

ビームダイナミックスの基礎
(単粒子力学)

杉本 寛

目次

Abstract	2
第1章 ハミルトニアン	3
1.1 電磁場中の荷電粒子のハミルトニアン	3
1.2 座標系 ~Frenet 標構~	4
1.3 加速器で使われるハミルトニアン	4
1.4 ハミルトニアンの近似	6
1.5 代表的な電磁石の磁場	8
1.5.1 偏向電磁石 ($n = 0$)	8
1.5.2 四極電磁石 ($n = 1$)	9
1.5.3 六極電磁石 ($n = 2$)	9
1.6 磁場のベクトルポテンシャル	10
1.7 ハミルトニアンの具体例とその転送行列	11
1.7.1 ドリフトスペース	11
1.7.2 偏向電磁石	11
1.7.3 四極電磁石	12
第2章 横方向の運動	14
2.1 ベータトロン運動とその定式化	14
2.2 磁場誤差の影響と共鳴不安定性	22
2.2.1 二極磁場誤差と整数共鳴	22
2.2.2 四極磁場誤差と半整数共鳴	23
2.2.3 ベータトロン共鳴と共鳴条件	26
2.3 色収差 (クロマチシティ) とその制御	27
2.3.1 クロマチシティ	27
2.3.2 クロマチシティのコントロール	28
第3章 進行方向の運動	30
3.1 経路長と飛行時間	30
3.2 位相安定性の原理	31
3.3 シンクロトロン運動	32
3.3.1 運動方程式の直接的な導出	32
3.3.2 ハミルトン形式	34
3.3.3 エネルギーアクセプタンス	37
第4章 シンプレクティック変換と粒子トラッキング	40
4.1 シンプレクティック変換	40
4.2 トラッキング手法とその具体例	41
4.3 非線形力学と Lie 変換	46
付録	54

はじめに

単粒子力学とは電磁石や加速空洞などが発生する電磁場中の単一粒子の力学である。加速器中を飛行する粒子群(ビーム)の運動は、構成粒子間の相互作用、ビームが発生する電磁場を介した環境体(真空パイプ)との相互作用、残留ガスによる散乱、構成粒子の電磁場の放射などの複数の要因の結果として決まる。一般に加速器の設計もしくはビーム調整ではこれらの効果を包括的に考慮して最適なパラメータを選ぶ必要がある。

上に挙げた全ての効果を同時に考慮して、解析的もしくは数値計算によってビームの振る舞いを予測することは到底不可能である。このため、通常はこれらの要因を可能な限り細分化して、個別に検討する。その際、単粒子力学はビームの複雑な運動を議論する上で基盤となるため必要不可欠なものである。本稿では単粒子力学の概説を試みたが、その量の膨大さと筆者の力量不足で重要ではあるが取り扱わなかった項目も数多くあることは断っておく。また、本稿は完全に未査読であるため誤字脱字や筆者の誤った認識に基づく記述が否定できない。インターネットで検索すれば単粒子力学に関する優れたノートや講義のスライドを見つけられる。より洗練された教材を望む方にはそちらをお勧めしたい。おそらく日本語で最も情報量が多いの資料は過去の OHO のテキスト(インターネットで閲覧可能)であろう。

本稿ではまず第1章で加速器中の荷電粒子の運動を支配するハミルトニアンについて説明する。第2章ではビーム進行方向に直交する横方向の運動(ベータatron運動)の定式化を行う。第3章ではビーム進行方向の運動(シンクロtron運動)を扱う。第4章では非線形力学の導入としてシンプレクティック変換や数値シミュレーション手法について説明する。

第1章 ハミルトニアン

1.1 電磁場中の荷電粒子のハミルトニアン

よく知られているように電場 \mathbf{E} , 磁場 \mathbf{B} 中の電荷 q の荷電粒子の運動は

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1.1)$$

に従う。ここで $t, \mathbf{v}, \mathbf{P}, t$ はそれぞれ時刻及び、粒子の速度と運動量である。また、太文字はベクトル量を意味する。運動量 \mathbf{P} は粒子の静止質量 m , 光速 c 及びローレンツ因子 β, γ と共に

$$\mathbf{P} = \gamma m \mathbf{v} \quad (1.2)$$

$$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}, \quad \beta^2 = \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}, \quad \boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c \quad (1.3)$$

の関係にある。一方、解析力学の教えるところによれば式 (1.1) は一般化座標を \mathbf{q} , 独立変数を t としたラグランジアン $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - q\phi + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \quad (1.4)$$

から導かれる。ここでドットは時間による微分 d/dt を意味する。またスカラー関数 ϕ 及びベクトル関数 \mathbf{A} は電磁場と

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned} \quad (1.5)$$

を満たす。式 (1.4) からハミルトニアン $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$

$$H = \sum_i \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L = \sqrt{c^2 (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + m^2 c^4} + q\phi \quad (1.6)$$

が得られる。但し、正準運動量 $\mathbf{p} = \partial L / \partial \mathbf{v} = \mathbf{P} + q\mathbf{A}$ であることを用いた。このハミルトニアンに対して正準方程式

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (1.7)$$

を具体的に式変形すると、それは当然ながら式 (1.1) に帰着する。

ここまでは加速器分野に限らず、解析力学や電磁気学の教科書にも書かれているごく一般的な話である。結局、加速器中の単粒子の運動を予測するために我々がすることは、式 (1.5) を解いて電磁場もしくはポテンシャルを求め、式 (1.1) もしくは式 (1.7) を解くことである。本稿ではハミルトニアン (1.6) と正準方程式 (1.7) をベースにする。

重要なことは単粒子力学では加速器分野に特有の事情を反映した座標変換や物理量を導入することにある。もう少し具体的に述べると、ある基準となる粒子 (参照粒子) の軌道に沿った座標系に移り、その参照粒子からのズレとして着目している粒子の運動を議論する。その定式化に際してベータ関数、チューン、分散関数、運動量圧縮率、エミッタンス、色収差 (クロマチシティ) などのパラメータが導入される。本稿ではこれらのパラメータの意味や特性を概説し、実際の設計や運転においてこれらの言葉がどのような意味で用いられるかを見ていく。

1.2 座標系 ～Frenet 標構～

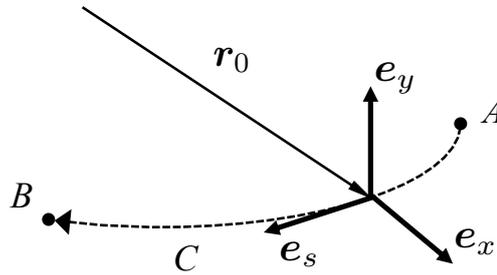


図 1.1: Frenet 標構

一般的なデカルト座標 (x, y, z) ではなく図 1.1 に示した Frenet 標構が広く用いられる。これは三次元空間を飛行する粒子の軌道を追跡するのにより便利なためである。基準となる点 A と B を結ぶ滑らかな曲線 C を考え、その曲線上の直交する 3 つのベクトル、単位接線ベクトル e_s 、単位主法線ベクトル e_x 、単位従法線ベクトル e_y を考える。着目している粒子の位置ベクトル r は r_0 を曲線 C 上の位置（基準粒子の位置）ベクトルとして

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y \quad (1.8)$$

となる。基準粒子の選び方は粒子の曲線が滑らかで粒子の座標が一意に決定できる限りは任意である。Frenet 標構においては基底ベクトル $e_{x,y,s}$ に対して以下の Frenet-Serret の公式が成立する。

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_s \\ \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_s \\ \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

ここで κ, τ は曲線 C の曲率及び捻率である。曲率は文字通り曲線の曲がり具合を定量的に示す量であり、その逆数は曲率半径 ρ である。一方、捻率とは曲線が平面からどれだけ急速に離れていくかを表す量である。これらの二つの量を決定することで曲線 C を一意に決定することができる。以下では簡単のため捻率をゼロとする。これは基準曲線をある平面内に限定することを意味する。また、基準曲線としては設計粒子の軌道を選ぶことが多いため、以下では基準曲線および基準粒子を設計軌道、設計粒子と称す。

さて、この座標系は時間の経過とともに動く座標系である。一般の力学の教科書では粒子の運動を記述する際、独立変数を時刻 t に選ぶことが多いが、加速器分野ではこの設計軌道の長さ s (点 A から測った道のり) を独立変数に選ぶのが通常である。独立変数が s であることをあらわに表現すると式 (1.8) は

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0(s) + x\mathbf{e}_x(s) + y\mathbf{e}_y(s) \quad (1.10)$$

となる。独立変数を s に選ぶのはビームラインはその構成要素が場所 s によって区分されており、理論的取り扱いが便利になることが多いためである。この場合、ビーム進行方向の運動に関しては粒子がある時刻に空間上のどこに位置するかではなく、ある場所 s に到達する時刻を議論していることになる。

1.3 加速器で使われるハミルトニアン

前節で定義した座標系でハミルトニアン (1.6) を書き直す。そのために以下の母関数による正準変換を考える。なお、母関数や正準変換という言葉に不慣れた読者は解析力学の教科書もしくはは

本稿の付録を参照されたい。

$$F_1(\mathbf{p}, x, y, s) = -\mathbf{p} \cdot [\mathbf{r}_0(s) + x\mathbf{e}_x(s) + y\mathbf{e}_y(s)] \quad (1.11)$$

これにより正準運動量は

$$p_x = -\frac{\partial F_1}{\partial x} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_x, \quad p_y = -\frac{\partial F_1}{\partial y} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_y, \quad p_s = -\frac{\partial F_1}{\partial s} = \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_s \quad (1.12)$$

となる。ベクトルポテンシャル $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ にも同様の変換

$$A_x = \mathbf{A}_x \cdot \mathbf{e}_x, \quad A_y = \mathbf{A}_y \cdot \mathbf{e}_y, \quad A_s = \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_s \quad (1.13)$$

を施す。新たなハミルトニアン H_1 は

$$\begin{aligned} H_1(x, p_x, y, p_y, s, p_s; t) &= H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \\ &= q\phi + c\sqrt{m^2c^2 + (p_x - qA_x)^2 + (p_y - qA_y)^2 + \frac{(p_s - qA_s)^2}{(1 + x/\rho)^2}} \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$(1.15)$$

となる。ここで独立変数を t から s に変更する。時刻 t がハミルトニアン H_1 の4つめの自由度であると見做すと式 (1.7) から、その共役な運動量は $-H_1$ である。従って、式 (1.14) を $-p_s$ について解くことで新たなハミルトニアン

$$\begin{aligned} H_2(x, p_x, y, p_y, t, p_t; s) \\ = -qA_s - \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \sqrt{\left(\frac{p_t + q\phi}{c}\right)^2 - m^2c^2 - (p_x - qA_x)^2 - (p_y - qA_y)^2} \end{aligned} \quad (1.16)$$

を得る。但し、 $p_t = -H_1$ と表記した。

我々がすべきことは、加速器中の場所 s が与えられた時にその場所に対応する電磁場ポテンシャル (ϕ, \mathbf{A}) の表式を H_2 に与えて正準方程式 (1.7) を解くことである。残念ながらこの問題はごく限られた場合でしか解析的に解けない。それどころか電磁場ポテンシャル (ϕ, \mathbf{A}) の解析的な表式すらも理想化された条件下でしか得ることができない。電磁場ポテンシャル (ϕ, \mathbf{A}) は一般にはビームラインに設置された電磁石などの装置からの寄与に加えてビーム自体の電荷が発生する電磁場も含んでいる。本稿では単粒子の力学を扱うのでこれらの寄与は無視する。この場合でも、例えば静電レンズがあるビームラインではスカラーポテンシャル ϕ が存在するが、本稿では簡単のため主に電磁石が発生する静磁場を考え $\phi = 0$ とする。ハミルトニアン H_2 で $\phi = 0$ とすると粒子のエネルギー E が $E = -p_t$ であることを用いて新しいハミルトニアンとして

$$\begin{aligned} H_3(x, p_x, y, p_y, t, -E; s) \\ = -qA_s - \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \sqrt{\left(\frac{E}{c}\right)^2 - m^2c^2 - (p_x - qA_x)^2 - (p_y - qA_y)^2} \\ = -qA_s - \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \sqrt{p^2 - (p_x - qA_x)^2 - (p_y - qA_y)^2} \end{aligned} \quad (1.17)$$

を得る。ここで、全力学的運動量 $p(E) \equiv \sqrt{E^2/c^2 - m^2c^2}$ を定義した。

厳密な解が得られる数少ない例の一つが自由空間である。設計軌道は直線であるから $1/\rho = 0$ であり、ベクトルポテンシャルは $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ である。このような区間をドリフトスペースともしくは単にドリフト称す。ハミルトニアン H は H_3 に $\phi = 0, \mathbf{A} = \mathbf{0}, 1/\rho = 0$ を代入して

$$H = -\sqrt{p^2 - p_x^2 - p_y^2} \quad (1.18)$$

となる。正準方程式は

$$x' = \frac{p_x}{\sqrt{p^2 - p_x^2 - p_y^2}}, \quad p'_x = 0 \quad (1.19)$$

$$y' = \frac{p_y}{\sqrt{p^2 - p_x^2 - p_y^2}}, \quad p'_y = 0 \quad (1.20)$$

$$t' = \frac{E/c^2}{\sqrt{p^2 - p_x^2 - p_y^2}}, \quad -E' = 0 \quad (1.21)$$

従って、長さ L のドリフトスペースに始点 $s = s_1$ で $(x_1, p_{x1}, y_1, p_{y1}, z_1, -E_1)$ の粒子が入射されると終点 $s = s_2 = s_1 + L$ において

$$x_2 = x_1 + \frac{p_x}{\sqrt{p^2 - p_x^2 - p_y^2}} \times L, \quad p_{x2} = p_{x1}, \quad (1.22)$$

$$y_2 = y_1 + \frac{p_y}{\sqrt{p^2 - p_x^2 - p_y^2}} \times L, \quad p_{y2} = p_{y1}, \quad (1.23)$$

$$t_2 = t_1 + \frac{E/c^2}{\sqrt{p^2 - p_x^2 - p_y^2}} \times L, \quad -E_2 = -E_1, \quad (1.24)$$

となる。式 (1.22)-(1.24) は $(x_1, p_{x1}, y_1, p_{y1}, t_1, -E_1)$ から $(x_2, p_{x2}, y_2, p_{y2}, t_2, -E_2)$ へのある種の写像と考えることができる。正準方程式を解くことはハミルトニアンによって決まる位相空間座標 $\mathbf{x} = (x, p_x, y, p_y, t, -E)$ のビームライン入り口と出口の間の写像 \mathcal{M}

$$\mathbf{x}_{s=s_2} = \mathcal{M} \circ \mathbf{x}_{s=s_1} \quad (1.25)$$

を求めることである。ここで未だ定義されていない演算を \circ と表記した。写像 (1.22)-(1.24) がそうであるように一般に \mathcal{M} は非線形の写像である。次の節ではハミルトニアンに摂動展開を施して写像 \mathcal{M} を線形写像に近似する。この近似下では \mathcal{M} はハミルトニアンで決まる 6×6 の行列となり、式 (1.25) は行列演算となる。これは単粒子力学において線形理論、線形力学などと称されるアプローチである。線形理論の定式化に用いられる考え方は非線形力学を考える上で基盤となる。

1.4 ハミルトニアンの近似

設計粒子から微小にずれた粒子の運動を考え、ハミルトニアン (1.17) の平方根を展開近似する。また設計粒子のエネルギーは加速空洞の効果によって一般には s の関数であるが、本稿では断りのない限り、設計粒子のエネルギーが場所 s に依存しないかその依存性が無視できる範囲に議論を限定する。横方向の力学的運動量が全力学的運動量より十分小さい、すなわち、ハミルトニアン H_3 の平方根の中の第 2,3 項が第 1 項に比べて十分に小さいと仮定して、

$$\begin{aligned} H_4(x, p_x, y, p_y, t, -E; s) &\sim \\ &- \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) p + \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \frac{1}{2p} \left[(p_x - qA_x)^2 + (p_y - qA_y)^2 \right] - qA_s \end{aligned} \quad (1.26)$$

を得る。運動量のずれ $\Delta p = p - p_0$ はエネルギーのずれ $\Delta E = E - E_0$ を用いて近似的に

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{\Delta E}{\beta_0^2 E_0} - \frac{1}{2\gamma_0^2} \left(\frac{\Delta E}{\beta_0^2 E_0} \right)^2 + \dots \quad (1.27)$$

とあることを用いて、正準変数に関して2次の項までを残すと

$$H_4(x, p_x, y, p_y, t, -E; s) \sim - \left(1 + \frac{x}{\rho} \right) p_0 - p_0 \frac{\Delta E}{\beta_0^2 E_0} + \frac{p_0}{2\gamma_0^2} \left(\frac{\Delta E}{\beta_0^2 E_0} \right)^2 - p_0 \frac{x}{\rho} \frac{\Delta E}{\beta_0^2 E_0} \quad (1.28)$$

$$+ \frac{1}{2p_0} \left[(p_x - qA_x)^2 + (p_y - qA_y)^2 \right] - qA_s$$

となる。

実用的には設計粒子からのズレを議論するために正準座標を加えることが多い。但し、当然ながらその選び方は一意ではなく、加速器の中でも分野や人によってまちまちである。まず進行方向 $(t, -E)$ を設計粒子 $(t_0 = s/\beta_0 c, -E_0)$ からのズレに変える。母関数

$$F_4 = \left(\frac{s}{\beta_0 c} - t \right) (E_0 + \Delta E) \quad (1.29)$$

によって設計粒子からのズレ $(-\Delta t, \Delta E)$ に変換する。

$$-\Delta t = -(t - t_0), \quad \Delta E = E - E_0 \quad (1.30)$$

変換後のハミルトニアン $\hat{H}_4 = H_4 + \partial F_4 / \partial s$ は $\partial F_4 / \partial s$ の寄与から式 (1.28) の第二項が消える。さらに以下のスケーリングを行う。

$$H_5 = \hat{H}_4 / p_0, \quad \hat{p}_x = p_x / p_0, \quad \hat{p}_y = p_y / p_0, \quad \hat{\Delta E} = \Delta E / p_0 \quad (1.31)$$

新しいハミルトニアンは

$$H_5(x, \hat{p}_x, y, \hat{p}_y, -\Delta t, \hat{\Delta E}; s) \sim - \left(1 + \frac{x}{\rho} \right) + \frac{1}{2\gamma_0^2} \left(\frac{\hat{\Delta E}}{\beta_0 c} \right)^2 - \frac{x}{\rho} \frac{\hat{\Delta E}}{\beta_0 c} \quad (1.32)$$

$$+ \frac{1}{2} \left[(\hat{p}_x - a_x)^2 + (\hat{p}_y - a_y)^2 \right] - a_s$$

となる。ここで、 $\mathbf{a} \equiv q\mathbf{A}/p_0$ とした。さらに進行方向に関して正準座標 Δt の次元を横方向の次元と同じにするためにスケーリングを施す。

$$z = -\beta_0 \gamma_0 c \Delta t, \quad p_z = \frac{\hat{\Delta E}}{\beta_0 \gamma_0 c} = \frac{\Delta E}{\gamma_0 \beta_0 c p_0} \sim \frac{1}{\gamma_0} \frac{\Delta p}{p_0} \quad (1.33)$$

正準変数を改めて (z, p_x, y, p_y, z, p_z) と表記して近似展開されたハミルトニアンは

$$H(x, p_x, y, p_y, z, p_z; s) = - \left(1 + \frac{x}{\rho} \right) - \frac{\gamma_0}{\rho} x p_z + \frac{1}{2} \left[(p_x - a_x)^2 + (p_y - a_y)^2 + p_z^2 \right] - a_s \quad (1.34)$$

となる。特に進行方向の正準変数の選び方は様々である。分野横断的に研究をしたり、複数の数値シミュレーションコードを使う場合には、座標の定義に注意されたい。

1.5 代表的な電磁石の磁場

前節までに線形理論に必要な近似されたハミルトニアン (1.34) を得た。ここでは代表的なビームラインの構成要素に対して粒子の運動を定性的に見ていく。まず、デカルト座標 (x, y, z) において自由空間のマクスウェル方程式を考える。本稿ではビーム進行方向の磁場 $B_z = 0$ とする。この場合、磁場は (x, y) 平面の二次元の問題で記述できる。磁場 (B_x, B_y) を虚数単位 i として

$$B_y + iB_x = B_0 \sum_{n=0}^{\infty} (b_n + ia_n) (x + iy)^n \quad (1.35)$$

$$b_n = \frac{1}{B_0 n!} \frac{\partial B_y}{\partial x} \Big|_{x=y=0}, \quad a_n = \frac{1}{B_0 n!} \frac{\partial B_x}{\partial x} \Big|_{x=y=0}$$

と x, y の多項式として表現することを磁場の多重極展開と呼ぶ。ここで b_n をノーマル成分、 a_n をスキュー成分と呼ぶ。スキュー成分の磁場とはノーマル成分の磁場を原点周りに $90/(n+1)$ 度回転したものである。加速器では特定の b_n もしくは a_n のみがゼロでない磁場を発生する電磁石を使ってビームラインを設計する。¹ 通常、スキュー磁場のみ発生する電磁石をスキュー四極電磁石、スキュー六極電磁石などと呼ぶが、ノーマル成分のみ発生する電磁石は単に四極電磁石、六極電磁石とノーマルという言葉を省略することが多い。本稿でも特に断りのない限り、この慣習に従う。また以下では、二極成分 b_0 が $b_0 = 1$ となるように B_0 を選ぶことにし、電荷 q が正の粒子の運動を考える。

1.5.1 偏向電磁石 ($n = 0$)

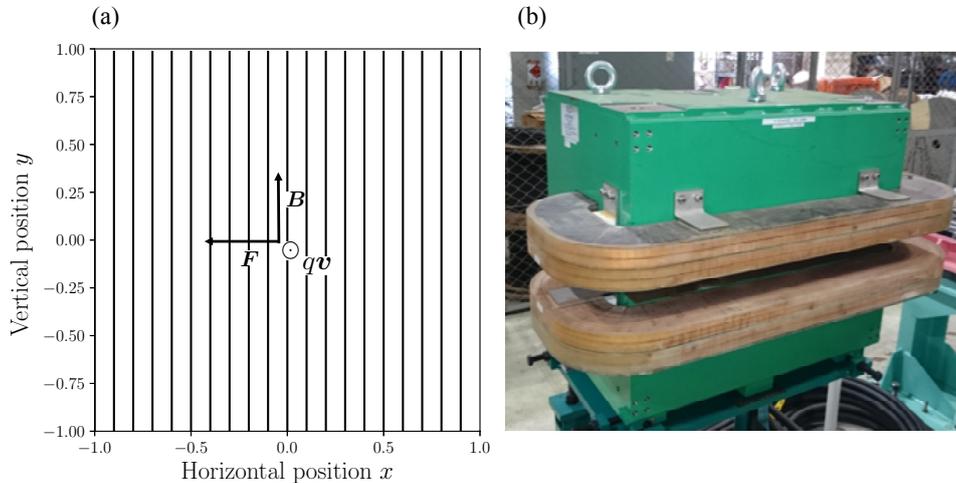


図 1.2: (a) 偏向電磁石の磁力線、粒子が感じる磁場 \mathbf{B} 及び磁場から受ける力 \mathbf{F} 。(b) SuperKEKB 陽電子ダンピングリングの偏向電磁石。

図 1.2 に示したように二つの磁極をもつ電磁石であり、鉛直方向に一樣な磁場を発生する。理想的な偏向電磁石は

$$\mathbf{B} = (B_x, B_y) = B_0(0, 1) \quad (1.36)$$

であり。ビームの軌道は水平方向に曲げられる。通常、設計軌道はこの偏向電磁石のパラメータとその並びによって決まる、水平方向に一樣磁場を発生し、ビームを鉛直方向に曲げる偏向電磁石も存在する (スキュー二極磁場)。また、設計軌道を決める偏向電磁石の他にビーム運転におい

¹無論、現実的には不要な成磁場分が発生してしまう。

てビーム軌道を制御するために用いられる補助的な偏向電磁石も存在する。このような調整用の小型偏向電磁石はステアリング (Steering magnet) と呼ばれ、実際のビーム運転には必要不可欠なものである。

1.5.2 四極電磁石 ($n = 1$)

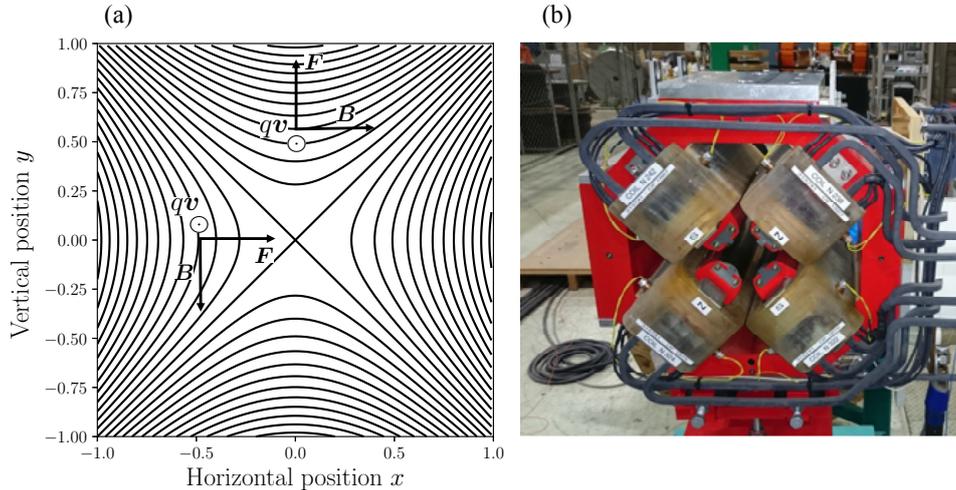


図 1.3: (a) 四極電磁石の磁力線 ($B_0 b_1 > 0$)、粒子が感じる磁場 B 及び磁場から受ける力 F 。(b) SuperKEKB 陽電子ダンピングリングの四極電磁石。

通常ビームを構成する粒子群は位相空間上で分布をもつため、偏向電磁石を並べただけでは全ての構成粒子を安定に輸送できない。設計粒子から位置がずれた粒子に復元力を与えるために四極電磁石が使われる。理想的な四極電磁石の発生する磁場は

$$\mathbf{B} = (B_x, B_y) = B_0 b_1 (y, x) \quad (1.37)$$

である。図 1.3(a) に示したように設計軌道からズレて通過する粒子が受けるローレンツ力を考えると、もし $B_0 b_1 > 0$ あれば、 x 方向にズレた粒子は復元力を、 y 方向にズレた場合は発散力を受けることがわかる。一方、 $B_0 b_1 < 0$ であれば復元力と発散力は反転する。つまり残念ながらどちらの方向にも復元力を働かせることはできない。ところが後で見るよう $B_0 b_1 > 0$ と $B_0 b_1 < 0$ の四極電磁石を適切に配置することで安定にビームを輸送できる。これは強収束の原理と呼ばれる加速器科学を支える重要な原理である。強収束の原理はレンズ光学系において収束型と発散型のレンズを適切に配置することで撮像系を組むことができることに類似している。この光学系との類似性から $B_0 b_1 > 0$, $B_0 b_1 < 0$ の電磁石をそれぞれ収束型、発散型の四極電磁石と呼ぶことが多い。さらにビームラインの設計や安定性を議論する分野はビーム光学 (Beam optics) と呼ばれることがある。

1.5.3 六極電磁石 ($n = 2$)

四極電磁石では位置がズレた粒子に対してローレンツ力を考えたが、ビーム構成粒子は位置だけでなくエネルギー方向にも拡がりをもつ。従って、当然ながらローレンツ力の大きさは粒子の運動量にも依存する。詳細は後に見ていくが六極電磁石を使うことで、運動量のズレに起因する四極電磁石から感じるローレンツ力の過不足分を補うことができる。図 1.4 に六極電磁石の磁力線

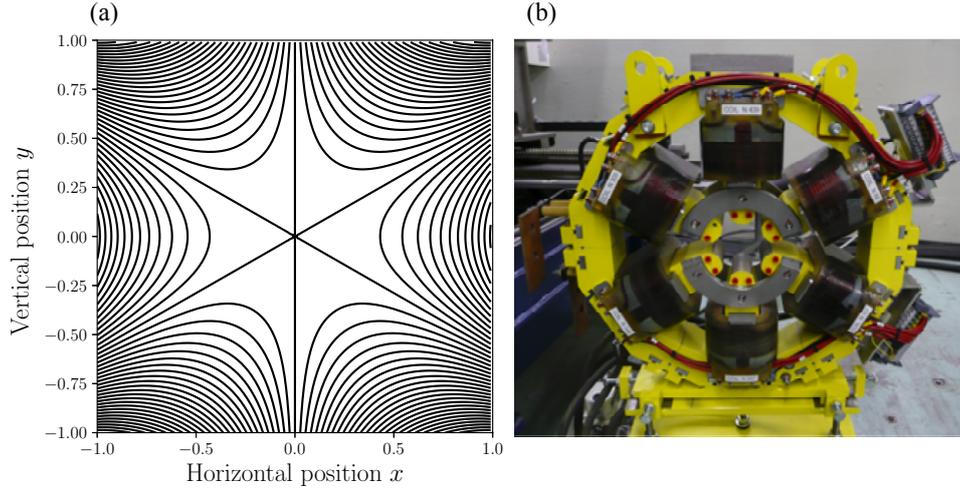


図 1.4: (a) 六極電磁石の磁力線。(b) SuperKEKB 陽電子ダンピングリングの六極電磁石。

と SuperKEKB 陽電子ダンピングリングの六極電磁石の写真を示す。理想的な六電磁石の発生する磁場は

$$\mathbf{B} = (B_x, B_y) = B_0 b_2 (2xy, x^2 - y^2) \quad (1.38)$$

である。粒子の感じるローレンツ力は位置のズレに関して非線形となる。その意味では正確には線形理論の枠を外れるがビームラインに不可欠な構成要素の一つである。

1.6 磁場のベクトルポテンシャル

前節で代表的なビームラインの構成要素の磁場を見てきたが、我々がハミルトニアンに与えたいのは磁場ではなくベクトルポテンシャル \mathbf{A} である。古典電磁気学の教えるところではベクトルポテンシャルの選び方は一意には決まらず、ゲージの分だけ不定性がある。通常、ゲージとしてクーロンゲージ $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ を採用することが多い。クーロンゲージを採用することで式 (1.35) の磁場を A_s 成分のみで表現できるためである。

まず偏向電磁石のベクトルポテンシャルを考えてみる。磁場とベクトルポテンシャルの関係は

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{1+x/\rho} \left(\frac{\partial A_s}{\partial y} \right) \mathbf{e}_x + \frac{1}{1+x/\rho} \left(-\frac{\partial A_s}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y \quad (1.39)$$

であるから、式 (1.36) に対応する理想的な一様磁場 $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_y$ を考えると

$$B_y = B_0 = -\frac{1}{1+x/\rho} \left(\frac{\partial A_s}{\partial x} \right) \quad (1.40)$$

となる。従って A_s として

$$A_s = -B_0 \left(1 + \frac{x}{2\rho} \right) x \quad (1.41)$$

を得る。導出は省略するが、特に曲率 $1/\rho$ がゼロのときは式 (1.35) の磁場に対応するベクトルポテンシャルは

$$A_s = A_z = -B_0 \Re \sum_{n=0}^{\infty} (b_n + ia_n) \frac{(x + iy)^{n+1}}{n+1} \quad (1.42)$$

であることを示せる。

1.7 ハミルトニアンと具体例とその転送行列

ここでは具体的にハミルトニアン (1.34) にベクトルポテンシャルの表式を与え、写像（転送行列）を求める。

1.7.1 ドリフトスペース

ベクトルポテンシャルはゼロ ($\mathbf{A} = 0$) で、設計軌道は直線であるから $1/\rho = 0$ である。ハミルトニアンは

$$H = (x, p_x, y, p_y, z, p_z) = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2} \quad (1.43)$$

長さ L のドリフトスペースの写像は以下の形になる。

$$\begin{pmatrix} x \\ p_x \\ y \\ p_y \\ z \\ p_z \end{pmatrix}_{\text{out}} = \begin{pmatrix} 1 & L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p_x \\ y \\ p_y \\ z \\ p_z \end{pmatrix}_{\text{in}} \quad (1.44)$$

1.7.2 偏向電磁石

設計粒子が軌道長 L で曲率半径 ρ の軌跡を描く偏向電磁石を考える。を得る。このとき $qB_0\rho = p_0$ であるからベクトルポテンシャル a_s は

$$a_s = -\frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{x}{2\rho} \right) x \quad (1.45)$$

であるから、ハミルトニアンは

$$H = (x, p_x, y, p_y, z, p_z) = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2} + \frac{1}{2\rho^2} x^2 - \frac{\gamma_0}{\rho} x p_z \quad (1.46)$$

となる。ここでは $x p_z$ という項があることが重要である。後に見ていくが、これは水平方向の位置が粒子の運動量のズレと相関をもつ（運動量分散）ことに由来する項である。横方向の運動方程式は

$$x'' + \frac{1}{\rho^2} x = \frac{\gamma_0}{\rho} p_z \quad (1.47)$$

となる。これは非斉次方程式であるから、その一般解は斉次方程式の一般解と特殊解の和で書ける。発見的ではあるが

$$x = \gamma_0 \rho p_z \quad (1.48)$$

が特殊解であることが分かる。² 一方、斉次方程式

$$x'' + \frac{1}{\rho^2} x = 0 \quad (1.49)$$

はよく知られた単振動の運動方程式であるから、その一般解は A, B を定数として

$$x(s) = A \cos \frac{s}{\rho} + B \sin \frac{s}{\rho} \quad (1.50)$$

²: p_z は定数である。

である。従って、式 (1.47) の一般解は

$$x(s) = A \cos \frac{s}{\rho} + B \sin \frac{s}{\rho} + \gamma_0 \rho p_z \quad (1.51)$$

となる。初期条件 $s = 0$ で (x_0, p_{x0}) として定数 A, B を決定すると、

$$x(s) = x_0 \cos \frac{s}{\rho} + \rho p_{x0} \sin \frac{s}{\rho} + \rho \left(1 - \cos \frac{s}{\rho}\right) \gamma_0 p_z \quad (1.52)$$

また、ビーム進行方向に関しては

$$\begin{aligned} z' &= \frac{\partial H}{\partial p_z} = -\frac{\gamma_0}{\rho} x \\ &= -\frac{\gamma_0}{\rho} x_0 \cos \frac{s}{\rho} - \gamma_0 p_{x0} \sin \frac{s}{\rho} - \gamma_0^2 \left(1 - \cos \frac{s}{\rho}\right) p_z \end{aligned} \quad (1.53)$$

であるから、これを同様に $s = 0$ で (z_0, p_{z0}) を初期条件として解くと、

$$z(s) = z_0 - \gamma_0 x_0 \sin \frac{s}{\rho} - \gamma_0 \rho p_{x0} \left(1 - \cos \frac{s}{\rho}\right) - \gamma_0^2 \left(s - \rho \sin \frac{s}{\rho}\right) p_{z0} \quad (1.54)$$

となる。鉛直方向に関してはドリフトスペースと同じであるから、結局、転送行列として

$$\begin{pmatrix} x \\ p_x \\ y \\ p_y \\ z \\ p_z \end{pmatrix}_{\text{out}} = \begin{pmatrix} C & \rho S & 0 & 0 & 0 & \rho \gamma_0 (1 - C) \\ -S/\rho & C & 0 & 0 & 0 & \gamma_0 S \\ 0 & 0 & 1 & L & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma_0 S & -\gamma_0 \rho (1 - C) & 0 & 0 & 1 & -\gamma_0^2 (L - \rho S) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p_x \\ y \\ p_y \\ z \\ p_z \end{pmatrix}_{\text{in}} \quad (1.55)$$

を得る。ここで、 $C \equiv \cos(L/\rho)$, $S \equiv \sin(L/\rho)$ と表記した。運動量のズレ ($\propto p_z$) によって経路長が異なり、その効果が通過時間 ($\propto z$) のズレとして現れることがわかる。

1.7.3 四極電磁石

設計軌道は直線であるから $1/\rho = 0$ である。ベクトルポテンシャル及びハミルトニアンは

$$a_s = -\frac{k_1}{2} (x^2 - y^2), \quad k_1 = \frac{qB_0 b_1}{p_0} \quad (1.56)$$

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + \frac{1}{2} k_1 (x^2 - y^2) + \frac{p_z^2}{2} \quad (1.57)$$

水平方向の運動は偏向電磁石の場合で $p_z = 0$, $k = 1/\rho^2$ としたものに等しい。鉛直方向の運動は不安定で、その転送行列には水平方向に現れる \cos , \sin の代わりに双曲線関数 \cosh , \sinh が現れる。

$$\begin{pmatrix} x \\ p_x \\ y \\ p_y \\ z \\ p_z \end{pmatrix}_{\text{out}} = \begin{pmatrix} C & S/\sqrt{k_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{k_1} S & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_h & S_h \sqrt{|k_1|} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{|k_1|} S_h & C_h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p_x \\ y \\ p_y \\ z \\ p_z \end{pmatrix}_{\text{in}} \quad (1.58)$$

ここで $k_1 > 0$ とし、 $C \equiv \cos \sqrt{k_1}L$, $S \equiv \sin \sqrt{k_1}L$, $C_h \equiv \cosh \sqrt{|k_1|}L$, $S_h \equiv \sinh \sqrt{|k_1|}L$ と表記した。 $k_1 < 0$ の場合、転送行列は $\sqrt{k_1}$ を $\sqrt{-k_1}$ と変えて (x, p_x) と (y, p_y) に対応する転送行列を入れ替える。 $k_1 > 0$ の四極電磁石は水平 (x) 方向に収束、鉛直方向 (y) 方向にビームを発散させる効果がある。 $k_1 < 0$ の場合は状況が反転する。単独の四極磁場で x, y の両方向に収束効果をもたらすことはできない (Earnshaw の定理)。

第2章 横方向の運動

加速器中のビーム構成粒子が設計粒子の周りを行う三次元的な運動のうち、ビーム水平方向及び鉛直方向の運動をベータトロン運動と呼ぶ。一方、ビーム進行方向の運動をシンクロトロン運動と呼ぶ。シンクロトロン運動に関しては第3章で扱う。ここではベータトロン運動について述べる。

2.1 ベータトロン運動とその定式化

今、エネルギーが設計エネルギーと等しい粒子 ($p_z = 0$) の水平方向の運動を考える。第1章で見てきたドリフトスペース、偏向電磁石、四極電磁石のハミルトニアンは $k(s)$ を加速器中の場所 s の関数として

$$H = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}k(s)x^2 \quad (2.1)$$

という形にまとめられる。このハミルトニアンから得られる運動方程式は

$$\frac{d^2x}{ds^2} + k(s)x = 0 \quad (2.2)$$

となる。この方程式は Hill 方程式と呼ばれる二階の常微分方程式に含まれる。式 (2.2) はバネ定数が時間変化する調和振動子と数学的には等価である。よく知られているように k が定数であれば単振動であり、その一般解は A , ϕ_0 , ω を定数として

$$x(s) = A \cos(\omega s + \phi_0) \quad (2.3)$$

である。ここから類推して w , ϕ を s の関数として

$$x(s) = Aw(s) \cos[\phi(s) + \phi_0] \quad (2.4)$$

という一般解を仮定する。実際に $k(s)$ が周期関数の場合、この仮定は Floquet の定理と呼ばれる定理により正当化される。式 (2.4) を式 (2.2) に代入すると、

$$-A(2w'\phi' + w\phi'') \sin(\phi + \phi_0) + A(w'' - w\phi'^2 + kw) \cos(\phi + \phi_0) = 0 \quad (2.5)$$

となる。等式を成立させるために左辺の \sin , \cos の係数がそれぞれゼロであるとする。まず \sin の係数がゼロであることから

$$w(2w'\phi' + w\phi'') = (w^2\phi')' = 0 \quad (2.6)$$

となり、 c_1, c_2 を定数として

$$\phi = \int \frac{c_1}{w^2(s)} ds + c_2 \quad (2.7)$$

である。この結果を \cos の係数がゼロという式に代入して、

$$w^3(w'' + kw) = c_1^2 \quad (2.8)$$

を得る。ここで $c_1 = 1$ として、Twiss パラメーターと呼ばれる加速器分野特有の関数を定義する。

$$\beta(s) \equiv w^2(s) \quad (2.9)$$

$$\alpha(s) \equiv -\frac{1}{2} \frac{d\beta(s)}{ds} \quad (2.10)$$

$$\gamma(s) \equiv \frac{1 + \alpha^2(s)}{\beta(s)} \quad (2.11)$$

関数 $\beta(s), \phi(s)$ はそれぞれ、ベータ関数、ベータトロン位相と呼ばれる。ベータ関数を使うと一般解は J を任意定数として

$$x(s) = \sqrt{2J\beta(s)} \cos(\phi(s) + \phi_0) \quad (2.12)$$

$$\phi = \int \frac{1}{w^2(s)} ds \quad (2.13)$$

で与えられる。但し位相の原点の任意性に伴う定数 c_2 をゼロとした。一般解を s で微分することで、

$$x'(s) = p_x(s) = -\sqrt{\frac{2J}{\beta(s)}} [\sin(\phi(s) + \phi_0) + \alpha(s) \cos(\phi(s) + \phi_0)] \quad (2.14)$$

となる。ここで、以下の関係が成立することが容易に示せる。

$$\gamma x^2 + 2\alpha x p_x + \beta p_x^2 = 2J \quad (2.15)$$

ここで $2J$ は Courant-Snyder の不変量と呼ばれ、場所 s に依存しない保存量である。

Hill 方程式に従う粒子の運動は当然ながら粒子の初期条件によって異なる。この初期条件に対応する量が J と初期位相 ϕ_0 である。ベータ関数は微分方程式 (2.8) を解くことで決定できるが、一意な解が求まるのは $k(s)$ に周期性を課した場合のみである。

周期境界条件として周長 C の円形型加速器を考えると、 $k(s)$ は $k(s+C) = k(s)$ を満たす。この場合、一周あたりのベータトロン位相の進みを 2π で割った量 ν を定義する。

$$\nu \equiv \frac{\phi(s_0 + C) - \phi(s_0)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{s_0}^{s_0+C} \frac{ds}{\beta(s)} \quad (2.16)$$

この量は一周あたりのベータトロン振動の回数であり、ベータトロン振動数、もしくはベータトロンチューンと呼ぶ。今、ビームラインのある場所 s_1 から s_2 への転送

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ p_{x2} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ p_{x1} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

を考える。ここで

$$\begin{aligned} \cos(\phi(s_1) + \phi_0) &= \frac{x_1}{\sqrt{2J\beta(s_1)}}, & \sin(\phi(s_1) + \phi_0) &= \sqrt{\frac{\beta(s_1)}{2J}} p_{x1} + \frac{\alpha(s_1)}{\sqrt{2J\beta(s_1)}} x_1 \\ \cos(\phi(s_1) + \Delta\phi + \phi_0) &= \frac{x_2}{\sqrt{2J\beta(s_2)}}, & \sin(\phi(s_1) + \Delta\phi + \phi_0) &= \sqrt{\frac{\beta(s_2)}{2J}} p_{x2} + \frac{\alpha(s_2)}{\sqrt{2J\beta(s_2)}} x_2 \\ \Delta\phi &= \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\beta(s)} \end{aligned} \quad (2.18)$$

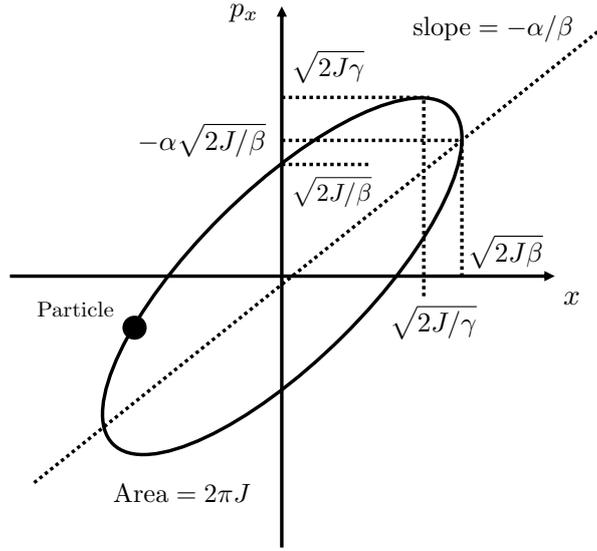


図 2.1: 式 (2.15) で決まる楕円

であることから、三角関数の加法定理を用いて行列の各成分を求めると、 s_1 から s_2 への転送行列 M は

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}}(\cos(\Delta\phi) + \alpha_1 \sin \Delta\phi) & \sqrt{\beta_1\beta_2} \sin \Delta\phi \\ -\frac{(\alpha_2 - \alpha_1) + (1 + \alpha_1\alpha_2 \sin \Delta\phi)}{\sqrt{\beta_1\beta_2}} & \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}}(\cos(\Delta\phi) - \alpha_1 \sin \Delta\phi) \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

と書ける。この行列はさらに以下のように3つの行列の形で表現できる。

$$M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\beta_2} & 0 \\ \alpha_2/\sqrt{\beta_2} & \sqrt{\beta_2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \cos \Delta\phi & \sin \Delta\phi \\ -\sin \Delta\phi & \cos \Delta\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\beta_1} & 0 \\ \alpha_1/\sqrt{\beta_1} & \sqrt{\beta_1} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

ここで場所 s に依存する座標変換

$$\begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\beta(s)} & 0 \\ \alpha(s)/\sqrt{\beta(s)} & \sqrt{\beta(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p_x \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

を考えるとビームの運動は (X, P) 平面上での回転になることが分かる。座標変換を行うことで線形運動をなるべく単純化するこの種の定式化は一般の3次元の運動に拡張できる。線形運動を単純化することで非線形な運動を摂動的に扱う際に見通しが良くなる。

今、 $s_2 = s_1 + C$ とすると Twiss パラメーターは一致し、位相差はチューンになるため転送行列は

$$M = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\nu + \alpha(s) \sin 2\pi\nu & \beta(s) \sin 2\pi\nu \\ \gamma(s) \sin 2\pi\nu & \cos 2\pi\nu - \alpha(s) \sin 2\pi\nu \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

という形になる。

この場合の転送行列 M を特に“周回行列”One turn matrix”と呼ぶ場合がある。加速器のある場所 s で粒子を (x, p_x) 平面上にプロットすると、図 2.1 に示した様に周回ごとに式 (2.15) で決まる楕円上に乗る。一周後に楕円上のどの点に移るかはチューン ν によって決まる。例えばチューンが整数であれば前回と同じ場所に来る。Twiss パラメーターが場所 s に依存するので、この楕円の形は場所に依存する。一方、 J が定数であるから楕円の面積は場所には依存しない。

Twiss パラメーター α, β, γ が s に依存してどのように変化していくかを考える。今、場所 $s = s_1$ から $s = s_2$ への粒子の正準座標の転送 $(x_1, p_{x1}) \rightarrow (x_2, p_{x2})$ を与える転送行列が

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ p_{x2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ p_{x1} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

であると分かっているとす。このとき、Courant-Snyder の不変量の式 (2.15) から

$$\gamma_1 x_1^2 + 2\alpha_1 x_1 p_{x1} + \beta_1 p_{x1}^2 = \gamma_2 x_2^2 + 2\alpha_2 x_2 p_{x2} + \beta_2 p_{x2}^2 \quad (2.24)$$

である。第 4 章で見ると運動がハミルトニアンで支配されている場合は $\det(M) = 1$ である。この場合、式 (2.23) は転送行列の逆行列を求めることで

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ p_{x1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_2 \\ p_{x2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ p_{x2} \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

と書き直せる。式 (2.25) を用いて式 (2.24) の左辺を x_2, p_{x2} で書き表し、両辺の係数を比較することで Twiss パラメーターの転送行列を得る。

$$\begin{pmatrix} \beta_2 \\ \alpha_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}^2 & -2m_{11}m_{12} & m_{12}^2 \\ -m_{11}m_{21} & m_{11}m_{22} + m_{12}m_{21} & -m_{12}m_{22} \\ m_{21}^2 & -2m_{21}m_{22} & m_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \alpha_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

次に、周回行列 M に関して運動の安定性を考える。そのために行列 M の固有値 λ を求める。行列 P の対角和及び行列式をそれぞれ $\text{tr}(P), \det(P)$ と表記して

$$\lambda^2 - \text{tr}(M)\lambda + \det(M) = 0 \quad (2.27)$$

であるから固有値は

$$\lambda_{\pm} = \frac{\text{tr}(M)}{2} \pm \sqrt{\frac{\text{tr}(M)}{2} - 1} \quad (2.28)$$

である。但し $\det(M) = 1$ を用いた。これらの固有値に対応する固有ベクトルを $\mathbf{v}_+, \mathbf{v}_-$ とすれば N 周期後の \mathbf{x} は a, b を初期条件に対応する実定数として

$$\mathbf{x}^N = M^N (a\mathbf{v}_+ + b\mathbf{v}_-) = (\lambda_+^N a\mathbf{v}_+ + \lambda_-^N b\mathbf{v}_-) \quad (2.29)$$

従って、 $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{x}^N$ が有界であるためには $|\lambda_{\pm}| < 1$ でなければならない。この条件は式 (2.28) の平方根の中身がゼロ以下であることを意味する。従って、周回行列 M による写像の繰り返しが安定であるための条件として

$$-2 \leq \text{tr}(M) \leq 2 \quad (2.30)$$

が M に課せられる。

ビームの位相空間分布とエミッタンス

ここまでは一つの粒子の運動を論じたが、実際のビームは異なる初期条件 (J, ϕ_0) をもつ粒子の集団である。ここで、ビームが位相平面 (x, p_x) で占有する面積

$$\varepsilon \equiv \int_A dx dp_x \quad (2.31)$$

を定義する。但し A はビームが占有する領域を表す。この量はエミッタンスと呼ばれる。エミッタンスが小さいビームは、粒子群の位置と発散角度の拡がり小さいため、そのビームの指向性が高いことを意味する。そのためエミッタンスはビームの品質を表す量として加速器の性能を議論する上で不可欠な単語である。

今、粒子の分布として式 (2.15) で定義される楕円内部の一様分布を考える。この場合、エミッタンスは $2\pi J$ であり、保存量であることは明白である。実際のビームは一様分布ではなく、ガウス分布、放物線分布、Waterbag 分布といった様々な分布をとり得る。これら様々な分布を持つビームの位相空間上の形や大きさを統一的に扱うためにしばしば分布の 2 次モーメントに着目して議論することが多い。¹ ここでエンベロープマトリックス (シグママトリックス) Σ を

$$\Sigma \equiv \begin{pmatrix} \langle x^2 \rangle & \langle xp_x \rangle \\ \langle xp_x \rangle & \langle p_x^2 \rangle \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

と定義する。但し、 $\langle v \rangle$ は v の平均値であり、密度分布関数 $\rho(x, p_x)$ から

$$\langle v \rangle = \frac{\int \rho(x, p_x) v dx dp_x}{\int \rho(x, p_x) dx dp_x} \quad (2.33)$$

と導かれる。今、式 (2.31) のエミッタンスを近似した量として二乗平均 (RMS) エミッタンス ϵ^{rms} を

$$\epsilon^{\text{rms}} \equiv \det(\Sigma) = \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle p_x^2 \rangle - \langle xp_x \rangle^2} \quad (2.34)$$

で定義する。エンベロープマトリックスの転送はその定義から

$$\Sigma_2 = M^t \Sigma_1 M \quad (2.35)$$

と与えられる。ここで行列 P の転置行列を P^t と表記した。転送前後の行列式を計算してみると

$$\det(\Sigma_2) = \det(M^t) \det(\Sigma_1) \det(M) \quad (2.36)$$

となる。第 4 章で見るように運動がハミルトニアンで支配されている場合は $\det(M) = 1$ である。一般に $\det(P) = \det(P^t)$ であるから、RMS エミッタンスは保存することが分かる。すなわち加速器に現れる標準的な構成要素のみを使ってエミッタンスを縮小 (品質を向上) させることは残念ながら原理的に不可能である。

マッチング

ビーム構成粒子のベータトロン位相の分布が一様である ($\langle \phi \rangle = 0$) と仮定すると式 (2.12) および (2.14) からエンベロープマトリックスは Twiss パラメーターを用いて

$$\Sigma = \epsilon^{\text{rms}} \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ -\alpha & \gamma \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

となる。ビームラインの Twiss パラメーターは式 (2.2) において周期境界条件を課すことで決定した。一方、式 (2.37) からビームラインとは独立に任意のビームに対してビームの Twiss パラメーター ($\beta_b, \alpha_b, \gamma_b$) を定義することができる。

$$\beta_b \equiv \frac{\langle x^2 \rangle}{\epsilon^{\text{rms}}}, \quad \alpha_b \equiv -\frac{\langle xp_x \rangle}{\epsilon^{\text{rms}}}, \quad \gamma_b \equiv \frac{\langle p_x^2 \rangle}{\epsilon^{\text{rms}}} = \frac{1 + \alpha_b^2}{\beta_b} \quad (2.38)$$

¹一次モーメントはあらかじめ差し引いておくことが多い。

ビームラインの Twiss パラメーター (β, α) とビームの分布から算出された Twiss パラメーター (β_b, α_b) を整合させる操作をマッチングと呼ぶ。通常、ビームラインの真空パイプの径、ビームコリメータの位置といったパラメータはビームラインに整合した Twiss パラメーターをもつビームを想定して決められている。従って、加速器の運転においてマッチングは重要な調整項目である。²

運動量分散

線形化された偏向電磁石のハミルトニアンにおいては $\gamma_0 x p_z / \rho$ という項があるために水平方向とビーム進行方向の運動が独立ではなくなる。ここで、水平方向の正準座標 (x, p_x) に全学的運動量の相対的なズレ $\delta = \Delta p / p_0 = (p - p_0) / p_0$ を加えて、転送行列を 3×3 に拡張する。それは $\delta = \gamma_0 p_z$ であるから、3つ目の要素として進行方向の正準運動量を加えることに対応する。円形加速器を一周する前後の転送は

$$\begin{pmatrix} x \\ p_x \\ p_z \end{pmatrix}_{s=s_0+C} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{16} \\ m_{21} & m_{22} & m_{26} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p_x \\ p_z \end{pmatrix}_{s=s_0} \quad (2.39)$$

と書ける。但し、 m_{ij} は周回行列 M の i 行 j 列目の成分である。ここで p_z を定数として、式 (2.39) の周期解、すなわち平衡軌道 $(\tilde{x}, \tilde{p}_x, p_z)$ を求めると、

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{p}_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - m_{11} & -m_{12} \\ -m_{21} & 1 - m_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} m_{16} \\ m_{26} \end{pmatrix} p_z \quad (2.40)$$

となる。ここで運動量分散関数 D_x (とその s 微分 D'_x) を次式で定義する。

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D'_x \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial(\Delta p/p_0)} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{p}_x \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial(\gamma_0 p_z)} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{p}_x \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

これは式 (2.40) から

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D'_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - m_{11} & -m_{12} \\ -m_{21} & 1 - m_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} m_{16}/\gamma_0 \\ m_{26}/\gamma_0 \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

と書ける。もし式 (2.42) の逆行列が存在すれば D, D' を決定することができる。分散関数はその定義から、運動量が設計値から 100% ずれた粒子の閉軌道と行うことができる。³ 分散関数の場所 s_1 から s_2 への転送は水平方向の転送と同様に

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D'_x \end{pmatrix}_{s=s_2} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_x \\ D'_x \end{pmatrix}_{s=s_1} + \begin{pmatrix} m_{16}/\gamma_0 \\ m_{26}/\gamma_0 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

で与えられる。例えば、偏向電磁石による分散関数の転送は偏向電磁石の転送行列 (1.55) から

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D'_x \end{pmatrix}_{s=s_2} = \begin{pmatrix} C & \rho S \\ S/\rho & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_x \\ D'_x \end{pmatrix}_{s=s_1} + \begin{pmatrix} \rho(1-C)/\gamma_0 \\ S/\gamma_0 \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

である。

² マッチングという言葉はもう少し広い意味で使われることもある。例えばビームラインの設計などの際に電磁石のパラメーターを最適化して所定の場所で Twiss パラメーターなどを所望の値にすることもマッチングもしくはマッチング計算と呼ぶ場合がある。

³ 無論、一般に運動量が 100% ずれた粒子の運動は我々の近似されたハミルトニアンでは正しく記述できないが。

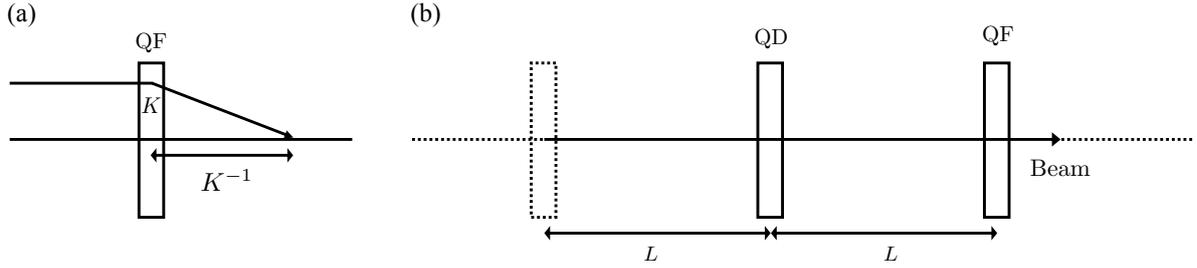


図 2.2: (a) 薄肉近似と (b)FODO セルの繰り返し

運動量のみが設計粒子からズレている粒子の軌道は当然磁場からのローレンツ力が違うので偏向電磁石を進む間に徐々に水平方向に設計軌道から遠ざかっていく。一方、エネルギーが同じで水平方向の正準変数がズレた粒子も当然設計軌道とは違う軌跡を描く。つまり偏向電磁石通過後の水平方向の正準座標 (x, p_x) は水平方向の正準座標のズレとエネルギーのズレに起因する効果の足し合わせとなる。分散関数の導入により、正準座標 (x, p_x) は水平方向のズレに起因する成分を (x_b, p_{xb}) 、運動量のズレに起因する成分を (x_d, p_{xd}) と表記して

$$\begin{aligned} x &= x_\beta + x_\delta = x_\beta + D_x \gamma_0 p_z \\ p_x &= p_{x\beta} + p_{x\delta} = p_{x\beta} + D'_x \gamma_0 p_z \end{aligned} \quad (2.45)$$

と書ける。すなわち、運動量のズレた粒子は分散関数と運動量のズレで決まる閉軌道の周りでベータトロン振動する。分散関数の導入は後で見るとハミルトニアンから $x p_z$ という自由度間の結合項を消すような場所 s に依存する座標変換を施すことを意味する。⁴

安定性解析の例：FODO セル

最も単純な例として図 2.2 に示した収束型、発散型四極電磁石 (QF、QD) とドリフトスペースの繰り返しからなるビームラインにおいて水平方向の運動を考える。このような単位収束構造を FODO セルと呼ぶ。⁵ 一般にビームラインはある単位収束構造の繰り返しからなる部分をもつことが多い。そのような単位収束構造をセルと呼ぶ。我々がここで考えているのは FODO セルを単位収束構造とする無限に続くビームラインである。

ここで議論を簡単にするために長さゼロの電磁石を考える。このような近似を薄肉 (Thin lens) 近似と呼ぶ。薄肉近似における QF および QD の転送行列は式 (1.58) で $\sqrt{k_1 l} = K = \text{const.}$ の条件下で $l \rightarrow 0$ の極限をとることで得られる。

$$M_{\text{QF, QD}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mp K & 1 \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

薄肉近似は一般の力学で言うところの撃力近似である。つまりビーム位置は変化させず、正準運動量のみ変化させる近似である。薄肉近似はその簡便さから理論計算にしばしば用いられる。このビームラインの転送行列は各要素の転送行列の積を計算して

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -K & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ K & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + KL & 2L + KL^2 \\ -K^2 L & 1 - KL - K^2 L^2 \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

⁴転送行列を区対角化することに相当する。

⁵FODO の F は Focusing magnet、D は Defocusing magnet を指す。FODO の O は磁場がゼロのドリフトスペースを指す。これは英語では 0(ゼロ) を O(オー) と読むことに由来しているであろう。

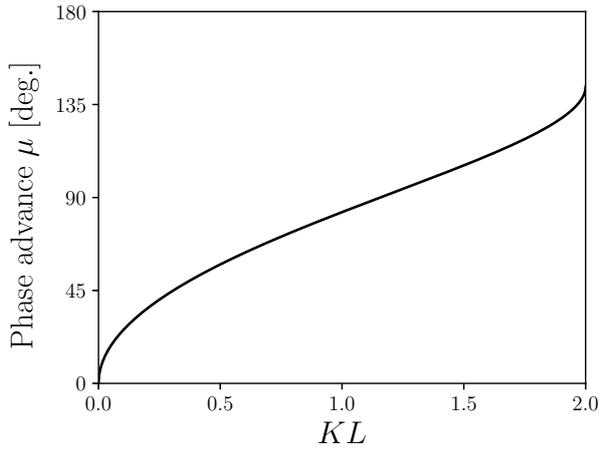


図 2.3: ベータトロン位相の進みと KL 。

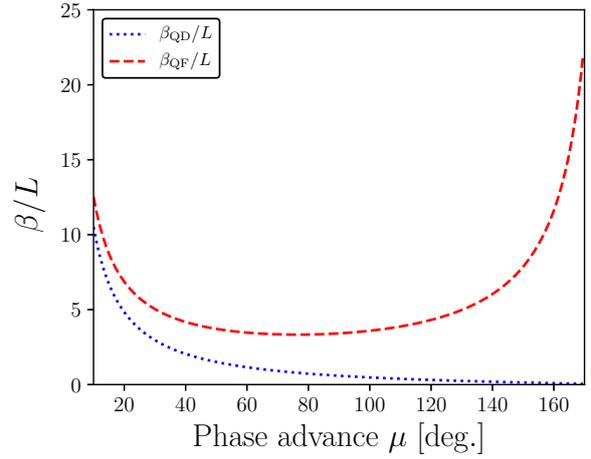


図 2.4: $\beta_{QD,QF}$ と位相の進み μ 。

となる。このビームラインにおける粒子の運動が安定である条件は式 (2.30) から

$$-2 \leq 2 - K^2 L^2 \leq 2 \rightarrow L < 2/K \quad (2.49)$$

となる。焦点距離は K^{-1} であるから、この条件は四極電磁石の間隔を焦点距離の 2 倍より狭くしなければならないことを示している。

式 (2.48) を式 (2.22) と比較することで Twiss パラメーターと 1 セル辺りのベータトロン位相の進み μ を計算することができる。具体的には

$$\begin{cases} 2 \cos \mu = 2 - K^2 L^2 & (2.50) \\ \beta \sin \mu = L + KL^2 & (2.51) \end{cases}$$

を解けば良い。但し、 $\mu = 2\pi\nu$ である。まず、第 1 式から位相の進み μ は

$$\sin^2 \frac{\mu}{2} = \frac{K^2 L^2}{4} \quad (2.52)$$

と計算できる。図 2.3 に KL の関数として μ をプロットした。この結果を第 2 式に用いることで QF 中心でのベータ関数 β_{QF} は

$$\beta_{QF} = \frac{2L}{\sin \mu} \left(1 + \sin \frac{\mu}{2} \right) \quad (2.53)$$

である。QD 中心でのベータ関数 β_{QD} はここまでの議論において $K \rightarrow -K$ と置換するればよく、その結果は

$$\beta_{QD} = \frac{2L}{\sin \mu} \left(1 - \sin \frac{\mu}{2} \right) \quad (2.54)$$

となる。図 2.4 に $\beta_{QD,QF}$ と位相の進み μ の関係を示す。通常 μ の値としてはベータ関数が極端に大きくならず、 μ に対する依存性が比較的緩やかな領域が選ばれる。

加速器の設計や運転ではベータ関数やチューンを所定の値にするために電磁石の磁場の強さや配置を最適化する必要があるが、それは一般に制約条件付きの非線形最適化問題となる。従って実際上は何らかの加速器計算コードが不可欠である。

2.2 磁場誤差の影響と共鳴不安定性

ここまで全ての電磁石が設計通りの磁場を発生する場合を考えてきた。現実の加速器では、電磁石の設置誤差、電源の設定精度の限界、電磁石の製作誤差に由来する理想的な磁場からの歪み、といった様々な理由によりビームが感じる磁場が設計値からズレてしまう。ここでは設計運動量をもつ粒子の横方向の運動方程式

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + k(s)x = 0 \quad (2.55)$$

に対して周期 C の周期境界条件を考え、磁場誤差の影響を論ずる。

2.2.1 二極磁場誤差と整数共鳴

磁場誤差として場所 $s = s_0$ に薄肉の二極磁場がある場合を考える。磁場誤差により粒子は

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ p_{x0} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ p_{x0} + \Delta k_0 \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

のキックを受ける。二極磁場の存在下で周期 C の周期境界条件を満たす (x_0, p_{x0}) を求める。周回行列を M として

$$M \begin{pmatrix} x_0 \\ p_{x0} + \Delta k_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ p_{x0} \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

を (x_0, p_{x0}) に関して解くことで

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ p_{x0} \end{pmatrix} = (I - M)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta k_0 \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

となる。ここで I は単位行列である。具体的に成分を書き下すと、

$$x_0 = \frac{\beta_0}{2 \sin \pi \nu_x} \Delta k_0 \cos \pi \nu \quad (2.59)$$

$$p_{x0} = \frac{\beta_0}{2 \sin \pi \nu_x} \Delta k_0 (\sin \pi \nu_x - \alpha_0 \cos \pi \nu) \quad (2.60)$$

である。任意の場所 s の閉軌道の歪みは磁場誤差のある場所 s_0 から場所 s への転送行列（式 (2.19) を参照）を用いて

$$x(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)\beta_0}}{2 \sin \pi \nu_x} \Delta k_0 \cos(|\phi(s) - \phi_0| - \pi \nu) \quad (2.61)$$

となる。この式から分かる重要なことはベータトロンチューン ν が整数の時、軌道が発散することである。これは整数共鳴と呼ばれる不安定性である。

加速器に複数の二極磁場 Δk_i が存在する場合、それらの和をとって

$$x(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)}}{2 \sin \pi \nu_x} \sum_i \sqrt{\beta_i} \Delta k_i \cos(|\phi(s) - \phi_i| - \pi \nu) \quad (2.62)$$

である。もしくは積分形式で

$$x(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)}}{2 \sin \pi \nu_x} \oint \sqrt{\beta(s')} \Delta k(s') \cos(|\phi(s) - \phi(s')| - \pi \nu) ds' \quad (2.63)$$

と表現できる。一般に何らかの磁場誤差や外乱によって発生する閉軌道の乱れを”Closed orbit distortion”、略して COD と呼ぶ。

ここで、複数の二極磁場がランダムに存在する場合、統計的にはどのような COD が観測されるかを考えてみる。式 (2.62) において二乗平均を考える。

$$\langle x(s)^2 \rangle = \frac{\beta(s)}{4 \sin^2 \pi \nu_x} \left\langle \left(\sum_i \sqrt{\beta_i} \Delta k_i \cos(|\phi(s) - \phi_i| - \pi \nu) \right)^2 \right\rangle \quad (2.64)$$

ここで磁場誤差の分布に相関がない、すなわち、いくつかの磁場誤差は影響が互いに打ち消しあう、ということを仮定すると、

$$\begin{aligned} \langle x(s)^2 \rangle &\sim \frac{\beta(s)}{4 \sin^2 \pi \nu_x} \left\langle \sum_i \beta_i \Delta k_i^2 \cos^2(|\phi(s) - \phi_i| - \pi \nu) \right\rangle \\ &= \frac{\beta(s)}{8 \sin^2 \pi \nu_x} \left\langle \sum_i \beta_i \Delta k_i^2 \right\rangle \end{aligned} \quad (2.65)$$

通常、 β_i と Δk_i の間にも相関がないので、 N_{error} を磁場誤差の総数として

$$\langle x(s)^2 \rangle = \frac{\beta(s)}{8 \sin^2 \pi \nu_x} N_{\text{error}} \langle \beta_i \rangle \langle \Delta k_i^2 \rangle \quad (2.66)$$

となる。余分な二極磁場をもたらす代表的な原因として四極電磁石の設置誤差がある。式 (1.37) において $x \rightarrow \Delta x$ とすると確かに四極磁場に加えて二極磁場成分 $-k_1 \Delta x$ が生じることが分かる。この場合、式 (2.66) は

$$\langle x(s)^2 \rangle = \frac{\beta(s)}{8 \sin^2 \pi \nu_x} N_{\text{error}} \langle \beta_i \rangle \langle k_{1i}^2 \rangle \langle \Delta x_i^2 \rangle \quad (2.67)$$

となる。この式を使うことで COD の大きさを所望の値以下に抑えるために必要な四極電磁石の設置精度 $\sigma_x = \sqrt{\langle \Delta x_i^2 \rangle}$ の許容値を大雑把に見積もることができる。

ここでは余分な二極磁場誤差によって COD が発生することを見てきたが、ステアリング使って故意に COD を発生させることで加速器の素性を解析することができる。これは式 (2.62) から COD には Twiss パラメーターの情報が含まれているためである。その意味では Twiss パラメーターとは閉軌道の摂動に対する応答の微係数であると言える。図 2.5 に SuperKEKB 電子貯蔵型リングにおいて測定した COD、モデル加速器からの予測値及び両者の差分を示す。COD を解析することで運転に使っている加速器のモデルと実機の乖離の度合い推定することができる。補正電磁石などの調整によってその差異を埋めることで現実の加速器のビーム光学を設計値に近づけることができる。

次の小節で四極磁場の誤差を扱うが、式 (2.62) で見たように一般に円形加速加速器において磁場誤差の影響などの何らかの外乱からの影響を理論的に調べていくと、しばしばチューンがある条件を満たす時に運動が不安定になる、という結論に行き着く。これはビームが感じる力が周期的であるが故に、本質的に外乱の影響が共鳴的、指数関数的に増大する可能性をもつためである。従ってチューンという物理量は加速器の設計、運転において非常に重要なものである。

2.2.2 四極磁場誤差と半整数共鳴

次に場所 $s = s_0$ の薄肉の四極磁場誤差を考える。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Delta k_1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

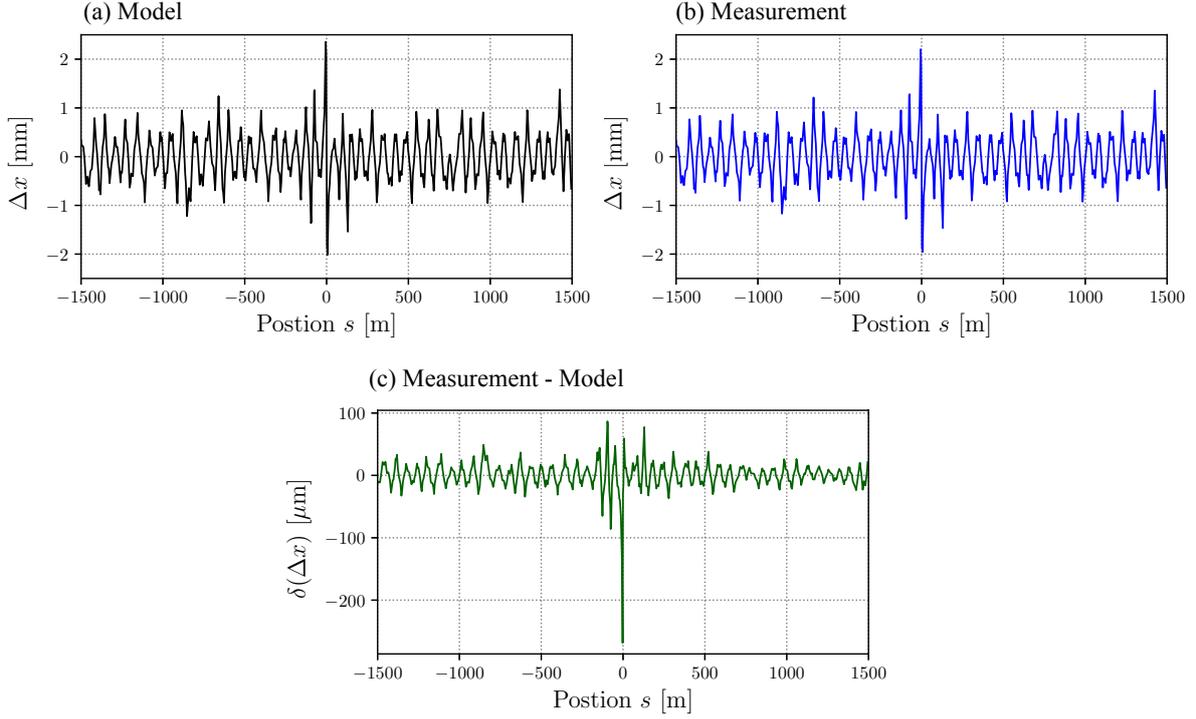


図 2.5: SuperKKEK の電子リングにおいて水平方向のステアリングによって発生させた COD。(a) 式 (2.67) による予測値、(b) 測定値、(c) 両者の差分。衝突点は $s = 0$ に位置する。

周回行列 M を考えると

$$M = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\nu + \alpha(s) \sin 2\pi\nu & \beta(s) \sin 2\pi\nu \\ \gamma(s) \sin 2\pi\nu & \cos 2\pi\nu - \alpha(s) \sin 2\pi\nu \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Delta k_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\pi\nu_0 + \alpha_0 \sin 2\pi\nu_0 & \beta_0 \sin 2\pi\nu_0 \\ \gamma_0 \sin 2\pi\nu_0 & \cos 2\pi\nu_0 - \alpha_0 \sin 2\pi\nu_0 \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\pi\nu_0 + \alpha_0 \sin 2\pi\nu_0 & \beta_0 \sin 2\pi\nu_0 \\ -\Delta k_1 (\cos 2\pi\nu_0 + \alpha_0 \sin 2\pi\nu_0) + \gamma_0 \sin 2\pi\nu_0 & -\Delta k_1 \beta_0 \sin 2\pi\nu_0 + \cos 2\pi\nu_0 - \alpha_0 \sin 2\pi\nu_0 \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

となる。従って、

$$\cos 2\pi\nu = \frac{1}{2} \text{tr}(M) = \cos 2\pi\nu_0 - \frac{1}{2} \Delta k_1 \beta_0 \sin 2\pi\nu_0 \quad (2.72)$$

となる。式 (2.72) は $\Delta k_1 > 0$ であれば n を整数として ν_0 が

$$\frac{n}{2} - W < \nu_0 < \frac{n}{2}, \quad W = \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \frac{\Delta k_1 \beta_0}{2} \quad (2.73)$$

の範囲のときに解をもたない。すなわち粒子の運動は不安定である。一方、 $\Delta k_1 < 0$ であれば半整数の上側に同様の領域が生じる。このように動作不能なチューンの範囲のことをストップバンド (禁止帯) と呼ぶ。一般にストップバンドの幅は磁場誤差が大きいほど広い。すなわち実運転においてストップバンドが小さい加速器ほどより調整されたマシンと言える。図 2.6 に式 (2.72) により求めた磁場誤差ありのチューン ν と ν_0 の関係を示しておく。

今、 $\nu = \nu_0 + \Delta\nu$ と表記して $\Delta\nu$ が十分に小さい場合は式 (2.72) は近似的に

$$\Delta\nu = \frac{1}{4\pi} \Delta k_1 \beta_0 \quad (2.74)$$

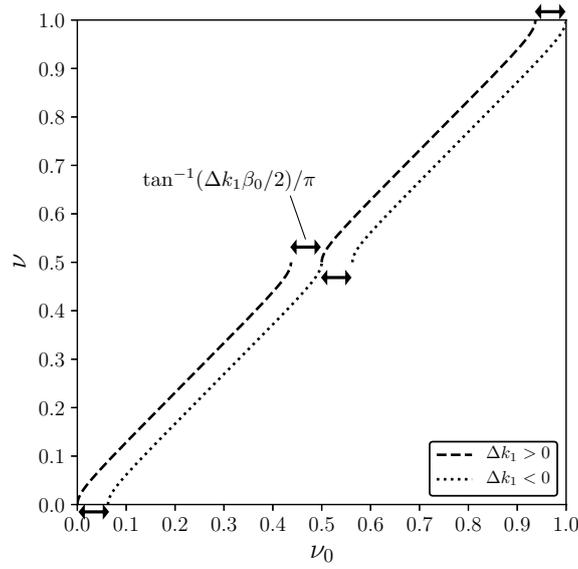


図 2.6: 式 (2.72) の解 ν と誤差がない場合の ν_0 の関係

となる。複数の場所 $s = s_i$ に分布している場合、それらの和をとって

$$\Delta\nu = \frac{1}{4\pi} \sum_i \Delta k_1^i \beta_i \quad (2.75)$$

または積分形式で

$$\Delta\nu = \frac{1}{4\pi} \oint \Delta k_1(s') \beta(s') ds' \quad (2.76)$$

となる。粒子は設計値に比べて不要な四極磁場を感じるわけであるから、当然ながらチューンが設計値からズレる。このズレをチューンシフトと呼ぶ。⁶

次に誤差磁場によるベータ関数の変化を考える。そのために周回行列 $M(s \rightarrow s + C)$ を

$$\begin{aligned} M(s \rightarrow s + C) &= M_0(s_0 \rightarrow s + C) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Delta k_1 & 1 \end{pmatrix} M_0(s \rightarrow s_0) \\ &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Delta k_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.77)$$

と書き直す。右辺の行列積を計算して一行二列目成分に着目すると誤差がある場合のベータ関数を $\beta = \beta_0 + \Delta\beta$ と表記して

$$\begin{aligned} [\beta_0(s) + \Delta\beta(s)] \sin [2\pi(\nu_0 + \Delta\nu)] &= b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} - b_{12}a_{12}\Delta k_1 \\ &= \beta_0 \sin 2\pi\nu_0 - b_{12}a_{12}\Delta k_1 \end{aligned} \quad (2.78)$$

となる。ここで式 (2.74) を用いて 1 次の微小量のみ考慮すると

$$\frac{\Delta\beta(s)}{\beta_0(s)} = -\frac{\Delta k_1 \beta_0(s_0)}{2 \sin 2\pi\nu_0} \cos [2|\phi_0(s) - \phi_0(s_0)| - \pi\nu] \quad (2.79)$$

となる。磁場誤差が複数箇所 $s = s_i$ にある場合は

$$\frac{\Delta\beta(s)}{\beta_0(s)} = \sum_i -\frac{\Delta k_1^i \beta_0(s_i)}{2 \sin 2\pi\nu_0} \cos [2|\phi_0(s) - \phi_0(s_i)| - \pi\nu] \quad (2.80)$$

⁶一般に理由は何であれ、ビーム測定や数値シミュレーションの解析などにより得られたチューンがあらかじめ想定していた値からズレた場合も同様に、“~の影響でチューンシフトが生じた”などと表現する。

積分形式では

$$\frac{\Delta\beta(s)}{\beta_0(s)} = -\frac{1}{2\sin 2\pi\nu_0} \oint \Delta k_1(s')\beta_0(s') \cos [2|\phi_0(s) - \phi_0(s')| - \pi\nu] ds' \quad (2.81)$$

である。このようなベータ関数の乱れはベータビートと呼ばれる。ベータビートが存在すると予期せぬ場所でビームサイズが膨み、その結果として不要なビームロスが発生させることがある。式(2.81)からチューンが半整数のときベータビートが発散する。つまり粒子の運動は不安定化する。これは半整数共鳴と呼ばれる現象である。

2.2.3 ベータトロン共鳴と共鳴条件

ここまで、二極および四極磁場の誤差の影響を調べてきた。その結果分かったことは現実の加速器の動作点としてチューンを整数もしくは半整数付近に選ぶとビームが不安定になりえるということである。実際、通常はこのようなチューンが運転条件に選ばれることはない。

ここまで議論から推察できるかもしれないが、六極磁場誤差に対しては n を整数として水平方向のチューンが $\nu = n/3$ のときに不安定性が起こる。さらに高次の磁場誤差に対しても共鳴現象は生じ、水平 (x) 方向と鉛直 (y) 方向の運動を結合させる磁場成分も考慮すると、一般に k, l, N を整数として横方向のチューン (ν_x, ν_y) が

$$k\nu_x + l\nu_y = N \quad (2.82)$$

を満たすとき共鳴現象が起こる。このような共鳴を総称してベータトロン共鳴と呼ぶ。また $|k| + |l| = N$ は共鳴の次数と呼ばれ、一般に次数 N が小さいほど強い共鳴不安定性が起きる。図 2.7 に (ν_x, ν_y) 平面に式(2.82)で描かれる線 ($N \leq 3$) をプロットした。このような図はチューンダイアグラムと呼ばれ、加速器の設計や動作点を論ずる際に用いられる。

ここまで磁場誤差の影響を薄肉近似を用いることで行列演算の観点から議論を進めてきた。これは磁場誤差の分布形状が周長 C を周期とする周期的デルタ関数であることに対応する。例えば場所 $s = s_0$ に二極磁場誤差がある場合の運動方程式は

$$\frac{d^2x}{ds^2} + k(s)x = \Delta k_0 \delta_p(s) \quad (2.83)$$

である。ここで、力学の講義の題材としてよく扱われる強制振動を考える。バネ定数 k のバネにつなげられた質量 m の質点を角周波数 ω の外力で振動させる。運動方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = F \cos(\omega t) \quad (2.84)$$

であり、その一般解は $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ と未定係数 A, ϕ を用いて

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) + \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2} [\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)] \quad (2.85)$$

である。従って系の固有の周波数 ω_0 と外力の周波数 ω が一致するとき共鳴的に振動が成長する。ここで周期 C の周期的デルタ関数が n を任意の整数とした全ての高調波 $\cos(2\pi ns/C)$ の重ね合わせ、

$$\delta_p(s) = \frac{1}{C} + \frac{2}{C} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi ns}{C}\right) \quad (2.86)$$

であることを考えると、加速器の場合は薄肉近似の磁場誤差は周長 C を基本波とした全ての高調波を駆動力としてもつ。従って任意の整数で共鳴が起こることになる。そういう意味では薄肉近似された磁場誤差は誤差の分布の形状としては最も強力であると言える。実際の加速器ではどの共鳴線が強く観測されるかは誤差の大きさそのものだけでなく、リング全周に渡る誤差の分布の特性にも依る。そのため共鳴不安定性の解析では、しばしば周波数領域に移行して議論することがある。

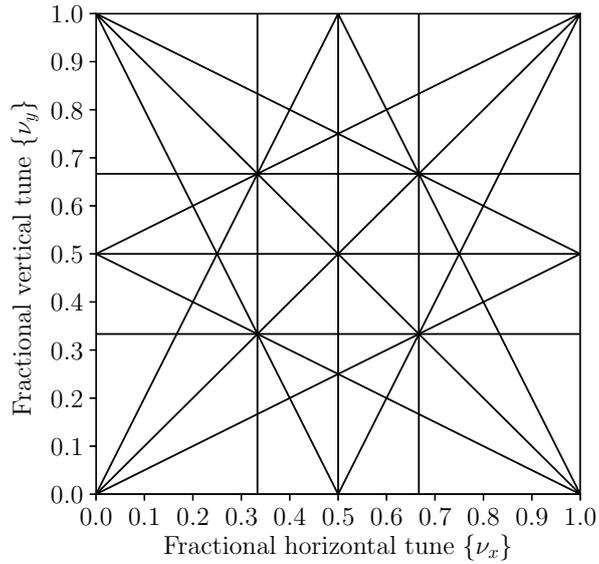


図 2.7: チューンダイアグラム ($N = 1, 2, 3$)

2.3 色収差(クロマティシティ)とその制御

運動量が設計値からズレている粒子が設計粒子と異なる二極磁場を感じることから分散関数を導入した。これは粒子が感じる二極磁場が運動量に依存するためであるが、そもそもローレンツ力が運動量に依存するのであるから、当然ながら四極以上の高次の磁場についても同様の現象が起きる。例えば、四極電磁石が粒子に与える影響は運動量に依存する。その結果、ベータ関数やチューンといった我々がこれまで見てきた種々のパラメータに運動依存性が現れる。このような加速器パラメータの運動量依存性は色収差(クロマティシティ)と呼ばれる。これはレンズ光学においてレンズの屈折率が光の波長によって変わることによって類推されてつけられた呼称であると思われる。ここではクロマティシティの定義とその調整方法について述べる。

2.3.1 クロマティシティ

クロマティシティは一般に運動量に対して非線形な効果であるため、我々が線形理論を論ずるために用いた近似されたハミルトニアン (1.34) には含まれないものである。この影響を論ずるためにはハミルトニアンの近似展開において展開の次数を上げる必要がある。ここでは簡単のため、運動量のズレが定数であるとして、四極磁場から受ける力がどのように変わるかを考える。

式 (1.26) において $\rho = 0, (A_x, A_y) = 0$ として A_s に四極磁場のベクトルポテンシャルを代入すると

$$H \sim -p + \frac{p_x^2 + p_y^2}{2p} + \frac{p_0}{2} k_1 (x^2 - y^2) \quad (2.87)$$

ここで運動量のズレ $\delta = (p - p_0)/p_0$ を導入し、ハミルトニアンと正準運動量を p_0 で除して

$$H = -(1 + \delta) + \frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1 + \delta)} + \frac{1}{2} k_1 (x^2 - y^2) \quad (2.88)$$

を得る。横方向の運動方程式は

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{k_1}{1+\delta}x = 0 \quad (2.89)$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{k_1}{1+\delta}y = 0 \quad (2.90)$$

となる。すなわち、運動量が δ ずれた粒子に対しては四極磁場の影響が因子 $1/(1+\delta)$ だけ変化するを意味する。特に $\delta \ll 1$ の場合

$$\frac{d^2x}{ds^2} + (1-\delta)k_1x = 0 \quad (2.91)$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} - (1-\delta)k_1y = 0 \quad (2.92)$$

と近似される。この影響は四極磁場誤差があることと数学的には等価であるから、式(2.76)からチューンシフト

$$\Delta\nu_x = -\frac{1}{4\pi}\delta \oint k_1(s)\beta_x(s)ds \quad (2.93)$$

$$\Delta\nu_y = \frac{1}{4\pi}\delta \oint k_1(s)\beta_y(s)ds$$

を発生させる。特にクロマチシティのうち δ に対して線形な部分をリニアクロマチシティと呼ぶ。ビームラインに存在する四極磁場に起因するチューンのリニアクロマチシティは式(2.93)から、

$$\xi_x = \frac{\partial\nu_x}{\partial\delta} = -\frac{1}{4\pi} \oint k_1(s)\beta_x(s)ds \quad (2.94)$$

$$\xi_y = \frac{\partial\nu_y}{\partial\delta} = \frac{1}{4\pi} \oint k_1(s)\beta_y(s)ds$$

で与えられる。

強収束の原理に基づく典型的な加速器では収束型四極電磁石($k_1 > 0$)の場所で β_x が大きく β_y は小さい。一方、発散型四極電磁石($k_1 < 0$)の場所では逆に β_x が小さく β_y は大きい。従って式(2.94)の被積分関数の中身は負の成分からの寄与が大きく ξ_x, ξ_y は通常どちらも負の値になる。

2.3.2 クロマチシティのコントロール

通常チューンクロマチシティを制御するためには六極電磁石が使われる。六極電磁石が発生するベクトルポテンシャルは式(1.42)から

$$A_s = -\frac{B_0b_2}{3}(x^3 - 3xy^2) \quad (2.95)$$

であるからハミルトニアンは

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + \frac{1}{6}k_2(x^3 - 3xy^2) \quad (2.96)$$

である。但し、 $k_2 = 2qB_0b_2/p_0$ とした。従って横方向の運動方程式は

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{k_2}{2}(x^2 - y^2) = 0 \quad (2.97)$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} - k_2xy = 0 \quad (2.98)$$

である。ここで、薄肉近似をすると粒子の横方向運動量 $p_{x,y}$ は六極電磁石を通過する前後で

$$\Delta p_x = -\frac{k_2}{2}(x^2 - y^2)\Delta s \quad (2.99)$$

$$\Delta p_y = k_2xy\Delta s \quad (2.100)$$

だけ変化する。座標 x は運動量のずれによる成分 $D_x\delta$ とその周りのベータトロン振動 x_β の和であるから、 $x = x_\beta + D_x\delta$ を代入して

$$\Delta p_x = -\frac{k_2}{2}\Delta s(x_\beta^2 + 2D_x\delta x_\beta + D_x^2\delta^2 - y^2) \quad (2.101)$$

$$\Delta p_y = k_2\Delta s(x_\beta + D_x\delta)y$$

但し、簡単のため鉛直方向の分散関数はゼロとした。式 (2.101) から粒子は $k_2D_x\delta\Delta s$ の四極磁場成分を感じる事が分かる。この四極磁場成分によるチューンシフトは式 (2.76) から

$$\Delta\nu_x^{\text{sext}} = \frac{1}{4\pi}\delta \oint k_2(s)D_x(s)\beta_x(s)ds \quad (2.102)$$

$$\Delta\nu_y^{\text{sext}} = -\frac{1}{4\pi}\delta \oint k_2(s)D_x(s)\beta_y(s)ds$$

となる。またはリニアクロマチシティにして

$$\xi_x^{\text{sext}} = \frac{1}{4\pi} \oint k_2(s)D_x(s)\beta_x(s)ds \quad (2.103)$$

$$\xi_y^{\text{sext}} = -\frac{1}{4\pi} \oint k_2(s)D_x(s)\beta_y(s)ds$$

の変化を与えることができる。チューンのリニアクロマチシティは式 (2.94) と式 (2.103) に加えてその他の非線形電磁石による効果の足し合わせとなる。特に偏向電磁石と四極電磁石に起因するリニアクロマチシティ(2.94) をナチュラルクロマチシティと呼ぶことがある。

実際のビームは運動量のズレ δ が異なる粒子の集合であるからベータトロンチューンは粒子によって違うことになる。従ってより多くの粒子を安定に周回させるためには、運動量がズレた粒子に対してもベータトロン共鳴が起きないようにチューンクロマチシティを制御する必要がある。

ここでは運動量のズレ δ が一定であるという仮定をおいたことに注意するべきである。実際には粒子はシンクロトロン運動を行うので δ は定数ではない。従って、運動量のズレを固定して各運動量に対してチューンを定義して共鳴不安定性を論ずる描像は分かり易いが、必ずしも正しい結論を与えるとは限らない。

ところで、式 (2.101) には不要な項も含まれている。これは六極電磁石を導入したことによるいわば副作用である。これらの項は粒子に非線形力を与え、一般に粒子の運動を不安定化させる原因になり得る。これらの項のうち運動量のズレ δ に依存しない項を”Geometrical aberration term”、運動量のズレ δ に依存する項の影響を”Chromatic aberration term”と称することがある。特にナチュラルクロマチシティが大きな加速器では、その制御のためにより強い六極電磁石が必要となるが、その分これらの副作用が強くなってしまう。

これら副作用をなるべく小さくする方法として2台の同じ強さの六極電磁石をその間の転送行列 M が水平方向、垂直方向ともに

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.104)$$

とるようにビームラインを組む方法がある。この時、六極電磁石が十分に薄ければ2台の六極電磁石による非線形キックがちょうど打ち消し合う。式 (2.104) のような転送行列は入口と出口の Twiss パラメーターが等しく、ベータトロン位相の進みが180度の整数倍となるような区間を意味する。この種の手法は SuperKEKB にも採用されている。

第3章 進行方向の運動

本章ではビーム進行方向の運動 (シンクロトロン運動) を論ずる。シンクロトロン運動は主に高周波加速空洞によって生じる粒子のエネルギーと時間方向の運動である。

3.1 経路長と飛行時間

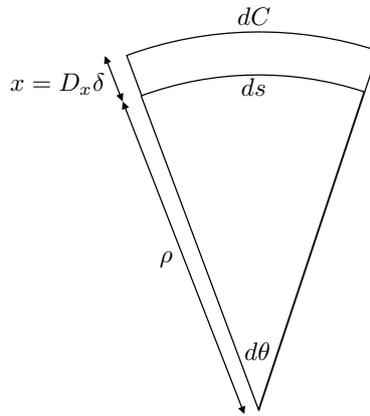


図 3.1: 設計粒子と運動量がズレた粒子の軌道

高周波加速空洞が発生する電磁場は時間変化するため、粒子の周回時間と運動量との関係が重要となる。まず運動量が設計値から δ だけズレた粒子の経路長を C 、設計粒子の経路長を C_0 とする。

$$\frac{C - C_0}{C_0} = \frac{\Delta C}{C_0} = \alpha_c \delta + \alpha_{c2} \delta^2 + \alpha_{c3} \delta^3 + \dots \quad (3.1)$$

と展開する。ここで α_c を運動量圧縮率 (モーメンタムコンパクション) と呼ぶ。第二項以降はいわば運動量圧縮率のクロマチシティである。本稿ではこれら高次の項は無視する。さて、図 3.1 に示した様に偏向電磁石において運動量のずれた粒子の軌道長 dC を考える。幾何学を考えると

$$dC = \left(1 + \frac{1}{\rho} x\right) ds = \left(1 + \frac{D_x \delta}{\rho}\right) ds \quad (3.2)$$

であるから運動量圧縮率 α_c は以下で与えられることが分かる。

$$\alpha_c = \frac{1}{C_0} \int \frac{D_x(s)}{\rho(s)} ds \quad (3.3)$$

次に飛行時間のズレ $\Delta T/T_0$ を考える。飛行時間 T は $T = L/(c\beta)$ であるが、運動量がズレた場合、経路長が変化した効果と速度が変化した効果の和として

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{\Delta C}{C_0} - \frac{\Delta \beta}{\beta_0} \quad (3.4)$$

と書ける。これは運動量圧縮率 α_c を用いると

$$\frac{\Delta T}{T_0} = (\alpha_c - \gamma_0^2) \delta = \xi \delta \quad (3.5)$$

$$\xi \equiv \alpha_c - \gamma_0^2 \quad (3.6)$$

となる。ここで ξ はフェイズスリップファクターと呼ばれる。フェイズスリップファクター ξ が正(負)の場合、運動量が設計値に比べて高い(低い)粒子の飛行時間は長くなる。また $\xi = 0$ のとき飛行時間は運動量に依らなくなる。このような条件を満たすビームラインは”アイソクロナスになっている”といった言い方をする。フェイズスリップファクターがゼロとなるときのビームエネルギーを遷移エネルギーと呼ぶ。このときのローレンツ因子 γ を γ_t と表記するとそれは

$$\gamma_t \equiv \frac{1}{\sqrt{\alpha_c}} \quad (3.7)$$

で与えられる。SuperKEKB などの高エネルギーの円形加速器では $1/\gamma_0^2 \ll 1$ であるから ξ の符号はほぼ α_c の符号のみで決まっている。通常 $\alpha_c > 0$ であるから $\xi > 0$ となる。これはビームの速度がほぼ光速であることの帰結である。

本稿では主に γ_0 が一定の場合を考えているが、遷移エネルギーはシンクロトロンやサイクロトロンなどのビームを周回させながら加速させる加速器で重要になる。このような加速器ではビームは入射されてから目的のエネルギーに加速されるまでの間に $\xi < 0$ の領域から $\xi = 0$ を跨いで $\xi > 0$ の領域に遷移することがある。遷移エネルギーを跨ぐ際にビーム不安定性が誘発される場合がある。遷移エネルギーの横断を避ける方策として偏向角の符号が負 ($\rho < 0$) である偏向電磁石を使うなどして α_c を負になるように設計し、遷移エネルギーを虚数にする方法がある。

3.2 位相安定性の原理

まずシンクロトロン運動を定性的に説明するために位相安定性の原理と呼ばれる加速器科学を支える重要な原理を説明する。今、円形加速器のある場所に加速空洞があり時間変化する電場

$$V(t) = V_{rf} \sin(\omega_{rf}t + \phi_s) \quad (3.8)$$

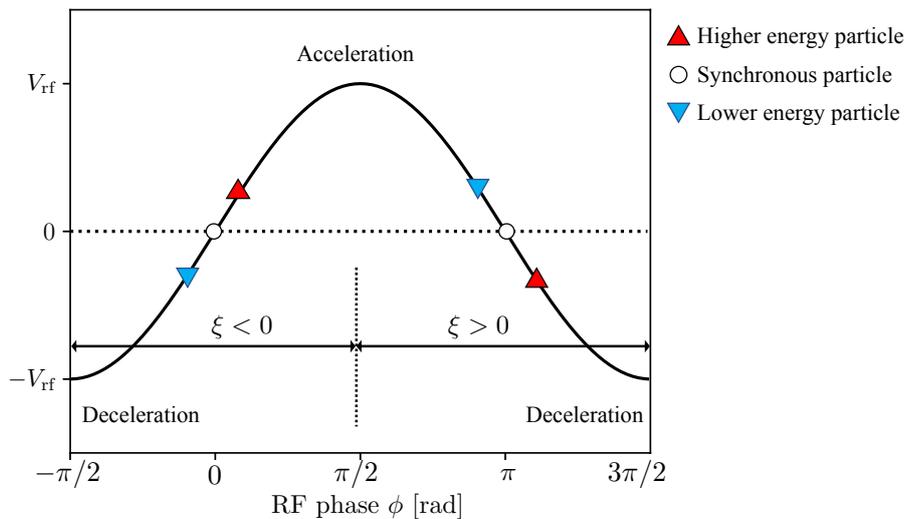


図 3.2: 設計(同期)粒子、エネルギーが高い及びエネルギーが低い粒子の電場波形(3.8)との位相関係を示す模式図。

を発生しているとする。位相 ϕ_s はシンクロトロン位相と呼ばれる。さしあたり $\phi_s = \pi$ とし、時刻 $t = 0$ で設計粒子が通過するとしよう。また角周波数 ω_{rf} は設計粒子の周回周波数 ω_s と $\omega_{rf} = h\omega_s$ の関係にあるとする。但し、 h は正の整数とする。この整数 h をハーモニクス数と呼ぶ。今の場合、設計粒子は常に電場がゼロの時に加速空洞を通過するため加減速されない。

ここで図 3.2 に示した様に電圧波形 (3.8)、粒子、エネルギーがズレた設計粒子の運動を考える。フェイズスリップファクターが正の場合、エネルギーの高い粒子は設計粒子に比べて周回時間が長いため、それだけ遅く加速空洞に到着する。従って電圧波形の減速位相に乗り、エネルギーを失う。一方、エネルギーが低い粒子は周回時間が短いため、設計粒子に比べて加速空洞に到着するのが早くなり、加速空洞からエネルギーを得る。このように加速空洞はエネルギーが高い粒子、低い粒子の両方に対してそのエネルギーを設計エネルギーに揃える方向に作用する、すなわち復元力、収束作用を与える。

加速空洞による収束作用の結果、ビームは加速器中に h 個に群集されることになる (Bunching)、この塊をバンチと呼ぶ。つまりハーモニクス数 h はその加速器に生成できるバンチ数の最大値である。フェイズスリップファクターが負の場合は周回時間とエネルギー大小の関係が反転する。この場合も設計粒子の位相を 180 度逆側の ($\phi_s - \pi$) に選べば同様に収束作用を得られる。

ビーム全体を加速したい場合、同期位相 ϕ_s を加速位相に選び、加速に伴うビームの周回時間の変化に同期して空洞の周波数 ω_{rf} を変えればビームを進行方向に群集させながら加速することができる。さらに横方向のビーム収束を行うために加速に応じて電磁石の磁場も強くしていく。これがシンクロトロンと呼ばれるごく典型的な円形加速器におけるビーム加速の原理である。一般に電子シンクロトロンの場合、入射時点で既にビームの速度はほぼ光速であるから空洞の周波数は一定で良い。一方、加速中に速度 $\beta_0 c$ が大きく変化する陽子や重イオンのシンクロトロンは空洞の周波数 ω_{rf} をビーム加速に伴い高くしていく必要がある。本稿では電子や陽電子ビームを想定し ω_{rf} は一定とする。

3.3 シンクロトロン運動

3.3.1 運動方程式の直接的な導出

高周波加速空洞の加速電圧 $V(t)$ を改めて書き下す。

$$V(t) = V_{rf} \sin(h\omega_s t + \phi_s), \quad \omega_s = \omega_{rf}/h \quad (3.9)$$

設計粒子は加速空洞を通過するたびに常に

$$\Delta E_s = qV_{rf} \sin \phi_s \quad (3.10)$$

のエネルギーを得る。周回周波数が $f_s = \omega_s/2\pi$ であるから、単位時間当たりのエネルギー利得は

$$\frac{dE_s}{dt} = \frac{\omega_s}{2\pi} qV_{rf} \sin \phi_s \quad (3.11)$$

である。ここで、設計粒子からエネルギーが $\Delta E = E - E_s$ だけずれた粒子を考える。単位当たりのエネルギー利得は周回周波数及び位相をそれぞれ ω, ϕ として

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\omega}{2\pi} qV_{rf} \sin \phi \quad (3.12)$$

ここで、式 (3.11) と (3.12) の両辺をそれぞれ ω_s, ω で除して差をとる。左辺は

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega} \frac{dE}{dt} - \frac{1}{\omega_s} \frac{dE_s}{dt} &= \frac{1}{\omega_s} \frac{d(\Delta E)}{dt} - \frac{\omega - \omega_s}{\omega_s^2} \frac{dE}{dt} \\ &\sim \frac{1}{\omega_s} \frac{d(\Delta E)}{dt} + \left[\frac{dE}{dt} \frac{\Delta(1/\omega_s)}{\Delta E} \right] \Delta E + \dots \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta E}{\omega_s} \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

であるから、エネルギー方向の運動方程式として

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta E}{\omega_s} \right) = \frac{qV_{\text{rf}}}{2\pi} (\sin \phi - \sin \phi_s) \quad (3.14)$$

を得る。ここで、粒子が加速器を一周することで 2π 進む変数 θ を導入すると、設計粒子からの位相差は θ を用いて $\Delta\phi = \phi - \phi_s = -h\theta$ である。このとき周回角周波数のずれ $\Delta\omega$ は

$$\Delta\omega = \frac{d}{dt} \Delta\theta = -\frac{1}{h} \frac{d}{dt} \Delta\phi = -\frac{1}{h} \frac{d\phi}{dt} \quad (3.15)$$

と書ける。一方、周回周波数のずれは式 (3.5) から

$$\Delta\omega = -\xi\delta\omega_0 \quad (3.16)$$

であるから、

$$\frac{d\phi}{dt} = h\omega_0\xi\delta \quad (3.17)$$

となる。従って、シンクロトロン運動を記述する連立微分方程式は式 (3.14) と式 (3.17) をまとめて

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = h\omega_s\xi\delta \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\beta_s^2 E_s \delta}{\omega_s} \right) = \frac{qV_{\text{rf}}}{2\pi} (\sin \phi - \sin \phi_s) \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\quad (3.19)$$

となる。但し、 $\delta = \Delta E_s / (\beta_s^2 E_s)$ を用いた。ここで ϕ と δ 以外のパラメータが一定とみなせる短い時間の範囲を考えることにして、これらを定数とみなすと (ϕ, δ) に関する連立微分方程式

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = h\omega_s\xi\delta \\ \frac{d\delta}{dt} = \frac{q\omega_s V_{\text{rf}}}{2\pi\beta_s^2 E_s} (\sin \phi - \sin \phi_s) \end{cases} \quad (3.20)$$

$$\quad (3.21)$$

となる。式 (3.21) は力学の講義の題材として扱われる単振り子の運動方程式と同じ形をしている。従ってシンクロトロン運動は単振り子と同様に一般には単振動とはならない。ここでは微小振動について考えてみる。粒子の位相が設計粒子の位相に十分に近い ($|\Delta\phi| = |\phi - \phi_s| \ll 1$) と仮定すると、式 (3.20) 及び式 (3.21) から

$$\frac{d^2 \Delta\phi}{dt^2} = \frac{hq\omega_s^2 V_{\text{rf}} \xi \cos \phi_s}{2\pi\beta_s^2 E_s} \Delta\phi \quad (3.22)$$

を得る。従って $qV_{\text{rf}} > 0$ であるなら、

$$\xi \cos \phi_s < 0 \quad (3.23)$$

のとき、その運動は設計粒子周りの単振動となる。この条件は同期位相 ϕ_s と遷移エネルギー γ_t に対する条件として

$$\begin{cases} 0 \leq \phi_s \leq \pi/2 & \text{for } \gamma_s < \gamma_t \text{ or } \xi < 0 \\ \pi/2 \leq \phi_s \leq \pi & \text{for } \gamma_s > \gamma_t \text{ or } \xi > 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

$$\quad (3.25)$$

である。図 3.2 で既に示したようにビームエネルギーが遷移エネルギーより小さいか大きいかによって安定領域が変わる。これは遷移エネルギーを境にエネルギーのズレが周回時間に与える影響が反転するためである。安定条件をみたすとき、この単振動の角周波数を設計粒子の周回角周波数 ω_s で除した量

$$\nu_s = \sqrt{\frac{hqV_{\text{rf}} |\xi \cos \phi_s|}{2\pi\beta_s^2 E_s}} \quad (3.26)$$

をベータトロンチューンに対してシンクロトロンチューンと呼ぶ。

3.3.2 ハミルトン形式

前節でシンクロトロン振動の運動方程式を得たが、そこではハミルトニアンに基づいたアプローチはとらなかった。理由は比較的直感的に理解しやすいためである。ここではハミルトニアンを使うことで同様にシンクロトン運動の方程式が得られることを示す。その過程で運動方程式 (3.20) 及び (3.21) は特殊な条件化で成立するものであることを知る。

まず、規格化する前のハミルトニアン (1.28) から出発する。

$$\begin{aligned}
H(x, p_x, y, p_y, t, -E; s) = & \\
& - \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) p_s - p_s \frac{\Delta E}{\beta_s^2 E_s} + \frac{p_s}{2\gamma_s^2} \left(\frac{\Delta E}{\beta_s^2 E_s}\right)^2 - p_s \frac{x}{\rho} \frac{\Delta E}{\beta_s^2 E_s} \\
& + \frac{1}{2p_s} \left[(p_x - qA_x)^2 + (p_y - qA_y)^2 \right] - qA_s
\end{aligned} \tag{3.27}$$

但し $(\beta_0, \gamma_0, p_0, E_0) \rightarrow (\beta_s, \gamma_s, p_s, E_s)$ と書き換えた。ここで $A_x = A_y = 0$ として A_s として水平方向の偏向電磁石と四極電磁石および加速空洞からの寄与 A_{rf} のみを考えると、

$$\begin{aligned}
H(x, p_x, y, p_y, t, -E; s) = & \\
& -p_s - p_s \frac{\Delta E}{\beta_s^2 E_s} + \frac{p_s}{2\gamma_s^2} \left(\frac{\Delta E}{\beta_s^2 E_s}\right)^2 - p_s \frac{\Delta E}{\beta_s^2 E_s} \frac{x}{\rho} + \frac{p_x^2 + p_y^2}{2p_s} + \frac{p_s}{2} K_1(x^2 - y^2) - A_{rf}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

鉛直方向の運動は明らかに水平方向及び進行方向とは独立であるから、以降では鉛直方向の正準変数は省く。

今、場所 $s = 0$ に置かれた十分に薄い加速空洞がビーム進行方向の電場 E_{rf} として

$$E_{rf} = -\frac{\partial A_s}{\partial t} = V_{rf} \delta_p(s) \sin(\omega_{rf} t + \phi_s) \tag{3.29}$$

を発生しているとする。ここで δ_p は周長 $C = 2\pi R$ を周期とするデルタ関数である。エネルギー E_s の設計粒子は $t = 0$ で位相 $\phi = \phi_s$ で空洞を通過する。この電場のベクトルポテンシャルは

$$A_{rf} = \frac{V_{rf}}{\omega_{rf}} \delta_p(s) \cos(\omega_{rf} t + \phi_s) \tag{3.30}$$

で与えられる。次にエネルギーが設計エネルギー E_s から ΔE ズレた軌道に座標系を乗り換える。この変換は母関数

$$F_1(x, \hat{p}_x, t, -\hat{\Delta E}) = \left(x - D \frac{\hat{\Delta E}}{\beta_s^2 E_s}\right) \hat{p}_x - (E_s + \hat{\Delta E}) t + D' p_s x \frac{\hat{\Delta E}}{\beta_s^2 E_s} - \frac{1}{2} D D' p_s \left(\frac{\hat{\Delta E}}{\beta_s^2 E_s}\right)^2 \tag{3.31}$$

によって実現できる。この母関数から新しい正準変数は

$$\hat{p}_x = p_x - p_s D' \frac{\hat{\Delta E}}{\beta_s^2 E_s}, \quad \hat{x} = x - D \frac{\hat{\Delta E}}{\beta_s^2 E_s} \tag{3.32}$$

$$\hat{\Delta E} = E - E_s, \quad \hat{t} = t + \frac{D}{\beta_s^2 E_s} \hat{p}_x - \frac{D'}{\beta_s c} \hat{x} \tag{3.33}$$

となる。ここで D は s の陽な関数とする。新しいハミルトニアンは

$$\begin{aligned}
H_1 = & -p_s - p_s \frac{\hat{\Delta}E}{\beta_s^2 E_s} + \frac{p_s}{2\gamma_s^2} \left(\frac{\hat{\Delta}E}{\beta_s^2 E_s} \right)^2 - p_s \frac{\hat{\Delta}E}{\beta_s^2 E_s} \frac{1}{\rho} \left(\hat{x} + D \frac{\hat{\Delta}E}{\beta_s^2 E_s} \right) \\
& + \frac{1}{2p_s} \left[\hat{p}_x^2 + 2D' p_s \hat{p}_x \frac{\hat{\Delta}E}{\beta_s^2 E_s} + D'^2 p_s^2 \left(\frac{\hat{\Delta}E}{\beta_s^2 E_s} \right)^2 \right] + \frac{p_s}{2} K_1 \left[\hat{x}^2 + 2D \hat{x} \frac{\hat{\Delta}E}{\beta_s^2 E_s} + D^2 \left(\frac{\hat{\Delta}E}{\beta_s^2 E_s} \right)^2 \right] \\
& - qA_{\text{rf}}(\hat{t}; s) + \frac{\partial F_1}{\partial s}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

となる。一般に $\partial F_1 / \partial s$ の計算には D, D', p_s 及び、 $\hat{\Delta}E / \beta_s^2 E_s$ の s 微分が伴うが、以降では設計粒子のエネルギー E_s 及び D, D' のみが s に陽に依存すると仮定する。この仮定のもとで $\partial F_1 / \partial s$ は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial s} = & -D' \frac{\hat{\Delta}E}{\beta_s^2 E_s} \hat{p}_x + D'' p_s \left(\hat{x} + D \frac{\hat{\Delta}E}{\beta_s^2 E_s} \right) \frac{\hat{\Delta}E}{\beta_s^2 E_s} - \frac{p_s}{2} (D'^2 + DD'') \left(\frac{\hat{\Delta}E}{\beta_s^2 E_s} \right)^2 \\
& - qV_{\text{rf}} \delta_p(s) \left(\hat{t} - \frac{D}{\beta_s^2 E_s} \hat{p}_x + \frac{D'}{\beta_s c} \hat{x} \right) \sin \phi_s
\end{aligned} \tag{3.35}$$

となる。但し、

$$\frac{\partial E_s}{\partial s} = qV_{\text{rf}} \delta_p(s) \sin \phi_s \tag{3.36}$$

を用いた。これを式 (3.34) に代入して整理すると

$$\begin{aligned}
H_2 = & -p_s - p_s \frac{\hat{\Delta}E}{\beta_s^2 E_s} + \frac{1}{2p_s} \hat{p}_x^2 + \frac{p_s}{2} K_1 \hat{x}^2 \\
& - \frac{p_s}{2} \left[-D \left(D'' + K_1 D - \frac{2}{\rho} \right) - \frac{1}{\gamma_s^2} \right] - p_s \left(D'' + K_1 D + \frac{1}{\rho} \right) \hat{x} \frac{\hat{\Delta}E}{\beta_s^2 E_s} \\
& - qV_{\text{rf}} \delta_p(s) \left(\hat{t} - \frac{D}{\beta_s^2 E_s} \hat{p}_x + \frac{D'}{\beta_s c} \hat{x} \right) \sin \phi_s - qA_{\text{rf}}(\hat{t}; s)
\end{aligned}$$

ここで関数 $D(s)$ を $\hat{x} \hat{\Delta}E$ に比例する項がゼロとなるように選ぶ。すなわち微分方程式

$$D'' + K_1 D = \frac{1}{\rho} \tag{3.37}$$

を満たす周期解とする。実は $D(s)$ は横方向の運動の定式化で導入した分散関数そのものである。横方向の運動を定式化した際には運動量がズレた粒子に対して運動方程式を考えることで分散関数を導入した。一方、ここではハミルトニアンから $\hat{x} \hat{\Delta}E$ の項を消す、という目的で導入される。式 (3.37) を用いると、ハミルトニアン (3.37) は

$$\begin{aligned}
H_3 = & -p_s \frac{\hat{\Delta}E}{\beta_s^2 E_s} - \frac{p_s}{2} \left(\frac{D}{\rho} - \frac{1}{\gamma_s^2} \right) \left(\frac{\hat{\Delta}E}{\beta_s^2 E_s} \right)^2 + \frac{\hat{p}_x^2}{2p_s} + \frac{p_s}{2} K_1 \hat{x}^2 \\
& - qV_{\text{rf}} \delta_p(s) \left(\hat{t} - \frac{D}{\beta_s^2 E_s} \hat{p}_x + \frac{D'}{\beta_s c} \hat{x} \right) \sin \phi_s - \frac{qV_{\text{rf}}}{\omega_{\text{rf}}} \delta_p(s) \cos \left[\omega_{\text{rf}} \left(\hat{t} - \frac{D}{\beta_s^2 E_s} \hat{p}_x + \frac{D'}{\beta_s c} \hat{x} \right) + \phi_s \right]
\end{aligned} \tag{3.38}$$

と書ける。但し、定数項 $-p_s$ を省いた。

このハミルトニアンから水平方向の運動と進行方向の運動は加速空洞での分散関数を通して結合していることが分かる。このような運動の結合（カップリング）はシンクロトロンチェーンとベータトロンチェーンが特定の条件を満たす時に粒子の運動を不安定化させる可能性がある。（シンクロベータ共鳴）従って通常、加速区空洞は分散関数がゼロである直線部に設置される。逆に何らかの目的のために積極的にシンクロトロン運動とベータトロン運動を結合させたい場合には分散関数のある場所に加速空洞を設置すれば良い。

さて、加速空洞で分散関数ゼロである場合、ハミルトニアン (3.38) は

$$H_3 = H_x + H_s \quad (3.39)$$

$$H_x = \frac{\hat{p}_x^2}{2p_s} + \frac{p_s}{2} K_1 \hat{x}^2 \quad (3.40)$$

$$H_s = -p_s \frac{\Delta E}{\beta_s^2 E_s} - \frac{p_s}{2} \left(\frac{D}{\rho} - \frac{1}{\gamma_s^2} \right) \left(\frac{\Delta E}{\beta_s^2 E_s} \right)^2 - qV_{\text{rf}} \hat{t} \delta_p(s) \sin \phi_s - \frac{qV_{\text{rf}}}{\omega_{\text{rf}}} \delta_p(s) \cos(\omega_{\text{rf}} \hat{t} + \phi_s) \quad (3.41)$$

となり、水平方向のハミルトニアン H_x と進行方向のハミルトニアン H_s に分離できる。ここではシンクロトロン運動を論ずるため H_s のみ考える。

まず、母関数

$$F_2 = \left(\omega_{\text{rf}} \hat{t} - \frac{hs}{R} + \phi_s \right) W, \quad \omega_{\text{rf}} = h\omega_s \quad (3.42)$$

を用いて正準変換を行う。新旧の正準変数の間の関係は

$$W = -\frac{\Delta E}{\omega_{\text{rf}}} = -\frac{R}{h} p_s \frac{\Delta E}{\beta_s^2 E_s}, \quad \phi = \omega_{\text{rf}} \hat{t} - \frac{hs}{R} + \phi_s \quad (3.43)$$

であり、新しいハミルトニアンは

$$H_{s1} = -\frac{\omega_{\text{rf}}^2}{2\beta_s^3 c E_s} \left(\frac{D}{\rho} - \frac{1}{\gamma_s^2} \right) W^2 - \frac{qV_{\text{rf}}}{\omega_{\text{rf}}} \delta_p(s) \left(\phi + \frac{hs}{R} + \phi_s \right) \sin \phi_s - \frac{qV_{\text{rf}}}{\omega_{\text{rf}}} \delta_p(s) \cos \left(\phi + \frac{hs}{R} \right) \quad (3.44)$$

次に H_{s1} をリング一周で平均化して正準変数を含まない項を省くと

$$\hat{H}_s \sim -\frac{\omega_{\text{rf}}^2 \xi}{2\beta_s^3 c E_s} W^2 - \frac{qV_{\text{rf}}}{2\pi\omega_{\text{rf}} R} \cos \phi - \frac{qV_{\text{rf}} \sin \phi_s}{2\pi\omega_{\text{rf}} R} \phi \quad (3.45)$$

となる。ここで、 ξ は式 (3.5) で定義したフェイズスリップファクター

$$\xi = \frac{1}{2\pi R} \int \left(\frac{D}{\rho} - \frac{1}{\gamma_s^2} \right) ds \quad (3.46)$$

である。このハミルトニアンから正準方程式は

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial \hat{H}_s}{\partial W} = -\frac{\omega_{\text{rf}}^2 \xi}{\beta_s^3 c E_s} W \\ \frac{dW}{ds} = -\frac{\partial \hat{H}_s}{\partial \phi} = -\frac{qV_{\text{rf}}}{2\pi\omega_{\text{rf}} R} (\sin \phi - \sin \phi_s) \end{cases} \quad (3.47)$$

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial \hat{H}_s}{\partial W} = -\frac{\omega_{\text{rf}}^2 \xi}{\beta_s^3 c E_s} W \\ \frac{dW}{ds} = -\frac{\partial \hat{H}_s}{\partial \phi} = -\frac{qV_{\text{rf}}}{2\pi\omega_{\text{rf}} R} (\sin \phi - \sin \phi_s) \end{cases} \quad (3.48)$$

となる。ここで、 $s = \beta_s ct$, $W = -\beta_s^2 E \delta / \omega_{\text{rf}}$, $\omega_{\text{rf}} = h\omega_s$ などを用いると最終的に

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = h\omega_s \xi \delta \\ \frac{d\delta}{dt} = \frac{\omega_s q V_{\text{rf}}}{2\pi\beta_s^2 E_s} (\sin \phi - \sin \phi_s) \end{cases} \quad (3.49)$$

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = h\omega_s \xi \delta \\ \frac{d\delta}{dt} = \frac{\omega_s q V_{\text{rf}}}{2\pi\beta_s^2 E_s} (\sin \phi - \sin \phi_s) \end{cases} \quad (3.50)$$

を得る。この結果はハミルトニアンを使わずに求めた式 (3.20) 及び式 (3.21) と確かに一致する。

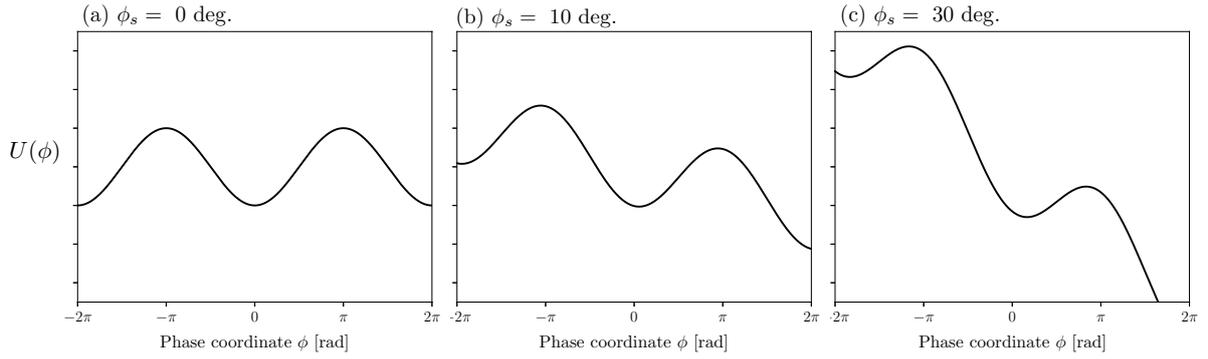


図 3.3: シンクロトン位相 ϕ_s が (a) 0 度、(b) 10 度、(c) 30 度の場合のポテンシャルエネルギー $U(\phi)$ の形

3.3.3 エネルギーアクセプタンス

既に見た様にシンクロトン運動は着目粒子と設計粒子のズレが微小な場合には単振動となる。ここではズレが微小でない場合も含めて考える。今、正準変数以外のパラメーターが定数であるとすれば \hat{H}_s は s に陽に依存しない。従って A を定数として

$$-\frac{\omega_{\text{rf}}^2 \xi}{2\beta_s^3 c E_s} W^2 - \frac{qV_{\text{rf}}}{2\pi\omega_{\text{rf}} R} \cos \phi - \frac{qV_{\text{rf}} \sin \phi_s}{2\pi\omega_{\text{rf}} R} \phi = A \quad (3.51)$$

正準方程式を用いて W を消去すると

$$-\frac{\beta_s^3 c E_s}{2\omega_{\text{rf}}^2 \xi} \dot{\phi}^2 - \frac{qV_{\text{rf}}}{2\pi\omega_{\text{rf}} R} \cos \phi - \frac{qV_{\text{rf}} \sin \phi_s}{2\pi\omega_{\text{rf}} R} \phi = A \quad (3.52)$$

という書ける。ここで $\dot{\phi} = d\phi/ds$ である。さらに両辺に適当な数を掛けて式 (3.26) の ν_s を用いて整理すると J を定数として

$$\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{\cos \phi_s} \left(\frac{\nu_s}{R} \right)^2 (\cos \phi + \phi \sin \phi_s) = J \quad (3.53)$$

という関係式を得る。以上によりシンクロトン振動はポテンシャルエネルギー

$$U(\phi) = -\frac{1}{\cos \phi_s} \left(\frac{\nu_s}{R} \right)^2 (\cos \phi + \phi \sin \phi_s) \quad (3.54)$$

における質点の運動とみなせる。図 3.3 に ϕ_s が 0 度、10 度、30 度の場合のポテンシャルエネルギー $U(\phi)$ を示す。粒子が安定に振動運動を行うには直近のポテンシャルの山に比べてエネルギーのズレが小さくなければならない。

次に式 (3.53) で描かれる等高線を図 3.4 に示す。粒子の初期条件によって決まる J がある閾値 J_{max} より小さい粒子は復元力によって ϕ_s の周りで振動するが、閾値 J_{max} を越えると不安定化する。この安定と不安定を決める閾値 J_{max} によって描かれる曲線をセパトリックスと呼ぶ。セパトリックスを求めるために $U(\phi)$ の極点 $\phi = \phi_{\text{sp}}$ を求める。条件 $dU/d\phi = 0$ を解くことで $\phi_{\text{sp}} = \phi_s, \pi - \phi_s$ の二つであることが分かる。 $\phi_{\text{sp}} = \pi - \phi_s, \dot{\phi} = 0$ を式 (3.53) に代入して

$$J_{\text{max}} = -\frac{1}{\cos \phi_s} \left(\frac{\nu_s}{R} \right)^2 [\cos(\pi - \phi_s) + (\pi - \phi_s) \sin \phi_s] \quad (3.55)$$

を得る。従って $(\phi, \dot{\phi})$ 平面上でセパトリックスは

$$\dot{\phi}^2 = \frac{2}{\cos \phi_s} \left(\frac{\nu_s}{R} \right)^2 [\cos \phi + \cos \phi_s + (\phi + \phi_s - \pi) \sin \phi_s] \quad (3.56)$$

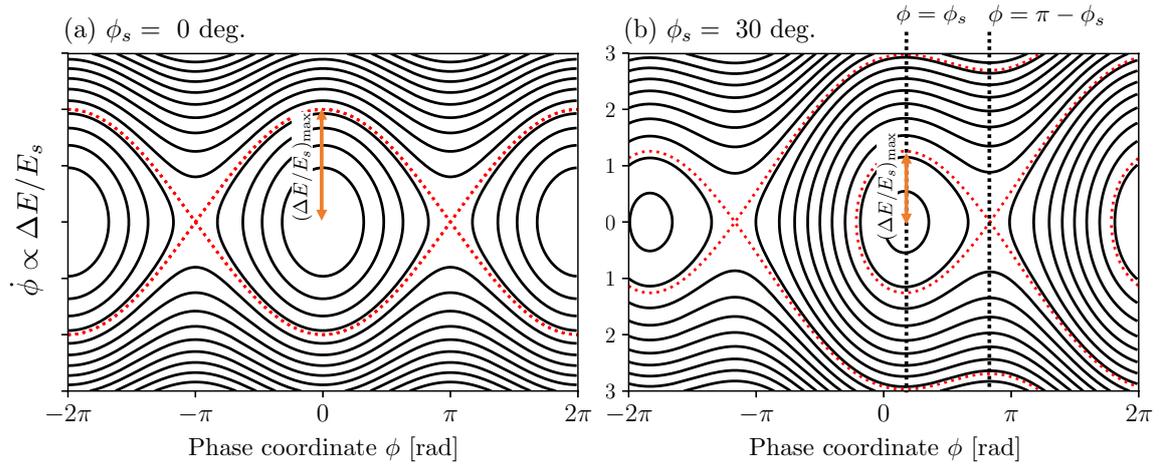


図 3.4: シンクロトン位相 ϕ_s が (a) 0 度、(b) 30 度の場合の式 (3.53) で描かれる等高線。赤の点線は式 (3.56) で与えられるセパトリスである。

で与えられる。また、このとき $\phi = \phi_s$ で $\dot{\phi}^2$ が最大値

$$\dot{\phi}_{\max}^2 = \frac{4}{\cos \phi_s} \left(\frac{\nu_s}{R} \right)^2 \left\{ \cos \phi_s + \left(\phi_s - \frac{\pi}{2} \right) \sin \phi_s \right\} \quad (3.57)$$

になる。これはエネルギーのズレの相対値 $\Delta E/E_s$ に換算すると

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta E}{E_s} \right)_{\max}^2 &= \frac{4}{\cos \phi_s} \left(\frac{\beta_s^3 c \nu_s}{\omega_{rf} |\xi| R} \right)^2 \left[\cos \phi_s + \left(\phi_s - \frac{\pi}{2} \right) \sin \phi_s \right] \\ &= \frac{2\beta_s^2 q V_{rf}}{\pi h E_s |\xi|} [2 \cos \phi_s + (2\phi_s - \pi) \sin \phi_s] = \frac{2\beta_s^2 q V_{rf}}{\pi h E_s |\xi|} G(\phi_s) \\ G(\phi_s) &= 2 \cos \phi_s + (2\phi_s - \pi) \sin \phi_s \end{aligned} \quad (3.58)$$

となる。これはすなわち初期に設計粒子と同じ位相であった粒子が安定に周回するために許容されるエネルギーのズレの最大値である。

図 3.5 に式 (3.58) の関数 $G(\phi_s)$ を形を示す。許容値はシンクロトン位相 $\phi_s = 0$ 、すなわち加減速なしのとき最大となる。また、シンクロトン位相が固定であるならば、許容値を大きくしたい場合は加速空洞の電圧を大きくする必要がある。加速器を安定に周回できるエネルギーのズレ

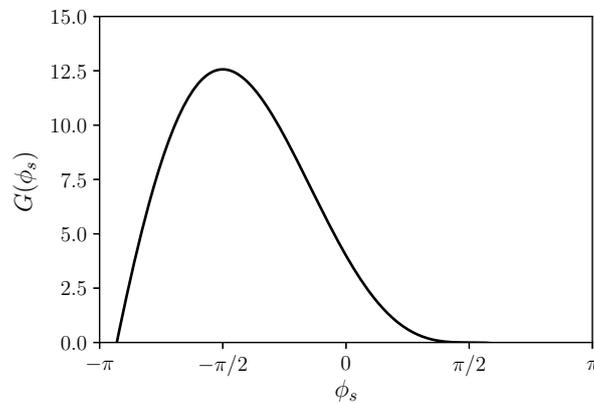


図 3.5: 式 (3.58) の関数 $G(\phi_s)$

の最大値をエネルギーアクセプタンスと呼ぶ。より一般には、エネルギー方向に限らず、加速器上を安定に周回できるビームの広がり最大値をその加速器のアクセプタンスと呼ぶ。

第4章 シンプレクティック変換と粒子トラッキング

既に見てきたように粒子の運動を支配する運動方程式は本質的に非線形であり、一般の場合に解析的に解くことはできない。従って、加速器の設計や実機の解析には計算機による数値シミュレーションが不可欠である。特に、ビームライン中の粒子の軌道を追跡(トラッキング)する数値シミュレーションはトラッキングシミュレーション、もしくは単にトラッキングと呼称される。ここでは、トラッキングにおいて重要となるシンプレクティック変換について簡潔に述べた後、トラッキングの手法をその具体例を交えて示す。最後に非線形力学の導入として Lie 代数を用いた非線形写像を用いたトラッキングの手法を概説する。

4.1 シンプレクティック変換

簡単のため 1 次元 (q, p) の正準方程式を考える。

$$\frac{dq}{ds} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (4.1)$$

ここで

$$z = (z_1, z_2) = (q, p) \quad (4.2)$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

を導入すると正準方程式は

$$\frac{dz_i}{dt} = J_{ij} \frac{\partial H}{\partial z_j} \quad (4.4)$$

と書ける。ここで正準変数 z を $z \rightarrow Z = (Z_1(z_1, z_2), Z_2(z_1, z_2))$ に変数変換すること考える。この時、変換後の変数に関しても

$$\frac{dZ_i}{dt} = J_{ij} \frac{\partial H}{\partial Z_j} \quad (4.5)$$

が満たされるとき、この変換を正準変換もしくはシンプレクティック変換と呼ぶ。この条件を具体的に考えてみる。

$$\frac{dZ_a}{dt} = \frac{\partial Z_a}{\partial z_i} \frac{dz_i}{dt} = \frac{\partial Z_a}{\partial z_i} J_{ij} \frac{\partial H}{\partial z_j} = \frac{\partial Z_a}{\partial z_i} J_{ij} \frac{\partial Z_b}{\partial z_j} \frac{\partial H}{\partial Z_b} \quad (4.6)$$

従って、

$$\frac{\partial Z_a}{\partial z_i} J_{ij} \frac{\partial Z_b}{\partial z_j} = J_{ab} \quad (4.7)$$

であれば、この変換は正準方程式を満足する。この条件は言い換えると変数変換のヤコビアン

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial Z_1}{\partial z_1} & \frac{\partial Z_1}{\partial z_2} \\ \frac{\partial Z_2}{\partial z_1} & \frac{\partial Z_2}{\partial z_2} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

が

$$MJM^t = J \quad (4.9)$$

を満たすことである。この条件をシンプレクティック条件と呼ぶ。¹系の自由度が2や3の場合も同様の条件を得る。線形変換の場合、ヤコビアン M は正準変数を含まない行列となる。さらに自由度が1である場合、シンプレクティック条件 (4.9) は

$$\det(M) = 1 \quad (4.10)$$

と数学的に等価であることを示せる。²

ところでハミルトン系の時間発展とは無限小の正準変換の繰り返しと解釈できる (付録参照)。一方、トラッキングシミュレーションとは運動方程式を離散化して場所 $s = s_i$ での粒子の情報から $s = s_{i+1}$ を求める、という変数変換を繰り返すことである。従ってこの変数変換としてシンプレクティック変換を選ぶことがハミルトン系の時間発展を近似的に求める上で本質的に重要であると考えられている。

4.2 トラッキング手法とその具体例

ここでは具体的な例を用いてトラッキング手法とシンプレクティック変換の特徴を見ていく。ここで扱う題材は文献 [6] から借用した。より深く学びたい方はそちらを参照されたい。四極電磁石のハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}kx^2, \quad k > 0 \quad (4.11)$$

を考える。その転送行列 M は既にみたように

$$M = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{k}L & \sin \sqrt{k}L/\sqrt{k} \\ -\sqrt{k} \cos \sqrt{k}L & \cos \sqrt{k}L \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

であった。この場合、我々は解析的な転送行列を得られるわけであるが、離散化によって何が起るかを見ていく。転送行列の各成分をテーラー展開する。

$$M = L^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + L^1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{pmatrix} + L^2 \begin{pmatrix} -k/2 & 0 \\ 0 & -k/2 \end{pmatrix} + \dots \quad (4.13)$$

四極電磁石が十分に短いとして L の二次以上の項を無視すると

$$M = \begin{pmatrix} 1 & L \\ -kL & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(L^2) \quad (4.14)$$

この転送行列、すなわち変数変換は明らかに $\det(M) \neq 1$ でシンプレクティックではない。ここで、2行4列目に人為的に $-kL^2$ を加えるとシンプレクティックな変換を与える近似精度 $\mathcal{O}(L^1)$ の写像

$$M = \begin{pmatrix} 1 & L \\ -kL & 1 - kL^2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(L^2) \quad (4.15)$$

となる。

¹英語表記では"Symplectic"である。元々は数学の分野において"Complex"と表記されていたが複素数との混同を避けるために数学者 Hermann Weyl(1885-1955) が古代ギリシャ語とラテン語から造語した。

²自由度が2もしくは3の場合 $\det(M) = 1$ はシンプレクティック条件 (4.9) の必要条件であるが十分条件ではない。

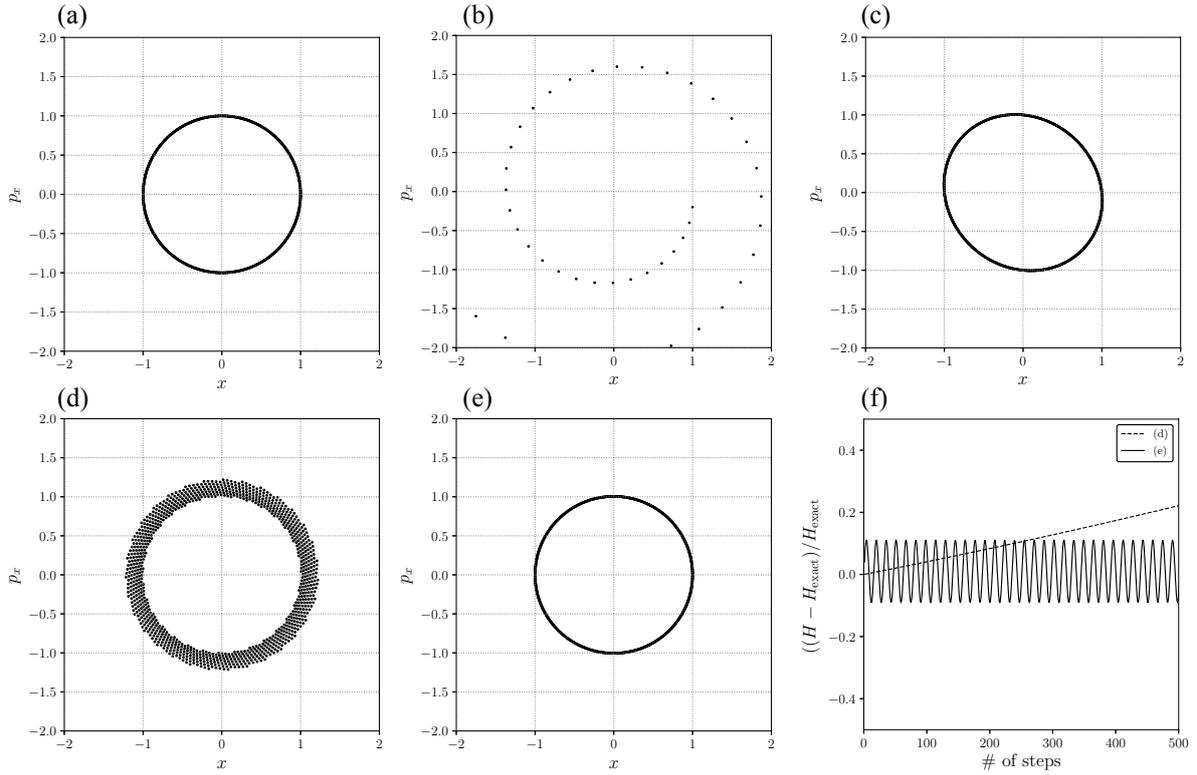


図 4.1: トラッキングシミュレーションにより得られた (x, p_x) の軌跡。それぞれ、(a) 式 (4.12)、(b) 式 (4.14)、(c) 式 (4.15)、(d) 式 (4.16)、(e) 式 (4.17) を用いて計算した。ハミルトニアン の 相 対 誤 差 を (f) に 示 す。

近似精度上げるためにテーラ展開 (4.13) において L^2 の項まで考慮すると、

$$M = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}kL^2 & L \\ -kL & 1 - \frac{1}{2}kL^2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(L^3) \quad (4.16)$$

となる。この変換も明らかにシンプレクティックではないが、今度は 1 行 2 列成分に $-kL^3/4$ を加えることで近似精度 $\mathcal{O}(L^2)$ のシンプレクティックな写像

$$M = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}kL^2 & L - \frac{kL^3}{4} \\ -kL & 1 - \frac{1}{2}kL^2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(L^3) \quad (4.17)$$

を構築できる。図 4.1(a)-(e) は式 (4.12)、式 (4.14)、式 (4.15)、式 (4.16)、式 (4.17) に対応するトラッキングシミュレーションによって得られた位相平面 (x, p_x) での粒子の軌跡である。シンプレクティックでない変換を使うと徐々に軌跡が解析解から外れていくことが分かる。一方、シンプレクティックな変換は軌跡は解析解とズレをもつがそのズレは成長しない。また、式 (4.16)、式 (4.17) を用いた場合のハミルトニアン の 厳 密 値 からの 相 対 誤 差 の 時 間 発 展 を 図 4.1(f) に 示 す。シンプレクティックな手法である式 (4.17) を用いた場合、保存量であるべきハミルトニアン の ズレも振動はするが成長しないことが分かる。

ここで、式 (4.15) による近似がもつ物理的意味を考えてみる。式 (4.15) は

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -kL & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

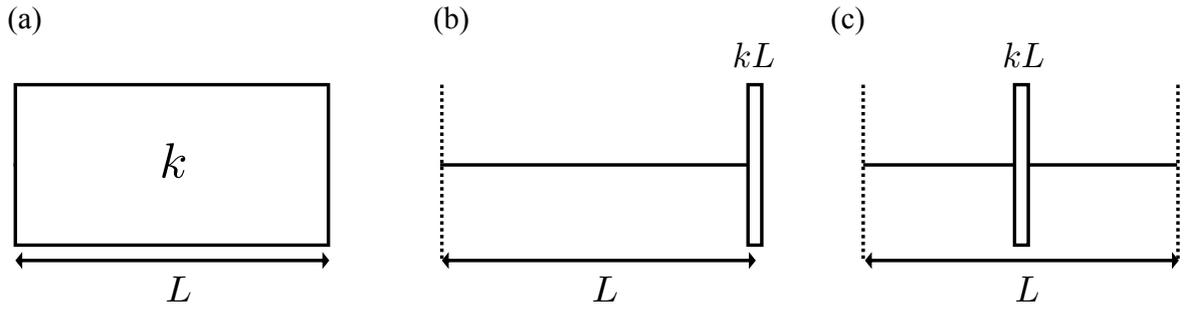


図 4.2: 四極電磁石のモデル、(a) 厳密解 (4.12)、(b) 近似式 (4.15)、(c) 近似式 (4.17)。

に分解できることが分かる。これは図 4.2(a) に示した四極電磁石を図 4.2(b) のように長さ L のドリフトスペースと強さ kL の薄肉四極によるキックである。また、式 (4.17) に関しては

$$M = \begin{pmatrix} 1 & L/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -kL & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

と分解できる。つまり、図 4.2(c) に示した長さ $L/2$ のドリフトスペース、強さ kL の薄肉キック、 $L/2$ のドリフトスペースの合成である。四極磁場に限らず、一般に薄肉キックはシンプレクティックな変換である。従って、長さのあるビームライン構成要素に対してトラッキングを行う場合、キックとドリフトスペースの繰り返しで近似する方法は常にシンプレクティックな変換となるため、多くのシミュレーションで採用される。さて、式 (4.17) の手法で $\mathcal{O}(L^2)$ の近似精度を達成できたが、キックの数を 2 つに分割し、ドリフトスペースを 3 つにすることで近似精度をさらに向上できるであろうか。図 4.3(a) の近似モデルを考えてみる。ここで α, β は

$$2\alpha + \beta = 1 \quad (4.20)$$

を満たす実数である。このとき、転送行列は

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{kL}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{kL}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}kL^2 + \frac{1}{4}\alpha\beta k^2 L^4 & L - \alpha(\alpha + \beta)kL^3 + \frac{1}{4}\alpha^2\beta k^2 L^5 \\ -kL + \frac{1}{4}\beta k^2 L^3 & 1 - \frac{1}{2}kL^2 + \frac{1}{4}\alpha\beta k^2 L^4 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

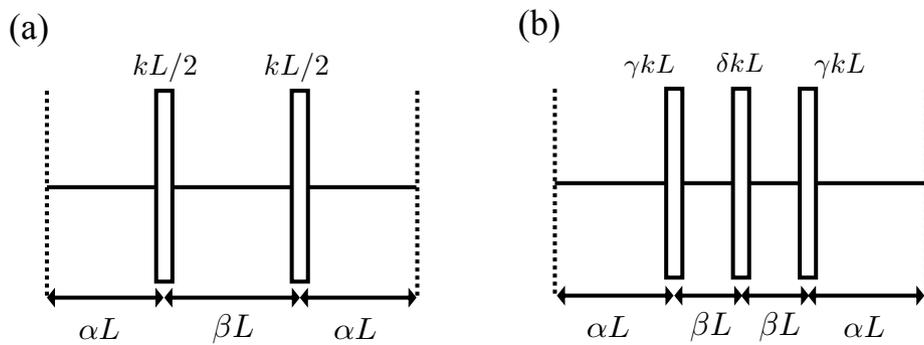


図 4.3: 四極電磁石の近似モデル

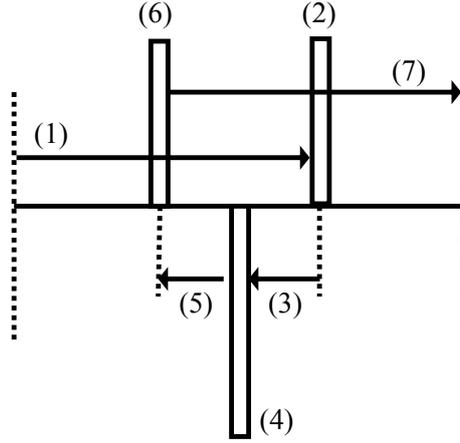


図 4.4: 式 (4.30) が $\mathcal{O}(L^4)$ の近似精度となるときの四極電磁石の近似モデル

各成分を解析解のテーラー展開と比較すると、近似精度を上げるためには

$$\begin{cases} \alpha(\alpha + \beta) = \frac{1}{6} & (4.23) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}\beta = \frac{1}{6} & (4.24) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 1 & (4.25) \end{cases}$$

となる必要があるが、残念ながらこの連立方程式には解がない。そこで未定係数を増やすためにキックを3つに増やし、さらにキックの強さの分配比率もパラメーターとした図 4.3(b) の近似モデルを考える。ここでここで $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は

$$2\alpha + 2\beta = 1 \quad (4.26)$$

$$2\gamma + \delta = 1 \quad (4.27)$$

を満たす実数である。このとき転送行列は

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\gamma k L & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\delta k L & 1 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & \beta L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\gamma k L & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}kL^2 + \beta\gamma(\alpha + \frac{1}{2}\delta)k^2L^4 & L - (\frac{1}{4}\delta + \alpha\gamma + 2\alpha\beta\gamma)kL^3 \\ -\alpha\beta^2\gamma^2\delta k^3L^6 & +2\alpha\beta\gamma(\alpha\gamma + \frac{1}{2}\delta)k^2L^5 - \alpha^2\beta^2\gamma^2\delta k^3L^7 \\ -kL + \beta\gamma(1 + \delta)k^2L^3 & 1 - \frac{1}{2}kL^2 + \beta\gamma(\alpha + \frac{1}{2}\delta)k^2L^2 \\ -\beta^2\gamma^2\delta k^3L^5 & -\alpha\beta^2\gamma^2\delta k^3L^6 \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

となる。従って、

$$\begin{cases} \beta\gamma(\alpha + \frac{1}{2}\delta) = \frac{1}{24} & (4.31) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta\gamma(1 + \delta) = \frac{1}{6} & (4.32) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}\delta + \alpha\gamma + 2\alpha\beta\gamma = \frac{1}{6} & (4.33) \end{cases}$$

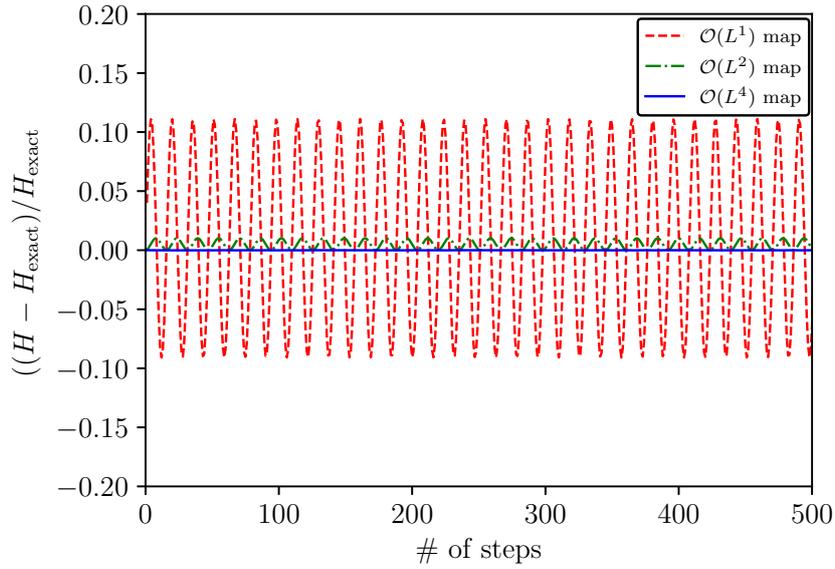


図 4.5: 写像 (4.15)($\mathcal{O}(L^1)$), (4.17)($\mathcal{O}(L^2)$) 及び (4.30)($\mathcal{O}(L^4)$) により得られたハミルトニアン
の相対誤差の時間発展。

を満足する $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を求めれば良い。その解は

$$\beta = \frac{1 - 2^{1/3}}{2(2 - 2^{1/3})} = -0.1756 \dots \quad (4.34)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} - \beta = \frac{1}{2(2 - 2^{1/3})} = 0.6756 \dots \quad (4.35)$$

$$\gamma = \frac{1}{24\beta^2} = \frac{1}{2 - 2^{1/3}} = 1.3512 \dots \quad (4.36)$$

$$\delta = 1 - 2\gamma = -\frac{2^{1/3}}{2 - 2^{1/3}} = -1.7024 \dots \quad (4.37)$$

となり、このとき近似精度は $\mathcal{O}(L^4)$ となる。ここで β, δ が負であることから、このとき式 (4.30) による変換は物理的には図 4.4 のような 7 つのステップの合成であると解釈できる。もはや単純に等間隔にキックを並べたものではない。図 4.5 にシンプレクティックな写像 (4.15), (4.17) 及び (4.30) を用いた場合のミルトニアンの厳密値から相対誤差の時間発展を示す。

トラッキングシミュレーションにおいて精度を上げる方法として、単純にキックとドリフトを等間隔に並べるがその数を増やす方針と、我々が式 (4.15) から式 (4.30) に精度を向上させたようになえるべく少ないキックで精度を上げる方針がある。後者はシンプレクティック数値積分法とよばれるシミュレーション手法であり、加速器分野に関わらず、重力多体系、生体分子系などのシミュレーションで用いられている手法である。

4.3 非線形力学と Lie 変換

ここまでクロマティシティの部分を除いて、基本的に単粒子力学のうち線形力学を扱ってきた。ここでは最後に非線形部分の取り扱いに関して簡単に述べる。既に見たように粒子の運動を追跡する際に必要なことはビームラインのある場所 s_1 から s_2 への転送

$$\mathbf{x}_{s=s_2} = \mathcal{M} \circ \mathbf{x}_{s=s_1} \quad (4.38)$$

における写像 \mathcal{M} を求めることであり、線形な運動では \mathcal{M} は粒子の正準座標に依存しない行列になる。非線形運動を扱う場合、 \mathcal{M} は一般に行列ではない。このような非線形な写像を定式化するために数学的道具として Lie 代数が広く用いられる。

ポアソン括弧式

正準変数 (q_i, p_i) の関数 $f(q_i, p_i), g(q_i, p_i)$ に対してポアソン括弧式と呼ばれる二項演算子 $[,]$ を定義する。

$$[f, g] = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \quad (4.39)$$

但し、整数 n は系の自由度である。ポアソン括弧式はその定義から以下の性質をもつことが示せる。

$$[f, g] = -[g, f] \quad (4.40)$$

$$\frac{d}{dt} [f, g] = \left[\frac{df}{dt}, g \right] + \left[f, \frac{dg}{dt} \right] \quad (4.41)$$

$$[fg, h] = f[g, h] + [f, h]g \quad (4.42)$$

$$[\alpha f + \beta g, h] = \alpha [f, h] + \beta [g, h] \quad (4.43)$$

$$[f, [g, h]] + [h, [f, g]] + [g, [h, f]] = 0 \quad (4.44)$$

また、ハミルトニアンを H として

$$[q_i, H] = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{dx_i}{ds} \quad (4.45)$$

$$[p_i, H] = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{dp_i}{ds} \quad (4.46)$$

である。一般に (q_i, p_i) および独立変数 s の関数 f に対して

$$\frac{df}{ds} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial s} \quad (4.47)$$

と書ける。従って、 f が独立変数 s に陽に依存しない ($\partial f / \partial s = 0$) 場合、 $[f, H] = 0$ であれば $df/ds = 0$ であるから f は保存量である。例えば f としてハミルトニアンを選ぶと、ハミルトニアンが独立変数 s に陽に依存しない場合は

$$\frac{dH}{ds} = [H, H] = 0 \quad (4.48)$$

となるため、確かにハミルトニアンは保存量となる。

また、場所 $s = s_1$ での正準変数 (q_{i1}, p_{i1}) から $s = s_2$ への正準変数 (q_{i2}, p_{i2}) への変換がシンプレクティックである条件式 (4.9) はポアソン括弧式を用いて

$$\begin{aligned} [q_{2i}, q_{j2}] &= 0, \\ [q_{2i}, p_{j2}] &= -[p_{2i}, q_{j2}] = \delta_{ij}, \\ [p_{2i}, p_{j2}] &= 0 \\ [f, g] &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_{1i}} \frac{\partial g}{\partial p_{1i}} - \frac{\partial f}{\partial p_{1i}} \frac{\partial g}{\partial q_{1i}} \right) \end{aligned} \quad (4.49)$$

と書ける。ここで、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (4.50)$$

Lie 演算子

Lie 演算子 $: f :$ を次のように定義する。

$$: f : g = [f, g] = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \quad (4.51)$$

すなわち、関数 g に作用させると f と g のポアソン括弧式

$$: f : g = [f, g] \quad (4.52)$$

になる。以降では主に自由度 $n = 1$ の場合を考え正準変数を (x, p) と表記する。

Lie 演算子を用いるとハミルトニアン H に対する正準方程式は

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= - : H : x, \\ \frac{dp}{ds} &= - : H : p \end{aligned} \quad (4.53)$$

と表現できる。Lie 演算子の性質をいくつか挙げる。

$$: x := \frac{\partial}{\partial p}, \quad : p := -\frac{\partial}{\partial x}, \quad (4.54)$$

$$(: x :)^2 = \frac{\partial^2}{\partial p^2}, \quad (: p :)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad (4.55)$$

$$: x^2 := 2x \frac{\partial}{\partial p}, \quad : p^2 := -2p \frac{\partial}{\partial x}, \quad (4.56)$$

$$: xp := p \frac{\partial}{\partial p} - x \frac{\partial}{\partial x}, \quad : x :: p := : p :: x := -\frac{\partial^2}{\partial x \partial p} \quad (4.57)$$

さらにこれらの結果を使うと、

$$: p^2 : x = -2p, \quad (4.58)$$

$$: p^2 : p = 0, \quad (4.59)$$

$$(: p^2 :)^2 x = : p^2 : (: p^2 : x) = : p^2 : (-2p) = 0, \quad (4.60)$$

$$(: p^2 :)^2 p = : p^2 : (: p^2 : p) = : p^2 : (0) = 0 \quad (4.61)$$

であることが分かる。

指数演算子 -Lie 変換-

正準方程式 (4.53) を見ると、形式的には $x(s) = e^{-s:H}x(0)$ のような形をした解を期待できる。そこで、まず Lie 演算子のべき乗を定義する。例えば f を正準変数 (q, p) の関数として

$$\begin{aligned} (:f:)^2g &= :f:(:f:g) = [f, [f, g]] \\ (:f:)^3g &= :f:(:f:(:f:g)) = [f, [f, [f, g]]] \\ &\dots \end{aligned} \quad (4.62)$$

などである。このべき乗を用いて指数演算子 $e^{:f:}$ を

$$e^{:f:} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (:f:)^m = 1 + :f: + \frac{1}{2!} (:f:)^2 + \frac{1}{3!} (:f:)^3 + \dots \quad (4.63)$$

と定義する。指数演算子 $e^{:f:}$ による変換を Lie 変換と呼び、 f を変換の生成子と称す。Lie 変換は常にシンプレクティックな変換を与えることが証明されている。

Lie 変換の具体例

具体例として生成子

$$f = -\frac{L}{2}p^2 \quad (4.64)$$

を考え、 (x, p) に作用させてみる。

$$e^{-Lp^2/2}x = x - \frac{1}{2}L :p^2: x + \frac{1}{8}L^2 (:p^2:)^2 x + \dots = x + Lp \quad (4.65)$$

$$e^{-Lp^2/2}p = x - \frac{1}{2}L :p^2: p + \dots = p \quad (4.66)$$

従って、生成子 (4.64) はドリフトスペースの写像を生成する。

次に生成子 f として

$$f = -\frac{L}{2}(kx^2 + p^2), \quad (k > 0) \quad (4.67)$$

を考えてみる。変換 $(:f:)^m x$ は

$$\begin{aligned} (:f:)^0 x &= x, \\ (:f:)^1 x &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial x}{\partial x} \right) = Lp, \\ (:f:)^2 x &= L :f: p = L \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = -kL^2 x, \\ (:f:)^3 x &= -kL^2 :f: x = -kL^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial x}{\partial x} \right) = -kL^3 p, \\ (:f:)^4 x &= -kL^3 :f: p = -kL^3 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = k^2 L^4 x, \\ (:f:)^5 x &= k^2 L^4 :f: x = k^2 L^4 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial x}{\partial x} \right) = k^2 L^5 p, \\ &\dots \end{aligned} \quad (4.68)$$

と計算できる。すなわち n を整数として

$$(:f:)^{2n}x = (-1)^n k^n L^{2n}x, \quad (:f:)^{2n+1}x = (-1)^n k^n L^{2n+1}p \quad (4.69)$$

であると予想される。従って、

$$\begin{aligned} e^{:f:}x &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{:f:^m}{m!}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(:f:)^{2n}x}{2n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(:f:)^{2n+1}x}{(2n+1)!} \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} (\sqrt{k}L)^{2n} + \frac{p}{\sqrt{k}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\sqrt{k}L)^{2n+1} \\ &= x \cos(\sqrt{k}L) + \frac{p}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k}L) \end{aligned} \quad (4.70)$$

これは四極電磁石による写像である。実際、Lie 変換 $e^{:f:p}$ も同様に計算できて、

$$\begin{aligned} e^{:f:p} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m :f:^m}{m!}p = -\sqrt{k}x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\sqrt{k}L)^{2n+1} + p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} (\sqrt{k}L)^{2n} \\ &= -x\sqrt{k} \sin(\sqrt{k}L) + p \cos(\sqrt{k}L) \end{aligned} \quad (4.71)$$

となり、転送行列 (1.58) に一致する。Lie 変換を使う場合、正準方程式を解く操作は運動方程式を積分することではなく、ハミルトニアンで決まる微分演算を計算することである。

ここまでの例から推察できるように、長さ L のビームラインの構成要素のハミルトニアンを H とした場合 Lie 変換

$$\begin{aligned} x &\rightarrow e^{-L:H}x \\ p &\rightarrow e^{-L:H}p \end{aligned} \quad (4.72)$$

はそのビームライン通過後の (x, p) を与える。Lie 変換 (4.72) は正準方程式の解であるから自然にシンプレクティックな変換を与えることが保証されている。

ここで六極電磁石のハミルトニアン

$$H = \frac{k}{6}(x^3 - 3xy^2) + \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} \quad (4.73)$$

を考える。四極電磁石の時と同様に Lie 変換を求めるために $(:H:)^m x$ を計算してみると

$$\begin{aligned} (:H:)^0 x &= x, \\ (:H:)^1 x &= -\frac{\partial H}{\partial p_x} = -p_x, \\ (:H:)^2 x &= -:H:p_x = -\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial p_x}{\partial p_x} = -\frac{k}{2}(x^2 - y^2), \\ (:H:)^3 x &= -\frac{k}{2} :H:(x^2 - y^2) = -\frac{k}{2} \left(-\frac{\partial H}{\partial p_x} \frac{\partial x^2}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial p_y} \frac{\partial y^2}{\partial y} \right) = k(xp_x - yp_y), \\ (:H:)^4 x &= k :H:(xp_x - yp_y) \\ &= k \left(\frac{\partial(xp_x)}{\partial p_x} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial p_x} \frac{\partial(xp_x)}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial(yp_y)}{\partial p_y} + \frac{\partial H}{\partial p_y} \frac{\partial(yp_y)}{\partial y} \right) \\ &= k \left[-p_x^2 + p_y^2 + \frac{k}{2}(x^2 + y^2) \right], \\ (:H:)^5 x &= \mathcal{O}(k^2) \\ &\dots \end{aligned} \quad (4.74)$$

となる。従って長さ L だけ作用させると

$$e^{-L:H}x = x + p_x L - \frac{1}{4}kL^2(x^2 - y^2) - \frac{1}{6}kL^3(xp_x - yp_y) + \frac{1}{24}kL^4 \left[-p_x^2 + p_y^2 + \frac{k}{2}(x^2 + y^2) \right] + \mathcal{O}(k^2L^5) \quad (4.75)$$

という無限級数となるが、四極電磁石のように閉じた形で表現できそうにない。従って、理論解析を行うにしろ数値シミュレーションを行うにしろ我々はどこかの次数で展開を打ち切る必要がある。近似精度を上げるためにはより高次の項まで計算する必要があるが、その計算は一般に煩雑である。Mathematica などの数式処理システムを使って計算するのが得策である。

ここで重要なことは Lie 変換自体はシンプレクティックな変換を与えるが、展開を途中で打ち切るとその変換がシンプレクティックであることが一般に保証されない、ということである。そこでその問題を解決するためにシンプレクティック数値積分法が考案された。我々は既に節 4.2 で四極電磁石の近似モデルを題材にしてシンプレクティック数値積分法を見た。シンプレクティック数値積分法の理論は Lie 代数を用いた理論によって定式化されている。以降でごく簡潔にその概要を述べる。

Baker-Campbell-Hausdorff の公式

二つの指数演算子 $e^{:f:}$, $e^{:g:}$ に対して f と g が交換可能 $[f, g] = 0$ であれば普通の指数関数と同様に

$$e^{:f:}e^{:g:} = e^{:f+g:} \quad (4.76)$$

が成立する。ところが $[f, g] \neq 0$ の場合、指数演算子の積の振る舞いは普通の指数関数と異なり、式 (4.76) は成立しない。ここで、Baker-Campbell-Hausdorff(BCH) の公式と呼ばれる重要な関係式がある。

$$e^{:f:}e^{:g:} = e^{:h:} \quad (4.77)$$

$$h = A + B + \frac{1}{2}[f, g] + \frac{1}{12}[f[f, g]] + [g[g, f]] + \frac{1}{24}[f, [g, [g, [f,]]]] \dots$$

この公式はシンプレクティック数値積分法に限らず非線形単粒子力学の多くの理論で使われる。

シンプレクティック数値積分法

シンプレクティック数値積分の具体例として、 n を整数とする非線形のハミルトニアン H

$$H = kx^n + \frac{p^2}{2} \quad (4.78)$$

を考える。例えば $n = 3$ が六極電磁石に対応する。シンプレクティックな近似写像を求めるために H を

$$H = H_k + H_d, \quad H_k = kx^n, \quad H_d = \frac{p^2}{2} \quad (4.79)$$

と分解する。このとき H_k, H_d をそれぞれ長さ L だけ作用させる Lie 変換は

$$e^{-L:H_d}x = x + pL, \quad e^{-L:H_d}p = p$$

$$e^{-L:H_k}x = x, \quad e^{-L:H_k}p = p - nkx^{n-1} \quad (4.80)$$

と厳密に計算できる。ここで BCH の公式 (4.77) を使うと

$$e^{-L:H_d}:e^{-L:H_k}: = e^{-L:H-\frac{1}{2}L[H_d,H_k]+\mathcal{O}(L^3)}: = e^{-L:H+\mathcal{O}(L^2)}: \quad (4.81)$$

と書ける。式 (4.80) は薄肉キック後にドリフトスペースを通す写像であり、我々が式 (4.15) で考えた手法に対応する。Lie 変換自体はシンプレクティックな変換を与えるのでその積もシンプレクティックである。幸いにも非線形磁場の場合でも薄肉キックの Lie 変換は厳密に計算できる。従って、薄肉キックとドリフトスペースという変換は常にシンプレクティックな変換でありシミュレーション手法としても比較的容易に使える。

節 4.2 で四極電磁石の場合に薄肉キックとドリフトスペースの数やそのパラメーターを最適化することで近似精度を向上できることを見た。この操作は、例えば α, β を実数として式 (4.81) において左辺を

$$e^{-\alpha L:H_d}:e^{-L:H_k}:e^{-\beta L:H_d}: \quad (4.82)$$

と変更し BCH の公式を用いてハミルトニアンの近似精度が最も高くなる α, β を見つけることである。具体的に書き下すと

$$\begin{aligned} e^{-\alpha L:H_d}:e^{-L:H_k}:e^{-\beta L:H_d}: &= e^{-\alpha L:H_d}:e^{-L:H_k+\beta H_d-\frac{1}{2}\beta L[H_k,H_d]+\mathcal{O}(L^3)}: \\ &= e^{-L:(\alpha+\beta)H_d+H_k-\frac{L}{2}[H_k,\beta H_d]+\frac{1}{2}[H_d,-LH_k+\frac{L^2}{2}\beta[H_k,H_d]]+\mathcal{O}(L^3)}: \\ &= e^{-L:(\alpha+\beta)H_d+H_k-\frac{L}{2}(\alpha-\beta)[H_k,H_d]+\mathcal{O}(L^3)}: \end{aligned} \quad (4.83)$$

であることが分かる。従って、 $\alpha = \beta = 1/2$ のときに右辺の L^2 の項が消え、ハミルトニアンの近似精度が最も高くなる。これは四極電磁石の例における式 (4.17) に対応する。つまり、長さ L の電磁石を薄肉キック 1 つとドリフトスペース 2 つで近似する場合、磁場の形によらず薄肉キックを中央に置くのが最も近似精度が高い。これは直感的に最もらしい近似方法であるが、Lie 変換を使うことでそれが数学的に保証されることが分かる。

さらに近似精度を上げるためには煩雑であるが

$$e^{-L:\alpha H_d}:e^{-L:\gamma H_k}:e^{-L:\beta H_d}:e^{-L:\delta H_k}:e^{-L:\beta H_d}:e^{-L:\gamma H_k}:e^{-L:\alpha H_d}: = e^{-L:H+\mathcal{O}(L^5)}: \quad (4.84)$$

を満たす実数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を決定すれば良い。結果は式 (4.30) に一致する。

非線形電磁石を同じ長さのドリフトと同じ強さの薄肉キックの繰り返しで近似する手法はシンプレクティックな手法である。数値演算の繰り返しに伴う誤差の拡大を無視できるのであれば、ステップ数を増やすことで近似精度の向上が期待できる。シンプレクティック数値積分法ではドリフトの長さと薄肉キックの強さを工夫することでより少ないステップ数で目標とする近似精度を達成することができる。³

図 4.6 に周回行列 (2.22) とハミルトニアン

$$H = kx^4 + \frac{p^2}{2} \quad (4.85)$$

による粒子の運動をシンプレクティック数値積分法により計算した結果を示す。近似精度の異なる式 (4.80) (1 次)、式 (4.83) (2 次) 及び式 (4.84) (4 次) により求めたポアンカレ断面⁴である。高次の手法はより詳細な構造を表現できることが分かる。

一般に非線形磁場は粒子の運動を不安定化させる要因となる。図 4.6 から分かるように原点付近においては何らかの近似的な保存量が存在し、粒子の奇跡は閉じた曲線を描く。振幅が増えていくと粒子の運動はカオス状態となる (カオスの海)。さらに大きな振幅を持つ粒子は無遠くまで運動が発散する。安定に粒子が周回できる位相空間内の領域を力学口径と呼ぶ。⁵ 力学口径の最適化は加速器設計及び運転に非常に重要な課題である。

³さらに高次の写像を求めるための一般論に関しては例えば文献 [5] を参照されたい。

⁴位相平面上に周回ごとの正準変数をプロットしたもの。

⁵力学口径に対して、ビームパイプの径などから決まっている口径を物理口径と呼ぶ。

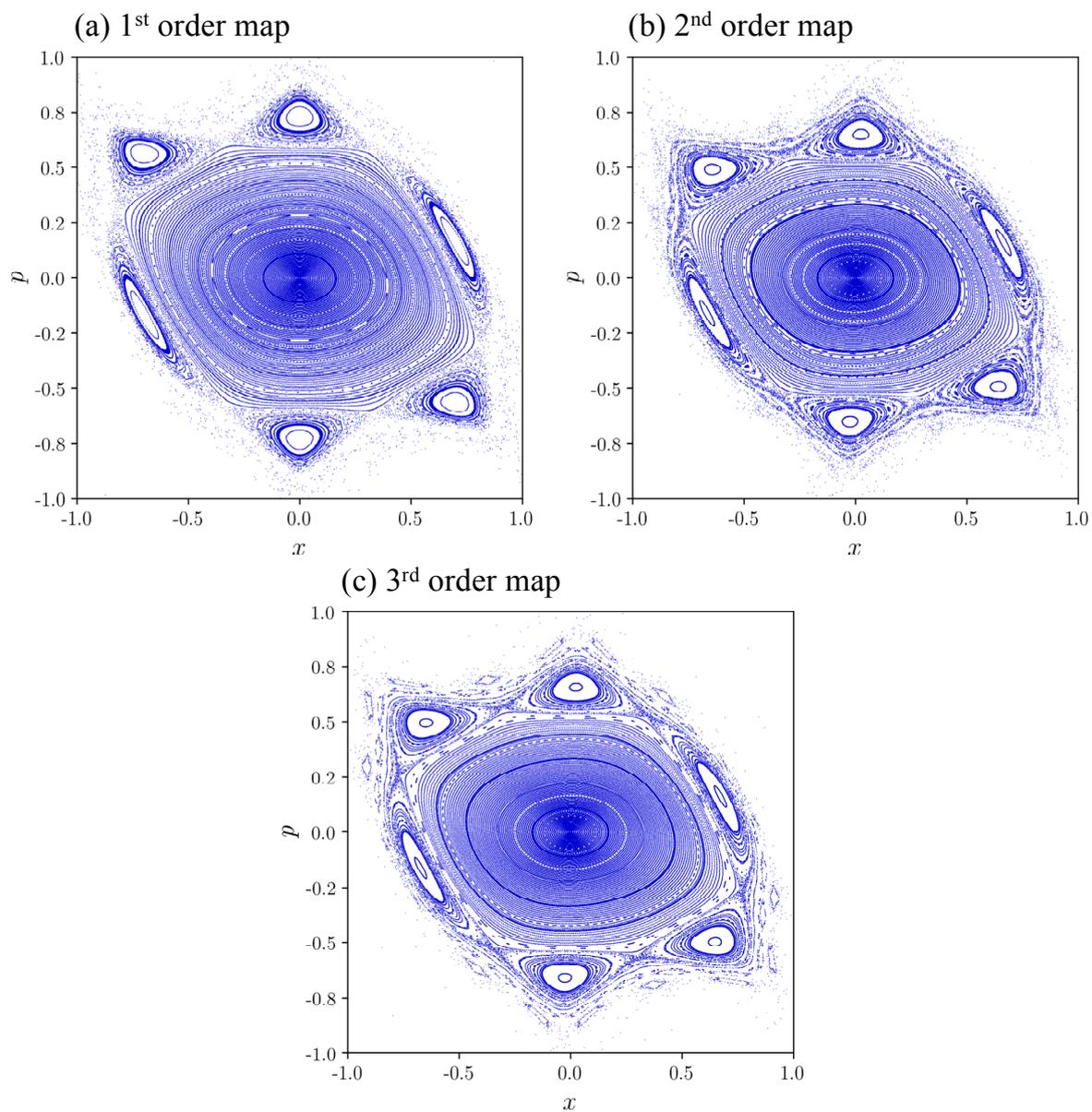


図 4.6: トラッキングシミュレーションにより得られた周回行列 (2.22) とハミルトニアン (4.85) からなる系のポアンカレ断面。それぞれ、(a) 式 (4.80)、(b) 式 (4.83) 及び (c) 式 (4.84) を用いて計算した。

参考文献

- [1] S. Y. Lee, Accelerator Physics, 2nd ed. (World Scientific, Singapore, 2005).
- [2] S. I. Tzenov, Contemporary Accelerator Physics, (World Scientific, Singapore 2004).
- [3] 大西幸喜, ”単粒子力学入門”、OHO ’ 00 (2000).
- [4] 生出勝宣、ビーム力学入門、JLC-FFIR92 研究会講義録・研究報告集、田内利明、山本昇編集、KEK Proceedings 93-6 (1993)。
- [5] H. Yoshida, Phys. Lett. A 150, 262 (1990)
- [6] A. Chao, “Lecture Notes on Special Topics in Accelerator Physics”, SLAC-PUB 9574
- [7] T. Suzuki, Technical Report No. KEK-78-14, KEK, Tsukuba (unpublished).
- [8] T. Suzuki, KEK Report 96-10 (1996)
- [9] 發知英明, ”大強度陽子リングのビーム力学”、OHO ’ 10 (2010).
- [10] K. Jimbo, Phys. Rev. ST Accel. Beams 19, 010102 (2016).
- [11] 小磯晴代, ”ビーム貯蔵リングの基礎”、OHO ’ 91 (1991).
- [12] A. Wolski, ”Linear Dynamics in Particle Accelerators”
<http://pcwww.liv.ac.uk/~awolski/>
- [13] A. Wolski, ”NonLinear Dynamics in Particle Accelerators”
<http://pcwww.liv.ac.uk/~awolski/>
- [14] T. Satogata, USPAS Accelerator Physics 2017 University of California, Davis
<http://www.toddsatogata.net/2017-USPAS/>
- [15] W. Herr, ”Mathematical and numerical methods for non-linear beam dynamics”, CERN Accelerator School (2013).
- [16] W. MacKay and T. Satogata, USPAS Accelerator Physics 2011
<http://toddsatogata.net/2011-USPAS/>

付録

正準変換と母関数

正準座標 $(q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_N)$ 、正準運動量 $(p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_N)$ 、独立変数 t からなるハミルトニアン $H(q, p, t)$ の正準方程式

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (4.86)$$

を考える。但し、 $\dot{x} = dx/dt$ である。ここで、 (q, p) から新しい変数 $(Q(q, p, t), P(q, p, t))$ への変換を考える。この新しい変数が、新たなハミルトニアン K と共に正準方程式

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \quad (4.87)$$

を満たすとき、この (q, p) から (Q, P) への変数変換を正準変換と呼ぶ。

例えば実数 A をゼロでない定数として q を $Q = Aq$ とする変換を考える。正準運動量 P とハミルトニアン $H(Q, P, t)$ がそのままでは明らかに正準方程式を満足できない。正準方程式の形を保つためには例えば $Q = Aq$ と同時に $P = p/A$ とすれば $Q, P, K = H(Q, P, t)$ は正準方程式の形を保つことが出来る。このように、ハミルトニアン $H(q, p)$ に変数変換を施す際にはそれが正準変換となっている必要がある。さもなければ、正準方程式から正しい運動方程式を得られない。

母関数という概念を導入することで形式的に正準変換を満たす変数変換を行うことができる。詳しくは解析力学の教科書に委ねることにして、ここでは本テキストで使う結果のみをまとめる。母関数 G には4つのタイプがある。

$$\text{Type 1} : G_1(q, Q, t) \quad (4.88)$$

$$\text{Type 2} : G_2(q, P, t) \quad (4.89)$$

$$\text{Type 3} : G_3(p, Q, t) \quad (4.90)$$

$$\text{Type 4} : G_4(p, P, t) \quad (4.91)$$

旧変数と新変数、および旧ハミルトニアン H と新ハミルトニアン K の関係を表に示す。

母関数	q_i	p_i	Q_i	P_i	$K - H$
$G_1(q, Q, t)$		$\partial G_1 / \partial q_i$		$-\partial G_1 / \partial Q_i$	$\partial G_1 / \partial t$
$G_2(q, P, t)$		$\partial G_2 / \partial q_i$	$\partial G_2 / \partial P_i$		$\partial G_2 / \partial t$
$G_3(p, Q, t)$	$-\partial G_3 / \partial p_i$			$\partial G_3 / \partial Q_i$	$\partial G_3 / \partial t$
$G_4(p, P, t)$	$-\partial G_4 / \partial p_i$		$\partial G_4 / \partial P_i$		$\partial G_4 / \partial t$

表 4.1: 母関数と新旧変数の対応関係

例えば Type 1 の母関数

$$G(q, Q, t) = \sum_i q_i Q_i \quad (4.92)$$

は正準変換

$$p_i = \frac{\partial G}{\partial q_i} = Q_i \quad (4.93)$$

$$P_i = -\frac{\partial G}{\partial Q_i} = -q_i \quad (4.94)$$

$$K = H + \frac{\partial G}{\partial t} = H \quad (4.95)$$

を与える。この正準変換は正準座標と正準運動量を交換する。このようにハミルトン形式においては座標と運動量は等価に扱われる。

ここで、もうひとつ重要な事実を示す。今、実数 ϵ を微小量として、 (q, P) とハミルトニアン H による Type 1 の母関数

$$G(q, P, t) = \sum_i q_i P_i + \epsilon H(q, P) \quad (4.96)$$

を考える。これは微小正準変換と呼ばれる正準変換の一種である。この微小正準変換によって q, p は $q + \delta q, p + \delta p$ に変換されるとすると旧変数と新変数間の関係

$$Q_i = q_i + \epsilon \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (4.97)$$

$$p_i = P_i + \epsilon \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (4.98)$$

は

$$\delta q_i = \epsilon \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (4.99)$$

$$\delta p_i = -\epsilon \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (4.100)$$

と書ける。これは正準方程式と同じ形をしていることが分かる。すなわち、ハミルトン系の (q, p) の時間発展は正準変換の一種であり、ハミルトニアンによる微小正準変換の繰り返しとみなせる。