎 -改訂版-. In *KEK Report 2003-11*. KEK, 2003.
- [9] P. B. Wilson, J. E. Griffin, RA. Carrigan, FR. Huson, and M. Month. High energy electron linacs; application to storage ring rf systems and linear colliders. In *SLAC-PUB-2884*, Vol. 87, pp. 450–555. AIP, 1982.
- [10] Gregory A. Loew and Richard Talman. Elementary principles of linear accelerators. *AIP Conference Proceedings*, Vol. 105, No. 1, pp. 1–91, 1983.
- [11] T. Tanaka and T. Shintake. SCSS X-FEL Conceptual Design Report. Technical report, RIKEN Harima Institute/SPRING-8, 2005.
- [12] 久保浄. ビーム不安定性. OHO テキスト 低エミッタンスリング特集, 第 3.1.1 章, p. 5.4. KEK, 1991.
- [13] 赤井和憲. RF システム. OHO テキスト Bファクトリーの加速器, 第 3.1.1 章, p. 5.4. KEK, 1994.
- [14] 阿部哲郎. 高周波加速入門. OHO テキスト Bファクトリーと加速器の基礎, 第 3.1.1 章, p. 5.4. KEK, 2004.
- [15] R.A. Rimmer. RF cavity development for the PEP-II b factory. In *LBL-33360*. 1992.
- [16] S. Sakanaka, F. Hinode, K. Kubo, and J. Urakawa. Construction of 714MHz HOM-free accelerating cavities. *Journal of Synchrotron Radiation*, Vol. 5, No. 3, pp. 386–388, May 1998.
- [17] F. Marhauser, E. Weihrer, D. M. Dykes, and P. McIntosh. HOM damped 500 MHz cavity design for 3rd generation SR sources. In *PACS2001. Proceedings of the 2001 Particle Accelerator Conference (Cat. No.01CH37268)*, Vol. 2, pp. 846–848 vol.2, 2001.
- [18] H. Ego, J. Watanabe, S. Kimura, and K. Sato. Design of a HOM-damped rf cavity for the SPRING-8-II storage ring. In *Proc. of 11th PASJ Annual Meeting*, pp. 237–241, 2014. paper MOOL14 in Japanese.
- [19] R.H. Miller. Comparison of standing-wave and traveling-wave structures. In *SLAC-Report-303*, p. 200. SLAC, 1986.

- [20] Dassault Systmes. CST Microwave Studio.
- [21] H. Padamsee, K. Jens, and T. Hays. *RF Superconductivity for Accelerators, 2nd Edition*, chapter 7, p. 130. A Wiley-Interscience, 2008.
- [22] 青寛幸. 高周波加速の基礎. OHO テキスト 加速器の基礎と医療応用～医療のための加速器. KEK, 2012.
- [23] T. Nishikawa, S. Giordano, and D. Carter. Dispersion relation and frequency characteristics of alternating periodic structure for linear accelerators. *Review of Scientific Instruments*, Vol. 37, No. 5, pp. 652–661, 1966.
- [24] K. Akai, M. Akemoto, and S. Araki. RF system with room-temperature cavity of the TRISTAN e+ e-storage ring. In *Proceedings of the 13. International conference on high energy accelerators*, Vol. 2, p. 303, 1986.
- [25] E. A. Knapp, B. C. Knapp, and J. M. Potter. Standing wave high energy linear accelerator structures. *Review of Scientific Instruments*, Vol. 39, No. 7, pp. 979–991, 1968.
- [26] T. Kageyama, K. Yoshino, and Y. Yamazaki. A new annular-coupled structure suppressing higher order modes' mixing with the  $\pi/2$  coupling mode. *Part. Accel.*, Vol. 32, No. KEK-89-94, pp. 33–38, 1989.
- [27] V.G. Andreev. Study of high-energy proton linac structure. In *Proc. of 1972 Proton Linac Conf.*, LA-5115, p. 114, 1972.
- [28] Thomas P. Wangler. *Principles of RF Linear Accelerators*, chapter 3, p. 69. A Wiley-Interscience, 1998.

## 付録 A 高周波空洞の等価回路

RF 加速管を解析する際、等価回路は非常に便利なツールとなる。本テキストでは幾つかの重要な関係式を証明無しに用いたが、これらのほとんどは等価回路を用いることで比較的簡単に導くことができる。また、等価回路を用いることで、加速管を電氣的に表現することが可能となり、加速管に対するより深い理解と発展的なアイデアを得ることも期待できる。ここでは、最も簡単な単セル RF 空洞について等価回路を紹介し、RF 空洞に係わるパラメータとの関係を示しておく。

### 付録 A.1 単セル RF 空洞の等価回路

図 33 に単セル RF 空洞の等価回路を示す。 $I(t)$  は外部から供給される回路のドライブ電流であり、実際には大電力高周波源からの RF 電力供給を意味する。それぞれ、インダクタンス  $L$ 、静電容量  $C$ 、抵抗  $R$  としている。RF 空洞では外部 RF 源により駆動され空洞電圧  $V_c(t)$  が励振される。

$$I(t) = C \frac{dV_c}{dt} + \frac{\int V_c(t) dt}{L} + \frac{V_c}{R} \quad (\text{付録 A.1})$$

本テキストではこれ以上立ち入らないが、上記微分方程式を用いて空洞の振る舞いを時間的に解析することで、入力電力が変動した場合などの過渡的な空洞応答を定量化して議論することが可能となる。さらに、図 33 の等価回路を拡張することでビーム負荷やその変動を含めた解析も可能となる。

式 (付録 A.1) の定常状態において  $I(t)$ 、 $V_c(t)$  は

$$I(t) = I_0 e^{i\omega_r t} \quad (\text{付録 A.2})$$

$$V_c(t) = V_0 e^{i(\omega_r t + \phi)} \quad (\text{付録 A.3})$$

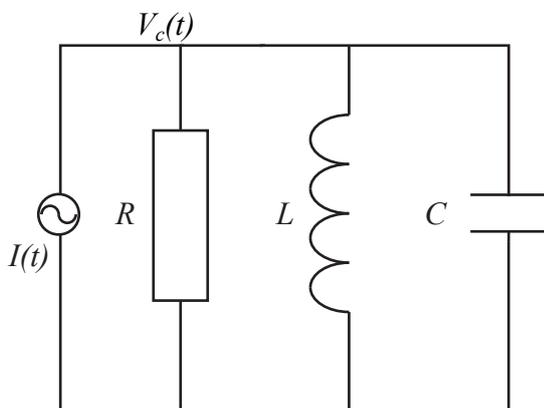


図 33: 単セル RF 空洞の等価回路。

となる。ここで  $V_0$  は空洞電圧の振幅（ピーク値）であり、空洞電圧はドライブ電流に対し  $\phi$  だけ位相がずれているとした。また、共振周波数  $\omega_r$  は、回路定数を用いて以下のように書ける。

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{付録 A.4})$$

コンデンサに蓄えられるエネルギー  $U$  は、

$$U = \frac{1}{2} C V_0^2 \quad (\text{付録 A.5})$$

抵抗での実効的な消費電力  $P$  は、

$$P = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{R} \quad (\text{付録 A.6})$$

となる。

ところで、よく用いられる空洞パラメータを回路定数で書き表すと以下ようになる。

- ・シャントインピーダンス

$$R_{sh} = 2R \quad (\text{付録 A.7})$$

- ・Q ファクター

$$Q = \frac{\omega_r U}{P} = \omega_r R C \quad (\text{付録 A.8})$$

- ・フィリングタイム

$$\tau_f = \frac{2Q}{\omega_r} = 2RC \quad (\text{付録 A.9})$$

ただし、シャントインピーダンスについては電圧のピーク値を用いるか実効値を用いるかで表現が変わり、実際に加速器業界では両方の定義が混在して用いられている。上式 (付録 A.7) はピーク値を用いた場合のもの (P.B. Wilson 流) で、実効値を用いた場合は、 $R_{sh} = R$  となる。このため、シャントインピーダンスや空洞  $R/Q$  について論じる際は注意が必要である。

### 付録 A.2 回路定数の意味

等価回路の要素  $C$ 、 $L$ 、 $R$  について実際の空洞と対比しておくとう理解が深まる。そこで、通常加速モードして用いられることの多い  $TM_{010}$  モードの電磁場を例にとり説明しておく。図 34 と図 35 に  $TM_{010}$  モードの単セル RF 空洞での電磁場 ( $E_z$ 、 $H_\phi$ ) 分布を示す。この 2 つの電磁場成分のみが  $TM_{010}$  モードに存在し、それらの時間的な位相は  $\pi/2$  ずれている。

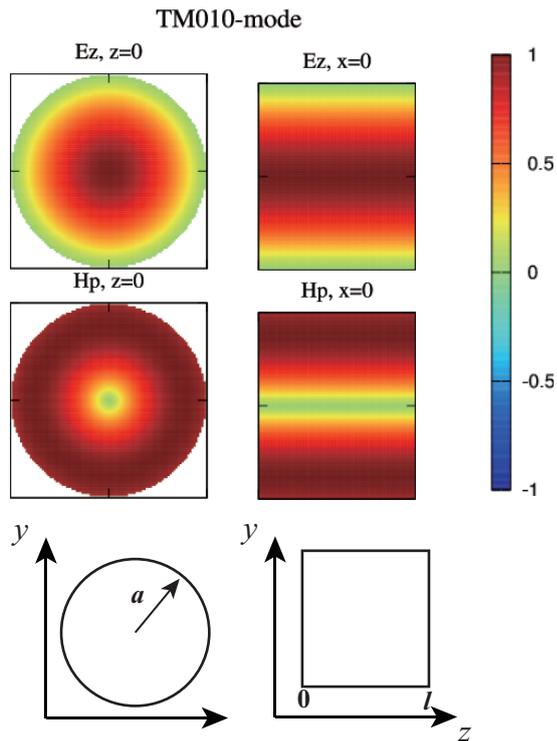


図 34: TM<sub>010</sub> モードの単セル RF 空洞での電磁場 ( $E_z, H_\phi$ ) 分布。

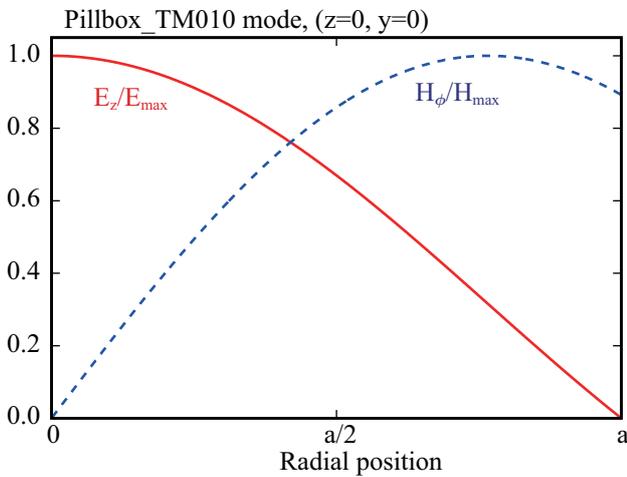


図 35: TM<sub>010</sub> モードの単セル RF 空洞での電磁場 ( $E_z/E_{\max}, H_\phi/H_{\max}$ ) 分布 ( $z = 0, y = 0$ )。

電気回路においてコンデンサは 2 枚の電極で電荷を蓄積する。コンデンサに蓄えられるエネルギーは極板間の電位差の二乗に比例する。これは TM<sub>010</sub> モードを励振している RF 空洞でいうと、セルの両端板と同等だと考えることができる。TM<sub>010</sub> モードでは電場はセルの両端板間に存在し、円断面の中心部へ行くほど電場は大きい。従って、RF 空洞の端板の特に中心

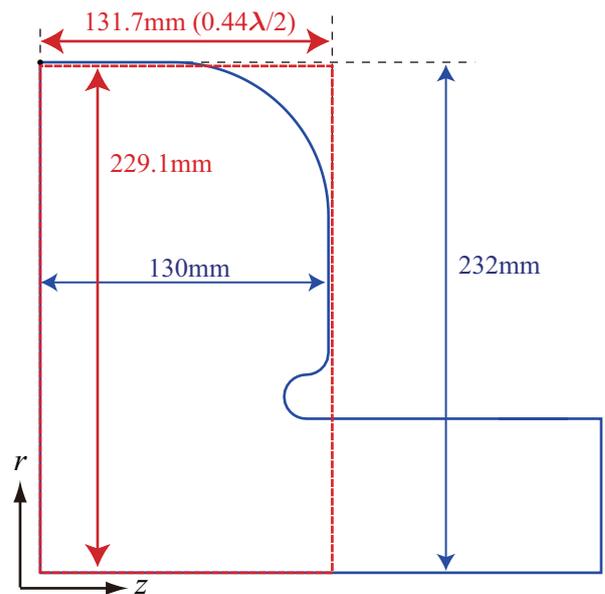


図 36: PF 空洞の計算モデル (1/4 断面)。実際の空洞は図下側と左側を対称面とした軸対称構造となる。

部を狭くすることで  $C$  を大きくできる。

次にセルの両端板 (コンデンサ) に供給される電荷は空洞側面を往復して流れる。電流が流れるとアンペール (Ampere) の法則に従って磁場が発生する。これが、等価回路のインダクタンス  $L$  であり、図 34 の  $H_\phi$  をみても、外周部の磁場強度が大きくなっていることがわかる。従って、インダクタンス  $L$  は空洞側面の長さを短くすることで小さくすることができる。これはピルボックスの角の部分を変角にする (R をつける) ことを意味する。

最後に抵抗  $R$  であるが、金属は有限の抵抗を持つため、空洞表面を高周波電流が流れると表皮抵抗により熱が発生し電力損失が起こる。この電力損失が  $P_c = V_0^2 / (2R) = V_0^2 / R_{sh}$  である。ただし、等価回路の抵抗  $R$  は空洞の単なる表面抵抗とは異なる。また、 $V_c(t)$  は電子ビームの軌道に沿って空洞の入口から出口までに電子ビームが受ける電場を積分したものである (節 3.8.1 参照)。

### 付録 A.3 実際の空洞

実際の空洞を例に回路定数についてももう少し補足する。

図 36 に現在 KEK-PF で用いられている RF 空洞 [1] の模式図を青線で示す。PF では本空洞の TM<sub>010</sub> モードを加速モードとして用いており、形状はピルボックス

表 6: PF 型空洞のパラメータ

TM <sub>010</sub> モードの共振周波数	500 MHz
$Q_0$ 値	40000
シャントインピーダンス $R_{sh}$	7.0 MΩ
加速電圧 $V_0$ @ 36 kW	500 kV
回路定数	
静電容量 $C$	3.6 pF
インダクタンス $L$	27.9 nH

ス型 (図中の赤線) をベースに高次モードを考慮しつつシャントインピーダンスと  $Q$  値を最適化するように修正されている。共振周波数は約 500 MHz である。簡単に説明すると管軸方向についてはノーズコーンと呼ばれる空洞内部にせり出した形状をもち、電場をより集中させている。外周部は円形に近い丸みを帯びており、ロスを抑え  $Q$  値を向上させている。また、セル長はビームパイプへの電場の染み出しを考慮し、ピルボックスの最適長さ  $0.44\lambda$  よりやや短くなっている。

ここで、PF 型空洞のパラメータを回路定数で表してみる。表 6 に PF 型空洞の大体のパラメータを示す。 $Q_0$  値は 40,000、シャントインピーダンスは 7.0 MΩ、そして共振周波数は 500 MHz であるので、静電容量  $C$  は 3.6 pF、インダクタンスは 27.9 nH と計算される。ところで、PF 型空洞では最大で 500 kV (約 36 kW の消費電力を仮定した場合) の加速電圧を実現できる。上記のような低いインダクタンスを持ち、500 kV もの高電圧を 500 MHz で印加できるというのは RF 空洞の大きな特徴といえる。