

# ビーム・ビームキックによる衝突点軌道フィードバックシステム

## 1. はじめに

衝突型加速器では、軌道変動により衝突点で両ビーム間に横方向距離が生じるとルミノシティが低下する。KEKB では、ビーム衝突を維持するためにフィードバックサイクル数秒の軌道フィードバックシステムを運用していた[7]。衝突点でビームの相互位置がずれると相手ビームの電磁場によりビームがキックされる（ビーム・ビームキック）。このキックを衝突点近傍のビーム位置検出器(BPM)で検出しキックが最小になるよう片側ビームの位置をステアリング磁石で調整する。

SuperKEKB では、衝突点での垂直方向ビームサイズ(r.m.s.)の設計値が約 50nm と極めて小さいため、衝突点でのビーム位置の微小な変位がルミノシティの低下につながる。特に衝突点に近い四極磁石の位置変動の影響が厳しい。四極磁石が変位するとビームはダイポールキックを受け閉軌道が変化し衝突点で閉軌道のずれが生じる。計算によれば、磁石の変動と同程度のビーム位置変位が衝突点で起きる。四極磁石の変位についてはシミュレーションや測定が行われており、今の所数 10Hz の振動が主で大きさは 200nm 程度と推定されている。ただし、後で述べるように LER と HER (LER は低エネルギー陽電子リング、HER は高エネルギー電子リングの略称。)の四極磁石が同期して変位すれば、それぞれのビームの衝突点での変位は同方向に同程度となるため衝突点でのビーム間距離は 20nm 程度になる。この変動はルミノシティの劣化を起こす可能性があるが、フィードバックサイクル数秒の KEBK のフィードバックシステムでは対応できないため、数 10Hz の軌道変動を補正するフィードバックシステムを用意することになった (以下このシステムを”速いフィードバック”と呼び、KEKB で運用

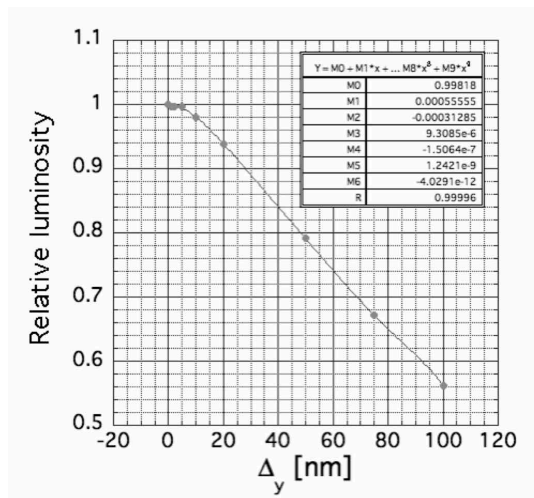


Fig. 1 衝突点での 2 ビーム間の軌道差とルミノシティの減少率 (シミュレーション) [2]。

されたシステムを”遅いフィードバック”と呼ぶことにする)。

この講義では、主として垂直方向の速いフィードバックについて述べるが、遅いフィードバックについても簡単に触れる。速いフィードバックは”速い”と称していても数 10Hz 程度の閉軌道のゆっくりした変動に対処するもので、カップルドバンチ不安定性のような閉軌道周りの速いベータatron振動によるビーム位置変動には無力である (シミュレーションによれば、閉軌道周りのノイズ状の速い振動の方がゆっくりした変動より変動の許容値が約 10 倍厳しい[2])。

また、後に述べるように SuperKEKB でのビーム衝突方式では水平方向ビーム・ビームキックが弱いため、水平方向衝突点軌道フィードバックにはビーム・ビームキックを使わないディザリングという方式が採用されたがこの講義では扱わない。

## 2. ビーム位置変動の推定

衝突点でのビーム間垂直方向軌道差のルミノシティに対する影響はコンピュータシミュレーションで見積もられており[1,2]、衝突点垂直方向ビーム幅(r.m.s.)の 20%(50%)のずれで 2%(10%)のルミノシティロスになる (Fig. 1 を参照)。

Table 1 QC1, QC2 が垂直方向に 1 $\mu\text{m}$  変位したとき衝突点(IP)に生じる閉軌道(COD)[3].

	K [1/m]	Distance from IP [m]	$\beta_Q$ [m]	$\beta_{IP}$ [mm]	$\Delta\psi_y/2\pi$	COD@IP for 1 $\mu\text{m}$ Q-offset [ $\mu\text{m}$ ]
QC1LP	-1.717	0.912	2504.3	0.27	0.24995	-0.706
QC1LE	-1.142	1.390	5462.4	0.3	0.24997	-0.731
QC1RP	-1.712	0.912	2567.7	0.27	0.24996	-0.713
QC1RE	-1.070	1.430	5592.6	0.3	0.24997	-0.693
QC2LP	0.8416	1.909	962.2	0.27	0.25004	0.2145
QC2LE	0.6502	2.679	1923.3	0.3	0.25030	0.2470
QC2RP	0.8392	1.976	924.6	0.27	0.25005	0.2097
QC2RE	0.5557	2.944	1806.9	0.3	0.25004	0.2046

衝突点に最も近い 4 極磁石 QC1LP, QC1LE, QC1RP, QC1RE と、次に近い QC2LP, QC2LE, QC2RP, QC2RE の位置が垂直方向に変位したときの衝突点でのビーム位置変位は、次の閉軌道の計算式から見積もることができる（四極磁石の名称：L(R) は衝突点をリング内側から見て左（右）側、P(E)は LER(HER)の意。）。

$$\Delta y_{IP} = \frac{\sqrt{\beta_Q \beta_{IP}}}{2 \sin \pi \nu_y} \cos(\pi \nu_y - |\Delta \psi_y|) K \Delta y_Q \quad (2-1)$$

ここで  $\Delta y_Q, \Delta y_{IP}, \beta_Q, \beta_{IP}, \nu_y, \Delta \psi_y, K$  はそれぞれ四極磁石の変位、衝突点での垂直軌道のずれ、四極磁石および衝突点でのベータ関数、ベータトロンチューン、衝突点-四極磁石間のベータトロン振動の位相差、四極磁石の K 値である。QC1 については、 $\Delta \psi_y \sim \pi/2, \beta_Q \sim L^2 / \beta_{IP}$  より、おおよそ、

$$\Delta y_{IP} \sim \frac{1}{2} L K \Delta y_Q \quad (2-2)$$

となる。L は衝突点と四極磁石間の距離である。QC1LP での値  $L=0.91\text{m}, K=-1.7\text{m}^{-1}$  を使うと  $\Delta y_{IP} = -0.77 \Delta y_Q$  となり四極磁石の変位と同程度のビーム変位が衝突点に生じることが分かる。

(2-1)式により QC1,2 が 1 $\mu\text{m}$  変位したときの衝突点でのビーム位置変位について計算された結

果を Table 1 に示す[3]。この結果から QC1(QC2)では、変位の 70%(20%)程度のビーム位置変位が衝突点に生じることがわかる。QC1 の影響が QC2 よりも大きい。また、L 側の HER 用 QC1LE と LER 用 QC1LP の結果を見ると両磁石が同じ方向に同じ量変位したとき衝突点での軌道変位がほぼ同じになることがわかる。このことは、R 側の QC1 についても、また両側の QC2 についても同様である。つまり、LER と HER の同種の磁石と一緒に動けば、衝突点でのビーム間距離は磁石が別々に相関なしに変位した

ときの約 5%(QC1 の場合)に減少する。磁石の振動の振幅だけでなく磁石間の振動位相が重要である。SuperKEKB の QC1, QC2 は L 側、R 側それぞれ同じ移動架台に載っているため、床振動による磁石の振動については、L 側、R 側の磁石がそれぞれ同じ位相で振動することが期待できる。

SuperKEKB では、衝突点ベータ関数を変えるとき通常 QC1, QC2 の K 値は変えない。衝突点と

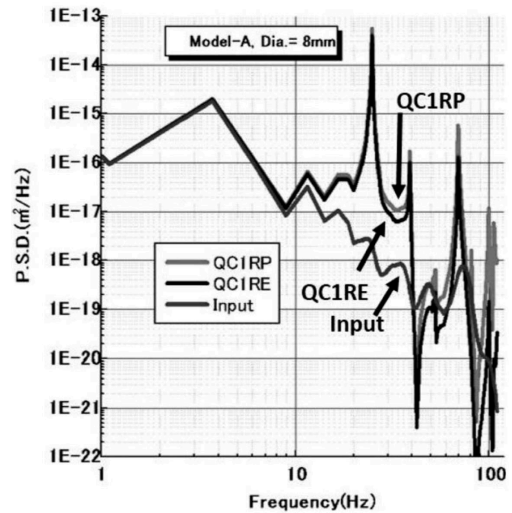


Fig. 2 QC1RP, QC1RE の振動のパワースペクトラム密度(P.S.D.) (シミュレーション) [4].

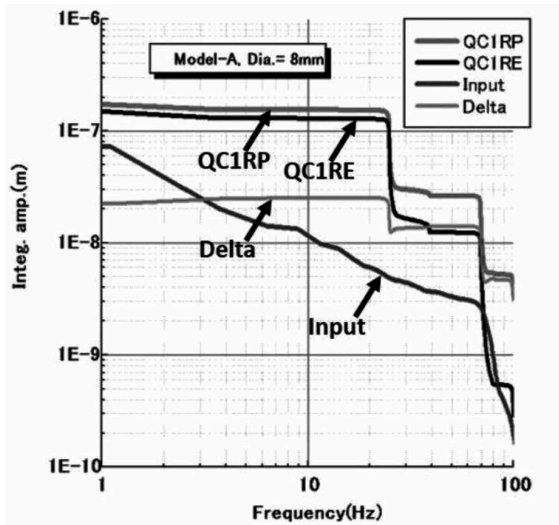


Fig. 3 QC1RP, QC1RE の振動の積分振幅 (シミュレーション) [4]。

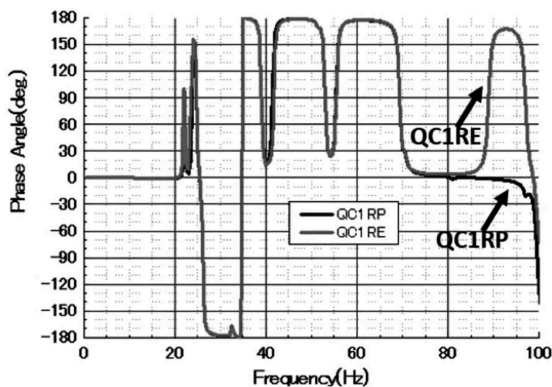


Fig. 4 周波数応答解析より求めた QC1RP と QC1RE の振動位相[4]。

QC1, QC2 間の転送行列は変わらないので表の閉軌道値(cod 値)は衝突点ベータ関数の大きさにかかわらず成り立つ。

磁石の振動評価は、計算機シミュレーションや実機の振動測定により行われている[4]。Fig. 2 に QC1RP と QC1RE の垂直方向振動のパワースペクトラム密度(P.S.D.)のシミュレーション値を、Fig. 3 に積分振幅のシミュレーション値を示す。周波数  $f$  での積分振幅とはパワースペクトラム密度を高周波数側から  $f$  まで積分した量の平方根であり、積分範囲の振動成分による振動振幅の r.m.s. 値である。シミュレーションは有限要素法

解析プログラム ANSYS によって行われ、床振動の測定データ (Fig. 2 の "Input") を入力し磁石の振動を計算する。Fig. 4 には、周波数応答解析から求めた QC1RP と QC1RE の位相を示す。およそ 80 Hz までは互いに同じ位相で振動している。P.S.D.を見ると 20 数 Hz と 70 Hz 付近にピークがある。この周波数近傍の振動による振動振幅は、この振動がそれより高い周波数領域で支配的なら、おおよそ積分振幅の段差の大きい側に等しい。20 数 Hz の変動では約 200nm である。この周波数では QC1RP と QC1RE は同位相で振動しているから、衝突点でのビーム間距離は 20nm 程度と見積もられる。このとき、ルミノシティロスは 6% 程度である。70 Hz の振動振幅は、20 数 Hz の振動より一桁程度小さい。QC1LP, QC1LE についても同様の解析が行われ、R 側よりも振動が小さいという結果が得られている。

以上まとめると、QC1, QC2 の振動に対処するにはフィードバックシステムとしては 50 Hz 程度以下の振動をダンプする性能を有すれば良いことになる。

### 3. ビーム・ビームキック

Table 2 に SuperKEKB のパラメータを示す。SuperKEKB はナノビーム方式[5]を採用しており 2 ビームは衝突点で水平方向に 83mr の交差角をもって衝突する。このとき、相手のビームから受けるキック (ビーム軌道の角度変化) は、2 ビーム間の距離  $\Delta x^*$ ,  $\Delta y^*$  が小さい時以下のように書ける。

$$\Delta x^{*p,e} = \frac{2\pi}{\beta_x^{*p,e}} \xi_x^{p,e} \Delta x^* \quad (3-1)$$

$$\Delta y^{*p,e} = \frac{2\pi}{\beta_y^{*p,e}} \xi_y^{p,e} \Delta y^* \quad (3-2)$$

ここで、上付き文字 p(e) は、陽電子 (電子) 側の量を表す。\* は衝突点(IP)での量を、x(y) は水平 (垂直) ビーム位置を、プライム(′) は角度を表す。 $\xi_{x,y}^{p,e}$  はビーム・ビームパラメータと呼ばれる量で、以下のように与えられる[6]。

Table 2 SuperKEKB のパラメータ。

	LER	HER	
Beam Energy(E)	4.000	7.007	GeV
Half Crossing Angle ( $\phi_x$ )	41.5		mrad
Emittance ( $\epsilon_x$ )	3.2	4.6	nm
Emittance ratio( $\epsilon_y/\epsilon_x$ )	0.27	0.28	%
Beta Function at IP( $\beta_x^*/\beta_y^*$ )	32 / 0.27	25 / 0.30	mm
Beam Current(I)	3.6	2.6	A
Number of Bunches/ring ( $n_b$ )	2500		
Bunch Length ( $\sigma_z$ )	6.0	5.0	mm

$$\xi_x^{p,e} = \frac{r_e N^{e,p}}{2\pi\gamma^{p,e}} \frac{\beta_x^{*p,e}}{\sigma_{x,eff}^{*e,p} (\sigma_{x,eff}^{*e,p} + \sigma_y^{*e,p})} \quad (3-3)$$

$$\xi_y^{p,e} = \frac{r_e N^{e,p}}{2\pi\gamma^{p,e}} \frac{\beta_y^{*p,e}}{\sigma_y^{*e,p} (\sigma_{x,eff}^{*e,p} + \sigma_y^{*e,p})} \quad (3-4)$$

$$\sigma_{x,eff}^* = \sqrt{(\sigma_x^*)^2 + (\sigma_z \phi_x)^2} \quad (3-5)$$

N はバンチ内粒子数、 $\gamma$  はローレンツ因子、 $r_e$  は古典電子半径、 $\phi_x$  は交差角の半分の角度である。正面衝突の場合は、 $\sigma_{x,eff}^* = \sigma_x^*$  である。

表の SuperKEKB の設計パラメータを使うと、

$$\sigma_x^{*p} \sim 10\mu\text{m}, \sigma_x^{*e} \sim 11\mu\text{m}$$

$$\sigma_y^{*p} \sim 48\text{nm}, \sigma_y^{*e} \sim 62\text{nm}$$

$$\sigma_{x,eff}^{*p} \sim 250\mu\text{m}, \sigma_{x,eff}^{*e} \sim 210\mu\text{m}$$

$$\xi_x^p = 0.0027, \xi_x^e = 0.0012$$

$$\xi_y^p = 0.078, \xi_y^e = 0.073$$

となる。また、衝突点でのビーム間距離が  $\sigma_{x,y}^*$  のとき、衝突点から 0.5m 離れたところにある BPM での軌道変化は、x 方向で約  $2\mu\text{m}$ 、y 方向で約  $45\mu\text{m}$  となる。衝突点での軌道を  $1/10 \sigma_y^*$  程度に制御するために BPM に要求される分解能は  $1\mu\text{m}$  程度である。ナノビーム方式では、正面衝突方式と比べて  $\xi_x$  が小さいためビーム・ビームキックの測定が難しくなる。SuperKEKB では、x 方向

の衝突点軌道フィードバックにはビーム・ビームキックを使わず、ビームの水平位置を約 80Hz でわずかに振動させその時のルミノシティ変化を見て衝突点ビーム位置を調整するディザリングという方式を採用している。

次に、フィードバックの目標値に用いているカノニカルキックとカノニカル角について述べる。Fig. 5 のような座標系を取ると、次の関係式が成り立つ[7]。

$$\Delta y_e'^* = y_e'^{*a} - y_e'^{*b}$$

$$\Delta y_p'^* = y_p'^{*a} - y_p'^{*b}$$

$$y_e^A = m_{33}^A y_e^* + m_{34}^A y_e'^{*a}$$

$$y_e^B = m_{33}^B y_e^* + m_{34}^B y_e'^{*b}$$

$$y_p^C = m_{33}^C y_p^* + m_{34}^C y_p'^{*a}$$

$$y_p^D = m_{33}^D y_p^* + m_{34}^D y_p'^{*b}$$

$$\Delta y_e'^* = -k_e \Delta y^* = -\frac{2\pi}{\beta_y^*} \xi_y^e \Delta y^*$$

$$\Delta y_p'^* = k_p \Delta y^* = \frac{2\pi}{\beta_y^*} \xi_y^p \Delta y^*$$

$$\Delta y^* = y_e^* - y_p^* \quad (3-6)$$

ここで、上付き文字 A,B,C,D は、それぞれ電子用下流側 BPM、電子用上流側 BPM、陽電子用下流

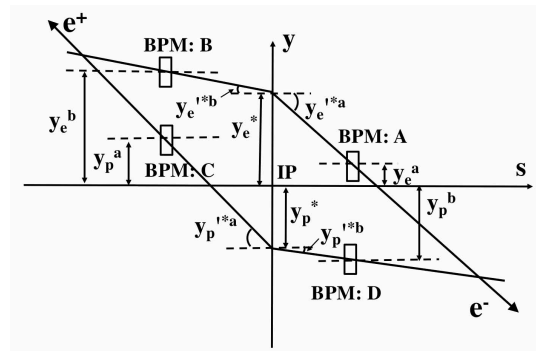


Fig. 5 カノニカルキックとカノニカル角を求めるための座標系。

側 BPM、陽電子用上流側 BPM を表す。上付き文字 a(b)は衝突前(後)の量を、下付き文字 e(p)は電子(陽電子)を表す。mA,B,C,Dは衝突点 IP から BPM A,B,C,D までの 4x4 転送行列である(転送されるベクトルは(x,x',y,y'))。

以上の式から、BPM での軌道と衝突点での 2 ビーム間の距離を関係づける、衝突点でのビーム軌道の角度を含まない、カノニカルキック  $\Delta y'^{*}_{can}$  の式が次のように求まる。

$$\Delta y'^{*}_{can} \equiv \Delta y'^{*}_{bb,e} - \Delta y'^{*}_{bb,p} = -K_y \Delta y^* \quad (3-7)$$

$$\Delta y'^{*}_{bb,e} \equiv \frac{\frac{y_e^A}{m_{34}^A} - \frac{y_e^B}{m_{34}^B}}{m_e} = \frac{\Delta y'_e}{m_e} + y_e^*$$

$$\Delta y'^{*}_{bb,p} \equiv \frac{\frac{y_p^C}{m_{34}^C} - \frac{y_p^D}{m_{34}^D}}{m_p} = \frac{\Delta y'_p}{m_p} + y_p^*$$

$$K_y = \frac{k_e}{m_e} - \frac{k_p}{m_p} - 1$$

$$m_e = \frac{m_{33}^A}{m_{34}^A} - \frac{m_{33}^B}{m_{34}^B}, m_p = \frac{m_{33}^C}{m_{34}^C} - \frac{m_{33}^D}{m_{34}^D}$$

衝突点から BPM までがドリフト空間で BPM-衝突点間距離 L が 4 つの BPM で等しいとき近似的に、

$$\Delta y'^{*}_{can} \sim -L k_{e,p} \Delta y^* \quad (3-8)$$

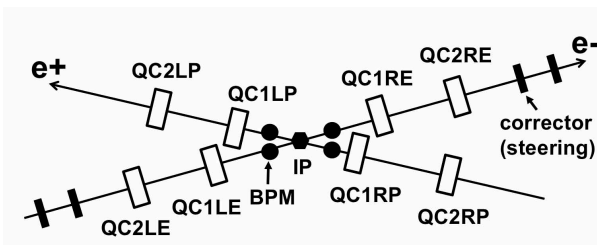


Fig. 6 フィードバックシステム機器のトンネル内配置。

となり、カノニカルキックはビーム・ビームキックによる BPM での軌道ずれにおおよそ等しくなる。

2 ビーム間の衝突時交差角と BPM での軌道を関係づけるカノニカル角  $\theta^*_{y,can}$  についても以下のよう求められる。

$$\theta^*_{y,can} \equiv \frac{\frac{y_e^A}{m_{33}^A} - \frac{y_e^B}{m_{33}^B}}{n_e} + \frac{\frac{y_p^C}{m_{33}^C} - \frac{y_p^D}{m_{33}^D}}{n_p} \quad (3-9)$$

$$= \left( \frac{-k_e}{1 - \frac{m_{33}^A}{m_{34}^A} \frac{m_{34}^B}{m_{33}^B}} + \frac{k_p}{1 - \frac{m_{33}^C}{m_{34}^C} \frac{m_{34}^D}{m_{33}^D}} \right) \Delta y^* + (y_e'^{*b} + y_p'^{*b})$$

$$n_e = \frac{m_{34}^A}{m_{33}^A} - \frac{m_{34}^B}{m_{33}^B}, n_p = \frac{m_{34}^C}{m_{33}^C} - \frac{m_{34}^D}{m_{33}^D}$$

$\Delta y^* = 0$  のとき、 $\theta^*_{y,can}$  は 2 ビーム間の衝突時交差角に等しい。 $\Delta y^* \neq 0$  の時は右辺第一項が誤差になるが、衝突点から BPM までがドリフト空間のとき、

$$\frac{1}{2}(k_p - k_e) \Delta y^*$$

であり、ビーム間距離のフィードバックで  $\Delta y^*$  を  $1/10\sigma_y^* \sim 5\text{nm}$  以下に抑えているとすれば、誤差は  $0.6\mu\text{rad}$  程度である。

#### 4. フィードバックシステムの構成

Fig. 6 に衝突点周りに設置されたフィードバック機器の鳥瞰図を示す。衝突点(IP)から約 0.5m 離

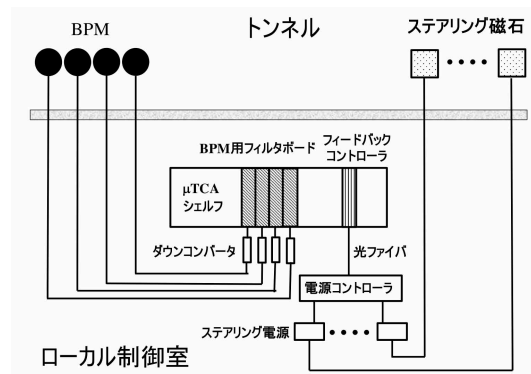


Fig. 7 フィードバックシステム構成要素の配置。

れたところに衝突点を挟んで両側に各リング 2 台ずつ計 4 台の BPM がある。衝突点の垂直軌道は HER に置かれた計 8 台のステアリング磁石で制御される。BPM の検出回路、フィードバックコントローラ、ステアリング電源コントローラ、ステアリング磁石電源は筑波実験室地下 4 階の制御室に置かれている。Fig. 7 にシステム構成要素の配置を示す。

#### 4.1. ビーム位置モニタ(BPM)

##### 4.1.1. BPM 電極と信号レベル

BPM は 4 つのボタン電極をもつ静電型のモニタで、電極は、チェンバ径 20mm のチェンバに水平面から測って 45,135,225,315 度方向に取り付けてある[8]。Fig. 8 にボタン電極の断面図を示す。ボタン電極は電極が受けるビームパワーを減らすために径 1.8mm のロッドにしてある。真空シールとロッドのサポートのためにはアルミナが用いられている。ボディとロッドはチタン製で、キュープロニッケル(Cu-Ni)のフランジにろう付けされている。ビームチェンバは銅製なので、ボタンプロックはチェンバに電子溶接される。ヘッドとケーブルとの接続には熱膨張による電氣的接触の悪化を避けるためリバースタイプの SMA コネクタが用いられている。

BPM の電極で発生する電圧波形は次式で表される[9]。

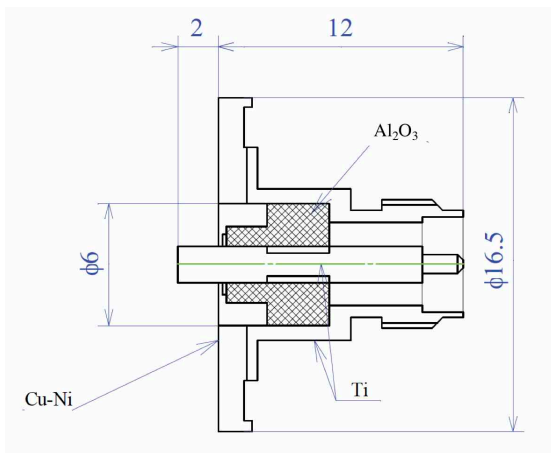


Fig. 8 BPM 用ボタン電極[8]。

$$v(t) = \frac{l}{2\pi a C} \int_{t_0}^t \frac{dq(t')}{dt'} \exp\left[-\frac{t-t'}{CR}\right] dt' \quad (4-1)$$

$$\frac{dq(t)}{dt} = \frac{\sqrt{2}Nec}{\sqrt{\pi}\sigma_z} \exp\left[-\frac{l^2}{8\sigma_z^2}\right] \exp\left[-\frac{(z_c - z_0(t))^2}{2\sigma_z^2}\right] \times \sinh\left[-\frac{(z_c - z_0(t))l}{2\sigma_z^2}\right]$$

ここで、 $C, R, l, a, q(t)$  は電極とビームパイプ間の静電容量、負荷抵抗、電極長、ビームパイプ半径、電極に誘起される電荷量である。また、 $z_c$  は電極の中心座標、 $z_0(t)$  はバンチの中心位置であり、 $\sigma_z, N, e, c$  はバンチ長、バンチ内電子数、素電荷、光速である。

(4-1)式を用い、BPM の電極容量を 0.3pF と仮定すると、3.6A、バンチ数 2500 のとき電極端に発生する信号は Fig. 9 の様になる。また、電極部を通過する平均信号パワーは、

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{v(t)^2}{R} dt \quad (4-2)$$

より、バンチ 間隔 4ns の場合、0.81W となる。検出周波数 509MHz でのパワーは電圧波形をフーリエ解析することで求めることができ-4.3dBm である。電極から信号処理回路までのケーブルロスは L 側、R 側でそれぞれ-13.2 および-9.0dB なので信号処理回路入り口での信号レベルは、L 側、

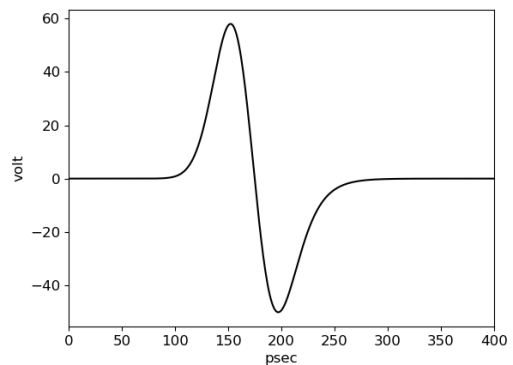
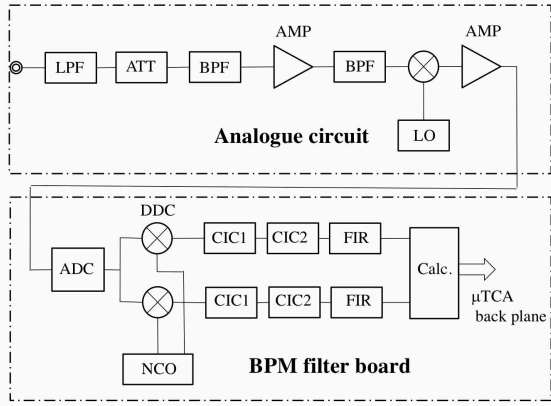


Fig. 9 BPM 電極端での電圧波形。



**Fig. 10 BPM 検出器のブロック図 (1 チャンネル分、LPF: low-pass filter, ATT: attenuator, BPF: band-pass filter, Amp: amplifier, LO: local oscillator, DDC: digital down converter, NCO: numerically controlled oscillator)。**

R 側でそれぞれ-17.5 および-13.3dBm である (dB については付録 1 を参照。)

#### 4.1.2. 信号処理回路と信号対雑音比(SNR)

Fig. 10 に信号処理回路のブロック図を示す。ビーム信号の 509MHz 成分を 16.9MHz の中間周波数(IF)にアナログダウンコンバートした後 AD 変換し、AD 変換されたデジタル信号を Digital Down Converter(DDC) でベースバンドに変換後デジタルフィルタで帯域制限する。このとき、信号パワーから期待される信号対雑音比 (SNR)は以下のように評価される[10]。

##### 1)熱雑音による SNR

アナログ回路出力端(IF out)での熱雑音による SNR を求める。アナログ回路入力端での信号および雑音パワー、出力端での信号および雑音パワーをそれぞれ  $S_i, N_i, S_o, N_o$  とすると、次の関係がある。

$$S_o / N_o = \frac{1}{F} (S_i / N_i) \quad (4-3)$$

ここで、F は雑音指数と呼ばれる量で、アナログ回路中で発生する雑音の指標である。熱雑音のパワー $N_i$ は、 $N_i = k_B T B$  と書ける。ここで、 $k_B, T, B$

はそれぞれボルツマン定数、絶対温度、熱雑音のバンド幅である。 $T=300K$  とし B にサンプリング周波数  $F_s$  の ADC への入力バンド幅  $F_s/2=49.2MHz$  を代入すると、 $N_i = -96.9dBm$  となる。出力端(IF out)での SN 比は  $F[dB]=35.7dB$  より、

$$\begin{aligned} (S_o / N_o)[dB] &= S_i[dBm] - (F[dB] + N_i[dBm]) \\ &= S_i[dBm] + 61.2[dBm] \end{aligned}$$

となる。

##### 2)ADC 出力の SNR

ADC 入力端での信号および雑音パワー、出力端での信号および雑音パワーをそれぞれ  $S_i, N_i, S_o, N_o$  とすると、次の関係がある。

$$\begin{cases} S_o = S_i \\ N_o = N_i + N' \end{cases} \quad (4-4)$$

ここで、 $N'$ は ADC で発生する雑音で、ADC 固有のダイナミック性能による  $N(\text{dynamic})$ とサンプリング時間ジッタによる  $N(\text{jitter})$ に分けられる。ダイナミック性能による  $SNR(\text{dynamic})$ は ADC のデータシートより、

$$SNR(\text{dynamic})[dB] = S_i / N(\text{dynamic})[dB] = 77dB$$

である。サンプリング時間ジッタによる  $SNR(\text{jitter})$ は、入力信号  $V$  を  $V = A \sin(2\pi F_{\text{signal}} t)$  とするとき、

$$\Delta V = A \cdot 2\pi F_{\text{signal}} \cos(2\pi F_{\text{signal}} t) \Delta t \quad (4-5)$$

より、

$$SNR(\text{jitter}) = V_{r.m.s} / \Delta V_{r.m.s} = 1 / (2\pi F_{\text{signal}} \sigma_{\text{jitter}}) \quad (4-6)$$

となる。ここで、 $\sigma_{\text{jitter}}$ はサンプリング時間ジッタの r.m.s.値である。 $\sigma_{\text{jitter}}$ は IF 回路出力信号のジッタ $\sigma_{\text{IF}}$ とサンプリングクロックジッタ $\sigma_{\text{clock}}$ の二乗和であり、

$$\sigma_{\text{jitter}} = \sqrt{\sigma_{\text{IF}}^2 + \sigma_{\text{clock}}^2} \quad (4-7)$$

である。今の場合、 $F_{\text{signal}}=F_{\text{IF}}=16.9\text{MHz}$ 、 $\sigma_{\text{IF}}=31.66\text{ps}$ 、 $\sigma_{\text{clock}}=1.2\text{ps}$  より、

$$\text{SNR}(\text{jitter})[\text{dB}] = 49.46\text{dB}$$

となる。

ADC 出力の SNR(ADC)は、(4-4)式より、

$$(S_o / N_o)_{\text{ADC}} = 1 / \left( \frac{1}{\text{SNR}(\text{ADC input})} + \frac{1}{\text{SNR}(\text{dynamic})} + \frac{1}{\text{SNR}(\text{jitter})} \right) \quad (4-8)$$

と書ける。ここで、

$$\text{SNR}(\text{ADC input}) = (S_i / N_i)_{\text{ADC}} = (S_o / N_o)_{\text{IF out}}$$

である。

### 3) デジタルフィルタのプロセッシングゲイン

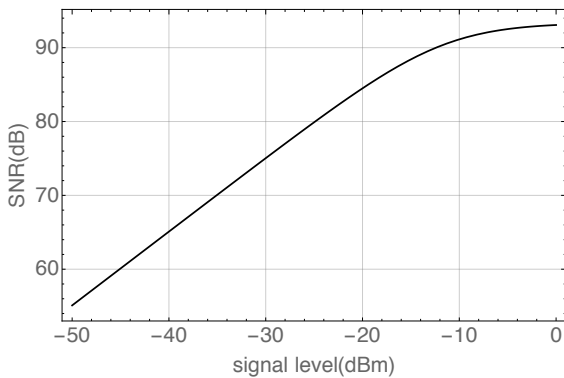


Fig. 11 BPM 検出器入力の信号レベルと出力での信号対雑音比。

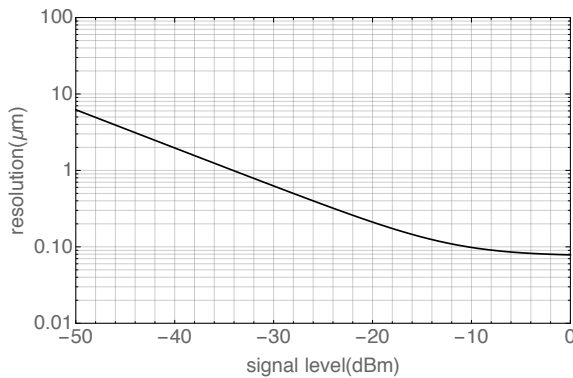


Fig. 12 BPM 検出器入力の信号レベルと位置分解能。

雑音の周波数分布が一樣とする。フィルタの遮断周波数を  $F_c$  とすると、サンプリング周波数  $F_s$  でサンプルした信号の帯域幅は  $F_s/2$  だから、フィルタ通過前の雑音パワー  $P_N$  と通過後の雑音パワー  $P'_N$  の関係は、 $P'_N = (2F_c / F_s) P_N$  となる。フィルタ通過後の SNR は、dB 表示で

$$\text{SNR}[\text{dB}] = (S_o / N_o)_{\text{ADC}} [\text{dB}] - 10 \log(F_s / (2F_c)) [\text{dB}] \quad (4-9)$$

となる。今の場合、 $F_s=98.4\text{MHz}$ 、 $F_c=2\text{kHz}$  より、 $10 \log(F_s / (2F_c)) = 43.9\text{dB}$  である。

位置分解能  $\sigma$  (resolution)は、チェンバ半径を  $R$  とすると、

$$\sigma(\text{resolution}) = \frac{1}{2} \frac{R}{\sqrt{2}} \frac{1}{\text{SNR}} \quad (4-10)$$

で与えられる (付録 2 参照)。アナログ回路への信号入力レベルと SNR の関係を Fig. 11 に、信号入力レベルと分解能の関係を Fig. 12 に示す。設計電流値では約  $0.2\mu\text{m}$  の分解能が得られる。Fig. 11 で SNR が飽和するのは ADC サンプリング時間ジッタの SNR が効いてくるためである。

#### 4.1.3. 信号処理回路の詳細

Fig. 10 に示すように、信号処理回路はアナログ処理部とデジタル処理部の 2 つの部分で構成されている [11]。アナログ処理部では、ビーム信号はダウンコンバータによって  $16.9\text{MHz}$  の IF 信号に変換され ADC に送られる。又、RF 信号を基準入力として PLL によってサンプリングクロック、Local 信号が生成される。デジタル処理部は  $\mu\text{TCA}$  規格のボード (BPM 用フィルタボード) に収められている。ADC によるデータ取得、DDC による IF-ベースバンド変換 (I/Q 検波)、2 段の CIC (Cascaded Integrator-Comb) フィルタ (CIC1, CIC2) および 低域通過型 FIR (Finite Impulse Response) フィルタによる帯域制限、ならびに絶対値計算と位置計算が行なわれ、位置情報は  $32\text{kHz}$  のレートでフィードバックコントロ



ーラに送られる。これら全ての処理は、ボード上の FPGA(Xilinx Vertex 5[12])で実行され、データ通信やデータの読み出しは、SuperKEKB のコントロールシステムである EPICS の IOC 経由で行なわれる。EPICS IOC は FPGA に内蔵されたハードコアの PowerPC 上の Linux で動作する。以上のデジタル処理は KEKB で開発された低レベル RF システム用の制御基板を基にしている[13]。

デジタルフィルタは 2 段の CIC フィルタと FIR から構成される。デジタルフィルタに要求される周波数帯域幅は数百 Hz 以下なので、ADC でサンプリングされたデータについて CIC フィルタでデシメーション（データの間引き）を行ってデータ量を落としたあと、FIR でフィルタ特性を決定する方式となっている。

### 1)CIC フィルタ

CIC フィルタはカスケード接続された積分器(Integrator)と楕形(Comb)フィルタから構成され、デシメーションと低域通過型フィルタの機能を同時に実現できる。乗算を使わず加減算のみで構成できるため高速であり、計算に使うリソースも少なくすむ。Fig. 13 に CIC フィルタ[14]のブロック図を示す。x[n]を入力、y[n]を出力とすると、積分器は次の差分方程式で表される。

$$y[n] = y[n-1] + x[n] \quad (4-11)$$

この式を z 変換（付録 3 参照。）すると、

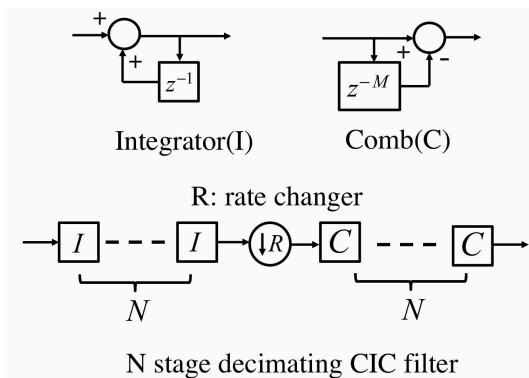


Fig. 13 CIC フィルタのブロック図。

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + X(z)$$

より、

$$Y(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} X(z)$$

となり、伝達関数は、

$$H_I(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad (4-12)$$

となる。同様に、楕形フィルタの差分方程式は、デシメーション後のレート(Fs/R)で、

$$y[n] = x[n] - x[n-M] \quad (4-13)$$

となる。ここで、R はレート変換ファクタ（間引き数）である。また、M は differential delay と呼ばれ通常は 1 か 2 に制限される。z 変換すると伝達関数は、 $1-z^{-M}$  となるが、デシメーション前のレート(Fs)に等価変換すると（付録 4 参照。）、

$$H_C(z) = 1 - z^{-RM} \quad (4-14)$$

となる。CIC フィルタの伝達関数は、サンプリングレート Fs のとき、

$$H(z) = H_I^N(z)H_C^N(z) = \frac{(1-z^{-RM})^N}{(1-z^{-1})^N} = \left[ \sum_{k=0}^{RM-1} z^{-k} \right]^N \quad (4-15)$$

となる。周波数応答は、(4-15)式に  $z = e^{j(2\pi F_m/F_s)}$  を代入することで、

$$|H(z)| = \left| \frac{\sin \pi Mf}{\sin(\pi f/R)} \right|^N \quad (4-16)$$

となる。ここで  $f \equiv F_m / (F_s / R)$ ,  $f/R = F_m / F_s$  であり、 $F_m$  はフィルタへの入力信号の周波数である。R が大きい時は、

$$|H(z)| \approx \left| RM \frac{\sin \pi Mf}{\pi Mf} \right|^N \quad \text{for } 0 \leq f < 1/M \quad (4-17)$$

と近似される。Table 3 に CIC1, CIC2 のパラメータを、Fig. 14 に周波数特性を示す。

### 2)FIR フィルタ

Table 3 CIC1,2 のパラメータ。

	CIC1	CIC2
ステージ数(N)	5	5
Differential delay(M)	1	1
デシメーション(R)	32	96
処理レート(MHz)	98.398	3.106

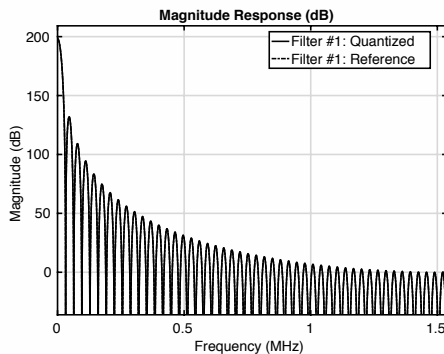
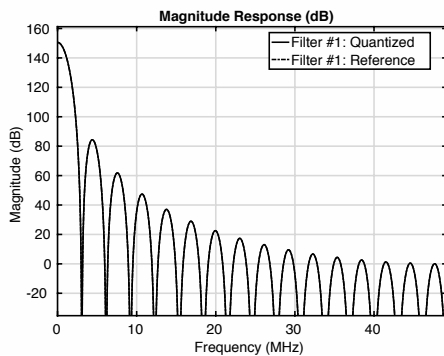


Fig. 14 CIC1 (上)、CIC2 (下) の周波数特性。

FIR には等リップルフィルタを用いている [15,16]。等リップルフィルタは、例えばカイザー窓関数法に比べて同じ減衰量を与えるフィルタ長を小さくできるため [16] 採用されている。等リップルフィルタでは、フィルタ特性を余弦関数  $P(\omega)$  で近似し、所望特性  $D(\omega)$  との誤差  $E(\omega)$  の最大値が最小になるように  $P(\omega)$  を求める (min-max 近似)。ここで、 $\omega$  は周波数  $F$  のときの正規化角周波数  $\omega = 2\pi F/F_s$  である ( $F_s$  は FIR の処理レート

で 32kHz)。具体的にはタイプ 1 (フィルタ長  $N$  が奇数、インパルス応答が偶対称) の FIR の場合、

$$E(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega}) [D(e^{j\omega}) - P(e^{j\omega})] \quad (4-18)$$

$$P(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} a(n) \cos n\omega \quad (4-19)$$

より  $\min(\max[E(e^{j\omega})])$  を満たす  $a(n)$  を求める [15,16]。交番定理 [15] により、誤差特性についてリップルの最大値が等しい等リップル特性になる。解を求めるために Remez のアルゴリズム [15] が用いられるがここでは説明を省略する。Table 4 に等リップルフィルタのパラメータ (パラメータの意味については Fig. 15 を参照。) を、Fig. 16 にその周波数特性を示す。Fig. 17 にこのフィルタのインパルス応答 (フィルタ係数) を示す。

このフィルタは位相特性が、

$$\theta(\omega) = -[(N-1)/2]\omega, \quad \omega = 2\pi F / F_s \quad (4-20)$$

Table 4 FIR のパラメータ。

フィルタ長(N)	73
通過帯域開始位置での周波数( $f_{pass}$ )	0.01875
阻止帯域終端での周波数( $f_{stop}$ )	0.0709
通過帯域内で許容されるリップル量( $A_{pass}$ )	0.1dB
阻止帯域での減衰量( $A_{stop}$ )	80dB

( $f$  は正規化周波数)

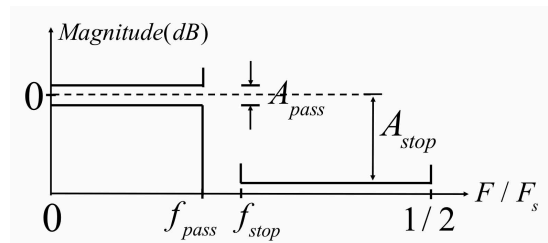


Fig. 15 FIR パラメータの定義。

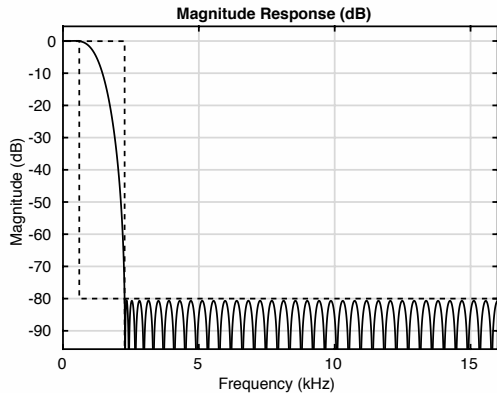


Fig. 16 等リップルフィルタの周波数特性。

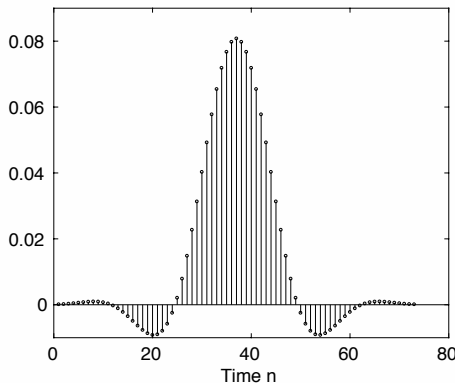


Fig. 17 FIR フィルタのインパルス応答。

の線形位相特性を持ち (付録 5 参照。), 位相遅延と群遅延が等しくなる。遅延は生ずるが入力波形は崩れない。群遅延 $\tau$ はタイプ 1 の FIR では、

$$\tau = -(d\theta / d\omega) / F_s = (N - 1) / 2 / F_s \quad (4-21)$$

である。今使用しているフィルタのパラメータでは $\tau=1.1\text{ms}$ である。

#### 4.2. フィードバックコントローラ

Fig. 18 にフィードバックコントローラのブロック図を示す。BPM 用フィルタボードから Aurora 規格の高速シリアルデータ転送で送られる 4 台の BPM の位置情報を入力し、FPGA(Xilinx Vertex 5[12])によってフィードバックの計算を行いステアリング磁石のキック角を出力する。フィ

ードバックの経路としてカノニカルキックとカノニカル角の 2 経路がある。出力レートは 32kHz である。FPGA でのフィードバックの計算 (現在は PID 制御) は、変更が容易なように、MATLAB/Simulink[17]にリンクした Xilinx System Generator を使ってコーディングできる。コントローラで計算されるカノニカルキックとカノニカル角は 4096 データ長のバッファに保存され、後で読み出すことでフィードバック性能の評価ができる。コントローラは  $\mu$ TCA 規格のボードであり [18]、PowerPC 上の Linux で動作する EPICS IOC を内蔵している。

Fig.19 に PID (Proportional-Integral-Derivative)コントローラのブロック図を示す。誤差入力  $e[n]$ ,制御出力  $u[n]$ の  $z$  変換を  $E(z),U(z)$ 、コントローラの  $z$  変換を  $C(z)$ とすると、

$$U(z) = K_p (U_p(z) + U_i(z) + U_d(z)) E(z) \quad (4-22)$$

$$\begin{cases} U_p(z) = P(z)E(z) \\ U_i(z) = I(z)E(z) \\ U_d(z) = D(z)E(z) \end{cases}$$

と書ける。ここで、 $P(z),I(z),D(z)$ は、それぞれ、比例、積分、微分のコントローラであり、ブロック図より以下のように書ける (前進オイラー法)。

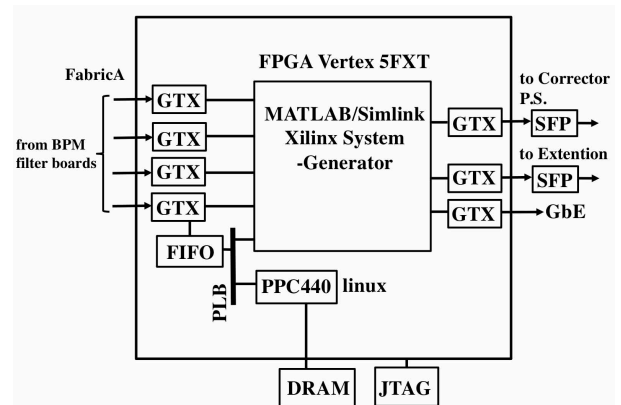


Fig. 18 フィードバックコントローラのブロック図。

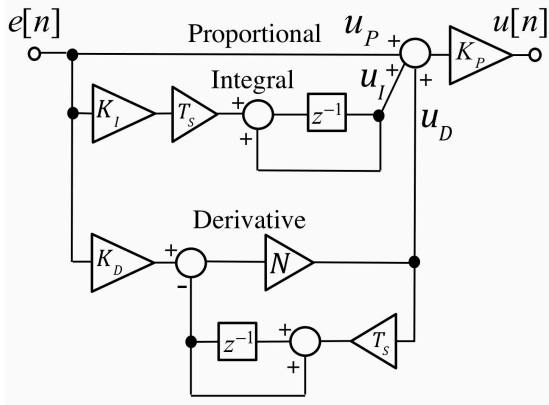


Fig. 19 PID 制御のブロック図。

$$\begin{aligned}
 P(z) &= 1 \\
 I(z) &= K_i \frac{T_s}{z-1} \\
 D(z) &= \frac{K_d}{\frac{1}{N} + \frac{T_s}{z-1}}
 \end{aligned}
 \tag{4-23}$$

ここで、N はフィルタ係数である。(4-23)式を、差分方程式で書くと以下ようになる。

1) 比例

$$u_p[n] = e[n] \tag{4-24}$$

2) 積分

$$(K_i T_s E(z) + U_i(z)) z^{-1} = u_i[n]$$

より、

$$u_i[n] = K_i T_s e[n-1] + u_i[n-1] \tag{4-25}$$

3) 微分

$$u_d[n] = N K_d (e[n] - e[n-1]) + (1 - N T_s) u_d[n-1] \tag{4-26}$$

特に、 $N T_s = 1$  のとき、

$$u_d[n] = \frac{K_d}{T_s} (e[n] - e[n-1]) \tag{4-27}$$

となる。 $N = \infty$  のときは、

$$u_d[n] = \frac{K_d}{T_s} (e[n+1] - e[n])$$

となり、前進オイラー法では因果関係を満たさない。

(フィルタ係数の意味：簡単のため連続時間システムで考えると、微分のコントローラは  $D(s) = K_d / (1/N + 1/s)$  のように書ける。例えば  $f(t) = t$  に対する  $D(s)$  の効果を計算すると、 $D(s)/s^2$  の逆ラプラス変換より、 $1 - \text{Exp}(-Nt)$  となり微分が  $\tau = 1/N$  程度なまる。)

### 4.3. ステアリング電源コントローラ

Fig. 20 にステアリング電源コントローラのブロック図を示す。コントローラは、ステアリング磁石のキック角を入力して磁石電源の制御入力レベルに換算し、16bit DAC によってアナログ信号に変換して磁石電源へ出力する。入力は2種類あり、1つはフィードバックコントローラから光ファイバ経由で 32kHz のレートで送られる速いフィードバック用のキック角である。もう一つは EPICS channel access 経由で送られる更新レート 1Hz 程度の遅いキック角であり、垂直方向遅いフィードバック、水平方向ディザリングフィードバック、水平垂直の DC (オフセット) バンプ軌道の設定に使われる。2種類のキック角はコントローラ内で足し算され磁石のキック角となる。

コントローラは MTCA.4 に準拠したボードである[19]。FPGA には Xilinx Zynq SoC[12]が使われ、Linux 上で動く EPICS IOC を内蔵している。

### 4.4. 磁石、電源、真空チェンバ

ステアリング磁石は積層鋼板を鉄心を持つ電磁石である。また、ステアリング磁石電源はアナログ電圧で制御される市販の定電流電源である。フィードバック系の設計段階で KEKB 用のステアリング磁石 (積層鋼板の鉄心) にコイルを巻いて  $L=20\text{mH}$ ,  $R=0.6\Omega$  の負荷を作り、現在使用している電源と同型の電源へステップ状の制御入力 (定格電圧で制限される時間変化の最大値が  $38\mu\text{s}$ )

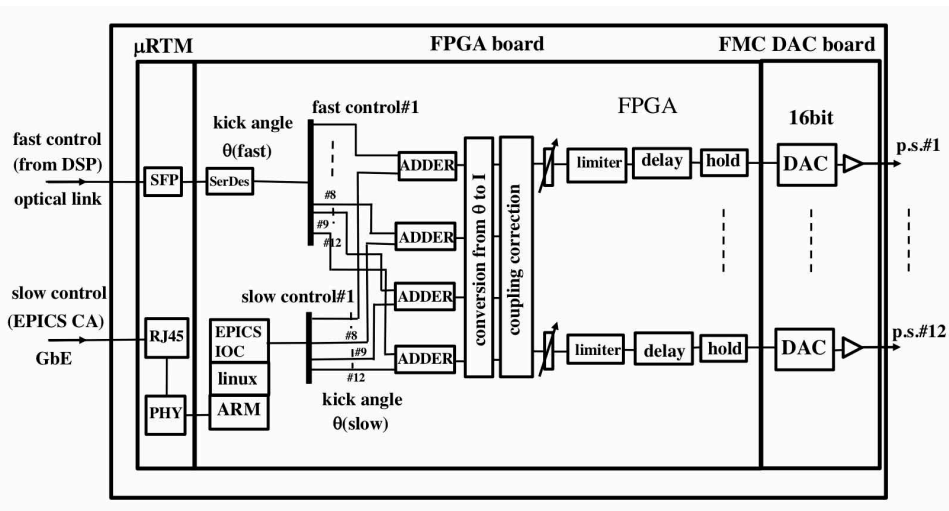


Fig. 20 ステアリング電源コントローラのブロック図 (DSP : フィードバックコントローラ)。

に対応する入力) を加えたときの磁場の立ち上がり時定数を測定すると 0.14ms であった。

磁石が置かれる場所の真空チェンバはうず電流による磁場の追従遅れを小さくするため厚さ 5mm のステンレス(SUS)で作られている。磁場計算によると、厚さ 5mm の SUS チェンバのとき磁石電流のステップ状変化に対する磁場の立ち上がり時定数が 0.21ms であった。チェンバ内面にはインピーダンスを減らすために厚さ 10 $\mu$ m の銅がコーティングされている。磁場計算によれば、この効果により立ち上がり時定数は 0.23ms となった。

## 5. 速いフィードバックシステム

Fig. 21 にフィードバックシステムのブロック図を示す。左からフィードバックの目標値が入力されモニタ値と目標値との誤差が計算される。誤差は PID コントローラに入力され、この出力によりステアリング電源が動き、磁石が励磁される。電源と磁石の入力に対する応答は次の伝達関数で表される 1 次遅れで表現する。

$$G_m(z) = Z \left[ \frac{1 - e^{-sT_s}}{s} \frac{1}{\tau_m s + 1} \right] = \frac{1 - e^{-T_s/\tau_m}}{z - e^{-T_s/\tau_m}} \quad (5-1)$$

ここで、左から 2 番目の式の左の項は 0 次ホールド (付録 6 参照。) を表し、右の項が 1 次遅れを表すラプラス変換の項である。Z は Z 変換を表す。 $\tau_m$  は時定数である。ビームはうず電流によりなまった磁場を感じて動くが、うず電流の効果も次の時定数 $\tau_e$  の 1 次遅れで近似する。

$$G_e(z) = \frac{1 - e^{-T_s/\tau_e}}{z - e^{-T_s/\tau_e}} \quad (5-2)$$

図の "disturbance U" が四極磁石の振動によるビーム位置に対する外乱である。D(z) はフィードバックプロセッサ内の遅延を表し、nd ステップの遅延の場合、以下の様に書ける。

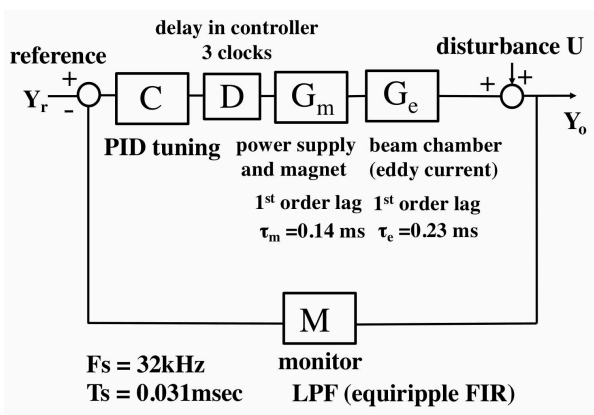


Fig. 21 速いフィードバックシステムのブロック図。

**Table 5** 速いフィードバックの解析に用いたパラメータ。

サンプリング時間(Ts)	31.25μs
電源と磁石応答の時定数(τ <sub>m</sub> )	0.14ms
チェンバウズ電流応答の時定数(τ <sub>e</sub> )	0.23ms
コントローラ内遅延 nd	3 サンプル
FIR フィルタ長 N	73

$$D(z) = z^{-nd} \quad (5-3)$$

M(z)はビーム位置検出器を表す FIR フィルタであり、フィルタのインパルス応答 h(n)を使って以下のように書ける。

$$M(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)z^{-k} \quad (5-4)$$

C(z)は以下の PI コントローラを表す。計算によると、比例制御のみでは 6dB 程度の振幅減衰効果しか得られず、また、微分制御を加えても性能改善が見られなかったため、PI 制御を採用した。

$$C(z) = K_p \left( 1 + \frac{K_i T_s}{z-1} \right) \quad (5-5)$$

外乱 U(z)から出力 Y<sub>o</sub>(z)までの伝達関数 H(z)は以下のように書ける。

$$H(z) = \frac{Y_o(z)}{U(z)} = \frac{1}{1+C(z)D(z)G_m(z)G_e(z)M(z)} \quad (5-6)$$

H(z)の周波数応答は、 $z = e^{-j2\pi f T_s}$  とおけば得られる。Table 5 に計算に用いたパラメータを示す。例として  $K_p=0.29295$ ,  $K_i=1657.6$  のときの計算例を Fig. 22 の実線で示す。PID パラメータの決定には、MATLAB Control System Design の Robust response time 法を用いた。この方法でのアルゴリズムはブラックボックスだが目標値入力(Y<sub>r</sub>)のステップ応答を最適化しているようである。図をみると 10Hz で約 20dB の振幅減衰ゲイ

ンがあることがわかる。ゲインは周波数が上がると減少し 100Hz 付近でほとんど 0 になる。また 200Hz 付近にピークが現れる。

D(z),G<sub>m</sub>(z),G<sub>e</sub>(z),M(z)をまとめて 1 つの遅延要素

$$D(z) = z^{-n} \quad (5-7)$$

で置き換えた計算結果を Fig. 22 の破線で示す。実線と破線はほとんど一致しており H(z)の周波数特性は基本的にループ内遅延と PI コントローラで決まっていることがわかる。

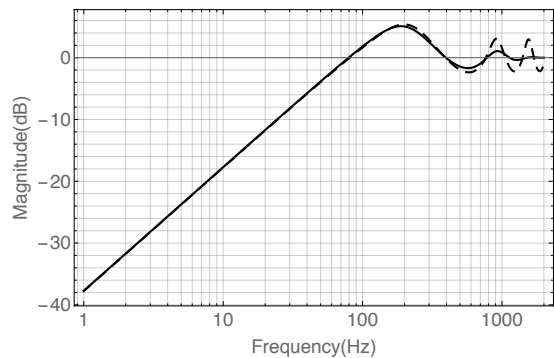
この近似で周波数応答の解析を試みる。まず、H(z)は、

$$H(z) = \frac{1}{1+C(z)D(z)} = \frac{-z^{-1}+1}{K_p(K_i T_s - 1)z^{-n-1} + K_p z^{-n} - z^{-1} + 1} \quad (5-8)$$

と書ける。

次に、周波数応答を求めるときに、 $z = e^{-j2\pi f T_s} \sim 1 - j2\pi f T_s = 1 - j\omega T_s$ ,  $\omega = 2\pi f$  と近似すれば、周波数応答は次のように書ける。

$$|H(\omega)| = \sqrt{\frac{T^2 \omega^4 + \omega^2}{T^2 \omega^4 + (1 + 2K_p + K_p^2 - 2TK_i K_p) \omega^2 + K_i^2 K_p^2}}, \quad T = nT_s \quad (5-9)$$



**Fig. 22** 外乱の振幅減衰特性 (実線： $K_p=0.29295$ ,  $K_i=1657.6$  のとき、破線：PI 要素以外を遅延で置き換えたとき)。

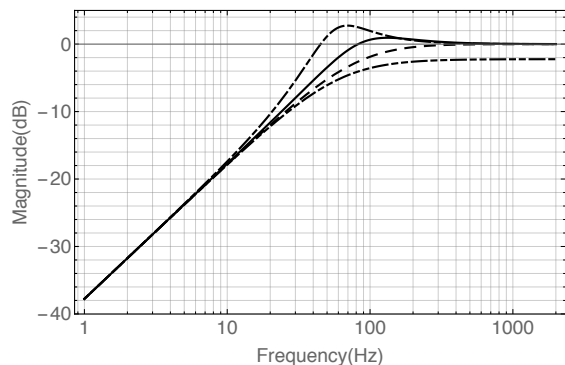


Fig. 23 ループ内遅延を変えた時の外乱の振幅減衰特性 (PI パラメータは固定)。二点鎖線、破線、実線、一点鎖線の順に、遅延ステップ  $n=0,21,51,119$  での計算結果)。

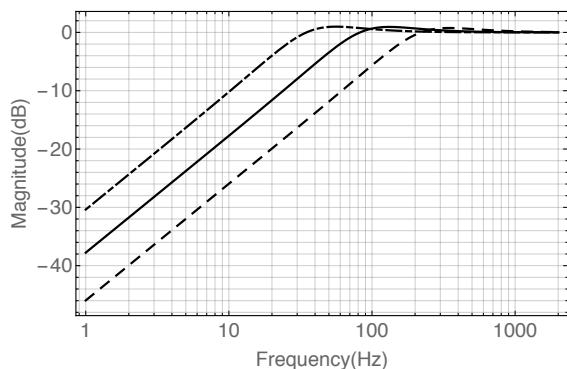


Fig. 24 ループ内遅延を変えた時の外乱の振幅減衰特性 (PI パラメータを最適化したとき)。破線、実線、一点鎖線の順に、遅延ステップ  $n=21,51,119$  での計算結果)。

$K_p, K_i$  を一定にしたままで遅延を変えた結果を Fig. 23 に示す。図中で、二点鎖線、破線、実線、一点鎖線の順に、 $n=0,21,51,119$  での計算結果である。遅延を減らすとピークの周波数が低い方にずれ、ピークも顕著になる。低い方の応答は遅延 0 の場合 (二点鎖線) と変わらない (つまり、PI のパラメータで決まっている)。また、周波数が低い領域で周波数特性が右上がりになる傾向は PI 制御器の特性によることが分かる。PI パラメータを各遅延の値で最適化した結果を Fig. 24 に示す。図中で、破線、実線、一点鎖線の順に、 $n=21,51,119$  での計算結果である。遅延が 0 のときは、 $K_p \rightarrow \infty$

のとき、 $|H| \rightarrow 0$  となり、また、指令値  $Y_r$  から出力  $Y_o$  への閉ループ伝達関数は 1 に近づく。また、システムの安定条件 (伝達関数の極の絶対値が 1 以下) は  $0 < K_i T_s < 2$  である。この条件をみただけ限り  $K_p$  を増やせばシステムの特性は理想値に近づいていく。Fig. 24 より、ループ内遅延を減らし、PI パラメータを最適化することで振幅減衰量 (ゲイン) が大きくかつピークの小さい特性を得ることができることが分かる。

現在のシステムでのループ内遅延をサンプル数で表すと、コントローラ内遅延が 3、電源・磁石とチェンバウズ電流での遅延が 15、FIR での遅延が 36 である。チェンバなどのハードに変更を加えずループ内遅延を減らすには FIR の次数を減らせば良い。Fig. 25 に現在の FIR (次数 73) と次数を 13 次まで減らした FIR での近似なしの計算結果を示す。振幅減衰量が約 10dB 増加している。FIR の次数はカットオフ周波数を 2kHz から 10kHz にあげることで実現する。このとき、フィルタによるノイズ除去性能が落ちるので注意が必要である。ノイズの周波数分布が一樣ならこの変更で SNR の大きな減少はないと見積もられるが、ノイズの状況はビーム試験をしてみないとわからない。

## 6. 遅いフィードバックシステム

遅いフィードバックシステムは KEKB で開発され、SuperKEKB でも使われている [7]。

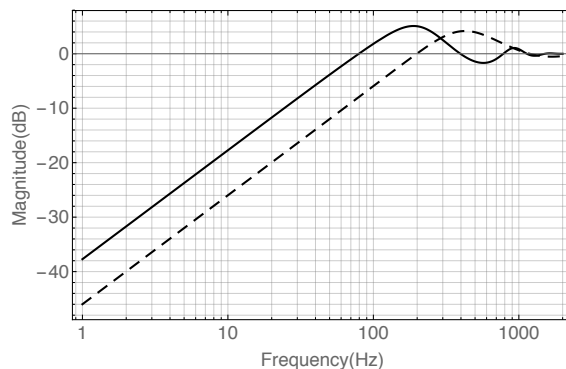


Fig. 25 FIR のフィルタ長が 73 (実線) と 13 (点線) のときの外乱の振幅減衰特性。

制御量のカノニカルキックとカノニカル角をまとめて  $y$  と書き  $n$  ステップ目の制御量について

$$\Delta y_n = y_n - y_{\text{target}}$$

とする。ここで  $y_n$  は  $n$  ステップ目のモニタ値、 $y_{\text{target}}$  は目標値である。過去  $N$  ケのデータから  $\Delta y_{n+1}$  を次式の線形予測(linear prediction)[16]で求める。

$$\Delta y_{n+1} = \sum_{k=1}^N c_k \Delta y_{n-k+1} \quad (6-1)$$

$c_k$  は過去  $M$  ケのデータから、次の最小二乗法で求め、

$$\begin{pmatrix} \Delta y_{n-1} & \Delta y_{n-2} & \cdots & \Delta y_{n-N} \\ \Delta y_{n-2} & \Delta y_{n-3} & \cdots & \Delta y_{n-N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta y_{n-M} & \Delta y_{n-M-1} & \cdots & \Delta y_{n-M-N+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta y_n \\ \Delta y_{n-1} \\ \vdots \\ \Delta y_{n-N+1} \end{pmatrix} \quad (6-2)$$

IP での軌道が

$$y = G(y_n - \Delta y_{n+1}) \quad (6-3)$$

となるようステアリング磁石を励磁する。ここで  $G$  は調整用パラメータ (“ゲイン”) である。SuperKEKB では、KEKB と同様に、経験的に  $N=6, M=48$  が用いられている。また、 $c_k$  の決定はフィードバックの各サイクル毎に行われる。フィードバックの繰り返し周期は秒のオーダーである。

## 7. ビーム運転

現在は、垂直方向衝突点ベータ関数が  $2\text{mm}$  なので、垂直方向ビームサイズは約  $200\text{nm}$  と大きく、また衝突点のビーム振動もビームサイズに比べて小さいので、遅いフィードバックのみが運用されている。速いフィードバックについてはビーム試験を進めている段階である。

### 7.1. ビーム・ビームスキャン

軌道フィードバックのバンプの初期値は、衝突点での垂直軌道を変えていったときのルミノシティを測定しルミノシティが最大になるような値に設定する。この操作をビーム・ビームスキャンと称している。Fig. 26 にビーム・ビームスキャンの例を示す[20]。上図は衝突点で陽電子ビームが電子ビームから受けるキックに比例する量で、下図はルミノシティである。このスキャンにより両リングのビームサイズで畳み込まれたビームサイズを見積もることができる。ビーム・ビームキックはビーム間距離が  $0$  のとき  $0$  になり、約  $\pm \sigma_y$  の範囲でビーム間距離に対して線形である。

### 7.2. 遅いフィードバック

現在は、カノニカルキックのフィードバックのみが運用されている。フィードバックの繰り返し周期は  $2$  秒である。Fig. 27 に運転の様子を示す[20]。衝突を維持するようにバンプ軌道の高さを調整してルミノシティを一定に保っていることがわかる。

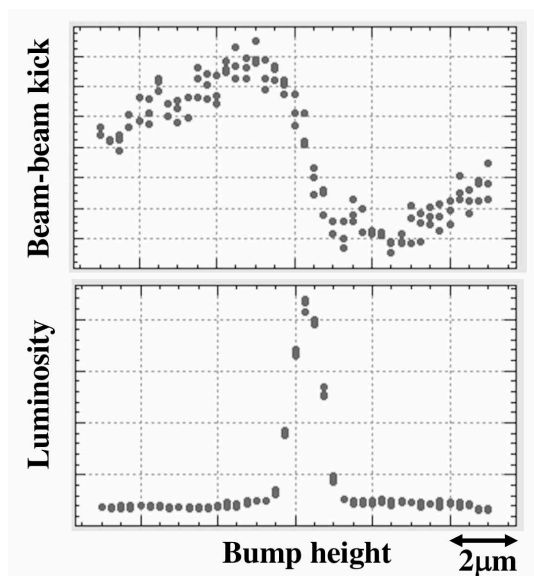


Fig. 26 ビーム・ビームスキャンの例[20]。



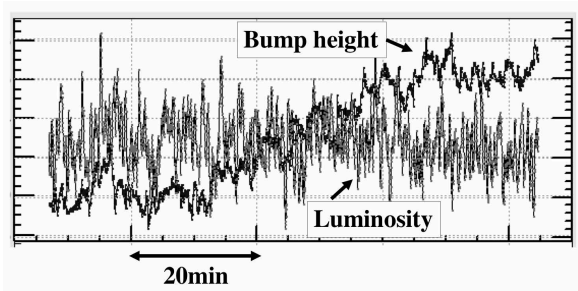


Fig. 27 遅いフィードバックの運転例[20]。

### 7.3. 速いフィードバックのビーム試験

Table 6 に試験時のビームパラメータを示す。試験ではカノニカルキックに対するフィードバックをPI制御で行った。Fig. 28, 29にフィードバックがオフのときとオンのかノニカルキックの周波数スペクトルを示す。フィードバックを入ると、約70Hz以下で振動が抑制されていることが分かる。減衰量は10Hzの点で約20dBである。230, 690, 1150Hzにピークが現れており、230Hzのピークが最も大きい。690, 1150Hzのピークは、230Hzピークの3次および5次の高調波になっているので230Hzピークの非線形振動で生じている可能性がある。フィードバックをオンしたときルミノシティの減少がみられたが、230Hzでのビーム励振によるものと考えられる。比例ゲインを下げると、230Hz以上のピークは低くな

Table 6 速いフィードバック試験時のビームパラメータ。

	LER	HER	
ビーム電流	250	250	mA
バンチ数	789	789	
バンチ電流	0.32	0.32	mA
衝突点ベータ関数(H/V)	80/2	80/2	mm
水平エミッタンス	1.6	4.5	nm
垂直エミッタンス(非衝突時)	~10	~10	pm
バンチ長	5	5.5	mm

り、ルミノシティの減少も起きなくなったが、20Hz以上での振幅減衰量は減少した。

Fig. 30に試験時のPIパラメータを用いたシミュレーション結果を示す(横軸はリニアスケール)。10Hzでの振幅減衰は20dBであり実測と合っている。また、250Hzに実測の230Hzピークに近いピークが見られる。

230Hz以上での振動は、6節での議論からわかるように、PI制御のパラメータが最適化されていなかったためと推測される。次回のビーム試験ではBPM回路のFIRフィルタの次数を減らして振

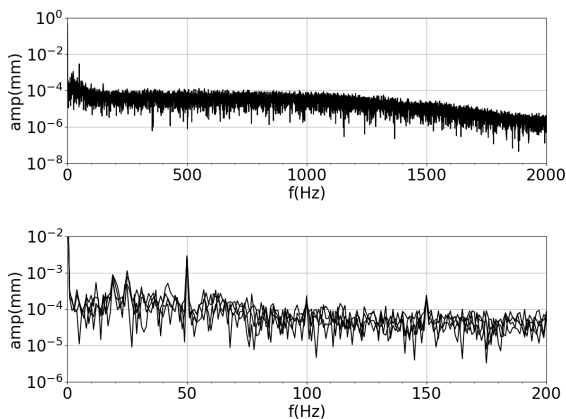


Fig. 28 速いフィードバックをオフにしたときのかノニカルキックのスペクトル。

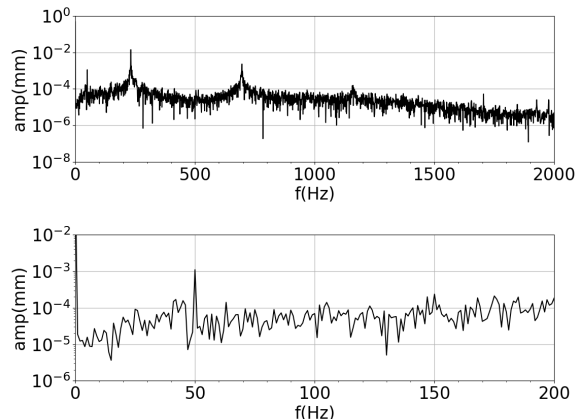


Fig. 29 速いフィードバックをオンにしたときのかノニカルキックのスペクトル。

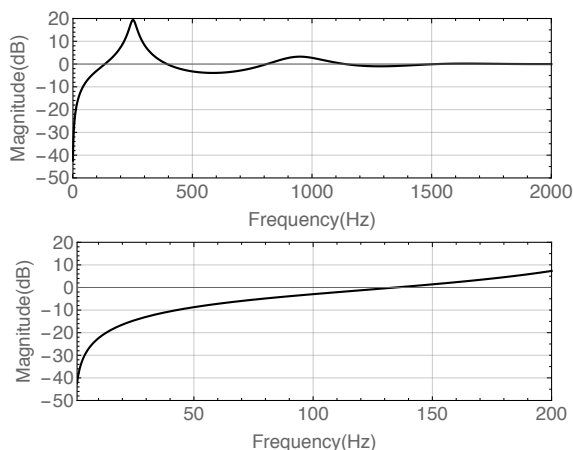


Fig. 30 ビーム試験条件での外乱の振幅減衰特性。

幅減衰量を増やした上で PI 制御パラメータを最適化し、100Hz 以上のピークを抑えることを試みる予定である。

## 8. 終わりに

ビーム衝突を維持するための軌道フィードバックシステムについて、SuperKEKB で初めて導入された速いフィードバックシステムを中心に解説した。

速いフィードバックシステムの調整はまだ始まったばかりである。リングでは軌道を変える様々なシステムが稼働している。例えば、閉軌道を基準値に維持するフィードバックが数十秒の周期で働いている。また、ディザリングシステムも運用されるであろう。これらのシステムと共存して速いフィードバックが安定に働くことは自明ではない。運用上のさまざまな調整が必要と思われる。

## 参考文献

[1] T. Oki, "Collision feedback", the 19th KEKB Accelerator Review Committee (2014).  
 [2] K. Ohmi and D. Zhou, "Beam Dynamics Issue in Nano Beam Scheme", the 16th KEKB Accelerator Review Committee(2011).  
 [3] Y. Funakoshi, "Orbit control at IP", the 17th KEKB Accelerator Review Committee (2012).

[4] 山岡広、"技術研修会「シミュレーション技術」 SuperKEKB 最終収束用超伝導電磁石システム (QCS) の設計とシミュレーション手法"、 「加速器」 Vol. 16, No. 2, 2019, 87-95.  
 [5] P. Raimondi, "Status on SuperB effort", 2nd LNF Workshop on SuperB, 16-18 Mar. 2006. <http://www.lnf.infn.it/conference/superb06/talks/raimondi1.ppt>  
 [6] D.N. Shatilov and M. Zobov, " Beam-Beam Collisions with an Arbitrary Crossing Angle: Analytical tune shifts, tracking algorithm without Lorentz boost, Crab-Crossing", Beam Dynamics Newsletter No. 37, p.99-109(2005). 大西幸喜、" SuperKEKB フェーズ 2 コミッショニング"、 高エネルギーニュース 37-3 139(2018).  
 [7] Y. Funakoshi et al., "Orbit feedback system for maintaining an optimum beam collision", Phys. Rev. ST-AB 10, 101001 (2007).  
 [8] M. Tobiyama et al., "DEVELOPMENT OF BUTTON ELECTRODES FOR SUPERKEKB RINGS", Proceedings of BIW10, Santa Fe, New Mexico, US, p.223-227(2010).  
 [9] 平松成範、" 加速器のビームモニタ"、 KEK Internal 2004-1。  
 [10] 石井仁、森健児、私信。  
 [11] H. Ishii et al., "DEVELOPMENT OF A BEAM POSITION DETECTOR FOR AN ORBIT FEEDBACK SYSTEM IN SuperKEKB", Proceedings of the 8th Annual Meeting of Particle Accelerator Society of Japan (August 1-3, 2011, Tsukuba, Japan), pp.511-515(2011).  
 [12] <https://japan.xilinx.com>  
 [13] M. Ryoshi et al., "LLRF BOARD IN MICRO-TCA PLATFORM", Proceedings of the 7th Annual Meeting of Particle Accelerator Society of Japan (August 4-6, 2010, Himeji, Japan), p.667-669(2010).  
 [14] EUGENE B. HOGENAUER, "An Economical Class of Digital Filters for Decimation and Interpolation", IEEE TRANSACTIONS ON ACOUSTICS, SPEECH, AND SIGNAL PROCESSING, VOL. ASSP-29, NO. 2, APRIL 1981 155.  
 [15] 高橋進一、池原雅章、" デジタルフィルタ"、 培風館。  
 [16] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, "Discrete-Time Signal Processing", Pearson Education Inc..  
 [17] <https://jp.mathworks.com>  
 [18] K. Hayashi et al., "MICRO TCA INTER-BOARD DATA COMMUNICATIONS APPLIED

TO BPM AND LLRF SYSTEMS", Proceedings of the 10th Annual Meeting of Particle Accelerator Society of Japan (August 3-5, 2013, Nagoya, Japan), p.1164-1167(2013).

[19] M. Ryoshi et al., "MTCA.4 FPGA(ZYNQ) BOARD", Proceedings of the 11th Annual Meeting of Particle Accelerator Society of Japan, August 9-11, 2014, Aomori, Japan, pp.1303-1307(2014).

[20] SuperKEKB 運転ログより。

## 付録

### 1. デシベル

デシベル(dB)は信号レベルをある基準レベルを基準にして表した量で、信号パワーによって以下のように定義される。

$$dB = 10 \log_{10} \left( \frac{P}{P_0} \right)$$

ここで、 $P_0$ が基準となるパワーレベルである。信号振幅  $A$  はパワーの平方根だから dB を信号振幅で定義すると、

$$dB = 20 \log_{10} \left( \frac{A}{A_0} \right)$$

となる。また、1mW のパワーを基準にしたパワーを dBm と表し、

$$dBm = 10 \log_{10} \left( \frac{P[W]}{0.001[W]} \right)$$

と定義される。

### 2. BPM の分解能

BPM 電極 1,2,3,4 が半径  $R$  のチェンバに水平面から測って 45,135,225,315 度についているとする。BPM で測定した垂直方向ビーム位置  $y$  は、4 つの電極での電圧  $V_1, V_2, V_3, V_4$  から以下のように書ける[9]。

$$y = K \frac{V_1 + V_2 - V_3 - V_4}{V_1 + V_2 + V_3 + V_4} \equiv KU$$

ここで、 $K = R/\sqrt{2}$  である。各電極に  $v_1, v_2, v_3, v_4$  のノイズがあるとすると、

$$\begin{aligned} y &= K \frac{(V_1 + v_1) + (V_2 + v_2) - (V_3 + v_3) - (V_4 + v_4)}{(V_1 + v_1) + (V_2 + v_2) + (V_3 + v_3) + (V_4 + v_4)} \\ &\sim KU \left( 1 + \frac{v_1 + v_2 - v_3 - v_4}{V_1 + V_2 - V_3 - V_4} - \frac{v_1 + v_2 + v_3 + v_4}{V_1 + V_2 + V_3 + V_4} \right) \\ &\sim KU - \frac{K}{V_0} \left( (U-1)(v_1 + v_2) + (U+1)(v_3 + v_4) \right) \end{aligned}$$

と近似できる。ここで、 $V_0 = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$  であり、 $v$  と  $V$  の比の一次の項のみをとった。

$\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = \bar{v}_3 = \bar{v}_4 = 0$  より、 $\bar{y} = KU$  (バーは平均の意。) なので、

$$\overline{(y - \bar{y})^2} = 4K^2(1+U^2) \frac{\bar{v}^2}{V_0^2}$$

となる。ここで、 $\bar{v}_1^2 = \bar{v}_2^2 = \bar{v}_3^2 = \bar{v}_4^2 = \bar{v}^2$  とおき、 $\bar{v}_i v_j = 0$  for  $i \neq j$  の関係を使った。 $y$  の分解能  $\sigma_y$  は、 $U \ll 1$  のとき、以下ようになる。

$$\sigma_y = \sqrt{\overline{(y - \bar{y})^2}} \sim \frac{1}{2} K \frac{\sqrt{\bar{v}^2}}{V} = \frac{1}{2} K \frac{1}{SNR}$$

ここで、 $\bar{V} = (V_1 + V_2 + V_3 + V_4)/4$  であり、 $SNR = \bar{V}/\sqrt{\bar{v}^2}$  である。水平方向の分解能も同様にして求まる。

### 3. z 変換

#### 1) 定義

離散時間信号  $x[n]$  の  $z$  変換は  $z$  を複素数として以下のように定義される[15,16]。

$$X(z) = Z[x[n]] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

逆変換は、 $Z^{-1}[X(z)] = x[n]$  となり、 $X(z)$  を  $z^{-1}$  の多項式で展開した時の係数である。

#### 2) z 変換の性質

##### a) 線型性

$$Z[ax[n]+by[n]] = aX(z) + bY(z)$$

b) 時間シフト

$$Z[x[n-k]] = z^{-k}X(z)$$

c) 時間反転

$$Z[x[-n]] = X(z^{-1})$$

d) 畳み込み

二つの信号  $x_1[n], x_2[n]$  の畳み込みは次式で定義される。

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k]$$

このとき次の関係が成り立つ。

$$X(z) = X_1(z)X_2(z)$$

3) システム関数 (伝達関数)

線形時不変システムへの入力を  $x[n]$ , 出力を  $y[n]$  とする。インパルス  $\delta[n] = [1, 0, 0, 0, \dots]$  がシステムへ入力したときの出力を  $h[n]$  とすると、次の畳み込みの関係がある。

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k], \quad h[k] = 0 \quad (k < 0)$$

この  $z$  変換は、

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

となり、 $h[n]$  の  $z$  変換  $H(z)$  をシステム関数あるいは伝達関数という。

4) フーリエ変換

離散時間信号  $x[n]$  のフーリエ変換は、次式で定義される。

$$X_F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

ここで、 $\omega$  は正規化角周波数と呼ばれ、 $F$  を周波数、 $F_s$  をサンプリング周波数とすると、

$$\omega = 2\pi \frac{F}{F_s}$$

である。 $z$  変換の定義と比較すると、 $z$  変換が  $X(z)$  の離散信号のフーリエ変換は、

$$X_F(\omega) = X(e^{j\omega})$$

で与えられる。

#### 4. デシメータの等価変換

サンプリング周波数を整数  $R$  で減少させることをデシメーションといい、デシメーションを行う要素 (Fig. A-1 の下矢印の付いたブロック) をデシメータという。まず、デシメータの  $z$  変換を求める。デシメータの入出力関係は次のように書ける、

$$y(m) = x(Rm)。$$

次の  $x_a(n)$  を考えると (Fig. A-1 参照)、

$$x_a(n) = \begin{cases} x(n) & \text{for } n = Rp, p: \text{integer} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases},$$

$$= x(n) \frac{1}{R} \sum_{k=0}^{R-1} e^{j2\pi kn/R}$$

$y(n)$  の  $z$  変換は以下のように書ける。

$$Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(Rm)z^{-m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(n)z^{-n/R}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ x(n) \frac{1}{R} \sum_{k=0}^{R-1} e^{j2\pi kn/R} \right] z^{-n/R}$$

$$= \frac{1}{R} \sum_{k=0}^{R-1} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left( e^{-j2\pi k/R} z^{1/R} \right)^{-n} \right]$$

$$= \frac{1}{R} \sum_{k=0}^{R-1} X \left( e^{-j2\pi k/R} z^{1/R} \right) \quad \text{(A. 4-1)}$$

次に、Fig. A-2 の(a)と(b)が等価であることを示す。まず、(b)の左のブロックの入出力関係は、

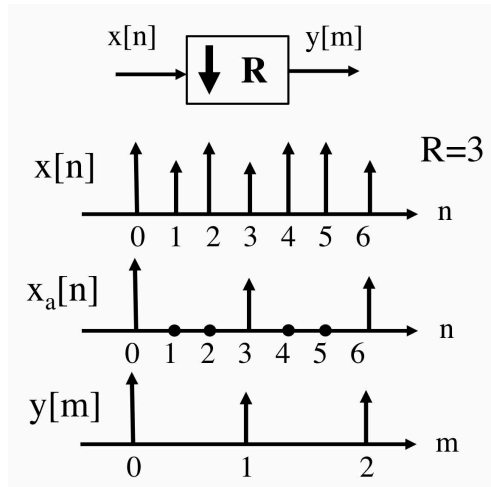


Fig. A-1 デシメータの  $z$  変換。

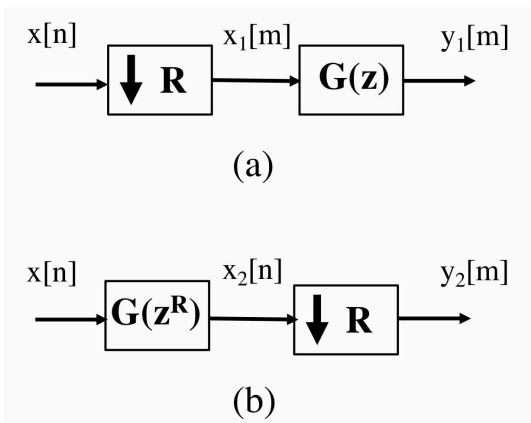


Fig. A-2 デシメータの等価変換[15]。

$$X_2(z) = G(z^R)X(z)$$

と書ける。(A.4-1)式を使うと、

$$\begin{aligned} Y_2(z) &= \frac{1}{R} \sum_{k=0}^{R-1} X_2(e^{-j2\pi k/R} z^{1/R}) \\ &= \frac{1}{R} \sum_{k=0}^{R-1} G(e^{-j2\pi k} z) X(e^{-j2\pi k/R} z^{1/R}) \\ &= G(z) \frac{1}{R} \sum_{k=0}^{R-1} X(e^{-j2\pi k/R} z^{1/R}) \\ &= G(z) X_1(z) = Y_1(z) \end{aligned}$$

となり、(a)と(b)の等価関係が証明された[15,16]。

## 5. FIR の位相特性

タイプ 1 (フィルタ長  $N$  が奇数、インパルス応答が偶対称) の FIR を考える[15]。周波数応答は、

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega n}) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n} \\ &= e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \left[ h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{(N-1)/2-1} h(n) \left\{ e^{j\omega \left(\frac{N-1}{2}-n\right)} + e^{-j\omega \left(\frac{N-1}{2}-n\right)} \right\} \right] \\ &= 2e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \left[ h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{(N-1)/2-1} h(n) \left\{ \cos\left(\frac{N-1-n}{2}\omega\right) \right\} \right] \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\omega$  は正規化角周波数、 $h(n)$  はインパルス応答である。大括弧内は実数なので、位相特性は、

$$\theta(\omega) = \left( \frac{N-1}{2} \right) \omega.$$

## 6. ホールド要素のラプラス変換

ホールド要素へ振幅 1 のパルス  $x(t) = \delta(t)$  が入力したとき、出力  $y(t)$  は次のパルスが来るまでの時間  $T$  だけホールドされるから、ステップ関数  $u(t)$  を使って、

$$y(t) = u(t) - u(t - T).$$

$$L[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1,$$

$$L[u(t - kT)] = \int_{kT}^{\infty} e^{-st} dt = e^{-skT} / s$$

より、

$$L[x(t)] = 1$$

$$L[y(t)] = \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} = \frac{1 - e^{-sT}}{s}.$$

よって、ホールド要素のラプラス変換は、 $(1 - e^{-sT}) / s$  である。