

# エミッタンス測定

KEK 福田 将史

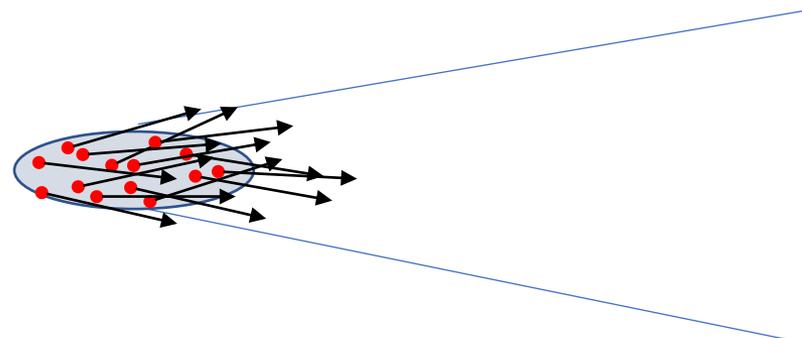
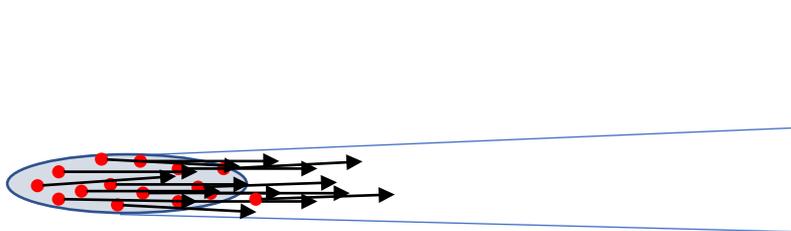
# エミッタンス(Emittance)

エミッタンスはビームの品質を表す値。

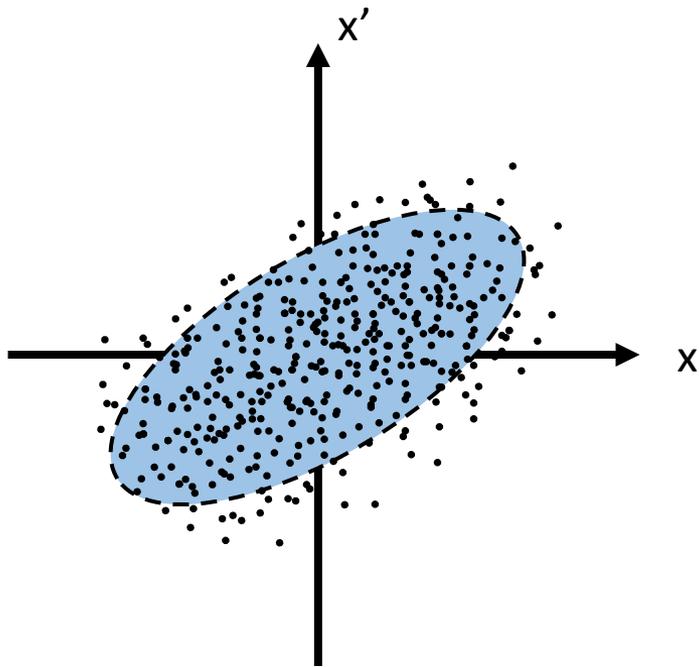
ビームは、たくさんの粒子がまとまってある方向に進んでいくもので、各粒子の位置、方向にはバラつきがある。

エミッタンスの良い(小さい)ビーム  
→位置、方向のばらつきが小さいもの。

エミッタンスの悪い(大きい)ビーム  
→位置、方向のばらつきが大きいもの。



# エミッタンス(Emittance)



$x$ : 粒子の位置  
 $x'$ : 粒子の進む角度  $x' = P_x/P_z$   
( $y$ についても同様)

位相空間(Phase space)分布：  
横軸にビーム位置 $x$ 、縦軸にビームの進む角度 $x'$ をとり、各粒子の $x, x'$ をプロットしたもの。

エミッタンス(Emittance)  $\varepsilon$ ：  
ビームの粒子が位相空間(Phase space)を占める面積を $\pi$ で割ったもの

$$\varepsilon = 1/\pi \iint dx dx'$$

分布している粒子の平均を $\langle \rangle$ であらわすと

$$\varepsilon = \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle x'^2 \rangle - \langle x x' \rangle^2}$$

# エミッタンス (Emittance)

Beam matrix:  $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$

rmsエミッタンス：  
1 $\sigma$ の楕円の面積/ $\pi$

$$\Sigma_x = \varepsilon_x \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ -\alpha & \gamma \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 & \langle xx' \rangle - \langle x \rangle \langle x' \rangle \\ \langle xx' \rangle - \langle x \rangle \langle x' \rangle & \langle x'^2 \rangle - \langle x' \rangle^2 \end{pmatrix}$$

$\beta$ 、 $\alpha$ 、 $\gamma$ は Twiss parameter. 以下の関係がある

$$\alpha = -\frac{1}{2}\beta' \quad \gamma = \frac{1 + \alpha^2}{\beta}$$

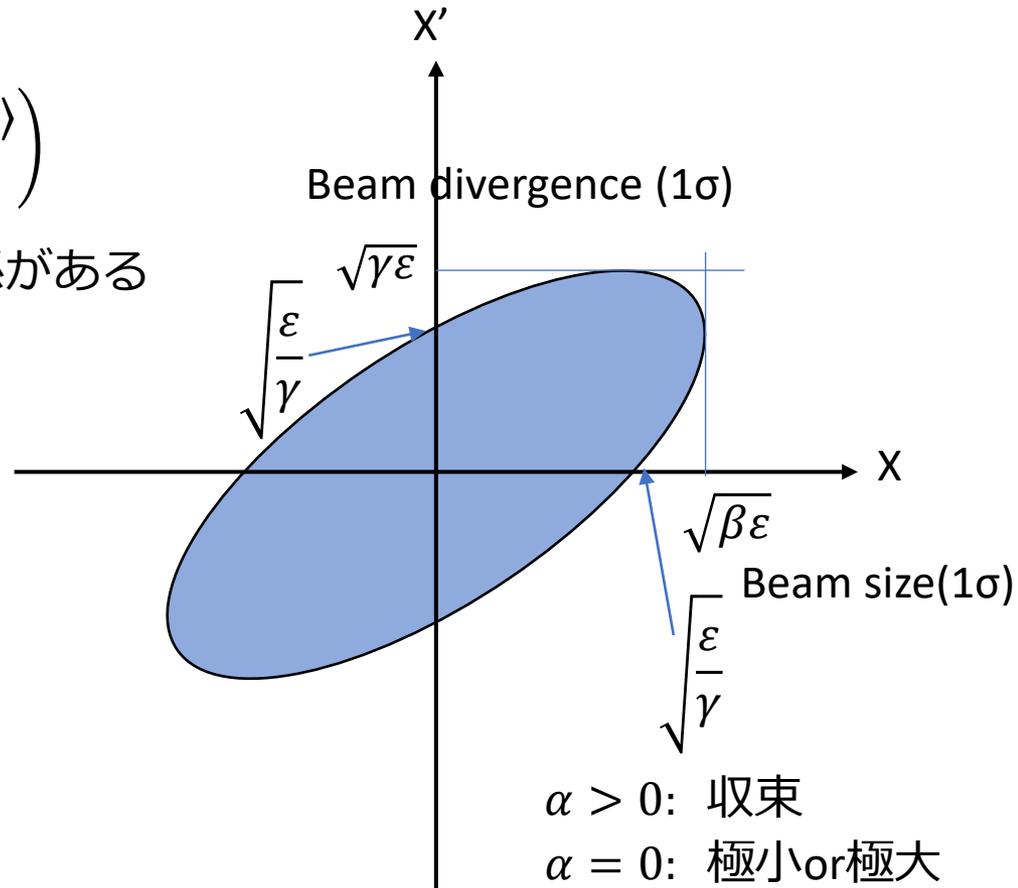
$\langle x \rangle$ と $\langle x' \rangle$ を原点にとると、

$$\Sigma_x = \begin{pmatrix} \langle x^2 \rangle & \langle xx' \rangle \\ \langle xx' \rangle & \langle x'^2 \rangle \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon = \sqrt{\det \sigma} = \sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2}$$

$$= \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle x'^2 \rangle - \langle xx' \rangle^2}$$

ビームサイズ $\sigma_x$ とすると、 $\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{\beta_x \varepsilon}$  ンス測定

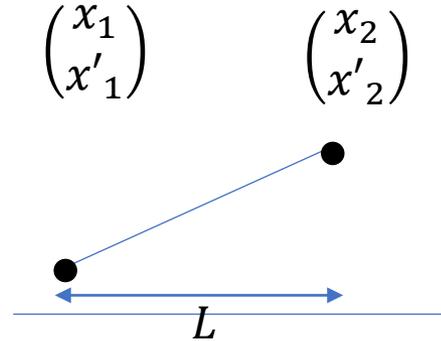


- $\alpha > 0$ : 収束
- $\alpha = 0$ : 極小or極大
- $\alpha < 0$ : 発散

# 転送行列(Transfer matrix)

ある地点1→2に行く場合、その2点での $x, x'$ の関係は、その間の光学要素の作用を表した転送行列を使って以下のように書ける。

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix}$$

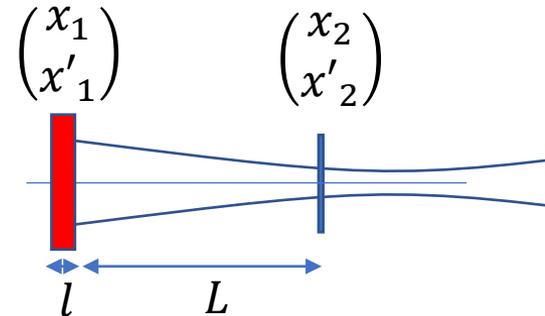


自由空間(Drift space)

$$M_{Drift} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

四極電磁石(Quadrupole magnet)

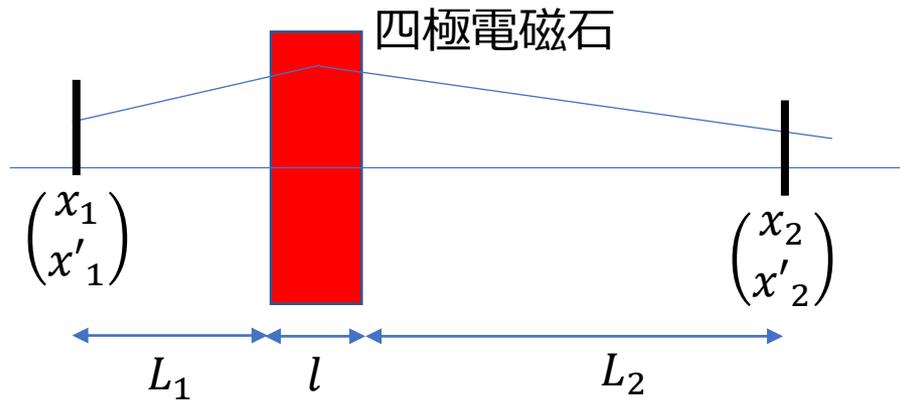
$$M_{Quadrupole} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{k}l) & \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k}l) \\ -\sqrt{k} \sin(\sqrt{k}l) & \cos(\sqrt{k}l) \end{pmatrix} \quad (k = B'/B\rho)$$



Thin lens 近似

$$M_{Quadrupole} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -K & 1 \end{pmatrix} \quad (K = kl) \text{ ミッタンス測定}$$

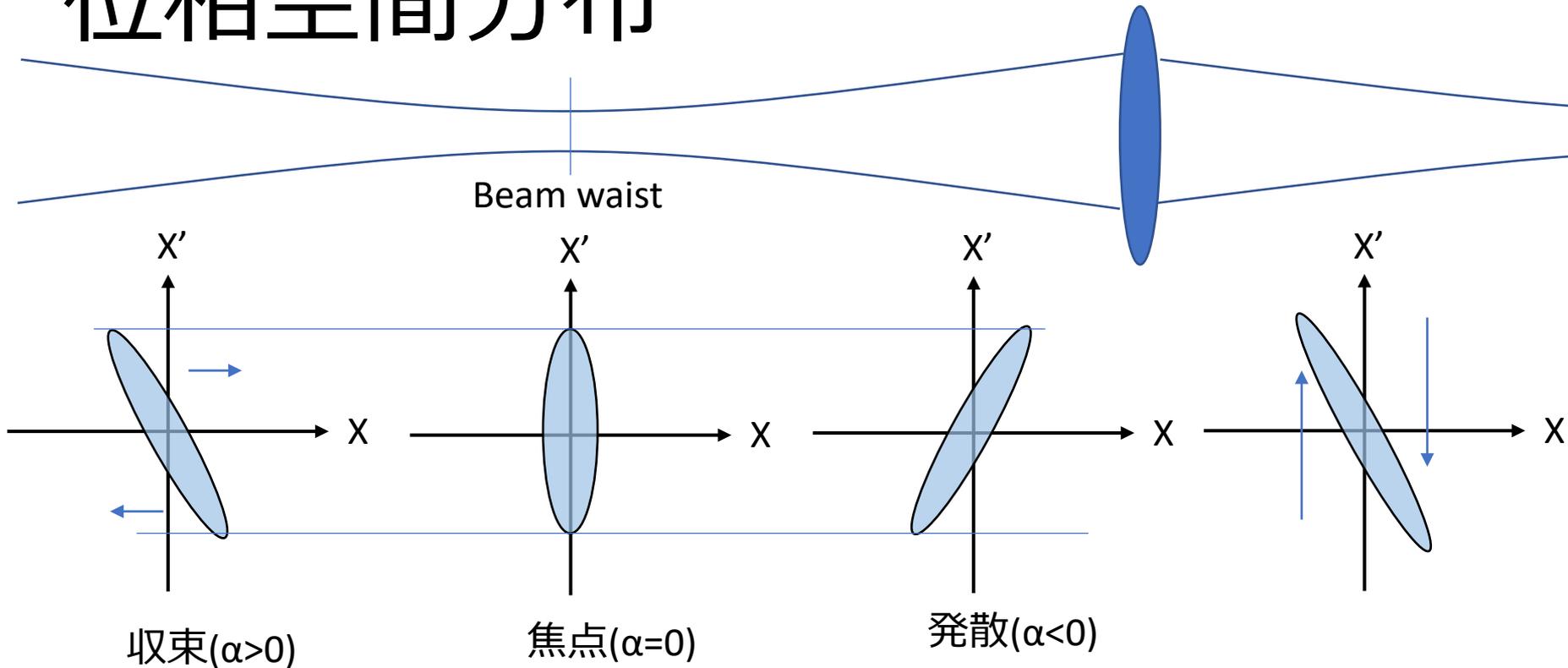
# 転送行列(Transfer matrix)



例えば図のように1→2へと行く場合、前後の $x, x'$ との関係は転送行列を使って以下のようにあらわせる。

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{k}l) & \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k}l) \\ -\sqrt{k} \sin(\sqrt{k}l) & \cos(\sqrt{k}l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix}$$

# 位相空間分布



ドリフトスペース (Drift space) :

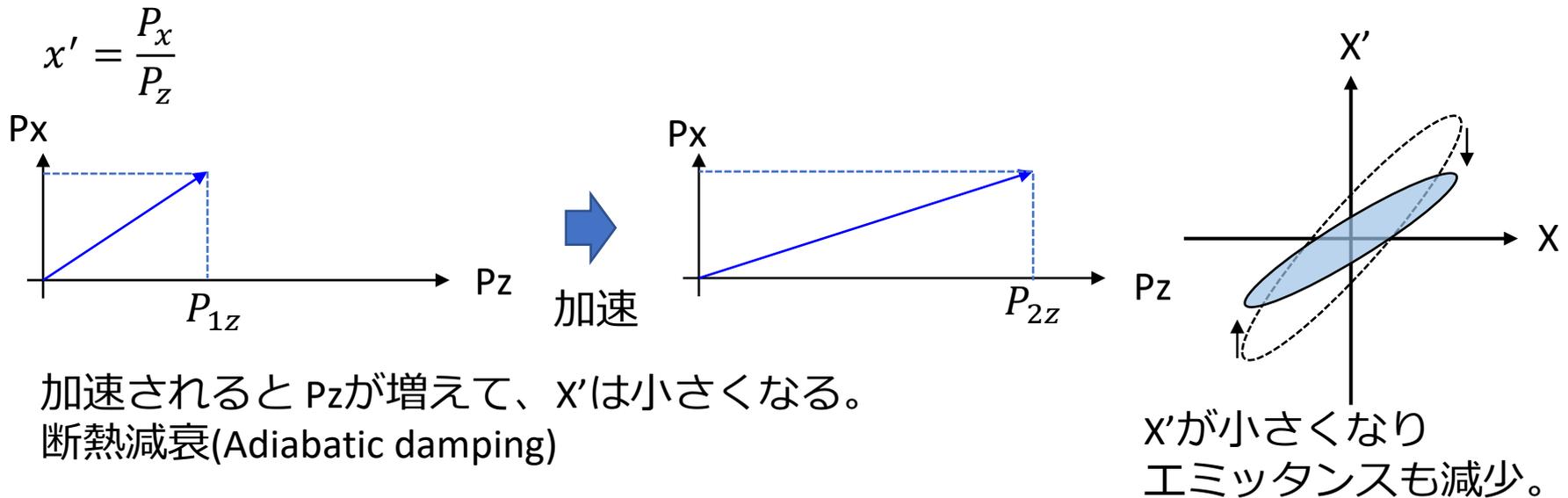
$x_1 = x_0 + Lx'$  ,  $x'_1 = x'_0 \rightarrow$  x軸の上にいるものは右に、下は左に動く

四極電磁石(Quadrupole magnet) :

$x_1 = x_0$  ,  $x'_1 = -Kx'_0 \rightarrow$  縦軸がK倍して符号が反転。上下の倍率が変わり上下反転

# 規格化エミッタンス (Normalized emittance)

ライナックなどで加速されエネルギーが高くなるとエミッタンスは小さくなる。



規格化エミッタンス (Normalized emittance) :  $\varepsilon_n = \beta\gamma\varepsilon$

こちらはエネルギーに依らず一定。  $\beta$ 、 $\gamma$  は相対論のもの、  $\beta = \frac{v}{c}$ 、 $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$

規格化エミッタンス  $\varepsilon_n$  と区別する場合には、規格化前のエミッタンス  $\varepsilon$  を幾何学的エミッタンス (Geometric emittance) と呼ぶ。

# エミッタンス測定

エミッタンスは、加速器の性能を表すための重要なパラメーターの一つ。

ビームサイズは、 $\sigma = \sqrt{\beta\varepsilon}$ なので、エミッタンスが悪いと、ビームサイズが大きくなり、ビームパイプなどにあたりビームロスが発生する。

エミッタンスは、ビームを衝突させて物理実験を行うコライダーのルミノシティー、放射光の輝度などにとっても重要なパラメーターとなる。

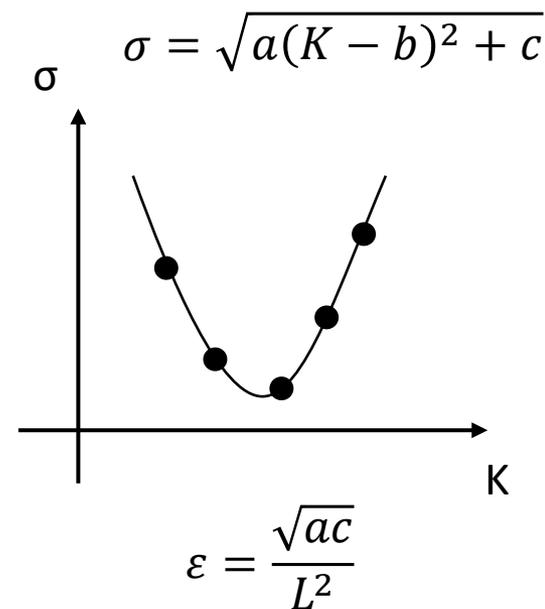
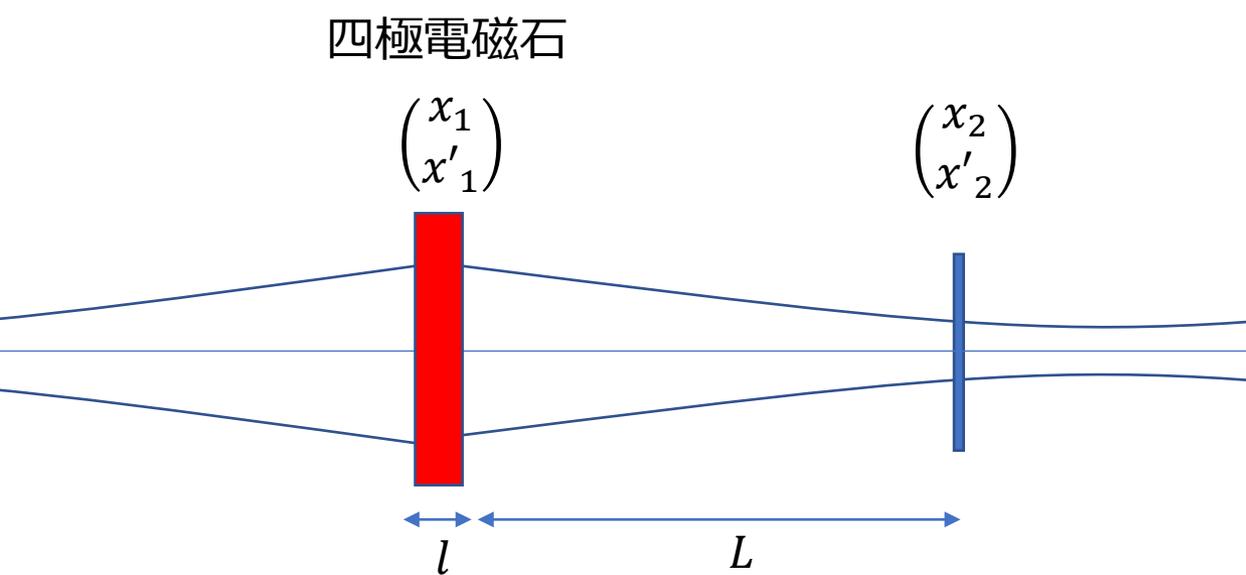
エミッタンス測定方法としては、以下のものがある。

- 測定したビームサイズとビーム光学系から計算する方法
  - Q-scan、Phase plot
- ある位置 $x$ のビームを切り出し、その発散角 $x'$ を測定、 $x, x'$ から算出する方法。
  - Slit scan、Pepperpot

これらについて説明していく。

# エミッタンス測定(Q-scan)

Q-scan法は、エミッタンス測定の方法として、良く使われる。



四極電磁石(厚さ $l$ )から距離 $L$ だけ離れた場所にビームサイズモニタを設置し、四極電磁石の磁場強度を変えながら、ビームサイズの変化を測定する。測定点をプロットし、関係式でフィットするとエミッタンスが求まる。

# Q-scan

ある地点1→2に行く場合、その2点での $x, x'$ の関係は、その間の光学要素の作用を表した転送行列を使って以下のように書ける。

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix}$$

ドリフトスペース、四極電磁石(Thin lens)の転送行列は以下となる。

$$M_{Drift} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_{Quadrupole} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -K & 1 \end{pmatrix} \quad (K = kl)$$

また、Twissパラメータは、1→2で、以下のように変化する。

$$\begin{pmatrix} \beta_2 \\ \alpha_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}^2 & -2m_{11}m_{12} & m_{12}^2 \\ -m_{11}m_{21} & m_{11}m_{22} + m_{12}m_{21} & -m_{12}m_{22} \\ m_{21}^2 & -2m_{21}m_{22} & m_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \alpha_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$$

Qスキャンでは、1→2で四極電磁石と長さLの自由空間があるので、

$$\begin{pmatrix} \beta_2 \\ \alpha_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2L & L^2 \\ 0 & 1 & -L \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ K & 1 & 0 \\ K^2 & 2K & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \alpha_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$$

# Q-scan

ここから $\beta_2$ を計算すると、

$$\begin{aligned}\beta_2 &= (1 - 2KL + K^2L^2)\beta_1 + (-2L + 2KL^2)\alpha_1 + L^2\gamma_1 \\ &= L^2\beta_1 \left\{ K - \left( \frac{1}{L} - \frac{\alpha_1}{\beta_1} \right) \right\}^2 + \frac{L^2}{\beta_1} \quad \gamma = \frac{1 + \alpha^2}{\beta}\end{aligned}$$

となる。ビームサイズ $\sigma$ 、エミッタンス $\varepsilon$ の関係は、 $\sigma^2 = \beta\varepsilon$ なので、

$$\sigma_2^2 = \beta_2\varepsilon = L^2\beta_1\varepsilon \left\{ K - \left( \frac{1}{L} - \frac{\alpha_1}{\beta_1} \right) \right\}^2 + \frac{L^2\varepsilon}{\beta_1} = L^2\sigma_1^2 \left\{ K - \left( \frac{1}{L} - \frac{\alpha_1}{\beta_1} \right) \right\}^2 + \frac{L^2\varepsilon^2}{\sigma_1^2}$$

と書ける。よって、

$$\sigma_2 = \sqrt{L^2\sigma_1^2 \left\{ K - \left( \frac{1}{L} - \frac{\alpha_1}{\beta_1} \right) \right\}^2 + \frac{L^2\varepsilon^2}{\sigma_1^2}}$$

となり、測定するビームサイズ $\sigma_2$ と四極電磁石のKの値との関係が求まる。

# Q-scanでの測定方法

四極電磁石の磁場強度を変えて、ビームサイズを測定する。  
(フィットするパラメータとして $\varepsilon$ 、 $\alpha$ 、 $\beta$ の3つがあるので、3点以上必要)  
そして、縦軸をビームサイズ $\sigma$ 、横軸を四極電磁石のK値にしてプロットし、

$$\sigma = \sqrt{a(K - b)^2 + c}$$

で、フィットする。この式と、前のページの式と比較すると、

$$a = L^2 \sigma_1^2, \quad b = \frac{1}{L} - \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \quad c = \frac{L^2 \varepsilon^2}{\sigma_1^2}$$

となっているので、エミッタンス $\varepsilon$ 、および規格化エミッタンス $\varepsilon_n$ は、

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{ac}}{L^2}, \quad \varepsilon_n = \beta_{rel} \gamma_{rel} \frac{\sqrt{ac}}{L^2}$$

となる。 $(\beta_{rel}, \gamma_{rel})$ は相対論のもの、 $\beta_{rel} = \frac{v}{c}, \gamma_{rel} = 1/\sqrt{1 - \beta_{rel}^2}$

また、 $\beta_1, \alpha_1$ は以下となる。

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{a}{c}}, \quad \alpha_1 = \sqrt{\frac{a}{c}} \left( \frac{1}{L} - b \right)$$

# Q-scan による測定について

- 四極電磁石の設定値を変更するため、下流のビーム光学系が変わるため、ビームロスを引き起こす。ビームカレントや、ビームエネルギーが高い場合には注意が必要。
- 測定点での分散関数(Dispersion function)を調べておく。これは運動量のずれによる位置の変化を表したもので、 $x = \eta \frac{\Delta P}{P}$ の関係となっている。分散関数を考慮したビームサイズは以下のようなになる。

$$\sigma_{meas} = \sqrt{\beta\varepsilon + \eta^2 \left(\frac{\Delta P}{P}\right)^2} \quad \eta: \text{Dispersion function}, \frac{\Delta P}{P}: \text{Momentum spread}$$

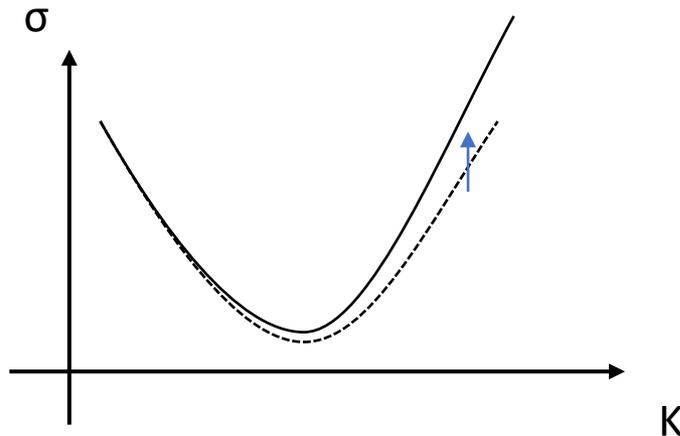
分散関数による寄与が無視できない場合、その影響を挿し引きする必要がある。エミッタンスを計算するには、 $\sqrt{\beta\varepsilon}$ の値がほしいので、

$$\sigma = \sqrt{\beta\varepsilon} = \sqrt{\sigma_{meas}^2 - \eta^2 \left(\frac{\Delta P}{P}\right)^2}$$

とする。

# Q-scan による測定について

- ビームを小さく絞って測定するため、ビームのエネルギーが低く、バンチの電荷密度が高い時には、空間電荷効果の影響を受ける。つまり、粒子間に働くクーロン力の影響により、ビームサイズが大きめに出る。



焦点で電荷密度が上がり影響を受けるので、焦点付近より先でビームサイズが大きめに出る。

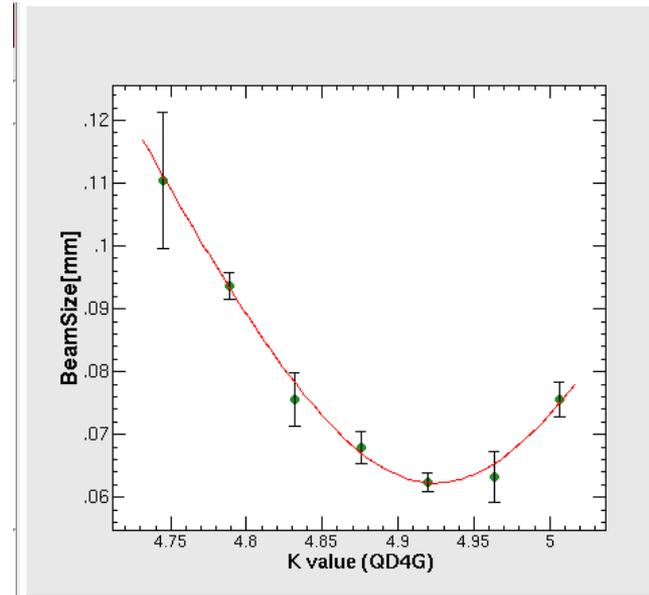
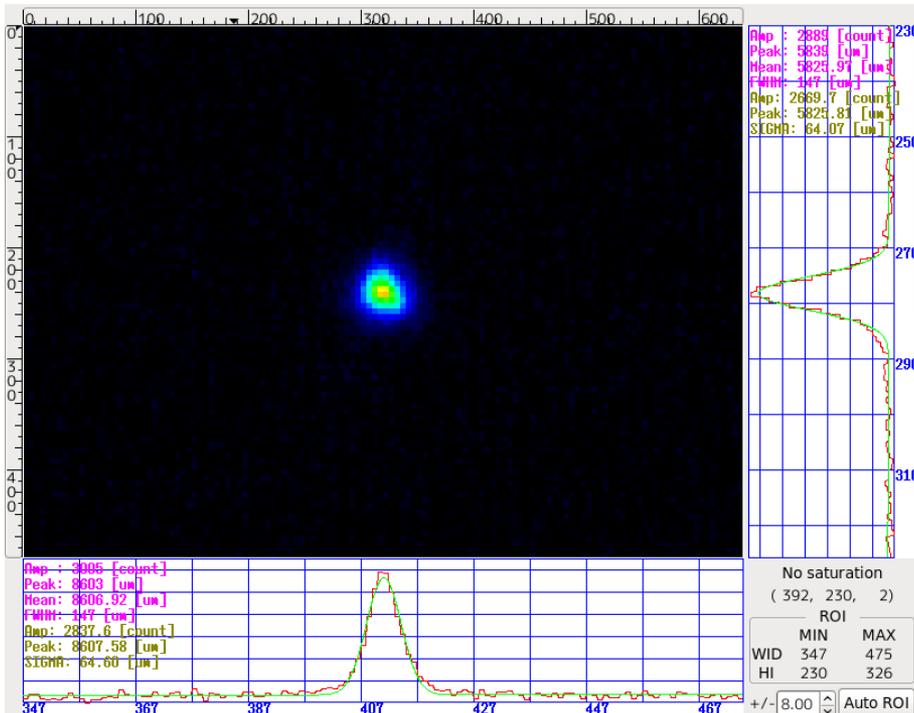
空間電荷効果の影響については、エンベロープ方程式を使って評価できる。

$$\sigma''_x = \frac{I}{I_0 \gamma^3 (\sigma_x + \sigma_y)} + \frac{\varepsilon_{n,x}^2}{\gamma^2 \sigma_x^3} \quad \sigma''_y = \frac{I}{I_0 \gamma^3 (\sigma_x + \sigma_y)} + \frac{\varepsilon_{n,y}^2}{\gamma^2 \sigma_y^3} \quad I_0 = \frac{4\pi \varepsilon_0 m c^2}{e}$$

また、Slit scanの方法を使うと、この問題を回避できる。

# Q-scanでのEmittance測定の実例

四極電磁石の磁場(具体的には電流値)を変えながら、サイズを測定。  
 22MeV, 0.5nC/bunchのビームのエミッタンスを測定したときのもの



**Result**

Residual  $\chi^2$ : 7.7862

**Emittance**

- Geometrical: 0.0986 ± 0.0019 [mm.mrad]
- Normalized: 4.3267 ± 0.085 [mm.mrad]

**Twiss Parameter**

At scanned Qmag

- Alpha = -23.895 ± 0.0284 [m]
- Beta = 6.9674 ± 0.0083 [m]

At Cavity out

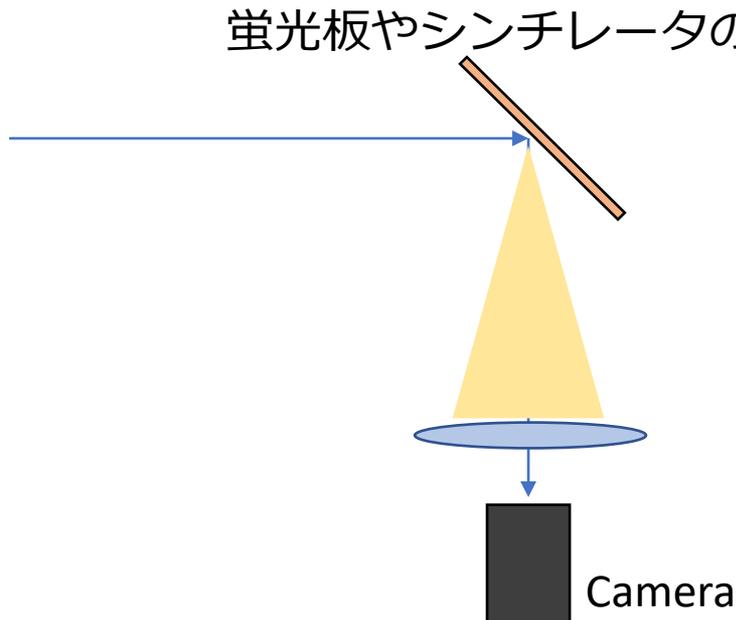
- Alpha = -1.2791 ± 0.0022 [m]
- Beta = 2.0618 ± 0.0035 [m]

OTR Screen monitorで測定した  
 2020/09/09  
 ビームプロファイル

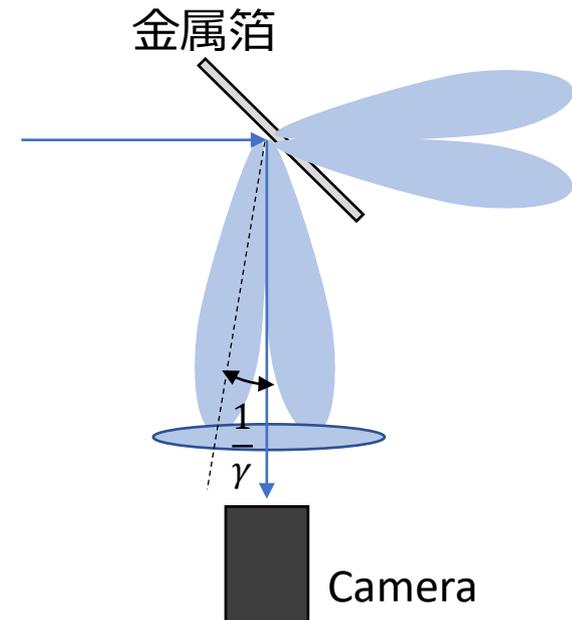
KEK小型電子加速器(LUCX)で測定されたもの

# Screen monitor

ビームが衝突すると発光するスクリーンをビームラインに挿入して、ビームの Transverse の位置分布(ビームサイズ)、位置、強度を測定する。スクリーンには蛍光板、シンチレータ、金属箔などを用いる。



Crをドーブしたアルミナ蛍光板や Ce:YAGが使われる。



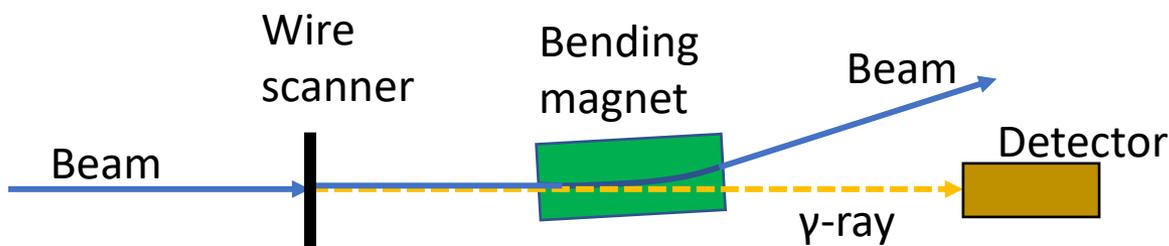
OTR(Optical Transition Radiation)は  $1/\gamma$  の角度で放射される

# Screen monitor

- アルミナ蛍光板
  - Cr<sub>2</sub>O<sub>3</sub>をドーブ(0.5%)したAl<sub>2</sub>O<sub>3</sub>の板。よくデマルケストと呼ばれる。
  - ビームが当たると赤く光る(中心波長693nm)。ビームカレントが低くても見える。
  - 板の内部で光が散乱されるので、滲んでサイズが実際より大きく見える。影響を減らすため100um厚など薄い板にして使用する。
- Ce:YAG
  - Ce:YAGシンチレータの黄色透明なセラミック。薄い板(100umなど)にして使用。
  - 可視域の蛍光。最大発光波長 525nm。
  - 発光減衰時間は70nsとアルミナ蛍光板より短い。
  - アルミナ蛍光板と比較して、内部での散乱は少なく、滲みは小さい。
- OTR(Optical Transition Radiation)
  - 金属箔にビームを当てる。KEKのcERLでは70um厚のSi板にAl蒸着したものを使用している。
  - $1/\gamma$ で光が放射されるため、低エネルギーではカメラへ入る光量が低くなり暗くなる。
  - 散乱による滲みはない。

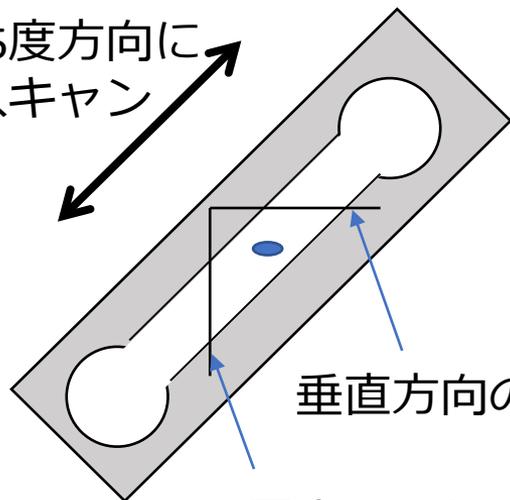
# Wire scanner

ワイヤー位置をスキャンし、衝突したビームからのガンマ線信号の強度変化を測定。スキャンしつつ信号を測定するので複数ショットのビームが必要。10umなど小さいビームサイズを測定するために使われる。



ATFではAir Chevenkov Counterを用いている。低エネルギーのバックグラウンド信号を避けるため。

45度方向にスキャン

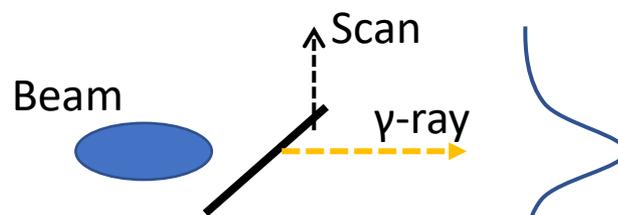


ワイヤーには直径10umのタングステンワイヤーや7umのカーボンワイヤーなどを用いる。

垂直方向のサイズ $\sigma_y$ を測定

水平方向のサイズ $\sigma_x$ を測定

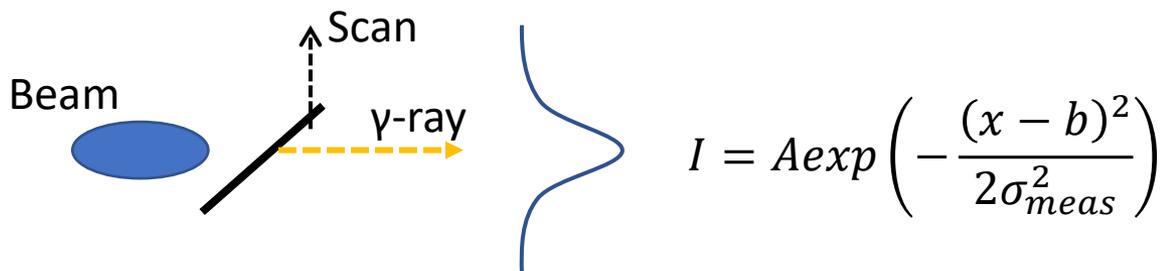
ビーム軸は紙面垂直方向



ワイヤー位置をスキャン。段々ビームにあたり信号が強くなっていき中心から外れてくると弱くなっていく信号強度の変化が得られる。

# Wire scanner

スキャンして得られた強度分布をガウシアンフィットしてビームサイズを得る。



ワイヤーを動かすムーバーは、斜め45度に動いているので、ワイヤーの位置  $x$  は、ムーバー位置  $p$  とすると、 $x = \frac{p}{\sqrt{2}}$  となる。

また、ビームサイズ  $\sigma_{beam}$  は、直径  $d$  のワイヤーのrmsである  $\sigma_{wire} = \frac{d}{4}$  を引いたものになる。

$$\sigma_{beam} = \sqrt{\sigma_{meas}^2 - \sigma_{wire}^2} = \sqrt{\sigma_{meas}^2 - d/4}$$

# Wire scanner

KEKのATFに導入されている Wire scanner

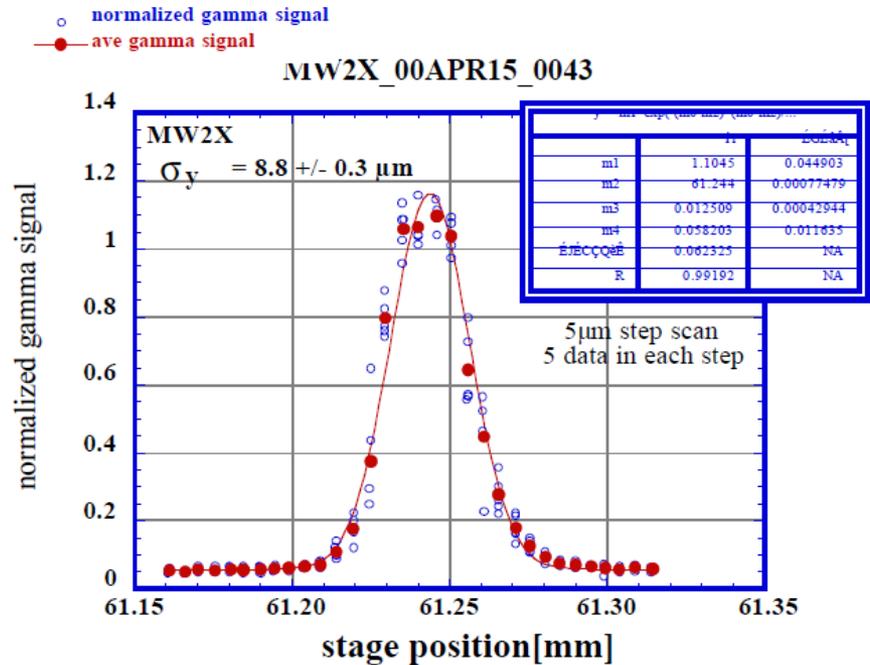
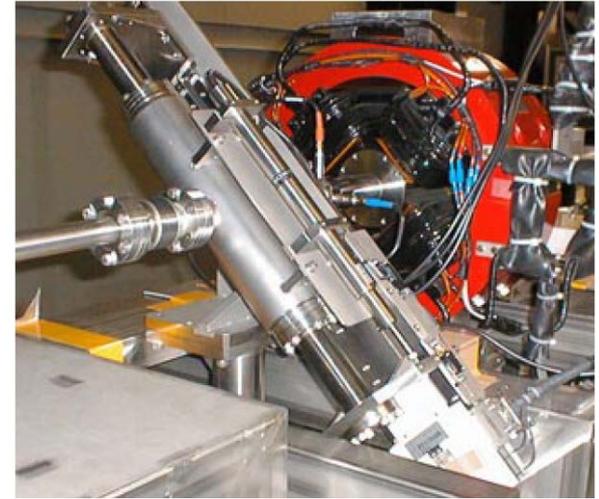
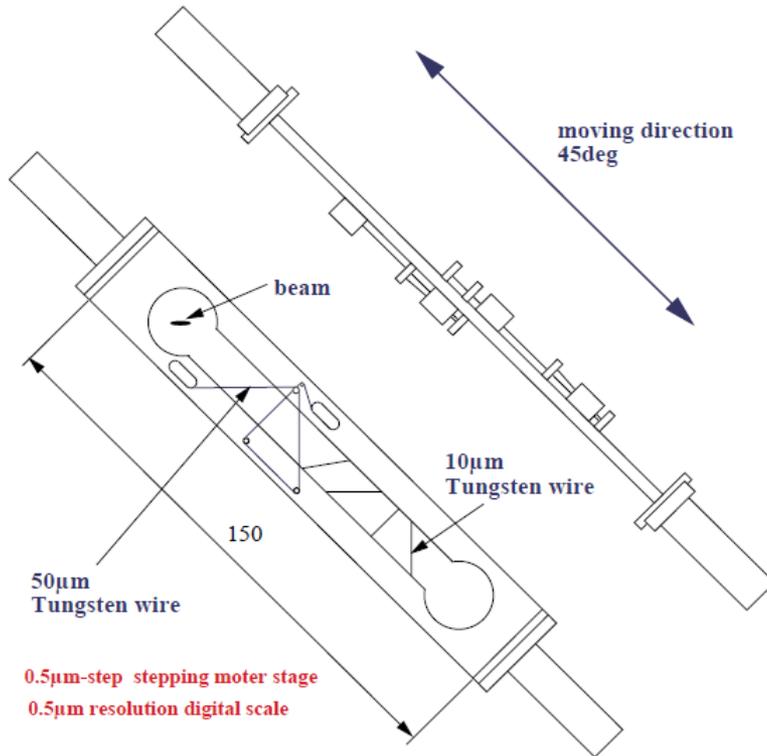
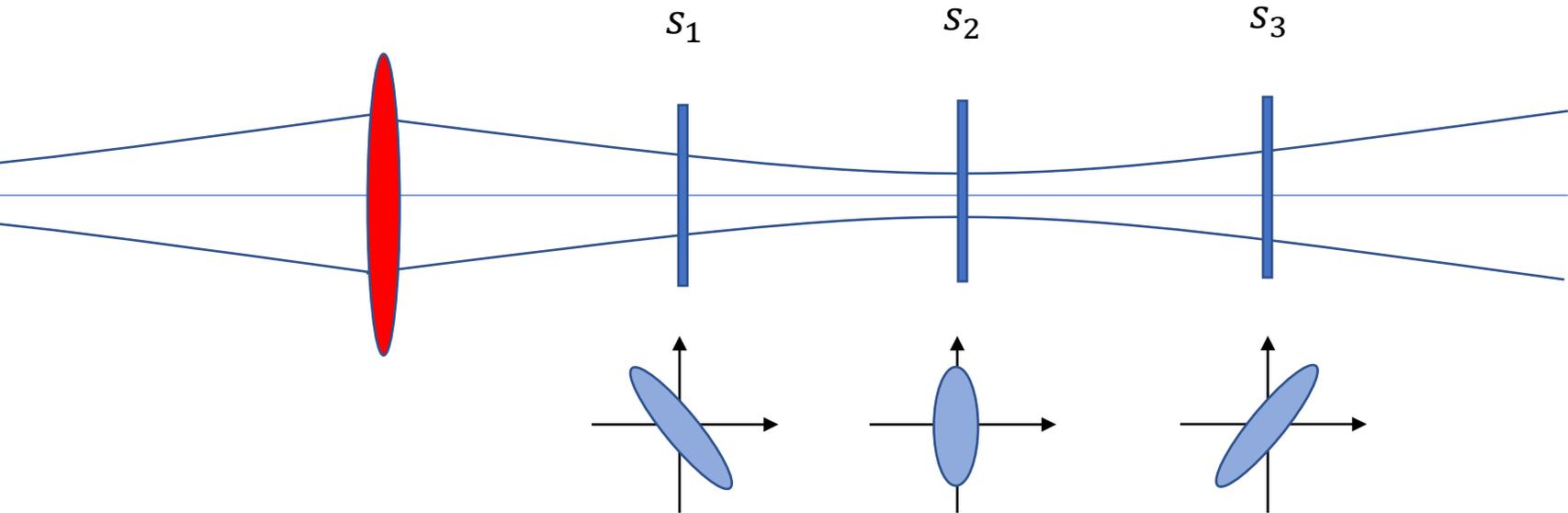


Fig.4: Example of scanned beam profile.

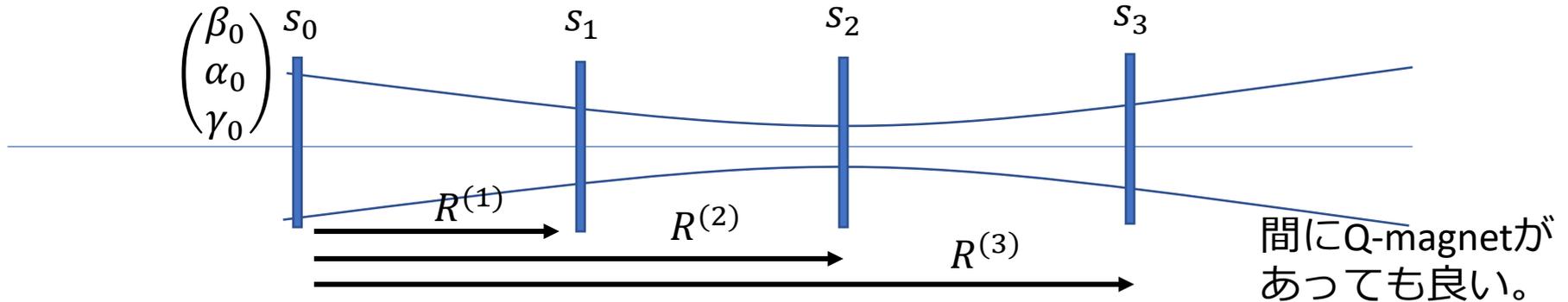
# エミッタンス測定(Phase plot)



異なる3か所以上でビームのサイズを測定すると、そのビームサイズとビーム光学系からエミッタンスが求まる。

四極電磁石の磁場を変えなくてよいので、下流のビームロスは起きにくい。

# エミッタンス計算(Phase plot)



$$\begin{pmatrix} \beta_2 \\ \alpha_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}^2 & -2m_{11}m_{12} & m_{12}^2 \\ -m_{11}m_{21} & m_{11}m_{22} + m_{12}m_{21} & -m_{12}m_{22} \\ m_{21}^2 & -2m_{21}m_{22} & m_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \alpha_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \beta\varepsilon$$

各測定点のビームサイズとS0での $\varepsilon$ 、Twissパラメータとの関係は以下となる。

$$\left(\sigma_x^{(1)}\right)^2 = \left(R_{11}^{(1)}\right)^2 \beta_0 \varepsilon - 2R_{11}^{(1)} R_{12}^{(1)} \alpha_0 \varepsilon + \left(R_{12}^{(1)}\right)^2 \gamma_0 \varepsilon$$

$$\left(\sigma_x^{(2)}\right)^2 = \left(R_{11}^{(2)}\right)^2 \beta_0 \varepsilon - 2R_{11}^{(2)} R_{12}^{(2)} \alpha_0 \varepsilon + \left(R_{12}^{(2)}\right)^2 \gamma_0 \varepsilon$$

$$\left(\sigma_x^{(n)}\right)^2 = \left(R_{11}^{(n)}\right)^2 \beta_0 \varepsilon - 2R_{11}^{(n)} R_{12}^{(n)} \alpha_0 \varepsilon + \left(R_{12}^{(n)}\right)^2 \gamma_0 \varepsilon$$

# エミッタンス計算(Phase plot)

まとめて書くと

$$\underbrace{\begin{pmatrix} (\sigma_x^{(1)})^2 \\ (\sigma_x^{(2)})^2 \\ \dots \\ (\sigma_x^{(n)})^2 \end{pmatrix}}_{\Sigma_x} = \underbrace{\begin{pmatrix} (R_{11}^{(1)})^2 & 2R_{11}^{(1)}R_{12}^{(1)} & (R_{12}^{(1)})^2 \\ (R_{11}^{(2)})^2 & 2R_{11}^{(2)}R_{12}^{(2)} & (R_{12}^{(1)})^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ (R_{11}^{(n)})^2 & 2R_{11}^{(n)}R_{12}^{(n)} & (R_{12}^{(1)})^2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_0 \varepsilon \\ -\alpha_0 \varepsilon \\ \gamma_0 \varepsilon \end{pmatrix}}_{\mathbf{o}}$$

よって、

$$\Sigma_x = \mathbf{B} \cdot \mathbf{o}$$

$\mathbf{o}$ は、最小二乗法によって求める。 $\chi^2$ は、以下のようになる。

$$\chi^2 = \sum_{l=1}^n \frac{1}{\sigma_{\Sigma_x}^2} \left( \Sigma_x^{(l)} - \sum_{i=1}^3 B_{li} o_i \right)^2 \quad \text{ここで、} \sigma_{\Sigma_x}^{(l)} \text{は、} \Sigma_x^{(l)} = (\sigma_x^{(l)})^2 \text{の誤差}$$

# エミッタンス計算(Phase plot)

以下のように規格化すると、以下のように書き直せる。

$$\hat{\Sigma}_x^{(l)} = \frac{\Sigma_x^{(l)}}{\sigma_{\Sigma_x^{(l)}}} \quad \hat{B}_{li} = \frac{B_{li}}{\sigma_{\Sigma_x^{(l)}}} \quad \chi^2 = \sum_{l=1}^n \left( \hat{\Sigma}_x^{(l)} - \sum_{i=1}^3 \hat{B}_{li} o_i \right)^2$$

これを最小にするパラメータを求めるため、極値条件を計算。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial o_1} \sum_{l=1}^n \left( \hat{\Sigma}_x^{(l)} - \sum_{i=1}^3 \hat{B}_{li} o_i \right)^2 &= 0 & \sum_{l=1}^n \hat{B}_{l1} \left( \hat{\Sigma}_x^{(l)} - \sum_{i=1}^3 \hat{B}_{li} o_i \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial o_2} \sum_{l=1}^n \left( \hat{\Sigma}_x^{(l)} - \sum_{i=1}^3 \hat{B}_{li} o_i \right)^2 &= 0 & \sum_{l=1}^n \hat{B}_{l2} \left( \hat{\Sigma}_x^{(l)} - \sum_{i=1}^3 \hat{B}_{li} o_i \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial o_3} \sum_{l=1}^n \left( \hat{\Sigma}_x^{(l)} - \sum_{i=1}^3 \hat{B}_{li} o_i \right)^2 &= 0 & \sum_{l=1}^n \hat{B}_{l3} \left( \hat{\Sigma}_x^{(l)} - \sum_{i=1}^3 \hat{B}_{li} o_i \right) &= 0 \end{aligned}$$

# エミッタンス計算(Phase plot)

まとめて書くと、

$$\hat{\mathbf{B}}^t(\hat{\Sigma}_x - \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{o}) = 0$$

となる。これから、 $\mathbf{o}$ は、以下のようになる。

$$\mathbf{o} = (\hat{\mathbf{B}}^t \hat{\mathbf{B}})^{-1} \hat{\mathbf{B}}^t \hat{\Sigma}_x = \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{B}}^t \cdot \hat{\Sigma}_x \quad \text{ここで } \mathbf{T} = (\hat{\mathbf{B}}^t \cdot \hat{\mathbf{B}})^{-1} \text{で共分散行列}$$

また、 $\mathbf{o}$ の誤差は $\sigma_{o_i} = \sqrt{T_{ii}}$ となる。

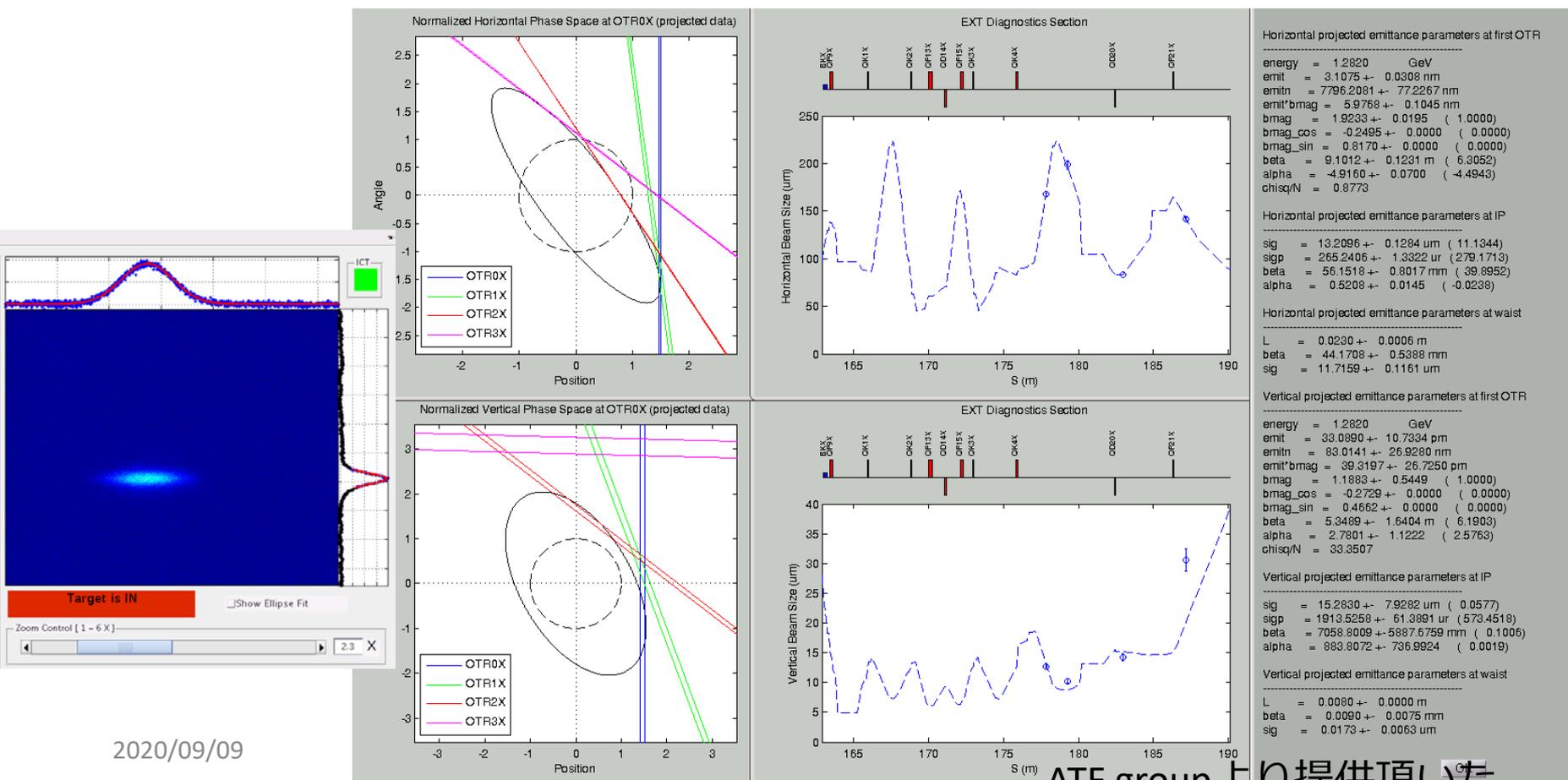
そして、エミッタンス $\varepsilon$ やTwissパラメータ $\alpha$ 、 $\beta$ は、

$$\varepsilon = \sqrt{o_1 o_3 - o_2^2} \quad \beta = \frac{o_1}{\varepsilon} \quad \alpha = -\frac{o_2}{\varepsilon}$$

となる。

# Phase plotでの測定例

KEKのATFでは4台のOTRモニタを使用してエミッタンスを測定している。



2020/09/09

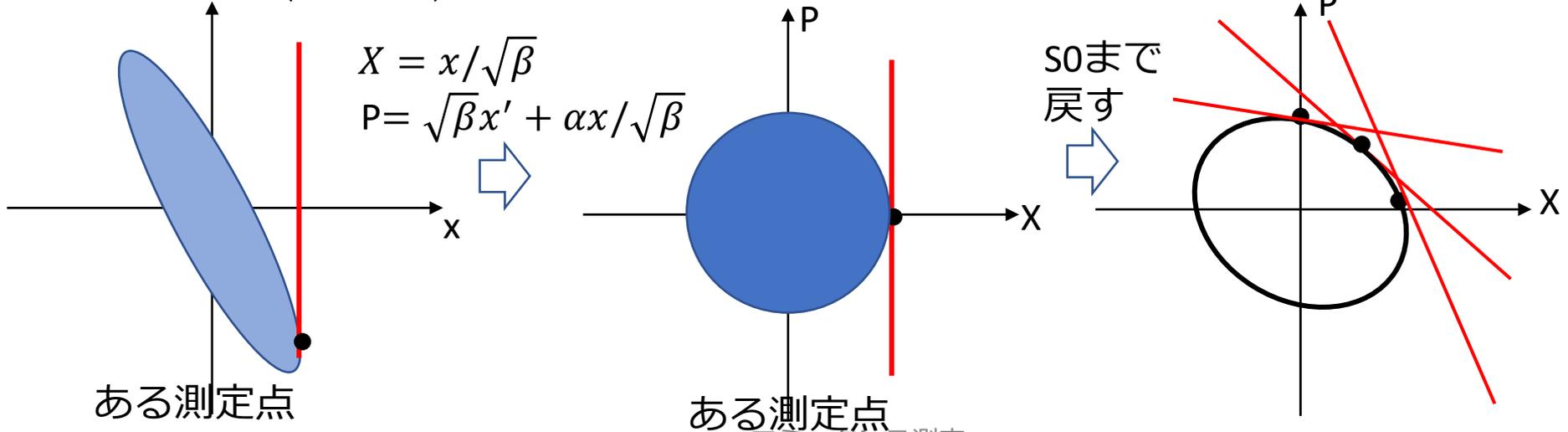
ATF groupより提供頂いた

# エミッタンス測定(Phase plot)

S1,S2,S3でビームサイズを測定し、それをS0まで戻すと左のようになり最低3つのデータがあれば楕円が決まる。つまり、S0での $\epsilon$ 、 $\alpha$ 、 $\beta$ が分かる。4点以上あれば、誤差が求まる。

また、測定点が近いとサイズ測定のバラつきに敏感になるので、離して測定する。測定点数が $N_{meas}$ の場合、測定点間の Phase advance  $\Delta\mu = 90^\circ / N_{meas}$  の位置に検出器を設置するとよい。

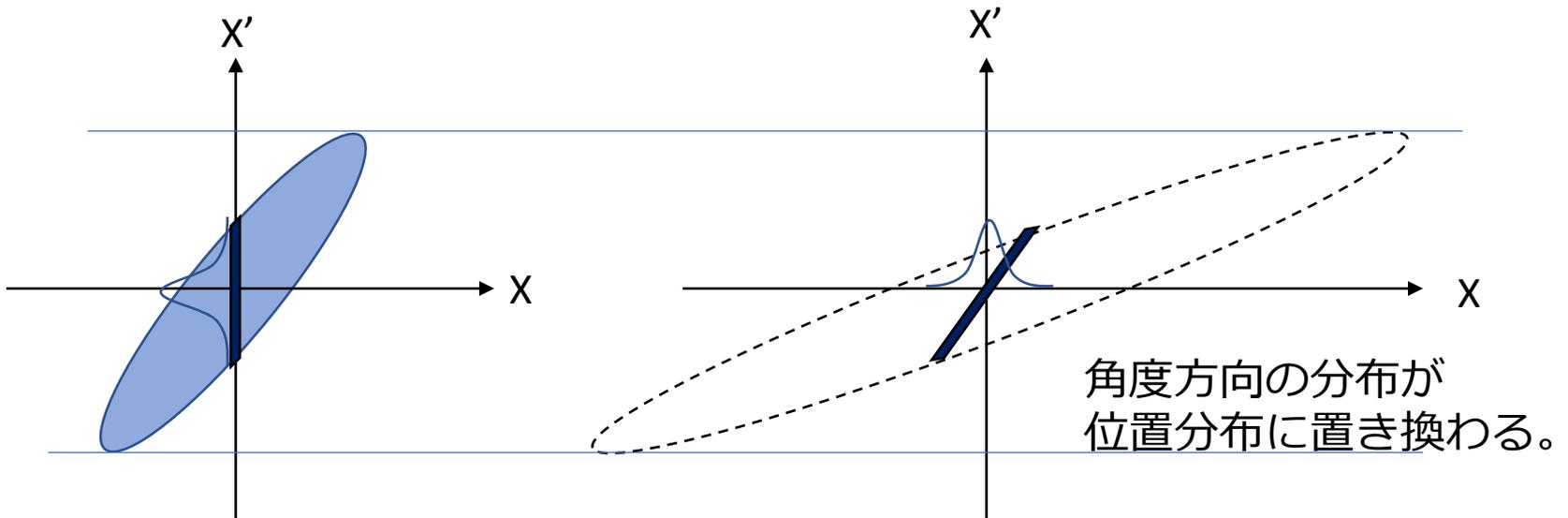
$$\frac{1}{\beta}x^2 + \beta \left( x' + \frac{\alpha}{\beta}x \right)^2 = A^2 \quad X^2 + P^2 = A^2$$



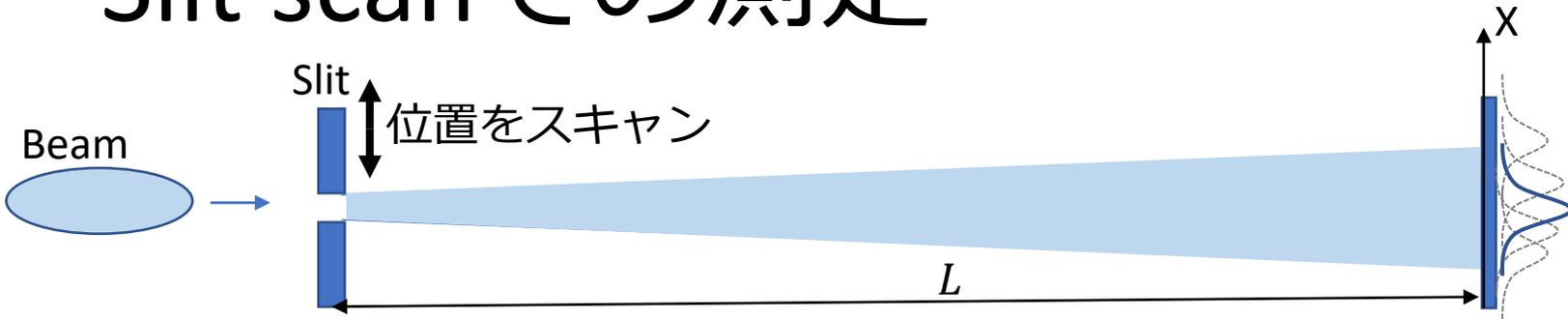
# エミッタンス測定(Slit scan)



ビームの一部を切り出し、ドリフトスペースを飛ばす。  
Divergenceを持っているので、切り出されたビーム片は広がっていく。  
広がったところで、このプロファイルを測定すると、角度分布が得られる。



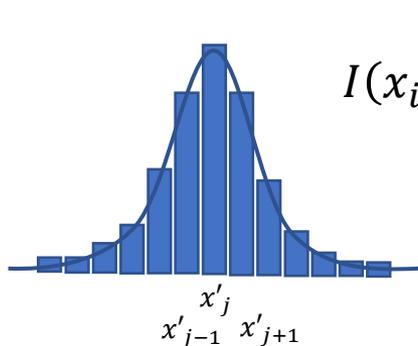
# Slit scanでの測定



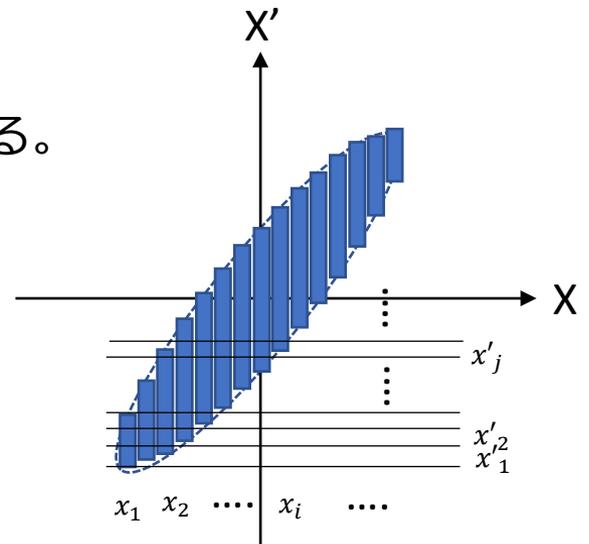
スリットの位置 $x_i$ をスキャンし、その位置毎のプロファイルを測定。  
それを位相空間上にプロットすると、位相空間上の $x_i, x'_j$ に対して、  
強度  $I(x_i, x'_j)$  が得られる。

$$x' = (x - x_i)/L$$

Gaussian フィットすると各 $x_i$ での強度分布が得られる。



$$I(x_i, x') = A \exp\left(-\frac{(Lx' - (b - x_i))^2}{2(\sigma^2 - \sigma_{slit}^2)}\right)$$



# エミッタンスの計算(Slit scan)

エミッタンスは以下の式で計算。

$$\varepsilon = \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle x'^2 \rangle - \langle xx' \rangle^2}$$

各点の強度の情報から以下を計算する。

$$\langle x \rangle = \frac{\sum_{i,j} x_i I(x_i, x'_j)}{\sum_{i,j} I(x_i, x'_j)}, \quad \langle x' \rangle = \frac{\sum_{i,j} x'_j I(x_i, x'_j)}{\sum_{i,j} I(x_i, x'_j)}$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\sum_{i,j} (x_i - \langle x \rangle)^2 I(x_i, x'_j)}{\sum_{i,j} I(x_i, x'_j)} \quad \langle x'^2 \rangle = \frac{\sum_{i,j} (x'_j - \langle x' \rangle)^2 I(x_i, x'_j)}{\sum_{i,j} I(x_i, x'_j)},$$

$$\langle xx' \rangle = \frac{\sum_{i,j} (x_i - \langle x \rangle)(x'_j - \langle x' \rangle) I(x_i, x'_j)}{\sum_{i,j} I(x_i, x'_j)}$$

# Slit scanでの測定について

- ビームをスリットで切り出す必要があるので、低エネルギーで使われる。
- 低エネルギービームでは、空間電荷効果の影響を受けやすい。Q-scan法ではこの影響が大きい場合、こちらの方法を使う。ビームの一部を切り出し電荷量が減るので、この影響を受けずにエミッタンス測定ができる。

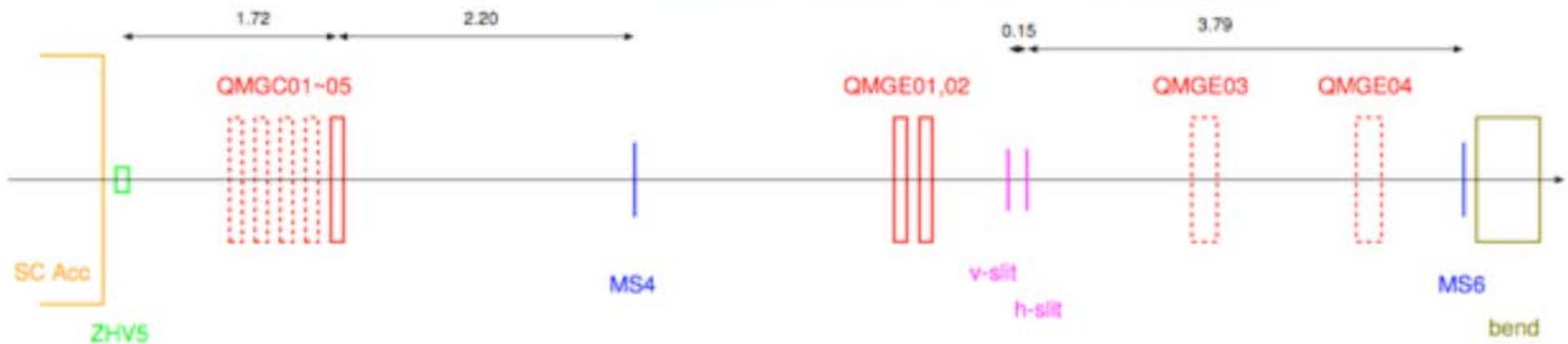
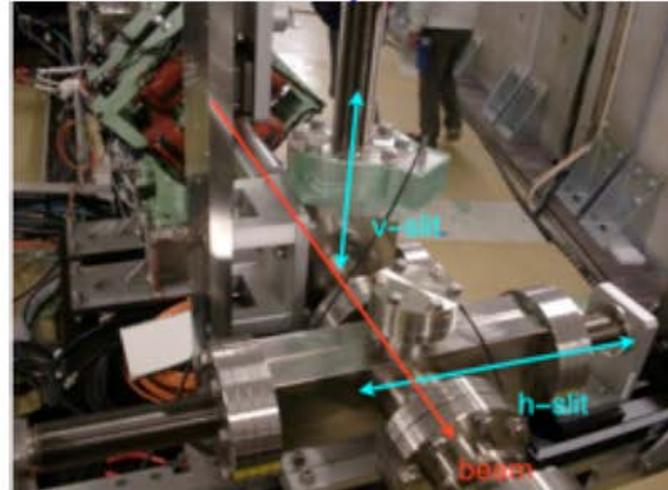
- ビーム片の空間電荷効果の影響については、エンベロープ方程式を使って評価できる。

$$\sigma''_x = \frac{I}{I_0 \gamma^3 (\sigma_x + \sigma_y)} + \frac{\varepsilon_{n,x}^2}{\gamma^2 \sigma_x^3} \quad \sigma''_y = \frac{I}{I_0 \gamma^3 (\sigma_x + \sigma_y)} + \frac{\varepsilon_{n,y}^2}{\gamma^2 \sigma_y^3} \quad I_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0 mc^2}{e}$$

- モニタ上でのビームサイズがスリット幅に比べて十分大きい必要がある。  
例えばスリット幅100 $\mu\text{m}$ なら、このrmsは $\frac{100}{\sqrt{12}} \sim 30\mu\text{m}$ で、モニタ上のサイズは、これより十分大きい必要がある。
- 位置分解能はスリット幅に依存。また、角度分解能はモニタの分解能とスリットとモニタの距離に依存。
- スリット幅を狭くし、ステップ幅を小さくとれば位置の分解能は上がるが、測定に時間がかかる。ショット毎のビーム安定性が良くないと誤差が増える。

# Slit scanの装置

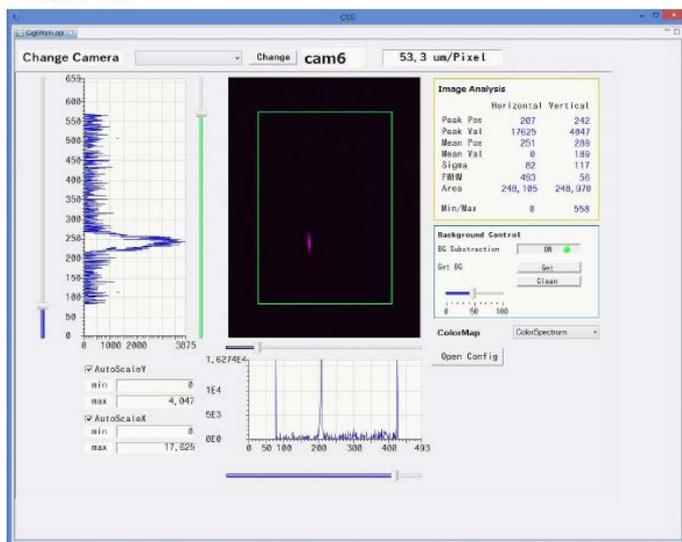
KEKの cERLで使用されている Slit scanの装置



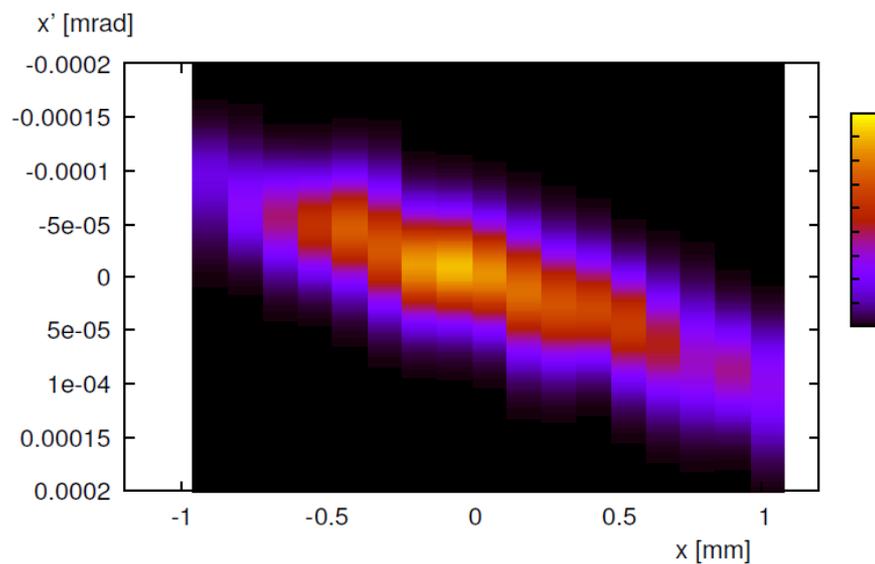
# Slit scan の測定例

スキャン時のプロファイル

with h-slit

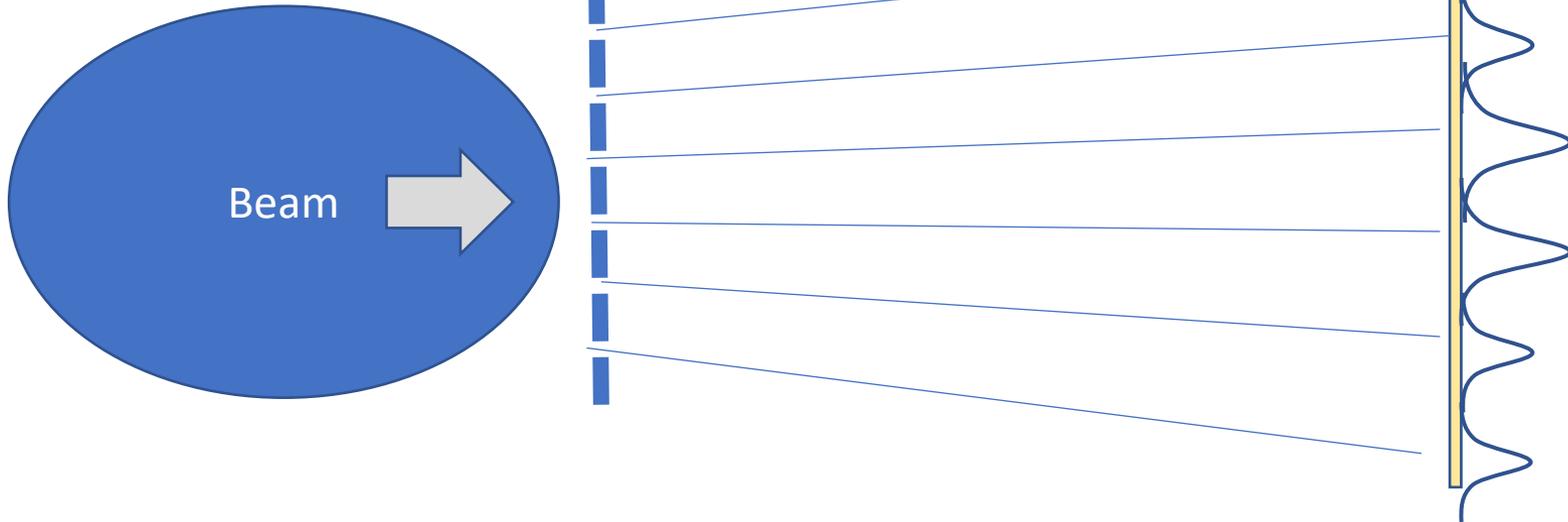


位相空間分布



規格化エミッタンス :  $0.210 \pm 0.004 \mu\text{m}$

# Pepperpot



スリットの代わりに、小さい穴を使う。

X, Y両方向にメッシュ状に穴の開いた板にビームを当てて、ビームを切り出し各々の穴のビームプロファイルから、その点(x,y)での(x',y')が求まるので、スリットスキャンと同じようにエミッタンスを測定できる。

X,Yの両方のエミッタンスを1ショットで測定できる。

全ての穴からのビーム片のプロファイルを同時に測定するため、プロファイルがオーバーラップしないようにしなければならない。

# まとめ

- Q-scan
  - 四極電磁石の磁場強度を変更したときの downstream でのビームサイズの変化からエミッタンスを計算。
  - 四極電磁石とスクリーモニタがあればよいので、測定しやすい。
  - downstream でロスが出やすい。高エネルギー、高カレントビーム → Phase plot
  - 低エネルギーで高電荷密度だと空間電荷効果の影響が出る → Slit scan
- Phase plot
  - 異なる3点以上の場所で測定したビームサイズからエミッタンスを計算。
  - 四極電磁石の磁場は変えないので、Q-scanよりロスしにくく、高エネルギーや高カレントのビームでも測定しやすい。
- Slit scan
  - スリットでビームの一部を切り出し、自由空間を挟むことで発散角  $x'$  を位置  $x$  に置き換え測定、 $x, x'$  から算出する方法。
  - 切り出したビームは電荷量が下がるので、空間電荷効果の影響を受けずに測定可能。ただ、それ以外をスリットで止める必要があるため、低エネルギービームで使用される。
- Pepperpot
  - スリットスキャンと原理は同じ。
  - $X, Y$  同時に1ショットでエミッタンスが測定できる。

# 参考文献

エミッタンス測定について説明は、過去のOHOの各テーマ内で取り上げられている。今回の発表資料を作るにあたり、以下のOHOや文献を参考にさせて頂いた。

- 榎本収志, 「3. 電子リニアックのビーム・モニタ」, OHO86
- 小林仁, 「4. 電子線形加速器」, OHO88
- 森義治, 「1. イオン源」, OHO89
- 阪井寛志, 「8. ビーム計測」, OHO02
- 佐藤康太郎, 「1. ビーム輸送の物理」, OHO07
- 西森信行, 「6. ERL電子銃」, OHO08
- 佐藤健一郎, 「6. ビームモニター 2: ビームプロファイルモニタ」, OHO10
- 池上雅紀, 「12ライナックとRFQの物理 1:ライナックのビーム物理」, OHO10
- 渡川和晃, 「5. 低エミッタンス熱電子銃」, OHO13
- 前坂 比呂和, 「10. 高精度ビーム診断」, OHO13
- 宮島 司, 「4. ERLのビーム力学」, OHO15
- 高井良太, 「9. ERLを支えるビームモニター」, OHO15
- 久保木 浩功, 「7. 陽子ビームモニタ」, OHO18
- 夏井 拓也, 「3. 入射器の概略・全体(1)(2)」, OHO19

# 参考文献

- Michiko G. Minty, Frank Zimmermann, “Measurement and Control of Charged Particle Beams,” Springer, Chapter 4.1 Beam Emittance Measurements, (2003)
- Uli Raich, “Emittance measurements”, U.S. Particle Accelerator School (<https://uspas.fnal.gov/>), Accelerator and Beam Diagnostics (2009)
- 細野米市, et.al., 「アルミナ蛍光板の発光特性」、第27回 リニアック技術研究会, 8P-26
- H. Hayano, “Wire scanners for Small Emittance Beam Measurement In ATF”, Proc of 20th International Linac Conference, MOC01