入射器の概略・全体

夏井　拓也

目 次

入射器の概略・全体

1　はじめに - KEK 入射器の役割

KEK の入射器は 40 年近く前に 2.5 GeV の PF 入射器として建設が始まり，1982 年には 2.5 GeV 電子ビームの蓄積に成功している．当時は 400 m の線形加速器だった．1984 年に TRISTAN 計画では陽電子ビームの生成も始まり，電子・陽電子ビームともに 2.5 GeV のエネルギーが入射が可能となった．1999 年より KEKB が始まり SLED を導入して高周波を増強し，折返し地点の J-arc を作って全体が 600 m に伸びた [1]．現在は，SuperKEKB の入射が始まり，RF gun の増設，新しく陽電子生成のため FC の導入，ダンピングリング設置など達成している．

現在，KEK には放射光施設と物理実験施設 (SuperKEKB) があり，2 つの放射光リング，SuperKEKB HER LER の 4 リングを運転している．電子陽電子入射器棟では，この 4 リングにビームを供給している．入射器棟の加速器は線形加速器 (Linac, liner accellator) と呼ばれるもので，名前の通り直線上にビームを加速していく装置である．この入射器棟の線形加速器は，加速管というものを並べたもので，途中で折り返し地点を挟むものの，600 m にも渡って同じ景色が延々と続く装置，というか施設である．この全長 600 m の線形加速器を 4 リングの入射器として使っている．図 1 が線形加速器が並ぶ入射器の一部を写した写真である．(実はこの図 1 は Google ストリートビューの写真でり，Google ストリートビューで擬似的に入射器を見学できる．ただし，同じような線形加速器がいくつも並んでいるので，すべて見終える前に飽きてしまうだろう）

電子ビームラインの途中には陽電子発生用のターゲットが設置され，電子ビームから陽電子ビームを作り出している．そして，陽電子ビームも電子ビームと共通の加速管で加速していく．陽電子ビームではエミッタンス改善のためのダンピングリングが入射器の途中に設置されている．陽電子ビームに関しては一度ダンピングリングに入射し，エミッタンスが小さくなったビームを取り出し再び線形加速器で加速する．

放射光施設ではリングに電子ビームをためて放射光を発生させたいので，入射器棟に電子ビームを要求する．SuperKEKB リングでは電子ビームと陽電子ビームを衝突させる物理実験をするために電子・陽電子

図 1: 入射器写真 (Google ストリートビューより)

ビームを要求する．入射器ではこれら 4 つのリングの要求に応じて必要なときにビームを加速し入射している．ただし，厄介なことに各リングで要求するビームスペックはすべてバラバラである（電荷量やビームエネルギー，はたまた電子と陽電子の違いなど）．また，KEKB から SuperKEKB へのアップグレードで入射器のビームも表 1 のように大幅な改善を求められている．電荷量は電子・陽電子ともに 4 倍になり，エミッタンスも大幅な改善を求めらている．陽電子ビームの電荷増強のため FC が新設され，エミッタンス改善のためにダンピングリングが建設さた．電子ビームは高電荷低エミッタンスをダンピングリングなしで実現するため光陰極 RF gun が開発された．

さて，４つもリングがあり，それぞれスペックの違うビームに対して入射器の加速ラインはたったの 1 本である．更に SuperKEKB 開始からは，全リング同時にビームを要求されたならば，ほぼ同時にビームを入射することも実現させた．これはパルス的に発生するビームのパルス間隔が 20 msec なので 20 msec 毎に，各リング仕様に加速器を切り替えるという作業を忙しなく行っている（なんともサービス精神旺盛だ）．

4 リングあるのだからいっそ 4 つ入射器を作ればいいのにと読者は思ったかもしれない．筆者もそう思うが，現実に建設された入射器は 1 つだけだ.（きっとコストや諸事情でこうなっているのだろう.）しかたないので，ここでは世にも珍しい 4 リング同時入射のための入射器の説明をはじめたい．

表 1: KEKB と SuperKEKB のビームパラメータ

	KEKB		SuperKEKB	
Beam	e+	e−	e+	e−
Energy [GeV]	3.5	8.0	4.0	7.0
Bunch charge [nC]	1	1	4	4
Normalized Emitance [mm-mrad]	1400	310	100/15 (Hor./Ver.)	40/20 (Hor./Ver.)

2　電子線形加速器の基礎

ビームとは多数の粒子がほぼ同じ運動量を持って，ほぼ同じ位置にある状態をさす．荷電粒子の場合は電場によって粒子を加速しビームにしていく．荷電粒子の中でも電子（または陽電子）は非常に加速が容易な部類である．それは，電荷量に対して質量が非常に小さい（電荷の素だから当然であるが）ので，容易に光の速度に達するためである．

さて，電子ビームのエネルギーの単位として [eV] が通常よく用いられる．これは電子 1 個が 1 V の電圧を移動したときに得られる仕事量である．1 C の電荷で 1 V の電圧ポテンシャルで得られるエネルギーが 1 J なので，1 eV は，1.602×10^{-19} J (素電荷量 J) となる．1 kV で加速すれば 1 keV, 1 MV で加速すれば 1 MeV, 1 GV で加速すれば 1 GeV である．(ちなみに keV は「ケブ」，MeV は「メブ」，GeV は「ジェブ」と発音する．) 電子の質量は 9.109×10^{-31} kg なので，1 MeV で光の速度の 94.1 %に, 10 MeV で 99.9 %，100 MeV で 99.9987 %に達する．入射器棟では，7 GeV まで加速するが，ほぼ入射器全体に渡ってビームは光の速度とみなして良い．

2.1　Transfar Matrix と Twiss parameter

ビームは多数の粒子の集まりであり，１つの粒子は３次元空間の位置と３次元方向の運動量を持っているので６次元で表される．しかし，通常はビーム進行方向に垂直な x 方向と y 方向は独立に扱うことができる．すなわち，単一粒子は (x, x') と (y, y') の 2 次元 ×2 で考えることが多い．x' は x の微分であり，粒子の角度と考えてよい．図 2 に (x, x') の概念図を示す．さて，図 2 において粒子がなんの力も受けずに（このような状態をドリフトと呼ぶ）運動を続けて $z = L$ の位置まで進んだとしよう．その状態を (x_1, x_1') とすると，

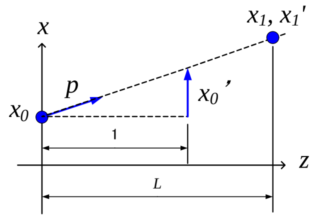


図 2: x と x'

$x_1 = Lx_0'$ と変化し，角度は変わらないので $x_1' = x_0'$ となる．これを 2×2 の行列を使って表せば，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix} \tag{1}$$

となる．ここで示した 2 × 2 の行列は長さ L のドリフト空間の Transfar Matrix と呼ばれるものである．例えば，レンズの役割をする Transfar Matrix は $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix}$ となることが知られている．これは平行ビームを通すと長さ f の距離が焦点をとなるものである．平行ビーム $x' = 0$ が焦点 f のレンズを通り f の距離のドリフト空間を走った場合が図 3 になる．実際

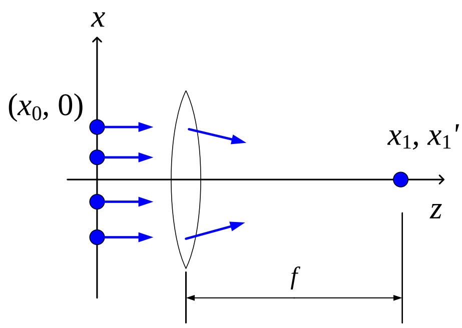


図 3: 平行ビームのレンズ集束

にこれを計算してみると，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ -x/f \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -x_0/f \end{pmatrix} \tag{4}$$

となり，x_0 の値にかかわらず $x_1 = 0$ となることがわかる．

後述する Q マグネットはビームに対しレンズの役割を果たし，実際のビームライン上には多数の Q マグネットが置かれている．このレンズの並びは光学系とほとんど同じなのでビームラインの Transfar Matrix の並びのことを Optics と呼ぶことが多い．Transfar Matrix は $\boldsymbol{R}$ と記述されることが多い．(あるビームラインが Transfar Matrix $\boldsymbol{R}$ とすると，入射粒子 $\boldsymbol{x_0} = (x_0, x_0')^t$ で出射粒子 $\boldsymbol{x_1} = (x_1, x_1')^t$ であれば，単純に，$\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{x_0}$ 　となる.）

さて，ここまでは単粒子について見てきたが，ビームは多数の粒子の集まりである．この粒子群としてのビームを記述するために Twiss parameter というものがある．まず，ビームは図 4 のように x, x' 平面において原点を中心に正規分布になっているとすと，これは 2 次元の楕円で表すことができる．図 4 は正規分布のシグマで楕円を描いている．

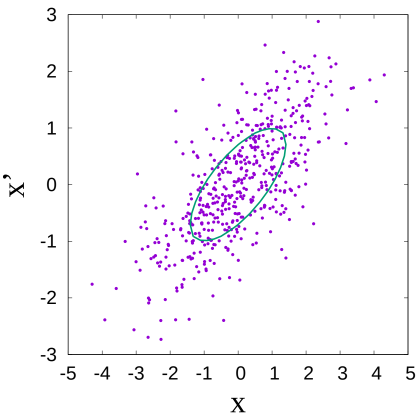


図 4: $x - x'$ 平面の粒子分布

このように粒子分布のエンベロープとして描かれた楕円は，以下の式によって定義される．[2]

$$\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2 = \varepsilon \tag{5}$$

ただし，

$$\beta\gamma - \alpha^2 = 1 \tag{6}$$

の関係がある．この楕円の面積は $\pi\varepsilon$ になり ε のみが楕円の面積に係る係数であることがわかる．この ε がエミッタンス (emittance) と呼ばれる値でビームの質を決める非常に重要な値である．(このようにビームの 1σ で作るエンベロープで定義したエミッタンスを rms エミッタンスと呼ぶ）図 5 に Twiss parameter の例を示す.

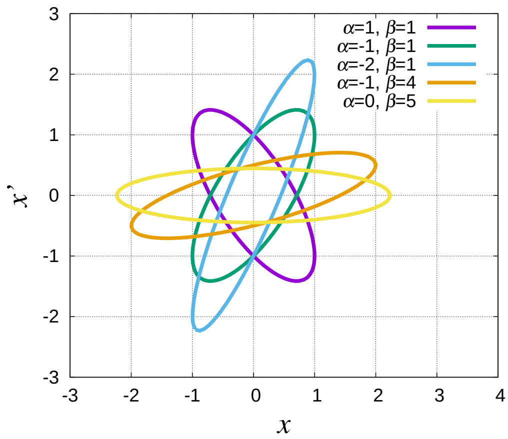


図 5: 様々な Twiss parameter における楕円 $\varepsilon = 1$

粒子分布のエンベロープとして描かれた楕円 $\boldsymbol{x} = (x, x')$ も当然ながら Transfar Matrix $\boldsymbol{R}$ によって $\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{x_0}$ と変化する．この関係を使って Twiss parameter がどう変化するかを見ていく．

さて，一般的な楕円の式は対称行列 $\boldsymbol{\sigma}^{-1}$ を使って，

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{\sigma}^{-1} \boldsymbol{x} = 1 \tag{7}$$

と表される．ここで，$\boldsymbol{x_0}^T \boldsymbol{\sigma_0}^{-1} \boldsymbol{x_0} = 1$ と $\boldsymbol{x_1}^T \boldsymbol{\sigma_1}^{-1} \boldsymbol{x_1} = 1$ となる 2 つの楕円 $\boldsymbol{x_0}$, $\boldsymbol{x_1}$ の間に $\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{x_0}$ の関係があったとする．このときに $\boldsymbol{\sigma_0}^{-1}$ と $\boldsymbol{\sigma_1}^{-1}$ にどのような関係があるかを計算すると

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{x_0}^T \boldsymbol{\sigma_0}^{-1} \boldsymbol{x_0} = 1 \\
&\boldsymbol{x_0}^T \boldsymbol{R}^T (\boldsymbol{R}^T)^{-1} \boldsymbol{\sigma_0}^{-1} \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{R} \boldsymbol{x_0} = 1 \\
&(\boldsymbol{R}\boldsymbol{x_0})^T (\boldsymbol{R}^T)^{-1} \boldsymbol{\sigma_0}^{-1} \boldsymbol{R}^{-1} (\boldsymbol{R}\boldsymbol{x_0}) = 1 \\
&\boldsymbol{x_1}^T (\boldsymbol{R}^T)^{-1} \boldsymbol{\sigma_0}^{-1} \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{x_1} = 1 \\
&\boldsymbol{x_1}^T (\boldsymbol{R}\boldsymbol{\sigma_0}\boldsymbol{R}^T)^{-1} \boldsymbol{x_1} = 1
\end{aligned} \tag{8}$$

となり，以下の関係があることがわかる．

$$(\boldsymbol{R}\boldsymbol{\sigma_0}\boldsymbol{R}^T)^{-1} = \boldsymbol{\sigma_1}^{-1} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{\sigma_0}\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{\sigma_1} \tag{10}$$

ここで，式 (5) を満たすように $\boldsymbol{\sigma}$ を定義すれば

$$\boldsymbol{\sigma}^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma/\varepsilon & \alpha/\varepsilon \\ \alpha/\varepsilon & \beta/\varepsilon \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \beta\varepsilon & -\alpha\varepsilon \\ -\alpha\varepsilon & \gamma\varepsilon \end{bmatrix} \tag{12}$$

となる．$\boldsymbol{\sigma}$ の行列式は ε^2 になるので，$\boldsymbol{R}$ の行列式が 1 ならばエミッタンスが変化しないということがわかる．ドリフトスペースも Q マグネットの Transfar matrix も行列式は 1 なのでエミッタンスは不変量として扱われる．

しかし，エミッタンスが保存されるのは加速を考えない場合である．ここで，ビームの進行方向 z に加速が加わった場合を考える.（ちなみに，加速を考えた場合の Twiss parameter はローレンツファクタ γ や速度 $\beta = v/c$ が出てきて紛らわしくなってしまう．ここからしばらくはその意味で γ, β を使う.）このとき，ビームはほぼ光速になっており，$\beta_z \simeq 1$, $\beta_x \simeq x'$ とする．また，加速によりローレンツファクタが γ_1 から γ_2 になったとすると，加速前と加速後の運動量 $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ は

$$p_{x1} = \gamma_1 \beta_{x1} mc \tag{13}$$

$$p_{z1} = \gamma_1 \beta_{z1} mc \tag{14}$$

$$p_{x2} = \gamma_2 \beta_{x2} mc \tag{15}$$

$$p_{z2} = \gamma_2 \beta_{z2} mc \tag{16}$$

ほぼ光速に近いので $\beta_{x2} = \beta_{x1}$ となり，z 方向のみの加速なので $p_{x2} = p_{x1}$，すなわち $\gamma_2\beta_{x2} = \gamma_1\beta_{x1}$ となり，

$$\beta_2 = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\beta_{x1} \tag{17}$$

$$x'_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}x'_2 \tag{18}$$

さらに，x においては（加速空間を薄肉近似すると）変化はないので，Trasfar matrix $\boldsymbol{R}$ は

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \end{bmatrix} \tag{19}$$

となる．ここでローレンツファクタの比 $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ を G と置き，この Trasfar matrix $\boldsymbol{R}$ でどのように Twiss parameter が変化するか計算してみると，（以下からは，Twiss parameter の β, γ）

$$\begin{bmatrix} \beta_2\varepsilon_2 & -\alpha_2\varepsilon_2 \\ -\alpha_2\varepsilon_2 & \gamma_2\varepsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1\varepsilon_1 & -\alpha_1\varepsilon_1 \\ -\alpha_1\varepsilon_1 & \gamma_1\varepsilon_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$= \begin{bmatrix} \beta_1\varepsilon_1 & -G\alpha_1\varepsilon_1 \\ -G\alpha_1\varepsilon_1 & G^2\gamma_1\varepsilon_1 \end{bmatrix} \tag{21}$$

となる．ここで Twiss parameter の条件 $\beta\gamma - \alpha^2 = 1$ の条件をみたすためには $\varepsilon_2 = G\varepsilon_1$ の関係が必要になる．すなわち，加速によってエミッタンスはローレンツファクタの比だけ小さくなり，Twiss parameter は以下のように変化する．

$$\alpha_2 = \alpha_1 \quad \beta_2 = \frac{1}{G}\beta_1 \quad \gamma_2 = G\gamma_1 \quad \varepsilon_2 = G\varepsilon_1 \tag{22}$$

線形加速器のなかでは，常にビーム加速を行うのでエミッタンスはどんどん小さくなってしまう．そこで，エネルギーが変化しても値を保存する規格化エミッタンスが定義される．規格化エミッタンス ε_N は，エミッタンスとローレンツファクタ γ の積をとって，

$$\varepsilon_N = \gamma\varepsilon \tag{23}$$

と表される．

実際には，x 方向 (x, x') と y 方向 (y, y') に独立に Twiss parameter が存在する．また，加速方向の z 方向でも同じように位置 z と運動量 $\delta = \Delta p/p$ (p:ビームの平均運動量，Δp:粒子の平均運動量からのずれ) を定義できる．すると，粒子は 6 次元 $(x, x', y, y', z, \delta)$ のパラメータをもつ．この場合でもビームを 6 次元の楕円と考えれば，式 (10) が成り立ち，同じように 6 次元の Transfar Matrix $\boldsymbol{R}$ が分かれば 6 次元の Matrix $\boldsymbol{\sigma}$ が計算できる．

ここまでの関係式を使えば，ビームの初期の Twiss parameter とエミッタンスが分かっていて，どのようにマグネットと加速管が配置されているか分かれば，ビームがどこでどのようなビームサイズと発散角（Twiss parameter）であるかすべて計算できる．

2.2 静電加速と高周波加速について

荷電粒子を加速するためには電場を作ればよい．最も単純な方法は静電場を作ることだ．図 6 のようにマイナス電圧を印加したカソード（電子発生源）とアノードを用意し，アノード電極に穴を開けておけばそ

の穴から電子ビームが取り出せる．これが静電場を利用したビーム加速である．電極の電圧がすなわちビームのエネルギーである．1 kV の電極を用意すれば 1 keV の電子ビームになる．

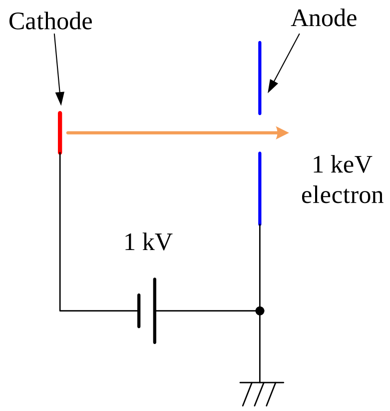


図 6: 静電場加速

さて，このように発生したビームを追加速したいとする．どうすればよいだろうか？また電極を用意すれば良さそうに思う．しかし，グランドレベルに放出されたビームをグランドレベルのままで加速するには静電場は使えない．なぜならば静電場加速はポテンシャルエネルギーを運動エネルギーに変換したに過ぎず，ビームのエネルギーはカソードのポテンシャルにのみ依存するからである．

そこで登場するのが高周波加速である．これは，図 7 のように電極に直流電源をつなぐのではなく交流電源をつなぐことに相当する．このようにして，電圧が 0 のときに電子が入口から入射してだんだんと加速電場が印加され，また出口に達するときには電圧が 0 に戻るというふうになれば繰り返し加速が可能である．もちろん電子の入射のタイミングをずらせば減速させることも可能である．

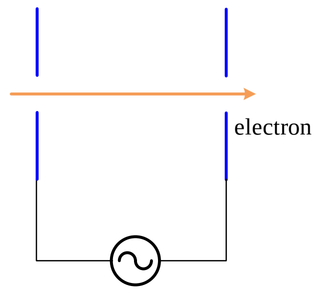


図 7: 交流電圧での加速

実際には非常に高い周波数の交流電圧，すなわち高周波を利用する．高周波とは電磁波の俗称みたいなもので数 MHz から数十 GHz までの周波数帯を示すことが多い．図 8 のように高い周波数の電磁波を伝導帯の空洞の中に閉じ込めて加速電場を発生させる装置を加速空洞と呼ぶ．

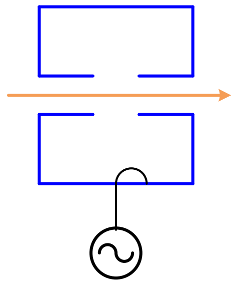


図 8: 高周波空洞での加速

2.3 高周波の基礎

高周波とは電磁波の俗称みたいなもので数 MHz から数十 GHz までの周波数帯を示すことが多い．加速器業界では RF(radio frequency) とよぶことが一般的である．

2.3.1 高周波源　クライストロン

クライストロン (klystron) は加速器用の RF 源としてよく用いられるもので，ハイパワーの RF が得られる．クライストロンには直進形クライストロンと反射形クライストロンがある．加速器の RF 源として用いられるものは直進形クライストロンである．また，近年はマルチビームクライストロンの開発も進められている．

図 9 に直進形クライストロンの原理を示す．Buncher cavity に種となる RF を入れてやることで電子銃から発生した電子ビームにモジュレーションをかけ，バンチングした電子ビームを Catcher cavity に打ち込む．このバンチングした電子ビームが作る電磁場を Catcher cavity に溜めて出力 RF として取り出す．

直進方クライストロンの特徴を以下に示す．

- 効率が高く 40%にも達するので大電力用に適する
- 増幅度が大きく 60dB にも達する

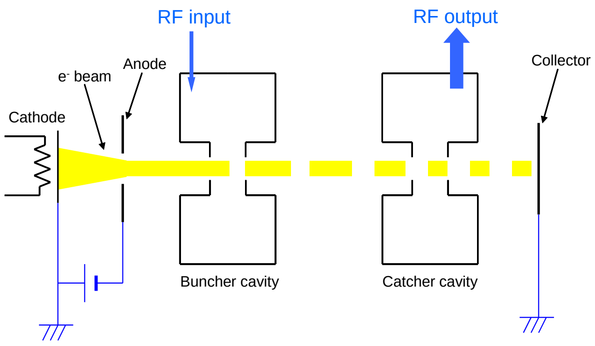


図 9: 直進形クライストロンの原理

- 入力 RF の周波数によって出力周波数が完全に決まるので，周波数安定度はきわめてよいが，周波数帯域は狭い

2.3.2　導波管

導波管は高周波を伝搬させるものであり，加速器では大電力の高周波を高周波源から加速管まで運搬するために使う．導波管は中空の金属管で作られており，四角い金属管がよく使われている．特に大電力を扱う導波管は中が真空に保たれている．導波管の詳しい解説は補足 A を参照してほしい．

2.3.3　共振空洞　加速空洞

共振空洞とは金属の空洞であり，共振空洞内は金属で囲まれた真空の空間となる．そこに電磁波のエネルギーを貯め込む場合は，ある決まった周波数の共振モードが現れる．電場と磁場は位置 $\boldsymbol{r}$ と時間 t の関数 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$ と表されるが，共振モードだけを考えると，それぞれ共振周波数 ω で振動するモード

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})e^{i\omega t} \tag{24}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})e^{i\omega t} \tag{25}$$

と表すことができる．

また共振空洞を解析する場合，金属内部には電荷も電流もない条件で計算する．これは，マクスウェル方程式で電荷密度 $\rho = 0$，電流密度 $\boldsymbol{j} = 0$ に対応するので，

$$\nabla^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{26}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{27}$$

が得られる．

ここで，ω は共振角周波数である．これらの微分方程式を金属の境界条件

$$\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \tag{28}$$

$$\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n} = 0 \tag{29}$$

のもとでとけば空洞内の電磁場が求まる．ここで，$\boldsymbol{n}$ は境界の法線ベクトルである．一般的な形状（境界条件）の共振空洞の電磁場分布及び共振周波数を求めるには，式 (27) または，式 (26) を数値計算で解くことになる．特殊な形状においては解析解が存在するが，その例を補足 B に示した．

空洞に電磁場のエネルギーが溜まると，金属表面には電流が流れてエネルギーが消費される．エネルギー消費は金属の電気抵抗に比例するので，当然電気抵抗が低い材料が選ばれる．常温の金属であれば銅が用いられるし，超電導体が使われることもある．空洞のに溜まったエネルギー U と消費電力 P を用いて共振空洞の Q 値 (Quality factor) が以下のように定義できる．

$$Q = \omega_0 \frac{U}{P} \tag{30}$$

ここで，ω_0 は共振角周波数である.（この Q 値は電気回路の LC 共振回路での Q 値と同じである.）

加速器ではこの共振空洞を加速空洞として応用する．その場合，ビーム軸に対して軸対称な形状を用いることが多い．これは，計算がしやすいこともあるが，ビームに対して横方向に対称な電磁場を与えるというメリットも有る．軸対称な空洞に対して TM0 モードが加速に使用される．TM モードとは図 10 に示したように円筒空洞座標の θ 方向のみに磁場 H が存在し，電場は θ 成分を持たず rz 平面にのみ分布する．このような TM0 モードは磁場が θ 方向に依存性がないので，式 (27) はスカラーらの微分方程式

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H_\theta}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 H_\theta}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 H_\theta = 0 \tag{31}$$

となる．

この空洞の特性を表す重要なパラメータにシャントインピーダンスがある．シャントインピーダンス Z_s はどのくらい効率よくビームを加速できるかの指標となる．まず，加速空洞は電場を発生しているので，その電場を z 軸方向（加速方向）に積分すると電圧が得れれる．その電圧の 2 乗は消費電力に比例するはずなので，その比をシャントインピーダンス Z_s と定義し，

$$Z_s = \frac{V_0^2}{P} \quad [\Omega] \tag{32}$$

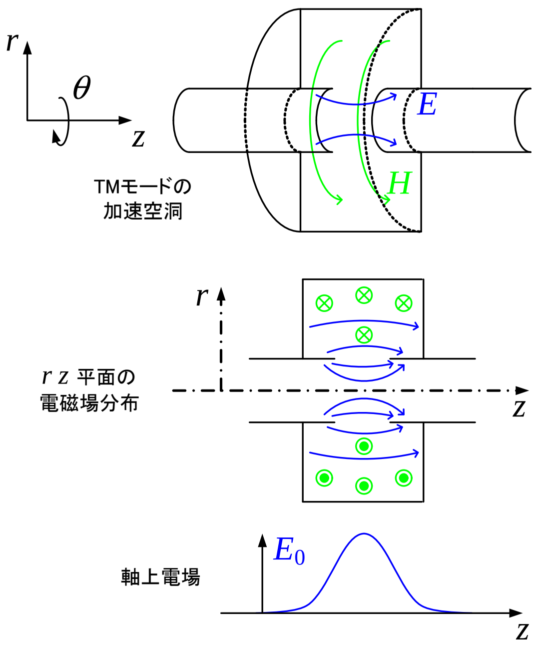


図 10: 軸対称 TM0 モードの加速空洞

と表される．単位は [Ω] となる．V_0 は加速管の z 方向電場ピーク値 $E_z(r,z)$ を用いて

$$V_0 = \int_0^L E_z(0,z)\mathrm{d}z \tag{33}$$

と定義される．ここで，E_0 はピーク値を積分したので必ずしも粒子が感じる電場強度ではない．実際には，加速空洞の周波数 ω を用いて $E_0(z,t) = \Re\left[E_0(z)e^{i\omega t}\right]$ と表せる．そこで，実際の粒子の感じる電圧 V を考えると，電圧は粒子の入射位相 θ に依存する．では速度 $v = \beta c$ の電子が位相 θ で入射したときに感じる電場と電圧を考える．電子の位置 z は $z = c\beta t$ であるのでこれを考慮して電場を積分し電位差を求めると，

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \int_0^L \Re\left[E_0(z)e^{i\omega t}e^{i\theta}\right]dz & (34)\\ &= \int_0^L \Re\left[E_0(z)e^{i\frac{z}{c\beta}}e^{i\theta}\right]dz & (35)\\ &= \Re\left[e^{i\theta}\int_0^L E_0(z)e^{i\frac{z}{c\beta}}dz\right] & (36)\end{aligned}$$

となる（実際にはビームはほぼ光速とみなすので $\beta = 1$）．ここで，電圧が最大になる位相を選んだ実行的な電圧 V_{eff} は，式を見て明らかなように，

$$V_{eff} = \left|\int_0^L E_0(z)e^{i\frac{z}{c\beta}}dz\right| \tag{37}$$

である．この V_0 と V_{eff} の比を transit time factor $T = V_{eff}/V_0$ という．

改めて，transit time factor T を含んだ形のシャントインピーダンスの式を記すと以下のようになる．

$$Z_sT^2 = \frac{\left|\int_0^L E_0(z)e^{i\frac{z}{c\beta}}dz\right|^2}{P} \tag{38}$$

加速空洞の特性として Z_sT^2 が重要になる．

2.3.4 導波管と共振空洞の結合

空洞共振器は外部から励振されるため導波管と結合されている．ここでは，空洞共振器を取り扱うとき重要になるパラメータについて説明する．

空洞共振器を特徴付けるパラメータとしては，Q 値と結合係数 β がある．Q 値は $Q = \omega_0\frac{U}{P}$ で表されることはすでに述べた．ここで，ω_0：共振周波数，U：空洞に蓄えれているエネルギー，P：損失（単位あたりに空洞から失われるエネルギー）である．

Q 値には３種類あり，

1. 無負荷の Q(unloaded Q) — Q_0
2. 外部の Q(external Q) — Q_{ext}
3. 負荷時の Q(loaded Q) — Q_L

がある．Q_0 は空洞内で電磁場による壁電流で消費される電力 P_0 による Q である．Q_{ext} は空洞の結合孔から外に逃げていく電磁場の電力 P_{ext} による Q である．この P_0 と P_{ext} の和が空洞から失われるパワー P_L とすると次の関係がある．

$$\begin{aligned} P_L &= P_0 + P_{\mathrm{ext}} & (39)\\ \frac{1}{Q_L} &= \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{\mathrm{ext}}} & (40)\end{aligned}$$

結合係数は，空洞と外部回路（普通は導波管）との結合の強さを表し，

$$\beta = \frac{P_{\mathrm{ext}}}{P_0} = \frac{Q_0}{Q_{\mathrm{ext}}} \tag{41}$$

で表され，$\beta > 1$，$\beta = 1$，$\beta < 1$ に対して，それぞれ強結合，臨界結合，弱結合という．また，式 40, 41 から

$$Q_L = \frac{1}{1+\beta}Q_0 \tag{42}$$

の関係が導かれる．

Linac の運転は通常 RF パワーを矩形パルスにして入力するが，この矩形パルスを空洞に入力したときの空洞内電場の波形および反射波形から Q_L および結合係数 β が求められる．U の減少率が P であるから

$$P = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} \tag{43}$$

であり，したがって，式 (30) を使えば

$$U = U_0 e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}} \tag{44}$$

となり，ステップパルスを切ったときの空洞内電力の減衰の時定数から Q_L が求められる．U が U_0 の $1/e$ になる時間を Δt とすると

$$\Delta t = \frac{Q_L}{\omega_0} \tag{45}$$

となる．

また，β は反射波の立ち上がりと立下りのピーク値から以下のようにして求められる．空洞への入力波を E_i，空洞から放出される波を E_{ext} とすると，結合孔での反射波は，$-E_i$ となり，結合孔から放出される波 E_{ref} は次式で与えられる．

$$E_{\mathrm{ref}} = -E_i + E_{\mathrm{ext}} \tag{46}$$

ここで，P_i を入射電力，P_ref を反射電力，P_0 を無負荷の損失とすると，電力は保存されるから

$$P_i = P_{\mathrm{ref}} + P_0 + \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} \tag{47}$$

が成り立つ．電力は電場の 2 乗に比例することと式 (30), (41) を使うと[1]

$$E_i^2 = (E_e - E_i)^2 + \frac{E_{\mathrm{ext}}^2}{\beta} + \frac{2Q_0}{\omega\beta} E_{\mathrm{ext}} \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{ext}}}{\mathrm{d}t} \tag{48}$$

が得られる．この式は

$$t_f \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{ext}}}{\mathrm{d}t} + E_{\mathrm{ext}} = \alpha E_i \tag{49}$$

と書き換えられる．ただし，$t_f = \frac{2Q_L}{\omega} = \frac{2Q_0}{\omega(1+\beta)}$ ：空洞の充填時間，$\alpha = \frac{2\beta}{1+\beta}$ である．

ここで，パルス ON の時間を $[0, t_1]$ とし（すなわち，$0 < t < t_1$ では $E_i = 1$ ，$t_1 < t$ では $E_i = 0$），それぞれの区間に対して式 (49) を解くと

$$E_{\mathrm{ext}} = \begin{cases} \alpha \left[1 - \exp\left(-\frac{\pi(1+\beta)ft}{Q_0}\right)\right] \\ \qquad (0 < t < t_1) \\ \alpha \left[\exp\left(\frac{\pi(1+\beta)ft_1}{Q_0}\right) - 1\right] \exp\left(-\frac{\pi(1+\beta)ft}{Q_0}\right) \\ \qquad (t_1 < t) \end{cases} \tag{50}$$

となる．また，E_{ref}，P_{ref} は次式で与えられる．

$$E_{\mathrm{ref}} = \begin{cases} -1 + E_{\mathrm{ext}} & (0 < t < t_1) \\ E_{\mathrm{ext}} & (t_1 < t) \end{cases} \tag{51}$$

$$P_{\mathrm{ref}} = E_{\mathrm{ref}}^2 \tag{52}$$

$t = t_1 - 0$，$t = t_1 + 0$ での反射電力 P_{ref} の値を P_1，P_2 とすると

$$P_1 = \left\{ \frac{2\beta}{1+\beta} \left[1 - \exp\left(-\frac{\pi(1+\beta)ft_1}{Q_0}\right)\right] - 1 \right\}^2 \tag{53}$$

$$P_2 = \left(\frac{2\beta}{1+\beta}\right)^2 \left[1 - \exp\left(-\frac{\pi(1+\beta)ft_1}{Q_0}\right)\right]^2 \tag{54}$$

となる．指数の項は通常 1 に比べて非常に小さいので無視すると，

$$P_1 \approx \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^2 \tag{55}$$

$$P_2 \approx \left(\frac{2\beta}{1+\beta}\right)^2 \tag{56}$$

となり，これより β が求められる．

$$\beta = \left(\frac{1-\sqrt{P_1}}{1+\sqrt{P_1}}\right)^2 \tag{57}$$

$$\beta = \left(\frac{\sqrt{P_2}}{2-\sqrt{P_2}}\right)^2 \tag{58}$$

また，この式より β が無限大のときは $P_2 = 4$ となる．

2.4　加速管

加速管は高周波空洞を並べたもので空洞同士が電磁気的に結合し，ビーム加速に都合よく加速電場が発生するようになっている．加速管については OHO2002 の「5 . 加速管・立体回路」に詳しく解説がある．

電子線形加速器の加速管は円筒型導波管に円盤を装荷した形のものが使われ, 円盤装荷導波管 (disc-loaded waveguide) と呼ばれ，図 11 のような形である．これは，円筒導波管に円盤を装荷して，導波管の RF の位相速度を遅く（管内波長を短く）したものと考えることができる．これは，電子ビームを加速できる位相速度 ($v_p \leq c$) にするためである．導波管としてはこの構造を遅波構造 (slow-wave structure) と呼ぶ．加速管では穴の空いたディスクとディスクの間の空間をセル (cell) と呼ぶことが多い．

[1] $P_{\mathrm{ref}} = (E_{\mathrm{ext}} - E_i)^2 \quad P_0 = \frac{P_{\mathrm{ext}}}{\beta} = \frac{E_{\mathrm{ext}}^2}{\beta} \quad \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{Q_{\mathrm{ext}}}{\omega}\frac{\mathrm{d}P_{\mathrm{ext}}}{\mathrm{d}t} = \frac{Q_0}{\omega\beta}\frac{\mathrm{d}(E_{\mathrm{ext}}^2)}{\mathrm{d}t} = \frac{2Q_0}{\omega\beta} E_{\mathrm{ext}} \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{ext}}}{\mathrm{d}t}$

加速管には進行波管 (travelling-wave tube) と定在波管 (standing-wave tube) がある．進行波管は RF のエネルギーが流れる方向が一方的（ビームを加速する方向）であるが，定在波管は+方向の流れと-方向の流れがある．いずれの場合もセルの中に図 12 のような加速電場を立ててビームを加速する．

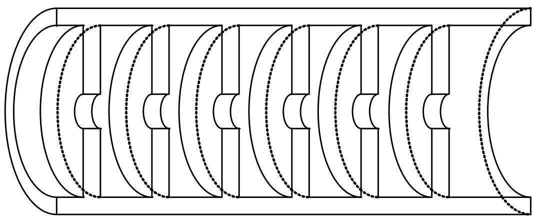


図 11: 加速管の構造 (断面図)

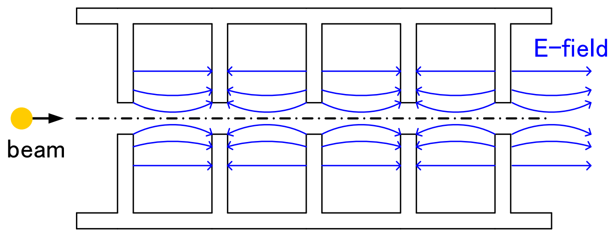


図 12: 加速管の中の加速電場

加速管は共振空洞が結合孔を通じて連成振動体となったもので，各共振モードは図 13 のようになる．0 mode はすべてのセルで同じ方向に電場が立つモードで加速には使えない．$\pi/2$ mode は 1 セル進むと位相が $\pi/2$ だけ進むモードで，図 13 を見てもわかる通り 4 セル進むと同じ位相になっている．$2\pi/3$ mode は 1 セルで $2\pi/3$ だけ位相が進むので 3 セルで同位相になっている．$2\pi/3$ mode は，進行波管によく用いられるモードで図 13 の sin like と cos like のを交互に繰り返しながら波が進んでいく．この，sin like と cos like は式 (31) を周期境界条件で解いた場合の実部と虚部に当たる．実際の $2\pi/3$ mode の電場形状は図 14, 15 のようになる．($\pi/2$ mode でも進行波管はあり得る．) π mode は 1 セルごとに逆位相になり，2 セル進むと同位相になっている．ただし，π mode はエネルギーの流れが無く，定在波しか存在し得ない．通常，加速管に π mode が使われることはない．

図 13 では，セルの大きさを同じにとっているが，実際は管内波長が光速になるようにする．S-band 2856 MHz の場合は波長が 104.97 mm なので，$2\pi/3$ mode

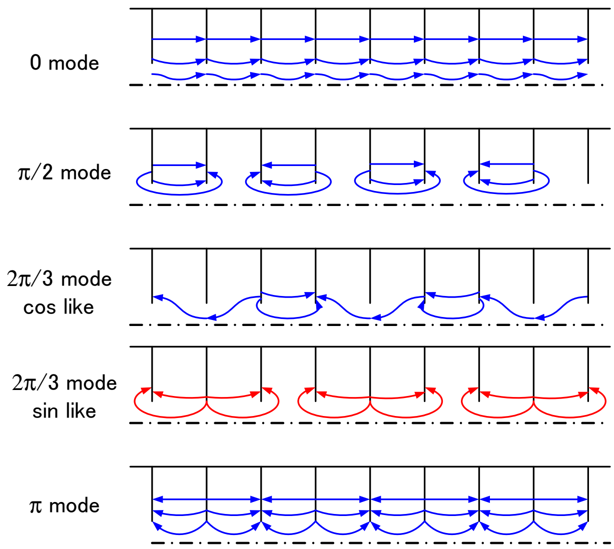


図 13: 加速管の共振モード

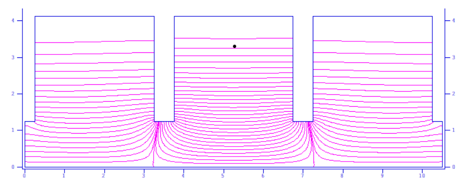


図 14: $2\pi/3$ mode cos like の電場

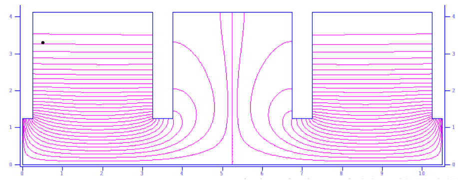


図 15: $2\pi/3$ mode sin like の電場

の 1 セルの長さは 34.99 mm となる．図 16 は各共振モードを波長を一致させて描いたもので，π mode が最もセルが長くなることがわかる．

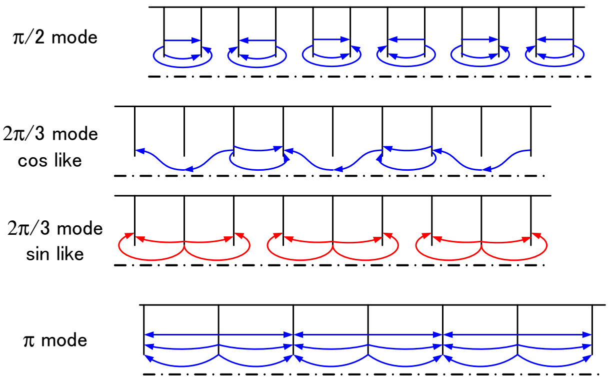


図 16: 加速管の共振モードを波長を揃えて並べた場合

加速管においてもシャントインピーダンスは定義されるが，複数のセルが繰り返される加速管の場合は単位長さあたりのシャントインピーダンス Z_s [Ω/m] が用いられる．この場合も，式 (38) がほぼ同じ形で利用でき

$$Z_sT^2 = \frac{\left|\int_0^L E_0(z)e^{i\frac{z}{c\beta}}dz\right|^2}{PL} [\Omega/\mathrm{m}] \tag{59}$$

となる．ここで，L は加速管の長さ，P は加速管の電力損失 [W] である．

これまで説明してきたように，加速管とは共振空洞がある結合係数で結合している連成振動体である．この連成振動体としての特徴を取り出してモデル化したものが電気回路の等価回路モデルである．等価回路モデルは加速空洞がもつ共振モードの特徴をよく再現しているので非常に有用な解析手法である [3, 4, 5, 6]．加速管の共振空洞一つ一つを電気回路の LC 共振状態に見立てて，空洞同士の結合度を相互インダクタンスで表した回路が，加速管等価回路としてよい近似になることが知られている．ここでは，図のように周期的に並んだ空洞を図 17 の回路に示すような等価回路モデルで考える．これは，LCR 回路が結合係数 k の相互インダクタンスで結合した回路である．今，結合された LC 回路が N 個あり，n 番目の回路に流れている電流を I_n とする．

n 番目の回路における回路方程式を求めると，

$$\left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) I_n + j\omega k\frac{L}{2}I_{n-1} + j\omega k\frac{L}{2}I_{n+1} = 0 \tag{60}$$

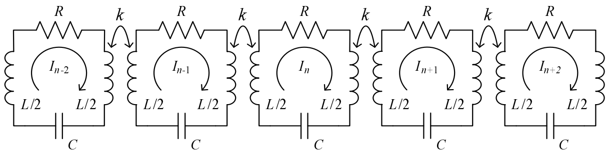


図 17: 等価回路

となるので，これを整理すると，

$$\frac{k}{2}I_{n-1} + \left(1 + \frac{R}{j\omega L} - \frac{1}{\omega^2 LC}\right) I_n + \frac{k}{2}I_{n+1} = 0 \tag{61}$$

となる．ここで，ω', Q を以下のように定義する．

$$\omega' = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\omega' L}{R}$$

このように定義すると， 式 (61) は以下のようになる．

$$\left(1 + \frac{\omega'}{j\omega Q} - \frac{\omega'^2}{\omega^2}\right) I_n + \frac{k}{2}\left(I_{n-1} + I_{n+1}\right) = 0 \tag{62}$$

また，損失がない場合，すなわち $R = 0$ のときは，

$$\left(1 - \frac{\omega'^2}{\omega^2}\right) I_n + \frac{k}{2}\left(I_{n-1} + I_{n+1}\right) = 0 \tag{63}$$

となる．

次に，回路が無限に続いている場合を考える．このとき，回路は周期的な構造を保っているのでフロケの定理が成り立つ．すなわち電流 I_n はそれぞれ位相差を持っていて，それは以下のようにあらわされる．

$$I_{n+1} = I_n e^{-j\phi} \tag{64}$$

これを式 (63) に代入すると，

$$\left(1 - \frac{\omega'^2}{\omega^2}\right) I_n + \frac{k}{2}I_n\left(e^{j\phi} + e^{-j\phi}\right) = 0 \tag{65}$$

$$\left(1 - \frac{\omega'^2}{\omega^2}\right) + k\cos\phi = 0 \tag{66}$$

となる．これより，位相差による周波数変化は以下の式で表される．

$$\omega = \frac{\omega'}{\sqrt{1 + k\cos\phi}} \tag{67}$$

$$\approx \omega'\left(1 - \frac{k}{2}\cos\phi\right) \tag{68}$$

この関係から位相速度 v_p と群速度 v_g を求めてみる．まず，位相速度の定義は $v_p = \omega/\beta$ である．($\beta = 2\pi/\lambda_g$,

λ_g:管内波長，β:伝搬定数) また，位相 ϕ は図 18 のように加速管構造の周期長 d を使って表せば $\phi = 2\pi d/\lambda_g = d\beta$ である．よって，位相速度は

$$v_p = \frac{\omega' d}{\phi\sqrt{1 + k\cos\phi}} \tag{69}$$

$$\tag{70}$$

となる．また群速度は $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}\beta$ と一致する．したがって，群速度 v_g は式 (68) を用いると

$$v_g = \omega' d\frac{k}{2}\sin\phi \tag{71}$$

となる．この周波数と伝搬定数の関係を分散関係といい，図 19 のような形になる．また，図 19 において原点とグラフの結んだ直線の傾きが位相速度になり，グラフの傾きが群速度となる．

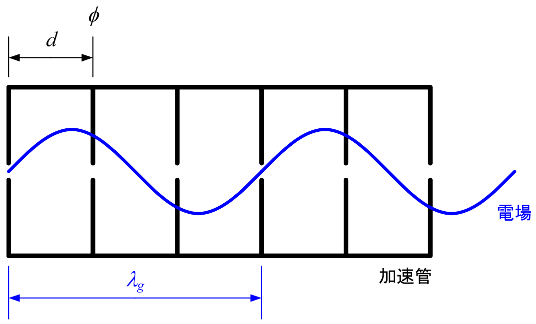


図 18: 加速管の中の d, λ_g, ϕ の関係

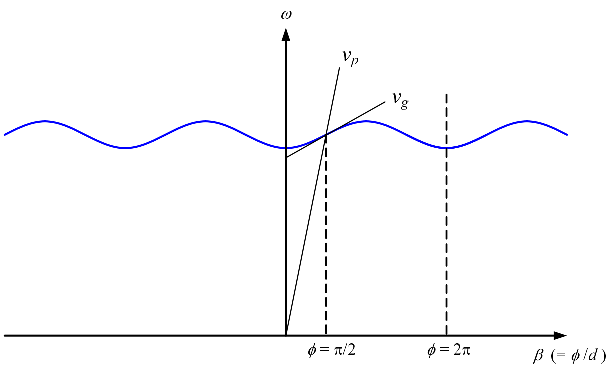


図 19: 加速管の分散曲線

加速管の中では群速度が大きい方がモードが安定することが知られている．そのため，通常 $\phi = \pi$ となる π-mode 空洞は使われず，$\pi/2$-mode や $2\pi/3$-mode などがよく使われる．

定在波管と進行波管の RF のエネルギーの流れを図 20 に示すが，定在波の場合は導波管からカプラー（結合セル）を通して加速管にエネルギーが流れ，そのエネルギーは加速管の中を行ったり来たりしながら定在波を形成する．RF のエネルギーはマッチングが取れているのならば (結合係数 $\beta = 1$ であるならば)，加速管の中ですべて消費される．対して進行波管の場合はエネルギーの流れは，上流から下流へと一方的であり，最上流の入力カプラーから入力された RF は最下流まで達すると，出力カプラーからダミーロードへと捨てられる．

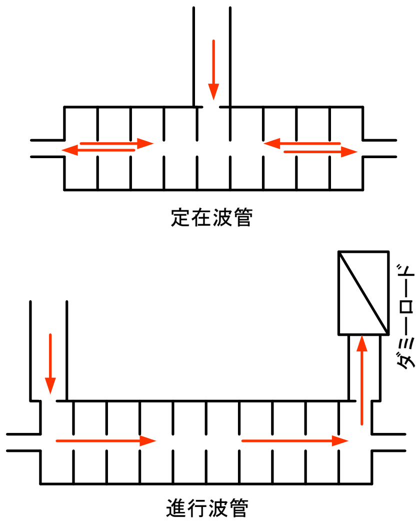


図 20: 定在波管と進行波管の RF エネルギーの流れ

定在波管の場合は，陪周期構造 (bi-periodic structure) がよくもちいられる．これは，$\pi/2$ mode と同様な群速度をもちシャントインピーダンスを高めたものである．

進行波管の場合は上流から下流へと RF が流れていく過程で徐々にエネルギーを失っていく．セルの形状が全く同じならば上流では高い加速電場だが下流に行くほど電場は弱くなる．ここで，空洞自体の無負荷の Q 値を考えると，単位長さあたりに蓄えられたエネルギー w と単位長さあたりの電力損失 dP/dz をもちいて，

$$Q = -\,\omega\frac{w}{dP/dz} \tag{72}$$

となる．加速管の群速度 v_g は，

$$v_g = \frac{P}{w} \tag{73}$$

となり，ディスクの結合孔が小さくなれば群速度も遅くなる．

加速管全体で同じ加速電場を保つように設計されたものが定電界型進行波管である．これは，下流に行くにしたがって群速度を落とすように設計されていて，具体的にはディスクの結合孔を狭くしていく．入射器の加速管もこの定電界型である．

2.5 電子銃

電子銃とは電子ビームを作り出す装置である．電子ビームを作るためには，電子の発生源と加速装置（電場発生）が必用になる．電子発生源は陰極（cathode, カソード）と呼ばれ，主に熱陰極，冷陰極，光陰極の３種類がある．加速方法は 2.2 章でも紹介した静電加速と高周波加速がある．入射器で使用している電子銃は熱陰極静電加速電子銃と光陰極高周波加速電子銃であるが，加速器で使用されるのは大抵はこの２種類である．

熱陰極とは物質を加熱しその熱エネルギーで電子が飛び出すことを利用している．ゆえに，仕事関数が低く高融点の物質が理想的である．タングステンやタンタル，六ホウ化ランタン (LaB_6) などが利用される．

冷陰極とは，熱することなく電場をかけただけで電子ビームが得られるもので，カーボンナノチューブのカソードなどが研究されている．

光陰極 (Photo cathode) は物質中の電子に光子が吸収されることで電子が仕事関数を超えて，空間中に飛び出す光電効果を利用する．照射する光子は高強度の紫外光が必要になる場合が多いので，レーザ光が利用される．照射された光子の数に対して物質の外に飛び出す電子の数の比を量子効率 (Quantum Efficeincy, Q.E.) と呼ぶ．(光子 100 個で１個の電子が出てきたら Q.E. は 0.01 となる）

2.5.1 熱陰極静電加速電子銃（熱電子銃）

もっとも世の中で多く使われているのは熱陰極静電加速電子銃であり，熱電子銃といえば大抵はこれである．(熱陰極高周波加速電子銃も稀に使用される）令和になった今日では少なくなったが，ブラウン管テレビは熱電子銃のビームで映像を映し出していた．昭和の後期には一家に一台以上電子銃があったのだ．また，クライストロンの中身は大きな熱電子銃である．熱陰極静電加速電子銃のビーム電流は当然のことながら一定の直流電流となる．この電流値はカソードの限界値で決まる場合と，電子銃に印加する電圧で決まる場合がある．十分にカソードの温度が高い場合は発生電子は十分に多く，印加電圧により電子ビーム電流が決まる．これは，電子そのものから発生する電場が印加電圧を打ち消してしまうため，カソード表面の電場が完全に打ち消されてしまう以上の電子はビームにはなりえないためである．この電子そのものの電荷がビームを制限する領域を空間電荷制限領域 (Space charge limit) と呼ぶ．電圧でビーム電流が制御できるメリットから多くの場合は空間電荷制限領域で熱電子銃を使用する．空間電荷制限領域ではビーム電流は電圧の 3/2 乗に比例することが知られており，２分の３乗則またはチャイルド・ラングミュア則 (Child-Langmuir law) と呼ばれる．電流 J と電圧の２分の３乗 $V^{3/2}$ の比例係数はパービアンス P と呼ばれ，熱電子中の特性を表す量として利用される．

$$P = \frac{J}{V^{3/2}} \quad [\mathrm{AV}^{-3/2}] \tag{74}$$

カソードとアノードだけの単純な熱電子銃を２極管と呼ぶが，それに対して３極管というものも存在する．２極管ではビームエネルギーを変えるために電圧を変えるとビーム電流まで 3/2 乗則に従って変化してしまう．そこで，電流とビームエネルギーを独立に変化させるために３極管を使用する．これは，カソードの近くにグリッドと呼ばれる網目状の電極を配置して，カソード・グリッド間の電圧を変化させることで電流を調整する．図 21 に３極管の構造を示す．ビームのエネルギーは加速電圧で制限されるので，せいぜい数百 keV が限度である．

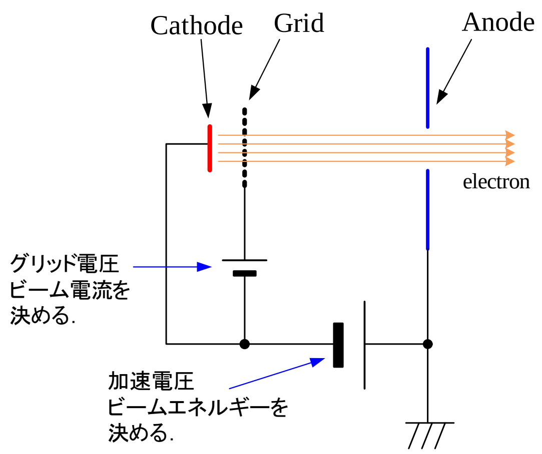


図 21: ３極管構造

2.5.2 光陰極高周波加速電子銃 (RF gun)

高周波加速電子銃は光陰極のものが多く使われる．これは，高周波加速電子銃が低エミッタンスを生成する目的に由来することが多いからであろう．高周波電子銃の特徴は，カソード表面に高い電場を与えられることで空間電荷効果を低減することにある．エミッタンス増大の原因に空間電荷効果があり，ビームが非相対論領域で横方向キックを受けることで生じる．空間電荷効果でエミッタンスが悪化する前に高電場で相対論領域まで加速させてしまうのが高周波電子銃の特徴である．

ただし，もう一つ高周波電子銃のなかでエミッタンス悪化の原因のなるものがある．それは，高周波エミッタンスとよばれるもので，おもに横方向の電場が時間的に変化することで生じる．これは，ビームのバンチ内で先頭と後方で集束・発散の受け方が異なり投影エミッタンスが増大することが要因である．(スライスエミッタンスで考えると増大しないと考えることもできる.)

高周波エミッタンスの影響を受けにくくする工夫として光陰極と短パルスレーザを使うことが挙げられる．つまり，高周波電場が変化するよりも十分短い時間だけ電子発生を行うという考え方である．図 22 は単純な RF gun の構造を示しているが，基本的にはいくつかの高周波空洞の端に光陰極を配置しておき，レーザポートから短パルスのレーザを加速位相に合わせて照射する．すると，レーザパルス幅とほぼ同じバンチ長の単バンチビームが生成される．一般的には数 MeV のエネルギーのビーム生成がなされる．

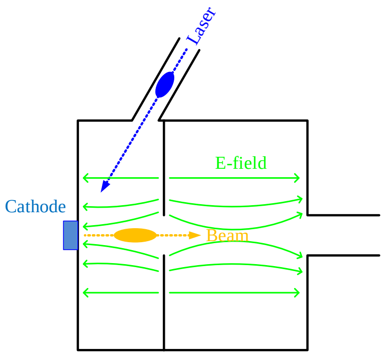


図 22: 基本的な光陰極高周波加速電子銃の構造

2.6 マグネット

マグネットは磁場を発生させるものである．荷電粒子の磁場に対する運動方程式は

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{75}$$

となることから分かる通り，運動方向と垂直な方向にしか力を与えない．すなわちエネルギーを変化させない．よって，磁場はビームの方向を制御することのみに使われる．

加速器で使用するマグネットは通常は電磁石を使う．これは，電流値を変化させることで磁場を容易に制御することができるからである．特殊な用途では永久磁石を用いることもあるが，加速器でマグネットといえば電磁石である．なので，電磁石はその電源も一体として考えるのが普通である．電磁石は加速器全体の消費電力の大きな部分を締めている．

2.6.1 ソレノイドマグネット

加速器で使用されるマグネットは,「ソレノイドマグネット」と「それ以外」に分類できるかもしれない．なぜならソレノイドマグネットは唯一ビーム進行方向に積極的に磁場を発生させるものだからだ．加速器でいうソレノイドマグネットは図 23 のような形で，コイルの中にビーム軌道が入っている．一般的にはソレノイドとは磁場を発生させる巻線形状のことをいうが，加速器ではそのソレノイドコイルの中にビームが通るかどうかを指す場合が多い.(ソレノイドコイルをビーム軌道の上下に置けばそれは後述するダイポールマグネットである.)

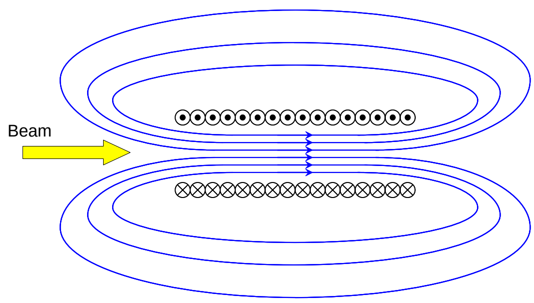


図 23: ソレノイドマグネット

ここで式 (75) を見返すとビーム進行方向に磁場を発生させても力が発生しないことを思い出すだろう．一見，ソレノイドマグネットは全く意味がないもののよ

うに思える．しかし，ビームは単粒子ではなく粒子群であり，ビーム進行方向が z 方向だったとしても個々の粒子は x, y 方向にも運動量を持っている．非常にエミッタンスが大きいビーム，すなわち x, y 方向の運動量が大きいビームはそのままではどんどん x, y 方向に広がって発散していってしまう．このようなビームの発散をてっとり速く抑えてしまう方法がソレノイドマグネットである．粒子が xy 平面で運動量を持っていても xy 平面では円運動をするため，ビームサイズがそれ以上広がらない．入射器では，熱カソード DC gun からでたばかりの電子ビームの部分や，ターゲットから出てきた直後の陽電子ビームに使っている（これらは，低エネルギーでエミッタンスが極めて悪い）．また，クライストロン内部のビーム発散を抑えるためにも使われている．

少し特殊な例では，磁場を短い区間に集中させた磁気レンズと呼ばれるような使い方もある．この場合は，発散を抑えるというよりはビームサイズを小さく集束させるものである．これは，磁気レンズの入口，出口の垂直方向磁場を積極的に使って集束力を発生させている．

陽電子ビーム発生ターゲットは Flux Concentrator と呼ばれる強力なソレノイド磁場発生器の中に置かれている．この詳細については，OHO19 陽電子源で詳しく解説がある．

2.6.2 ダイポールマグネット

ダイポールマグネットは S 極，N 極それぞれ 1 つづつしかないマグネットのことである．磁場は空間的に一様になることを想定している．

使用用途に応じて，ベンドマグネットやステアリングマグネットと呼ばれる．ベンドマグネットはビームラインそのものが大きく曲げた形で設計されていて，その形状に合わせてビームを大きく曲げる目的で使う．ステアリングマグネットはビームラインは直線であるが，様々な誤差の影響でビームの方向を微調整しなければいけない場合に使う．

図 24 はダイポールマグネットの例だが，鉄心にコイルを巻いて 1 組の SN 極を作り出している．

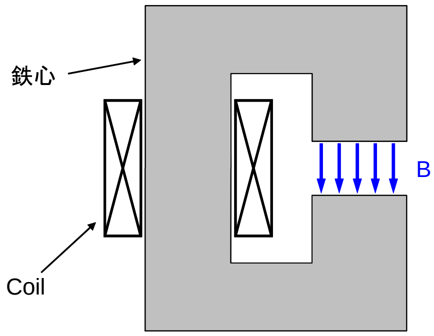


図 24: ダイポールマグネット

2.6.3 四極 (Quadrupole) マグネット

四極マグネットは S 極，N 極それぞれ 2 つづつ，計 4 つの磁極をもつマグネットである．Quadrupole magnet, Quad-magnet または簡単に Q マグネットなどとよく呼ばれる．Q マグネットはビームの集束に使われる．

Q マグネットの特徴は，x 方向に集束力を与えるとき，y 方向には発散力を与えることである．したがって，単体ではビームを集束させることができず，2 つまたは 3 つの Q マグネットを使うことで，x,y 両方向に集束させることができる．2 つの組の Q マグネットをダブレット，3 つの組をトリプレットと呼ぶ．

Q マグネットの磁極の構成を図 25 に示す．この図の原点に紙面と垂直にビームが通過する．Q マグネットは図 25 のように 4 つの磁極を持っているがそれぞれの磁極断面は双曲線になっている．

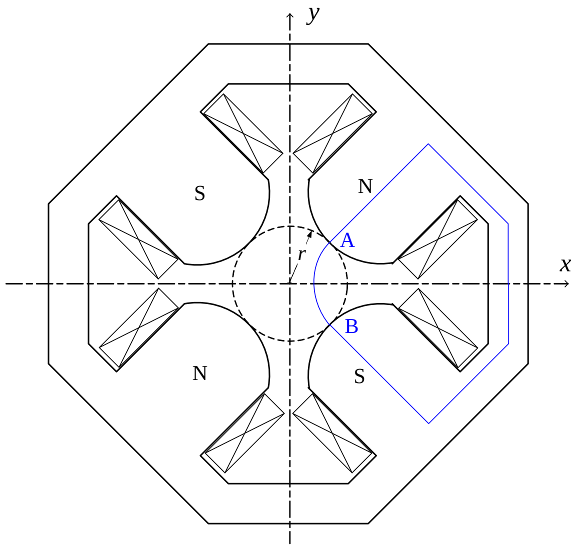


図 25: Q マグネットの磁極

双曲線である磁極で囲まれていた内部のスカラーポ

テンシャルを ϕ とすると，

$$H = -\nabla\phi \tag{76}$$

となり，$\nabla\cdot B = \mu\nabla\cdot H = -\mu\nabla\cdot\nabla\phi = 0$ より

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}y^2} = 0 \tag{77}$$

となる．この解は，

$$\phi = Cxy \tag{78}$$

であるから，

$$H_x = -Cy \tag{79}$$

$$H_y = -Cx \tag{80}$$

となる．

次に定数 C を求める．1 ポールあたりの巻数を N，電流を I とし，図 25 に示す閉ループの積分を行うとアンペールの法則より，

$$2NI = \oint \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_A^B \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{s} + \int_B^A \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{81}$$

となる．ここで，第 2 項は磁極内の積分を表し，比透磁率が真空部分に対して十分大きいので第 1 項に対して無視すると次にようになる．

$$\int_A^B -\nabla\phi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_A^B -\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathrm{d}x - \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathrm{d}y = \int_A^B \mathrm{d}\phi \tag{82}$$

ここで，N 極の形状は $xy = r^2/2$，S 極の形状は $xy = -r^2/2$ であるので，

$$\phi_A - \phi_B = Cr^2 \tag{83}$$

$$C = \frac{2NI}{r^2} \tag{84}$$

である．

次に，電子の運動を考える．電子が紙面の裏から表へ通過するとして，運動方程式を考えると以下のようになる．

$$\gamma m_0\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = evB_y \tag{85}$$

$$\gamma m_0\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = evB_x \tag{86}$$

ここで，m_0:電子の静止質量，e:素電荷，v:電子の速度，$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ $(\beta = v/c)$ である．v が一定であるので，

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = v^2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}z^2} \tag{87}$$

となる．また $B_x = -\mu Cy = -\mu_0\frac{2NI}{r^2}y$ より

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}z^2} = -\frac{2e}{\gamma m_0 v}\frac{\mu_0 NI}{r^2}x \tag{88}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2} = -\frac{2e}{\gamma m_0 v}\frac{\mu_0 NI}{r^2}y \tag{89}$$

が導かれる．この方程式の解は以下のようになる．

$$x = x_0\cos\sqrt{k}z + \frac{x'_0}{\sqrt{k}}\sin\sqrt{k}z \tag{90}$$

$$y = y_0\cosh\sqrt{k}z + \frac{y'_0}{\sqrt{k}}\sinh\sqrt{k}z \tag{91}$$

$$x' = -x_0\sqrt{k}\sin\sqrt{k}z + x'_0\cos\sqrt{k}z \tag{92}$$

$$y' = y_0\sqrt{k}\sinh\sqrt{k}z + y'_0\cosh\sqrt{k}z \tag{93}$$

ここで，$k = \frac{2e}{\gamma m_0 v}\frac{\mu_0 NI}{r^2}$，また，$z = 0$ で，$x = x_0$，$y = y_0$，$x' = x'_0$，$y' = y'_0$ である．これを，マトリックス表示にすると以下のようになる．

$$\begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\sqrt{k}z & \frac{1}{\sqrt{k}}\sin\sqrt{k}z \\ -\sqrt{k}\sin\sqrt{k}z & \cos\sqrt{k}z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{bmatrix} \tag{94}$$

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\sqrt{k}z & \frac{1}{\sqrt{k}}\sinh\sqrt{k}z \\ \sqrt{k}\sinh\sqrt{k}z & \cosh\sqrt{k}z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{bmatrix} \tag{95}$$

いま，Q マグネットを通過後 f_c なる距離を走行したとすると（Q マグネットの z 方向の厚さを z_l とする），

$$\begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & f_c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\sqrt{k}z_l & \frac{1}{\sqrt{k}}\sin\sqrt{k}z_l \\ -\sqrt{k}\sin\sqrt{k}z_l & \cos\sqrt{k}z_l \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{bmatrix} \tag{96}$$

となり，集束方向の焦点距離は $x'_0 = 0$ に対して $x = 0$ となる f_c を求めればよいので

$$f_c = \frac{1}{\sqrt{k}\tan\sqrt{k}z_l} \tag{97}$$

となる．

さらに，ここで Thin lens 近似を行う．これはレンズの作用をするが厚さが 0 とみなす．つまり，kz_l を一定として z_l を限りなく 0 に近づける．すると行列は，

$$\begin{bmatrix} \cos\sqrt{k}z_l & \frac{1}{\sqrt{k}}\sin\sqrt{k}z_l \\ -\sqrt{k}\sin\sqrt{k}z_l & \cos\sqrt{k}z_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{k}^2 z_l & 1 \end{bmatrix} \tag{98}$$

$$\begin{bmatrix} \cosh\sqrt{k}z_l & \frac{1}{\sqrt{k}}\sinh\sqrt{k}z_l \\ \sqrt{k}\sinh\sqrt{k}z_l & \cosh\sqrt{k}z_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ kz_l & 1 \end{bmatrix} \tag{99}$$

となる．集束，発散のそれぞれのマトリクスは，

$$\boldsymbol{M}_F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{M}_D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \tag{100}$$

表されるので，Q マグネットは $f = \frac{1}{kz_l}$ である．Q マグネットの性能の指標としてよくこの k が使われる．ここで示した k は，一般的に K 値と呼ばれる．マグネットの厚みも合わせて KL などもよく使われる．

3　KEK 電子陽電子入射器棟

KEK の電子陽電子入射器棟は加速管を並べた 600 m にも及ぶビームラインであるが，そのビームラインもいくつかの単位に分けられる．基本的にはクライストロンと 4 本の加速管で 1 unit と呼ばれ，この同じ加速 unit が繰り返し並びビームラインを形成している．加速 unit は１つのクライストロンを中心としたもので，すなわち立体回路系でつながっている単位である．そこにはクライストロンから導波管を通して４つの加速管が接続されている．これら４本の加速管は独立に位相を変えることはできず，設計段階で位相がそろうように計算されている．さらに，この加速 unit を８個並べたものを sector 呼び，A, B, C, 1, ... 5 sector の８個の sector が存在している．B sector と C sector の間には R sector があり，ビームを 180 °曲げている．このアーク部分を J-arc と呼んでいる．A, B sector は北から南に向かってビームを加速するが，C sector からは南から北に向かって加速する．

クライストロンを識別するためには B1, 12, 54 など sector と unit 番号を使うことができる．さらに加速管はその後に 1 から 4 の番号で識別できる (12_3 加速管などと呼ぶ)．例外的に A sector は電子銃を含み 4 unit までしかなかったり，ビームライン最終には 61 クライストロンが存在していたりするので，厳密には全く同じものが並んでいるわけではないが，基本となる単位が繰り返される．

1 sector には陽電子生成用のターゲットがある．ターゲットは陽電子集束磁場を作るための FC(Fulx Concentrator) の中に設置され，その下流は通常の加速管ではなく LAS(Large Apature S-band) と呼ばれる大口径の加速管になっている．2 sector と 3 sector の間には電子，陽電子振り分け用のシケインマグネットが置かれ，陽電子はダンピングリングに入射される．ダンピングリングでエミッタンスが小さくなって出射された陽電子は再び，電子ビームラインと合流して 3 sector に入る．3 sector 以降はすべてのマグネットがパルス化されているので，電子と陽電子では独立のオプティクスを組むことが可能となっている．これら全体図を図 26 に示す．

3.1　加速管

入射器で使用している加速管は，すべて 2 m の $2\pi/3$ mode の定電界型の進行波管である．これらの加速管は PF 2.5 GeV 入射器時代 1980 年から 1981 年に製造された約 160 本のものと，KEKB 増強時代 1999 年までに作られた約 70 本がある．これらは，電気鋳造法という方法で製作され，ほぼ同じ性能であった．例外的に，陽電子集束部分に使われている LAS が 10 本あり，これは 2013 年頃導入されている．

加速管はいくつか種類があり，ビームアパーチャが広いもの（直径 24.9 から 20.9 mm）から狭いもの（23.7 から 19.7 mm）がある．ただし，全長は 2.072 m, 空洞数 54 個と統一されており，加速電圧 40 MV を見込んでいる．図 27 はカットモデルの写真であり，図 28 に加速化の全体図を示す．減衰定数 $\tau = \alpha l$ は 0.302 から 0.368，フィルングタイムは 0.46 から 0.56 μsec となっている．

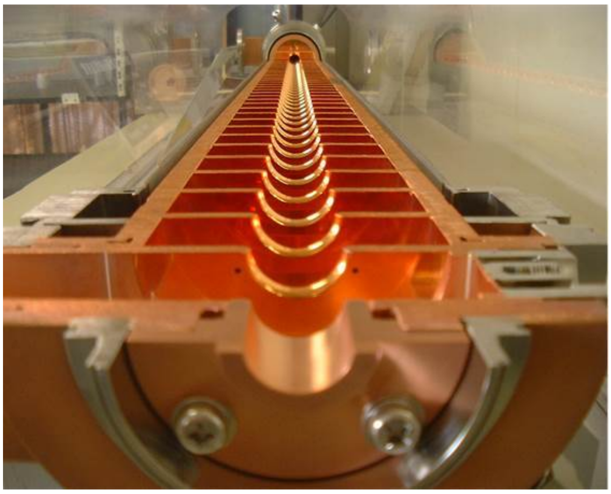


図 27: 加速管カットモデル写真

3.2　入射部

入射器は加速ユニットの繰り返しでビーム加速を可能にしているが，同じ形のユニットでどこまでも加速可能であるのは電子ビームがほぼ光速とみなしてよい速度であるためである．しかし，標準ユニットに突入する前に，電子を発生させてほぼ光速まで加速させるセクションが必要である．電子銃を含むその部分を入射部と呼んでいる．

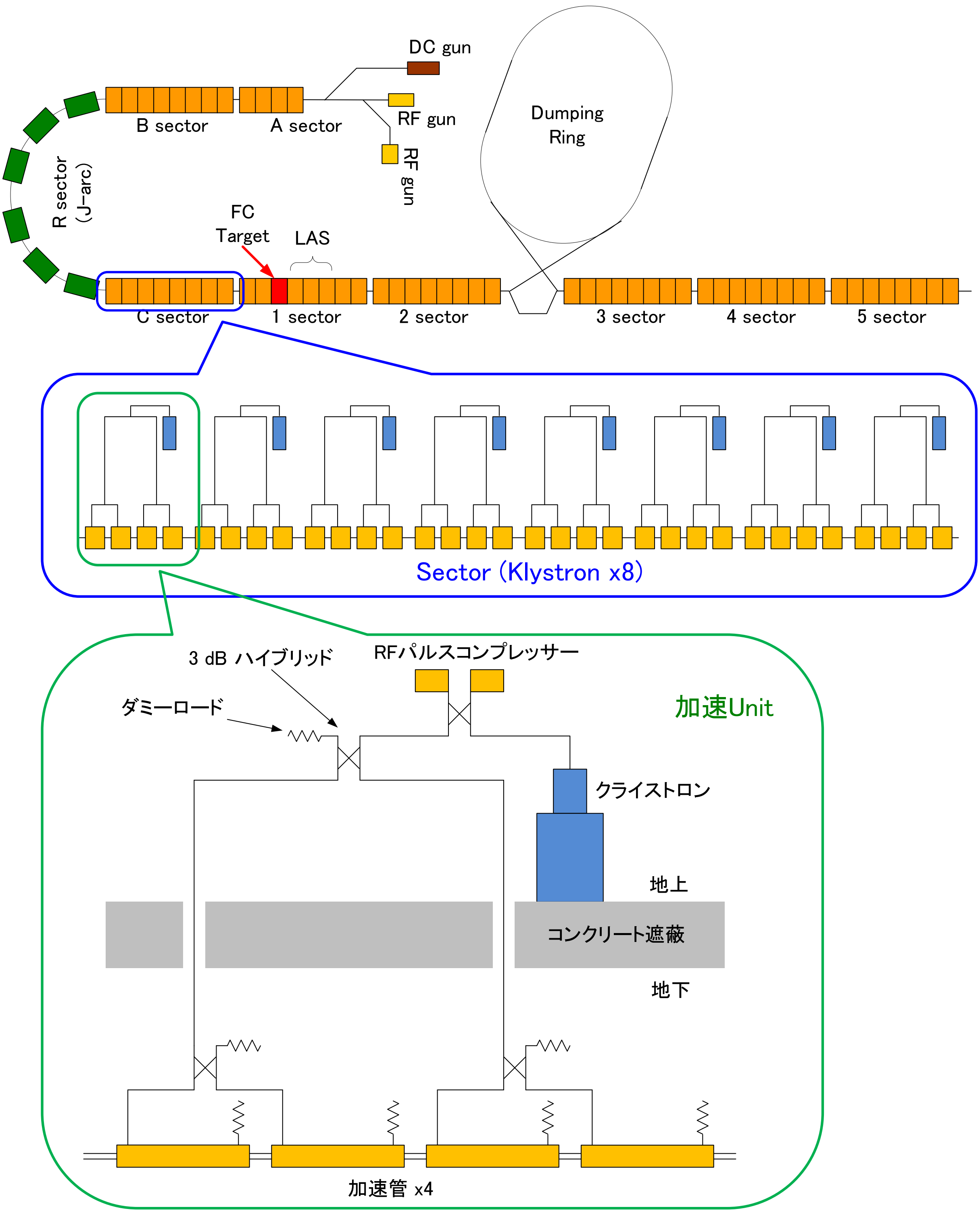


図 26: 入射器全体，Sector, 加速 Unit

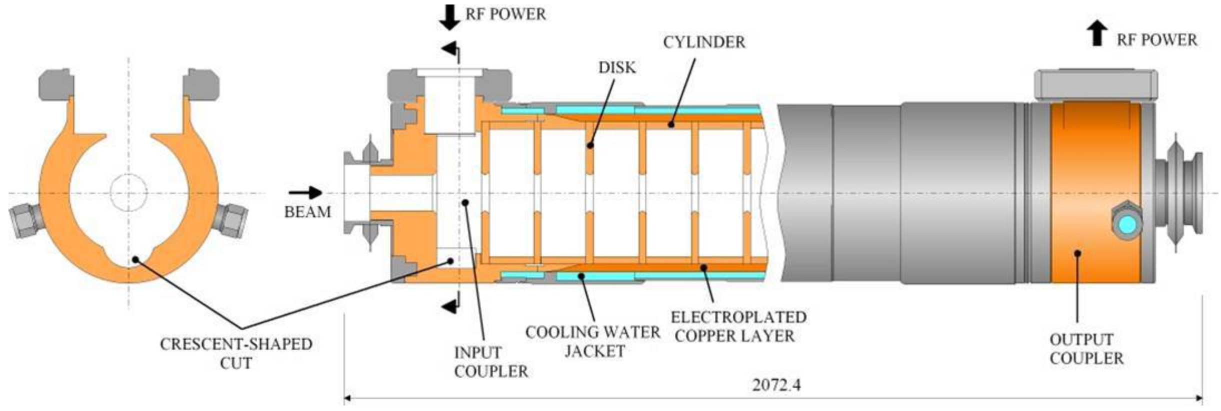


図 28: 加速管の全体図

入射部は 2 種類の電子銃を使い分けている．すなわち，熱陰極静電加速電子銃と光陰極高周波加速電子銃である．

KEK 入射器では，古くから静電加速熱電子銃が使われてきたが，SuperKEKB 入射にむけて新たに光陰極高周波電子銃を開発した．SuperKEKB HER が要求するのは 4 nC, 20 mm-mrad という高電荷，低エミッタンスの電子ビームであり，光陰極高周波電子銃はこのスペックに特化している．そのため，HER 用のビームのみ光陰極高周波電子銃 (RF gun) で，その他のビームは静電加速熱電子銃で生成している．RF gun の増設に伴って，入射部のビームラインを 2 階建て構造にした．入射器のビームラインのレベルに RF gun を増設し，従来の熱電子銃には高いレベルに移動してもらった．それらの下流にて，24 deg ベンドラインを介して熱電子銃ビームが合流するようなビームラインを組んでいる． 2 階建てラインを図 29 にしめす．合流ラインのベンドマグネットはパルスマグネットになっており，Pulse to Pulse での打ち分けが可能となっている．

3.2.1 プライマリー電子ビーム入射部 - 熱カソード DC gun と Buncher 部-

SuperKEKB 陽電子ビームの陽電子源は電子ビームをターゲットに当てて生成している．そのため，陽電子プライマリー電子ビームは 10 nC の高電荷が求めれれる．この高電荷電子ビームを発生させるために静電場加速熱陰極電子銃を使っている．ただし，静電場加速と言っても発生させる実際の電子ビームは 2 nsec 程度になる．この電子銃は三極管であり，高圧パルスはクライストロンと同程度の数 usec，グリッドパルスが 2 nsec である．この 2 nsec のビームを入射器で使用する S-band 加速管で単バンチ加速が可能な 30 psec 程度まで圧縮する．バンチの時間幅をせまくすることをバンチ圧縮またはバンチングという．とくに DC 電子銃で発生したビームはまだ相対論領域には達していないため速度差によるバンチ圧縮，ベロシティーバンチングが可能である．入射器では SHB1, SHB2, プレバンチャー，バンチャーというコンポーネントを使ってベロシティーバンチングを行っている．

電子銃の加速電圧は 200 kV であるが，このような高電圧を 2 nsec という短パルスで制御するのは現実的ではない．そこで，数百 V 程度の電圧を 2 nsec で制御し，グリッド電圧とすることでビームのパルス幅とビーム電流を制御する方式をとる．実際に入射器で使用している電子銃の概略を図 30 に示す．図に示す通りこの電子銃は 2 つのパルス電源を組み合わせた三極管であり，メインの加速電圧を作る部分はクライストロンモジュレータとほぼ同じ仕様である（実際に現在はクライストロンモジュレータを転用している）．さらに高圧側に高速のパルス電圧発生器を乗せてグリッド電圧としている．グリッドにはビームを出すとき以外は bias と呼ばれる逆電圧をかけており，けしてビームがでないようにしている．

カソードは熱カソードであり，電場制限領域で使用される．すなわち，Grid 電圧でビーム電流を制御できる．電荷量が低いビーム (PF 入射用ビームなど) のためには Grid 電圧を低くすることで対応している．

電子銃から出てきたビームは 2 nsec 程度のバンチ長を持っている．加速周波数 2856 MHz では波長は 350 psec 相当であり，このまま加速管に入射しても 5, 6

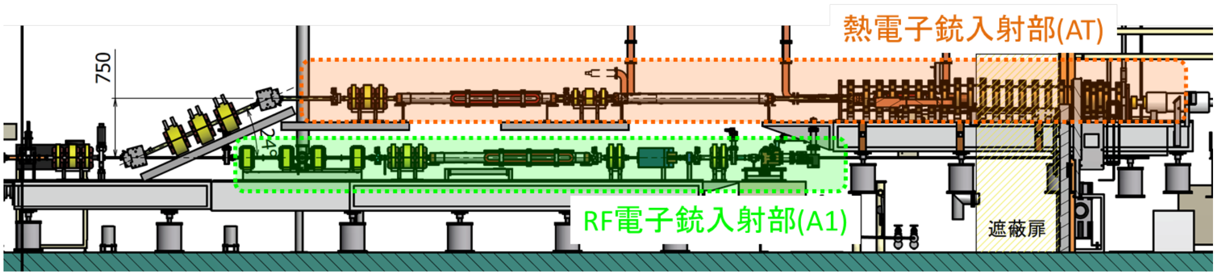


図 29: 熱電子銃と RF gun の 2 階建てライン

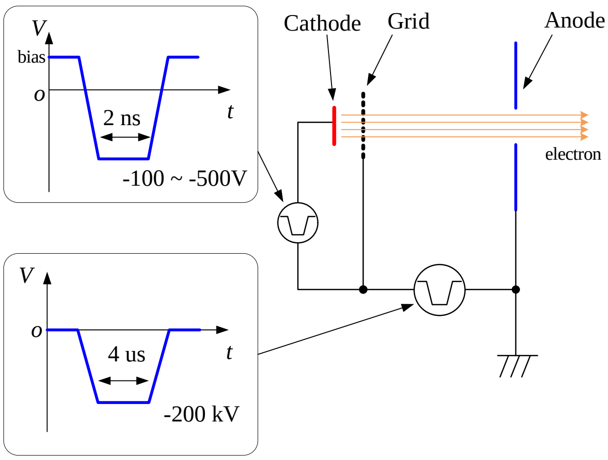


図 30: 入射器静電加速電子銃の概略

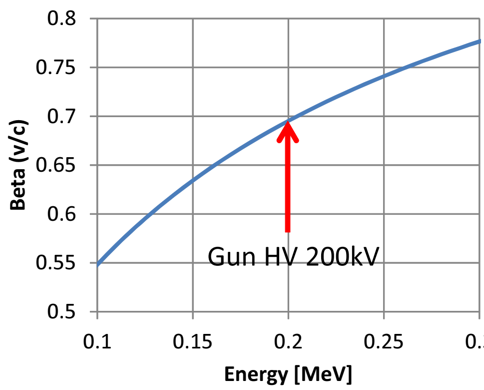


図 31: 電子エネルギーと速度

バンチに分かれてしまう．そこで，低い周波数の単空洞の加速空洞を用いてバンチ長を縮めていく．この低い周波数の加速空洞を SHB(Sub Harmonic Buncher) とよぶ．SHB は 2 種類使っており，114 MHz(波長 25 倍，周期 8.77 nsec) の SHB1 と，571.2 MHz(波長 5 倍，周期 1.75 usec) の SHB2 がある．まず SHB1 でバンチ長を 1/5 にして，SHB2 でさらにその 1/5 にして 2856 MHz の加速空洞に入射するという発想である．

SHB では基本的にはビーム全体を加減速させることはなく，RF のゼロクロスに入れてビーム先頭を減速，ビーム後方を加速する．図 31 は 200 keV 付近のエネルギーと速度の関係であるが，数十 keV のエネルギー差をつけてやれば十分な速度差が発生することがわかる．SHB1 と SHB2 の距離は 1300 mm で，SHB2 から PreBuncher までは 300 mm である．

SHB1, 2 で圧縮されたバンチは，加速管と同じ共振周波数の進行波管である PreBuncher に入射され，さらに圧縮される．そして，最終的には Buncher に入射されバンチ圧縮と加速を同時に行いビームのバンチ長が決定される．Buncher を出た時点でビームは 20 MeV 以上になっており，速度は光速に達しているためバンチ長はその後（基本的には）変化することはない．PreBuncher と Buncher は独立な $2/3\pi$ モードの進行波加速管であり，それぞれ独立に RF パワーと位相を調整できる．図 32 に PreBuncher と Buncher セルの位置関係を示す．PreBuncher は 200 keV に調整されたセルのみで構成されており加速はしない．Buncher の中で徐々にセルのサイズが変わっていきビームが加速されていく．

これら SHB から Buncher まではソレノイドマグネットの中に置かれ，ビームが横方向に発散しないようにしている．図 33 に GPT で計算したバンチ圧縮の結果のグラフを示す．計算上はシグマで 7 psec まで圧縮できる結果となっている．

実際の調整は，ストリークカメラでバンチを測定しつつ，SHB1, 2, PreBuncher, Buncher の RF パワーと位相を調整し単バンチかつビームロスがないような状態に持っていく．陽電子プライマリー電子ビームは 1 バンチあたり 10 nC のビームを生成する．これらを

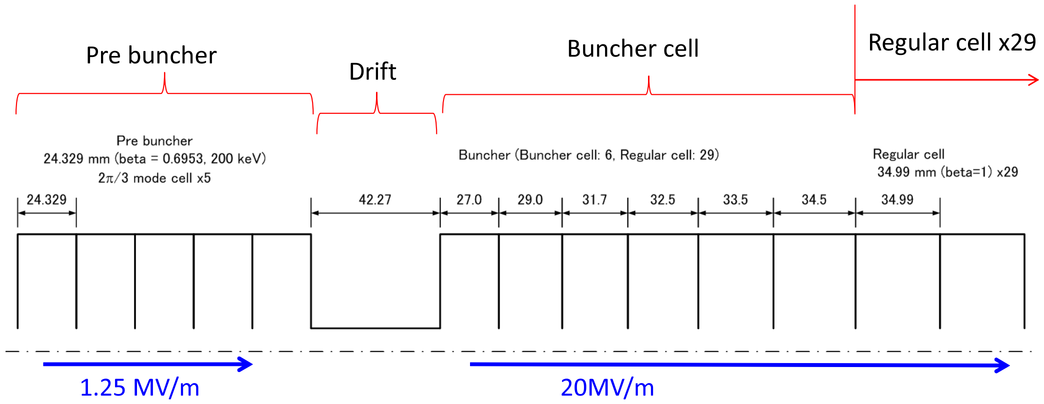


図 32: PreBuncher と Buncher セルの位置関係

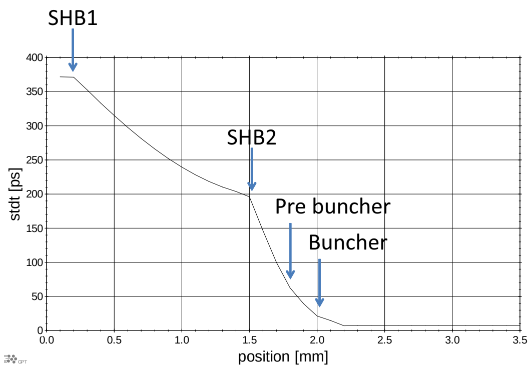


図 33: 熱電子銃ビームバンチ圧縮の計算結果 (GPT 計算)

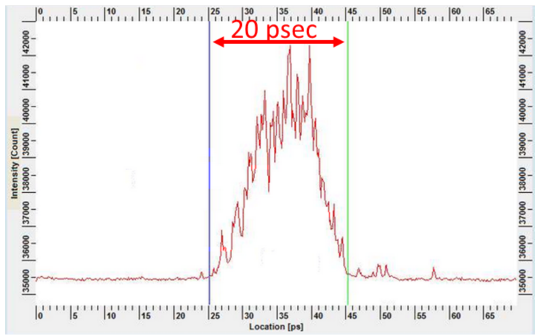


図 34: 熱電子銃 10 nC ビームを調整したバンチ長をストリークカメラで測定した結果

調整して 1 バンチに圧縮し，ストリークカメラで測定した結果を図 34 に示す．

3.2.2　RF gun による電子ビーム入射システム

光陰極高周波電子銃は SuperKEKB で要求される低エミッタンス電子ビームを生成するために開発されたもので，従来の熱カソード DC gun の入射部とは全く違う思想になっている．DC gun からのビームは低エネルギーの長バンチビームを数メートルに渡って徐々にバンチ圧縮していったが，光陰極 RF gun は最初から短パルスのレーザによって単バンチを作り出し，その瞬間に高電場で加速し数 mm のうちに相対論領域までビーム加速を行う．つまり，バンチ長はレーザパルスで決め，空間電荷効果でエミッタンスが悪化する前に高電場でビームを加速する．

RF gun は，一般的には数セルから成る定在波空洞の端がカソードになっていて，カソードそのものに高周波加速電場が印加される構造である．

レーザの詳しい説明は本 oho19 の 5-1「RF 電子銃及びレーザー光源」にあるのでそちらを参照してほしい．ここでは，入射機の LLRF との関係を説明したいと思う．レーザ光のおおもとになっているのは発振器であるがこれは 114 MHz で発信しており，入射器で使用している 114 MHz に同期させている．114 MHz は入射器で使用する基本周波数の一つであるとともにファイバー発振器にとって発信が容易な周波数である．発振器は 114 MHz であるが，2856 MHz(加速周波数) でも再同期を行い位相安定度を高めている．発振器から出た 114 MHz に同期した約 20 psec のレーザパルス (繰り返しが 114 Mpps, パルス幅 20 psec という意味) はファイバーアンプで増幅される．ファイバーアンプの途中で SOA という機器で 114 MHz から 10.38 MHz にパルスが 1/11 に間引かれる．10.38 MHz も入射器の基本周波数でビームトリガの最小単位である．

ファイバーアンプとしてはもっと繰り返しを低くしてパルスあたりのエネルギーを上げたほうが効率がよいが，ビームに同期する最小単位が 10.38 MHz なので，CW で増幅するファイバーアンプではここが限界である．次に個体アンプの増幅になるが，これは，パルスアンプなのでビームに同期した 50 Hz で運転する（19 年現在は 25 Hz にとどめている）．10.38 MHz から実際に増幅するパルスを取り出すのはポッケルスセルを使用している．個体アンプは LD(Laser Diode) を使ってポンプを行うが，増幅パルスが有り無し（ビームを出すかどうか）にかかわらず 50 Hz で運転を続ける．これは，加速管スタンバイと同じ理由で熱負荷を一定に保つためである．実際のビーム発生に同期しているのはパルス選択のポッケルスセルだけである．２バンチ発生はポッケルスセルのゲートを広げて 10.38 MHz のパルスを２パルスに増やすことで対応する．生成されたレーザパルスは基本はの 1064 nm の４倍高調波 266 nm に変換されて RF gun に入射される．

RF gun は非常に特殊な空洞の開発が行われ，サイドカップル空洞を軸上に２つ配置した擬似進行波型と呼ばれる空洞が新たに開発された．サイドカップル空洞は陪周期構造と呼ばれる $\pi/2$ mode 空洞の特性を持つ加速空洞である．陪周期構造は，付録 C を参照していほしい．これは 5 nC のスペースチャージによる発散力に対する集束電場を得ることを目的に開発された．

例えば，図 35 のように加速ギャップを狭くしたサイドカップル空洞では必然的にドリフトスペースが長くなり，効率的な加速方法とは言えない．そこで，図 36 のようにドリフトスペースに当たる部分に独立したもう一つのサイドカップル空洞を配置してやる．更に，この２つの定在波空洞に $\pi/2$ だけ位相差をつけて RF を投入すればビームからみると進行波に乗っているように見える．故にこの構造を擬似進行波型サイドカップル空洞と呼んでいる．この構造は非常に効率よく加速とビーム集束とを行うことができる．

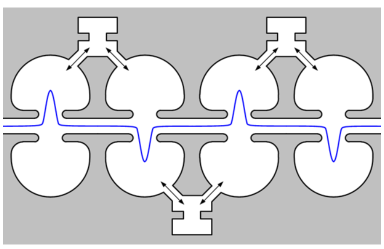


図 35: 通常のサイドカップル空洞

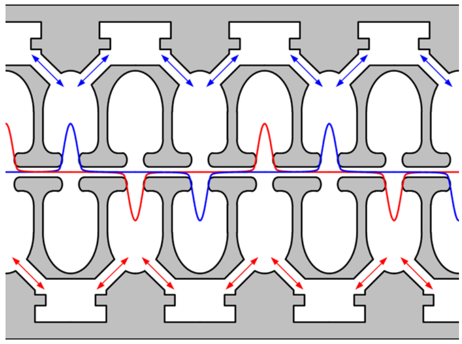


図 36: 疑似進行波型サイドカップル空洞

実際の RF gun は７つの加速空洞と５個の結合空洞をもっており，図 37 のような加速電場になる．この RF gun の設計思想は，空洞表面には電場集中を起こさないような形状かつ高い加速電場を得ることを目標に，最大表面電場強度がカソードセルでは 120 MV/m，レギュラーセルでは 100 MV/m 以下になるようにしている．

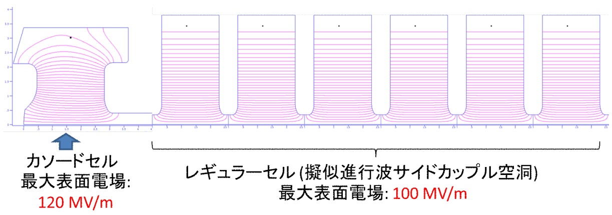


図 37: 擬似進行波型サイドカップル RF gun の加速空洞の２次元電場計算結果

この加速空洞で 5 nC のビームを生成した場合の計算結果を図 38, 39 に示す．グラフの 0 mm の点がカソードであり，RF gun の出射口は 200 mm のことろである．カソード径は 8 mm で，カソードからの発生電子は 20 psec の矩形パルスを想定している．図 38 の結果からわかるように規格化エミッタンスが 5.5 mm-mrad 程度になる．ビームサイズの変化のグラフを見て分かる通り，カソード付近で集束力をうけてビームサイズが縮んでいる．これは，外部磁場無しの計算なので，空洞内の集束電場の影響である．ビームエネルギーは 11.5MeV 程度になる．これらのシミュレーションは GPT [2]を用いて行われた．

結合空洞を含めた空洞全体の形状は図 40, 41 のようになる．ビーム軸に対して 60 °の方向にレーザポート

[2]General Particle Tracer 3次元ビームトラッキングシミュレーションコード

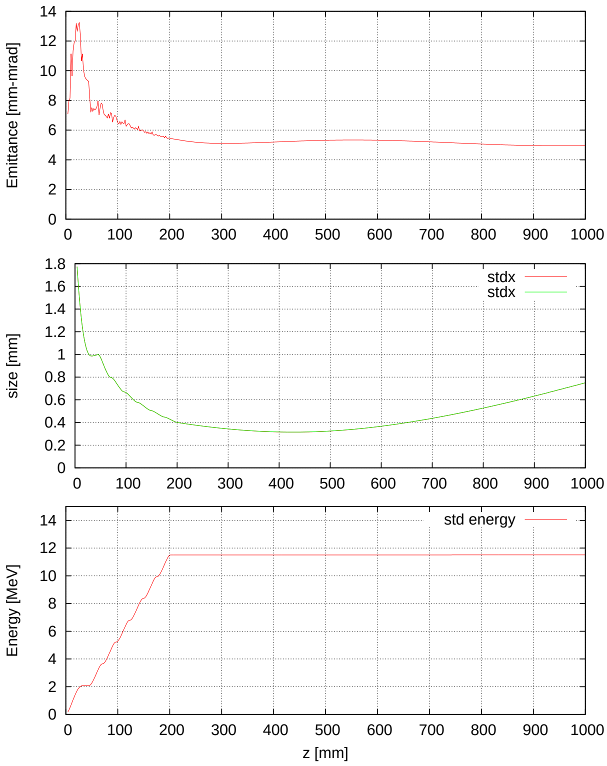


図 38: 擬似進行波型サイドカップル RF gun 5 nC ビーム加速シミュレーション結果.

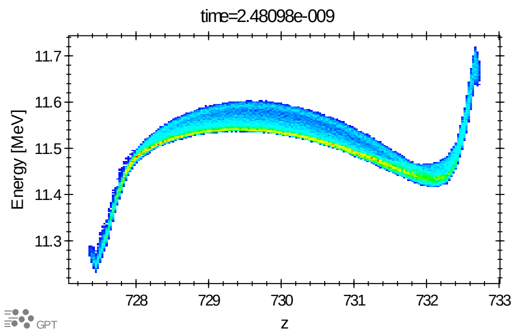


図 39: 擬似進行波型サイドカップル RF gun 5 nC ビームシミュレーション結果．生成ビームエネルギー分布.

が設けられており，ここから，カソードにレーザが照射される．空洞は 2 つの定在波空洞からなるので入力導波管が 2 つあり，$\pi/2$ だけ位相差をつけた RF が投入される．空洞内で消費される RF パワーは 13.4 MW を想定しており，入力 RF は反射も含めて 20 MW を要求している．結合空洞との結合係数は 3 %となるように設計されている．

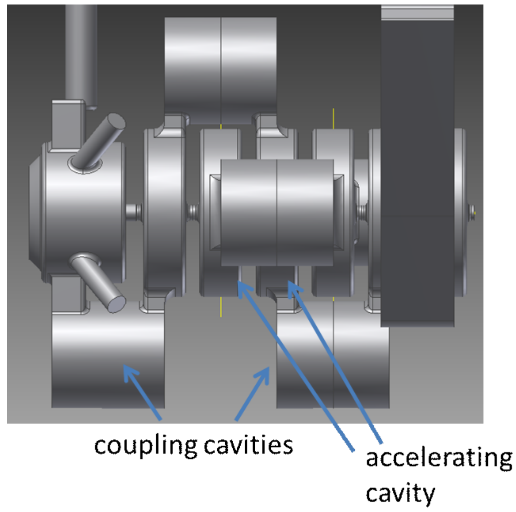


図 40: 空洞の真空部分形状

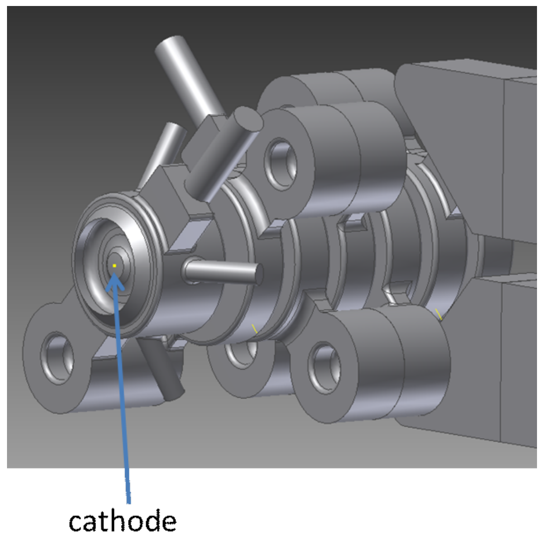


図 41: 空洞の真空部分形状（カソード方向から見た図）

図 42 は実際の形状の断面図である．図 43 は実際の形状で，導波管が 2 つついているのがわかると思う．この 2 つの導波管の先には 3 dB ハイブリッドが取り

付くようになっており，自動的に $\pi/2$ の位相差になって RF が入力されるようになっている．

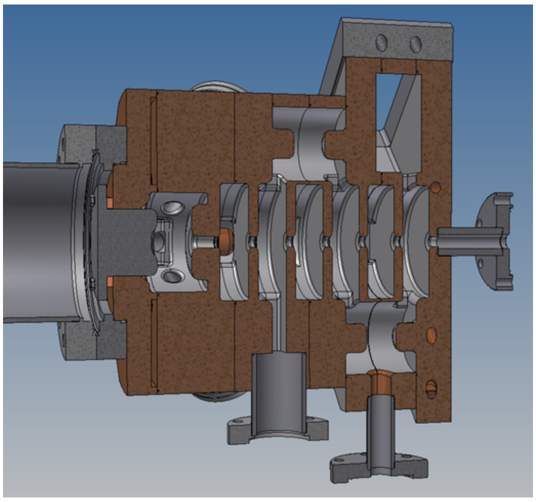


図 42: 擬似進行波型サイドカップル RF gun 断面図

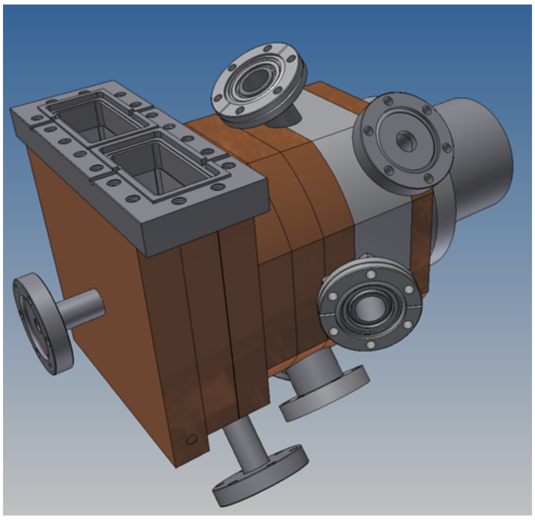


図 43: 擬似進行波型サイドカップル RF gun 形状

擬似進行波型サイドカップル RF gun は 60 °の方向に傾いたレーザポートからレーザを照射するが，このようにすると，レーザから見てカソード面が斜めになっており，レーザから見てカソード面の手前の方からビーム発生がはじまり，結果的に斜めのビームが生成される．現在は左右から同時にレーザを照射することにより，非対称を緩和している．しかし，カソード面は 8 mm, レーザに対して 30 deg なので，端から端まで 22.8 psec かかるので，レーザパルス幅 20 psec に対しては斜め入射は不利である．そこで，0 deg 入射（カソードの正面からレーザを照射する）も検討されたが，カソード径より擬似進行波型サイドカップル RF gun のビームホールが小さいため新たな RF gun が検討された．

擬似進行波型サイドカップル RF gun とは別に設計させれたのが CDS(Cut Disk Structure) RF gun である．CDS 空洞も陪周期構造である．これは，軸上に配置された結合空洞に磁場でカップルさせ，軸上では電磁場的に分離させた構造であり，図 44 のような基本形状をしている．この CDS RF gun は 5 つの加速空洞をもっており，図 45 のような電場が発生する．ビームトラッキングシミュレーション結果は図 46 のようになるが，エミッタンスは 7 mm-mrad 程度と概ね良好な結果となっている．

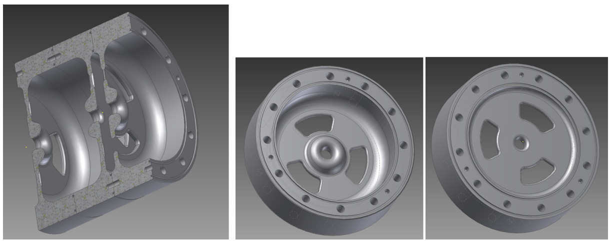


図 44: CDS 空洞の基本形状

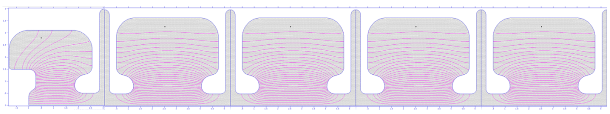


図 45: CDS RF gun の加速空洞の 2 次元電場計算結果

図 47 は RF gun 本体の断面図である．カプラーは円筒導波管から結合する形にしているので，実際には矩形導波管からモードコンバータを介している．モードコンバータも含んだ断面図を図 48 に示す．

2 つの RF gun は同じ高さのレベルに置かれ，QTW RF gun が入射器ビームライン上に置かれているのに対して，CDS RF gun は 90 °方向を向いて置かれている（図 49）．これは，0 °入射のレーザポートを確保しつつ，2 つのベンドマグネットでディスパージョンを消した合流ラインを組むためである．

どちらの RF gun においても 1 nC 程度のビーム発生において 10 mm-mrad 程度の規格化エミッタンスを達成している．RF gun から出射されたビームはまず加速管を通過したあとシケインを通る．このシケインはバンチ圧縮のために使われる．熱電子銃のビームと

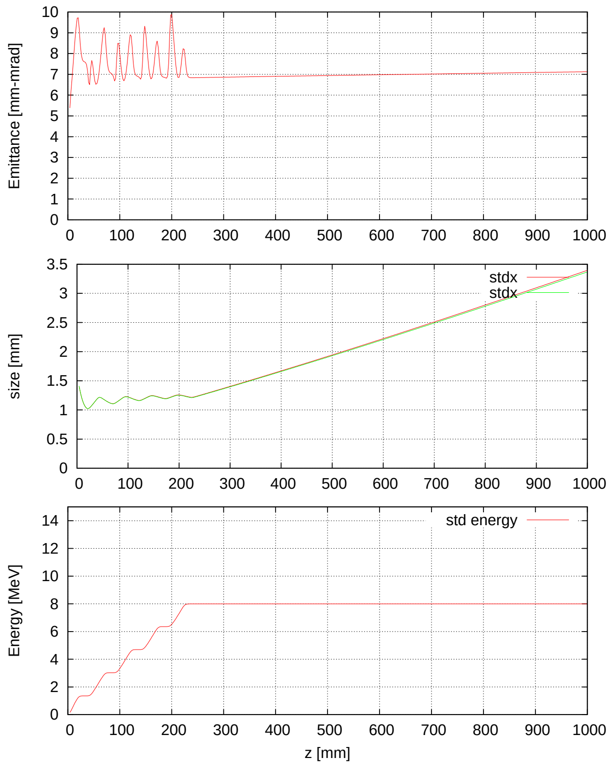


図 46: CDS RF gun 5 nC ビーム加速シミュレーション結果

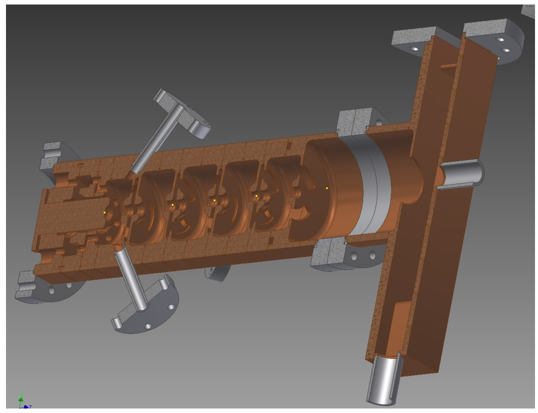


図 48: CDS RF gun にモードコンバータが取り付いた状態

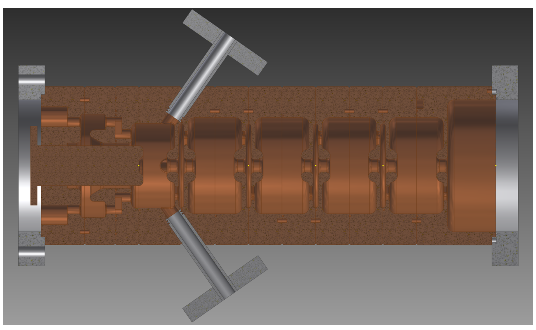


図 47: CDS RF gun 断面図

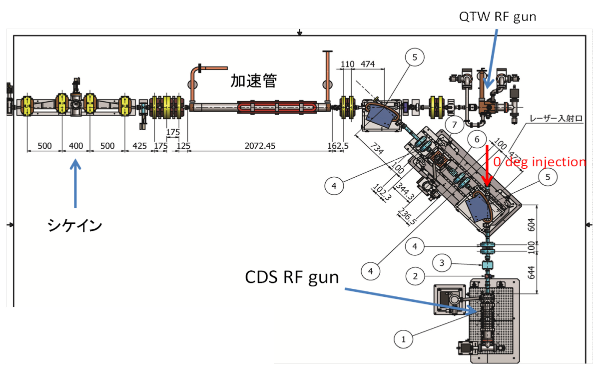


図 49: RF gun 入射部ビームライン（上から見た図）

異なり RF gun から生成されたビームはすでに相対論領域に達しているため，R56 による圧縮（ビームにエナジースロープを付けて起動差で圧縮する）を行わなければいけない．加速管のスロープに乗せて，時間方向にエネルギースロープをつけてシケインの軌道差で圧縮を行っている．その後が，熱電子銃のビームラインとの合流点になっており，またその直後がストリークカメラでのバンチ長測定点となっている．

3.3 高周波システム

3.3.1 Low Level RF

入射器で使用される高周波源はクライストロンであるが，クライストロンの特徴の一つに他励発信がある．これは，高周波位相を制御するために都合がよく，低いパワーの入力 RF の制御が大電力出力 RF 位相の制御に直結する．Low Level RF (LLRF) とは，低いパワーの RF の制御の意味で，大電力増幅器（クライストロンなど）の入力 RF 制御を指し示す．

ビームは S-band 2856 MHz の加速管で加速するので，入射器全体に渡っての S-band RF 位相安定度は非常に重要である．また，DC gun においては，バンチングに寄与する SHB やバンチャーの位相がビームのタイミングを決める．RF gun においてもレーザを同期させているので，こちらもビームのタイミングを担っている．

LLRF は入射器全体の RF を制御する元となっているので，すべての元となる発振器を持っており，これをマスターオシレータ (Mastor Oscillator, MO) とよぶ．入射器のマスターオシレータはメインリングのマスターオシレータに同期されている．入射器のマスターオシレータの周波数は 571.2 MHz であり，これを元に，10.384, 114.24, 2856 MHz の RF が分周逓倍されて作られる．MO 周波数は，SHB2 の SHB1 の加速周波数であり，制御クロックにも使用される．10.384 MHz は MO 周波数の 1/55 倍にあたり，2 バンチビーム間隔あり，またビームトリガ間隔の最小単位でもある．114.24 MHz は MO 周波数の 1/5 倍にあたり，SHB1 の加速周波数であり，制御クロックにも使用さ，またレーザオシレータの周波数でもある．2856 MHz は MO 周波数の 5 倍にあたり，加速管の加速周波数である．マスターオシレータを含むメインステーションよりどのように RF を分配しているかを図 50 にしめす．

入射器のマスターオシレータ (Linac MO) も SuperKEKB のメインマスターオシレータ (Main MO) により同期されている．このは Main MO は 510 MHz であり，そこから 1/51 の分周器を経て 10 MHz になったものを Linac MO に送っている．この 10 MHz に同期した 571.2 MHz が入射器のマスターオシレータ (Linac MO) である．SuperKEKB Main Ring のマスターオシレータ (MR-MO) も Main MO に同期した 508.9 MHz となっている．

3.3.2 クライストロンモジュレータ

モジュレータとは，クライストロンにパルス電流を供給する電源のことである．クライストロンは 305 kV, 360 A の高電圧大電流のパルス電源を必要とする．この大電力パルスを商用電源から作り出す役目を担うのがクライストロンモジュレータである．クライストロンモジュレータについては OHO17「マイクロ波電源」に詳しく解説があるので参照してほしい．モジュレータの主な構成は，

1. 高電圧充電回路
2. PFN(Pulse Forming Network)
3. 高電圧大電流スイッチ（サイラトロン）
4. パルストランス

の 4 つからなり，非常に簡略化して回路図にすると図 51 のようになる．

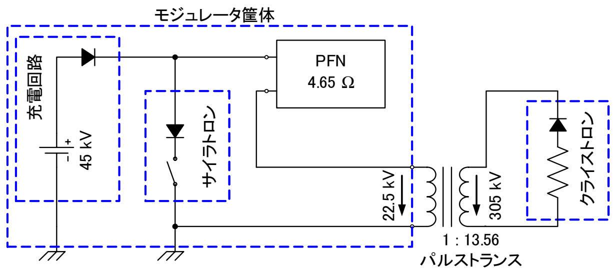


図 51: 簡略化したクライストロンモジュレータ回路図（サイラトロンとクライストロンは等価回路）

高電圧充電器は，200 V 三相の入力電源を 43 kV の直流に変化する部分で，この電圧が PFN のコンデンサが充電される．PFN はコンデンサとインダクタンスからなる梯子回路で，矩形波を作り出す装置である．実際の PFN を図 52 に示す．これは，20 段の LC

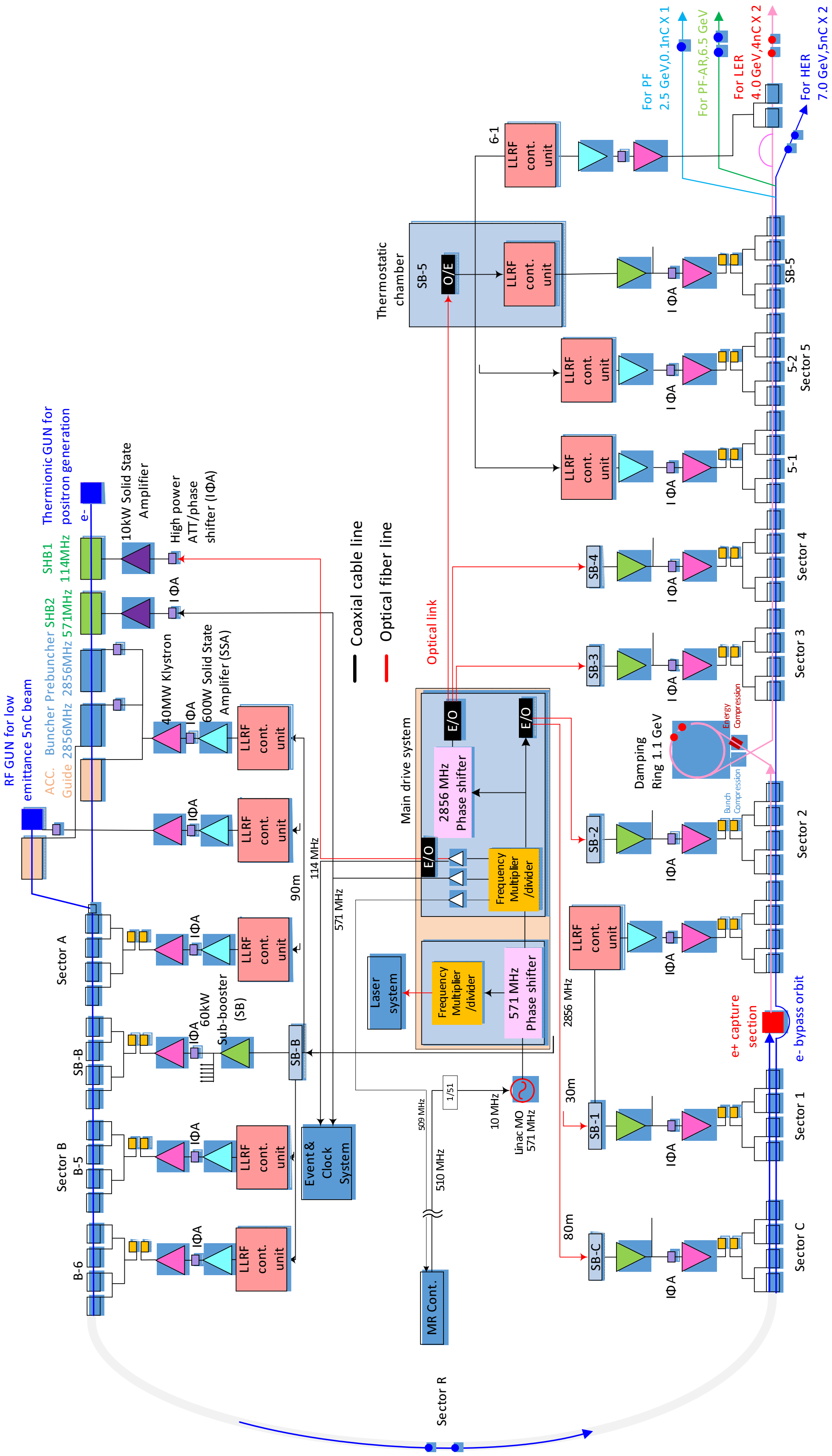

RF GUN for low emittance 5nC beam
Thermionic GUN for positron generation
e-
SHB1 114MHz
SHB2 571MHz
Buncher 2856MHz
Prebuncher 2856MHz
ACC. Guide
10kW Solid State Amplifier
High power ATT/phase shifter (IΦA)
40MW Klystron
600W Solid State Amplifier (SSA)
60kW Sub-booster (SB)
LLRF cont. unit
Sector A
SB-B
Sector B
B-5
B-6
90m
114 MHz
571 MHz
Event & Clock System
Coaxial cable line
Optical fiber line
Optical link
Main drive system
2856 MHz Phase shifter
Frequency Multiplier /divider
571 MHz Phase shifter
E/O
O/E
Laser system
Linac MO 571 MHz
10 MHz
1/51
509 MHz
510 MHz
MR Cont.
Sector R
Thermostatic chamber
SB-5
Damping Ring 1.1 GeV
Energy Compression
Bunch Compression
2856 MHz
30m
80m
SB-1
SB-2
SB-3
SB-4
SB-C
Sector C
Sector 1
Sector 2
Sector 3
Sector 4
5-1
5-2
Sector 5
6-1
e+ capture section
e- bypass orbit
For PF 2.5 GeV,0.1nC X 1
For PF-AR,6.5 GeV
For LER 4.0 GeV,4nC X 2
For HER 7.0 GeV,5nC X 2

図 50: LLRF

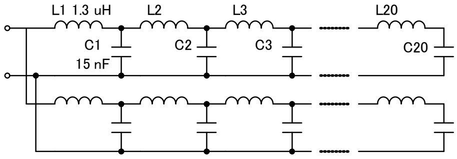


図 52: 入射器モジュレータで使用している並列型 PFN

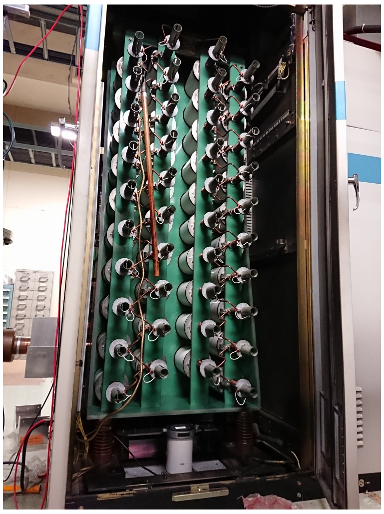


図 53: 入射器モジュレータで使用している並列型 PFN 写真

はしご回路を並列にしたもので，インダクタンス 1.3 μH とコンデンサ 15 nF をそれぞれ 40 個づつ使っている．充電回路は PFN のコンデンサに高圧を充電していくが，クライストロンは 50 pps で運転するので 20 msec 以内（実際は 18 msec 以内）で充電を終わらせればよい．この時間スケールで考えれば充電回路から見た PFN は 600 nF のコンデンサとなる．コンデンサに充電が終わればサイラトロンが ON される．サイラトロンは回路的に見ればただのスイッチである．ここで，電圧が溜まった PFN に負荷がつながることになる．PFN のインピーダンス Z は

$$Z = \sqrt{L/C} \tag{101}$$

より，9.3 Ω となり，それが 2 並列になっているので 4.65 Ω となる．図 52 を見て分かる通り，PFN とは伝送線路の等価回路を集中定数回路で再現したものである．実際の PFN 写真を図 53 に示す．よって，マッチングされたインピーダンスを負荷にすれば，反射無しで回路に溜まったエネルギーを伝えることができる．電圧が溜まった PFN は進行波と後退波が一定電圧の定在波を作っていると見ることができるので，まず，進行波が負荷に流れ込み，その後，終端で反射された後退波が負荷に流れ込む．そのため，充電電圧の半分の電圧が負荷にかかる．パルス幅 t は，

$$t = 2N\sqrt{LC} \tag{102}$$

より，5.6 μsec となる．このように作られた 22.5 kV, 4.8 kA, 5.6 μsec のパルスはパルストランスを通してクライストロンに送られる．パルストランスは PFN とクライストロンのインピーダンスを合わせるように巻数が選ばれており 1：13.56 の比になっている．クライストロンには 305 kV, 360 A のパルスが印加される．

充電回路の部分は，2 種類のものがあり，入射器建設当時から使用している共振充電方式と比較的新しく導入されたインバータ方式がある．インバータ方式のモジュレータは格段に小型され，技術の進歩が見て取れる．現在は 14 台はインバータ方式のモジュレータが導入されているが，ほとんどは共振充電方式である．

3.3.3 High power RF システム

前述したようにクライストロンには大電力が送られ，50 MW 級の RF 出力が得られる．入射器で使用しているクライストロンは，三菱電機 PV-3050 および東

芝 E3730A であり，その仕様を表 2 に示す．KEK 入射器のクライストロンの解説に関しては，OHO2002「4 . 高周波源」や OHO2017「3. 高電力クライストロン」に詳しい解説があるので参照していほしい．

表 2: クライストロン仕様

周波数	2856 +/- 1	MHz
ピーク出力	50	MW
平均出力	10	kW
パルス幅	4	μsec
ビーム電圧	310	kV
パービアンス	2.1	μP
利得	51	dB
効率	45	%

クライストロンへの入力 RF は 600 W で飽和点で使用している．さて，クライストロンの出力 RF パルス幅 4 μsec に対して，加速管のフィリングタイム約 0.5 μsec はずいぶんと短い．これは，クライストロンから出力をそのまま加速管に入力するのではなく，パルス圧縮器を通してピーク電力を上げるためである．入射器で使用しているパルス圧縮器は SLED(SLAC Energy Double) というタイプである．SLED の詳しい解説は OHO2002「加速管」にあるので参照していほしい．SLED は一旦空洞に RF を溜め込んで，位相を反転させることによって一気に溜まったエネルギーを取り出すものである．構成は，Hybrid を通して 2 つの空洞がつながったものである．概要を図 54 に示す．これにより，フラットなパルスが鋭く圧縮されて

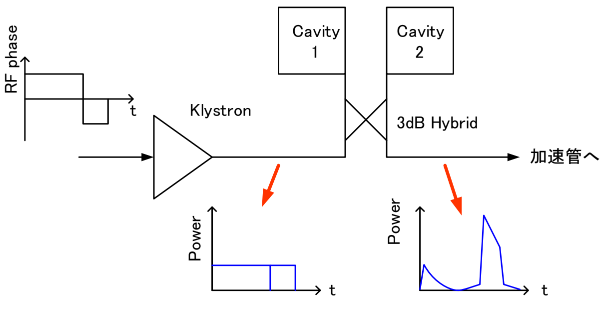


図 54: SLED

加速管へ入力されるので，タイミングをビームと一致されることが重要になる．実際には RF のタイミングをサーチしてビームが最も高いエネルギーになるところを探す．

3.4 陽電子ビーム生成

陽電子は 10 nC, 3.3 GeV の電子ビームをタングステンターゲットに衝突させることで生成する．発生した陽電子はバラバラな方向に発散してしまうので非常に強い磁場で集束を行う．強力な集束磁場を発生する装置が FC(Flux Concentrator) であり，これは SuperKEKB に向けて新たに導入された装置である．FC の詳細については本 OHO19「6. 陽電子源」を参照していほしい．

図 55 に FC とその周りの概略図を示す．FC はビームライン上に置かれているが，その中にあるターゲットは 3.5 mm ほどビームラインからずらしている．これによって，入射用の電子ビームは中心の穴を通すようにできる．プライマリービームはパルスステアリングマグネットで蹴り出してターゲットに当てる．

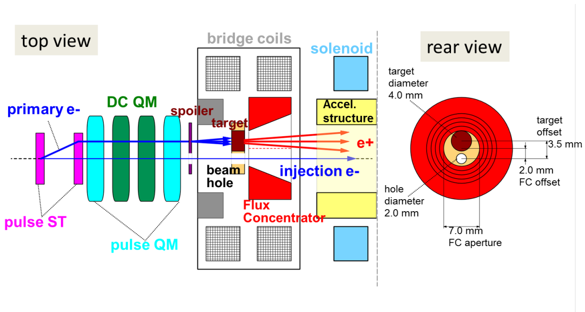


図 55: 陽電子生成のための装置の概略図

生成された陽電子ビームは，LAS を通り 1.1 GeV まで加速されてダンピングリングへ入射される．

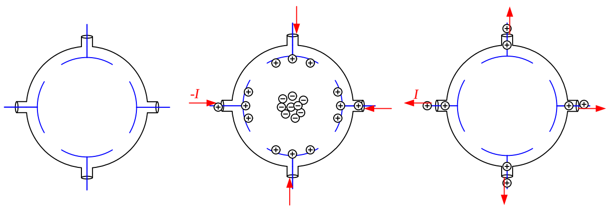
3.5 各種モニターとビーム計測

入射器棟ではビーム調整のための様々なモニターを使用している．ビームを非破壊的にモニターできるような計測器は運転中は常にデータを取り続けているし，ビームを破壊的に測定するものでも適宜測定を行う．運転立ち上げの時期には，あらゆる測定を行いながらビームを作っていき，リングへの入射が始まれば，非破壊のモニターを駆使して安定運転を保つようにしている．

3.5.1 BPM (Beam Position Monitor)

ビームの位置を非破壊で測定する装置として BPM(Beam Position Monitor) が使われている [7]．定

性的に原理を説明すると，BPM の断面は図 56(a) のように４つの電極が外部のケーブルにつながっているものである．ここにビームが来ると図 56(b) のように電極にミラーチャージが発生するので外部から電流が流れ込むことになる．そしてビームが通り過ぎたあとは溜まっていた電荷が逃げるので最初とは逆の電流が発生する．したがって，ビームが通過するとビームの極性と同じ電圧が発生し，次にその逆の電圧が発生する．電子ビームが通過すればマイナス，プラスの順に電圧が発生し，陽電子の場合はマイナス，プラスの順である．



(a) ビームパイプと絶縁された４電極

(b) ビームが来ると電極にミラーチャージがたまり外部から電流が流れこむ

(c) ビームが通りすぎると電極の電荷が外部に電流として流れ出る

図 56: BPM の概念図

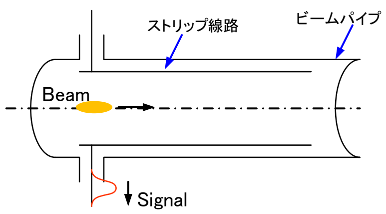


図 57: ストリップライン型の BPM

入射器で使用している BPM 電極は図 57 のように，外部ケーブルとインピーダンスを合わせたストリップ線路になっており，発生する電圧の正負逆転の時間スケールはストリップ線路の長さで決まる．時間はストリップ線路の長さ L ならば, 時間 $t = 2L/c$ となる．実際の線路の長さは 135 mm なので，信号の時間は 0.90 nsec になる．ビームの位置が中心からずれるとビームに近い電極の信号の振幅が大きくなる．右にビームがずれれば右の電極信号が左より大きくなるし，上にずれれば上の電極の信号が大きくなる．このように４電極のバランスを見ればビームの位置を知ることができる．また４電極の信号振幅の合計はビームの電荷量に比例するのでビーム電荷量も知ることができる．実際には，事前にビームの位置がずれた場合にどの程度電極信号のバランスが崩れるかをワイヤーを通した校正装置で事前に測定しておき正確なビーム位置を割り出せるようにしている．

入射器では，2014 年頃から信号処理システムの改善を行い，3 μm の分解能を達成している [8]．

図 58 は実際の運転で使用されている BPM を利用して軌道を観測するパネルである．

3.5.2　ストリークカメラ

ストリークカメラはビームの時間方向のプロファイルを測定するための装置である．破壊的な測定ではあるが，現在入射器棟で唯一時間方向のプロファイルを測定できる装置である．ビーム運転ではビームのバンチ長を測定する目的で使用される．

ストリークカメラは光の時間方向の長さを測定する装置である．したがって，ビームの時間情報を変えずに光に変換する必用がある．そこで，OTR(Optical Transition Radiation) を利用する．ビームを鏡面仕上げにした金属面に当てると OTR により，ビームと同じ時間成分の光が発生する．その光をストリークカメラまで導き，バンチ長を測定する．その様子を図 59 に示した．ストリークカメラの中では，光電面で光が電子に変換される．その電子は，電圧をかけられて電子ビームとなりスイープ電極により横方向に蹴られる．これで，時間情報が空間情報に焼き直される．(この過程は，アナログオシロスコープの原理に似ている．) 最終的には蛍光面のプロファイルを観測することにより，ビームの時間方向を測定できる．

ストリークカメラでビームを測定する過程は，面白い過程をたどっていて，電子ビー ム $\to$ 光 $\to$ 電子ビーム $\to$ 光と変換が行われている．

入射器では，A sector, C sector, 3 sector にストリークカメラを設置している．特に A sector のストリークカメラは高性能で，レーザのパルス長の測定にも使用している．

3.5.3　スクリーンモニター

スクリーンモニターはビームが当たると発光する物質をビームラインに挿入してそれをカメラで観測することでビームのプロファイルを測定するものである．スクリーンモニタはビームをスクリーン（発光体の薄い板）に当てなければならないので破壊的なモニターである．したがって，常時観測するものではなく，ビー

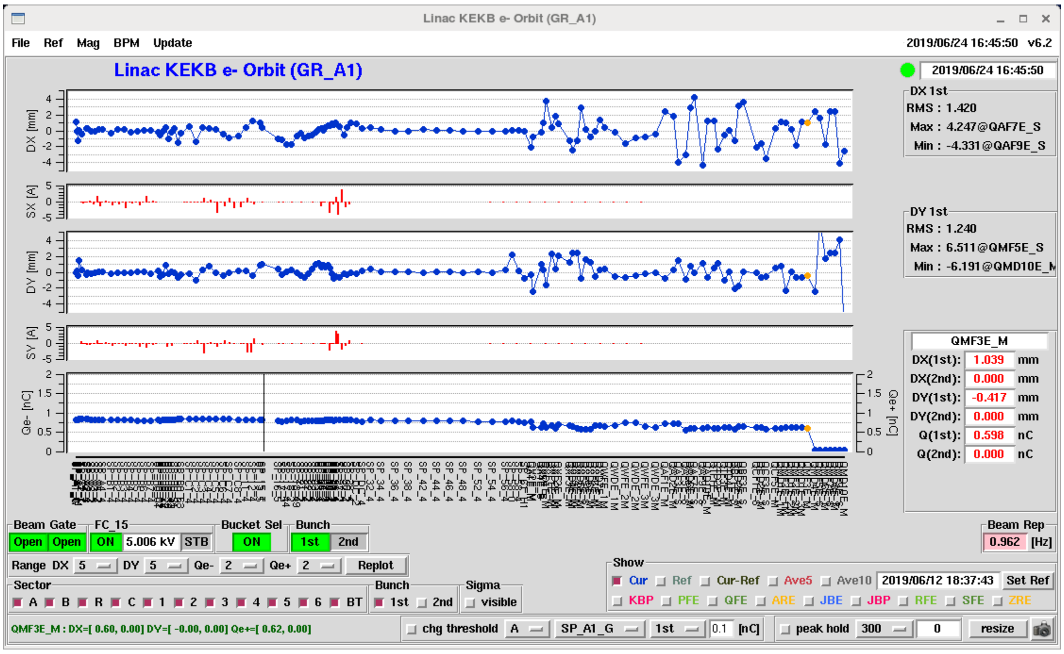


図 58: BPM で得られた情報からビーム軌道と電荷を表示するパネル

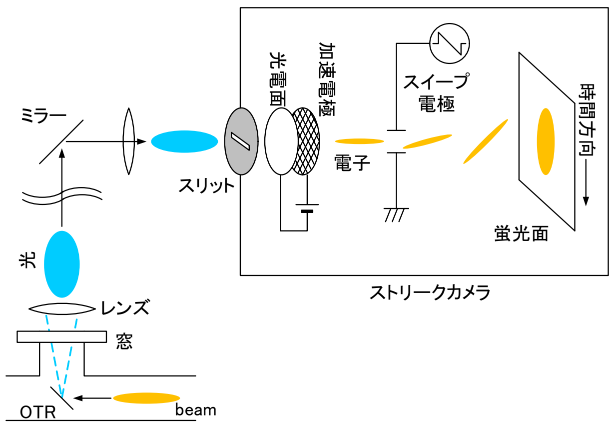


図 59: ストリークカメラの原理

ム調整や特別な測定をするときのみに使われる．ビームの位置情報のみならず完全な 2 次元プロファイルを測定する方法としては入射器棟では唯一の方法である．

スクリーンモニタシステムは主に新旧 2 種類ある．入射器全体にはおよそ 100 箇所ほどにスクリーンモニタが導入されているが，ほとんどが KEKB 以前から使っている古いタイプのシステムである．これに対して，重要だと思われる箇所は徐々に解像度の良い新しいシステムに置き換えている．

昔から使っているシステムは，厚め (1 mm) のアルミナ蛍光板スクリーン（Demarquest 社製 99.5% Al_2O_3）を非同期アナログカメラで撮影するタイプである．構成は比較的単純で，可動スクリーンをレンズ付きカメラで撮影するだけである．厚い蛍光板を使っているので発光量が多くアナログカメラで見てもはっきりとビームを認識できる．ただし，すぐに発光が飽和してしまい正しいビームプロファイルは得られない．また，非同期撮影なので明るさは安定しないので，正確にデータを残すことも期待できない．ビーム情報を読み取るには熟練の勘に頼っているところが大きい．図 60 が古いタイプのスクリーンでビームを観測した画像である．[3]

[3]ゆっくりと蛍光がディケイしていくのを見ていると，入射器棟の歴史と昭和のノスタルジーを感じさせるシステムではあるが，定量的なデータを残せないので筆者は嫌いであるが，割と多くの人に人気がある．

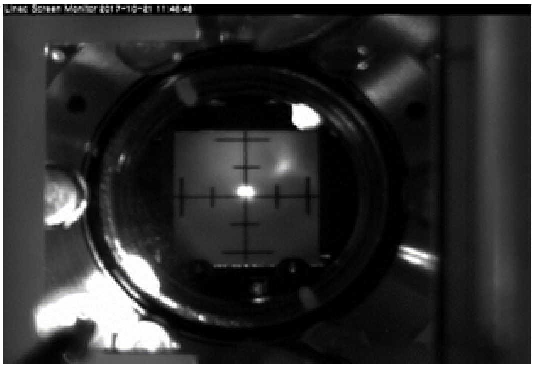


図 60: アルミナ蛍光板スクリーンを非同期アナログカメラで撮影するタイプのスクリーン画像

これに対して，新しく導入されつつあるシステムはネットワーク接続されたデジタル同期カメラで厚さ 0.1 mm の YAG:Ce スクリーンまたは OTR を観測するものである．カメラがビームトリガに同期しているので，安定した撮影が可能である．光学系も解像度を上げるために工夫がなされており，ビーム電荷の違いに対応するため可変式の ND フィルタも導入されている．これら撮影のための光学系の体系図を図 61 に，写真を図 62 に示す．この新しいタイプのスクリーンでデータを取得した結果を図 63 に示す．解像度はおよそ 10 μm で有ることが確かめられている．このタイプのスクリーンモニタでは後述する Q scan 法による Twiss parameter の測定が可能となっている．

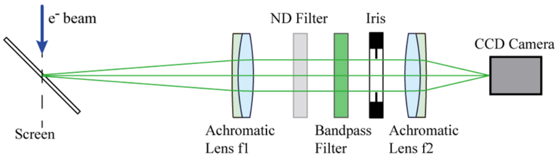


図 61: 新しいタイプのスクリーン撮影光学系

3.5.4　ワイヤースキャナー

ワイヤースキャナーは実質的に非破壊でビームサイズを測定するシステムである．これは，細いワイヤーをビームに当てて発生した放射線を測定する．ワイヤーを動かしていけばワイヤーの可動方向のビームプロファイルが計測できる．図 64 のように水平方向に対して 45 °方向に直線導入機が入っており，動作方向に+/-45 °方向のワイヤーを張っているので，水平,

図 62: 新しいタイプのスクリーン撮影光学系写真

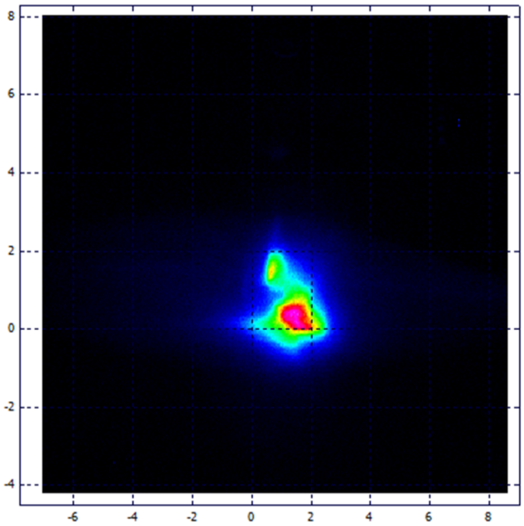


図 63: 新しいタイプのスクリーン画像 (スケールは [mm])

垂直方向にワイヤーが移動する.(動作方向に直角方向にもワイヤーが張ってあり斜め方向のプロファイルも見える.)

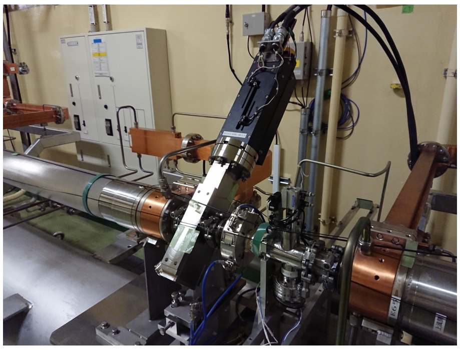


図 64: ワイヤースキャナー写真．水平方向に対して 45 °方向に直線導入機が動き，ワイヤーがビームを横切る様になっている．

実際のビームサイズ測定結果は図 65 のようになる．入射器では 4 つのワイヤースキャナーを一組として Twiss parameter を測定するシステムを使っている．

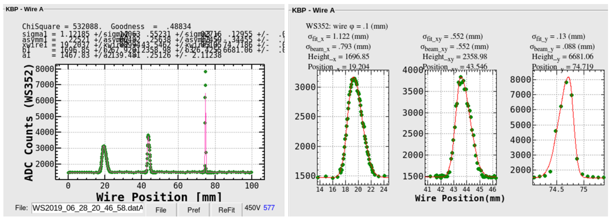


図 65: ワイヤーを動かしたときに得られる放射線の信号（左）と，そこからビームサイズを求めた結果（右）

3.5.5 Q scan 法とその応用

エミッタンス測定方法に Q scan 法という方法がある．これは Q マグネットの値を変えながらスクリーンでビームサイズを観測することでビームのパラメータを測定する方法である．したがって，optics を変えてしまうしスクリーンでビームを止めてしまうので通常は破壊的な測定方法である．しかし，複数のワイヤースキャナーを使った同じ原理の方法で非破壊的にビームパラメータを測定できる．基本的な Q scan 法を説明し，ワイヤースキャナーを使ったエミッタンス，Twiss parameter の測定方法までを説明する．

ある点でのビームの Twiss parameter およびエミッタンスを求めたいとして，それより下流にビーム測定点があるとする．このとき，求めたい点での Twiss parameter を α_1, β_1, γ_1 とし，測定点では，α_2, β_2, γ_2 とする．また，シグママトリックスを $\boldsymbol{\sigma_1}$, $\boldsymbol{\sigma_2}$ として，そのあいだの Trasfar matrix を $\boldsymbol{R}$ とすると，$\boldsymbol{\sigma_2} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{\sigma_1}\boldsymbol{R}^T$ となることはすでに述べた．これを計算すると，

$$\begin{bmatrix} \beta_2\varepsilon_2 & -\alpha_2\varepsilon_2 \\ -\alpha_2\varepsilon_2 & \gamma_2\varepsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1\varepsilon_1 & -\alpha_1\varepsilon_1 \\ -\alpha_1\varepsilon_1 & \gamma_1\varepsilon_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{21} \\ R_{12} & R_{22} \end{bmatrix} \tag{103}$$

より，

$$\beta_2\varepsilon_2 = R_{11}^2\beta_1\varepsilon_1 - 2R_{11}R_{12}\alpha_1\varepsilon_1 + R_{22}^2\gamma_1 \tag{104}$$

$$-\alpha_2\varepsilon_2 = R_{11}R_{21}\beta_1\varepsilon_1 - (R_{12}R_{21} + R_{11}R_{22})\alpha_1\varepsilon_1 + R_{12}R_{22}\gamma_1\varepsilon_1 \tag{105}$$

$$\gamma_1\varepsilon_1 = R_{21}^2\beta_1\varepsilon_1 - 2R_{21}R_{22}\alpha_1\varepsilon_1 + R_{22}^2\gamma_1\varepsilon_1 \tag{106}$$

となる．ここで測定できるパラメータはビームサイズなのでそれに関係ある項目である式 (104) $\sigma_{11} = \beta\varepsilon$(ビームサイズの 2 乗) だけが重要である．$\gamma$ を α, β で表し，

$$\beta_2\varepsilon_2 = R_{11}^2\beta_1\varepsilon_1 - 2R_{11}R_{12}\alpha_1\varepsilon_1 + R_{12}^2\frac{1+\alpha_1^2}{\beta_1}\varepsilon_1 \tag{107}$$

となる.(加速がない場合はエミッタンスは変化しないので $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ であるが，加速も考慮すると，もとのエミッタンスと測定点でのエミッタンスを分けて考える必要がある.）すなわち R_{11}, R_{12} を変化させて複数の $\beta_2\varepsilon$ を測定し，もっともらしい α_1, β_1, ε_1 を当てはめることが Q scan 法と言われる方法である．ここで，Q を変えるのは R_{11}, R_{12} を変化させる一手段であるので，別に複数の Q が同時に動こうかスクリーンが移動しようが加速ゲインが変わろうが R_{11}, R_{12} が変わることに変わりないので Q scan 法はある意味 Q scan を行わなくてもよい．大事なのは，ビームサイズを測定した時の Transfar matrix を知ることである．

最小二乗法で「もっともらしい α_1, β_1, ε_1 を当てはめ」を行う．では，式 (107) を一般的な最小二乗法の形

$$\chi^2 = |\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}|^2 \tag{108}$$

に当てはめてみると

$$\boldsymbol{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_1\varepsilon_1 \\ -2\alpha_1\varepsilon_1 \\ \frac{1+\alpha_1^2}{\beta_1}\varepsilon_1 \end{Bmatrix} \tag{109}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{Bmatrix} \beta_2\varepsilon_2|_1 \\ \beta_2\varepsilon_2|_2 \\ \vdots \\ \beta_2\varepsilon_2|_M \end{Bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{1 回目の測定時のビームサイズの 2 乗} \\ \leftarrow \text{2 回目の測定時のビームサイズの 2 乗} \\ \qquad\qquad\vdots \\ \leftarrow M\ \text{回目の測定時のビームサイズの 2 乗} \end{array} \tag{110}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ & \vdots & \\ a_{M1} & a_{M2} & a_{M3} \end{bmatrix} \tag{111}$$

$$= \begin{bmatrix} R_{11}^2|_1 & R_{11}R_{12}|_1 & R_{12}^2|_1 \\ R_{11}^2|_2 & R_{11}R_{12}|_2 & R_{12}^2|_2 \\ & \vdots & \\ R_{11}^2|_M & R_{11}R_{12}|_M & R_{12}^2|_M \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{1 回目の測定時} \\ \leftarrow \text{2 回目の測定時} \\ \qquad\quad\vdots \\ \leftarrow M\ \text{回目の測定時} \end{array} \tag{112}$$

とかける．この優決定の連立方程式を SVD などでとけばよい．ここから，x_1, x_2, x_3 が求まるのでエミッタンス ε_1 は

$$\varepsilon_1 = \sqrt{x_3x_1 - \frac{x_2^2}{4}} \tag{113}$$

となる．同じように，

$$\alpha_1 = -\frac{x_2}{2\sqrt{x_3x_1 - \frac{x_2^2}{4}}} \tag{114}$$

$$\beta_1 = \frac{x_1}{\sqrt{x_3x_1 - \frac{x_2^2}{4}}} \tag{115}$$

$$\gamma_1 = \frac{x_3}{\sqrt{x_3x_1 - \frac{x_2^2}{4}}} \tag{116}$$

となる．

誤差の評価については誤差の伝播式より，$f = f(x_1, x_2, \cdots)$ のとき，$x_1, x_2, \cdots$ に対する誤差を $s_1, s_2, \cdots$ とすると f の誤差 s は

$$s^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 s_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 s_2^2 + \cdots \tag{117}$$

となる．

それぞれの偏微分を計算すると，

$$\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial x_1} = \frac{x_3}{2\varepsilon_1} \qquad \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial x_2} = \frac{x_2}{4\varepsilon_1} \qquad \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial x_3} = \frac{x_1}{2\varepsilon_1} \tag{118}$$

$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1} = \frac{x_2x_3}{4\varepsilon_1^3} \qquad \frac{\partial\alpha_1}{\partial x_2} = \frac{x_3x_1}{2\varepsilon_1^3} \qquad \frac{\partial\alpha_1}{\partial x_3} = \frac{x_1x_2}{4\varepsilon_1^3} \tag{119}$$

$$\frac{\partial\beta_1}{\partial x_1} = \frac{2x_3x_1 - x_2^2}{4\varepsilon_1^3} \qquad \frac{\partial\beta_1}{\partial x_2} = \frac{x_1x_2}{4\varepsilon_1^3} \qquad \frac{\partial\beta_1}{\partial x_3} = \frac{x_1^2}{2\varepsilon_1^3} \tag{120}$$

$$\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_1} = \frac{x_3^2}{2\varepsilon_1^3} \qquad \frac{\partial\gamma_1}{\partial x_2} = \frac{x_1x_2}{4\varepsilon_1^3} \qquad \frac{\partial\gamma_1}{\partial x_3} = \frac{2x_3x_1 - x_2^2}{4\varepsilon_1^3} \tag{121}$$

となるので，エミッタンス ε_1, と α_1, β_1, γ_1 に対するそれぞれの誤差は以下のように計算できる．

$$s_{\varepsilon_1}^2 = \left(\frac{x_3}{2\varepsilon_1}\right)^2 s_{x1}^2 + \left(\frac{x_2}{4\varepsilon_1}\right)^2 s_{x2}^2 + \left(\frac{x_1}{2\varepsilon_1}\right)^2 s_{x3}^2 \tag{122}$$

$$s_{\alpha 1}^2 = \left(\frac{x_2x_3}{4\varepsilon_1^3}\right)^2 s_{x1}^2 + \left(\frac{x_3x_1}{2\varepsilon_1^3}\right)^2 s_{x2}^2 + \left(\frac{x_1x_2}{4\varepsilon_1^3}\right)^2 s_{x3}^2 \tag{123}$$

$$s_{\beta 1}^2 = \left(\frac{2x_3x_1 - x_2^2}{4\varepsilon_1^3}\right)^2 s_{x1}^2 + \left(\frac{x_1x_2}{4\varepsilon_1^3}\right)^2 s_{x3}^2 + \left(\frac{x_1^2}{2\varepsilon_1^3}\right)^2 s_{x2}^2 \tag{124}$$

$$s_{\gamma 1}^2 = \left(\frac{x_3^2}{2\varepsilon_1^3}\right)^2 s_{x1}^2 + \left(\frac{x_1x_2}{4\varepsilon_1^3}\right)^2 s_{x3}^2 + \left(\frac{2x_3x_1 - x_2^2}{4\varepsilon_1^3}\right)^2 s_{x2}^2 \tag{125}$$

入射器ではデジタル同期カメラの新しいタイプのスクリーンモニタの箇所は Q scan を行えるようになっている．図 66 に Q scan 法の測定結果の一例を示す．この例では，精度を上げるため 3 つのマグネットをスキャンした結果でパラメータのフィッティングを行っている．一つの Q マグネットをスキャンしていくとビームサイズの自乗が放物線を描くことがよく知られいる（Thin lens 近似を行った場合であり一般的には正確ではない）が，この例では，それが 3 つになっていることがわかる．

ワイヤースキャナーでは 4 点でビームサイズを測定することで，Twiss parameter を求めている．数メートル間隔で置かれた 4 つのワイヤースキャナーを 1 セットしてデータを取りパラメータのフィッティングを行っている．異なる転送行列の点でのデータを取るという意味では，Q マグネットをスキャンする方法と原理は同じである．もちろん，ワイヤースキャナーが置かれた 4 点は，オプティクスを考えたときに誤差が小さくなるような測定点（位相が 45 °づつ回転する点）が選ばれている．ワイヤースキャナーでの利点は，マグネットを変更する必用がないことと，ビームを止めなくていい点である．したがって，非破壊で Twiss parameter を知ることができる．4 セットのワイヤースキャナーは，J-arc 前の B sector, J-arc 後の C sector, ダンピングリングあとの 3 sector, 入射器最下流の 5 sector と Twiss parameter を抑えておきたい場所に設置されている．ワイヤースキャナーで測定したあとに，設計値の Twiss parameter にマグネットを調整して修正することをマッチングと呼ぶ．マッチングと測定を繰り返して設計値の Twiss parameter に実際のビームを合わせてこんでいく．ワイヤースキャナーでの測定結果の例を図 67 に示す．

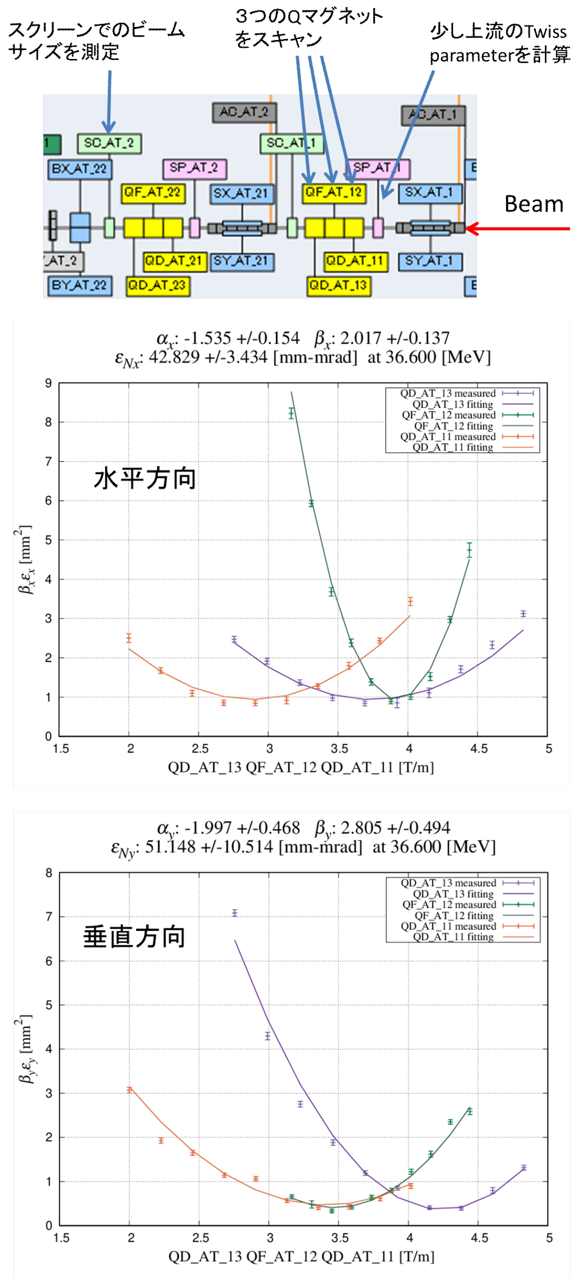


図 66: Q scan 測定結果の例．３つの Q マグネットを使って水平，垂直方向それぞれの Twiss parameter を求めている．

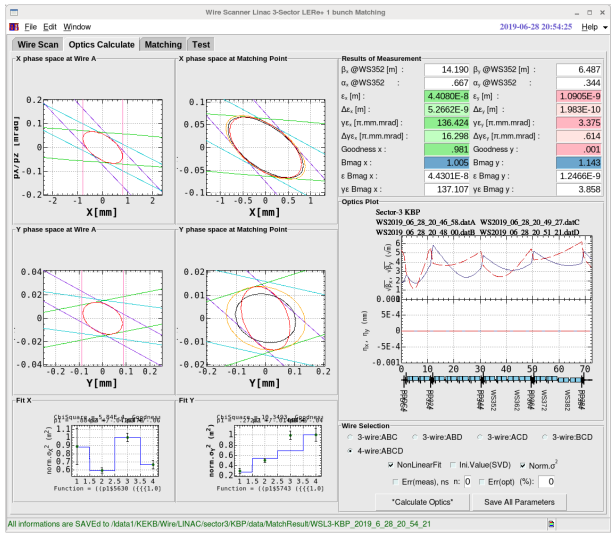


図 67: ワイヤースキャナーで Twiss parameter を求めたるためのパネル

3.5.6 RF 誘起波モニタ

RF 誘起波モニタはビームが加速管を通過したときに生じるウェーク場を利用している．光速の電子ビームが加速管を通過すると，ビームが作る電磁場が加速管の加速モードの共振をおこし，ダミーロードで S-band の RF を観測することができる．

スタンバイモードの加速管でダミーローへいく RF を観測するとビームが通過するタイミングで，RF を観測することができる．この RF 位相を加速に使用す RF 位相と比較するとビームが RF のどの位相に乗っているかが正確にわかる．

モニターしている RF 位相は温度ドリフトなどの影響がどうしても入ってきて，正確に絶対値を求めるのは非常に難しい．そこで，加速管のなかでビームと RF 位相を直接比較できる誘起波モニタは非常に有用である．運転上は RF 位相の絶対値よりもビームとの相対値のほうが重要なので，理にかなったモニタといえる．

誘起波モニタはビームと RF 位相の安定度の測定や，時間方向のビームジッタ測定，J-arc の R56 の測定などに用いられている．図 68 に実際の RF 誘起波モニタの測定の様子を示す．

3.5.7 測定データの取扱

入射器では EPICS（Experimental Physics and Industrial Control System）という制御システムも用い

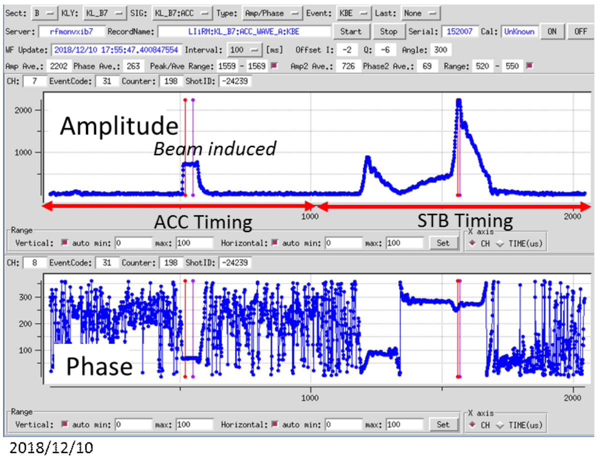


図 68: RF 誘起波モニタの測定パネル

ているので，ほとんどの測定データは EPICS のデータとして同様に扱うことができる．このため，誰でも測定器の詳細な仕様を気にすることなく測定データにアクセスすることができる．また，EPICS データの過去データはアーカイブに貯められて，こちらも簡単にアクセスできる．入射器は多くの人が関わり，膨大な測定値が日々貯められているので，どんなデータにも簡単にアクセスできることが重要である．

3.6　ビーム運転

3.6.1　ビームのパルス切り替えの仕組み

実際のビーム運転では，入射リングに合わせてビームスペックを変えている．入射器は 50 pps で運転しているがパルス毎にビームスペックを変えられる仕組みを持っている．これは，SuperKEKB に向けて新たに導入したシステムであり，KEKB 時代はビームを切り替えるためには一定時間ビームを止めなければならなかった．しかし，リングでのビーム寿命が短い SuperKEKB の運転では，常にビームを入射し続けること（トップアップ運転）が求められる．

入射リングは PF, PF-AR, LER, HER の 4 リングであるが，どのリングにどの程度のパルスを割り振るかを自在に変化させられる．例えば，すべてのリングに 12.5 Hz で均等にビームの振り分けることもできる．このためには，50 pps 間隔，つまり 20 msec のうちに入射器の加速器のパラメータを変更しなくてはいけない．

各リングではビームのエネルギーが違うので加速ゲインを変化させなければいけないし，電子と陽電子ではオプティクスも異なるので Q マグネットやステアリングマグネットも変えなければないらい．SuperKEKB 立ち上げに向けて 3 sector 以降はすべてパルスマグネットに入れ替えを行った．これにより 3 sector 以降は完全に Pulse to Pulse でオプティクスを変更できる．A から 2 sector は一部パルスマグネット化しているが基本的には共通オプティクスである．

入射器全体の機器に対して 20 msec 毎に制御信号を送るシステムを Event system という．Event system は今がどのモードであるかを 20 msec 毎に各機器に知らせる．それぞれの機器では，モードに対応する値を持っているので，ビームトリガタイミングでその値を出力する．入射器のシステムは時間スケールが異なる３種類の制御信号を使っている．すなわち，

1. モード毎の制御値，または単一の制御値.（最も遅い信号，人間が判断してから動かすような値）
2. モード信号.（20 msec 毎に送られる．今がどのモードかを機器に知らせる）
3. トリガー信号.（最も時間精度が要求される信号．この信号に合わせてビームが出力される.）

パルスマグネットを例に取れば，上記の 1,2,3 をすべて使っている．まず電流値が 1 に当たる．HER と LER では流す電流値が違うのでモードごとの値を決めておく．このモード毎の制御値は頻繁には変えない.「HER ではマグネットの磁場が足りないなあ．100 A から 120 A に変えてみるか.」と人間が判断して変更する程度の速さの信号である．対して Event 信号は必ず 20 msec 毎に受け取る．事前に「LER のときは 50 A, HER のときは 120 A, PF は 70 A」などと決められているので，今がどのモードなのかを知れば出力するべき電流値が決まる．あとは，ビームが来るタイミングに合わせてパルス電流を出力するかだけだが，これは，非常に精度のよいトリガータイミングが送られてくる．このように，必要な電流値が必要なタイミングで出力されることになる.（ちなみに，すべての機器が 1, 2, 3 すべてを使うわけではない．DC マグネットは 1 のみで単一の制御値しか使えない．クライストロンモジュレータはパルス運転だが制御値は固定であるため，1 と 3 だけを使う．モニターである BPM システムはモードごとのビームを観測するために 2 と 3 を使っている.）

入射器全体の機器において，1. 制御値 2. モード 3. トリガー の３つをうまくコントロールすることで，各リングへの同時入射を可能にしている．

3.6.2　パルスマグネットシステム

3 sector 以降はすべてのマグネットがパルス化されている．これは KEKB 時代には DC の Q マグネットトリプレットが設置させれていた場所に，それらを置き換えて設置された．SuperKEKB にむけてパルス Q マグネットダブレットとその間に xy パルスステアリングが設置された (図 69)．パルスマグネットの詳細については本 OHO19「4. パルスマグネット」を参照していほしい．

3.6.3　各モードでのエネルギー

各入射ビームは当然ながらリングのエネルギーに合わせて加速を行っている．４リングではエネルギーはバラバラなので，加速ユニット毎に，加速，減速，加減速なしを選んでいる．図 70 は入射器内での各モードに対するエネルギー変化を横軸 z にとって示す．HER, LER は加速ユニットを最大限に使って加速を行う．対して，PF, PF-AR モードでは後半に減速ユニットを設けている．特に，PF モードでは 1.7 GeV も減速している．これは DC マグネットの部分では共通エネルギーにしなければならないことに起因する．J-arc を通すためには正確に 1.5 GeV のビームエネルギーにしなければならないので，C sector まではすべてのモードでエネルギーは一致している．1 sector では電子ビームを陽電子に変換するので，ここで陽電子ビームのエネルギーだけが大きく乖離する．1, 2 sector は主に陽電子ビームに合わせた集束系である．ダンピングリング以降の 3 sector から下流ではパルスマグネットが使用できるので各モードで完全独立なオプティクスが採用できる．5 sector の下流部分ではエナジーノブが設けれているので各モードでビームエネルギーの微調整を行う．

3.6.4　フェージング

ビーム加速を行う上で最も加速効率が良い RF 位相を探す作業をフェージングと呼ぶ（位相をふるからフェージング）．この最大加速電圧を得られる位相をクレスト位相とよぶ．メンテナンスなどで長期間運転停止していたのちの立ち上げなどでは，加速位相がずれてしまっていることが普通である．実質的に，ビームのタイミングが RF 位相のどこに来るかを事前に把握することは非常に困難である．そこで，運転立ち上げ時にはビームを見ながら加速管の加速位相を探す（正弦波のトップに乗せる）作業が必用になる．まずは，ある程度ビームが通る状態にしたうえで，１台づつクライストロンの RF 位相をスキャンしていく．位相スキャンしながらベンドマグネットの下流にある BPM でビーム位置の変化を記録する．図 71 は 5 sector のフェージングを行った結果で，それぞれのクライストロンにおいて，マグネットでの曲げ角が最も小さくなる位相がクレスト位相として検出されている．

3.6.5　エナジーノブ

各種ビームモードでエネルギーは固定であり，リングのエネルギーにピタリと一致している必要がある．ビームエネルギーを大まかに決めるのは加速 unit の数であるが，それだけではビームエネルギーの精度は出ないので，微調整をする unit がある．単純に考えるとクライストロンからの出力 RF power を変化させれば良いのだが，クライストロン出力を変化させるのはいろいろと厄介な点が多い.（クライストロン出力を変化させるには２つの方法がある．１つ目はクライストロンの電子銃電圧を変える方法だが，電圧を変えることで出力位相もずれてしまう．２つ目は，クライストロン入力 RF power を変化させる方法だが，通常，飽和領域で使用し入力 RF power の変化に鈍感な領域を使っているで，出力 power の変動が激しくなってしまう恐れがある.）そこで，２つの unit を使い，クライストロン出力 power を変化させずに，実質的にはクレスト位相のまま加速電圧を変化させる．これは，加速電圧の同じ unit をクレスト位相を挟んで正負逆に同じ位相量 θ だけ変化させる．すると図 72 のように実質的にはクレスト位相のまま加速電圧が $\cos\theta$ 倍になる．このような原理で加速電圧を変化させると，位

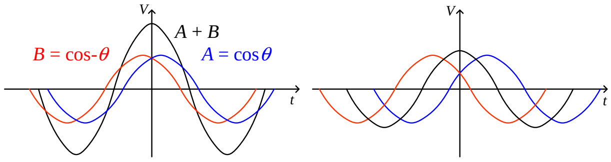


図 72: エナジーノブの原理

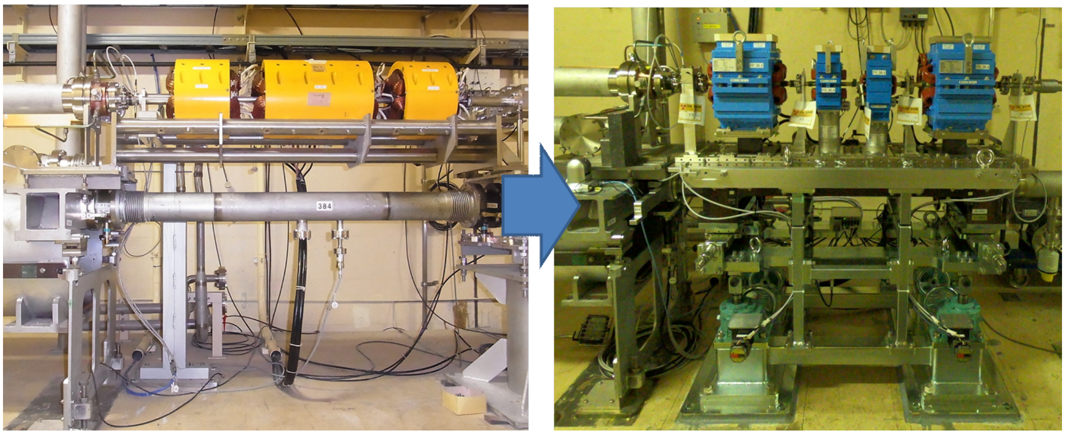


図 69: 以前の DC Q マグネット（トリプレット）（右）と置き換えられたパルスマグネット（ダブレットと xy ステアリング）（左）

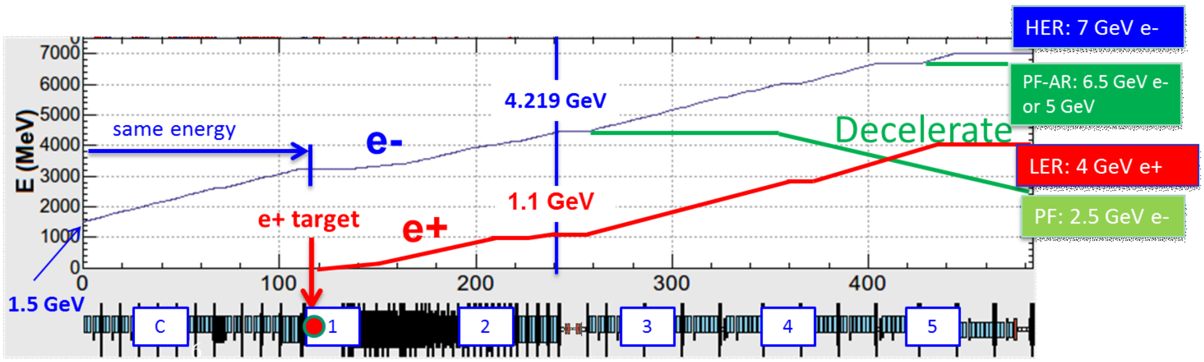


図 70: 入射器での各ビームの加速状態 (C sector 以降)

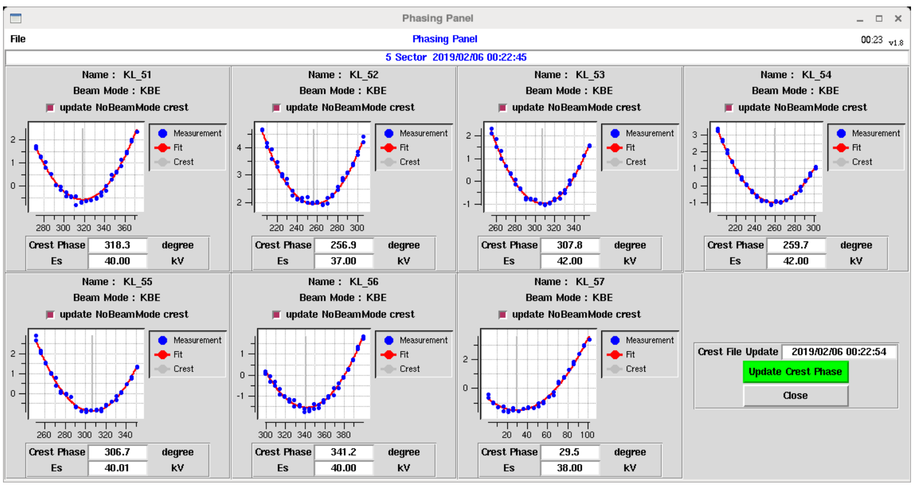


図 71: フェージング結果を表示するパネル

相の変化を変えるだけで加速電圧を正確にコントロールできる．エナジーノブは J-Arc の前と入射器最下流に設けられており，B5, B6 unit ペアと 51, 52 unit ペアを使っている．

3.6.6 クライストロンスタンバイ

入射器では約 60 台のクライストロンを使って運転を行っているが，すべてのクライストロンを加速に使っているわけではない．それは，どこかの unit が何らかのトラブルを起こしても，即座に代替 unit を入れられるようにスタンバイしているためである．このような，もしものときの予備 unit をスタンバイ unit と呼ぶ．スタンバイ unit は加速に使っていないと言っても完全 RF を OFF しているわけではない．これは，加速管に RF を供給しなければ加速管温度が下がってしまうからである．加速管は冷却水と RF の消費電力で温度を保っているので，急に熱負荷が加わると温度が安定するまでに時間がかかる．これを避けるために，平均の熱負荷だけは変えないように，タイミングだけをずらした運転を行っているのがスタンバイユニットである．スタンバイユニットも 50 Hz で運転を行っているが，HV, RF のタイミングのみ通常の unit と数 μsec 遅らせている．このようにすると，ビームから見れば加速電圧 0 のユニットであるが，加速管の平均熱負荷は加速ユニットと同じである．常に数台のスタンバイユニットを確保しておき不測の事態に備えている．

4 おわりに

KEK 入射器棟では，様々な年代の様々な装置が稼働することによって様々なニーズのビームを作り出していることが，多少は説明できたでしょうか？まだまだ説明不足な点も多々あったとは思いますが，入射器と同じように OHO の歴史も長く，本編を読んでいて不明点があっても過去の OHO テキストを読めばきっと素晴らしい解説にたどり着くでしょう．せめて，過去の OHO の導入口になれたなら幸いです．昭和，平成の時を経た様々な技術の蓄積である入射器全体の OHO テキストを令和元年に担当させていただけたことは非常に光栄であり，今まで KEK 入射器に携わったすべての人に感謝申し上げたいと思います．

参考文献

[1] Isamu Sato, Shozo Anami, Atsushi Enomoto, Shigeki Fukuda, Hitoshi Kobayashi, and Kazuo Nakahara. 放射光入射器増強計画　kekb に向けて design report on pf injector linac upgrade for kekb. Technical report, National Lab. for High Energy Physics, 1996.

[2] Karl L Brown, Frank Rothacker, David C Carey, and Christoph Iselin. Transport-a computer program for designing charged particle beam transport systems. Technical report, European Organization for Nuclear Research, 1980.

[3] E. A. Knapp, B. C. Knapp, and J. M. Potter. Standing wave high energy linear accelerator structures. *The Review of Scientific Instruments*, Vol. 39, No. 7, pp. 979–991, 1968.

[4] D. E. Nagle, E. A. Knapp, and B. C. Knapp. Coupled resonator model for standing wave accelerator tanks. *Rev. Sci.*, Vol. 38, pp. 1583–1587, 1967.

[5] 高田耕治．加速器の基礎理念．高エネルギー加速器研究機構　加速器研究施設, 2002.

[6] 高田耕治．高周波加速の基礎．高エネルギー加速器研究機構　加速器研究施設, 2005.

[7] T Suwada, N Kamikubota, H Fukuma, N Akasaka, and H Kobayashi. Stripline-type beam-position-monitor system for single-bunch electron/positron beams. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, Vol. 440, No. 2, pp. 307–319, 2000.

[8] R Ichimiya, T Suwada, M Satoh, F Miyahara, and K Furukawa. High position resolution and high dynamic range stripline beam position monitor (bpm) readout system for the kekb injector linac towards the superkekb. *WEPD04, IBIC2014, Monterey, USA*, 2014.

付録

A　導波管

導波管とは電磁波を輸送するための金属の管である．電力は周波数が低い場合は通常の電線を用いるが，高周波になると損失が大きくなり普通の電線では電力を輸送することができない．そこで，高周波の場合は同軸線路，さらに周波数が高くなると導波管が用いられる．linac で用いられるような RF の周波数領域では導波管が不可欠である．特に矩形導波管がよく用いられる．

A.1　基本式

電磁波は以下のマクスウェル方程式に従うことはよく知られている．

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{126a}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{126b}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{126c}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{126d}$$

これらは物質に無関係にいつでも成り立つ基本的な式であってマクスウェルの基本方程式と呼ばれる．これに物質の性質に関する式，

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{127a}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{127b}$$

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{127c}$$

が加わって方程式系として完結する．

導波管など物体を伝わらせて電磁波を送る場合の伝送電磁波に対する方程式を求めるには以下のようにする．まず，電場・磁場を

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0(x, y)e^{i\omega t - \gamma z} \tag{128a}$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0(x, y)e^{i\omega t - \gamma z} \tag{128b}$$

の形におき，γ が純虚数

$$\gamma = i\beta \tag{129}$$

となる場合に z 方向に進む波となる．真空中のマクスウェル方程式 $(\sigma = 0, \rho = 0)$ に式 (128a), (128b) を代入すれば

$$\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma H_y, -\gamma H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x}, \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right) = (i\omega\varepsilon E_x, i\omega\varepsilon E_y, i\omega\varepsilon E_z) \tag{130a}$$

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma E_y, -\gamma E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) = (-i\omega\mu H_x, -i\omega\mu H_y, -i\omega\mu H_z) \tag{130b}$$

となり，この式と $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0, \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0$ から

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = -\left(\omega^2 \varepsilon\mu + \gamma^2\right) E_z \tag{131a}$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} = -\left(\omega^2 \varepsilon\mu + \gamma^2\right) H_z \tag{131b}$$

$$\left(\omega^2 \varepsilon\mu + \gamma^2\right) E_x = -i\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} - \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} \tag{131c}$$

$$\left(\omega^2 \varepsilon\mu + \gamma^2\right) E_y = i\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} - \gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} \tag{131d}$$

$$\left(\omega^2 \varepsilon\mu + \gamma^2\right) H_x = i\omega\mu \frac{\partial E_z}{\partial y} - \gamma \frac{\partial H_z}{\partial x} \tag{131e}$$

$$\left(\omega^2 \varepsilon\mu + \gamma^2\right) H_y = -i\omega\mu \frac{\partial E_z}{\partial x} - \gamma \frac{\partial H_z}{\partial y} \tag{131f}$$

が導かれる．

A.2　矩形導波管

矩形導波管は，linac の RF 輸送にもっともよく使われるものであり，四方を銅板で囲まれた筒状のものである．矩形導波管の形を図 73 に示す．図 73 において電磁波は z 方向に進む．

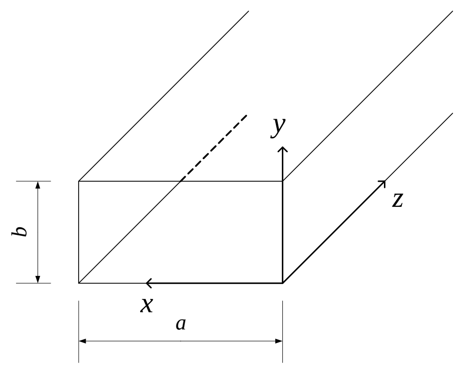


図 73: 矩形導波管

導波管の中を進む波のうち，$E_z \neq 0$, $H_z = 0$ のものを TM 波または E 波と呼ぶ．また，$E_z = 0$, $H_z \neq 0$ のものを TE 波または H 波と呼ぶ．

A.2.1 TM モード

TM 波の方程式は，式 (131a) より，

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}+k^2E_z=0 \tag{132}$$
$$k^2=\omega^2\varepsilon\mu+\gamma^2$$

という固有値問題になり，境界条件は金属表面で電場が垂直なので，$x=0, x=a, y=0, y=b$ のときに $E_z=0$ である．

式 (132) の解は，

$$E_z=(C_1\sin k_x x+C_2\cos k_x x)(C_3\sin k_y y+C_4\cos k_y y) \tag{133}$$

$$k^2=k_x^2+k_y^2$$

の形をとる．ただし，境界条件 $x=0, y=0$ で $E_z=$ を考慮すると，

$$E_z=A\sin k_x x\sin k_y y \tag{134}$$

となり，さらに $x=a, y=b$ で $E_z=0$ を考慮すると，

$$k_x=\frac{m\pi}{a}\ ,\quad k_y=\frac{n\pi}{b} \tag{135}$$

ただし，m, n は 0 でない整数である．したがって，固有値 k が，

$$k^2=k_x^2+k_y^2=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\equiv k_{mn}^2 \tag{136}$$
$$m,n=1,2,\cdots$$

を満たすときのみ解が定まる．k_{mn} に対するものを TM_{mn} モードという．E_z を式 (131c), (131d), (131e), (131f) に代入すると他の成分も求められ以下のようになる．

$$E_x=-\frac{i\beta}{k^2}\frac{m\pi}{a}A\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{137a}$$
$$E_y=-\frac{i\beta}{k^2}\frac{n\pi}{b}A\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} \tag{137b}$$
$$E_z=A\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{137c}$$
$$H_x=\frac{i\omega\varepsilon}{k^2}\frac{n\pi}{b}A\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} \tag{137d}$$
$$H_y=-\frac{i\omega\varepsilon}{k^2}\frac{m\pi}{a}A\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} \tag{137e}$$
$$H_z=0 \tag{137f}$$

導波管の中を電磁場が波として進行するためには γ が純虚数でなければならないから，$\omega^2\varepsilon\mu>k^2$ でなければならない．したがって，TM_{mn} モードは

$$\omega>\omega_c\ ,\quad \omega_c=\frac{k_{mn}}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{138}$$

の場合のみ導波管を通過し，ω_c 以下の角周波数は通過しない．ω_c に対する周波数 $f_c=\frac{\omega_c}{2\pi}$ を遮断周波数 (cutoff frequency) と呼ぶ．

ω_c に対する波長 λ_c は遮断波長と呼ぶが，λ_c よりも波長が短いものだけが導波管を通過できる．管内での波長 λ_g は自由空間での波長 λ より大きくなり，次の関係がある．

$$\lambda_c=\frac{2\pi}{\omega_c\sqrt{\varepsilon\mu}}=\frac{2\pi}{k_{mn}} \tag{139}$$
$$\lambda_g=\frac{2\pi}{\beta}=\frac{2\pi}{\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{\omega^2-\omega_c^2}} \tag{140}$$
$$\frac{1}{\lambda_g}=\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda_c^2}} \tag{141}$$

また，管内での波の群速度 v_g は

$$v_g=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\beta}=c\sqrt{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} \tag{142}$$

である．

A.2.2 TE モード

TE 波の方程式は，式 (131b) より，

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2}+k^2H_z=0 \tag{143}$$

という固有値問題になり，境界条件は金属表面では磁場の法線方向への微分が 0，$\frac{\partial H_z}{\partial n}=0$ という条件である．よって，$x=0, x=a$ のとき $\frac{\partial H_z}{\partial x}=0$，$y=0, y=b$ のとき $\frac{\partial H_z}{\partial y}=0$ である．式 (143) の解は，式 (133) と同じ形になるが，境界条件を考慮すると，

$$H_z=A\cos k_x x\cos k_y y \tag{144}$$
$$k_x=\frac{m\pi}{a}\ ,\quad k_y=\frac{n\pi}{b} \tag{145}$$

となる．m, n は整数であるが，今の場合それらを 0 にしても $H_z=0$ にはならない．ただし，$m=n=0$ の場合においては $k=0$ となり，$\omega=0$ となってしまうから m, n のうち一つだけが 0 になりうる．ゆえに，

$$k^2=k_x^2+k_y^2=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\equiv k_{mn}^2 \tag{146}$$
$$m,n=0,1,2,\cdots\quad(m=n=0\text{ を除く})$$

を満たすときのみ解が定まる．k_{mn} に対するものを TE_{mn} モードという．H_z を式 (131c), (131d), (131e), (131f) に代入すると他の成分も求められ以下のようになる．

$$E_x = \frac{i\omega\mu}{k^2}\frac{n\pi}{b}A\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{147a}$$
$$E_y = -\frac{i\omega\mu}{k^2}\frac{m\pi}{a}A\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} \tag{147b}$$
$$E_z = 0 \tag{147c}$$
$$H_x = \frac{i\beta}{k^2}\frac{m\pi}{a}A\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} \tag{147d}$$
$$H_y = \frac{i\beta}{k^2}\frac{n\pi}{b}A\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{147e}$$
$$H_z = A\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} \tag{147f}$$
$$\tag{147g}$$

普通，矩形導波管では TE_{01} モードを使って RF 輸送を行う．

A.3 円形導波管

円形導波管は，矩形導波管と比べると実用的に使用されることはあまりないが，加速管の電磁場モードの基礎になっているので非常に重要である．linac はこの円形導波管を変形したものと考えることができる．図 74 に円形導波管の形と座標系を示す．円形導波管の解析を行うときは円柱座標系で記述するのが普通である．

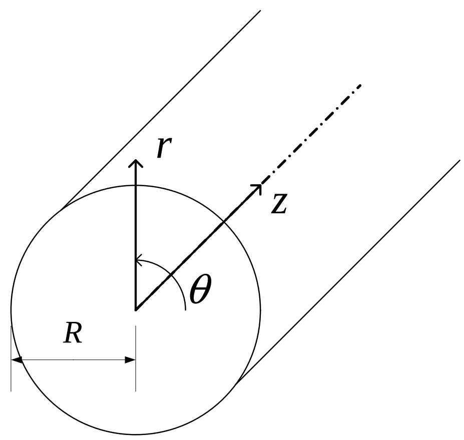


図 74: 円形導波管

A.3.1 TM モード

TM 波であるので $H_z = 0$ として円柱座標系 (r, θ, z) を使い，式 (131a) を書き直すと

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} + k^2 E_z = 0 \tag{148}$$

となる．図 74 のとおり導波管の半径を R とし，中心軸を z 軸とすると，境界条件は $r = R$ で $E_z = 0$ である．式 (148) の解は，m 次の Bessel 関数 $(m = 0, 1, 2, \cdots)$ を J_m とすると，

$$E_z = J_m(kr)\,(A\cos m\theta + B\sin m\theta) \tag{149}$$

の形になる．ここで，境界条件を考慮すると，

$$J_m(kR) = 0 \tag{150}$$

となる．J_m の n 番目の 0 点を j_{mn} と書くと，k として

$$k_{mn} = \frac{j_{mn}}{R} \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots;\quad n = 1, 2, \cdots) \tag{151}$$

の値をとり，$k^2 = \omega^2\varepsilon\mu + \gamma^2 = (j_{mn}/R)^2$ である．

$H_z = 0$ として，$E_r = E_x\cos\theta + E_y\sin\theta$, $E_\theta = -E_x\sin\theta + E_y\cos\theta$, $\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}$ を考慮すると式 (131c), (131d), (131e), (131f) は

$$E_r = -\frac{i\beta}{k^2}\frac{\partial E_z}{\partial r} \tag{152a}$$
$$E_\theta = -\frac{i\beta}{k^2}\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial \theta} \tag{152b}$$
$$H_r = \frac{i\omega\varepsilon}{k^2}\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial \theta} \tag{152c}$$
$$H_\theta = -\frac{i\omega\varepsilon}{k^2}\frac{\partial E_z}{\partial r} \tag{152d}$$

となる．$E_z = AJ_m(k_{mn}r)\cos m\theta$ として上記の式に代入すると以下のようになる．

$$E_r = -\frac{i\beta}{k^2}\frac{j_{mn}}{R}AJ'_m\left(\frac{j_{mn}}{R}r\right)\cos m\theta \tag{153a}$$
$$E_\theta = \frac{i\beta}{k^2}\frac{m}{r}AJ_m\left(\frac{j_{mn}}{R}r\right)\sin m\theta \tag{153b}$$
$$E_z = AJ_m\left(\frac{j_{mn}}{R}r\right)\cos m\theta \tag{153c}$$
$$H_r = -\frac{i\omega\varepsilon}{k^2}\frac{m}{r}AJ_m\left(\frac{j_{mn}}{R}r\right)\sin m\theta \tag{153d}$$
$$H_\theta = -\frac{i\omega\varepsilon}{k^2}\frac{j_{mn}}{R}AJ'_m\left(\frac{j_{mn}}{R}r\right)\cos m\theta \tag{153e}$$
$$H_z = 0 \tag{153f}$$

A.3.2　TE モード

TM 波は $E_z = 0$ として円柱座標系 (r, θ, z) を使い，式 (131b) を書き直すと

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial \theta^2} + k^2 H_z = 0 \tag{154}$$

となる．ここで，境界条件は $r = R$ で $\frac{\partial H_z}{\partial r} = 0$ である．式 (154) の解は，式 (149) と同型になるが境界条件を考慮すると，

$$J'_m(kR) = 0 \tag{155}$$
$$\left(J'_m(r) = \frac{\mathrm{d}J_m(r)}{\mathrm{d}r} \right)$$

となり，m 次の Bessel 関数の微分 J'_m の n 番目の 0 点を j'_{mn} と書くと，$kR = j'_{mn}$ となるように，$k_{mn} = \frac{j'_{mn}}{R}$ $(m = 0, 1, 2, \cdots ;\quad n = 1, 2, \cdots)$ をとることになる．k^2 のとり得る値は

$$k^2 = \left(\frac{j'_{mn}}{R} \right)^2 \tag{156}$$

である．

$E_z = 0$ として，$E_r = E_x \cos\theta + E_y \sin\theta$, $E_\theta = -E_x \sin\theta + E_y \cos\theta$, $\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial}{\partial r}$ を考慮すると式 (131c), (131d), (131e), (131f) は

$$E_r = \frac{i\omega\varepsilon}{k^2}\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial \theta} \tag{157a}$$
$$E_\theta = -\frac{i\omega\varepsilon}{k^2}\frac{\partial H_z}{\partial r} \tag{157b}$$
$$H_r = -\frac{i\beta}{k^2}\frac{\partial H_z}{\partial r} \tag{157c}$$
$$H_\theta = -\frac{i\beta}{k^2}\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial \theta} \tag{157d}$$

となる．$H_z = AJ_m(k_{mn}r)\cos m\theta$ として上記の式に代入すると以下のようになる．

$$E_r = -\frac{i\omega\varepsilon}{k^2}\frac{m}{r}AJ_m\left(\frac{j'_{mn}}{R}r\right)\sin m\theta \tag{158a}$$
$$E_\theta = -\frac{i\omega\varepsilon}{k^2}\frac{j'_{mn}}{R}AJ'_m\left(\frac{j'_{mn}}{R}r\right)\cos m\theta \tag{158b}$$
$$E_z = 0 \tag{158c}$$
$$H_r = -\frac{i\beta}{k^2}\frac{j'_{mn}}{R}AJ'_m\left(\frac{j'_{mn}}{R}r\right)\cos m\theta \tag{158d}$$
$$H_\theta = \frac{i\beta}{k^2}\frac{m}{r}AJ_m\left(\frac{j'_{mn}}{R}r\right)\sin m\theta \tag{158e}$$
$$H_z = AJ_m\left(\frac{j'_{mn}}{R}r\right)\cos m\theta \tag{158f}$$

B　空洞共振器

例えば，導波管をある長さのところで切り，両端に導体でふたをするとその中で電磁波が反射を繰り返し，波長の合うものが共振する．このように，閉じた導体中で電磁場の共振を生じさせるものを空洞共振器という．

これは，導波管にふたをしたものに限らず，どのような形のものでも共振を生じさせることができる．定在波加速管はまさにこの空洞共振器である．

B.1　直方体空洞共振器

直方体空洞共振器は，ある長さの矩形導波管の両端に導体でふたをしたものと考えられる．今，図 75 のように x, y, z 座標軸をとり，それぞれの辺の長さが a, b, d であるとする．

これは，z 方向の導波管が $z = 0, d$ で閉じたものと考えると，両端で電磁波が反射し z 方向と $-z$ 方向の波が重なり合い定在波を作る状態である．電磁波が z 方向に進むときは，$\gamma = i\beta$ であるが，$-z$ 方向に進むときは，$\gamma = -i\beta$ である．両端では，$\boldsymbol{E}$ は端面に垂直であるので，$E_x = E_y = 0$ である．

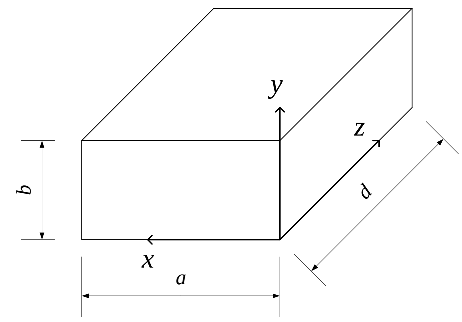


図 75: 直方体空洞共振器

B.1.1　TM モード

矩形導波管の TM モードの結果，式 (137a) から (137f) より，z 方向に進む波（進行波）は

$$E_x = -\frac{i\beta}{k^2}\frac{m\pi}{a}A\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}e^{-i\beta z} \tag{159a}$$
$$E_y = -\frac{i\beta}{k^2}\frac{n\pi}{b}A\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}e^{-i\beta z} \tag{159b}$$
$$E_z = A\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}e^{-i\beta z} \tag{159c}$$
$$H_x = \frac{i\omega\varepsilon}{k^2}\frac{n\pi}{b}A\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}e^{-i\beta z} \tag{159d}$$
$$H_y = -\frac{i\omega\varepsilon}{k^2}\frac{m\pi}{a}A\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}e^{-i\beta z} \tag{159e}$$
$$H_z = 0 \tag{159f}$$

と表され，$-z$ 方向に進む波（後退波）はこの結果の β を $-\beta$ に置き換えたもので表されるので

$$E_x = \frac{i\beta}{k^2}\frac{m\pi}{a}A\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}e^{i\beta z} \tag{160a}$$
$$E_y = \frac{i\beta}{k^2}\frac{n\pi}{b}A\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}e^{i\beta z} \tag{160b}$$
$$E_z = A\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}e^{i\beta z} \tag{160c}$$
$$H_x = \frac{i\omega\varepsilon}{k^2}\frac{n\pi}{b}A\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}e^{i\beta z} \tag{160d}$$
$$H_y = -\frac{i\omega\varepsilon}{k^2}\frac{m\pi}{a}A\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}e^{i\beta z} \tag{160e}$$
$$H_z = 0 \tag{160f}$$

となる．

ところで，

$$-ie^{-i\beta z} + ie^{i\beta z} = i\left(e^{-i\beta z} + e^{i\beta z}\right) = -2\sin\beta z \tag{161}$$

であり，このとき

$$\beta = \frac{p\pi}{d} \quad (p = 0, 1, 2, \cdots) \tag{162}$$

とすると $z = 0, c$ で $\sin\beta z = 0$ となる．したがって，進行波と後退波を足しあわせたとき，$z = 0, c$ で $E_x = E_y = 0$ とするためには式 (162) の条件が必要になる．進行波と後退波の和をとり 2 で割ると以下の結果を得る．

$$E_x = -\frac{1}{k^2}\frac{p\pi}{d}\frac{m\pi}{a}A\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{p\pi z}{d} \tag{163a}$$
$$E_y = -\frac{1}{k^2}\frac{p\pi}{d}\frac{n\pi}{b}A\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{p\pi z}{d} \tag{163b}$$
$$E_z = A\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\cos\frac{p\pi z}{d} \tag{163c}$$
$$H_x = \frac{i\omega\varepsilon}{k^2}\frac{n\pi}{b}A\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\cos\frac{p\pi z}{d} \tag{163d}$$
$$H_y = -\frac{i\omega\varepsilon}{k^2}\frac{m\pi}{a}A\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\cos\frac{p\pi z}{d} \tag{163e}$$
$$H_z = 0 \tag{163f}$$

このとき，

$$\omega^2\varepsilon\mu = k^2 + \beta^2 = \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{d^2}\right)\pi^2 \tag{164}$$

$$(m = 1, 2, \cdots;\ n = 1, 2, \cdots;\ p = 0, 1, 2, \cdots)$$

となる．

B.1.2　TE モード

矩形導波管の TE モードの結果，式 (147a) から (147f) より，z 方向に進む波（進行波）は

$$E_x = \frac{i\omega\mu}{k^2}\frac{n\pi}{b}A\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}e^{-i\beta z} \tag{165a}$$
$$E_y = -\frac{i\omega\mu}{k^2}\frac{m\pi}{a}A\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}e^{-i\beta z} \tag{165b}$$
$$E_z = 0 \tag{165c}$$
$$H_x = \frac{i\beta}{k^2}\frac{m\pi}{a}A\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}e^{-i\beta z} \tag{165d}$$
$$H_y = \frac{i\beta}{k^2}\frac{n\pi}{b}A\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}e^{-i\beta z} \tag{165e}$$
$$H_z = A\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}e^{-i\beta z} \tag{165f}$$

(165g)

と表され，$-z$ 方向に進む波（後退波）は

$$E_x = \frac{i\omega\mu}{k^2}\frac{n\pi}{b}A\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}e^{i\beta z} \tag{166a}$$
$$E_y = -\frac{i\omega\mu}{k^2}\frac{m\pi}{a}A\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}e^{i\beta z} \tag{166b}$$
$$E_z = 0 \tag{166c}$$
$$H_x = -\frac{i\beta}{k^2}\frac{m\pi}{a}A\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}e^{i\beta z} \tag{166d}$$
$$H_y = -\frac{i\beta}{k^2}\frac{n\pi}{b}A\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}e^{i\beta z} \tag{166e}$$
$$H_z = A\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}e^{i\beta z} \tag{166f}$$

(166g)

となる．この場合も進行波と後退波を足しあわせたときに $E_x = E_y = 0$ となるためには，式 (162) の条件が必要になる．

進行波と後退波の和をとると以下の結果を得る．

$$E_x = \frac{i\omega\mu}{k^2}\frac{n\pi}{b}A\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{p\pi z}{d} \tag{167a}$$

$$E_y = -\frac{i\omega\mu}{k^2}\frac{m\pi}{a}A\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{p\pi z}{d} \tag{167b}$$

$$E_z = 0 \tag{167c}$$

$$H_x = -\frac{1}{k^2}\frac{p\pi}{d}\frac{m\pi}{a}A\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\cos\frac{p\pi z}{d} \tag{167d}$$

$$H_y = -\frac{1}{k^2}\frac{p\pi}{d}\frac{n\pi}{b}A\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\cos\frac{p\pi z}{d} \tag{167e}$$

$$H_z = A\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{p\pi z}{d} \tag{167f}$$

(167g)

このとき，

$$\omega^2\varepsilon\mu = k^2 + \beta^2 = \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{d^2}\right)\pi^2 \tag{168}$$

$(m = 0, 1, 2, \cdots;\ n = 0, 1, 2, \cdots;\ p = 1, 2, \cdots;$ ただし，$m = n = 0$ を除く)

となる．

B.2 円筒形空洞共振器

円筒形空洞共振器は，ある長さの円形導波管の両端に導体でふたをしたものと考えられる．今，図 76 のように r, θ, z 座標軸をとり，円の半径を R，高さを h とする．

これは，z 方向の導波管が $z = 0, h$ で閉じたものと考えることができる．

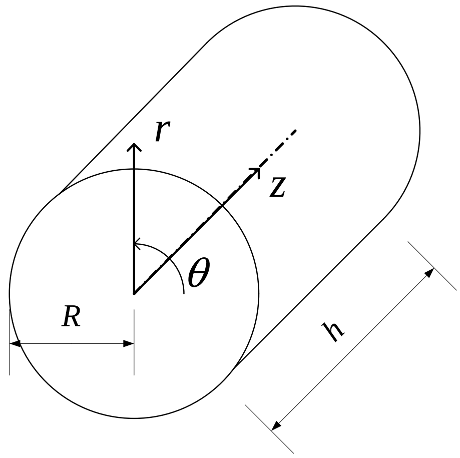


図 76: 円筒形空洞共振器

B.2.1 TM モード

円形導波管の TM モードの結果，式 (153a) から (153f) より，z 方向に進む波（進行波）は

$$E_r = -\frac{i\beta}{k^2}\frac{j_{mn}}{R}AJ'_m\left(\frac{j_{mn}}{R}r\right)\cos m\theta e^{-i\beta z} \tag{169a}$$

$$E_\theta = \frac{i\beta}{k^2}\frac{m}{r}AJ_m\left(\frac{j_{mn}}{R}r\right)\sin m\theta e^{-i\beta z} \tag{169b}$$

$$E_z = AJ_m\left(\frac{j_{mn}}{R}r\right)\cos m\theta e^{-i\beta z} \tag{169c}$$

$$H_r = -\frac{i\omega\varepsilon}{k^2}\frac{m}{r}AJ_m\left(\frac{j_{mn}}{R}r\right)\sin m\theta e^{-i\beta z} \tag{169d}$$

$$H_\theta = -\frac{i\omega\varepsilon}{k^2}\frac{j_{mn}}{R}AJ'_m\left(\frac{j_{mn}}{R}r\right)\cos m\theta e^{-i\beta z} \tag{169e}$$

$$H_z = 0 \tag{169f}$$

と表され，$-z$ 方向に進む波（後退波）は

$$E_r = \frac{i\beta}{k^2}\frac{j_{mn}}{R}AJ'_m\left(\frac{j_{mn}}{R}r\right)\cos m\theta e^{i\beta z} \tag{170a}$$

$$E_\theta = -\frac{i\beta}{k^2}\frac{m}{r}AJ_m\left(\frac{j_{mn}}{R}r\right)\sin m\theta e^{i\beta z} \tag{170b}$$

$$E_z = AJ_m\left(\frac{j_{mn}}{R}r\right)\cos m\theta e^{i\beta z} \tag{170c}$$

$$H_r = -\frac{i\omega\varepsilon}{k^2}\frac{m}{r}AJ_m\left(\frac{j_{mn}}{R}r\right)\sin m\theta e^{i\beta z} \tag{170d}$$

$$H_\theta = -\frac{i\omega\varepsilon}{k^2}\frac{j_{mn}}{R}AJ'_m\left(\frac{j_{mn}}{R}r\right)\cos m\theta e^{i\beta z} \tag{170e}$$

$$H_z = 0 \tag{170f}$$

となる．進行波と後退波を足しあわせたときに $E_r = E_\theta = 0$ となるためには，

$$\beta = \frac{p\pi}{h} \quad (p = 0, 1, 2, \cdots) \tag{171}$$

の条件が必要になる．進行波と後退波の和をとり 2 で割ると以下の結果になる．

$$E_r = -\frac{1}{k^2}\frac{p\pi}{h}\frac{j_{mn}}{R}AJ'_m\left(\frac{j_{mn}}{R}r\right)\cos m\theta\sin\frac{p\pi z}{h} \tag{172a}$$

$$E_\theta = \frac{1}{k^2}\frac{p\pi}{h}\frac{m}{r}AJ_m\left(\frac{j_{mn}}{R}r\right)\sin m\theta\sin\frac{p\pi z}{h} \tag{172b}$$

$$E_z = AJ_m\left(\frac{j_{mn}}{R}r\right)\cos m\theta\cos\frac{p\pi z}{h} \tag{172c}$$

$$H_r = -\frac{i\omega\varepsilon}{k^2}\frac{m}{r}AJ_m\left(\frac{j_{mn}}{R}r\right)\sin m\theta\cos\frac{p\pi z}{h} \tag{172d}$$

$$H_\theta = -\frac{i\omega\varepsilon}{k^2}\frac{j_{mn}}{R}AJ'_m\left(\frac{j_{mn}}{R}r\right)\cos m\theta\cos\frac{p\pi z}{h} \tag{172e}$$

$$H_z = 0 \tag{172f}$$

このとき，

$$\omega^2\varepsilon\mu = k^2+\beta^2 = \left(\frac{j_{mn}}{R}\right)^2+\left(\frac{p^2}{d^2}\right)^2 \tag{173}$$

$$(m=0,1,2,\cdots;\ n=1,2,\cdots;\ p=0,1,2,\cdots)$$

となる．

B.2.2 TE モード

円形導波管の TE モードの結果，式 (158a) から (158f) より，z 方向に進む波（進行波）は

$$E_r = -\frac{i\omega\varepsilon}{k^2}\frac{m}{r}AJ_m\left(\frac{j'_{mn}}{R}r\right)\sin m\theta e^{-i\beta z} \tag{174a}$$

$$E_\theta = -\frac{i\omega\varepsilon}{k^2}\frac{j'_{mn}}{R}AJ'_m\left(\frac{j'_{mn}}{R}r\right)\cos m\theta e^{-i\beta z} \tag{174b}$$

$$E_z = 0 \tag{174c}$$

$$H_r = -\frac{i\beta}{k^2}\frac{j'_{mn}}{R}AJ'_m\left(\frac{j'_{mn}}{R}r\right)\cos m\theta e^{-i\beta z} \tag{174d}$$

$$H_\theta = \frac{i\beta}{k^2}\frac{m}{r}AJ_m\left(\frac{j'_{mn}}{R}r\right)\sin m\theta e^{-i\beta z} \tag{174e}$$

$$H_z = AJ_m\left(\frac{j'_{mn}}{R}r\right)\cos m\theta e^{-i\beta z} \tag{174f}$$

と表され，$-z$ 方向に進む波（後退波）は

$$E_r = -\frac{i\omega\varepsilon}{k^2}\frac{m}{r}AJ_m\left(\frac{j'_{mn}}{R}r\right)\sin m\theta e^{i\beta z} \tag{175a}$$

$$E_\theta = -\frac{i\omega\varepsilon}{k^2}\frac{j'_{mn}}{R}AJ'_m\left(\frac{j'_{mn}}{R}r\right)\cos m\theta e^{i\beta z} \tag{175b}$$

$$E_z = 0 \tag{175c}$$

$$H_r = \frac{i\beta}{k^2}\frac{j'_{mn}}{R}AJ'_m\left(\frac{j'_{mn}}{R}r\right)\cos m\theta e^{i\beta z} \tag{175d}$$

$$H_\theta = -\frac{i\beta}{k^2}\frac{m}{r}AJ_m\left(\frac{j'_{mn}}{R}r\right)\sin m\theta e^{i\beta z} \tag{175e}$$

$$H_z = AJ_m\left(\frac{j'_{mn}}{R}r\right)\cos m\theta e^{i\beta z} \tag{175f}$$

進行波と後退波を足しあわせたときに $E_r = E_\theta = 0$ となるために β は TM モードのときと同じ条件である．進行波と後退波の和をとり $2i$ で割ると以下の結果になる．

$$E_r = \frac{i\omega\varepsilon}{k^2}\frac{m}{r}AJ_m\left(\frac{j'_{mn}}{R}r\right)\sin m\theta\sin\frac{p\pi z}{h} \tag{176a}$$

$$E_\theta = \frac{i\omega\varepsilon}{k^2}\frac{j'_{mn}}{R}AJ'_m\left(\frac{j'_{mn}}{R}r\right)\cos m\theta\sin\frac{p\pi z}{h} \tag{176b}$$

$$E_z = 0 \tag{176c}$$

$$H_r = \frac{1}{k^2}\frac{p\pi}{h}\frac{j'_{mn}}{R}AJ'_m\left(\frac{j'_{mn}}{R}r\right)\cos m\theta\cos\frac{p\pi z}{h} \tag{176d}$$

$$H_\theta = -\frac{1}{k^2}\frac{p\pi}{h}\frac{m}{r}AJ_m\left(\frac{j'_{mn}}{R}r\right)\sin m\theta\cos\frac{p\pi z}{h} \tag{176e}$$

$$H_z = AJ_m\left(\frac{j'_{mn}}{R}r\right)\cos m\theta\sin\frac{p\pi z}{h} \tag{176f}$$

このとき，

$$\omega^2\varepsilon\mu = k^2+\beta^2 = \left(\frac{j_{mn}}{R}\right)^2+\left(\frac{p^2}{d^2}\right)^2 \tag{177}$$

$$(m=0,1,2,\cdots;\ n=1,2,\cdots;\ p=1,2,\cdots)$$

となる．

C 陪周期構造の等価回路

陪周期構造 (bi-periodic structure) とは図 77 のように異なる形の空洞 2 つで 1 周期になっている構造である．広い空洞と狭い空洞が交互に並んでいる構造であり，広い空洞を加速空洞 (Accelerating cavity)，狭い空洞を (Coupling cavity) と呼ぶ．このような構造は定在波型加速管によく使われる．

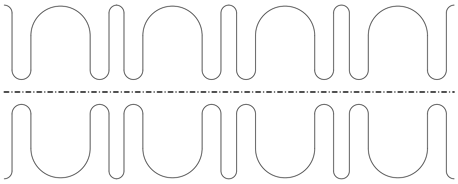
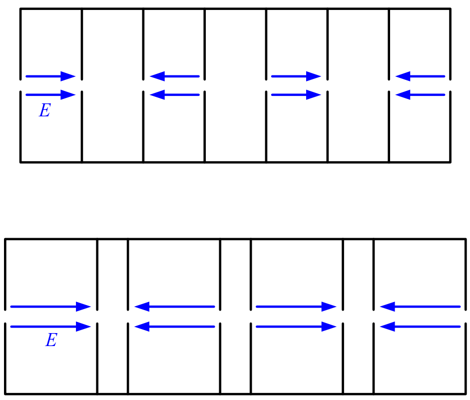


図 77: 陪周期構造加速管の空洞

さて，陪周期構造の加速管の基本的な考え方を説明する．2.4 でも説明したとおり加速管の群速度が高いほうが共振モードが安定するので定在波型加速管では群速度が最大となる $\pi/2$-mode が使われる．しかし，$\pi/2$-mode では図 78(a) のように加速電場をもつ空洞と電場が立たない空洞が交互に並んでしまう．そこで図 78(b) のように電場が立たない空洞を狭くすることで加速効率をあげようとしたものが陪周期構造である．



(a) 周期構造

(b) 陪周期構造

図 78: 周期構造の $\pi/2$-mode と倍周期構造の電場の違い

陪周期構造を等価回路であらわしたものが図 79 である．加速空洞にあたる回路が容量 C_a がついた回路であり，結合空洞にあたる回路が容量 C_c がついた回路である．今，$2n$ 番目の回路が加速空洞，$2n+1$ 番目の回路が結合空洞に対応するとしている．また，ここではより実際の空洞の特性に近づけるために，インダクタンスの結合を隣の隣の回路にまで広げる．すなわち，加速空洞から結合空洞への相互インダクタンスの結合係数を k_1 として，加速空洞から加速空洞までの相互インダクタンスの結合係数を k_2，結合空洞から結合空洞までを k_3 とする．

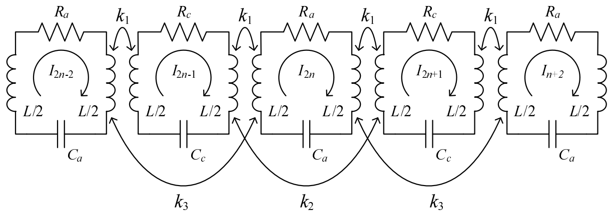


図 79: 陪周期構造等価回路

回路方程式を求めると以下のようになる．

$$\left(R_a + j\omega L + \frac{1}{j\omega C_a}\right) I_{2n} + j\omega k_1 \frac{L}{2}\left(I_{2n-1} + I_{2n+1}\right) + j\omega k_2 \frac{L}{2}\left(I_{2n-2} + I_{2n+2}\right) = 0 \tag{178}$$

$$\left(R_c + j\omega L + \frac{1}{j\omega C_c}\right) I_{2n+1} + j\omega k_1 \frac{L}{2}\left(I_{2n} + I_{2n+2}\right) + j\omega k_3 \frac{L}{2}\left(I_{2n-1} + I_{2n+3}\right) = 0 \tag{179}$$

これを整理すると，

$$\left(1 + \frac{\omega_a}{j\omega Q_a} - \frac{\omega_a^2}{\omega^2}\right) I_{2n} + \frac{k_1}{2}\left(I_{2n-1} + I_{2n+1}\right) + \frac{k_2}{2}\left(I_{2n-2} + I_{2n+2}\right) = 0 \tag{180}$$

$$\left(1 + \frac{\omega_c}{j\omega Q_c} - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) I_{2n+1} + \frac{k_1}{2}\left(I_{2n} + I_{2n+2}\right) + \frac{k_3}{2}\left(I_{2n-1} + I_{2n+3}\right) = 0 \tag{181}$$

となる．ここで，$\omega_a = \frac{1}{\sqrt{L_a C_a}}$，$Q_a = \frac{\omega_a L}{R_a}$，$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{L_c C_c}}$，$Q_c = \frac{\omega_c L}{R_c}$ である．また，損失がない場合は以下のようになる．

$$\left(1 - \frac{\omega_a^2}{\omega^2}\right) I_{2n} + \frac{k_1}{2}\left(I_{2n-1} + I_{2n+1}\right) + \frac{k_2}{2}\left(I_{2n-2} + I_{2n+2}\right) = 0 \tag{182}$$

$$\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) I_{2n+1} + \frac{k_1}{2}\left(I_{2n} + I_{2n+2}\right) + \frac{k_3}{2}\left(I_{2n-1} + I_{2n+3}\right) = 0 \tag{183}$$

ここで，1 周期で位相が ϕ 進み，加速空洞と結合空洞の位相差は $\phi/2$ であるとする．すなわち，

$$I_{2n+m} = I_{2n} e^{j\frac{\phi}{2}m} \tag{184}$$

とおく．これを式 (182),(183) に代入すると，

$$\frac{\omega_a^2}{\omega^2} = 1 + k_1 \cos\frac{\phi}{2} + k_2 \cos\phi \tag{185}$$

$$\frac{\omega_c^2}{\omega^2} = 1 + k_1 \cos\frac{\phi}{2} + k_3 \cos\phi \tag{186}$$

の関係が得られる．また，以下の関係も得られる．

$$k_1^2 \cos^2 \frac{\phi}{2} = \left(1 - \frac{\omega_a^2}{\omega^2} + k_2 \cos\phi\right)\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} + k_3 \cos\phi\right) \tag{187}$$