OHO'20
光モニター

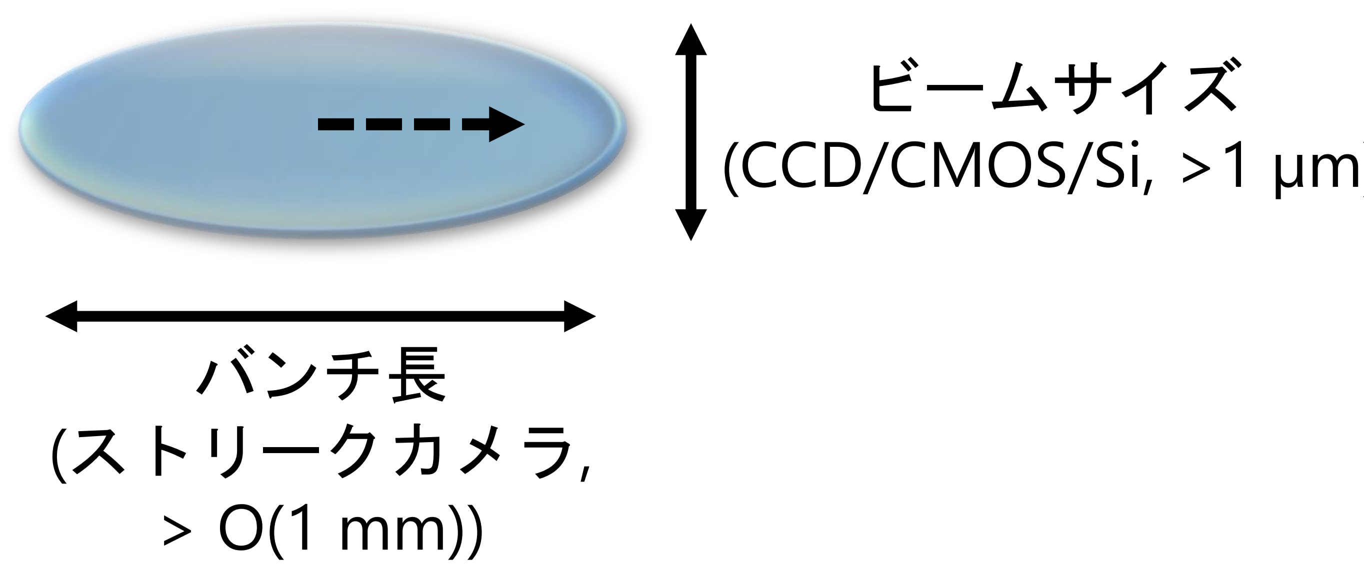
高エネルギー加速器研究機構　加速器研究施設

三塚　岳

2020年 9月 10日

光モニター = 光を用いたビーム診断装置

- **光源：加速された荷電粒子が放射する電磁波 (可視光, 紫外線, X線…)**
  - ***シンクロトロン放射 (放射光)***
  - 光学的遷移放射
- **光学測定技術：**
  - ***結像光学系***
  - 干渉計
- **光センサー：**
  - ***CCD/CMOSイメージセンサー (通常のカメラ, 高速ゲートカメラ~O(nsec))***
  - ストリークカメラ (高時間分解能~100 fs)
  - 光電子増倍管, ***半導体検出器***
- **診断対象：**
  - ***ビームサイズ***
  - プロファイル
  - 時間構造

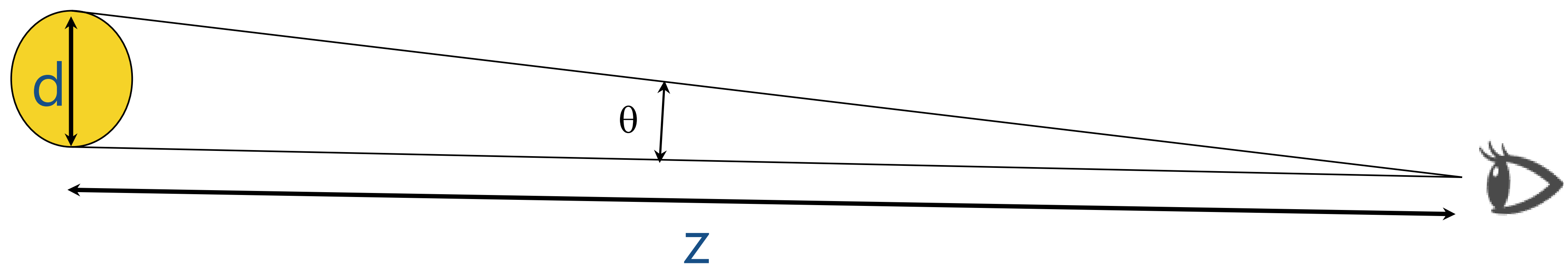


ビームサイズモニターへの要求

- 加速器が想定する最小ビームサイズを測定できる
  - 放射光施設ではσ<10 umなことも(普段は大σでも)
  - ILCではσ<1 umを要求している
  - SuperKEKBではσ_{min}~10-20 um
- ビームサイズの変動を動的(バンチ毎)に測定できる
  - 静的に精度よく測るのももちろん重要だが…
  - 入射直後はエミッタンスが大きい
  - 電子雲効果などによりビームサイズの増大が起こる
- 安定稼働
  - 結局は故障がなく環境変化に強いモニターが喜ばれる
  - ハードとソフトの両方が重要

代表的な光モニター

角直径 (視直径)



距離(z)の位置から対象物を見た時の見かけの大きさを、その対象物の直径(d)を見込む角度(θ)で表した値

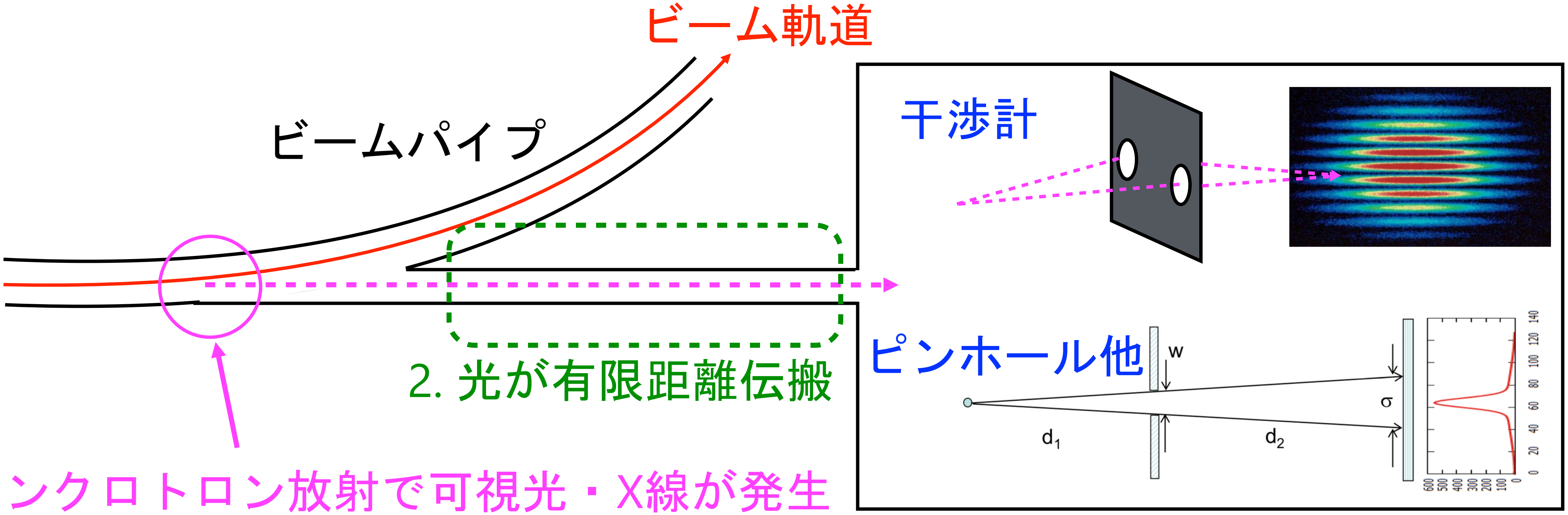
$$\theta = 2\tan^{-1}\left(\frac{d}{2z}\right) \approx \frac{d}{z}$$

手法	波長 [nm]	測定可能な最小ビームサイズ (角直径 [μrad])	100m離れた地点での光像のサイズ (μm)	1000m離れた地点での光像のサイズ (μm)
可視光 結像系	500	5	500	5000
可視光 干渉計	500	0.47	47	470
X線 ピンホール	0.1	0.5	50	500
X線 マルチスリット	0.1	0.1	10	100
X線 FZP	0.35	0.3	30	300
X線 干渉計	0.1	0.01	1	10

講義の概要

- **放射光を用いたビームサイズモニターに焦点を絞って議論。**
  - **SuperKEKB X線ビームサイズモニターを例に挙げる。**
- シンクロトロン放射(放射光発生機構)と光学(回折)の基礎を学ぶ。
  - SuperKEKBにおけるX線強度とスペクトラムを実際に計算。
- ビームサイズモニターを運用する上での注意点を学ぶ。

ビームサイズ測定の原理



3. 光の太さを種々の検出器で測定

(ひとまずエミッタンスを無視すると)
測定した光の太さ→発光点での光の太さ≒ビームの太さ(ビームサイズ)

重要なのは
1. 光(電磁波)の発生
2. 光の伝搬
3. 光の測定

1. 光(電磁波)の発生

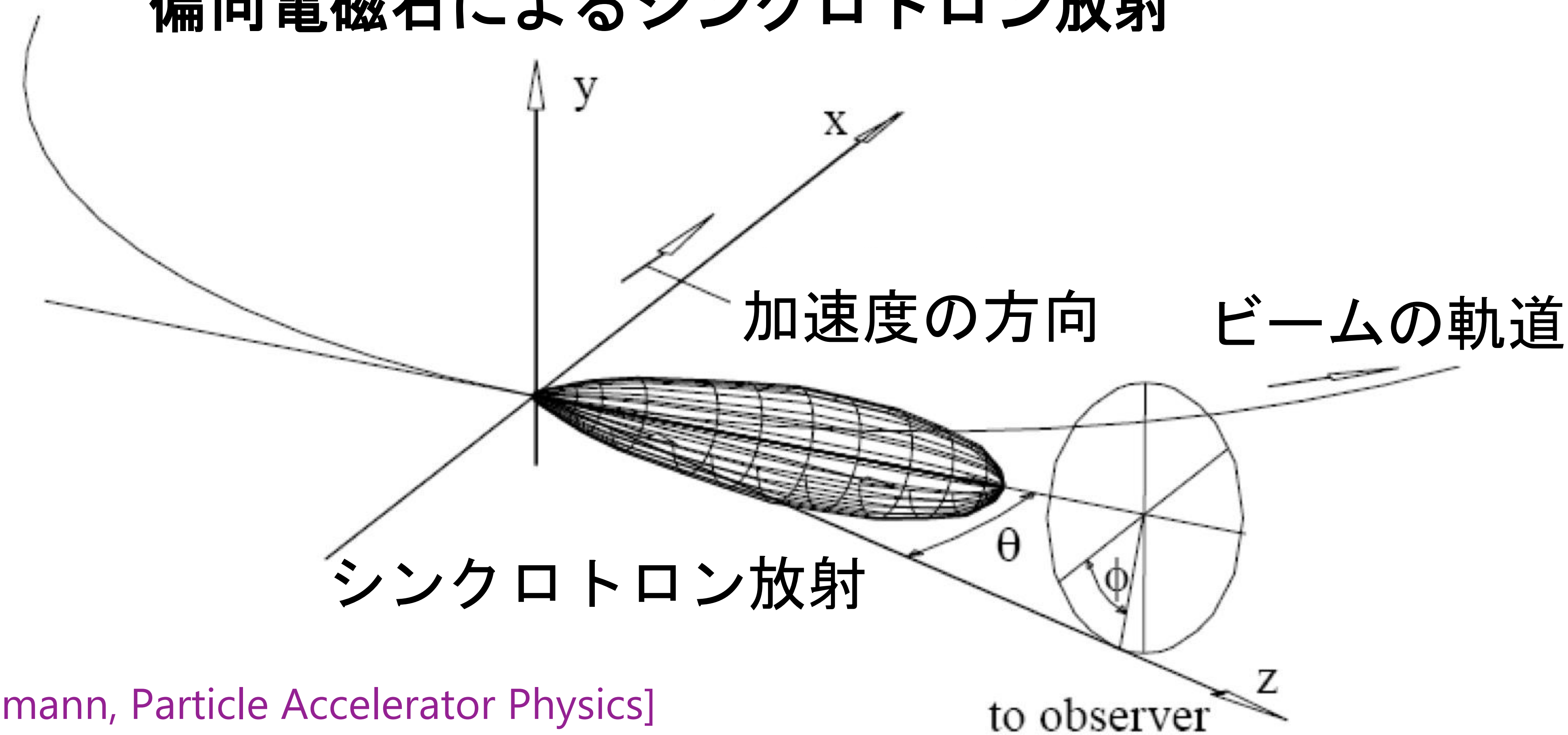
「1.光(電磁波)の発生」の目次

- シンクロトロン放射を定性的に理解する
- シンクロトロン放射強度の式を解析的に導出する
- SuperKEKBのX線放射強度とスペクトラムを計算

シンクロトロン放射

(1) 電荷eを持つ
(2) 光速に近い速度で運動している (v~光速度c)
(3) 加速度運動している
　ときに放出する電磁波を**シンクロトロン放射**と呼ぶ。

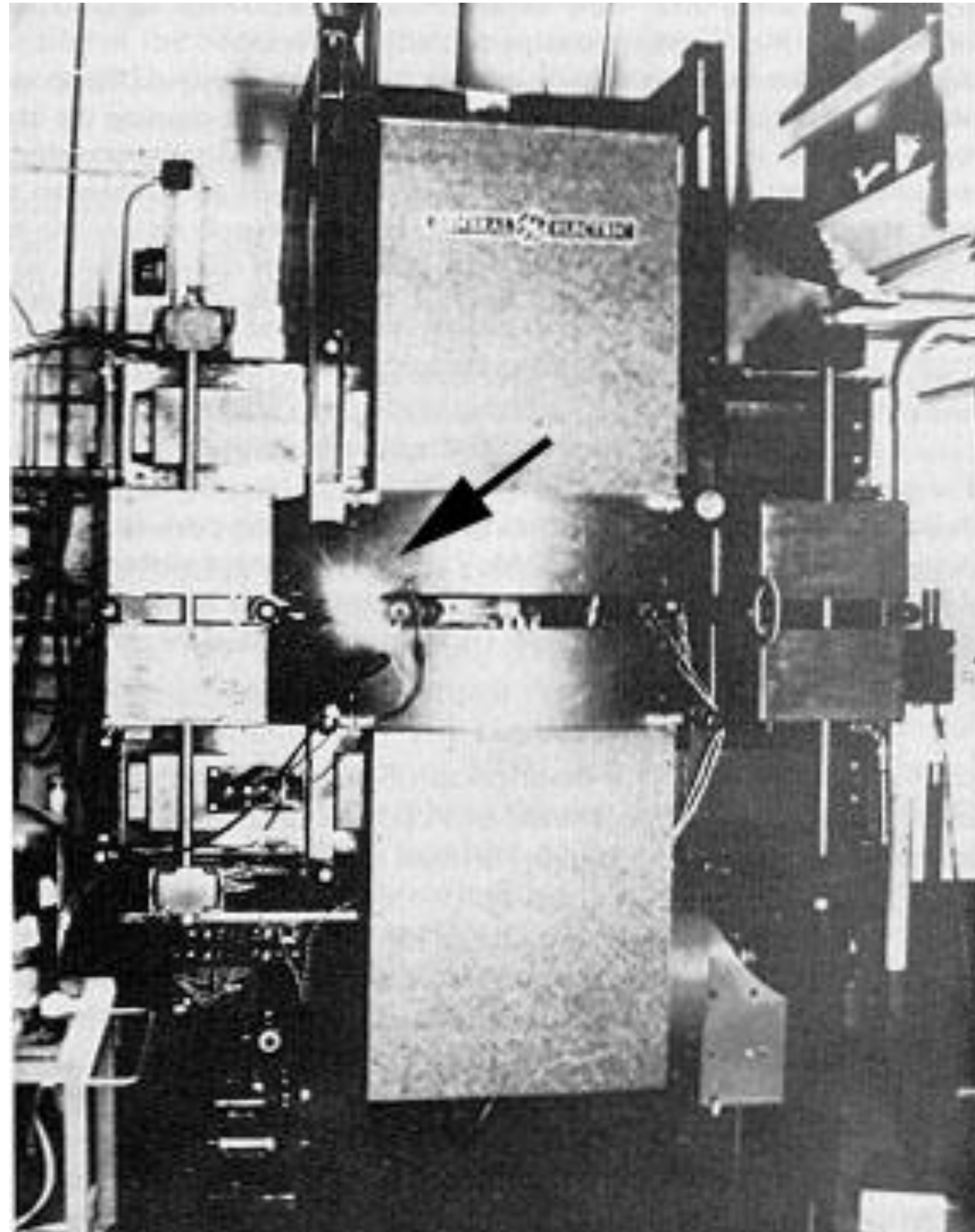
偏向電磁石によるシンクロトロン放射



[Wiedemann, Particle Accelerator Physics]

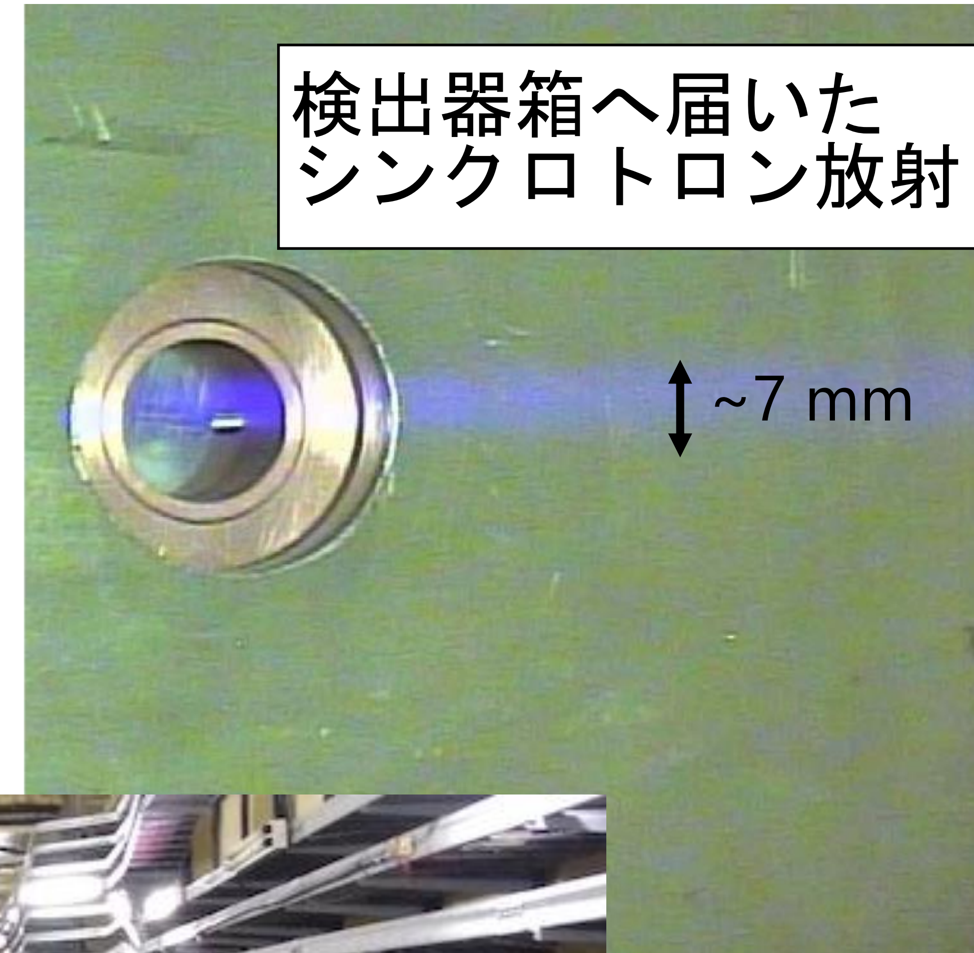
1947年にGEのシンクロトロンで初めて観測された

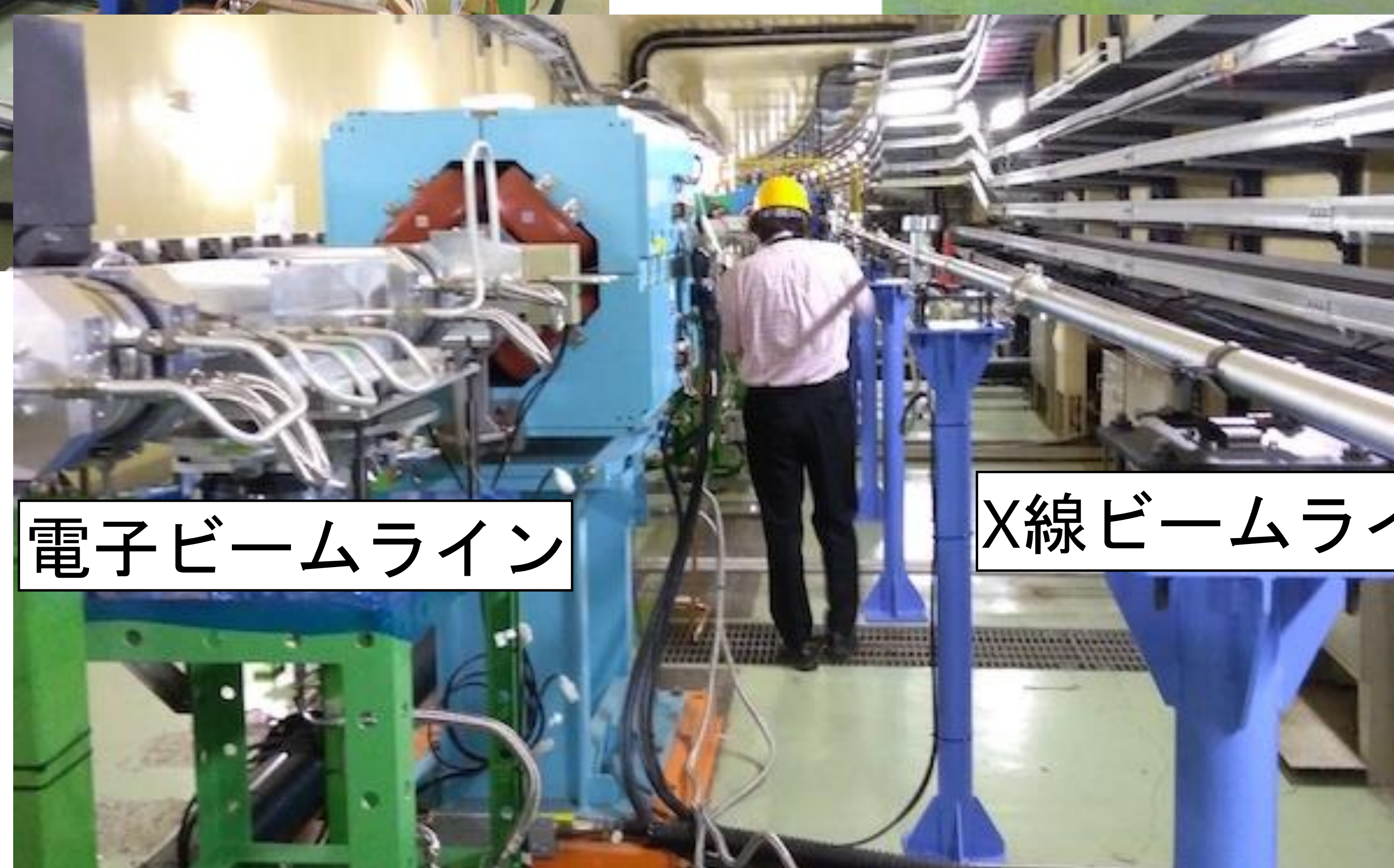
[NSLS, Brookhaven]



[Lawrence Berkeley National Laboratory]

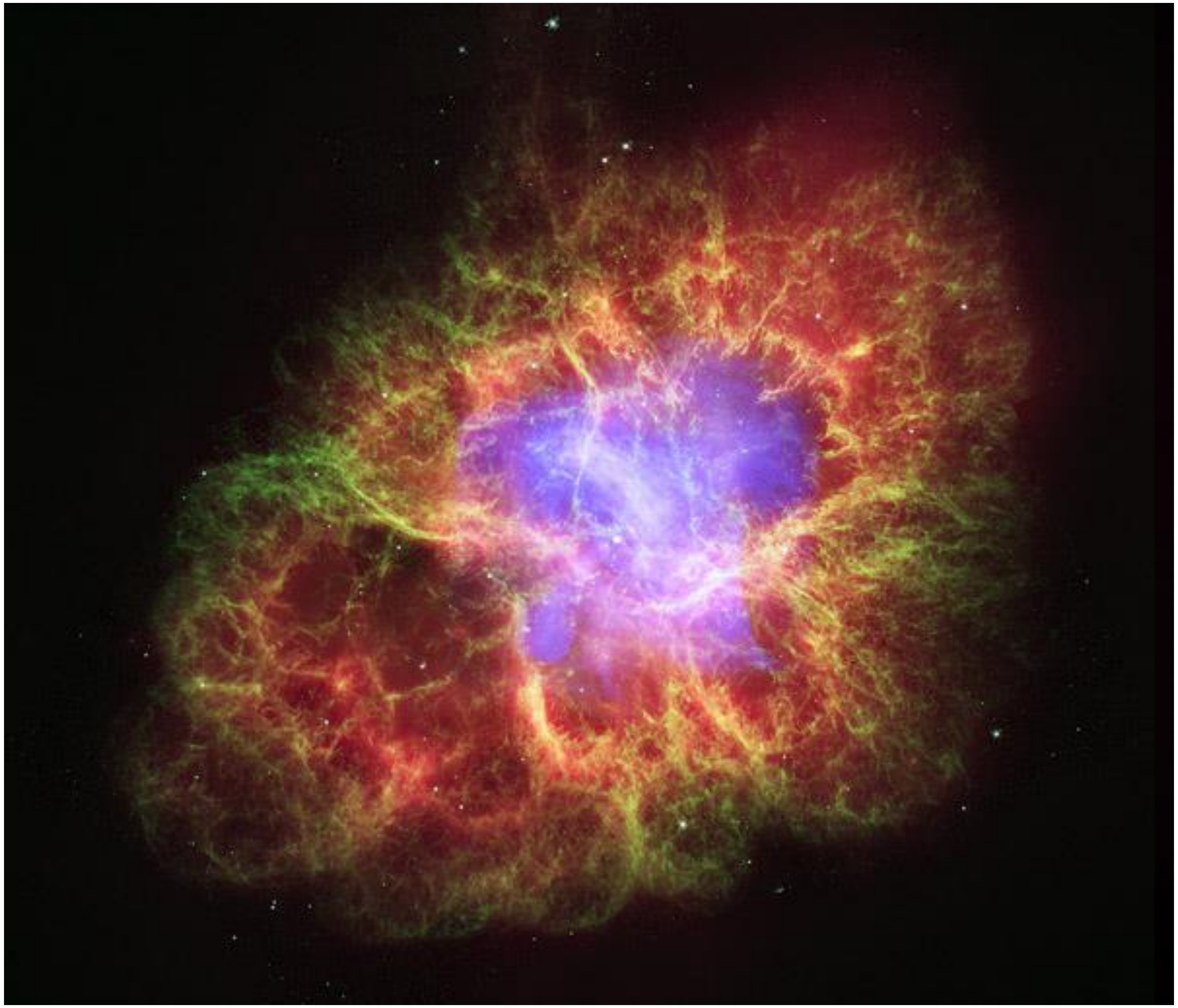
SuperKEKBのシンクロトロン放射





宇宙のシンクロトロン放射

かに星雲



[NASA]

中性子星の近くで発生した高エネルギー電子が強磁場中を移動
ハッブル(可視光) + チャンドラ(X線)

シンクロトロン放射の注意すべき性質

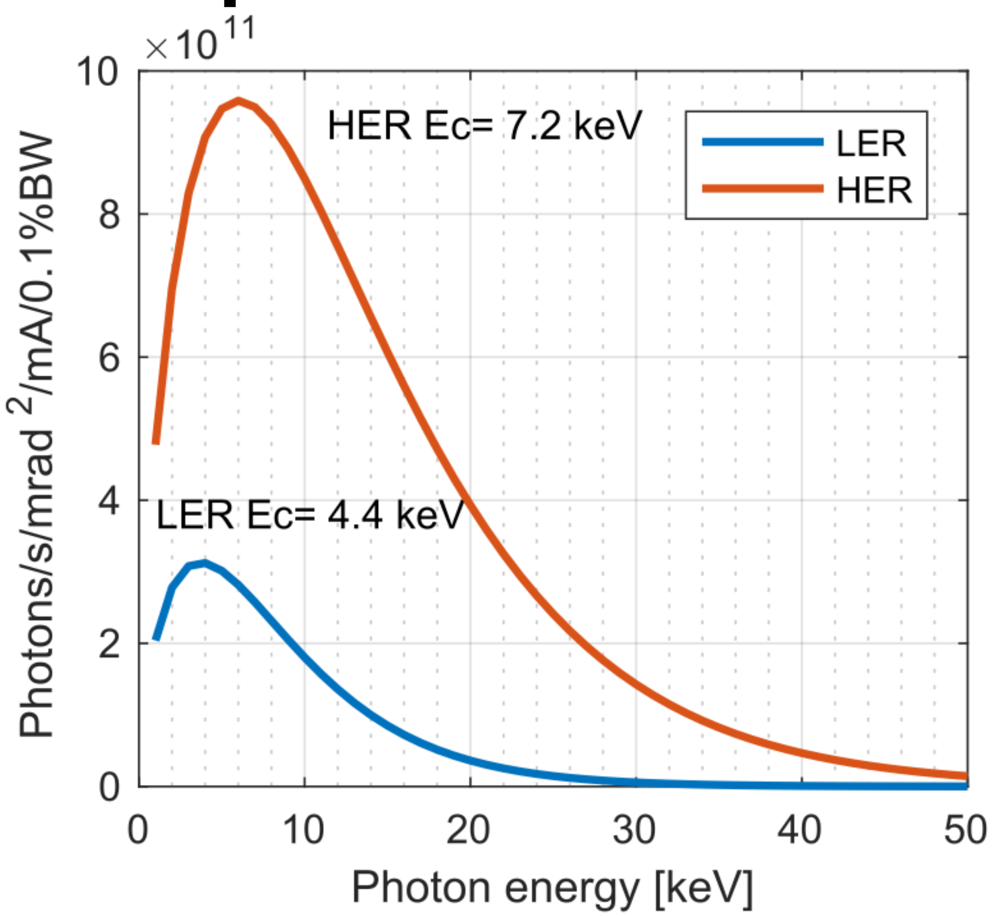
- 強度
- 波長
- 空間的な広がり (3次元的な広がり, 方向)
- 時間的な広がり (パルス性)

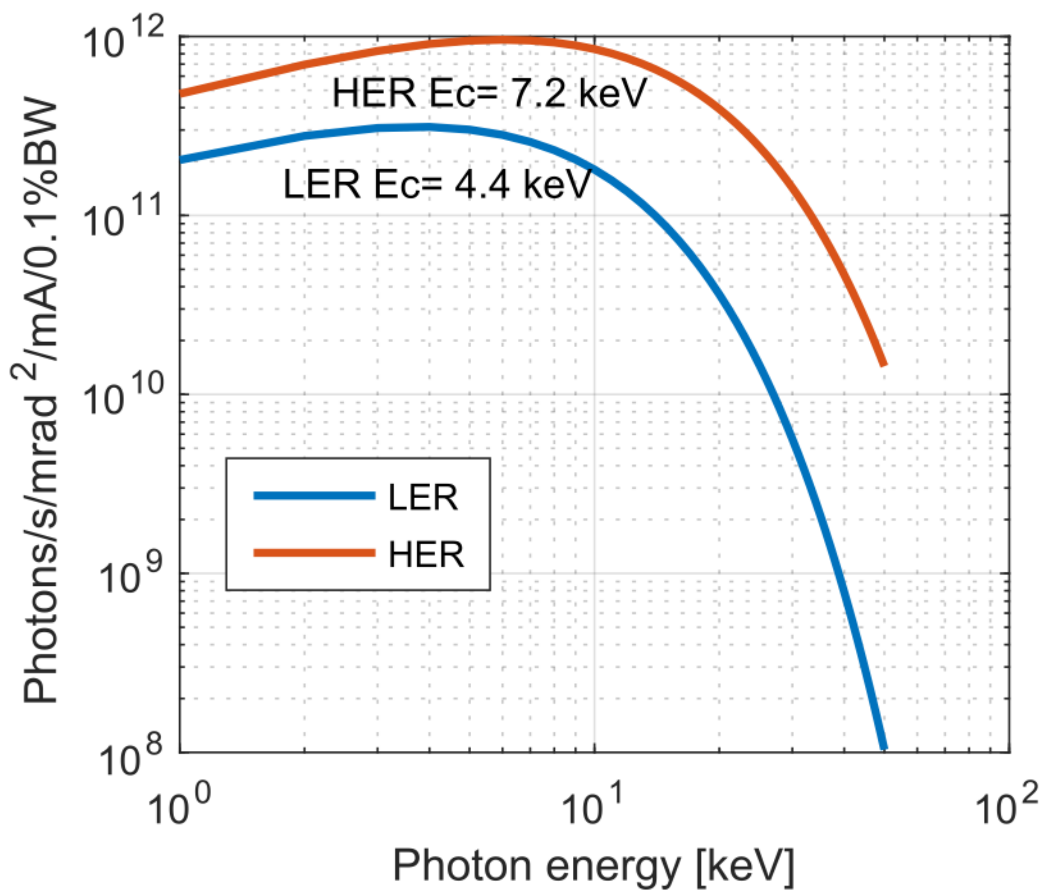
シンクロトロン放射強度

放射強度スペクトラム [K.-J. Kim, AIP conf. proc. 184, 565]

$$\frac{d^2 N_{\mathrm{ph}}}{d\Omega} = 1.33 \times 10^{13} E^2\,[\mathrm{GeV}^2] I_b [\mathrm{A}] H_2(\omega/\omega^*) \frac{\mathrm{photons}}{\mathrm{s\,mrad}^2\,(0.1\%\,\mathrm{BW})}$$

SuperKEKBのシンクロトロン放射スペクトラム → X線

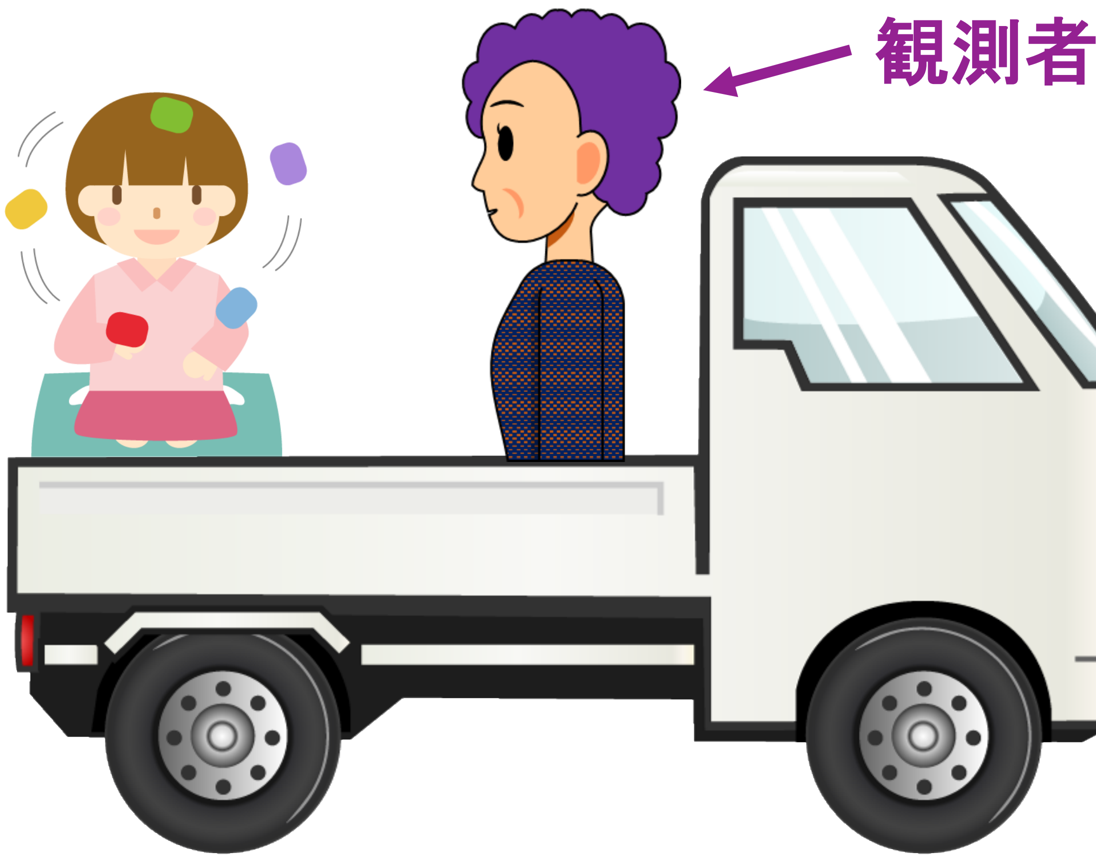




[Mulyani et al, NIM A 919, 1]

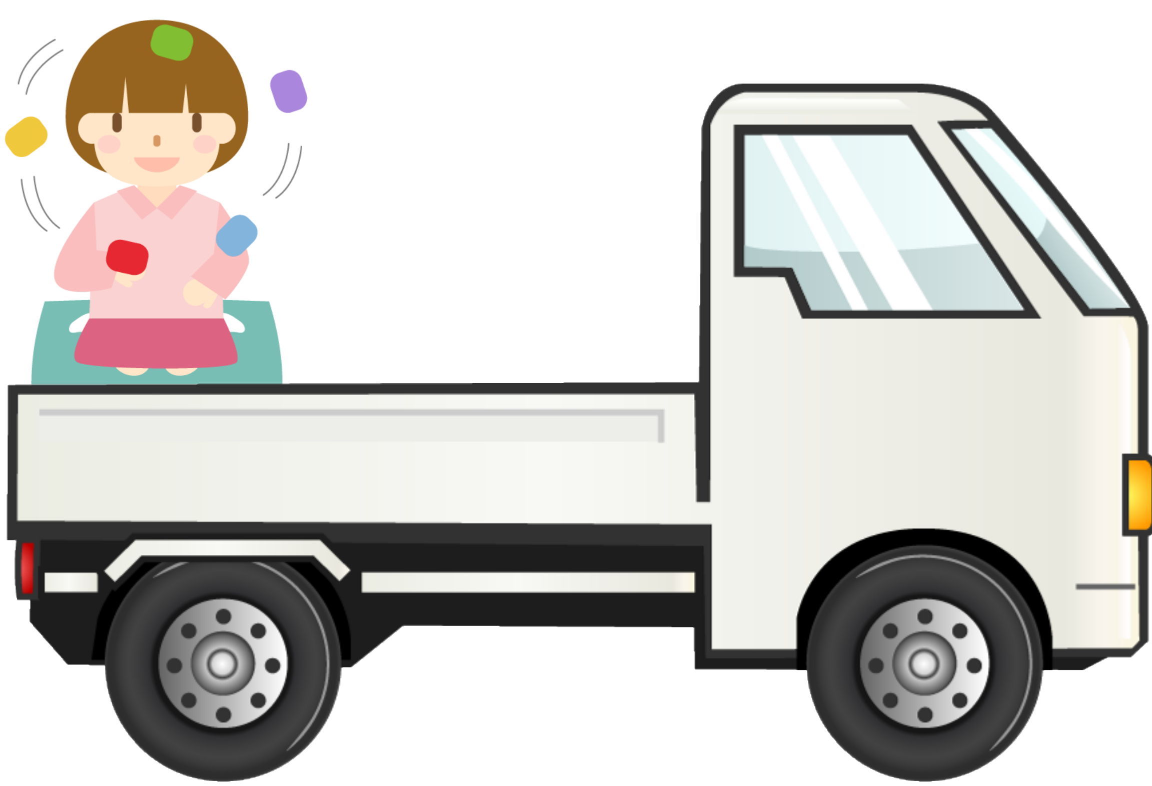
その他の性質を定性的に眺めたあと、上式の導出を試みる。

○○静止系と実験室系 (系=立ち位置)

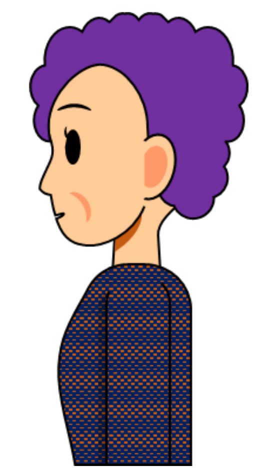


お手玉静止系
観測者からはお手玉と女の子が
静止している様に見える

速度v

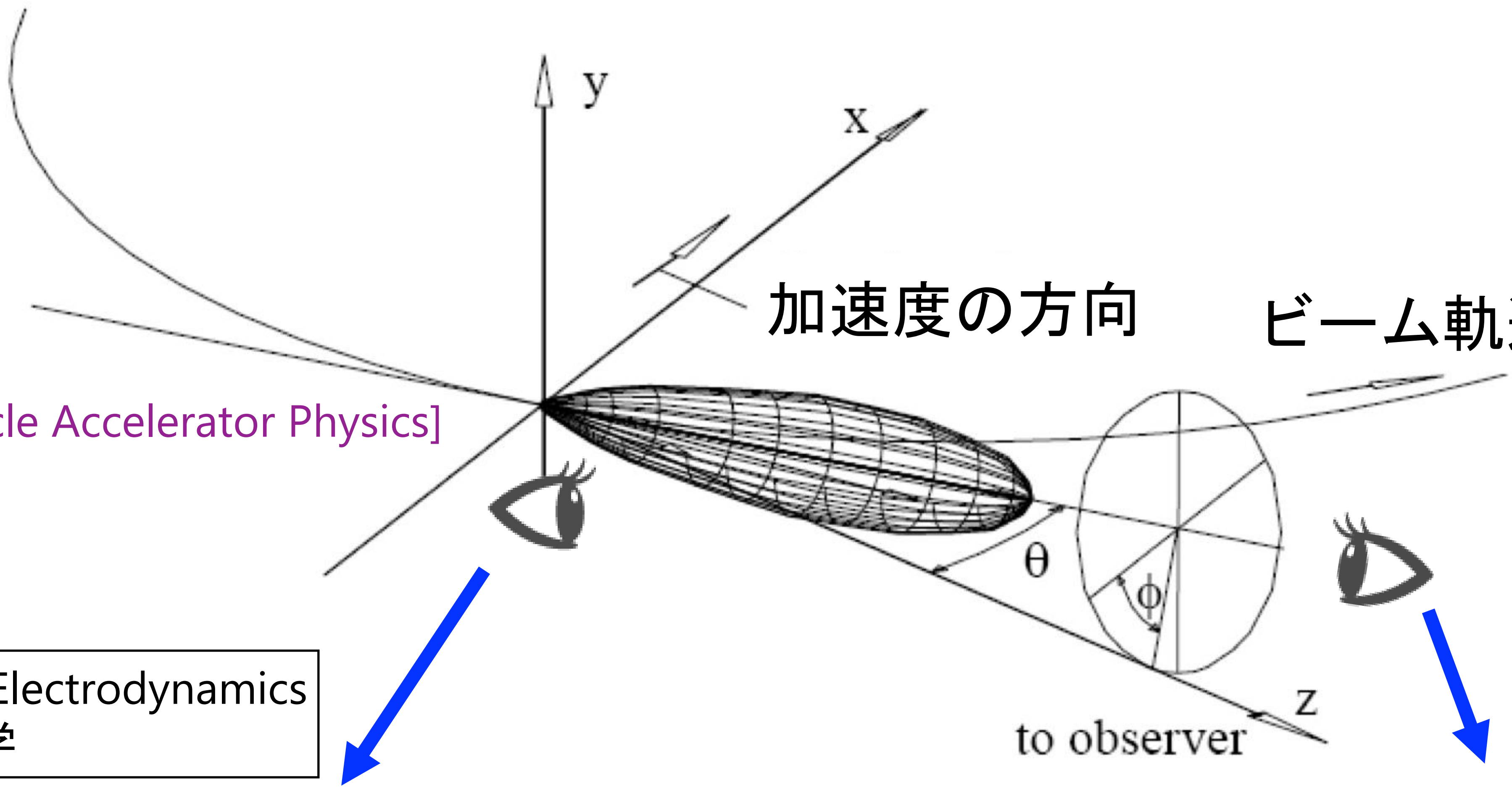


実験室系 (普段見ている系)
観測者からはお手玉と女の子が
速度vで向かってくる様に見える



速度v

電子静止系と実験室系

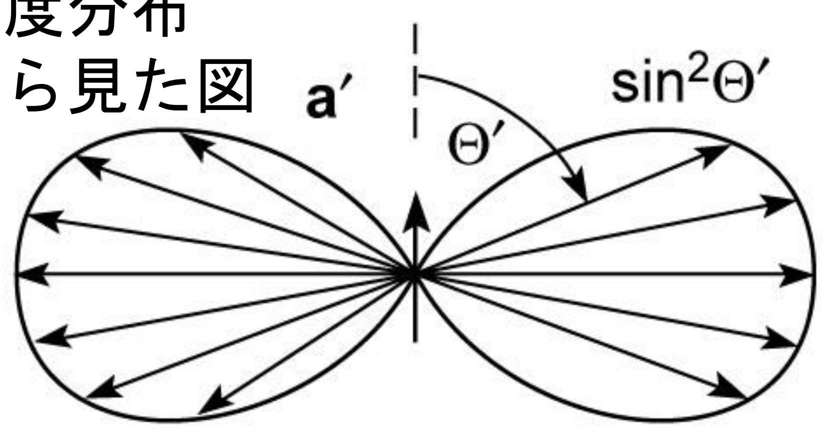


[Wiedemann, Particle Accelerator Physics]

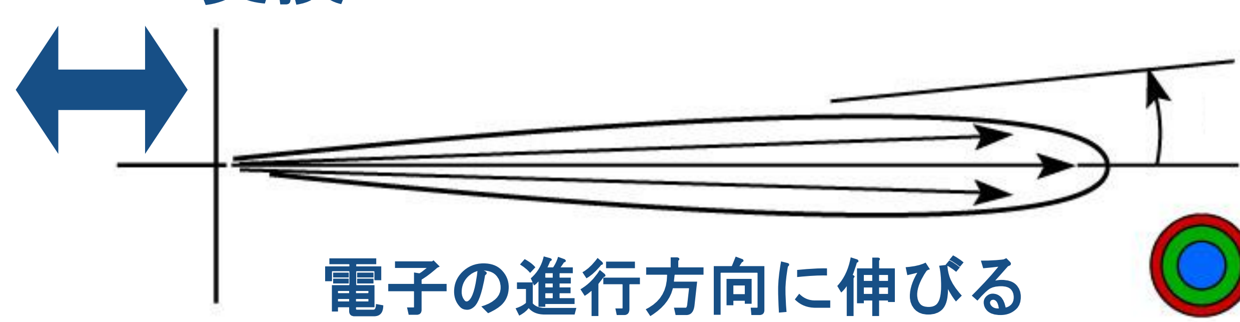
Jackson, Classical Electrodynamics
砂川, 理論電磁気学

電子と一緒に移動している人から見た場合　　実験室でシンクロトロン放射を見た場合

放射強度分布
を上から見た図



Lorentz変換



$$\theta \approx \frac{1}{\gamma}$$

電子の進行方向に伸びる

[Attwood, AST210/EECS213, UC Berkeley]

Lorentz変換

Lorentz因子

$$\gamma \approx \frac{\text{Energy (GeV)}}{\text{Rest mass (GeV)}} = \frac{\text{Energy (GeV)}}{0.000510\ \text{(GeV)}}$$

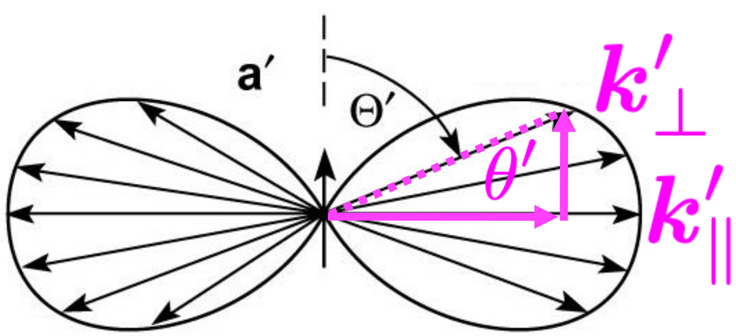
佐藤, 相対性理論 (特殊+一般)
風間, 相対性理論入門講義 (特殊)
などなど

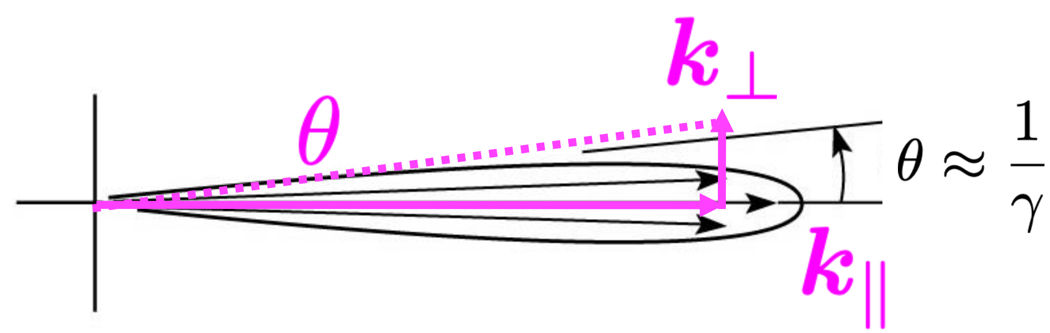
SuperKEKB電子ビーム(7 GeV)では γ~7x1957~14000

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{v}}{c} \to 1 \qquad \left(\gamma = 1/\sqrt{\beta^2 - 1},\ \beta = \sqrt{\gamma^2 - 1}/\gamma\right)$$

光速cに近い速度で運動している場合は大体β=1とおいて良い

電子と一緒に移動している人から見た場合　　実験室でシンクロトロン放射を見た場合





実験室系へのLorentz変換

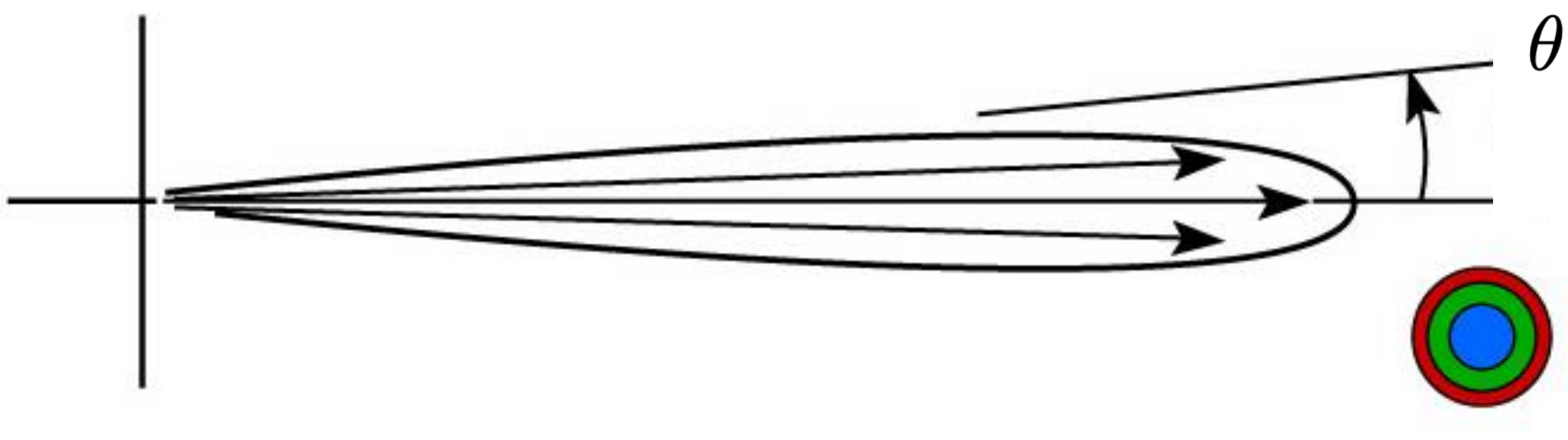
$$\boldsymbol{k}_\parallel = \gamma(\boldsymbol{k}'_\parallel + \boldsymbol{\beta}\omega'/c)$$

$$\boldsymbol{k}_\perp = \boldsymbol{k}'_\perp$$

$$\tan\theta = \frac{k_\perp}{k_\parallel} = \frac{k'\sin\theta'}{\gamma k'\cos\theta' + \gamma\beta k'} \to \frac{1}{\gamma\beta} \quad (\theta' = \pi/2)$$

$\beta \approx 1,\ \gamma \gg 1$ より $\boxed{\theta \approx \frac{1}{\gamma} \approx \frac{m}{E_{\text{beam}}}}$

シンクロトロン放射の広がり角と波長

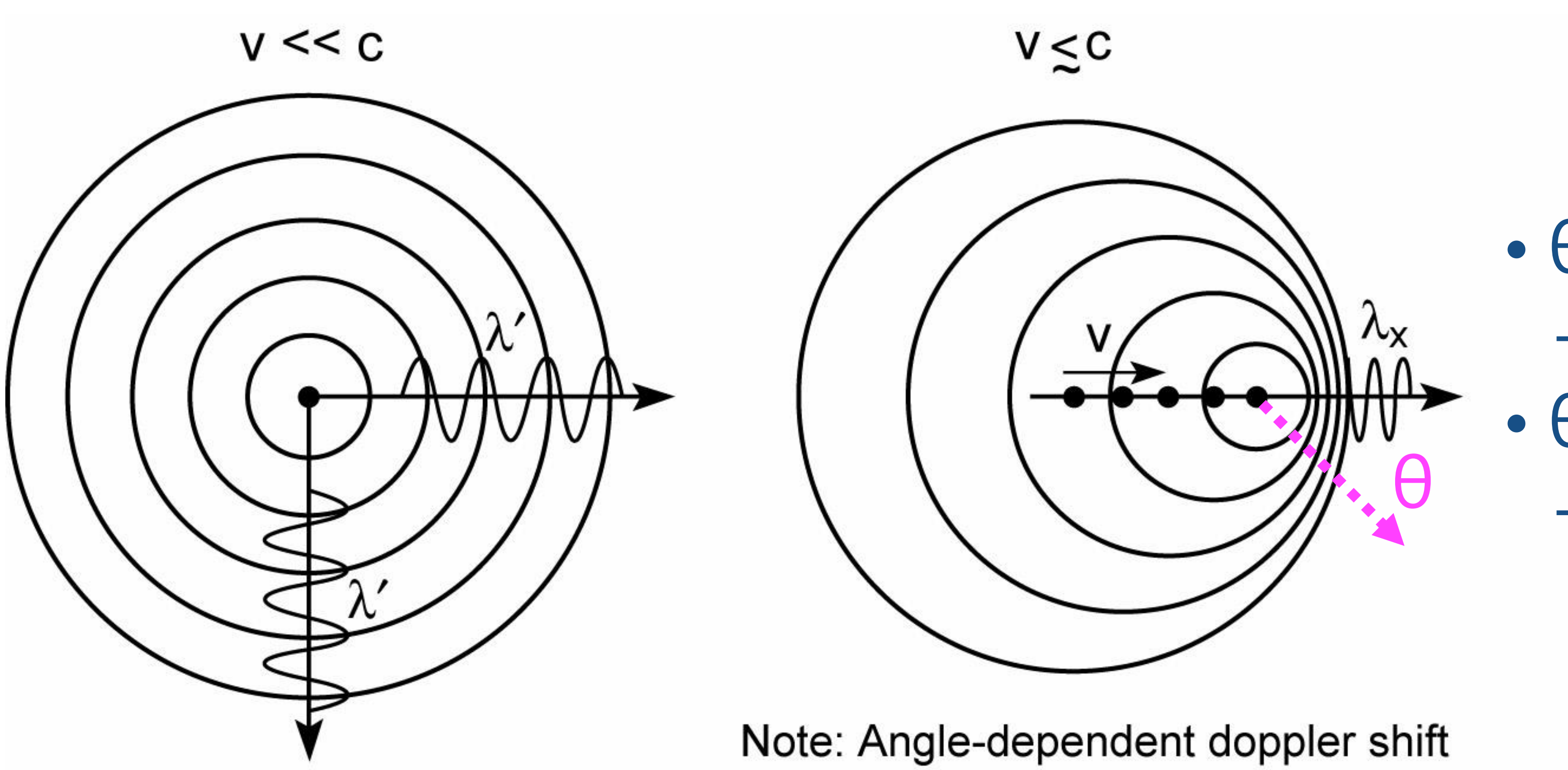


$$\theta \approx \frac{1}{\gamma} \approx \frac{m}{E_{\mathrm{beam}}}$$

SuperKEKB電子ビーム(7 GeV)だと
$\theta \approx 73\ \mu\mathrm{rad}$ = 4.2×10^{-3} deg.
50m離れた地点で7.3mmの広がり

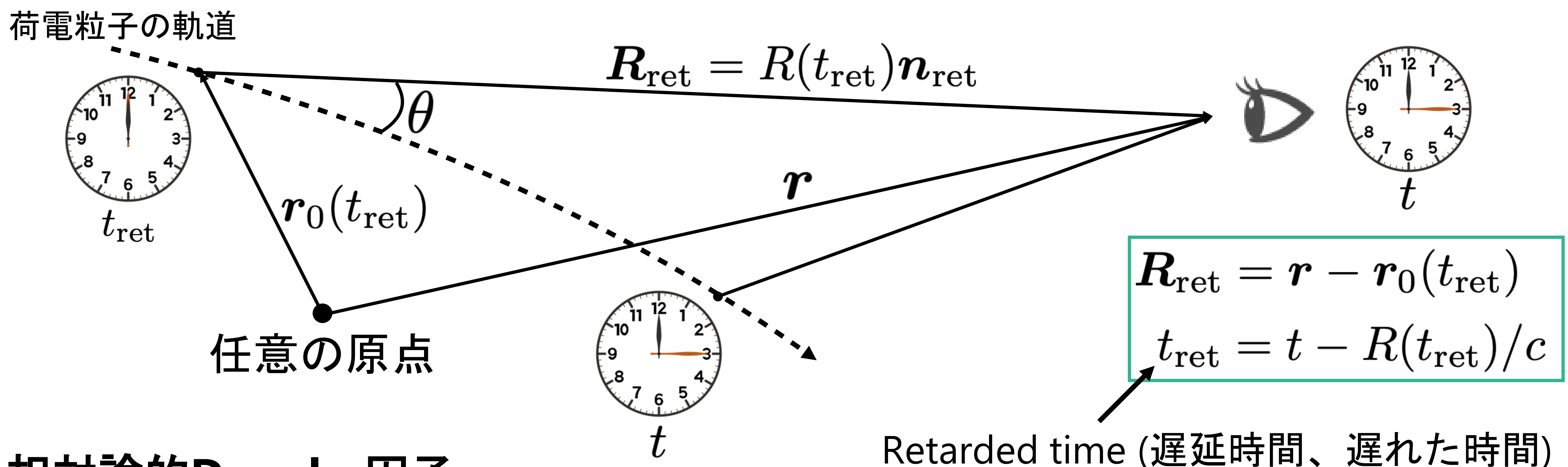
[Attwood, AST210/EECS213, UC Berkeley]

- 外側は波長長い
- 内側は波長短い



- θ=0方向から見る
  → ローレンツ収縮大 = 波長短い
- θ>0の方向から見る
  → ローレンツ収縮小 = 波長長い

観測する立場による時間の進みの違い



相対論的Doppler因子

$$\frac{dt}{dt_{\rm ret}} = \frac{d(t_{\rm ret} + R(t_{\rm ret})/c)}{dt_{\rm ret}} = 1 + \frac{1}{c}\frac{dR(t_{\rm ret})}{dt_{\rm ret}}$$

を定義する。

$$R(t_{\rm ret}) = \boldsymbol{R}_{\rm ret} \cdot \boldsymbol{n}_{\rm ret},\ \boldsymbol{n}_{\rm ret} \cdot \frac{d\boldsymbol{n}_{\rm ret}}{dt_{\rm ret}} = 0,\ \boldsymbol{\beta}_{\rm ret} = -\frac{1}{c}\frac{d\boldsymbol{R}_{\rm ret}}{dt_{\rm ret}}$$

を使うと

$$\boxed{\frac{dt}{dt_{\rm ret}} = 1 - \boldsymbol{\beta}_{\rm ret} \cdot \boldsymbol{n}_{\rm ret}}$$

が得られる。

$$\Delta t = \Delta t_{\rm ret}\frac{dt}{dt_{\rm ret}}$$

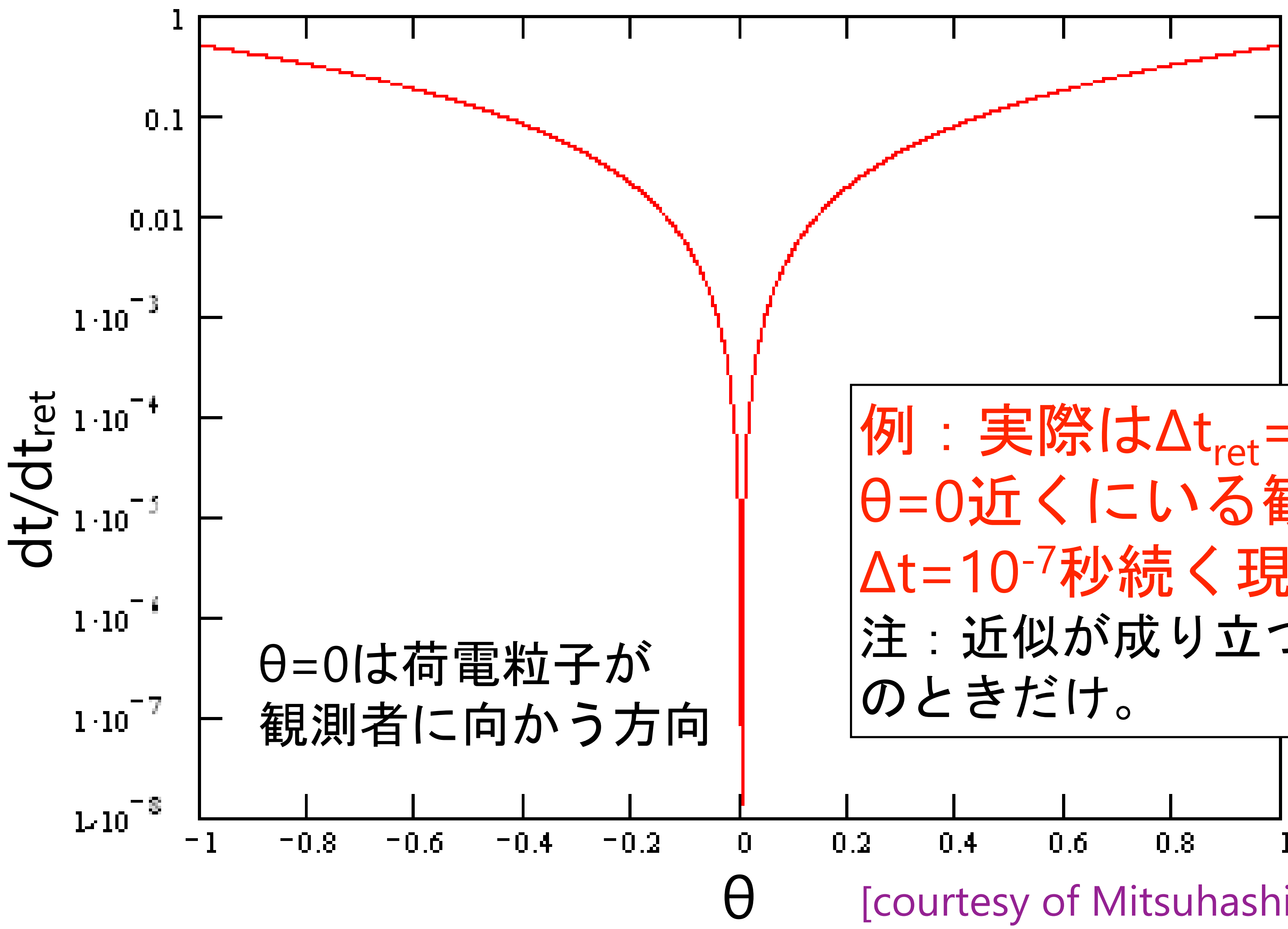
$\Delta t_{\rm ret}$続く現象が$\boldsymbol{n}_{\rm ret}$の方向にいる観測者からは$\Delta t = \Delta t_{\rm ret} * (dt/dt_{\rm ret})$続く現象として見える。

dt/dt$_{\mathrm{ret}}$を計算してみる

$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2}$ と $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ を代入すると

$$\boxed{\frac{dt}{dt_{\mathrm{ret}}} = 1 - \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{ret}} \cdot \boldsymbol{n}_{\mathrm{ret}} = 1 - \beta\cos\theta \approx \frac{1+\gamma^2\theta^2}{2\gamma^2}}$$

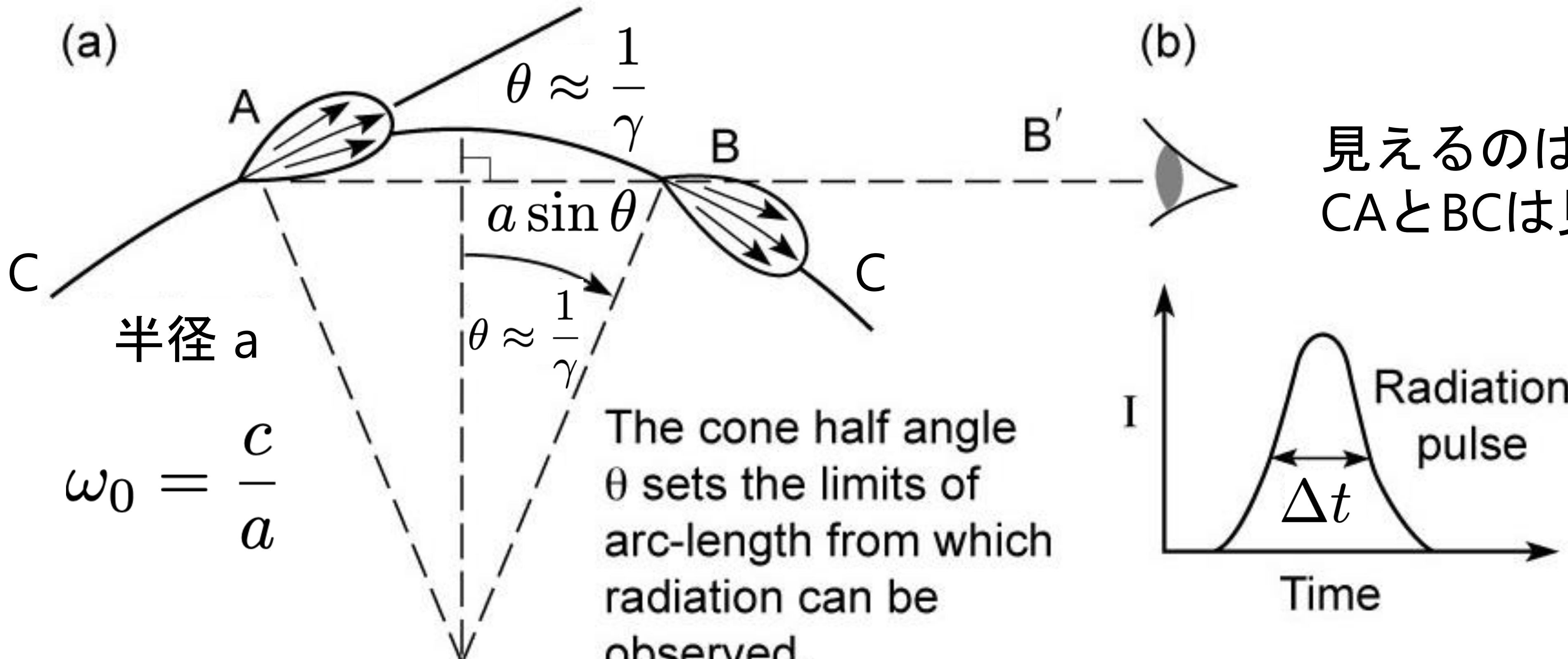
という近似が得られる。



例：実際はΔt_{ret}=1秒続く現象が
θ=0近くにいる観測者からは
$\Delta t = 10^{-7}$秒続く現象として見える。
注：近似が成り立つのはβ≒1かつθ≪1
のときだけ。

[courtesy of Mitsuhashi]

観測者から見た電磁波の時間分布



見えるのはABの間だけ、
CAとBCは見えない。

[Attwood, AST210/EECS213, UC Berkeley]

$\Delta t = \Delta t_{\rm ret} \dfrac{dt}{dt_{\rm ret}}$ と $\Delta t_{\rm ret} = \dfrac{\Delta\theta}{\omega_0}$ の関係に

$$\frac{dt}{dt_{\rm ret}} \approx \frac{1+\gamma^2\langle\theta^2\rangle}{2\gamma^2} \approx \frac{3}{4\gamma^2},\ \Delta\theta = 2\theta \approx \frac{2}{\gamma}$$

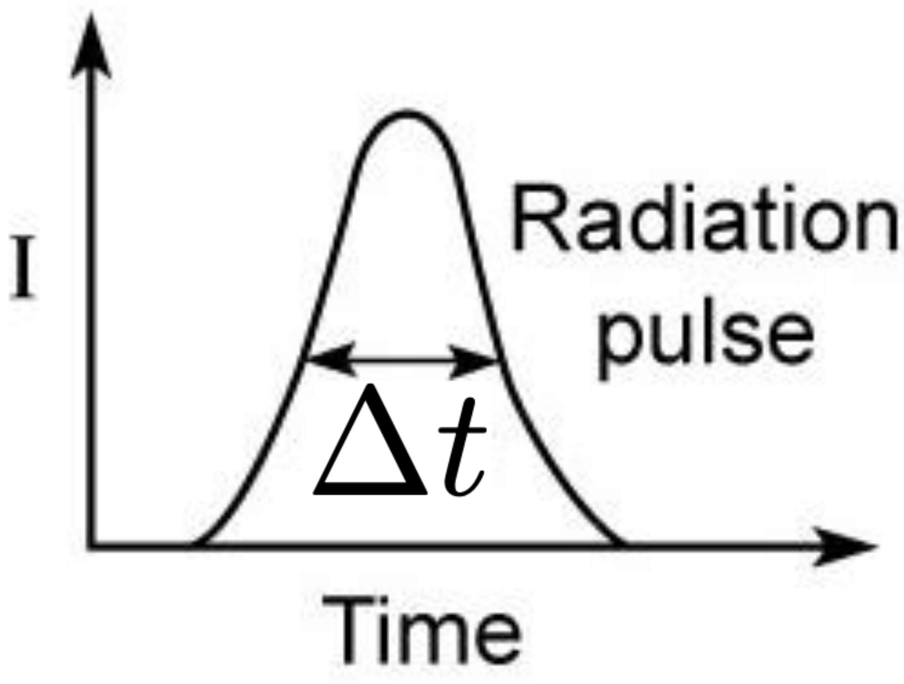
を代入すると

$$\boxed{\Delta t_{\rm ret} = \frac{2}{\omega_0\gamma},\ \Delta t \approx \frac{3}{2\omega_0\gamma^3}}$$

が得られる。

SuperKEKBでは観測者から見ると時間幅が
$\dfrac{3}{4\gamma^2} \sim \mathcal{O}(10^{-9})$ も短いパルスに見える。

SuperKEKB電子ビームの場合



$$\gamma \approx \frac{7}{0.000510} = 13700$$

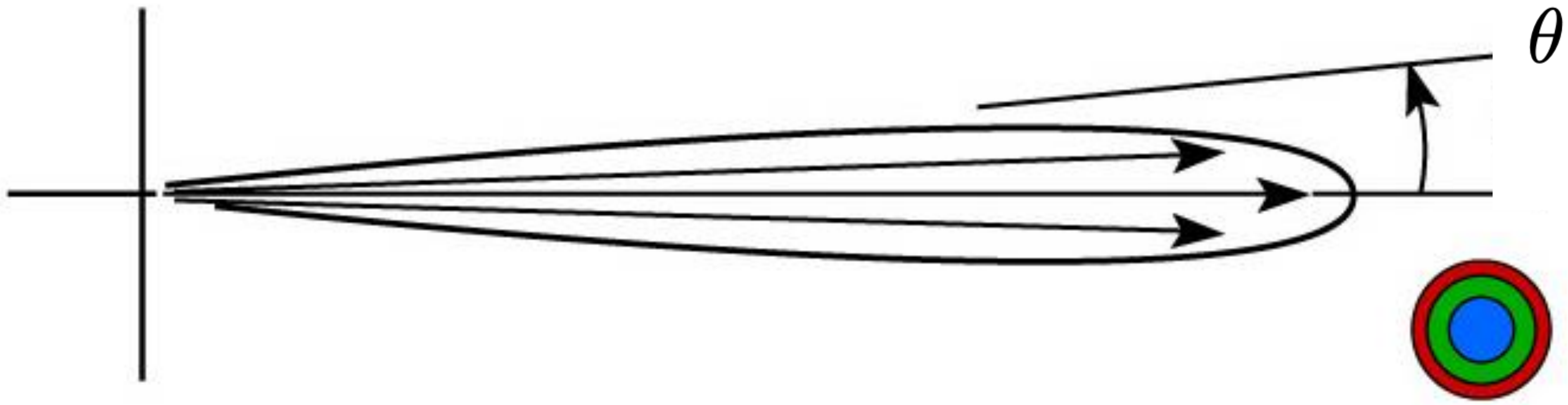
$a = 106\,\mathrm{m}$ だから

$$\omega_0 = c/a = 2.8\,\mathrm{MHz}$$

を代入すると

$$\Delta t \approx \frac{3}{2\omega_0\gamma^3} \approx 2 \times 10^{-19}\,\mathrm{sec}$$

まとめ：シンクロトロン放射の性質



$$\theta \approx \frac{1}{\gamma} \approx \frac{m}{E_{\mathrm{beam}}}$$

- 強度 $\dfrac{d^2 N_{\mathrm{ph}}}{d\Omega} = 1.33 \times 10^{13} E^2\,[\mathrm{GeV}^2] I_b [\mathrm{A}] H_2(\omega/\omega^*) \dfrac{\mathrm{photons}}{\mathrm{s\,mrad}^2\,(0.1\%\,\mathrm{BW})}$
- 波長
  - 外側は波長長い
  - 内側は波長短い
- 空間的な広がり → 前方に集中、θ~1/γ
- 時間的な広がり $\Delta t \approx \dfrac{3}{2\omega_0 \gamma^3}$

これより放射強度の式を導出する。

放射強度導出の流れ (Lienard-Wiechert)

今回はこちらの解説はしません。
下に挙げた教科書などをご参照下さい。

Schwinger, Phys. Rev. 75, 1912 (1949)
Jackson, Classical Electrodynamics
砂川, 理論電磁気学
池田, OHO 2004など

一般的な方法 (多くの教科書に載っているが計算が面倒)

1. 運動する電荷からカレントを計算
2. カレントを積分してLieanrd-Wiechertポテンシャル(ψ, A)を求める
3. ポテンシャルを微分-∇ψ-∂A/∂tしてLienard-Wiechert場(E)を求める
4. Eをフーリエ変換して周波数に分解する
5. **$|E(\omega)|^2$から周波数ごとの放射エネルギーが求まる**

$$\boldsymbol{E} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta}}{\gamma^2(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3R^2} + \frac{\boldsymbol{n}\times((\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}})}{(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3Rc}\right]_{\mathrm{ret}}$$

1項目：等速運動 → $1/R^2$
2項目：加速度運動 → $1/R$

放射強度導出の流れ (Heaviside-Feynman)

Heaviside-Feynman方程式を使う方法 (見通し良し)

Feynman, Lectures on Physics (II)
Wang, Phys. Rev. E 47, 4358 (1993)
Zangwill, Modern Electrodynamics

1. 運動する電荷が作る電場Eを直感的に求める
2. Eをフーリエ変換して周波数に分解する
3. **$|E(\omega)|^2$から周波数ごとの放射エネルギーが求まる**

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\boldsymbol{n}_{\mathrm{ret}}}{R_{\mathrm{ret}}^2}+\frac{R_{\mathrm{ret}}}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{n}_{\mathrm{ret}}}{R_{\mathrm{ret}}^2}\right)+\frac{1}{c^2}\frac{d^2\boldsymbol{n}_{\mathrm{ret}}}{dt^2}\right]$$

1項目 : クーロン場 → $1/R^2$
2項目 : 等速運動 → $1/R^2$
3項目 : 加速度運動 → $1/R$

「Lienard-Wiechert = Heaviside-Feynman」の証明は[Wang, Phys. Rev. E 47, 4358]を参照。

1+2項目

$$\frac{\mathbf{n}}{R^2}+\frac{R}{c}\frac{d}{dt}\frac{\mathbf{n}}{R^2}=\frac{\mathbf{n}}{R^2}\frac{1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}}{1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}}+\frac{R}{c}\frac{d\tau}{dt}\left[\frac{d\mathbf{n}}{d\tau}\frac{1}{R^2}-\frac{2\mathbf{n}}{R^3}\frac{dR}{d\tau}\right]=\frac{1}{R^2(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})}[\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\boldsymbol{\beta})+\mathbf{n}(1+\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})]. \tag{9}$$

3項目

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2\mathbf{n}}{dt^2}=\frac{1}{(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})c}\left[\frac{1}{R}\frac{d}{d\tau}\frac{\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\boldsymbol{\beta})}{1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}}-\frac{1}{R^2}\frac{\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\boldsymbol{\beta})}{1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}}\frac{dR}{d\tau}\right]=\frac{\mathbf{n}\times[(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3Rc}-\frac{1}{R^2}\left[\frac{(\mathbf{n}\times\boldsymbol{\beta})^2}{(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2}\mathbf{n}+\frac{\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\boldsymbol{\beta})}{1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}}\left[1-\frac{1}{\gamma^2(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2}\right]\right].$$

The Nobel Prize in Physics 1965

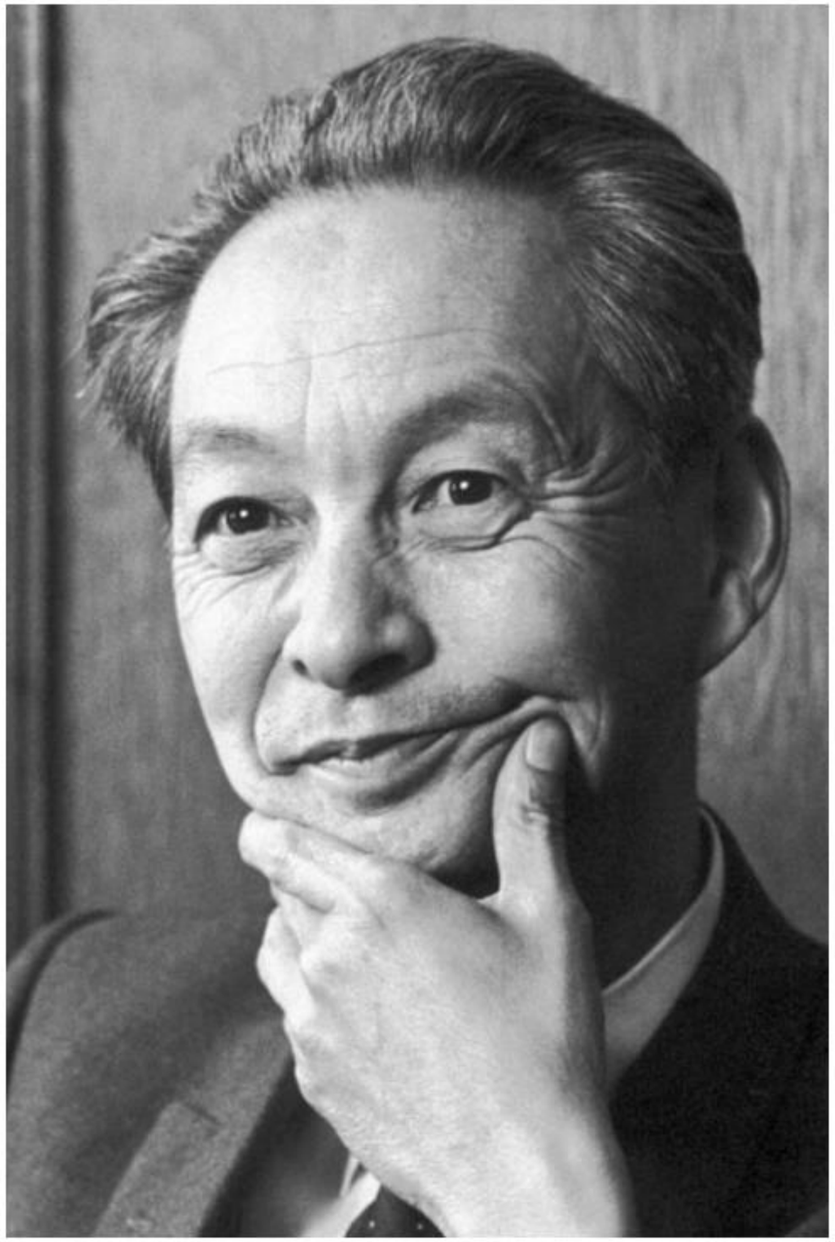


Photo from the Nobel Foundation archive.

Sin-Itiro Tomonaga

Prize share: 1/3

Photo from the Nobel Foundation archive.

Julian Schwinger

Prize share: 1/3

Photo from the Nobel Foundation archive.

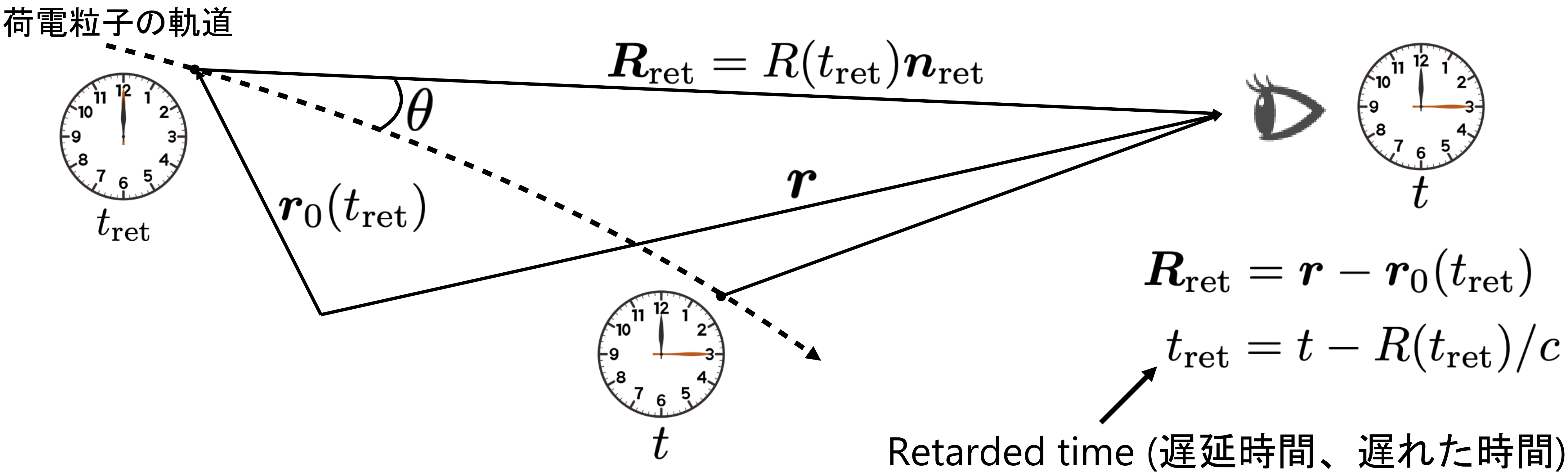
Richard P. Feynman

Prize share: 1/3

余談：量子電磁力学の道のりについては

¥2,090 (税込み)

運動する電荷が作る電場E



Heaviside-Feynmanの式

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\,t) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\boldsymbol{n}_{\mathrm{ret}}}{R_{\mathrm{ret}}^2} + \frac{R_{\mathrm{ret}}}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{n}_{\mathrm{ret}}}{R_{\mathrm{ret}}^2}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{d^2\boldsymbol{n}_{\mathrm{ret}}}{dt^2}\right] \to \boxed{\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^2}\frac{d^2\boldsymbol{n}_{\mathrm{ret}}}{dt^2}\quad (R \gg \gamma\lambda)}$$

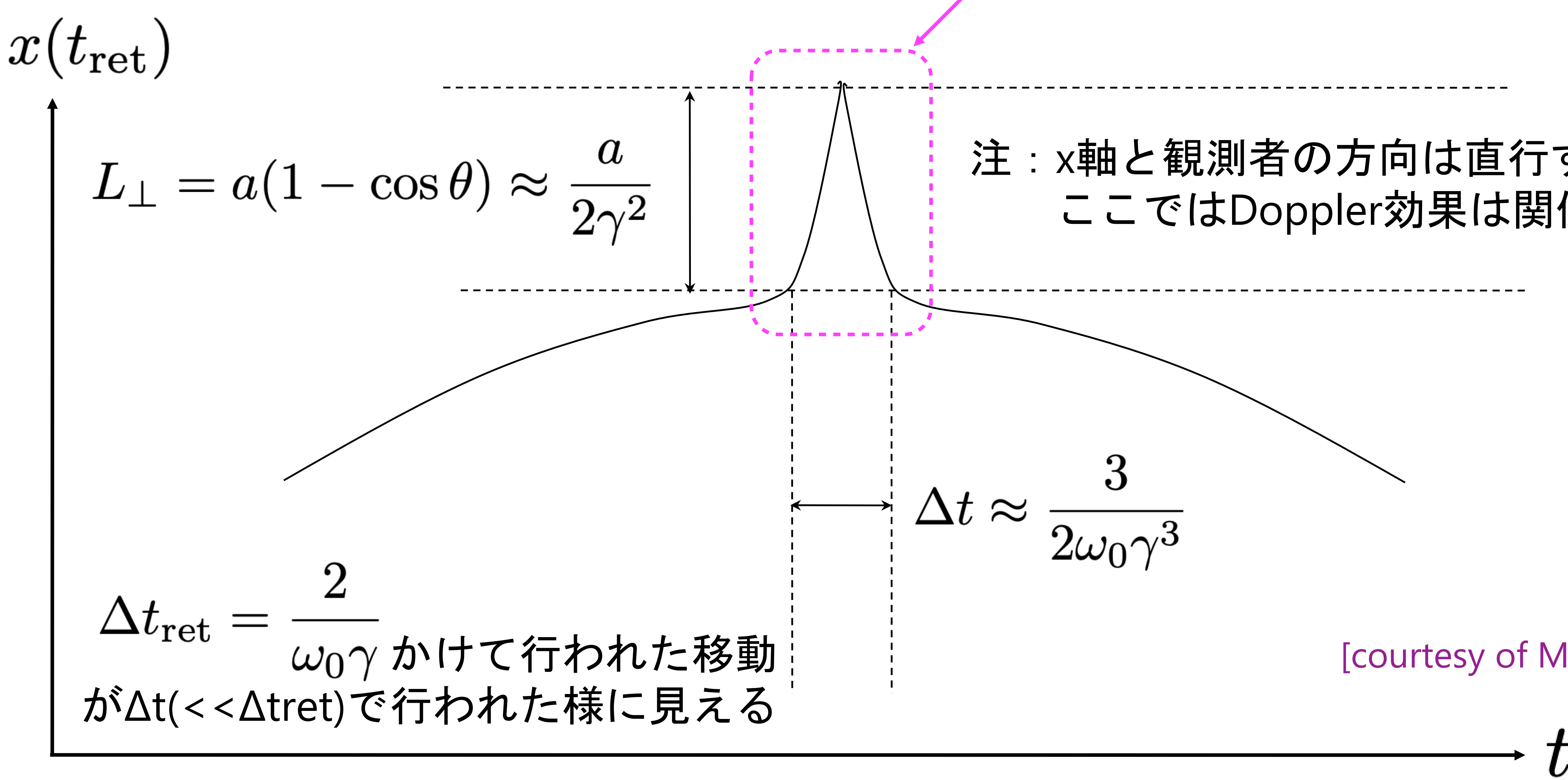
- 左辺：位置Pで時刻tに観測した電場E
- 右辺1項目：時刻t_{ret}におけるクーロン場
- 右辺2項目：時刻t_{ret}におけるクーロン場の時間変化率 x 伝搬時間R/cだけ外挿
- 右辺3項目：時刻t_{ret}における方向ベクトルの二階時間微分だから加速度運動

運動する電荷が作る電場E

$$\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{r},\,t\right)=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\boldsymbol{n}_{\rm ret}}{R_{\rm ret}^2}+\frac{R_{\rm ret}}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{n}_{\rm ret}}{R_{\rm ret}^2}\right)+\frac{1}{c^2}\frac{d^2\boldsymbol{n}_{\rm ret}}{dt^2}\right]\rightarrow\boxed{\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^2}\frac{d^2\boldsymbol{n}_{\rm ret}}{dt^2}\quad(R\gg\gamma\lambda)}$$

時間tの関数であることに注意

ここを時間で2階微分して係数を掛ければ電場になる
傾きが急に変わる(様に見える) → 電場が大きい



注：x軸と観測者の方向は直行するので
ここではDoppler効果は関係ない。

[courtesy of Mitsuhashi]

各周波数における放射エネルギー強度

放射エネルギー ≈ 電磁波振幅の二乗 ≈ 電場の二乗

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{\varepsilon_0 c R^2}{\pi} |\boldsymbol{E}(\omega)|^2$$

R_{ret}を簡易表記 $\left(I = \frac{dU}{d\omega},\ P = \frac{dU}{dt},\ \frac{d^2P}{d\Omega d\omega} = \frac{d^2U}{d\Omega d\omega}\frac{I_b}{e} = \frac{dI}{d\Omega}\frac{I_b}{e} \right)$

周波数に分解した電場 = E(t)のフーリエ変換

Heaviside-Feynmanの式の加速度運動の項

ここはt_{ret}

$$\boldsymbol{E}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \boldsymbol{E}(t) \exp(i\omega t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \boldsymbol{n}_{\mathrm{ret}}}{dt^2} \exp(i\omega t)$$

ここはt

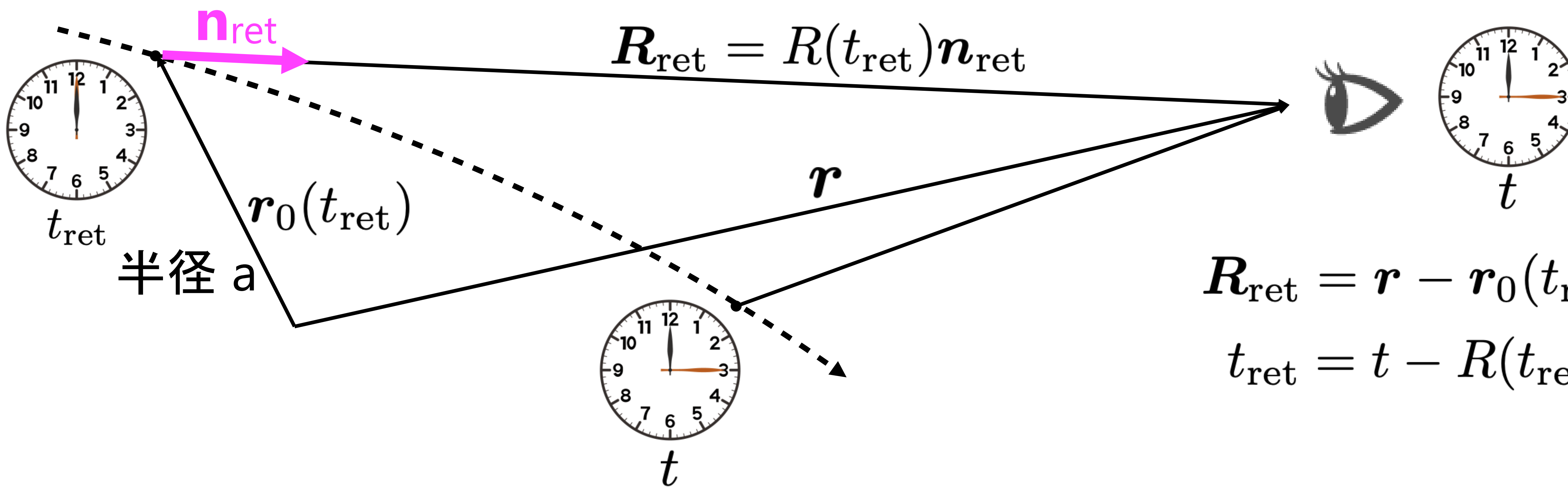
E(ω)をdI(ω)/dΩに代入すると

$$\boxed{\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2 R^2 \omega^4}{16\pi^3 c^3 \varepsilon_0} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt \boldsymbol{n}_{\mathrm{ret}} \exp(i\omega t) \right|^2}$$

"時刻(t_{ret})における放射点"から"観測者"へ向く方向ベクトル$\mathbf{n}_{\mathrm{ret}}$をフーリエ変換
→ 放射エネルギーの周波数スペクトラム

つまり方向ベクトル$\mathbf{n}_{\mathrm{ret}}$が分かれば、 $\mathbf{n}_{\mathrm{ret}}$内で$t_{\mathrm{ret}}$→tと変数変換すれば良い。

方向ベクトルn_{ret}を求める



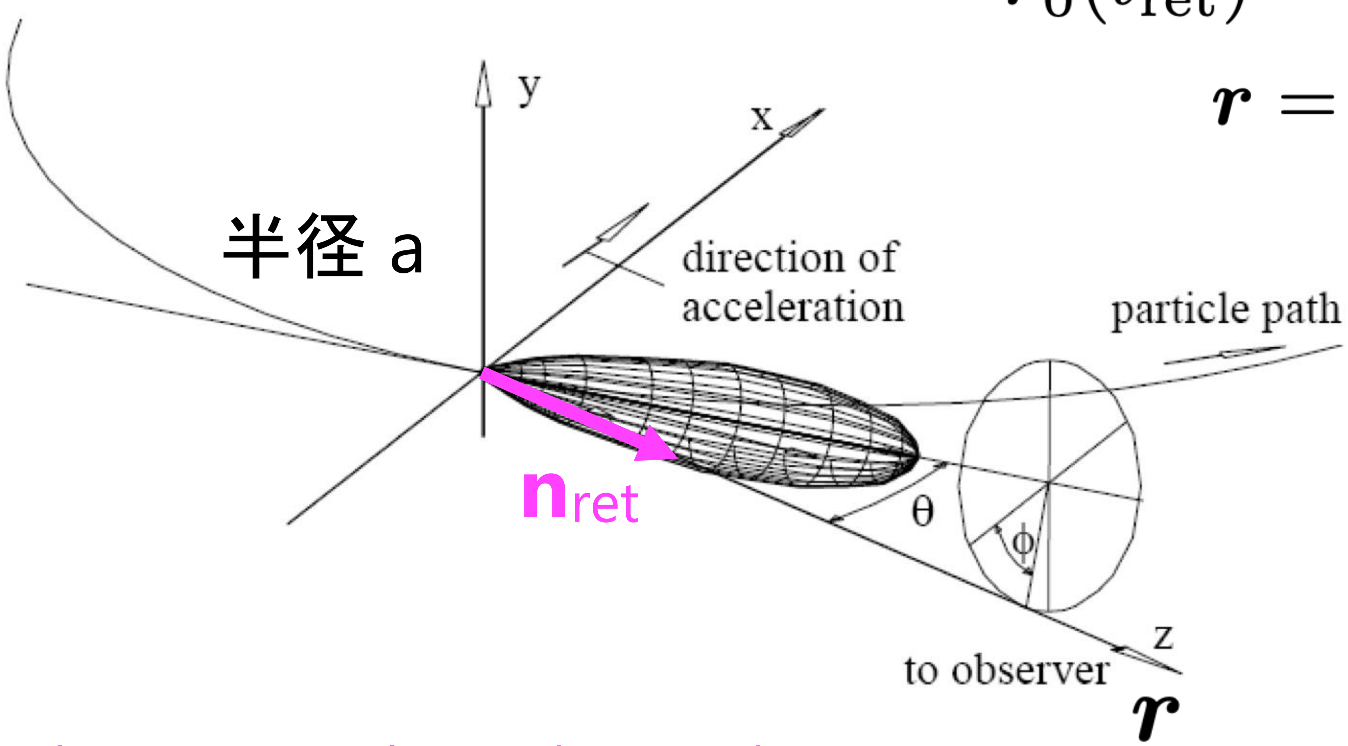
$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{ret}} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0(t_{\mathrm{ret}})$$
$$t_{\mathrm{ret}} = t - R(t_{\mathrm{ret}})/c$$

$$\boldsymbol{r}_0(t_{\mathrm{ret}}) = a[1 - \cos(\omega_0 t_{\mathrm{ret}})]\hat{\boldsymbol{x}} + a\sin(\omega_0 t_{\mathrm{ret}})\hat{\boldsymbol{z}}$$
$$\boldsymbol{r} = r\sin\theta\hat{\boldsymbol{y}} + r\cos\theta\hat{\boldsymbol{z}} \quad (\phi = \pi/2)$$

と置いて

$$\boldsymbol{n}_{\mathrm{ret}} = \frac{\boldsymbol{R}_{\mathrm{ret}}}{|\boldsymbol{R}_{\mathrm{ret}}|} = \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0(t_{\mathrm{ret}})}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0(t_{\mathrm{ret}})|}$$

に代入。



[Wiedemann, Particle Accelerator Physics]

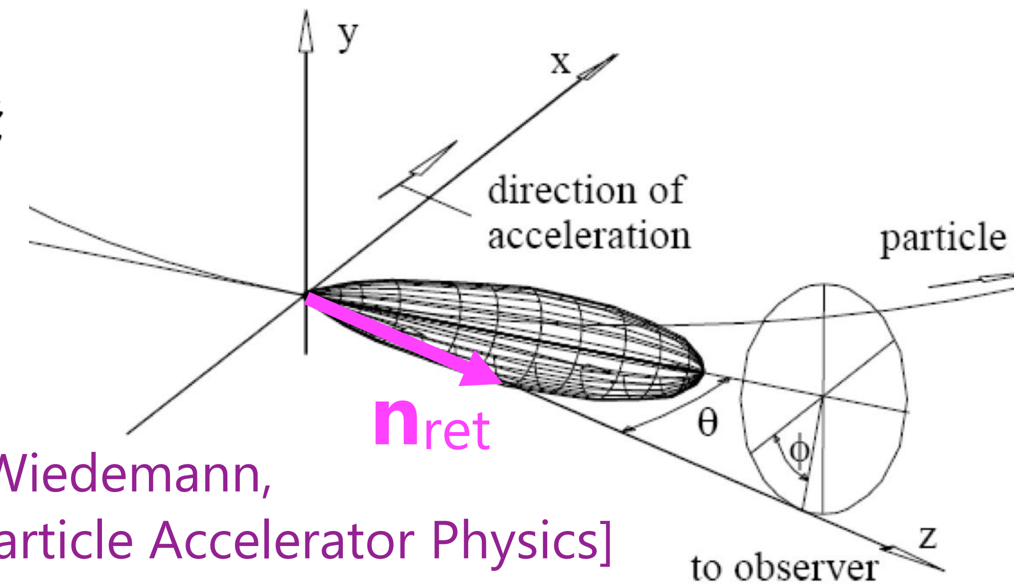
方向ベクトル$\boldsymbol{n}_{\mathrm{ret}}$を求める

$$\boldsymbol{r}_0(t_{\mathrm{ret}}) = a[1-\cos(\omega_0 t_{\mathrm{ret}})]\hat{\boldsymbol{x}} + a\sin(\omega_0 t_{\mathrm{ret}})\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$\boldsymbol{r} = r\sin\theta\hat{\boldsymbol{y}} + r\cos\theta\hat{\boldsymbol{z}} \quad (\phi = \pi/2)$$

の時に $\theta \approx 0,\ t_{\mathrm{ret}} \approx 0$ で近似すると

$$|\boldsymbol{R}_{\mathrm{ret}}| = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0(t_{\mathrm{ret}})| \approx r - a\omega_0 t_{\mathrm{ret}}$$



[Wiedemann, Particle Accelerator Physics]

$$\boldsymbol{n}_{\mathrm{ret}} = \frac{\boldsymbol{R}_{\mathrm{ret}}}{|\boldsymbol{R}_{\mathrm{ret}}|} \approx \frac{a[\cos(\omega_0 t_{\mathrm{ret}})-1]\hat{\boldsymbol{x}} + r\sin\theta\hat{\boldsymbol{y}} + [r\cos\theta - a\sin(\omega_0 t_{\mathrm{ret}})]\hat{\boldsymbol{z}}}{r - a\omega_0 t_{\mathrm{ret}}}$$

$\mathcal{O}\left(\frac{a}{r}\right),\ \mathcal{O}(\theta),\ \mathcal{O}\left(t_{\mathrm{ret}}^2\right)$まで残して展開し、$t_{\mathrm{ret}}$が掛からない項を除くと

$$\boxed{\boldsymbol{n}_{\mathrm{ret}} \approx \frac{a}{r}\left[-\frac{1}{2}\omega_0^2 t_{\mathrm{ret}}^2 \hat{\boldsymbol{x}} + \theta\omega_0 t_{\mathrm{ret}}\hat{\boldsymbol{y}}\right]}$$

フーリエ変換に関係ないので

ここはt_{ret}

が得られる。ここまでは幾何学の計算。

※1 数値計算の場合は近似することなく**r**, **r**$_0$(t_{ret})を直接入力して**n**$_{\mathrm{ret}}$を計算

※2 Lienard-Wiechertよりも数値計算速度が幾分早い

ここまでのまとめ

放射エネルギー ≈ 電磁波振幅の二乗 ≈ 電場の二乗

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{\varepsilon_0 c R^2}{\pi} |\boldsymbol{E}(\omega)|^2$$

R_{ret} を簡易表記

周波数に分解した電場 = E(t)のフーリエ変換

Heaviside-Feynmanの式
の加速度運動の項

$$\boldsymbol{E}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \boldsymbol{E}(t) \exp(i\omega t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \boldsymbol{n}_{\mathrm{ret}}}{dt^2} \exp(i\omega t)$$

E(ω)をdI(ω)/dΩに代入すると

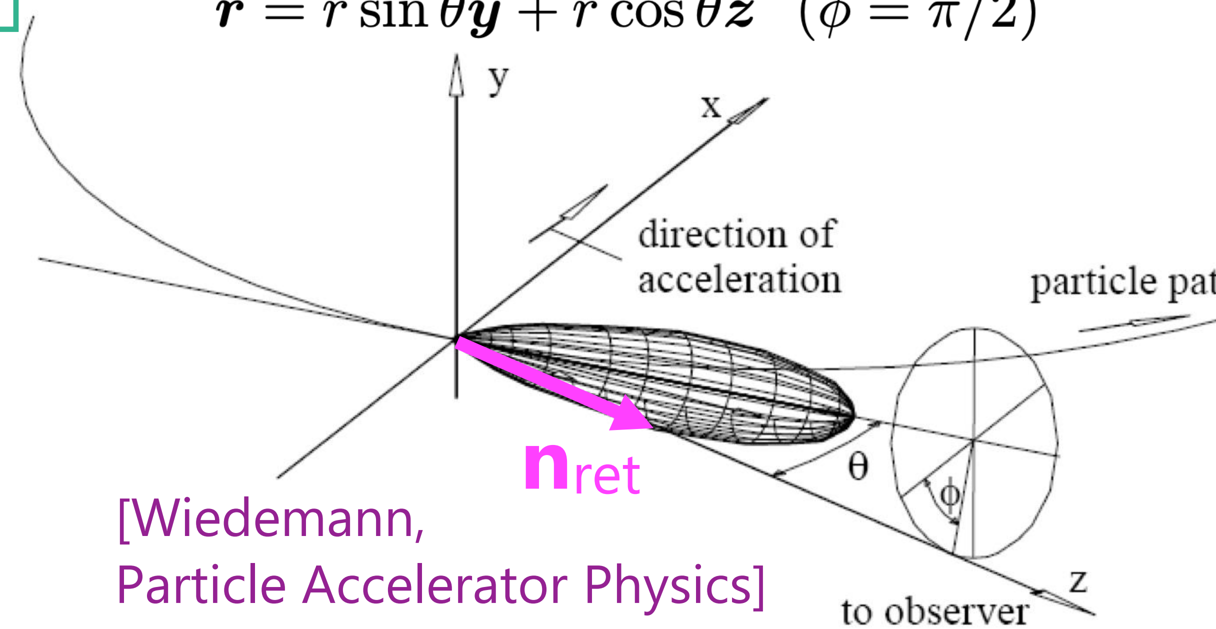
$$\boxed{\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2 R^2 \omega^4}{16\pi^3 c^3 \varepsilon_0} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt \boldsymbol{n}_{\mathrm{ret}} \exp(i\omega t) \right|^2}$$

$$\boldsymbol{r}_0(t_{\mathrm{ret}}) = a[1 - \cos(\omega_0 t_{\mathrm{ret}})]\hat{\boldsymbol{x}} + a \sin(\omega_0 t_{\mathrm{ret}})\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$\boldsymbol{r} = r \sin\theta \hat{\boldsymbol{y}} + r \cos\theta \hat{\boldsymbol{z}} \quad (\phi = \pi/2)$$

右の様な状況だと

$$\boxed{\boldsymbol{n}_{\mathrm{ret}} \approx \frac{a}{r} \left[-\frac{1}{2} \omega_0^2 t_{\mathrm{ret}}^2 \hat{\boldsymbol{x}} + \theta \omega_0 t_{\mathrm{ret}} \hat{\boldsymbol{y}} \right]}$$



[Wiedemann,
Particle Accelerator Physics]

n_{ret}の中のt_{ret}をtへ変換する。

t_{ret}→tへ変数変換

n_{ret}の中のt_{ret}をtへ変換する (フーリエ変換がtに対してなので)。

$t_{\mathrm{ret}} = t - R(t_{\mathrm{ret}})/c$ に $\boldsymbol{R}_{\mathrm{ret}} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0(t_{\mathrm{ret}})$

を代入する。(分母ではないので $|\boldsymbol{R}_{\mathrm{ret}}| = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0(t_{\mathrm{ret}})| \approx r - a\omega_0 t_{\mathrm{ret}}$ はだめ)

$$\boldsymbol{r}_0(t_{\mathrm{ret}}) = a[1 - \cos(\omega_0 t_{\mathrm{ret}})]\hat{\boldsymbol{x}} + a\sin(\omega_0 t_{\mathrm{ret}})\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$\boldsymbol{r} = r\sin\theta\hat{\boldsymbol{y}} + r\cos\theta\hat{\boldsymbol{z}} \quad (\phi = \pi/2)$$

だから

$$R(t_{\mathrm{ret}}) = \sqrt{r^2 - 2ar\cos\theta\sin(\omega_0 t_{\mathrm{ret}}) + 2a^2(1 - \cos(\omega_0 t_{\mathrm{ret}}))}$$

$R(t_{\mathrm{ret}})$を$t_{\mathrm{ret}} = t - R(t_{\mathrm{ret}})/c$ に代入するとt_{ret}の3次方程式

$$(\omega_0 t_{\mathrm{ret}})^3 + \frac{3(1+\gamma^2\theta^2)}{\gamma^2}\omega_0 t_{\mathrm{ret}} - 6\omega_0 t = 0$$

ここはt

が得られる。
これをt_{ret}について解けばt_{ret}をtへ変換できる。

t_{ret}の3次方程式を解く

Cardanoの公式

$$x^3 + px + q = 0$$

の解は

$$x = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \right)^{1/3} + \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \right)^{1/3}$$

で求まる。

この枠組みに収まる様に、以下の変数変換

$$\boxed{\eta = 3\gamma^2(1+\gamma^2\theta^2)^{-3/2}\omega_0 t,\ \xi = \frac{\omega}{2\omega^*}(1+\gamma^2\theta^2)^{3/2},\ \omega^* = \frac{3}{2}\gamma^3\omega_0 \quad (\omega t = \xi\eta)}$$

を行うと

$$(\omega_0 t_{\mathrm{ret}})^3 + \frac{3(1+\gamma^2\theta^2)}{\gamma^2}\omega_0 t_{\mathrm{ret}} - 6\omega_0 t = 0$$

の解は

左辺はt_{ret}

右辺はtの関数であるη

$$\boxed{\omega_0 t_{\mathrm{ret}} = \gamma^{-1}\sqrt{1+\gamma^2\theta^2}\left((\sqrt{\eta^2+1}+\eta)^{1/3} - (\sqrt{\eta^2+1}-\eta)^{1/3} \right)}$$

となり、めでたくt_{ret}→tの変数変換が可能になる。

Fourier積分の計算 → 放射強度

放射強度の式へn_{ret}(t_{ret}の関数)を代入した　　$\omega t = \xi\eta$で置き換え

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2R^2\omega^4}{16\pi^3c^3}\left|\int_{-\infty}^{\infty} dt\frac{a}{r}\left[-\frac{1}{2}\omega_0^2t_{\mathrm{ret}}^2\hat{\boldsymbol{x}} + \theta\omega_0 t_{\mathrm{rec}}\hat{\boldsymbol{y}}\right]\exp(i\omega t)\right|^2$$

の右辺のt_{ret}を

$$\omega_0 t_{\mathrm{ret}} = \gamma^{-1}\sqrt{1+\gamma^2\theta^2}\left((\sqrt{\eta^2+1}+\eta)^{1/3} - (\sqrt{\eta^2+1}-\eta)^{1/3}\right)$$

で置き換えると、Fourier積分の$\hat{\boldsymbol{x}}$と$\hat{\boldsymbol{y}}$に掛かる項は

$$\int_0^\infty d\eta\left[\left(\sqrt{\eta^2+1}+\eta\right)^{1/3} - \left(\sqrt{\eta^2+1}-\eta\right)^{1/3}\right]^2\cos(\xi\eta) = \boxed{\frac{2}{\sqrt{3}\xi}K_{2/3}(\xi)\ \ \hat{\boldsymbol{n}}\text{の}\hat{\boldsymbol{x}}\text{向きの項}}$$

$$\int_0^\infty d\eta\left[\left(\sqrt{\eta^2+1}+\eta\right)^{1/3} - \left(\sqrt{\eta^2+1}-\eta\right)^{1/3}\right]\sin(\xi\eta) = \boxed{-\frac{1}{\sqrt{3}\xi}K_{1/3}(\xi)\ \ \hat{\boldsymbol{n}}\text{の}\hat{\boldsymbol{y}}\text{向きの項}}$$

と変形Bessel関数で表せる。$R \approx r$と近似すると最終的には放射強度

$$\boxed{\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3e^2\gamma^2}{4\pi^2c}\left(\frac{\omega}{\omega^*}\right)^2(1+\Theta^2)\left[(1+\Theta^2)K_{2/3}^2(\xi) + \Theta^2K_{1/3}^2(\xi)\right]}$$

が得られる。

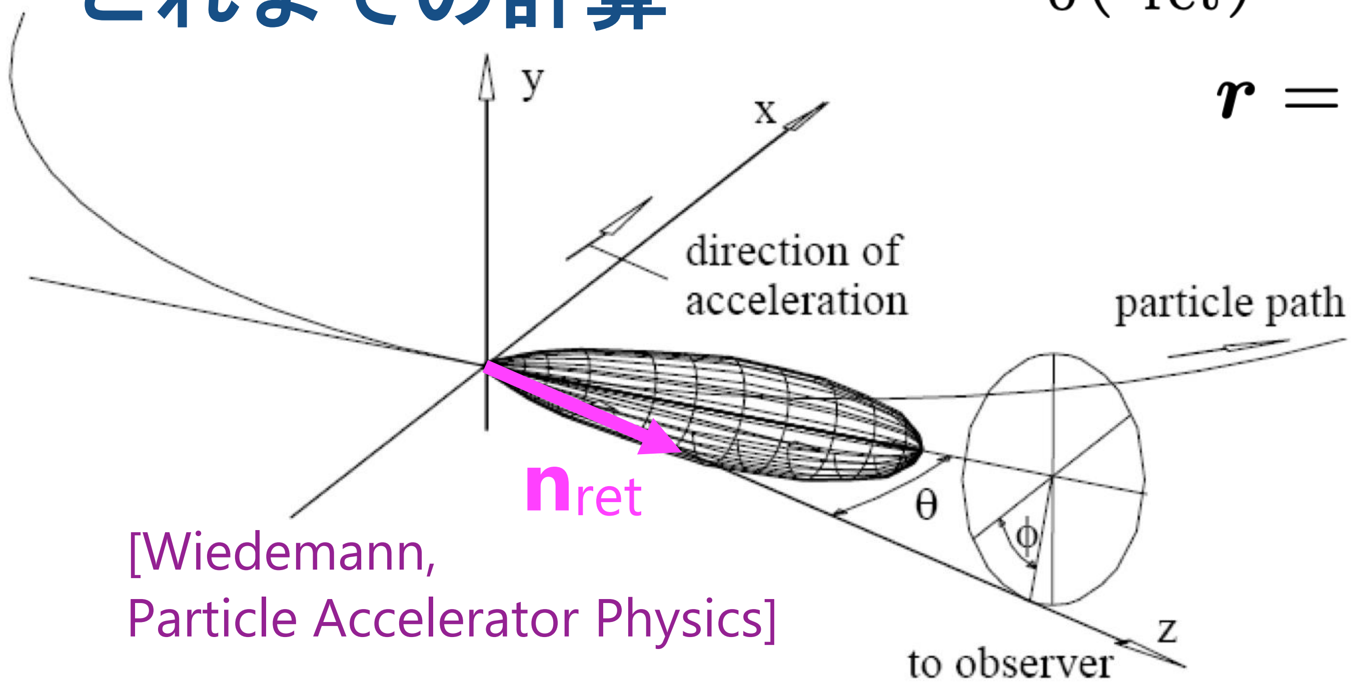
ここまでの計算の個人的見解

- 近似が非常に多い。$\left(\beta \approx 1 - \dfrac{1}{2\gamma^2},\ r \gg a,\ \theta \ll 1\right)$
- 現実的には近似が成り立つとは限らない → 調べるのも難儀。
- 数値を求めるだけならば、実際の状況に基づいて$\mathbf{n}_{ret}$を求め、Lorentz変換、Fourier変換、代数計算…等と数値計算で放射強度を求めた方が楽な場合がある。

- とは言え、モニターする現象を理解する、さらに数値計算プログラムを書く上で理論の流れを知っておく(目で追う)のは重要。

補講：観測者の位置を一般化

これまでの計算



[Wiedemann,
Particle Accelerator Physics]

$$\boldsymbol{r}_0(t_{\rm ret}) = a[1-\cos(\omega_0 t_{\rm ret})]\hat{\boldsymbol{x}} + a\sin(\omega_0 t_{\rm ret})\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$\boldsymbol{r} = r\sin\theta\hat{\boldsymbol{y}} + r\cos\theta\hat{\boldsymbol{z}} \quad (\phi = \pi/2)$$

と置いて

ここに制限があった

$$\boldsymbol{n}_{\rm ret} = \frac{\boldsymbol{R}_{\rm ret}}{|\boldsymbol{R}_{\rm ret}|} = \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0(t_{\rm ret})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0(t_{\rm ret})|}$$

に代入。

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3e^2\gamma^2}{4\pi^2 c}\left(\frac{\omega}{\omega^*}\right)^2 (1+\Theta^2)\left[(1+\Theta^2)K_{2/3}^2(\xi) + \Theta^2 K_{1/3}^2(\xi)\right]$$

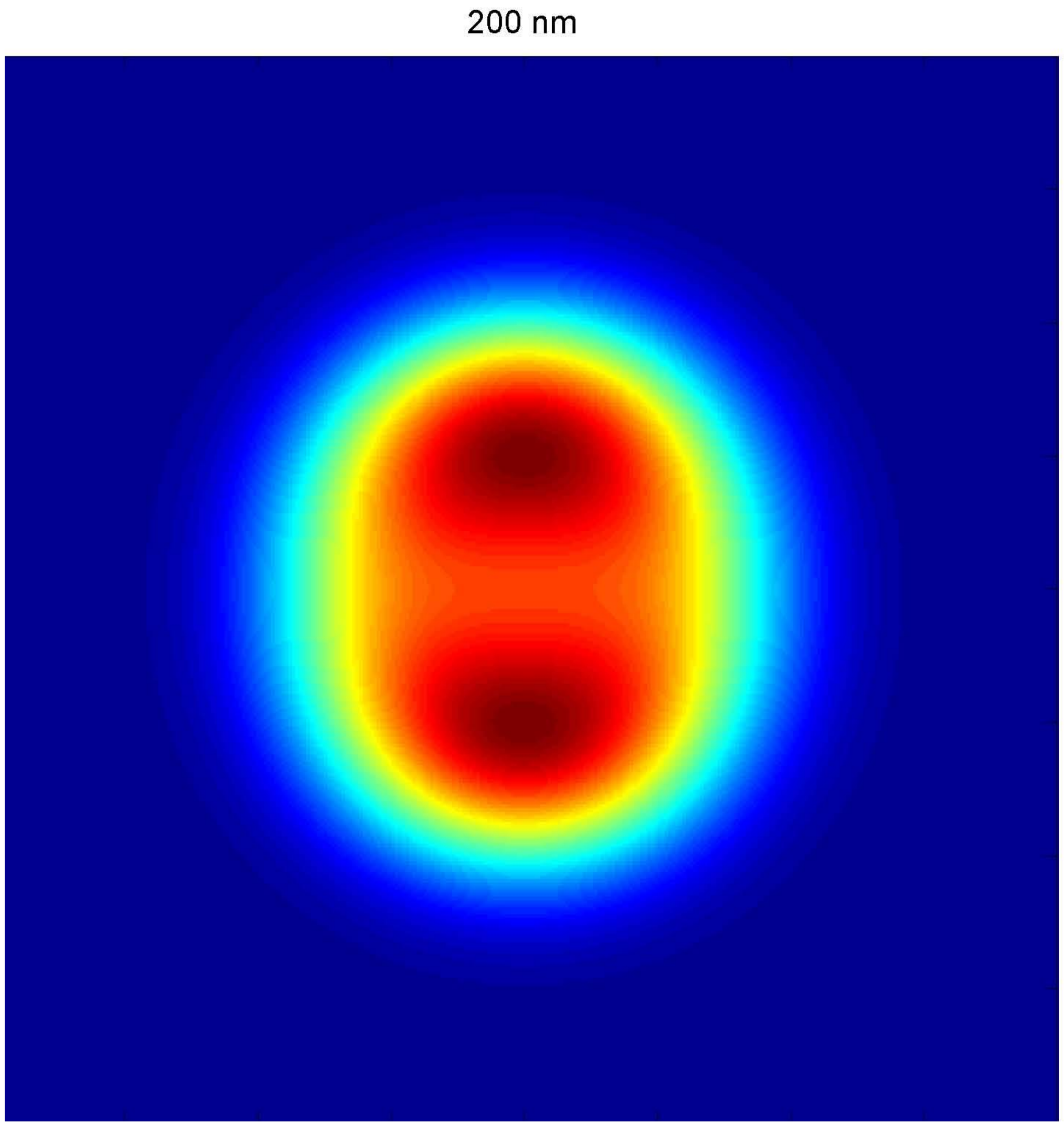
一般化した計算 (角度に制限なし)

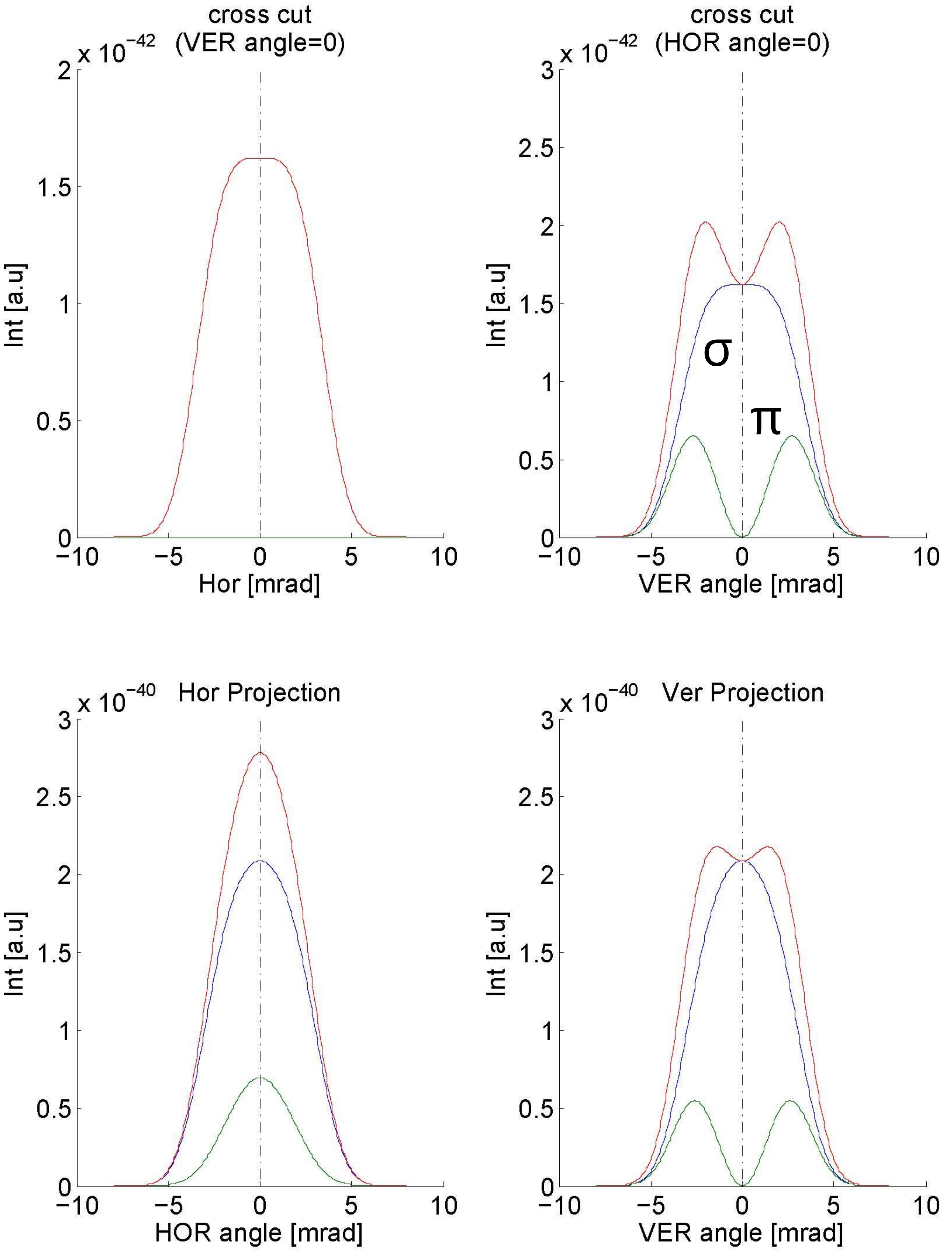
[Mitsuhashi et al., IBIC 2017, WEPCC09]

水平方向の角度：ξ
垂直方向の角度：ψ

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{3\pi^2 c}\left(\frac{\omega\rho}{c}\right)^2\left(\frac{1}{\gamma^2}+\psi^2+\xi^2\right)^2\left[K_{2/3}^2(\zeta) + \frac{\psi^2}{\frac{1}{\gamma^2}+\psi^2+\xi^2}K_{1/3}^2(\zeta)\right]$$

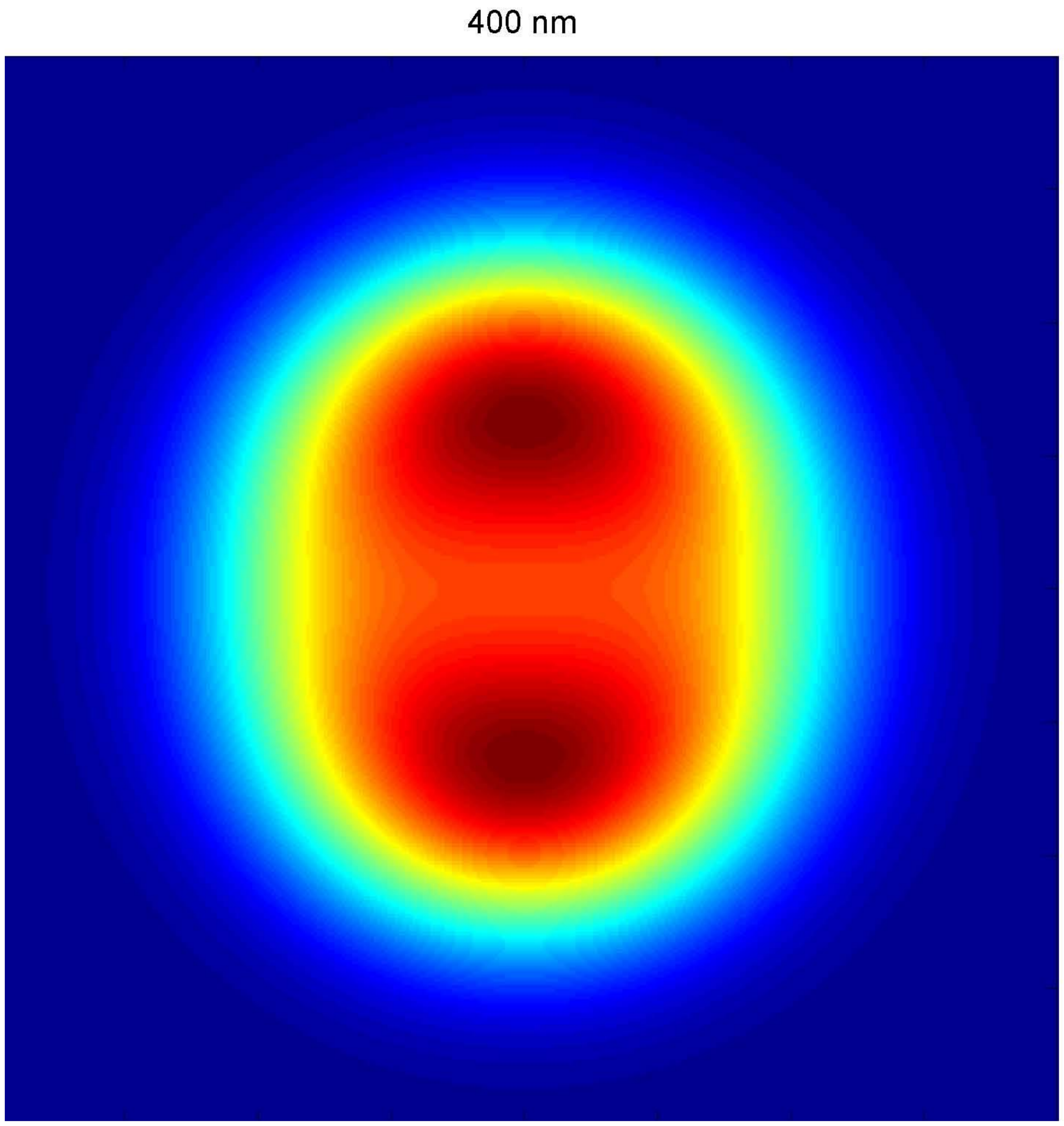
SPEAR3のシミュレーション

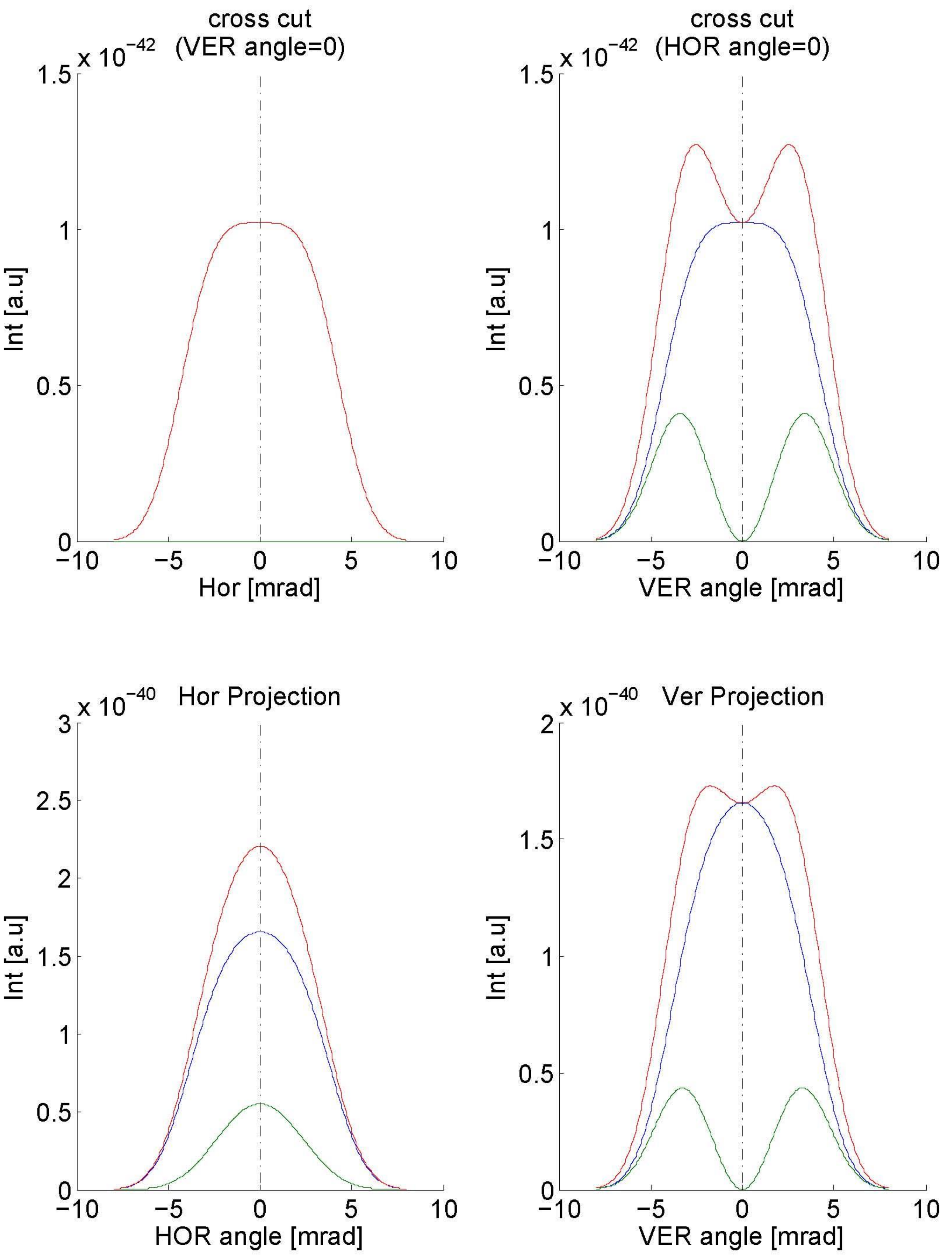




[Mitsuhashi et al., IBIC 2017]

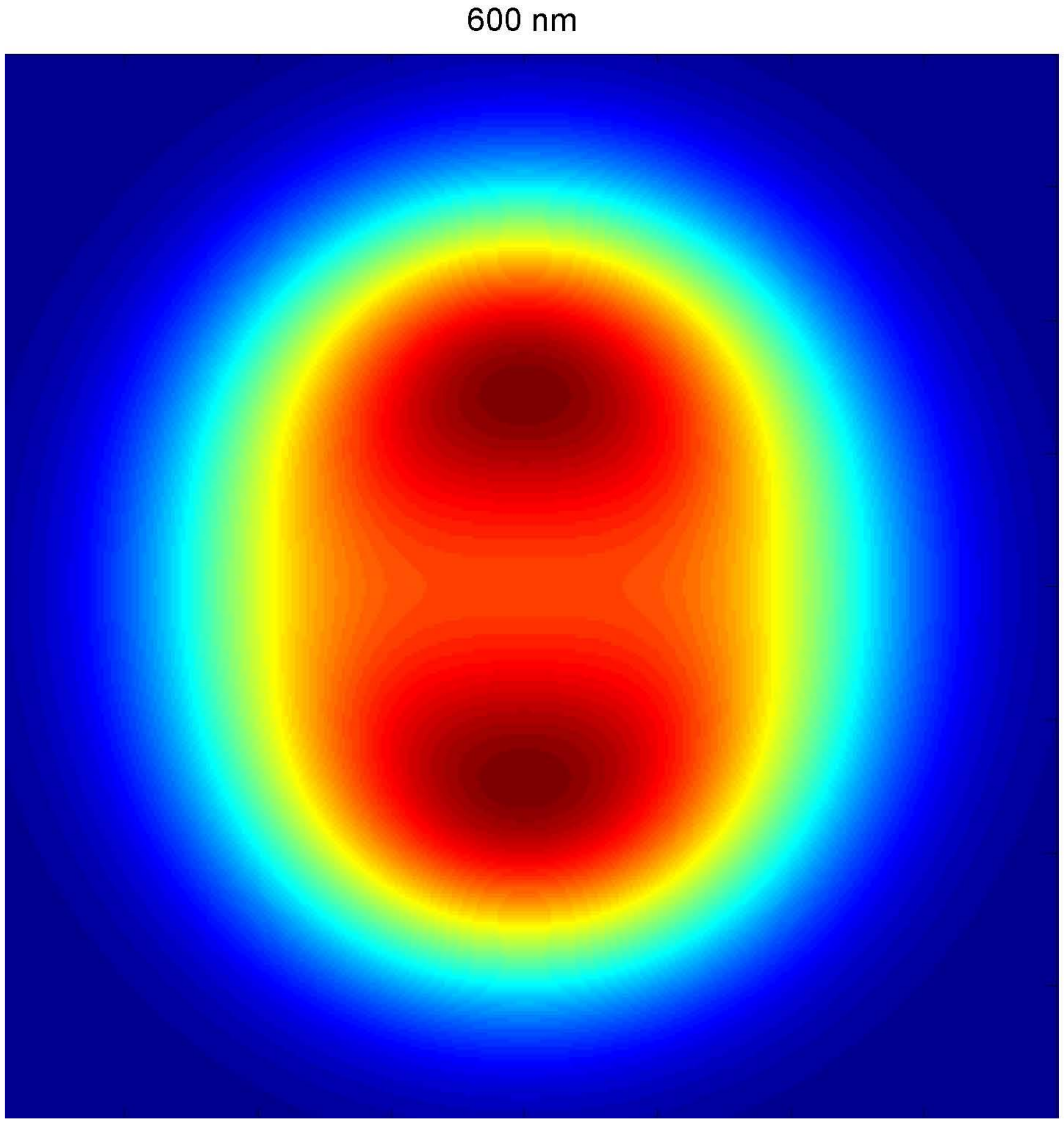
SPEAR3のシミュレーション



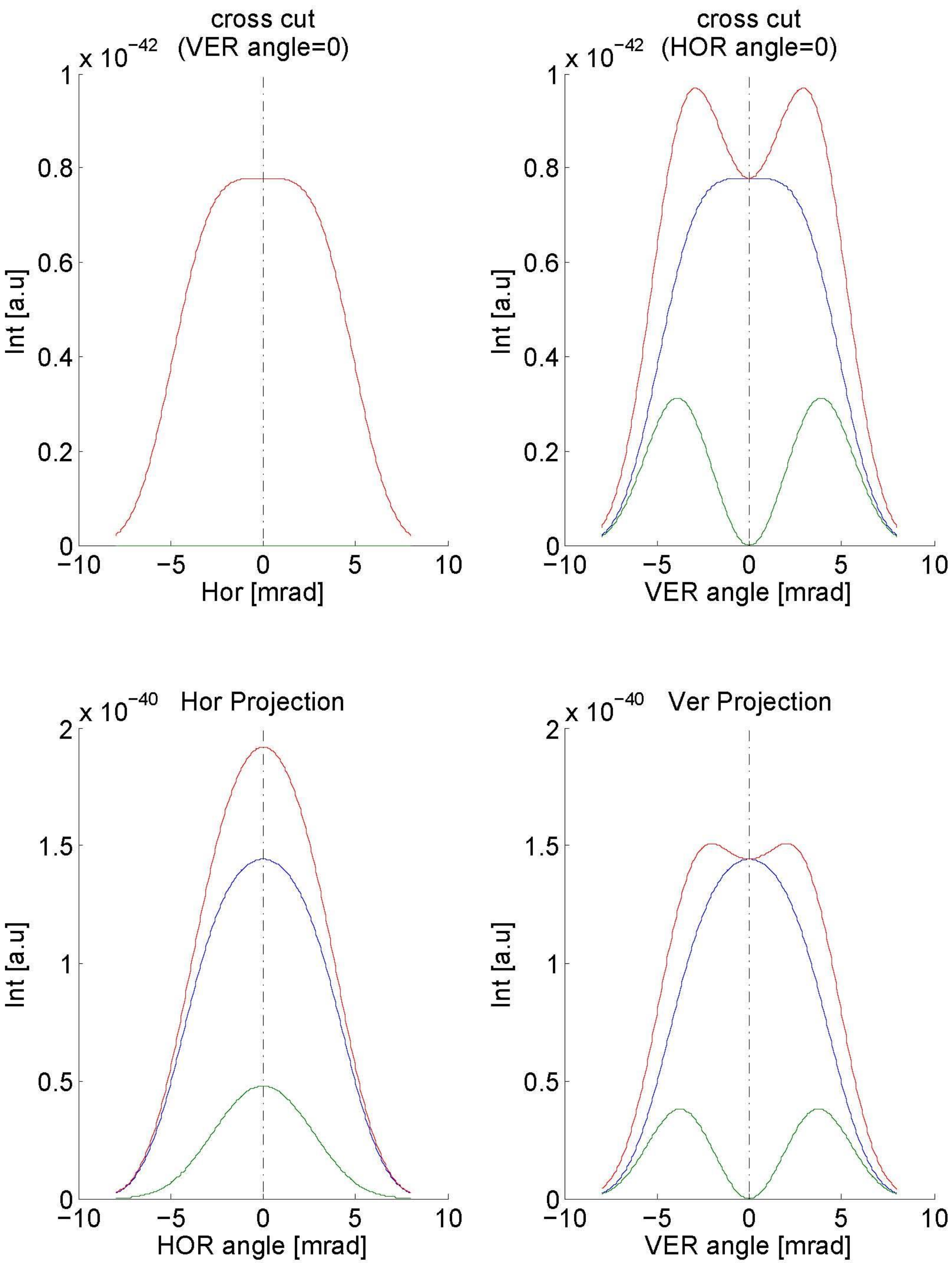


[Mitsuhashi et al., IBIC 2017]

SPEAR3のシミュレーション

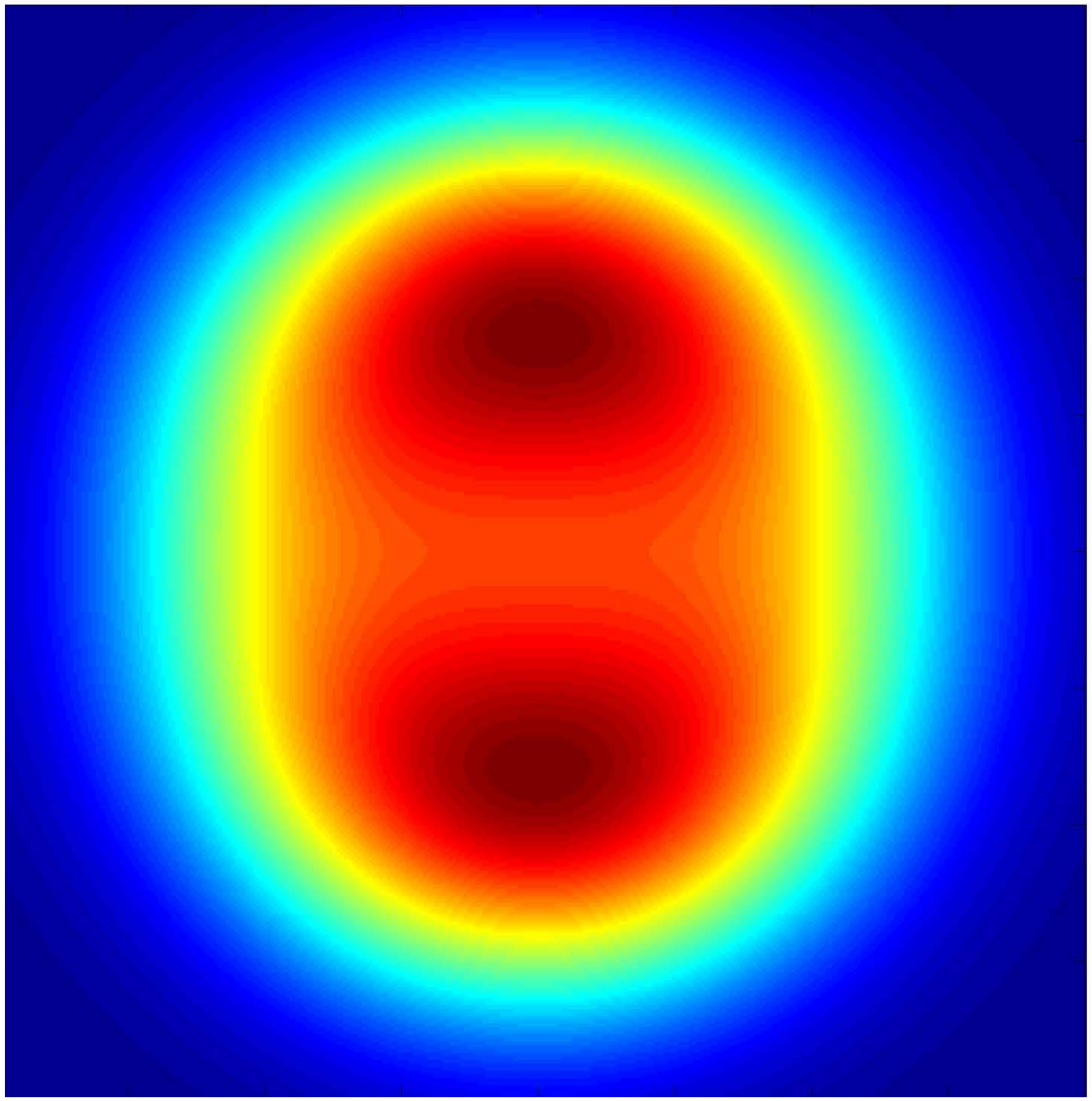


[Mitsuhashi et al., IBIC 2017]

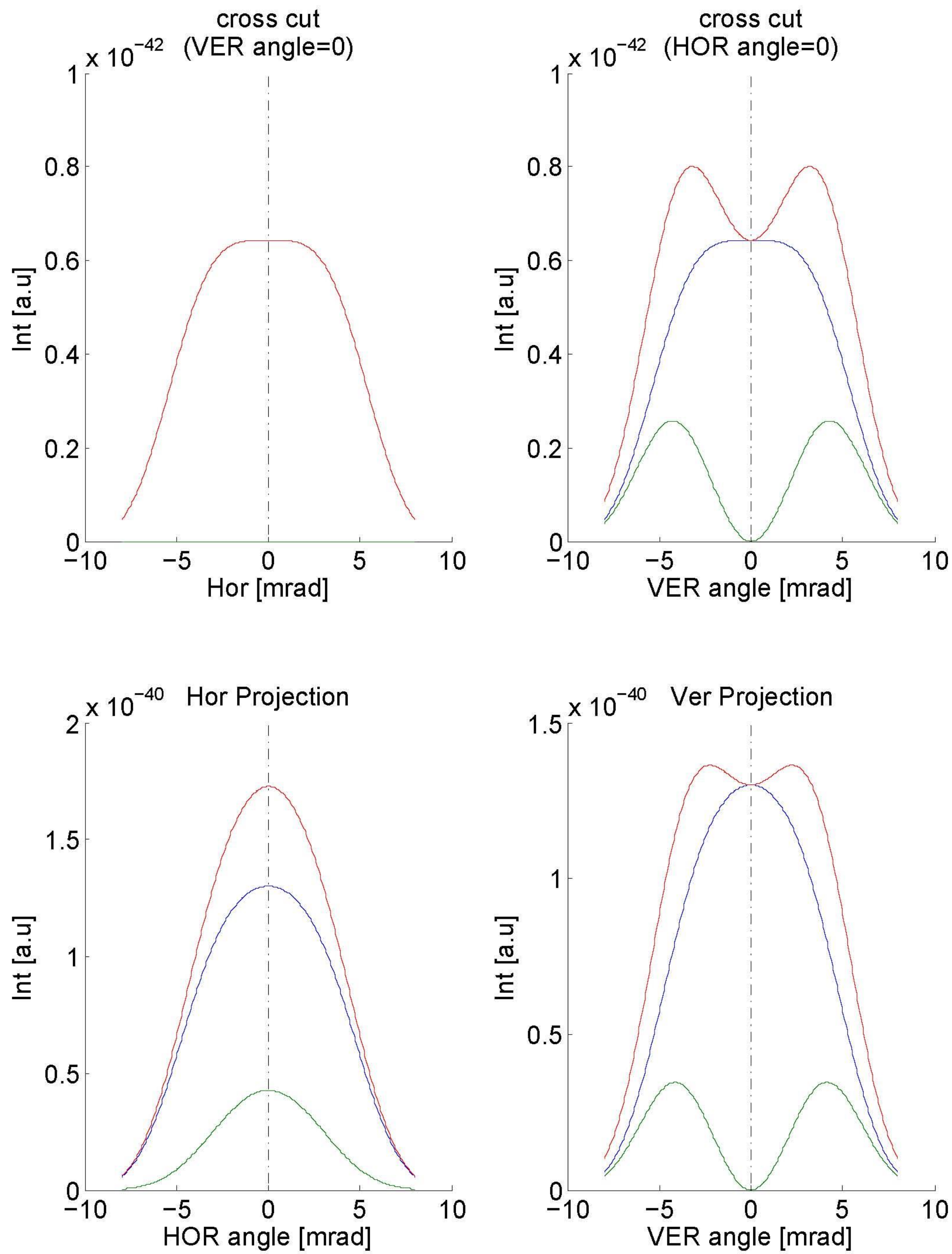


SPEAR3のシミュレーション

800 nm



[Mitsuhashi et al., IBIC 2017]



放射強度 → 放射する光子の数

熱量(watt)を計算する場合は"放射強度 dI/dΩ"の式が便利。
一方、"放射される光子の数 dN/dΩ"で表現した方が便利な場合も多い。

$$\frac{dN}{d\Omega} = \frac{dI}{d\Omega}\frac{\Delta\omega}{\hbar\omega}$$
$$= \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}\frac{3\gamma^2}{4\pi^2}\frac{\Delta\omega}{\omega}\left(\frac{\omega}{\omega^*}\right)^2(1+\Theta^2)\left[(1+\Theta^2)K_{2/3}^2(\xi)+\Theta^2K_{1/3}^2(\xi)\right]$$

最初の項は微細構造定数αと置き換えられる

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}\left(=\frac{1}{137}\right)$$

電子軌道の真ん前からシンクロトロン放射を眺めると$\Theta = \gamma\theta \to 0 \ (\theta \to 0)$

$$\left(\frac{\omega}{\omega^*}\right)^2(1+\Theta^2)\left[(1+\Theta^2)K_{2/3}^2(\xi)+\Theta^2K_{1/3}^2(\xi)\right] \to \left(\frac{\omega}{\omega^*}\right)^2K_{2/3}^2\left(\frac{\omega}{2\omega^*}\right) \equiv H_2\left(\frac{\omega}{\omega^*}\right)$$

$$\frac{dN}{d\Omega} \to \alpha\frac{3\gamma^2}{4\pi^2}\frac{\Delta\omega}{\omega}H_2\left(\frac{\omega}{\omega^*}\right)$$ と近似可能。

[Kim, AIP Conf. Proc. 184, 565]

1個の電子が放射する光子の数

大雑把に

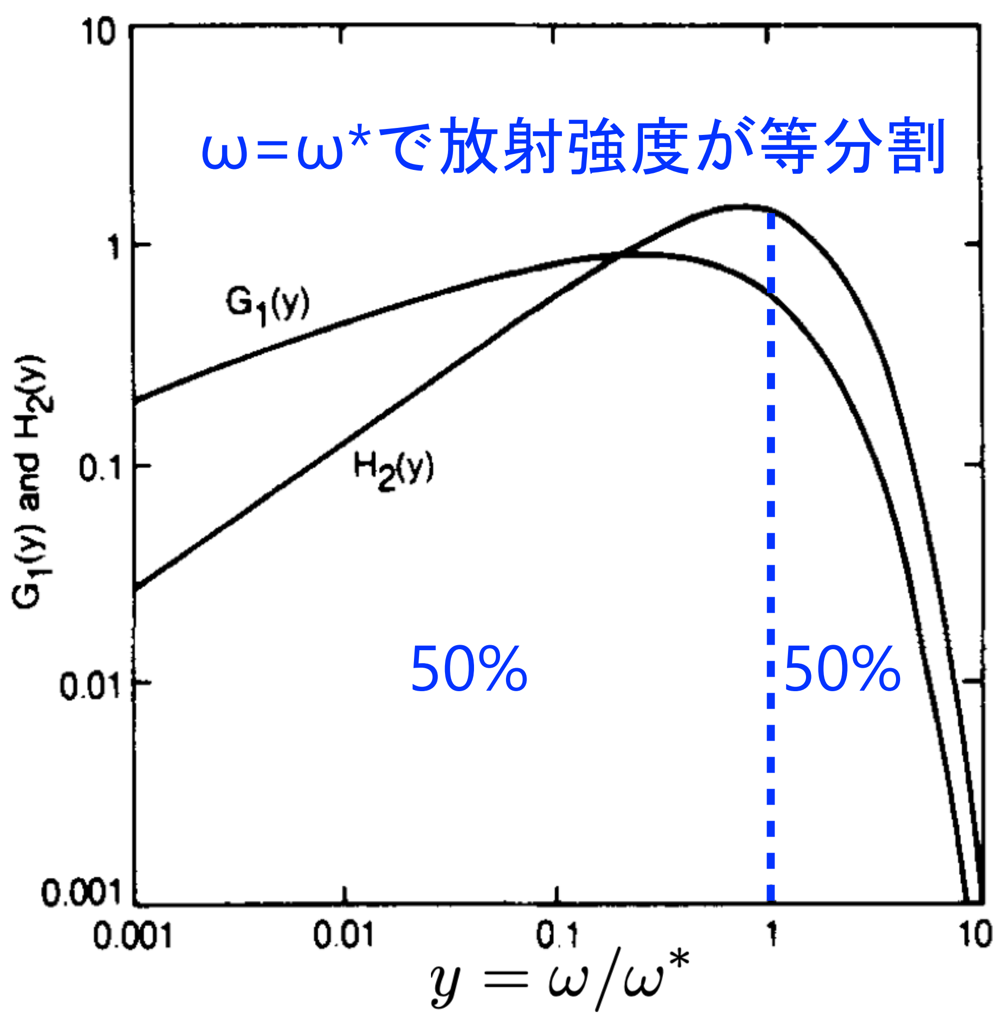
$$\int d\Omega \sim \frac{1}{\gamma^2} \text{ と } \left\langle \frac{\Delta\omega}{\omega} H_2\left(\frac{\omega}{\omega^*}\right) \right\rangle \sim \mathcal{O}(1) \text{ と置けるので}$$

$$\boxed{\langle N \rangle \approx \int \alpha \frac{3\gamma^2}{4\pi^2} \left\langle \frac{\Delta\omega}{\omega} H_2\left(\frac{\omega}{\omega^*}\right) \right\rangle d\Omega \sim \alpha}$$

のように書ける。

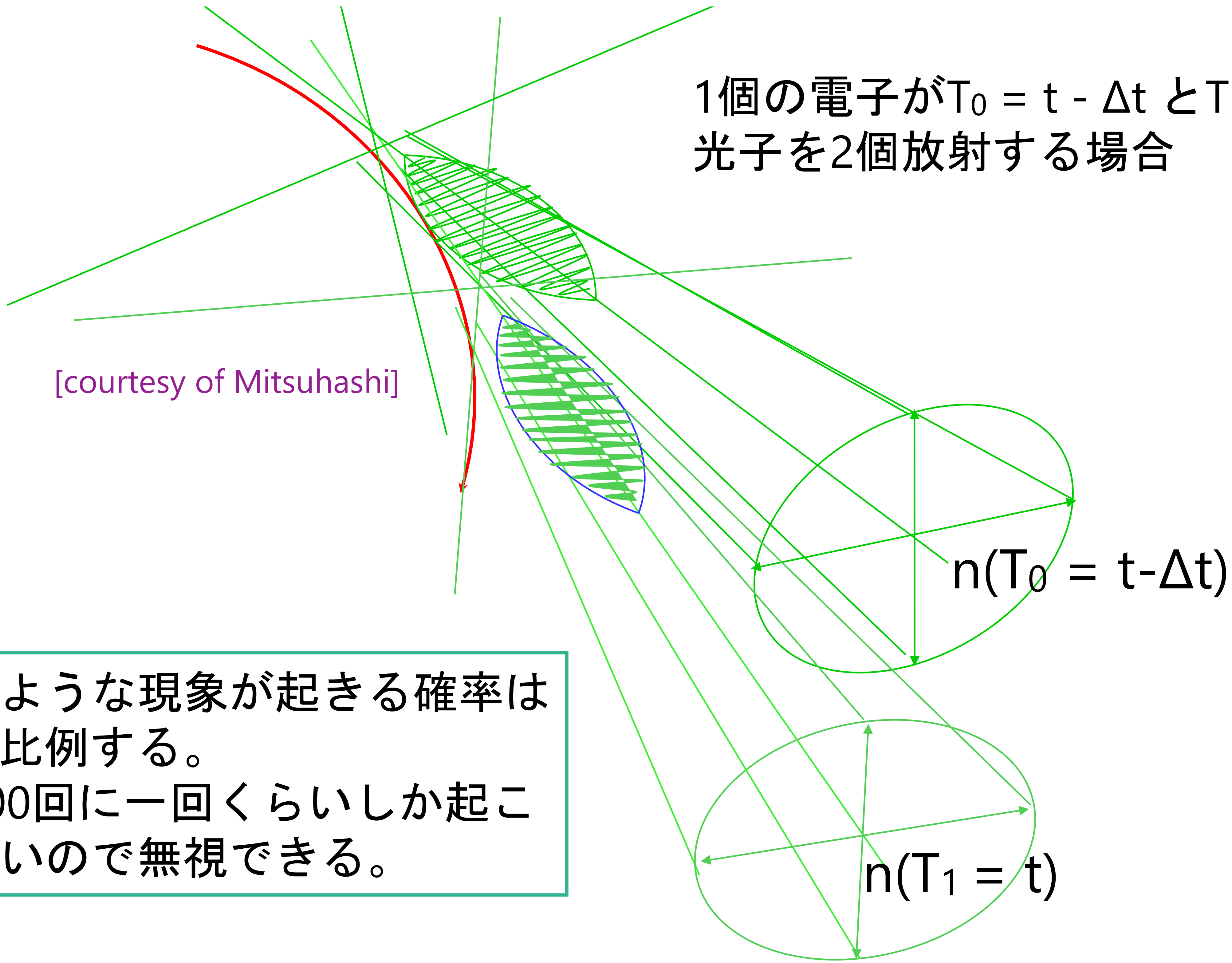
細かい話を無視すると、１個の電子からα = 1/137 = 0.0072 の確率で光子が放射される。

または電子が偏向電磁石を横切る事137回に一個の光子が放射されると理解できる。



[Kim, AIP Conf. Proc. 184, 565]

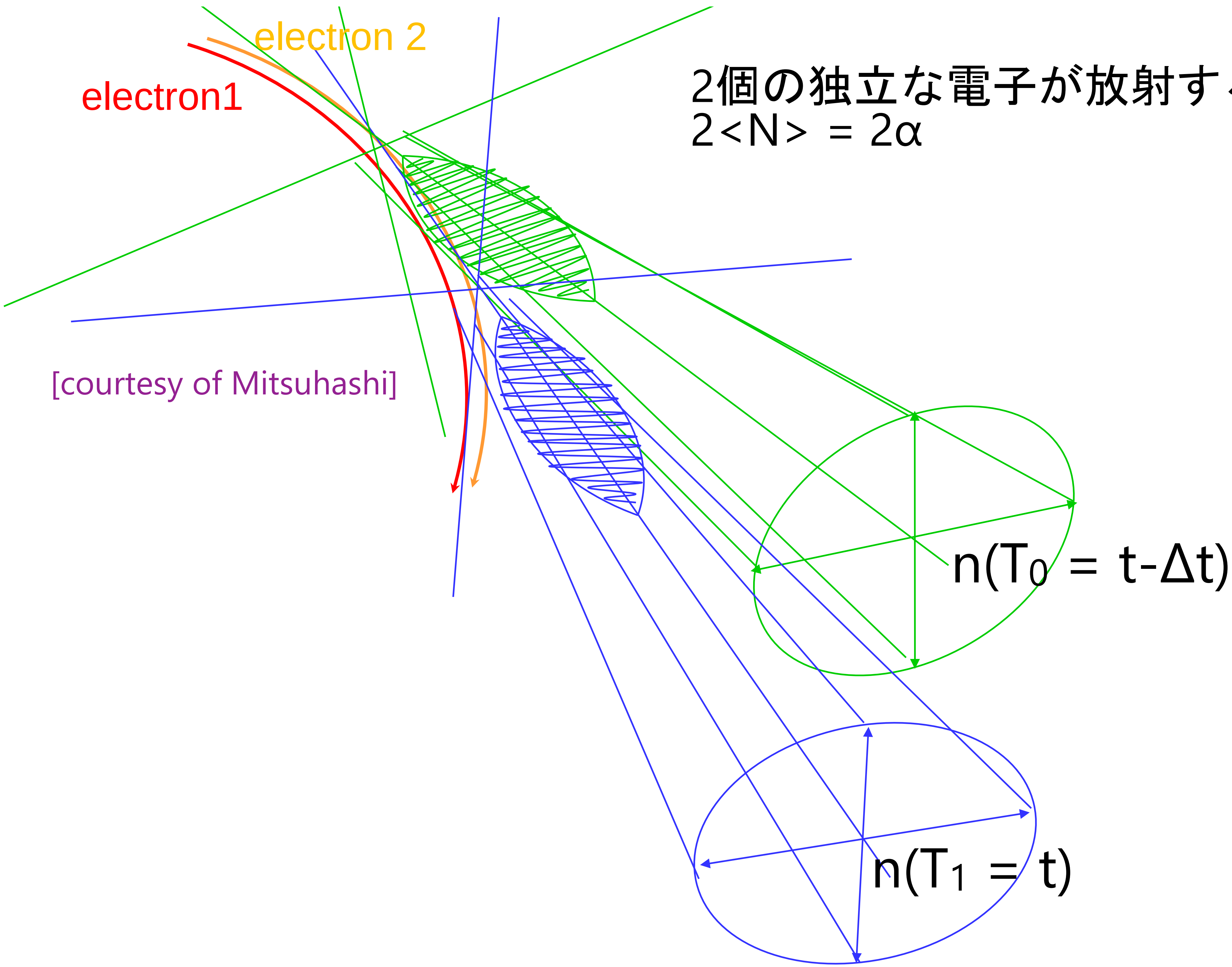
1個の電子が光子を2個放射する確率



1個の電子がT_0 = t - Δt とT_1 = tの間に光子を2個放射する場合

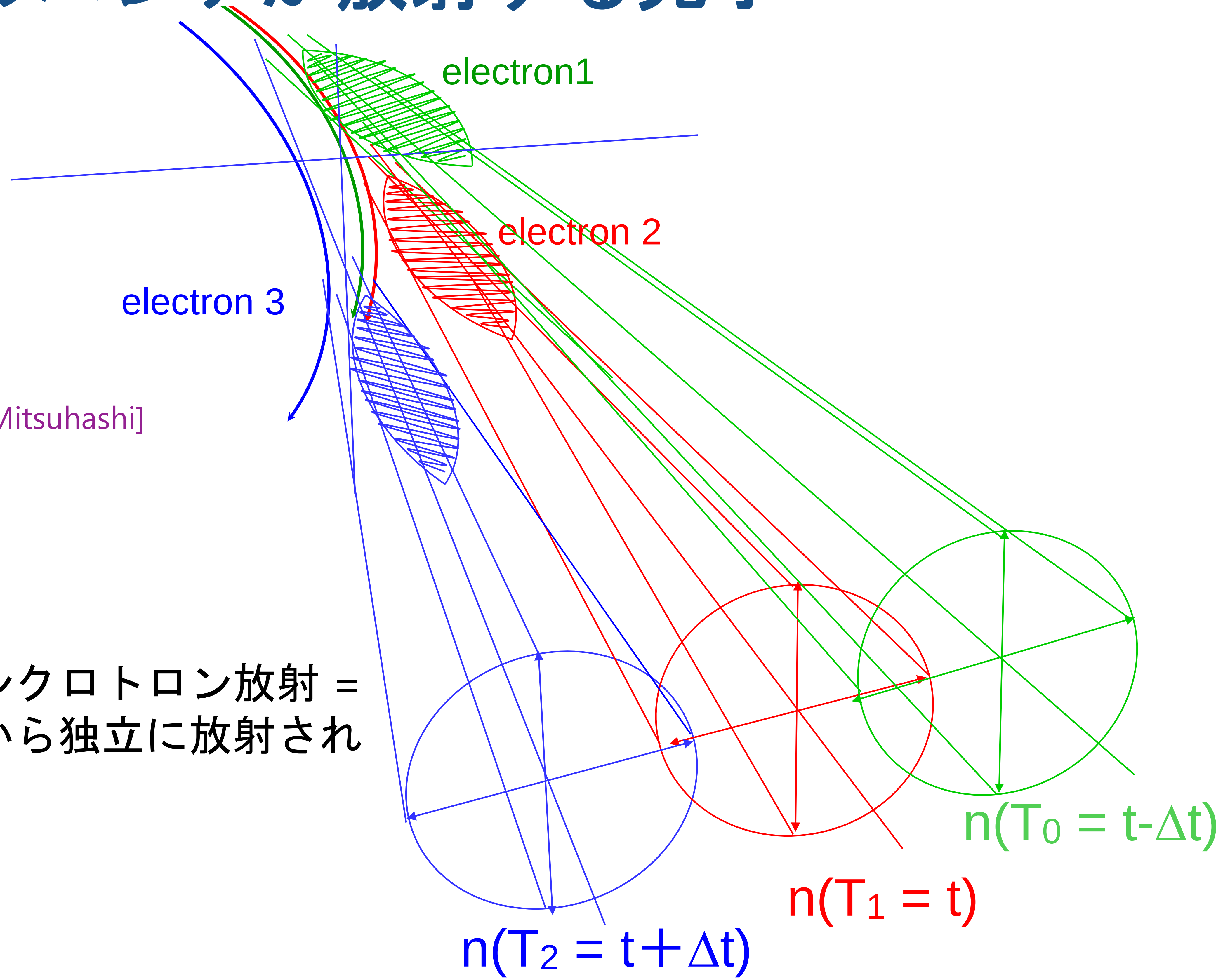
このような現象が起きる確率はα^2に比例する。
19000回に一回くらいしか起こらないので無視できる。

2個の電子が放射する光子の数



2個の独立な電子が放射する光子の数 = $2\langle N\rangle = 2\alpha$

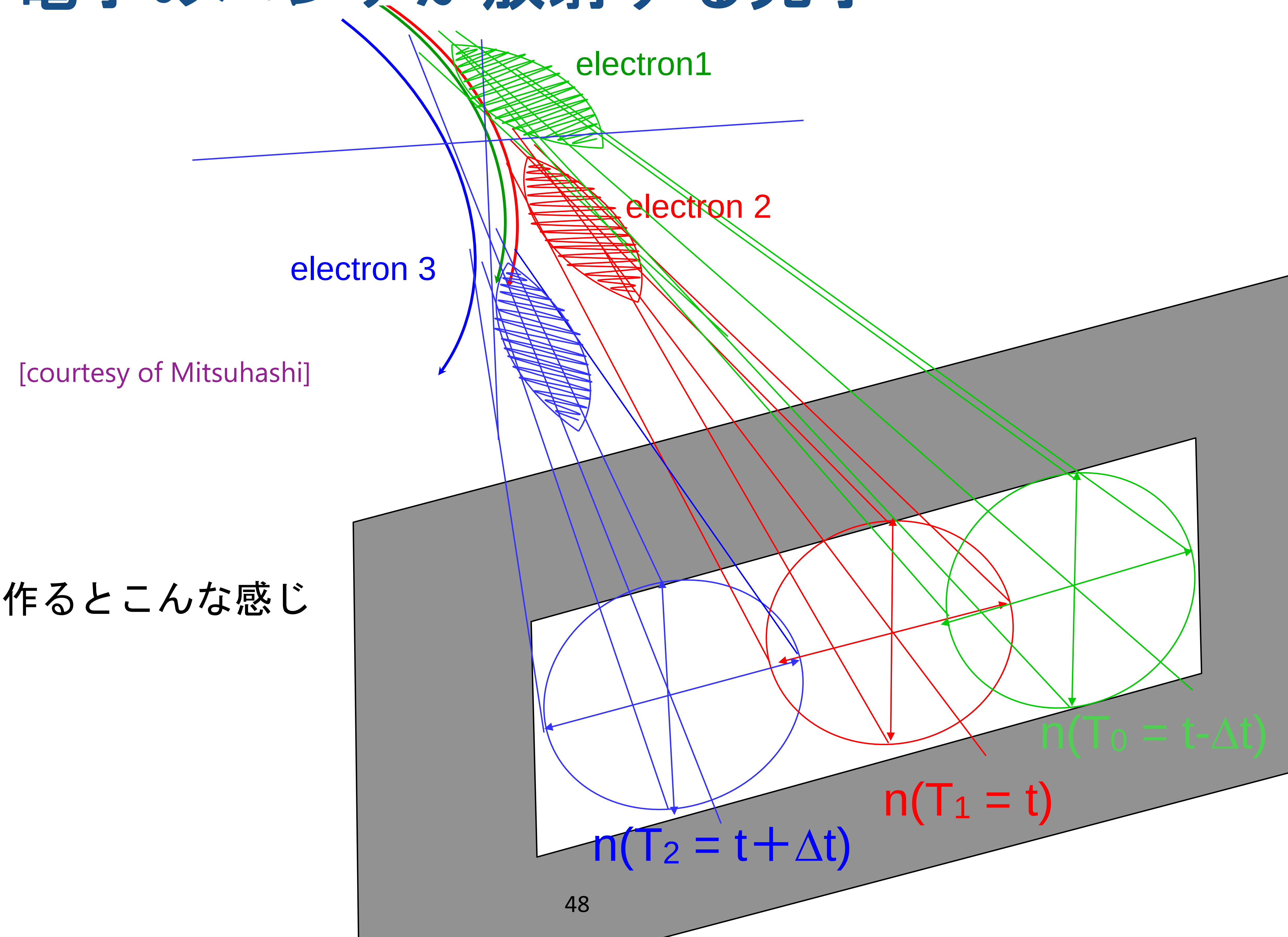
電子のバンチが放射する光子



[courtesy of Mitsuhashi]

バンチが作るシンクロトロン放射 = 独立な荷電粒子から独立に放射される光の和。

電子のバンチが放射する光子



視野を作るとこんな感じ

インコヒーレントな放射

お互いに独立に放射されることを
インコヒーレントな放射
と言う。

※コヒーレントな状態
二つの電磁波の位相が揃っている状態 → お互いに干渉

実際に放射光の強度を測定してみると荷電粒子の数n
に比例しており(nα)、αのn乗(α^n)には比例しないので
、放射はインコヒーレントであることが分かる。

電子ビームが放射する光子の数

光子の放出 (電子1個あたり1/137) はすごく少ないように感じるが、
加速器の中を回っているビームの中には膨大な数の荷電粒子がいるので、実際の放射は非常に強い。

例：0.1 Aの電子ビームでは
0.1 A / 1.66 x 10^{-19} C = 6 x 10^{17} / secも電子がいる

ビームエネルギーE (GeV)とビーム電流I_b (A)で光子数を記述すると

$$\frac{d^2N_{\rm ph}}{d\Omega} = 1.33\times10^{13}E^2\,[\mathrm{GeV}^2]I_b[\mathrm{A}]H_2(\omega/\omega^*)\frac{\mathrm{photons}}{\mathrm{s\,mrad^2\,(0.1\%\,BW)}}$$

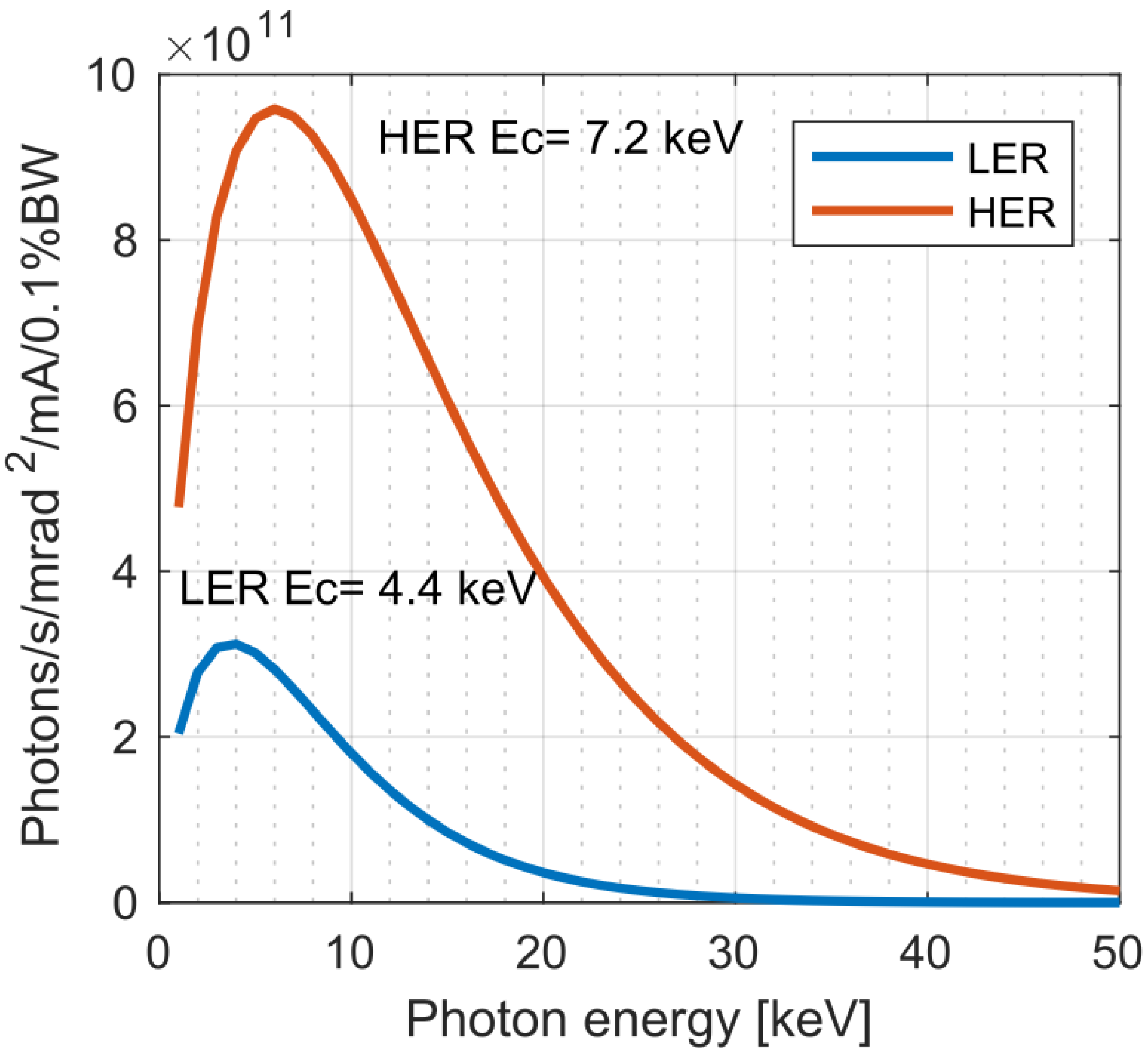
SuperKEKBにおけるシンクロトロン放射

下の式にビームエネルギーE (GeV)とビーム電流Ib (A)を代入すれば良い

$$\frac{d^2 N_{\mathrm{ph}}}{d\Omega} = 1.33 \times 10^{13} E^2\,[\mathrm{GeV}^2] I_b[\mathrm{A}] H_2(\omega/\omega^*) \frac{\mathrm{photons}}{\mathrm{s\,mrad}^2\,(0.1\%\,\mathrm{BW})}$$

Table 3.2: XRM beamline parameters in Phase 1 commissioning of SuperKEKB.

Parameter		**LER** (e^+)	**HER** (e^-)	**Unit**
Radius of source bend	ρ	31.85	105.98	m
Distance from source to optic	L	9.47	10.26	m
Distance from optic to Be window	L'	31.79	32.69	m
Thickness of Be filter	T	0.5	16	mm
Thickness of Be window	T'	0.2	0.2	mm
Thickness of Au		200	200	µm
Thickness of Diamond		600	600	µm
Air gap	f	100		mm
Effective thickness of YAG:Ce		141		µm



[Mulyani et al, NIM A 919, 1]

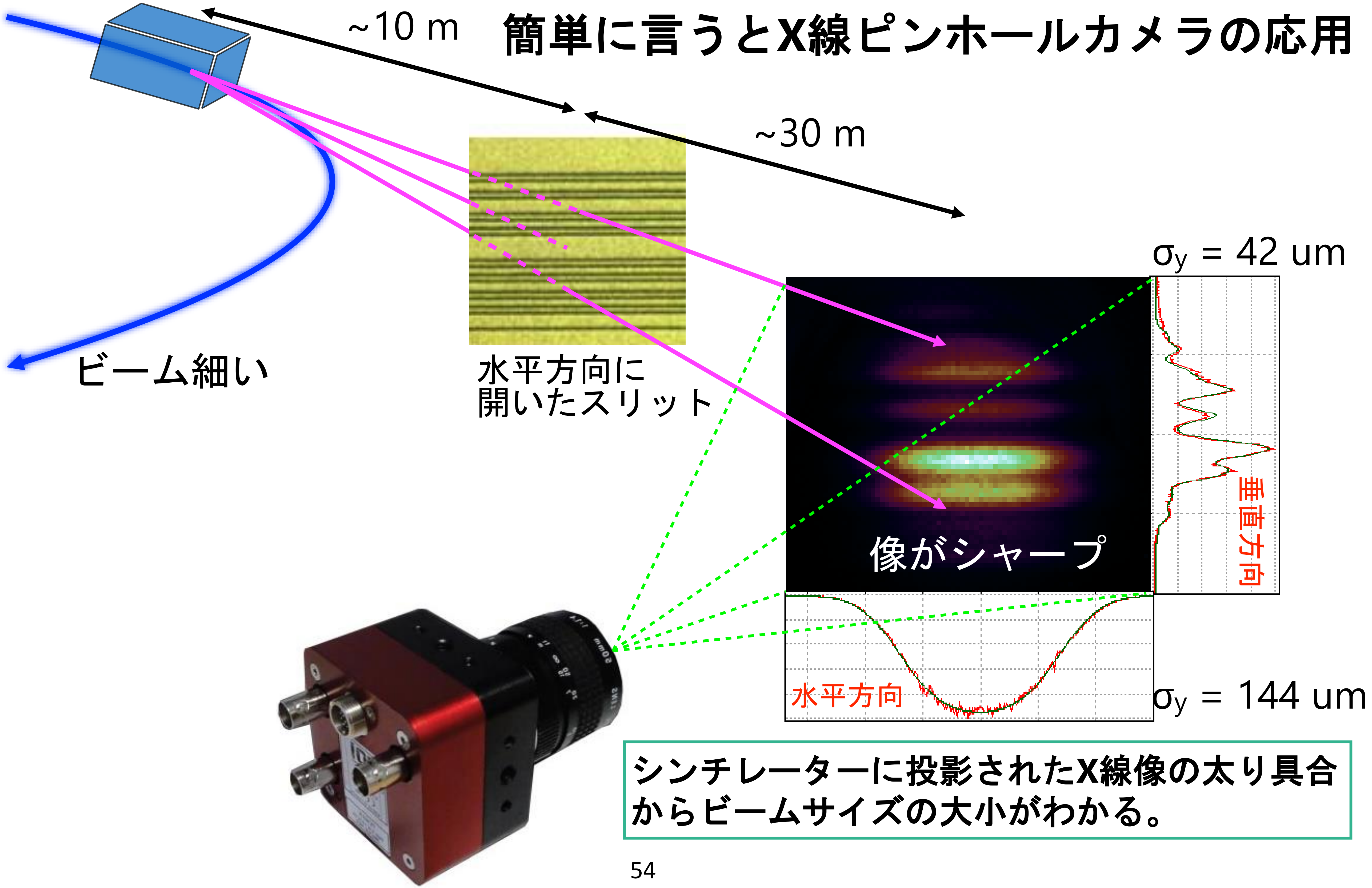
2. 光の伝搬

「2.光の伝搬」の目次

- ピンホール・マルチスリットを用いたビームサイズ測定を概観する
- Maxwell方程式からKirchhoff回折公式を導く
- Fresnel回折近似とFraunhoffer回折近似を導く

SuperKEKBでのビームサイズ測定手法

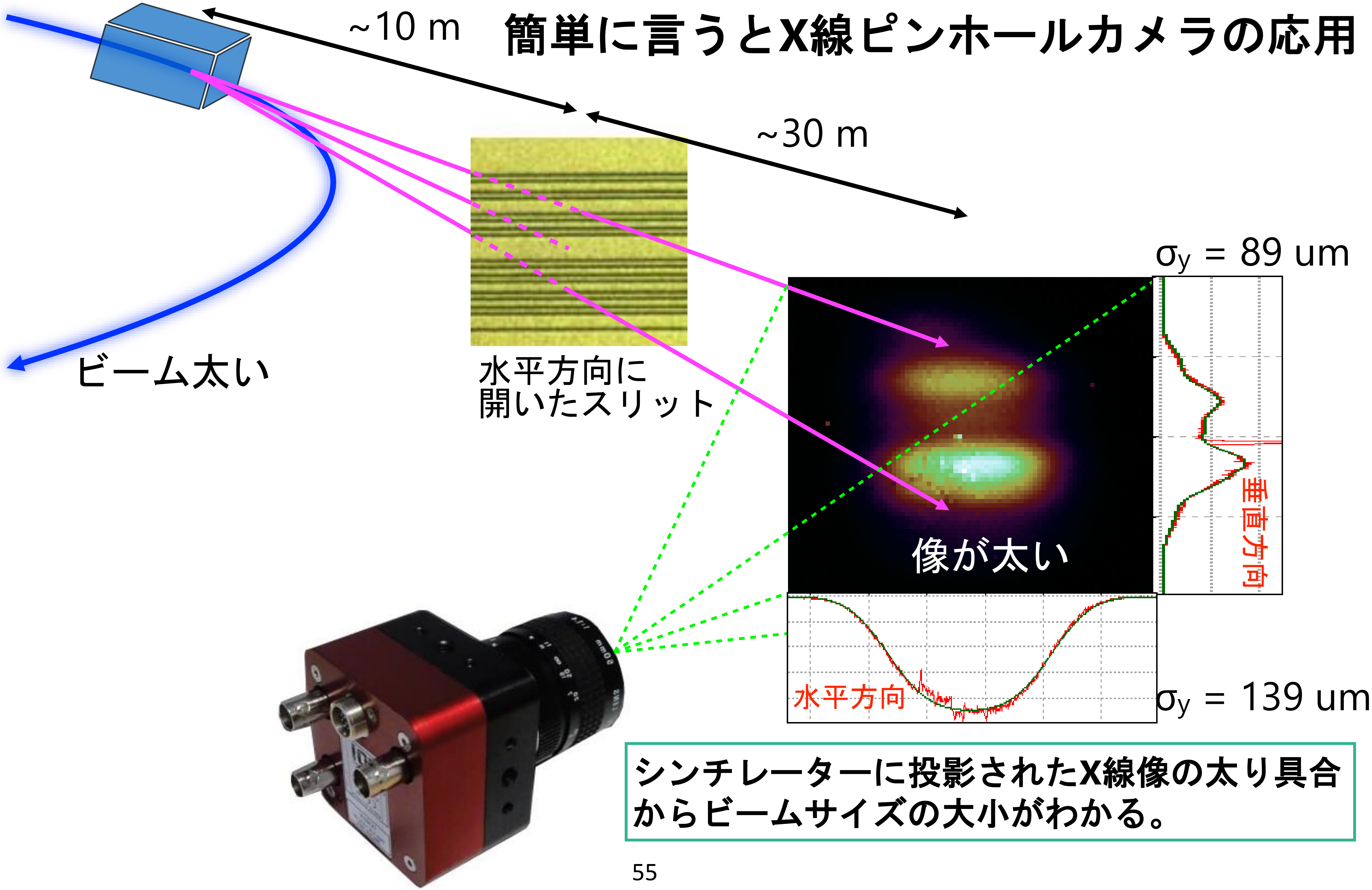
簡単に言うとX線ピンホールカメラの応用



シンチレーターに投影されたX線像の太り具合からビームサイズの大小がわかる。

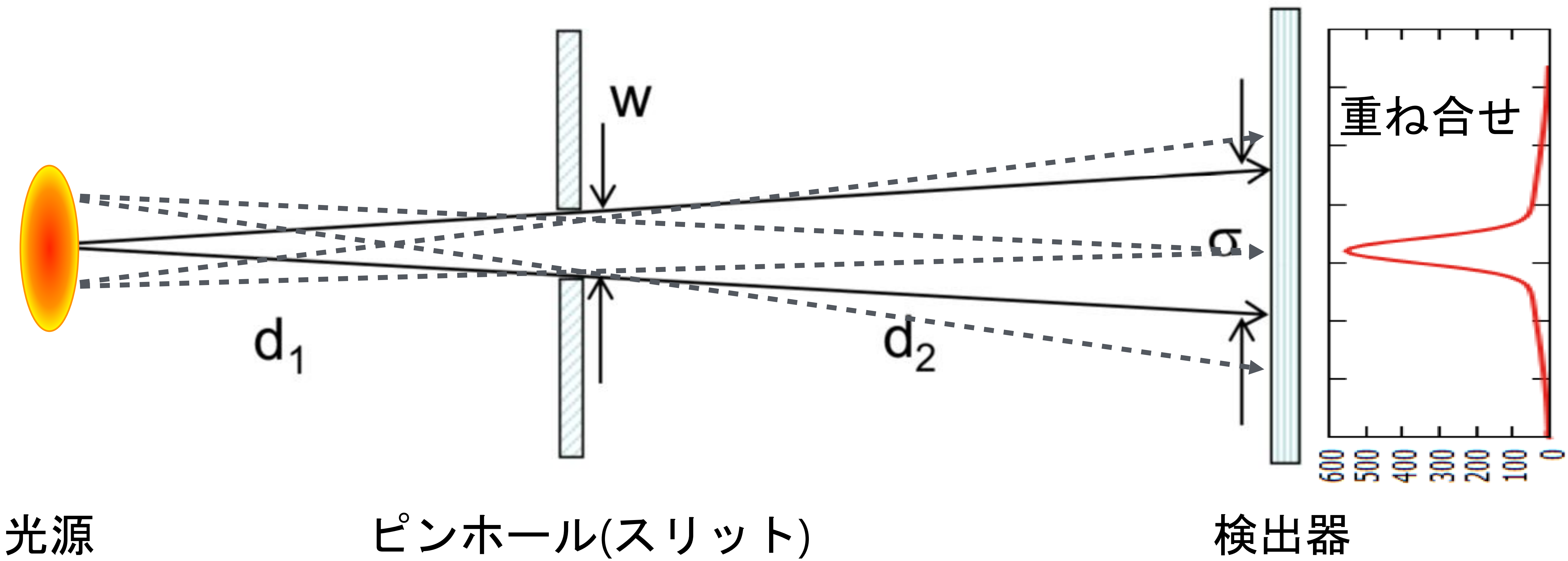
SuperKEKBでのビームサイズ測定手法

簡単に言うとX線ピンホールカメラの応用



シンチレーターに投影されたX線像の太り具合からビームサイズの大小がわかる。

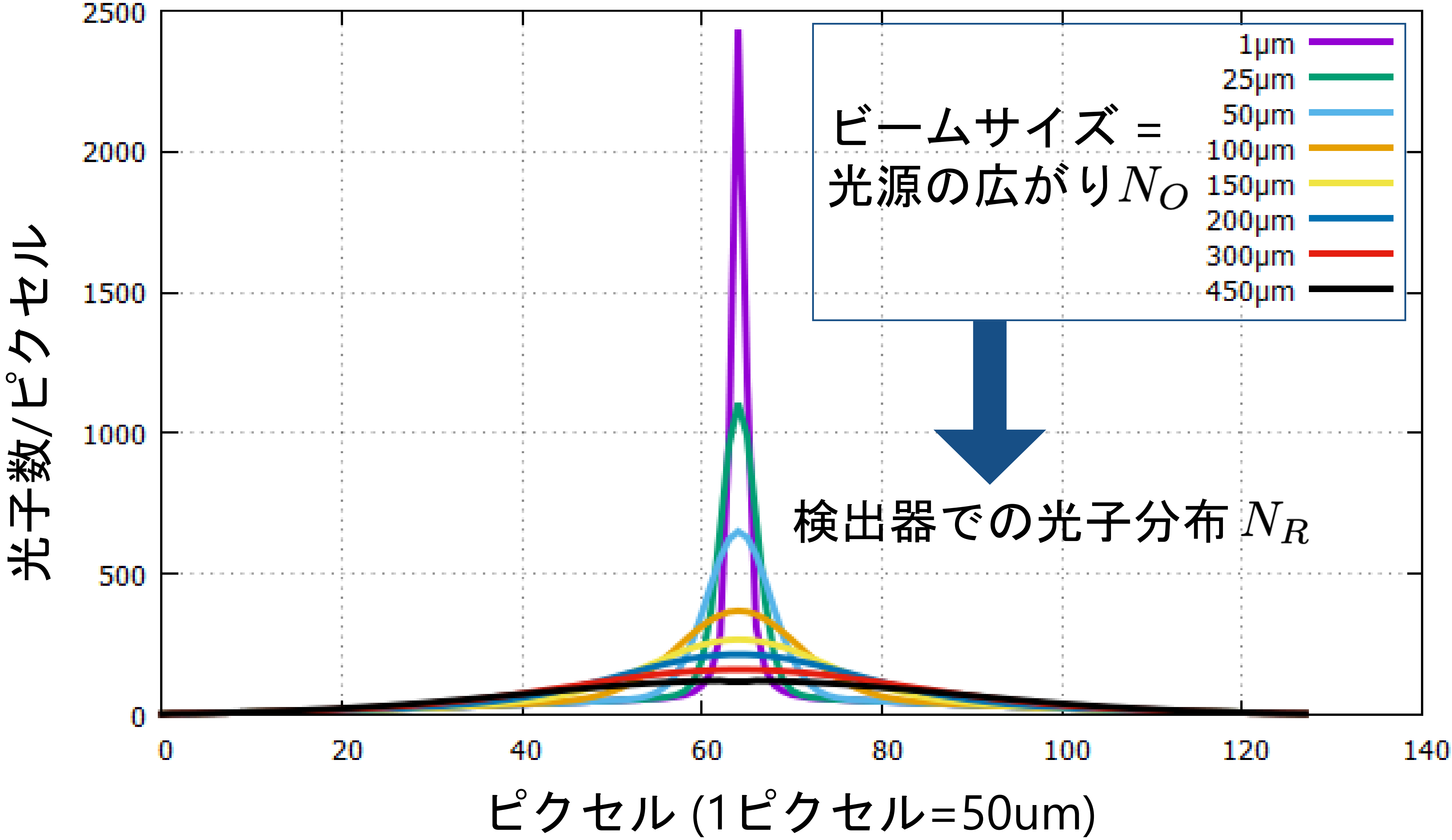
ピンホールによる垂直ビームサイズ測定



ビームサイズが有限 = 光源が点ではなく垂直方向に分布(ガウス分布と仮定)

“任意のガウス分布(N_O)に従う光源”が作る“検出器上での光子分布” →
“点光源が作る検出器上での光子分布”を“ガウス分布(N_R)に従って重ね合わせ”

ピンホールによる垂直ビームサイズ測定

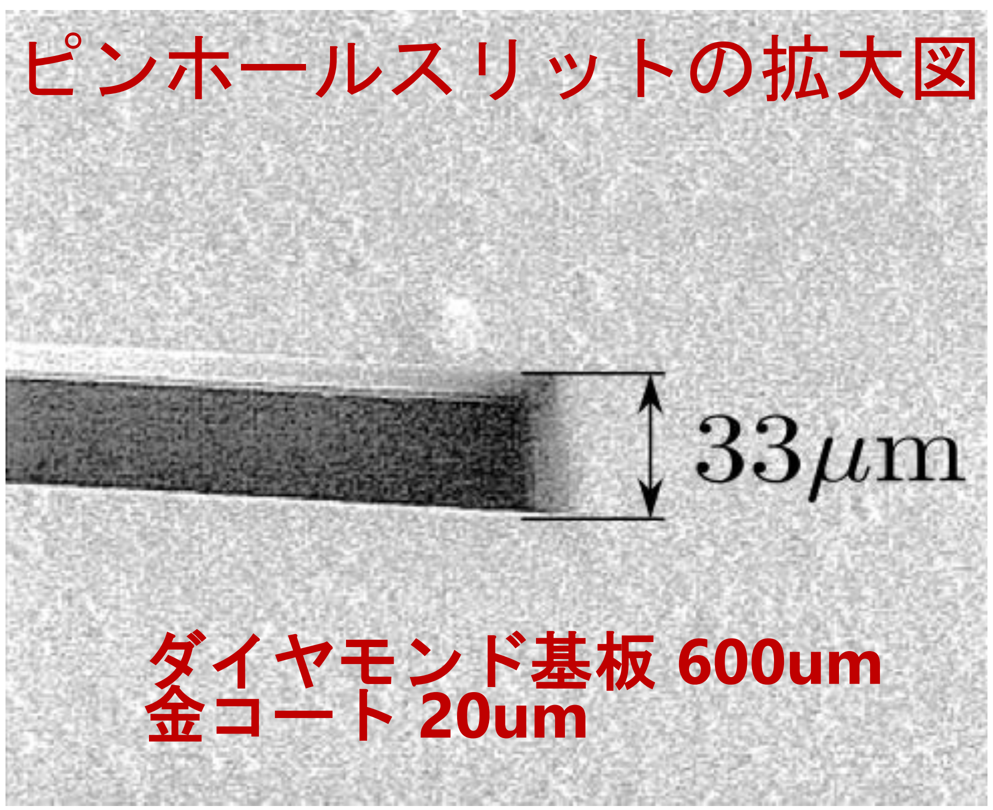


[Mulyani, Ph.D thesis]

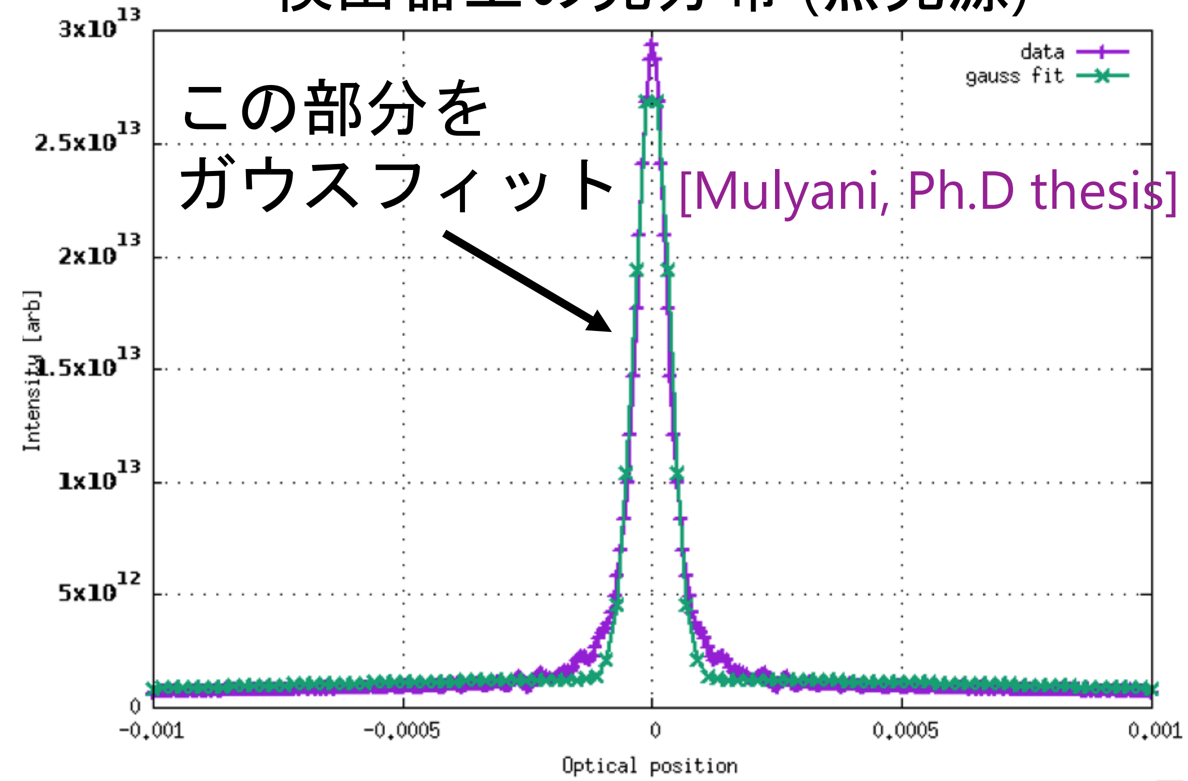
$N_O \leftrightarrow N_R$の対応が事前に分かっていれば、N_Rを測定してN_Oを導出可能。

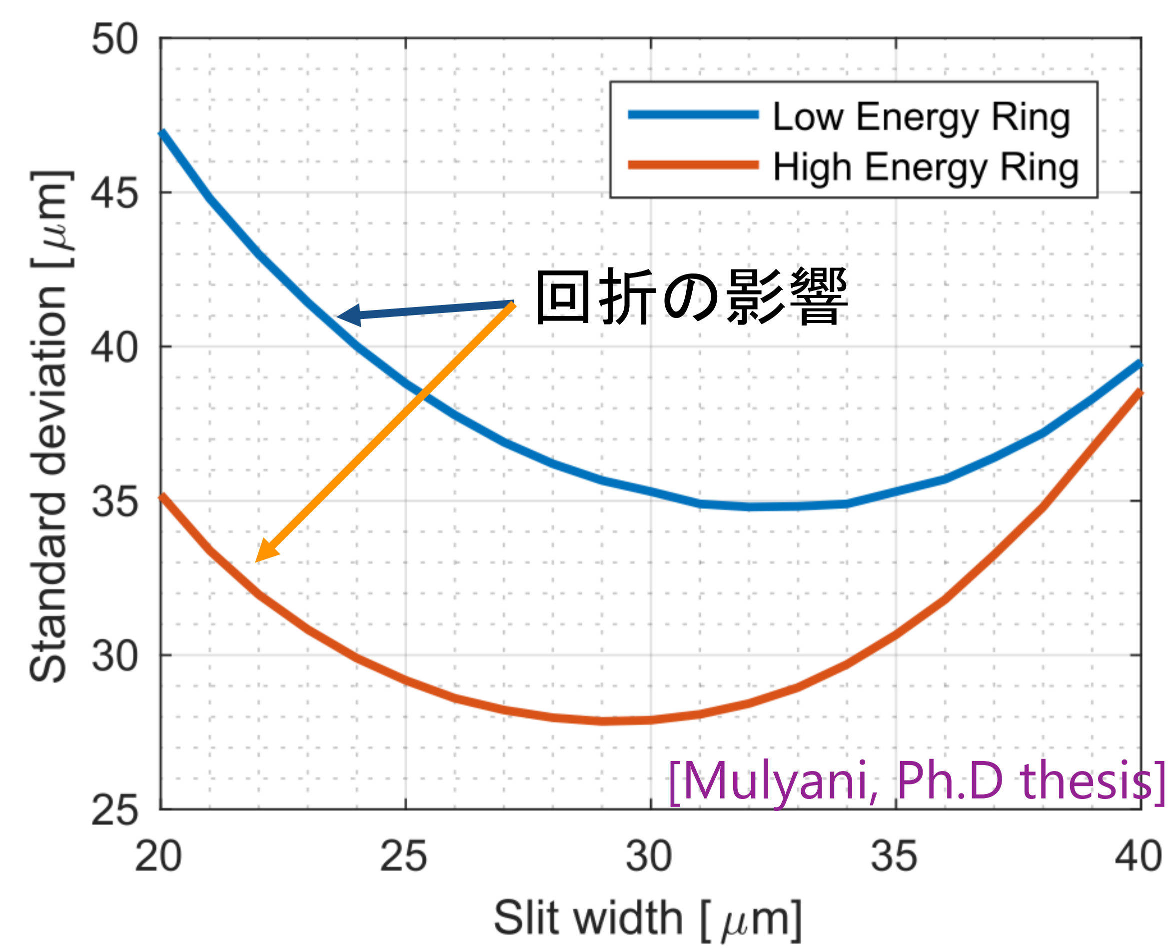
ピンホールの欠点

1. ピンホール(スリット)が一つだけ
→ 光量が少ないので統計誤差が大きい
2. スリット幅を広げ光量を増やしては？
→ 光の分布が太って分解能が悪化



検出器上の光分布 (点光源)



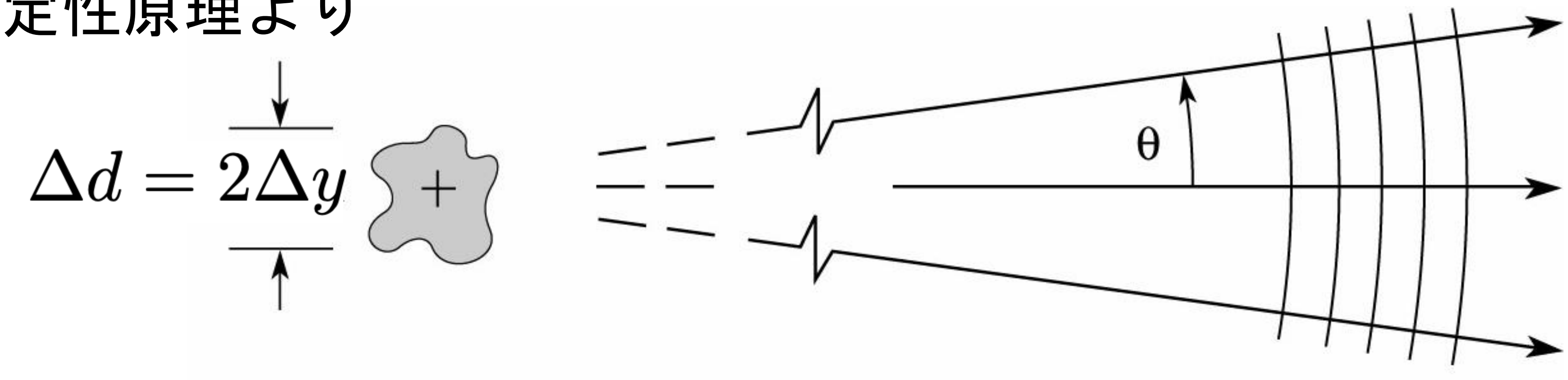


※スリット幅は狭すぎても広すぎてもNG
→ 33um幅を採用 (陽電子リングで良好)

回折限界

Heisenbergの不確定性原理より

$$\Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}$$



[Attwood, AST210/EECS213, UC Berkeley]

Δp_yの項は

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}$$

$$\Delta p_y = \Delta(p \sin\theta) = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}\Delta\theta$$

だから、回折限界と呼ばれる関係が得られる。

$$\boxed{\Delta d \Delta\theta \geq \frac{\lambda}{2\pi}}$$

スリット幅(Δd)をどんなに狭めても、スリット通過後の角度不定性(Δθ)が大きくなり、結局小さなビームサイズを測定出来ない。

(カメラの小絞りボケと同じ現象, F値を一定以上大きくしても逆にぼやける)

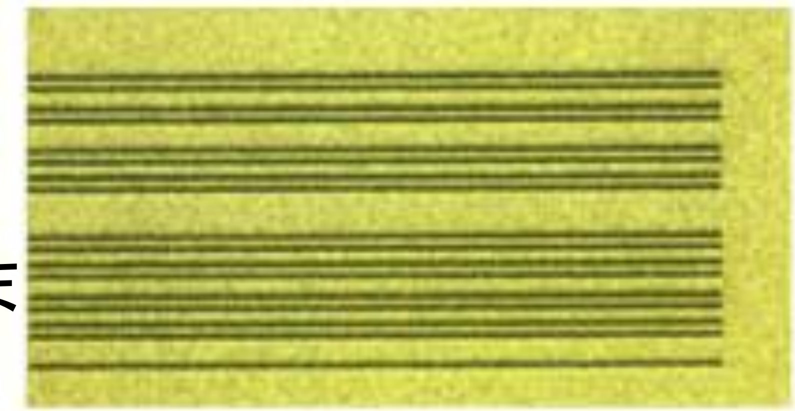
マルチスリット

ピンホール (シングルスリット)

~3 mm

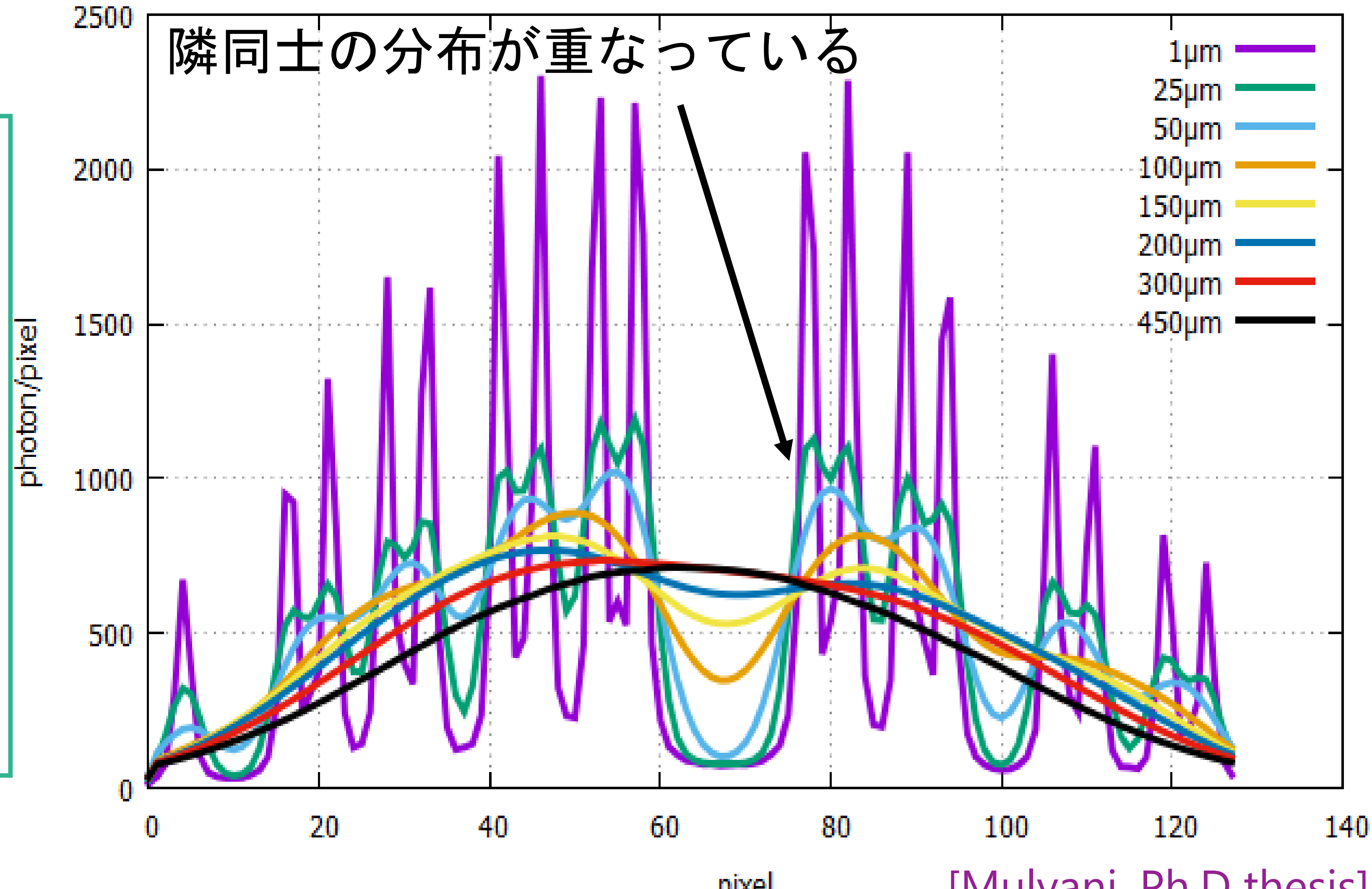
スリット幅はそのまま
スリット数を増やす

マルチスリット



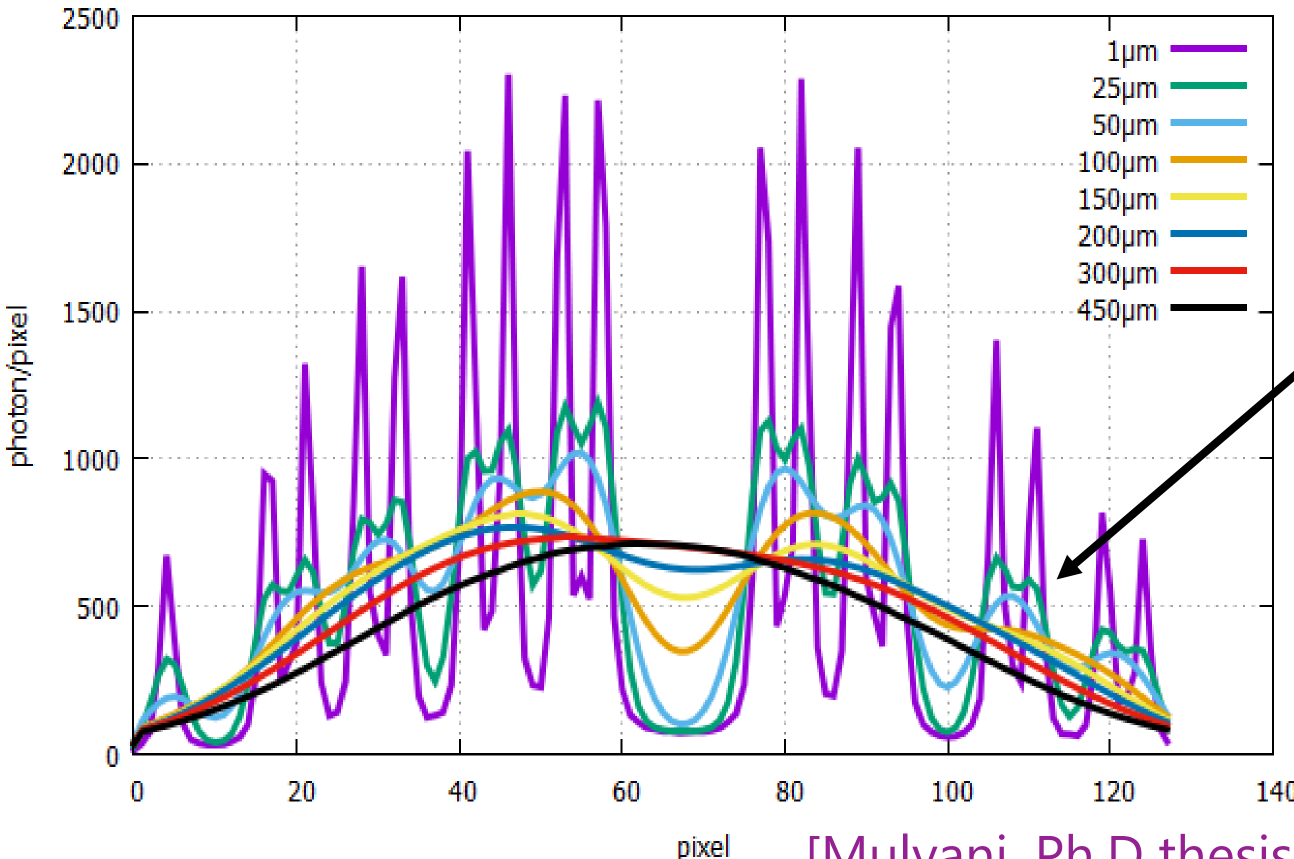
マルチスリットの長所・短所

- スリット幅は同じ
  → 分解能はピンホールと同じ
- スリット数が多い~10-20個
  → 光子数が増え統計誤差小
- 検出器上で光分布が被る
  → 単純なフィットは不可能

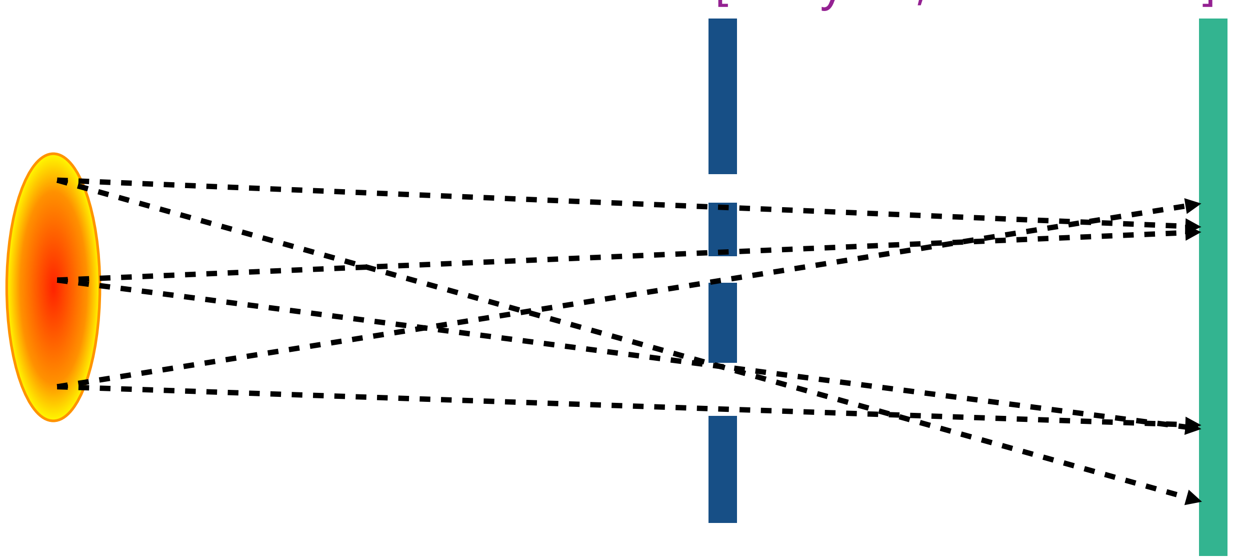


[Mulyani, Ph.D thesis]

単純なマルチスリットの欠点



[Mulyani, Ph.D thesis]



O: Object　　A: Aperture　　R: Recoded

もはやガウス分布ではないので
ガウスフィットは意味がない

Encodeされた像から元の像を再現する方法：

1. Deconvolution → フーリエ変換

2. Correlation (下記) → 線形代数

簡単に表すとRは

$$\boldsymbol{R = OA}$$

RからOを導くには右からGをかけて

$$\boldsymbol{RG = OAG = \hat{O}}$$

を満たすGが存在すれば良い。

Aとの掛け算がデルタ関数になる

$$\boxed{\boldsymbol{AG = \delta}}$$

ようなGを探すのは一般に困難

[Fenimore and Cannon, Applied Optics, 17, 337]

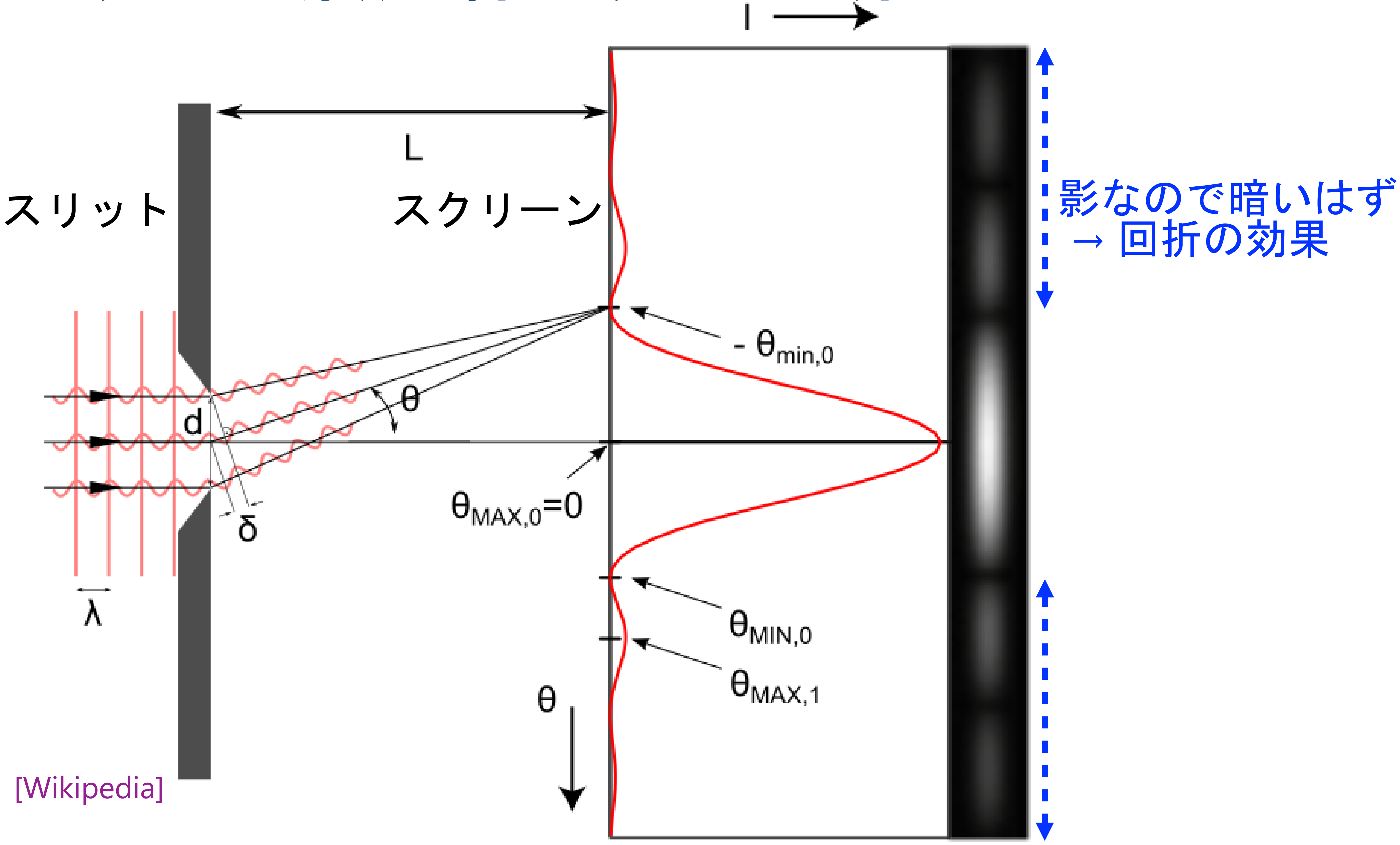
山が重なった測定データの解析手法

- Correlation : **AG**=δを満たす**G**を**R**(測定データ)に掛け**RG**=**O**を得る
  - 長所：計算が早い → リアルタイム測定に有利
  - 短所：精度が悪い → **AG**=δは完全には満たされない (裾野を引く)
- Fit : **O'**を変化させ**R'**=**O'A**を計算し、**R'**が**R**と等しくなる**O'**を探す
  - 長所：精度が高い → ノイズの影響も比較的正確に考慮できる
  - 短所：計算が遅い → minimum searchなので計算がたくさん必要

SuperKEKBでは現時点では精度を優先して手法2を採用。
フィットに伴う計算時間はマルチCPU計算で短縮化させる。

Correlation法で解析精度を上げるようなマルチスリットパターン
= Uniformly Redundant Array (URA)
詳しくは[Fenimore and Cannon, Appl. Opt. 17, 337-347 (1978)]を参照。

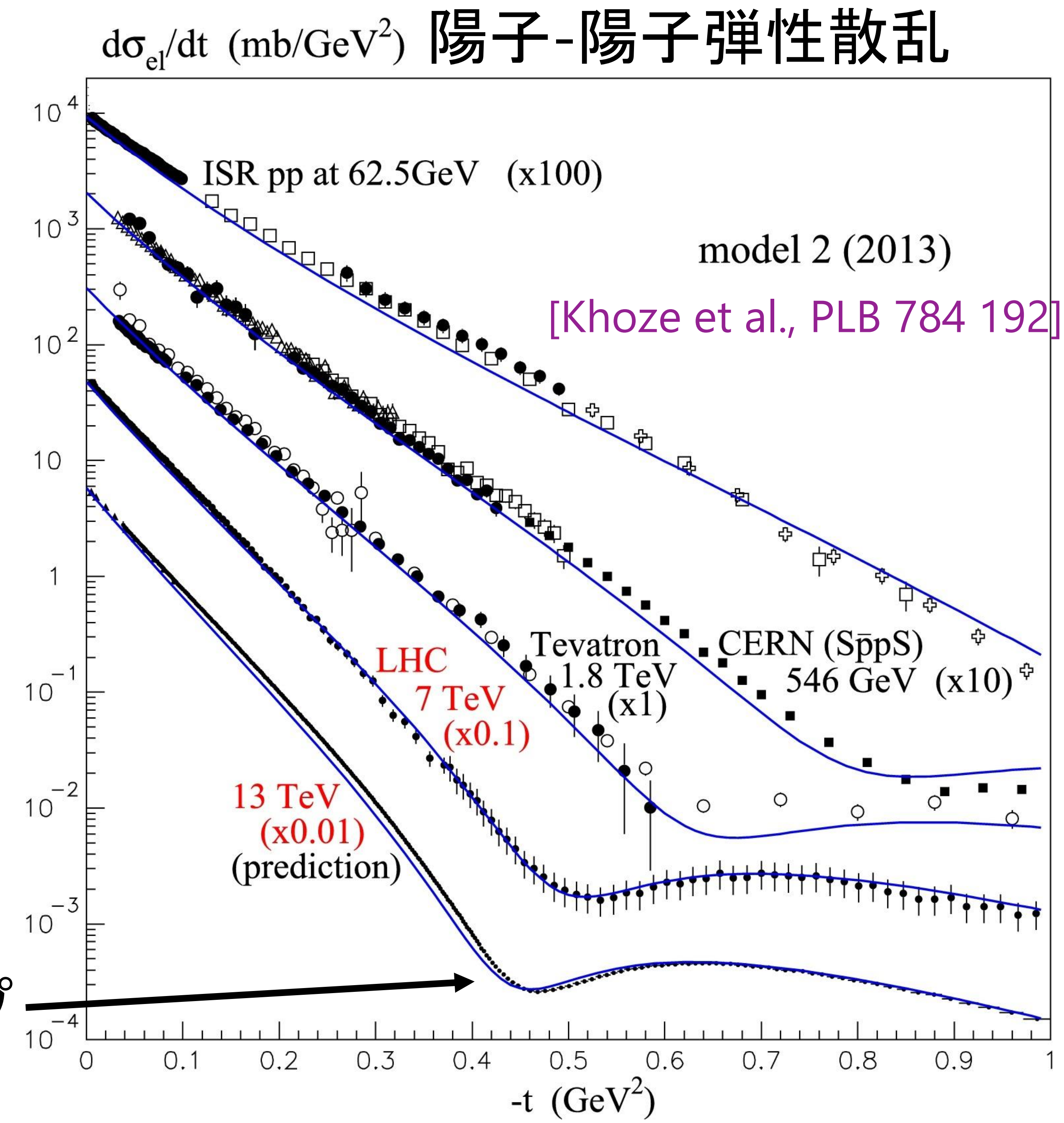
光の伝搬の話：光の回折



回折：媒質中を伝わる波が障害物の背後(光の場合は影になる領域)に回り込んで伝わっていく現象

一般的に波は回折する

[Wikipedia]



回折のディップ

もちろん今回は光(電磁波)の回折に焦点を絞って議論する。

スカラー回折理論とベクトル回折理論

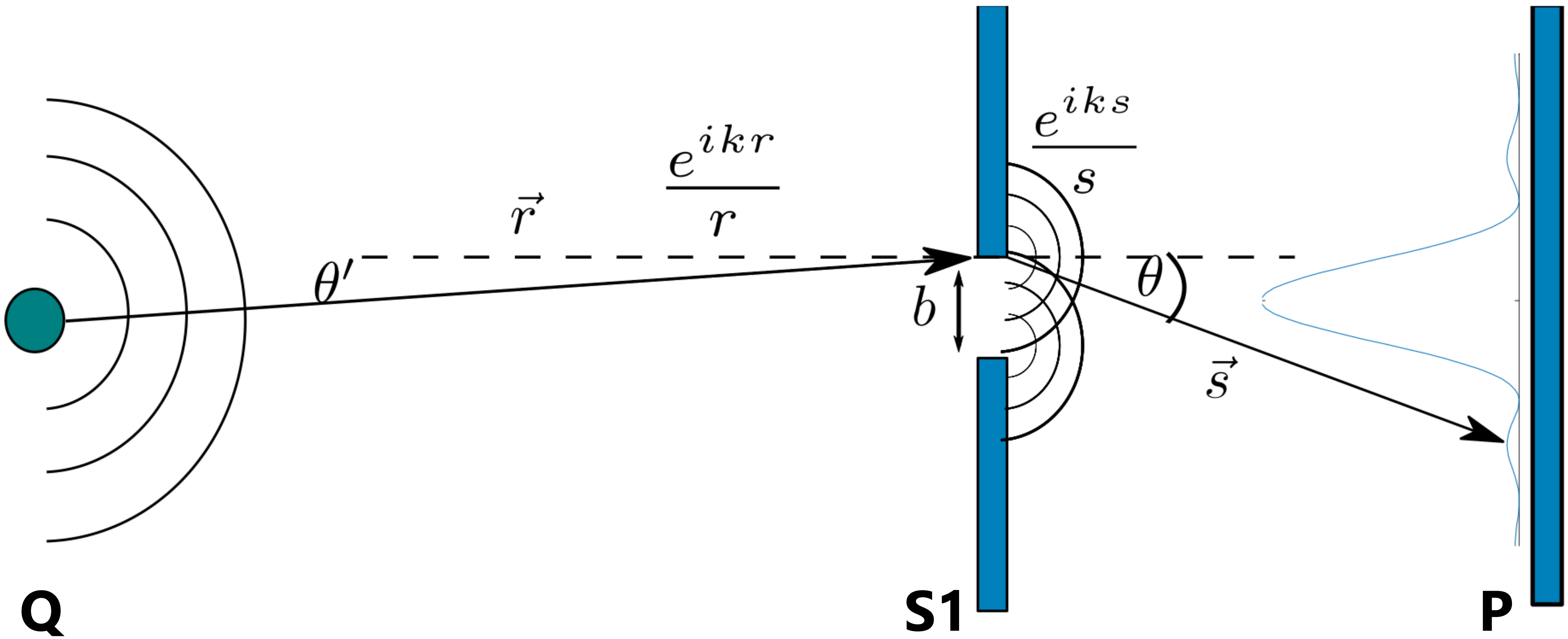
Lipson, Optical Physics
グッドマン, フーリエ光学

- **スカラー回折理論**
  - 遮蔽またはスリットが光の波長に比べて大きい
  - 回折した光をスリットから離れた地点で観測
  - 光が伝搬する媒質が線型、等方、均一、非分散
  - 結果的に光を記述する波動方程式は方向依存性を持たない
- **ベクトル回折理論**
  - 上記した条件を満たさない場合
  - 物質構造(電気的な境界条件など)を考慮する

今回のビームサイズ光モニターではスカラー回折理論で十分。

Kirchhoff回折公式導出の流れ

1. Maxwell方程式 → 2. 場のスカラー化 → 3. Helmhortz方程式 (波動の伝搬)



Helmhortz方程式を解くと
- ある地点Qで発生し
- 面S1を透過し
- ある地点Pに達した

際のスカラー波を記述できる。

➡

面S1上で間隔bのスリット外側ではスカラー波の振幅が0(つまり波が消える)と置いて**Kirchhoff回折公式**を求める。

Maxwell方程式 → 場のスカラー化

Lipson, Optical Physics
グッドマン, フーリエ光学

誘電率εが一定で等方的ならばMaxwell方程式から

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \nabla^2 \boldsymbol{H} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H},\ c = 1/\sqrt{\mu\varepsilon})$$

が得られる。

(例えば誘電率εが位置に依存する場合は、**E**の式に∇(**E**・∇ln√ε)が入る)

Eと**H**を伝搬方向に依存しないスカラー場と置くと、任意のスカラー場

$$\Psi(\boldsymbol{r}, t) = \psi(\boldsymbol{r}) \exp(-i\omega t)$$

を導入し、**E**と**H**をまとめて

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

と書ける。

Helmhortz方程式

EとHをまとめた式

$$\Psi(\boldsymbol{r}, t) = \psi(\boldsymbol{r}) \exp(-i\omega t)$$

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

からスカラー波の振幅の空間分布を表す偏微分方程式

$$\nabla^2 \psi = -\frac{\omega^2}{c^2} \psi = -k_0^2 \psi \qquad \left(\frac{\omega}{c} = k_0 \right)$$

が得られる。

$$\boxed{(\nabla^2 + k_0^2)\psi = 0}$$

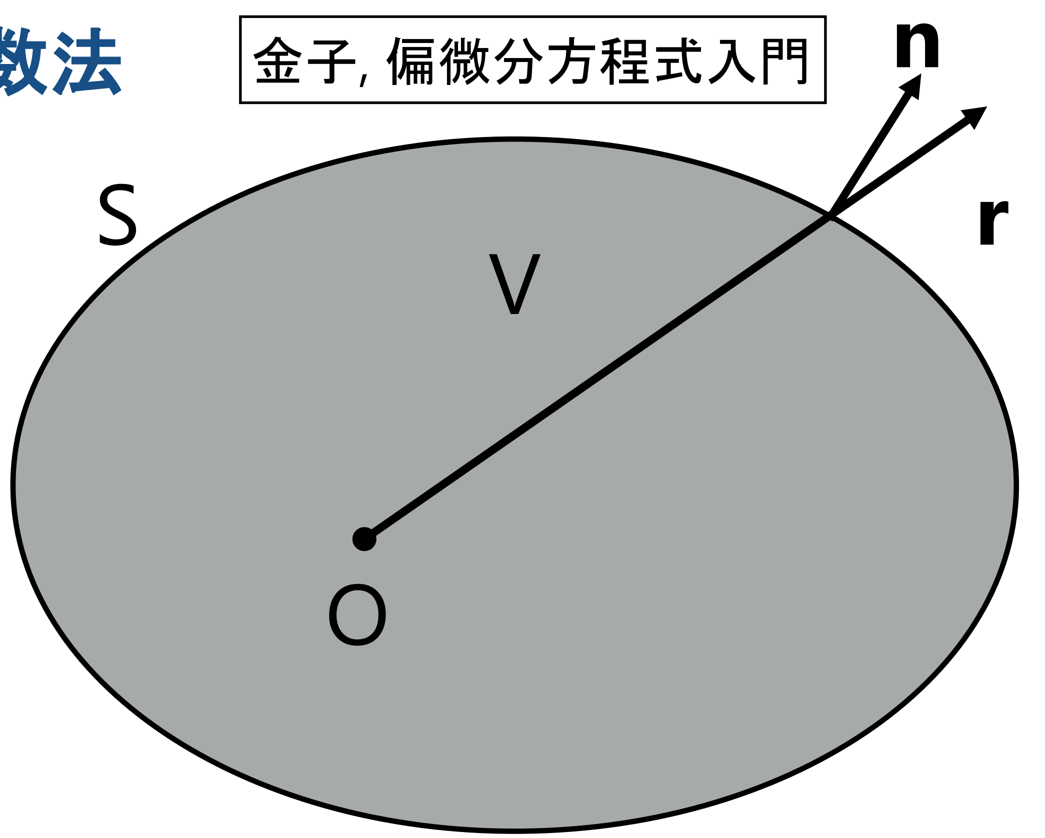
をHelmhortz方程式と呼ぶ。

Helmhortz方程式を使えば「ある点でスカラー波(光)が発生した」という初期条件の下で「発生点以外の地点へ伝搬した波の振幅」が求まる。

Helmhortz方程式を解く

境界値付きの偏微分方程式を解く → Green関数法

金子, 偏微分方程式入門



Helmhortz方程式

$$(\nabla^2 + k_0^2)\psi = 0$$

の特殊解としてGreen関数(補助関数)

$$\psi_t(\boldsymbol{r}) = \frac{a_t}{r}\exp(ik_0 r)$$

を導入し、一般解をψと置くと

$$\psi\nabla^2\psi_t - \psi_t\nabla^2\psi = -\psi k_0^2\psi_t + \psi_t k_0^2\psi = 0$$

が得られる。

原点を囲む任意の領域Vで積分して、Greenの定理を使うと

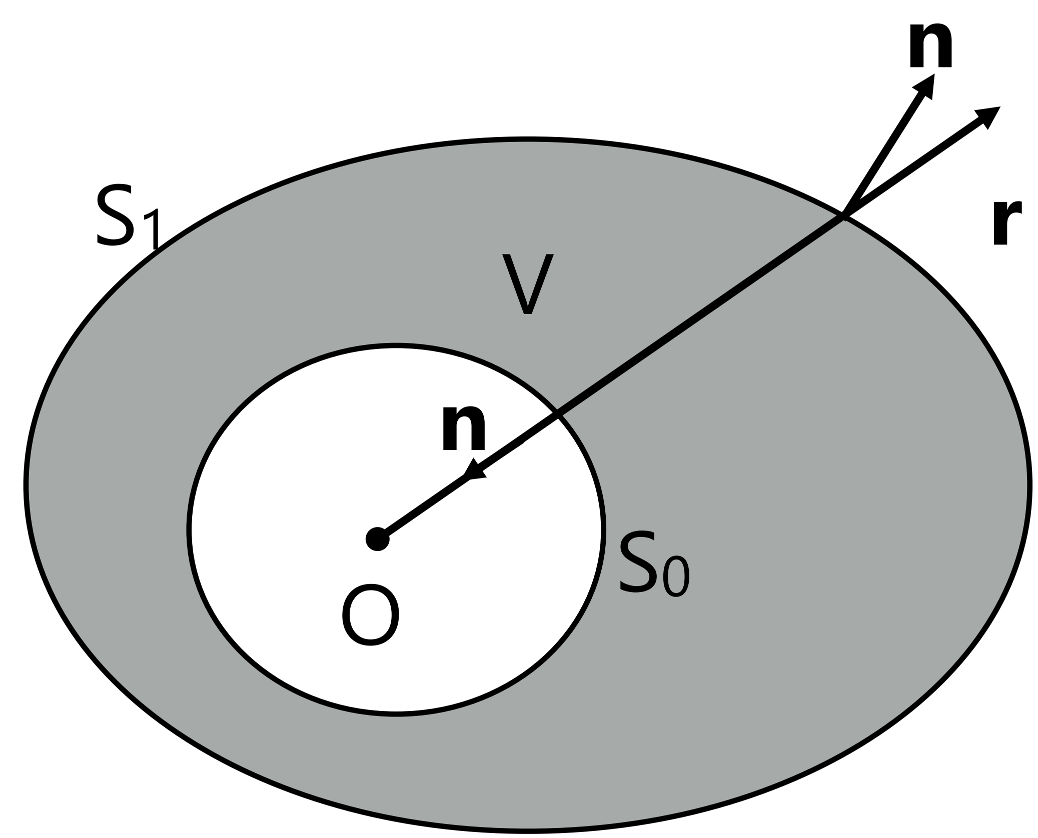
$$\iiint_{\mathcal{V}} (\underbrace{\psi\nabla^2\psi_t - \psi_t\nabla^2\psi}_{=0})dV = \iint_{\mathcal{S}} (\psi\nabla\psi_t - \psi_t\nabla\psi)\cdot\boldsymbol{n}dS$$

※原点を電磁波を観測する地点と定義する(発光点ではないことに注意)。

Helmhortz方程式 → Kirchhoffの積分定理

ただし特殊解はr=0では発散するので原点(r=0)を含む領域S_0を除く必要がある。

$$\left[\iint_{S_0} + \iint_{S_1}\right] (\psi \nabla \psi_t - \psi_t \nabla \psi) \cdot \boldsymbol{n} dS = 0$$



r→0という極限を取るとS_0の寄与は

$$\iint_{S_0} a_t \exp(ik_0 r) d\Omega = 4 a_t \pi \psi_0$$

となる。ここで $\psi \to \psi_0 \ (r \to 0)$ と置いた。

煩雑な計算は教科書参照
Lipson, Optical Physics
グッドマン, フーリエ光学

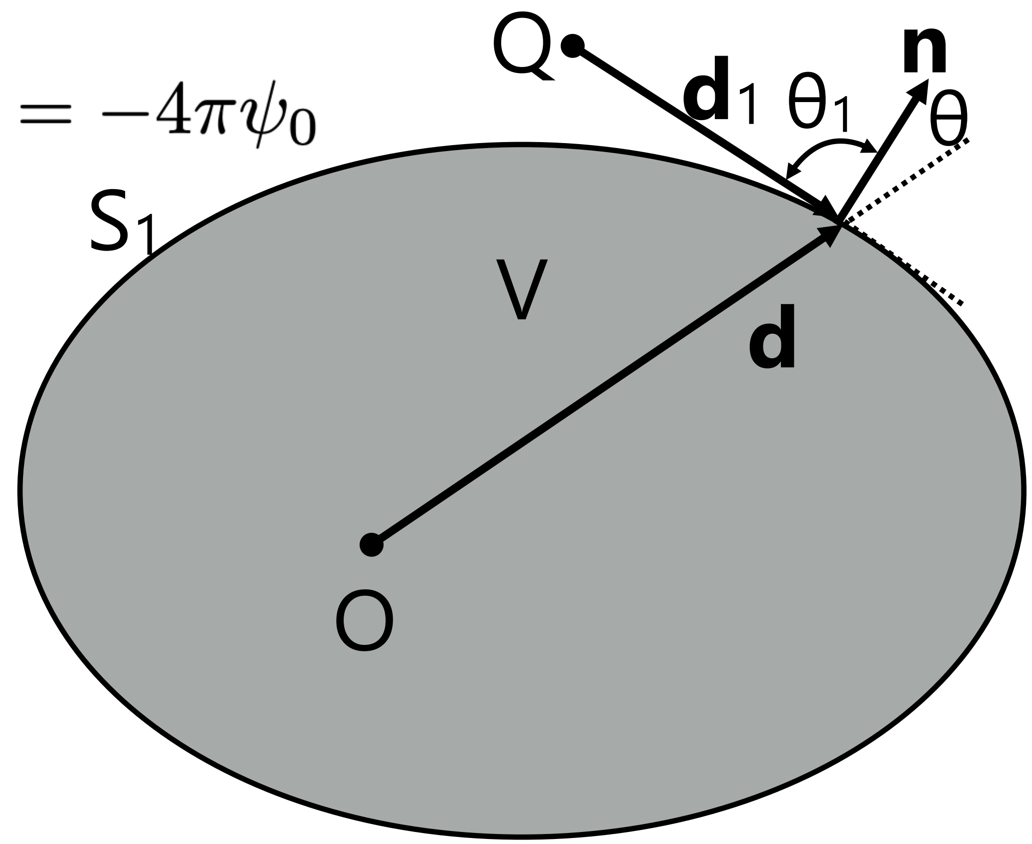
結果的に原点(観測点)での電磁波は

$$\boxed{\iint_{S_1} \frac{1}{r^3} \exp(ik_0 r)[\psi(ik_0 r - 1)\boldsymbol{r} + r^2 \nabla \psi] \cdot \boldsymbol{n} dS = -4\pi\psi_0}$$

で得られる。これをKirchhoffの積分定理という。

Kirchhoffの回折公式

$$\iint_{S_1} \frac{1}{r^3}\exp(ik_0 r)[\psi(ik_0 r-1)\boldsymbol{r}+r^2\nabla\psi]\cdot\boldsymbol{n}dS=-4\pi\psi_0$$



r=**d**とおいて、Kirchhoffの積分定理の左辺の
Ψを、S_1外側のQで発生した電磁波

$$\psi(\boldsymbol{d}_1)=\frac{f_s a_Q}{d_1}\exp(ik_0 d_1)$$

a_Q : 振幅
f_s : 透過関数

$$\nabla\psi(\boldsymbol{d}_1)=\frac{f_s a_Q \boldsymbol{d}_1}{d_1^3}(ik_0 d_1-1)\exp(ik_0 d_1)$$

と置くと、Kirchhoffの積分定理は

$$a_Q\iint_{S_1} f_s\exp(ik_0(d+d_1))\left[\frac{\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{n}}{d_1 d^3}(ik_0 r-1)-\frac{\boldsymbol{d}_1\cdot\boldsymbol{n}}{d d_1^3}\right]dS=-4\pi\psi_0$$

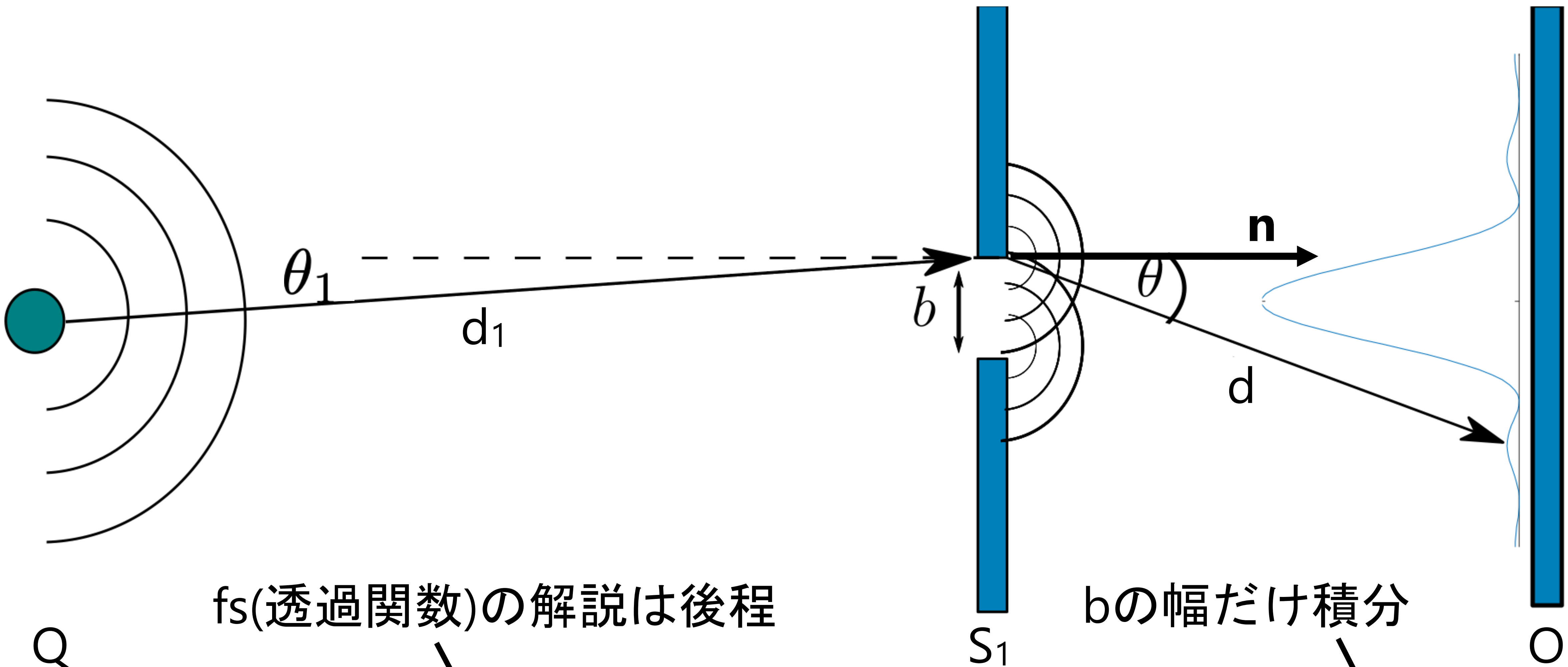
と書ける。

$\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{n}=d\cos\theta$, $\boldsymbol{d}_1\cdot\boldsymbol{n}=-d_1\cos\theta_1$, $d,\ d_1\gg\lambda\,(=2\pi/k_0)$ を代入すると

$$\boxed{\psi_0=-\frac{ik_0 a_Q}{2\pi}\iint_{S_1}\frac{f_s}{d d_1}\exp(ik_0(d+d_1))\left(\frac{\cos\theta+\cos\theta_1}{2}\right)dS}$$

が得られて、これをKirchhoffの回折公式と呼ぶ。

Kirchhoffの回折公式を使った数値計算

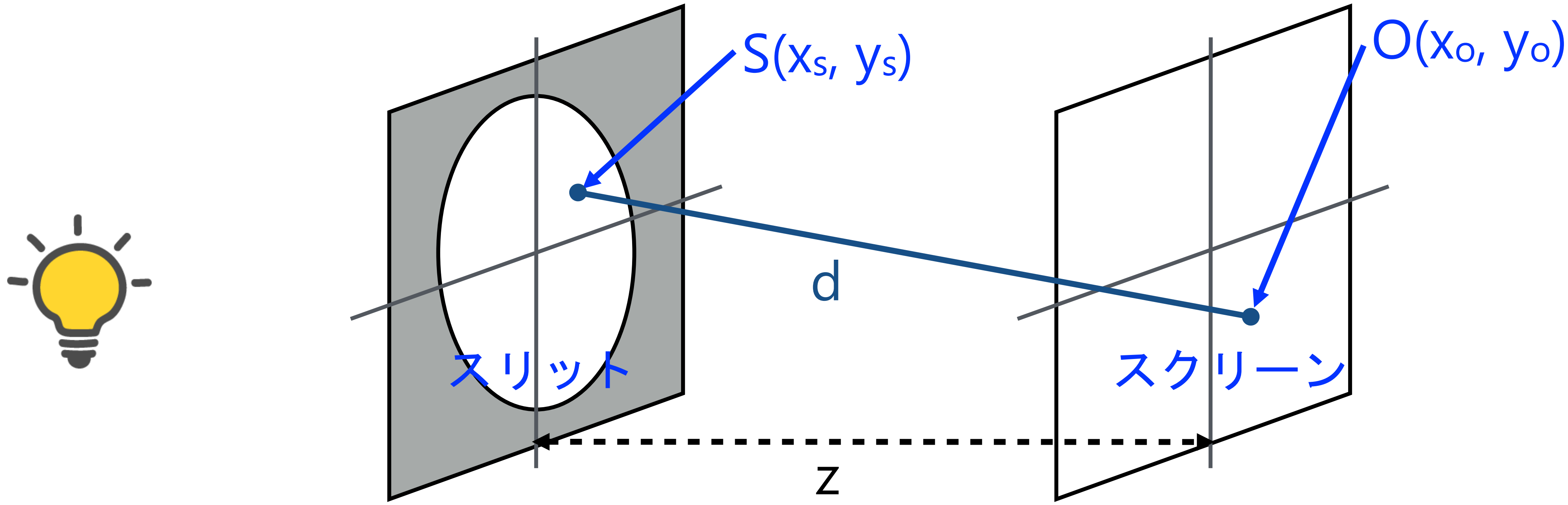


$$\psi_0 = -\frac{ik_0 a_Q}{2\pi} \iint_{S_1} \frac{f_s}{dd_1} \exp(ik_0(d+d_1)) \left(\frac{\cos\theta + \cos\theta_1}{2} \right) dS$$

1. 任意の観測点Oを定める。
2. スリットS_1の微小空間に対してforループを取る。ループ内でd_1とdが決まる。
3. ループの数だけψ_0を足しあげる。

⚠ S_1の分割を細かく取らないと計算が収束しない。

Fresnel回折とFraunhofer回折



$$d = \sqrt{z^2 + (x_s - x_o)^2 + (y_s - y_o)^2}$$

$$\approx z\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x_s - x_o}{z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{y_s - y_o}{z}\right)^2\right]$$ ← Fresnel近似 (2次の項まで展開)

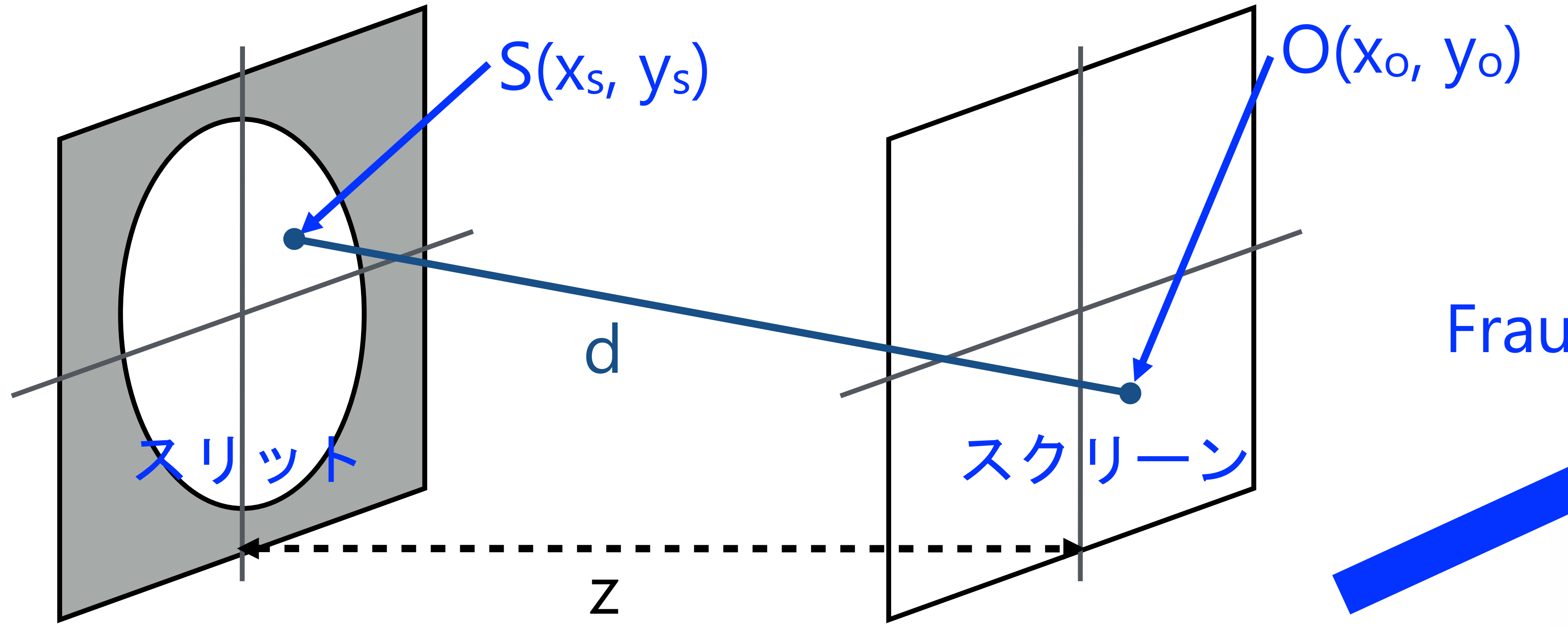
dをexp(ik₀d)に代入すると

$$\exp(ik_0 d) \approx \exp(z)\exp\left[\frac{ik_0(x_s^2 + y_s^2)}{2z}\right]\exp\left[\frac{ik_0(x_o^2 + y_o^2)}{2z}\right]\exp\left[\frac{-ik_0(x_s x_o + y_s y_o)}{z}\right]$$

検出器がスリットから遠い場合はFraunhofer近似も成り立つ

$$\exp\left[\frac{ik_0(x_s^2 + y_s^2)}{2z}\right] \approx 1,\ \ \exp\left[\frac{ik_0(x_o^2 + y_o^2)}{2z}\right] \approx 1\ (z \gg x,\ y)$$

Fresnel回折とFraunhofer回折

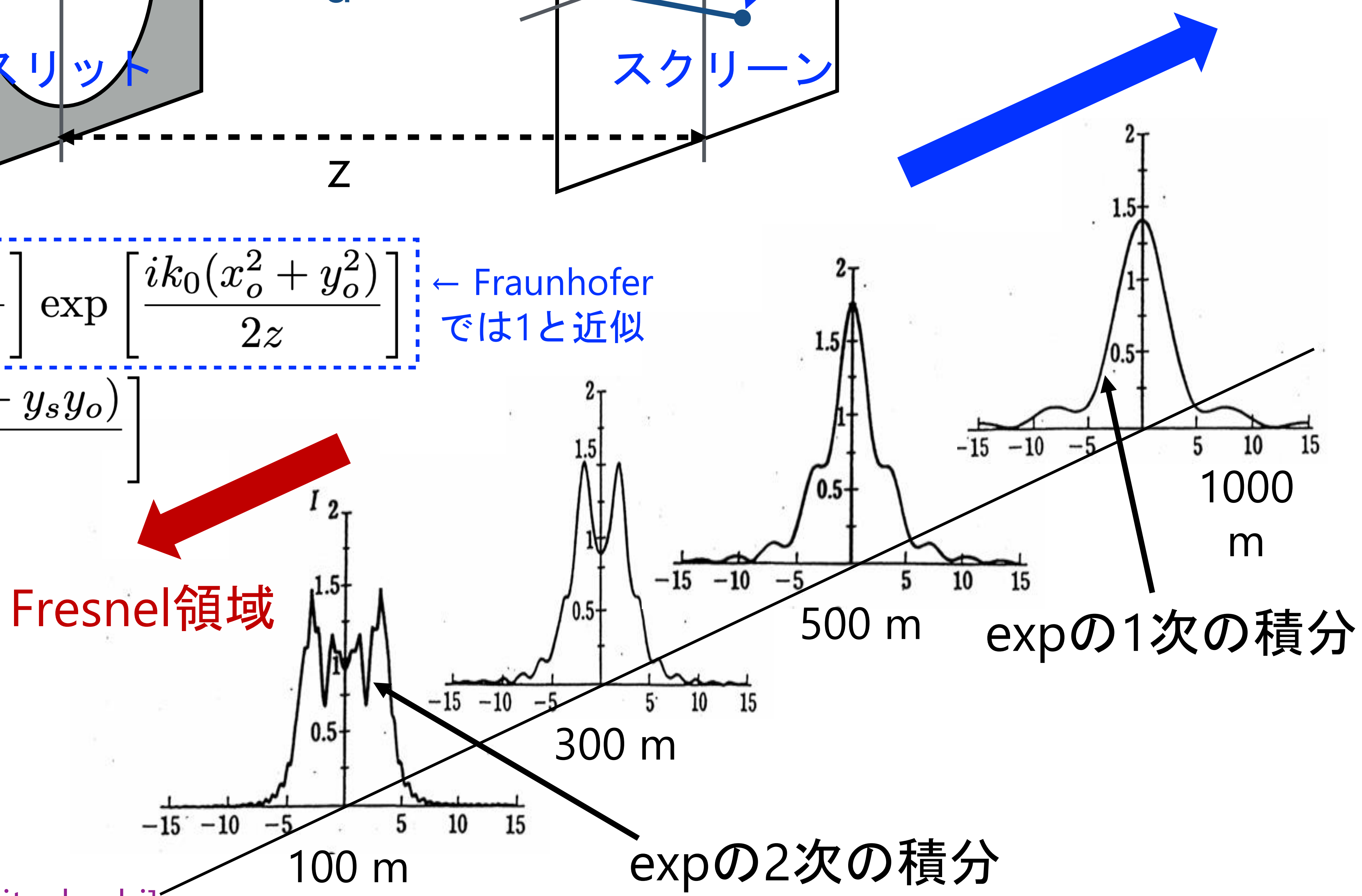


$$\exp(ik_0 d) \approx \exp(z)$$

$$\boxed{\exp\left[\frac{ik_0(x_s^2+y_s^2)}{2z}\right]\exp\left[\frac{ik_0(x_o^2+y_o^2)}{2z}\right]}$$

← Fraunhoferでは1と近似

$$\exp\left[\frac{-ik_0(x_s x_o + y_s y_o)}{z}\right]$$



[courtesy of Mitsuhashi]

Fresnel回折とFraunhofer回折

$$\frac{x_s^2 + y_s^2}{z} \ll \lambda$$ が成り立てばFraunhofer領域

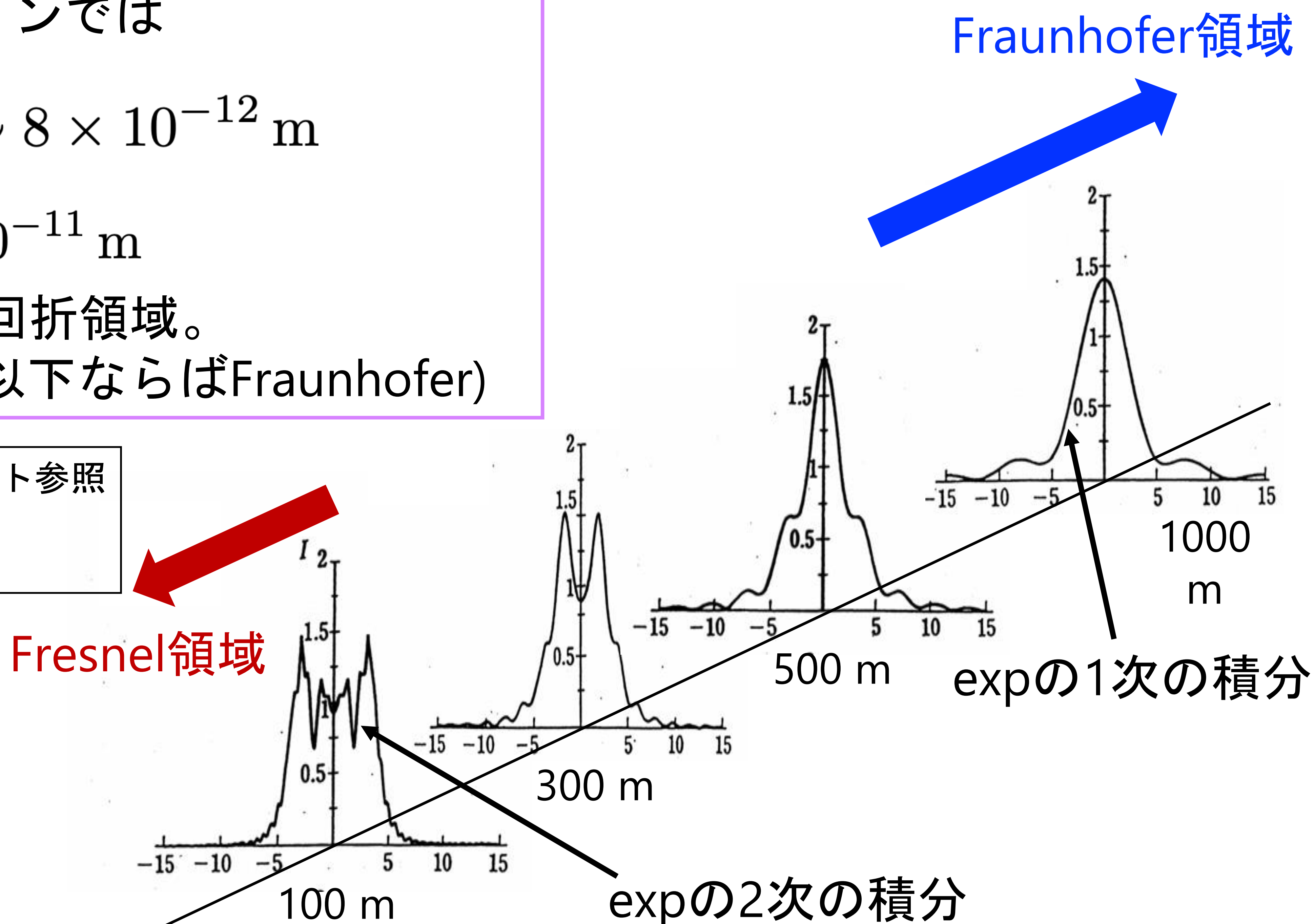
SuperKEKB X線ラインでは

$$\frac{y_s^2}{z} \sim \frac{(15\,\mu\mathrm{m})^2}{30\,\mathrm{m}} \sim 8 \times 10^{-12}\,\mathrm{m}$$

$$\lambda \sim 0.4\,\text{Å} \sim 4 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}$$

だからFraunhofer回折領域。
(波長に比べて1/3以下ならばFraunhofer)

近似式は教科書又はテキスト参照
Lipson, Optical Physics
グッドマン, フーリエ光学



[courtesy of Mitsuhashi]

回折で判断するピンホールの最良サイズ

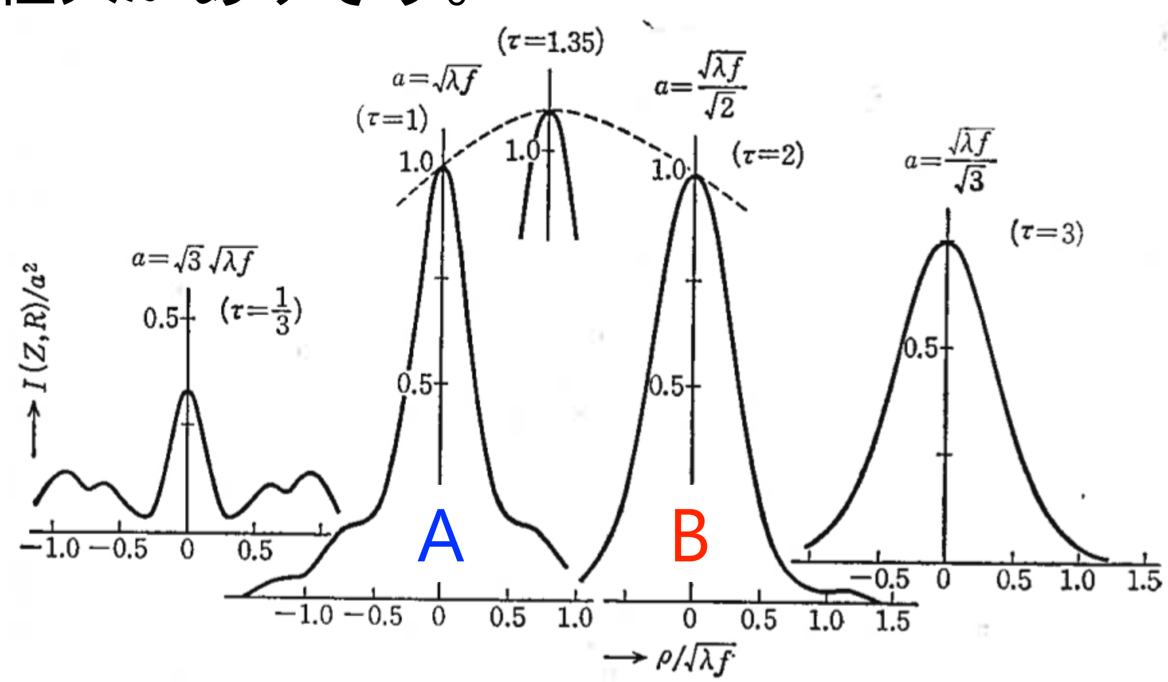
Fresnel近似で求めた強度分布I(Z,R)の中心部分I(Z,R=0)をピンホールの面積a²で規格化

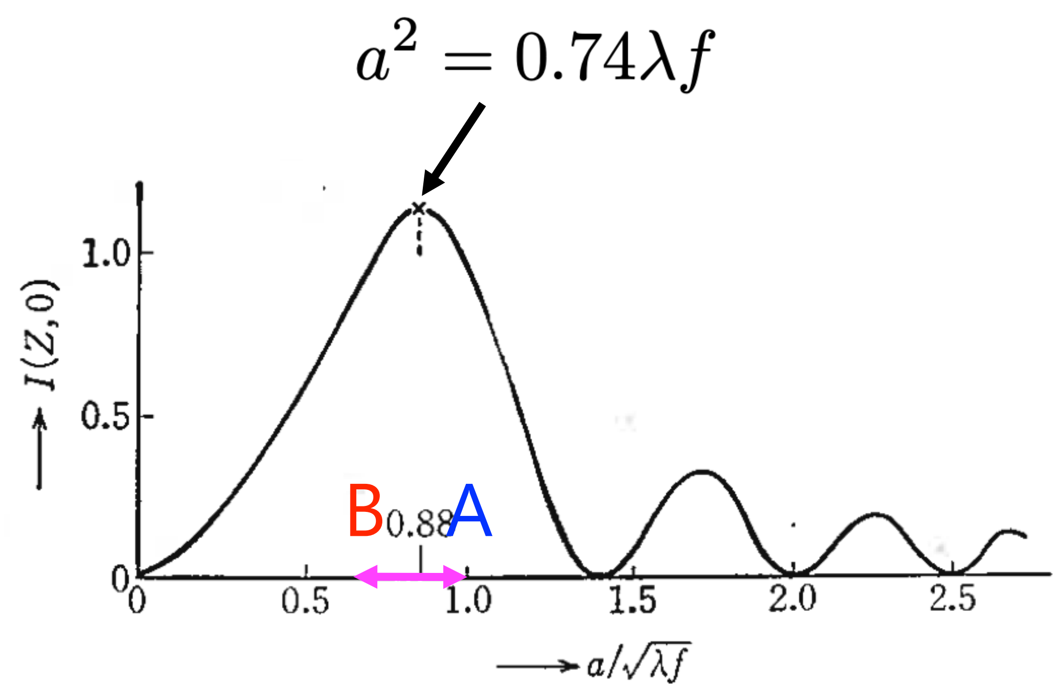
$$I'(Z,0)=\frac{I(Z,0)}{a^2}=4\frac{I_0}{a^2}\sin^2\left(\frac{\pi a^2}{2\lambda f}\right)$$

fはスリットから観測者までの距離

久保田, 波動光学

ピンホールの半径aを変えながら強度分布I'(Z,0)を見ると$a=\sqrt{\lambda f}$と$\sqrt{\lambda f}/\sqrt{2}$の間に極大がありそう。





aに対するI'の微分が0ならばI'の極大に対応するaが求まるので

$$\frac{dI'(Z,0)}{da}\sim\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin^2 x}{x}\right)=0 \qquad \text{ただし}\ x\equiv\frac{\pi a^2}{2\lambda f}\ \text{と置いた}$$

この解は$2x=\tan x$より$x=0.37\pi$となり、これをaで表すと結局

$\boxed{a^2=0.74\lambda f}$ が得られる。

回折で判断するピンホールの最良サイズ

SuperKEKBの場合

$$a^2 = 0.74\lambda f$$

に

この理由は後ほど説明

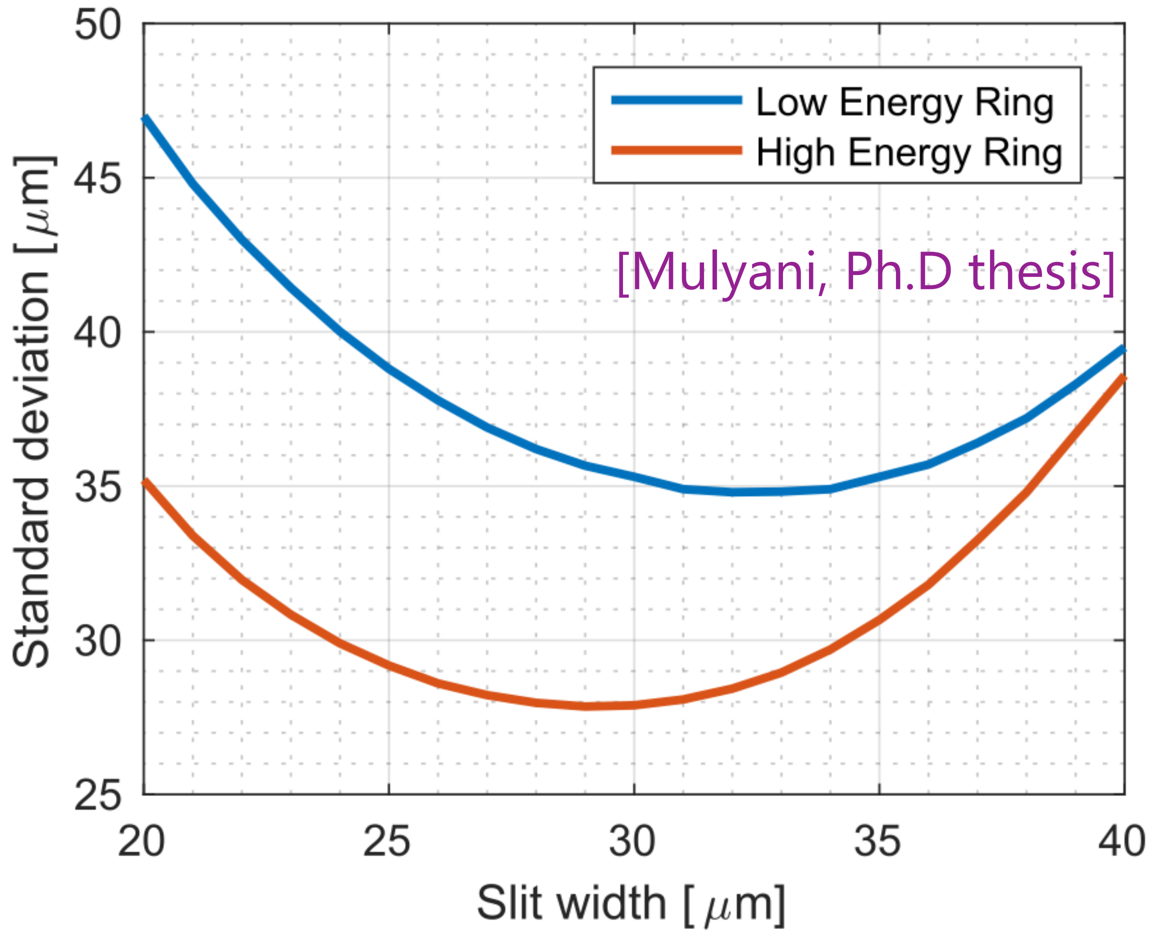
$$\lambda = 0.4\,\text{Å} \approx 0.4 \times 10^{-10}\,\mathrm{m}\ (@\,e_{\mathrm{ph}} = 30\,\mathrm{keV})$$

$$f = 30\,\mathrm{m}$$

を代入すると

$$a \approx 30\,\mu\mathrm{m}$$

なのでシミュレーション結果とおおよそ一致。

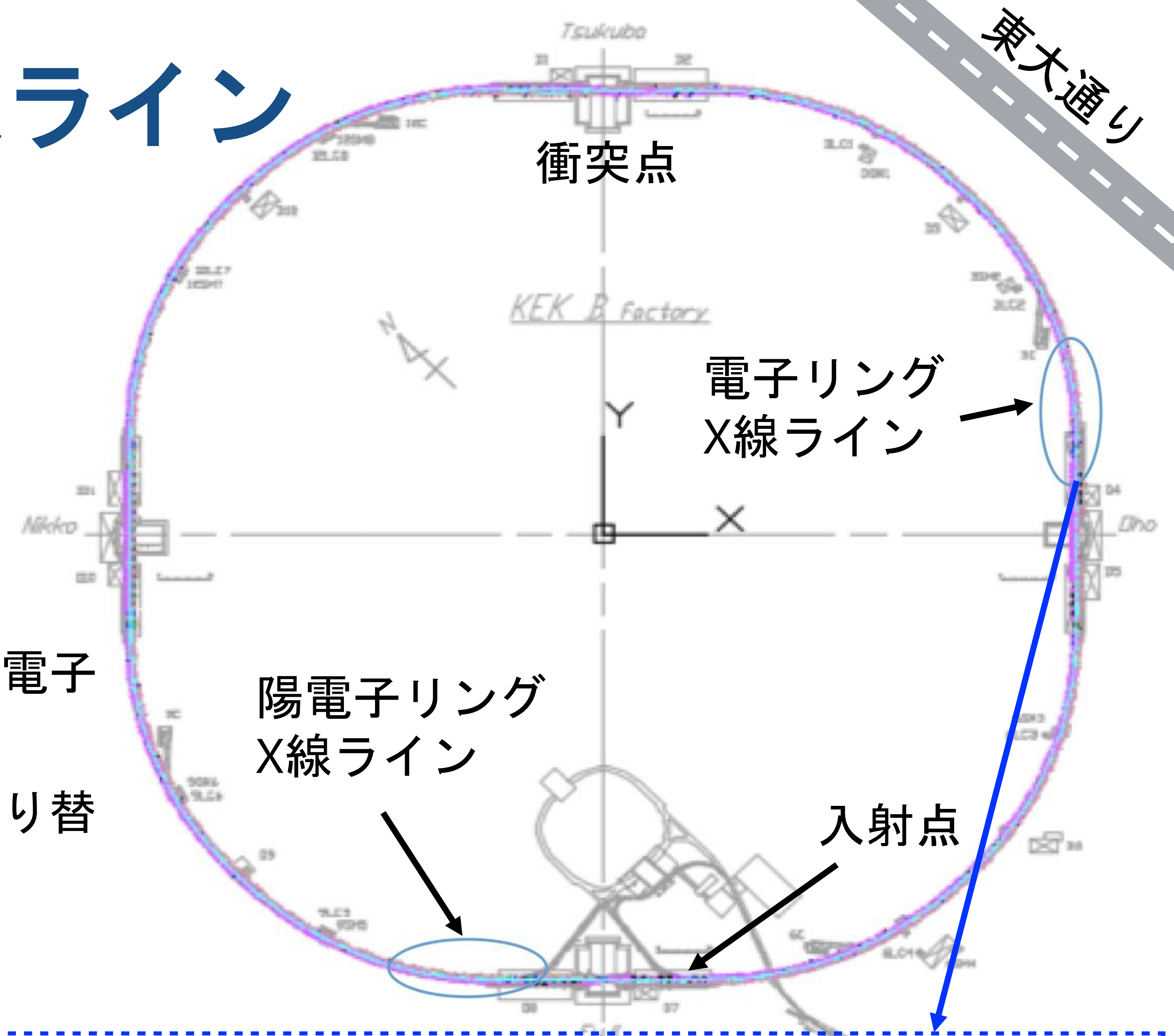


3. 光の測定

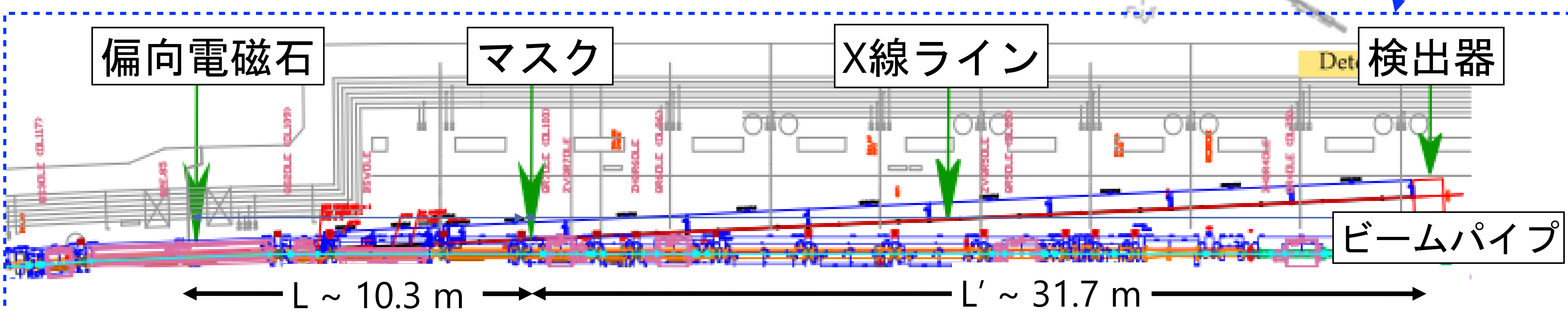
「3.光の測定」の目次

- SuperKEKB X線モニターの各コンポーネントを解説
- 運転上の注意点を確認
- 水平方向ビームサイズをいかに測定するか

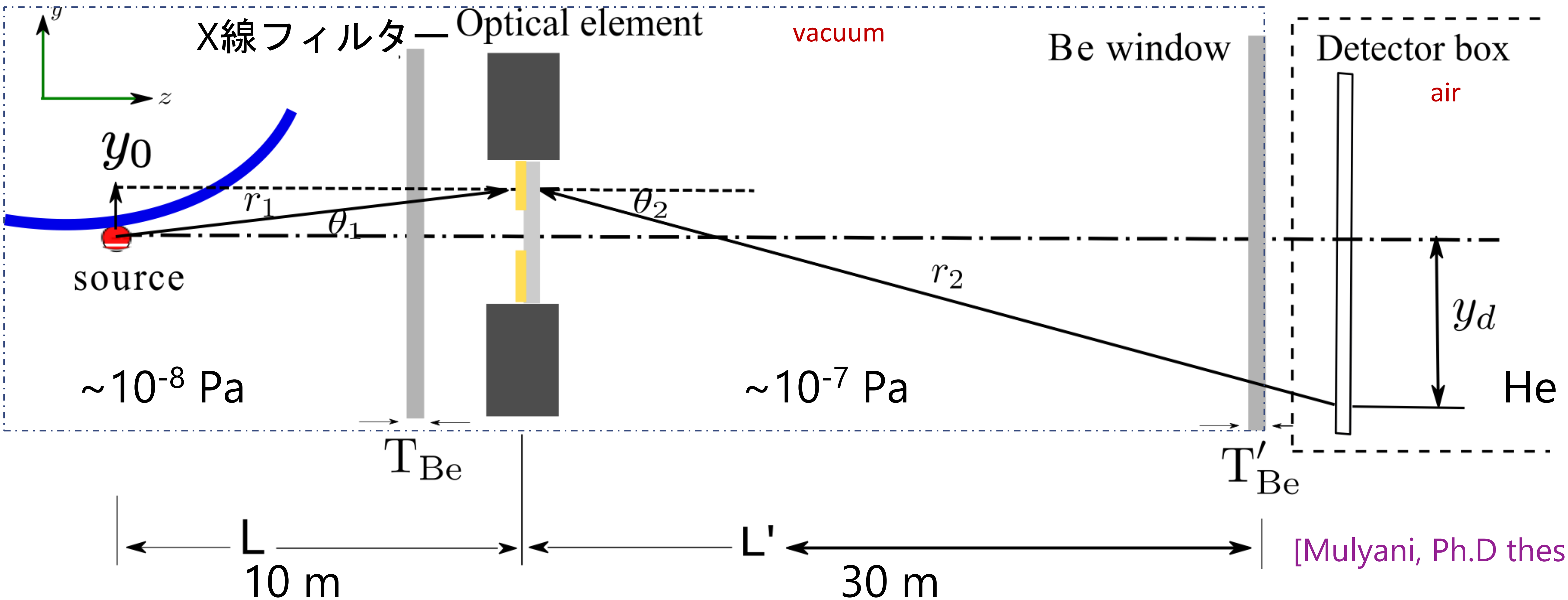
SuperKEKB X線ライン



- X線ラインは電子リング(HER)と陽電子リング(LER)に各一つずつ。
- それぞれアーク部から直線部に切り替わる箇所。



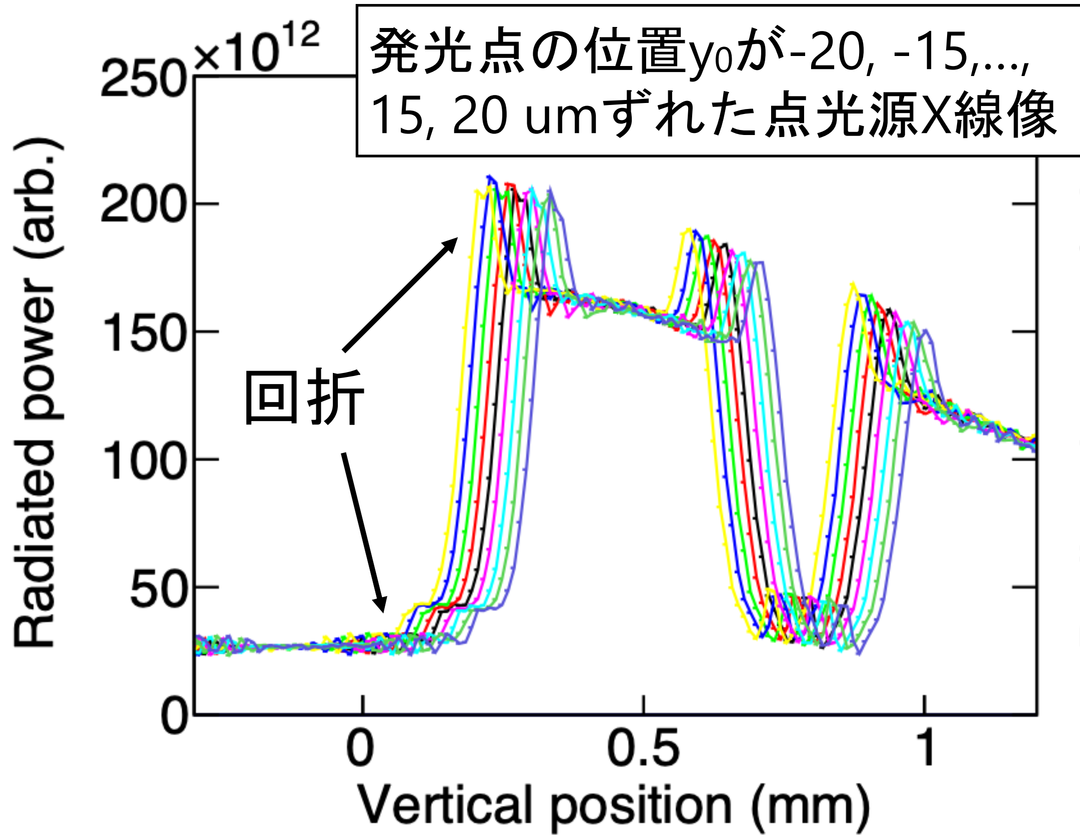
SuperKEKB X線ラインのコンポーネント

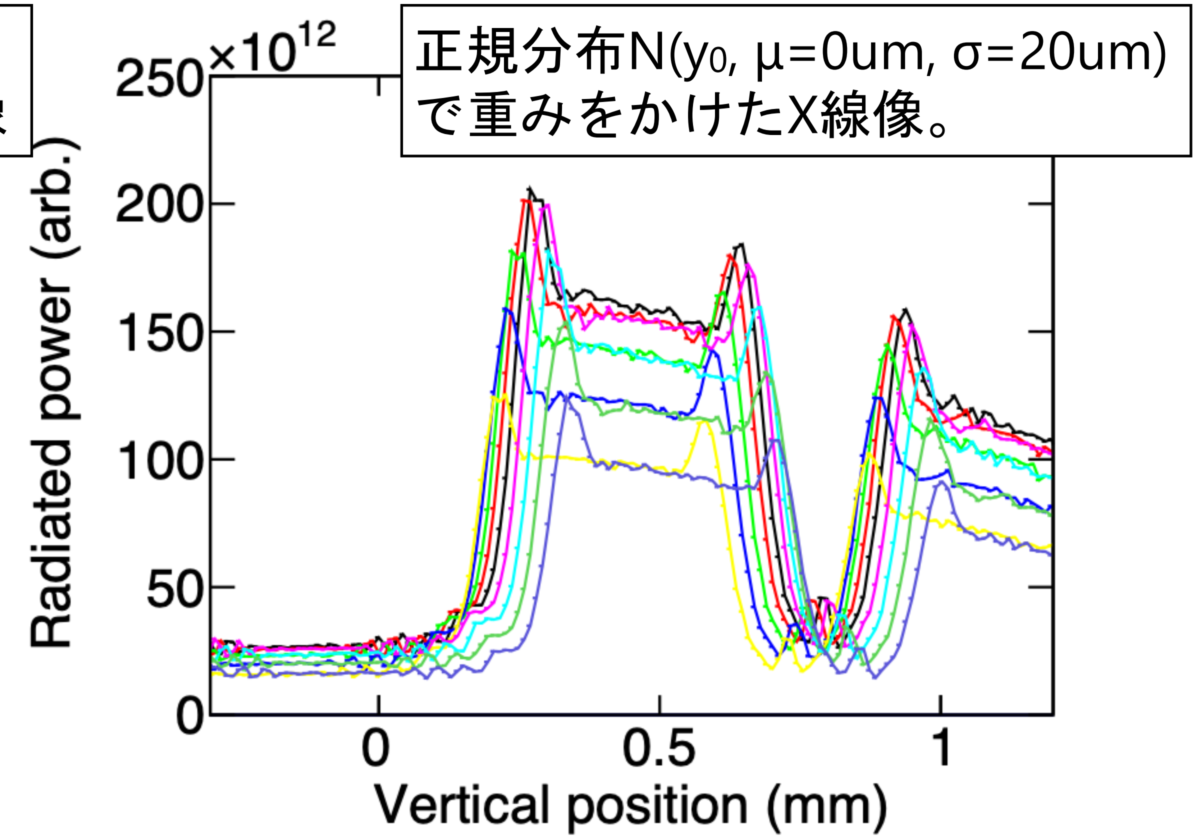


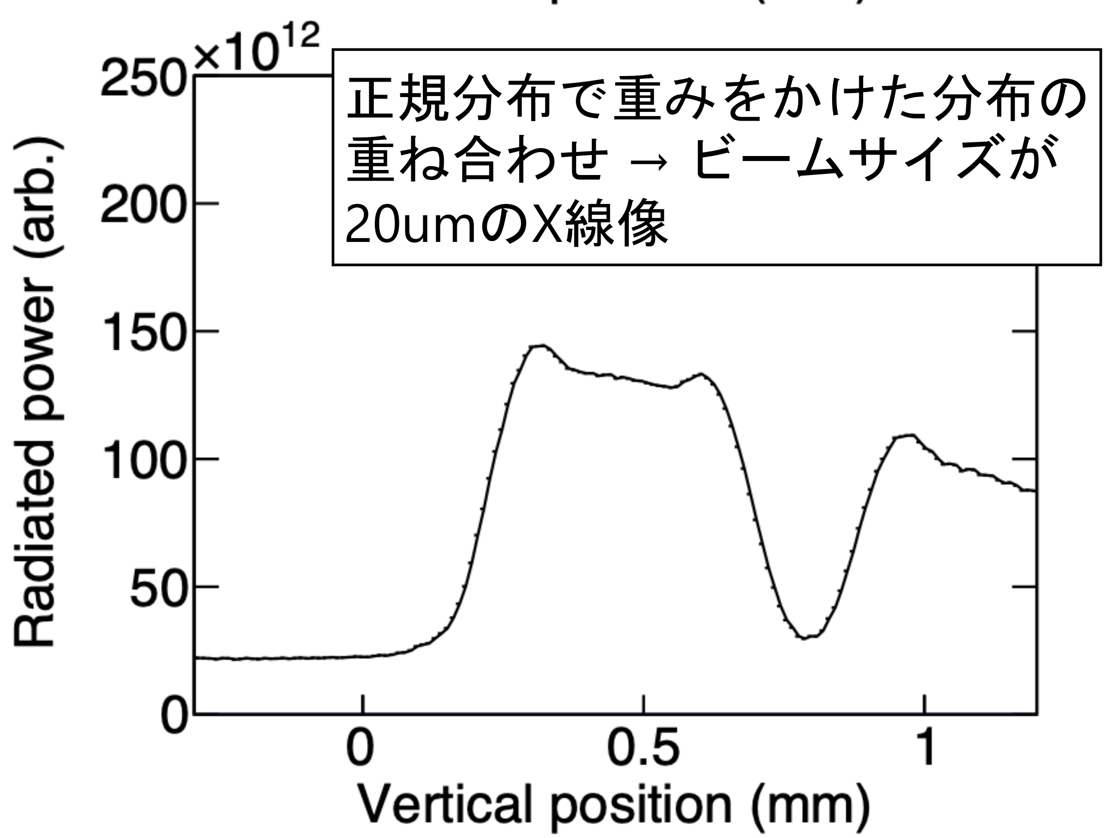
[Mulyani, Ph.D thesis]

偏向電磁石 : ビーム軌道を曲げてシンクロトロン放射を起こす
X線フィルター : X線強度を抑制、ビームラインとX線ラインの真空を分離
マスク : シングルスリットやマルチスリットが含まれるCVDダイヤ基板
Be窓 : X線ライン真空と検出器箱(He)を分離する
検出器 : シンチレーター板+CMOSカメラ、またはシリコン検出器

検出器に写るX線像の数値計算

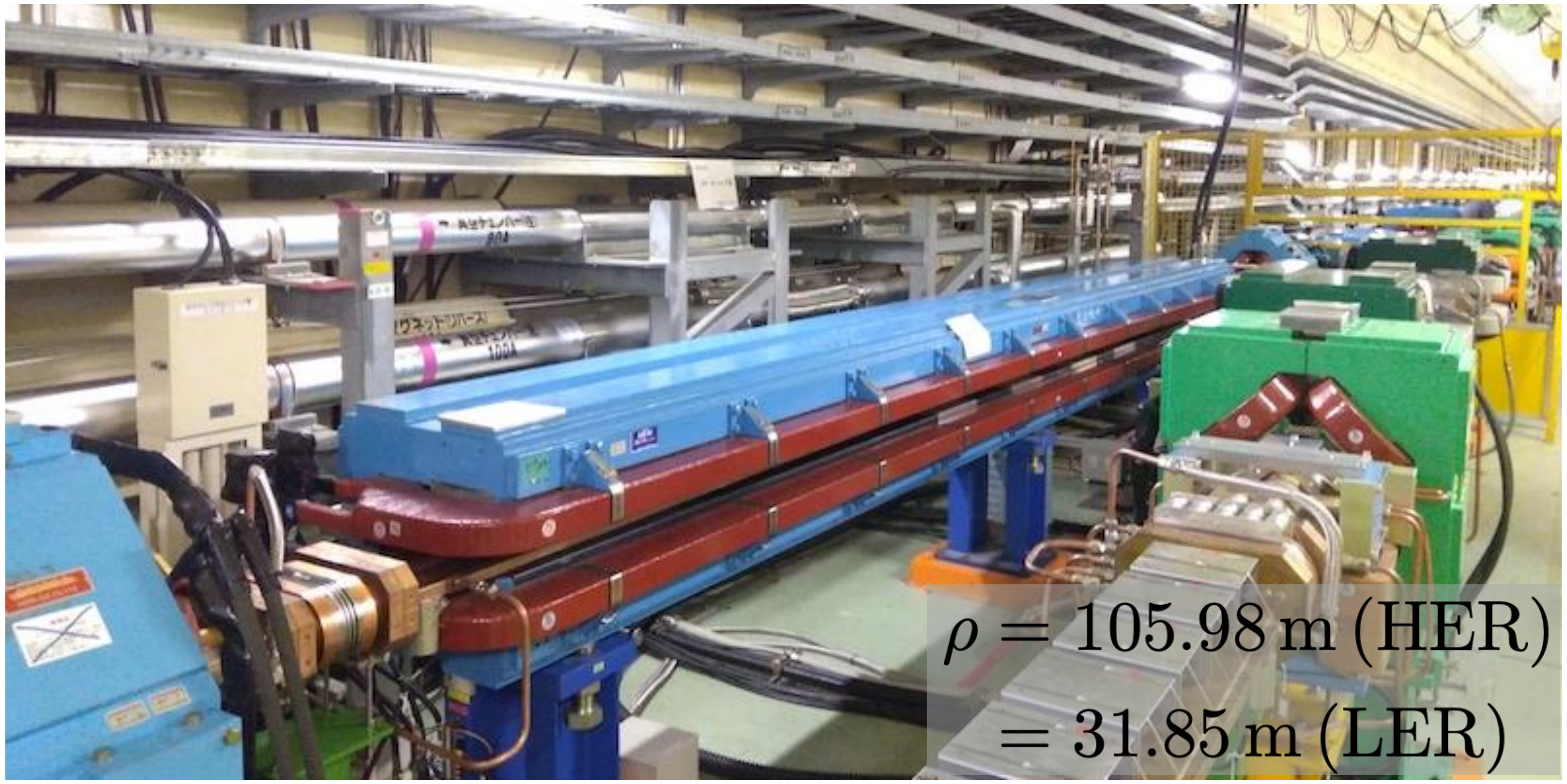


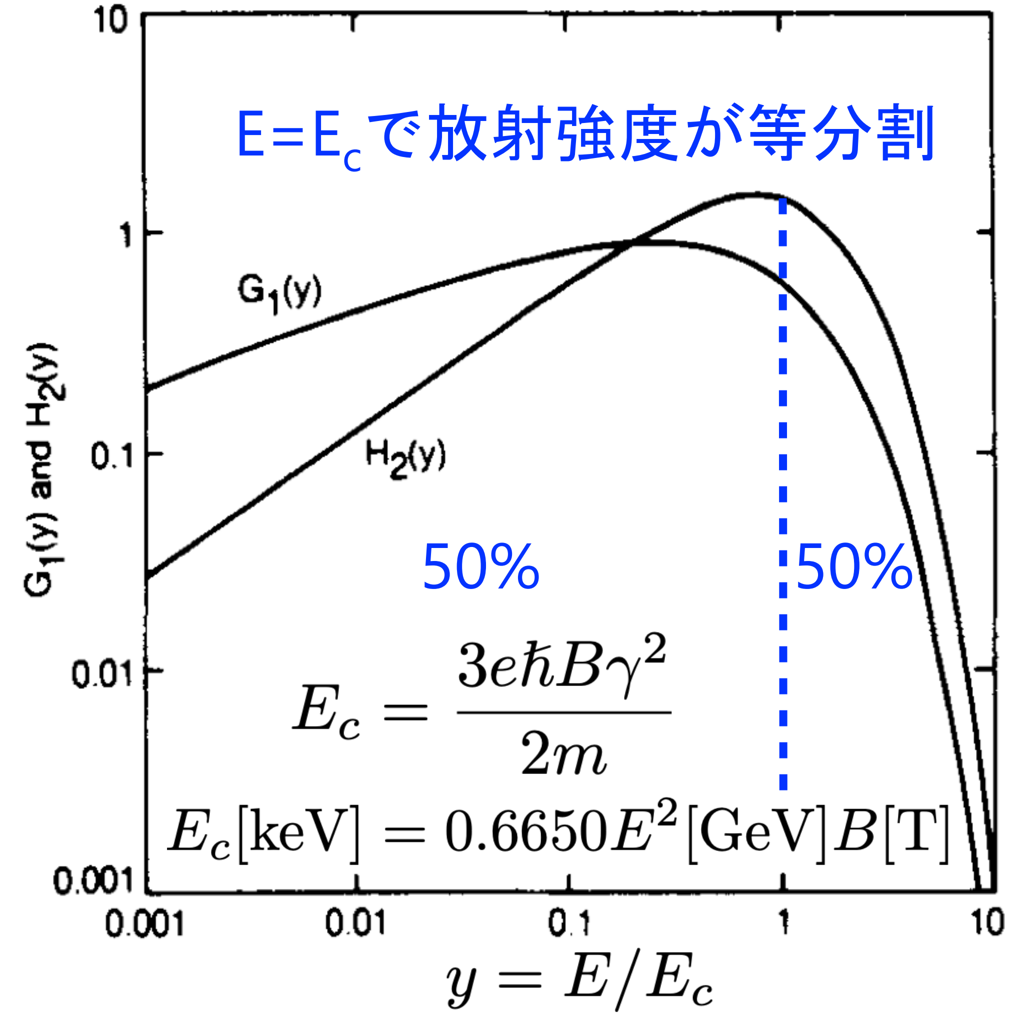




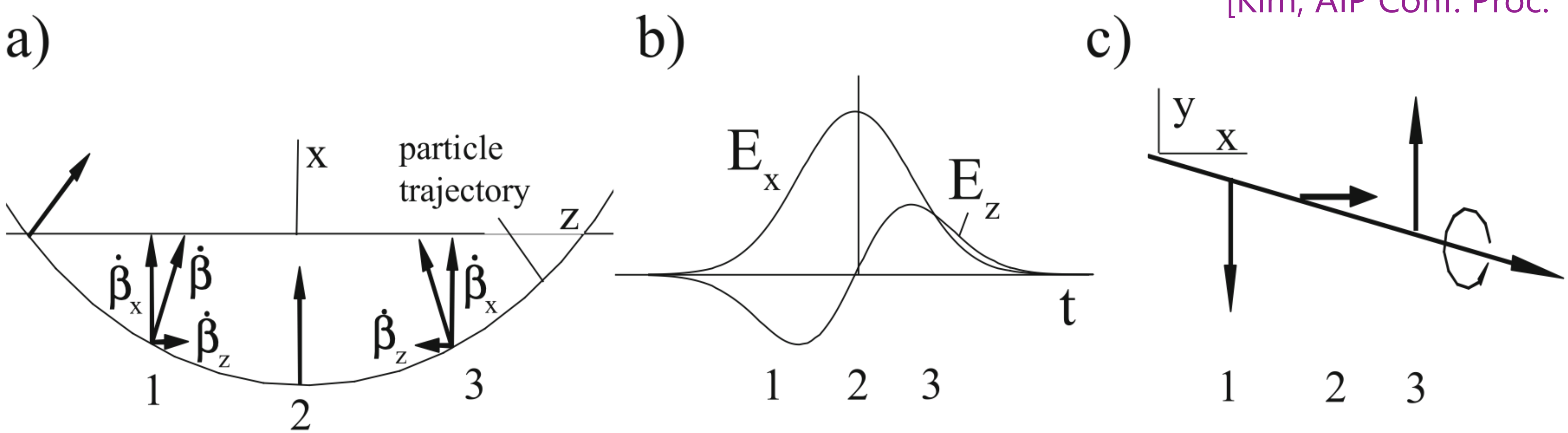
- 点光源のX線像を見ると分布の谷と山がシャープ。
- 分布の縁にギザギザが見える(回折)。
- ビーム内の電子分布が正規分布(ガウス分布)に従うと仮定する。各々重みをかけた点光源分布を重ね合わせると有限の電子分布に対応するX線像が出来上がる。

偏向電磁石





[Kim, AIP Conf. Proc. 184, 565]



[Wiedemann, Particle Accelerator Physics]

Critical photon energy E_c

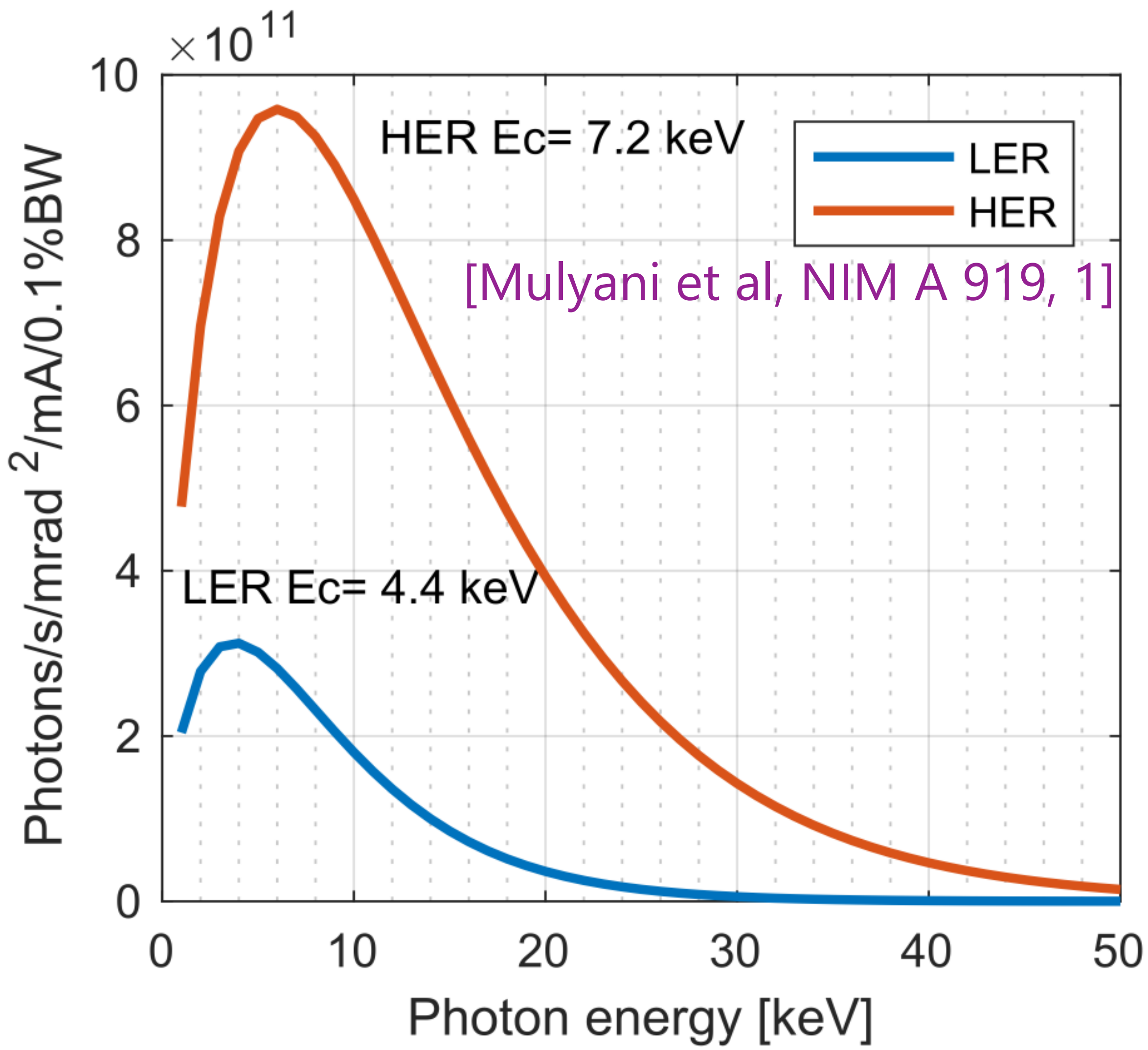
SuperKEKB電子ビーム(E = 7 GeV)の場合

$$\rho = 105.98\,\mathrm{m}$$

$$B \approx \frac{E\,[\mathrm{GeV}]}{0.3\rho[\mathrm{m}]} = \frac{7}{0.3 \cdot 105.98} = 0.22\,[\mathrm{T}]$$

だから

$$\begin{aligned} E_c[\mathrm{keV}] &= 0.6650 E^2[\mathrm{GeV}] B[\mathrm{T}] \\ &= 0.6650 \cdot 7^2 \cdot 0.22 \\ &= 7.17 \end{aligned}$$



X線フィルター

フィルターの役割：X線を吸収してライン下流への放射強度を抑制

電磁波の物質中の伝搬

$$E(r,t) = E_0 \exp(-i(\omega t - kr))$$

$\exp(-i\omega t)$ ：時間発展

$\exp(ikr)$ ：空間伝搬

ここで物質中の屈折率n(ω)を

$$n(\omega) = 1 - \delta + i\beta$$

と置くと、波数kは係数δとβの関数となる。

$$\boxed{\frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} = \frac{c}{1-\delta+i\beta} \rightarrow k = \frac{\omega}{c}(1-\delta+i\beta)}$$

原子散乱因子

$$\delta = \frac{n_a r_e \lambda^2}{2\pi} f_1^0(\omega)$$

$$\beta = \frac{n_a r_e \lambda^2}{2\pi} f_2^0(\omega)$$

ただし

$$n_a = \rho / m_a$$

$$r_e = 2.8 \times 10^{-15}\,\mathrm{m}$$

kをE(r, t)に代入すると

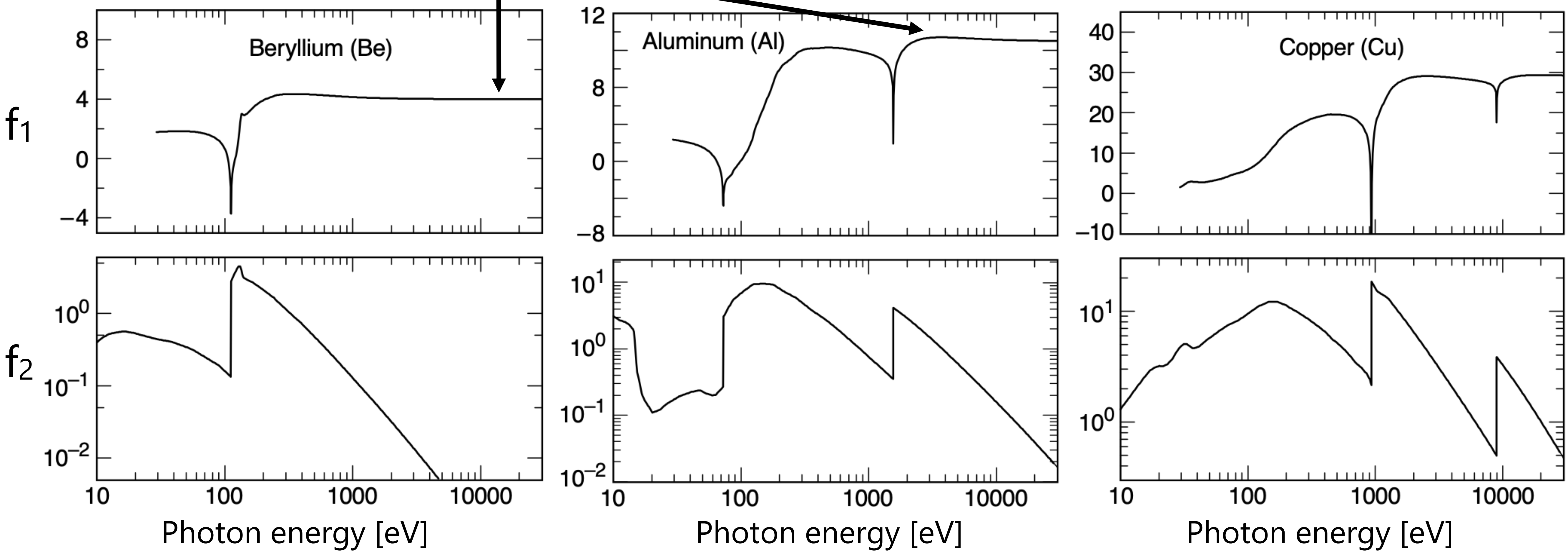
$$E(r,t) = E_0 \exp\left[-i\left(\omega t - \frac{\omega}{c}(1-\delta+i\beta)r\right)\right]$$

$$= \underbrace{E_0 \exp(-i\omega(t - r/c))}_{\text{真空中の時空発展}} \underbrace{\exp(-i(2\pi\delta/\lambda)r)}_{\text{位相シフト→散乱}\ \propto f_1^0} \underbrace{\exp(-(2\pi\beta/\lambda)r)}_{\text{吸収}\ \propto f_2^0}$$

$\boxed{f_2^0(\omega)\text{が大きい物質をフィルターに使えば効率よく吸収できる。}}$

原子散乱因子

高エネルギーでは大体Zになる



[X-ray Data Booklet, LBNL]

$$\frac{\mu}{\rho} = \frac{2 n_a r_e \lambda}{\rho} f_2^0(\omega)$$ の形でテーブル化される。

$$I = I_0 \exp\left[-\left(\frac{\mu}{\rho}\right)\rho t\right]$$ で吸収後の強度が求まる。

目的に応じて金属を使い分ける

- Al, Cu → 制動放射を吸収
- Fe → 全波長を吸収

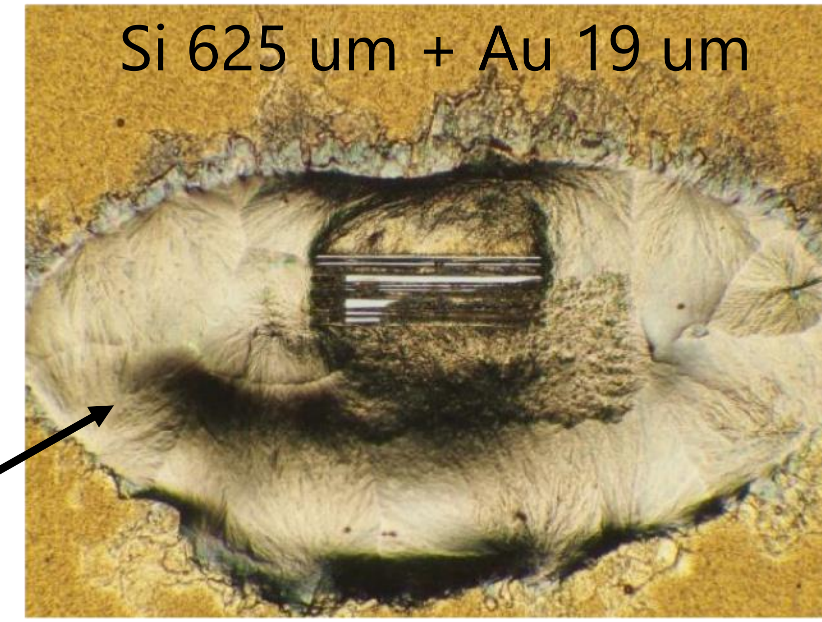
μを使うと透過関数は

$$f_s = \prod_i \exp(-(\mu/\rho)\rho t)_i$$

SuperKEKBのX線フィルター

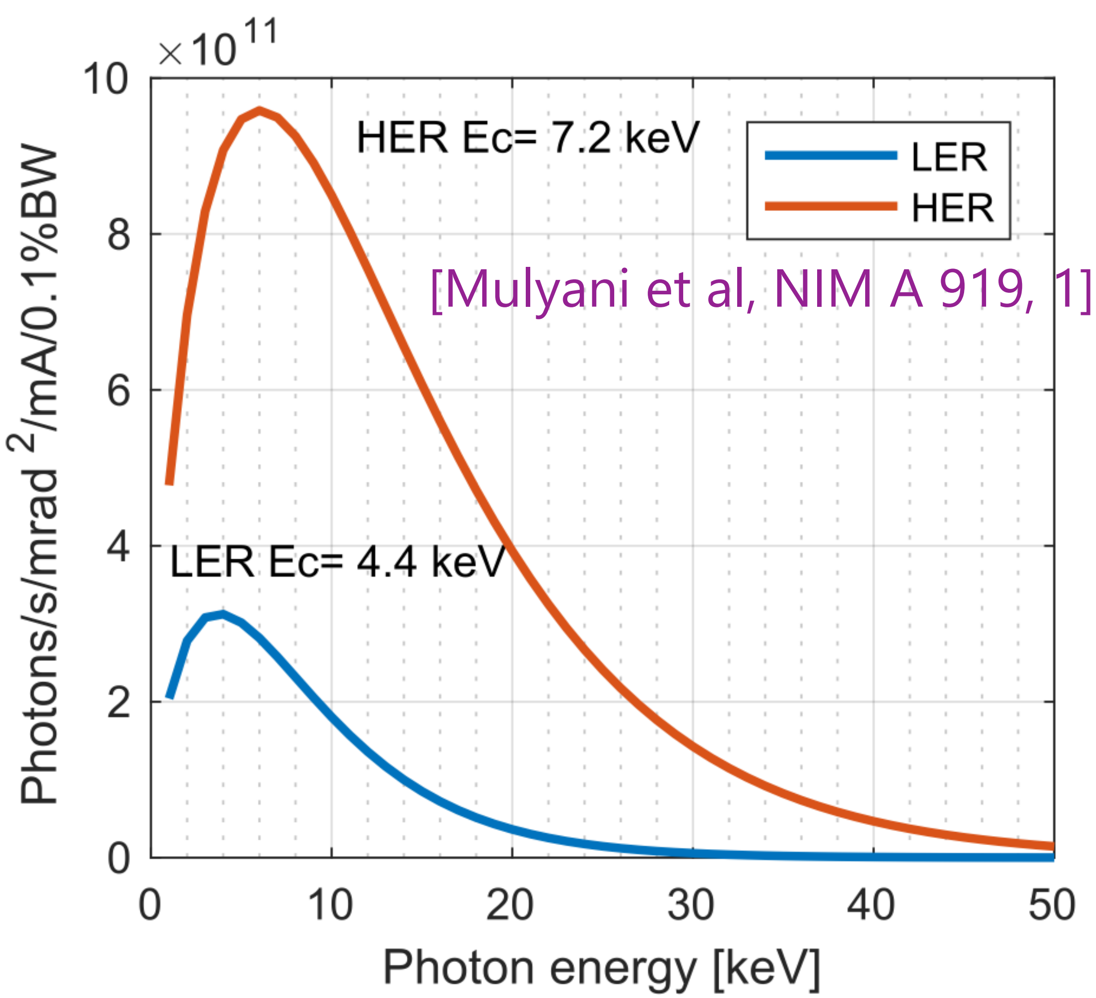
SuperKEKBではBe膜を
- X線窓: ビームラインとX線ラインの真空を分離
- X線フィルター: X線強度を抑制

の両目的に使用。



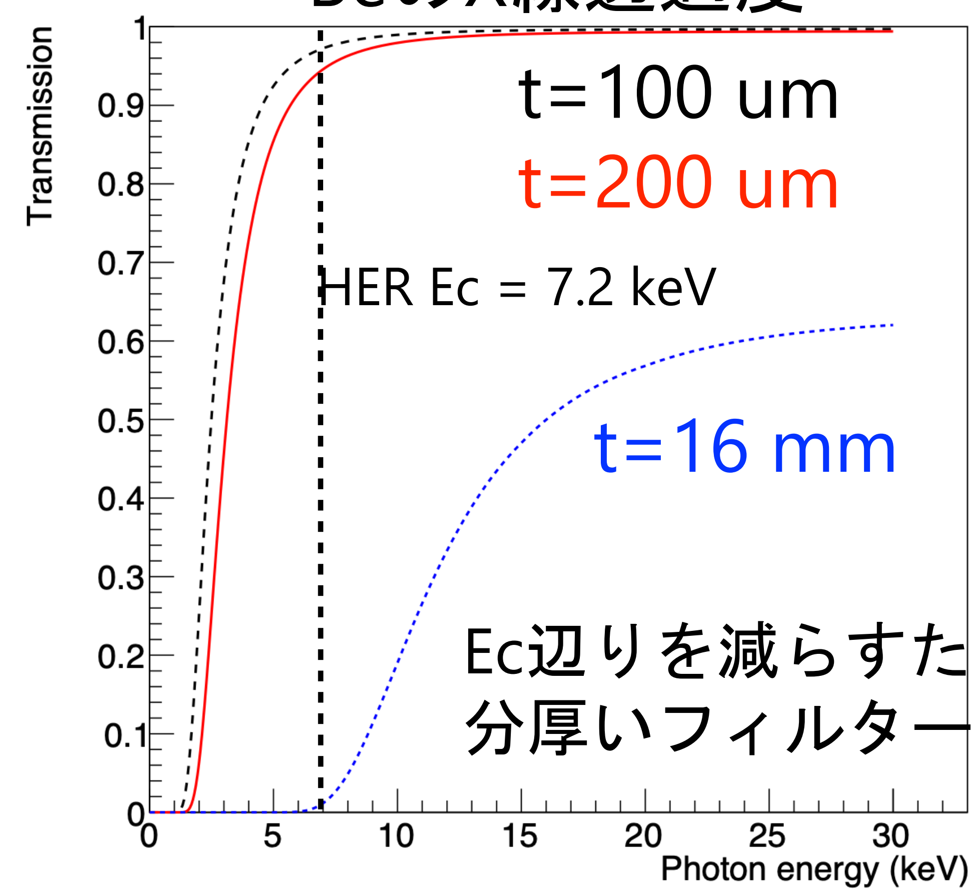
フィルター無しだとSiマスク損傷

[Flanagan et al, IBIC2013, wepf15]



[Mulyani et al, NIM A 919, 1]

BeのX線透過度



Ec辺りを減らすためには
分厚いフィルターが必要

SuperKEKBのX線フィルター

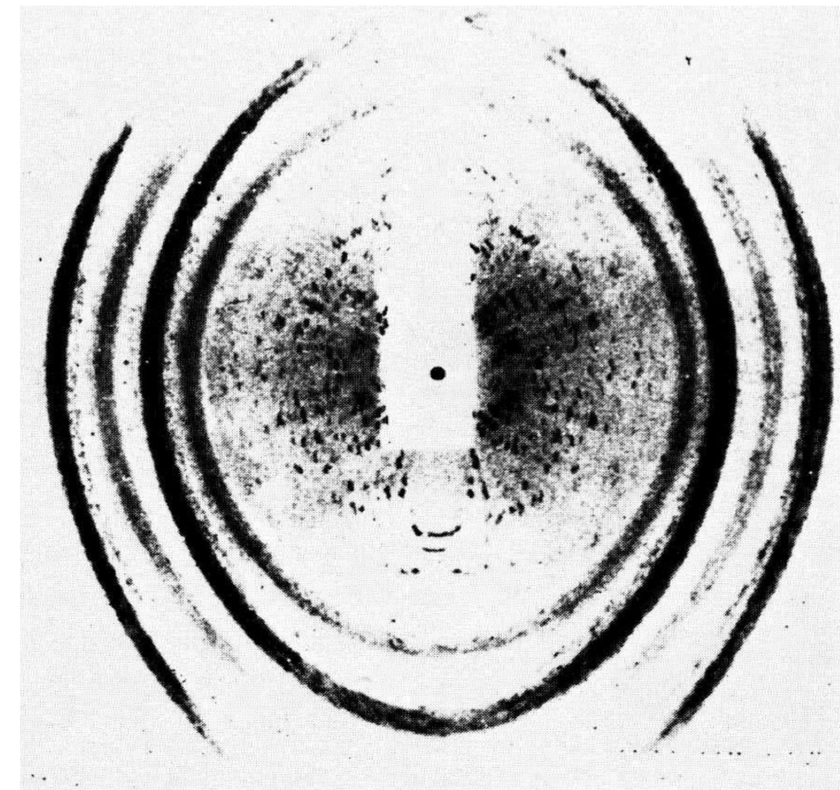
Parameter	CesrTA		SuperKEKB		
	D Line		LER	HER	
Energy (GeV)	5.3		4	7	
Bend radius (m)	31.65		31.74	106	
On-axis solid-angle power density (W/mr^2/A)	2,357		560	2,807	
Line power density (W/mr/A)	345		112	313	
Distance from source to optics box (m)	4.549		9.39	10.27	
Aperture width (mm)	2.38		0.5	0.5	
Current (A)	0.200	0.243	3.6	2.6	
Be filter thickness (mm)	0	0	0	0	14
Zero-degree area power density (W/mm^2)	23	28	23	69	23

t = 14 mm

CesrTAと同程度の強度となる

[Flanagan et al, IBIC2013, wepf15]

厚すぎるフィルターも問題

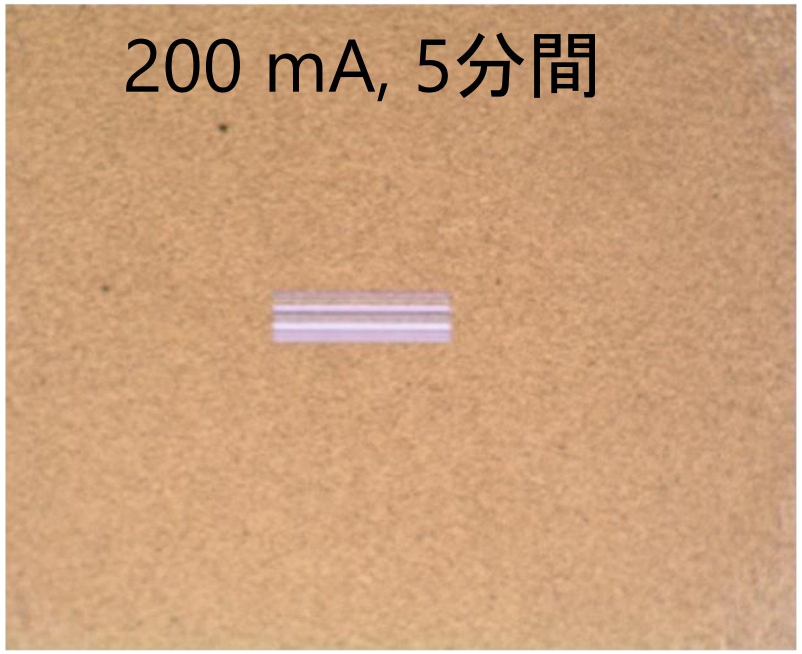


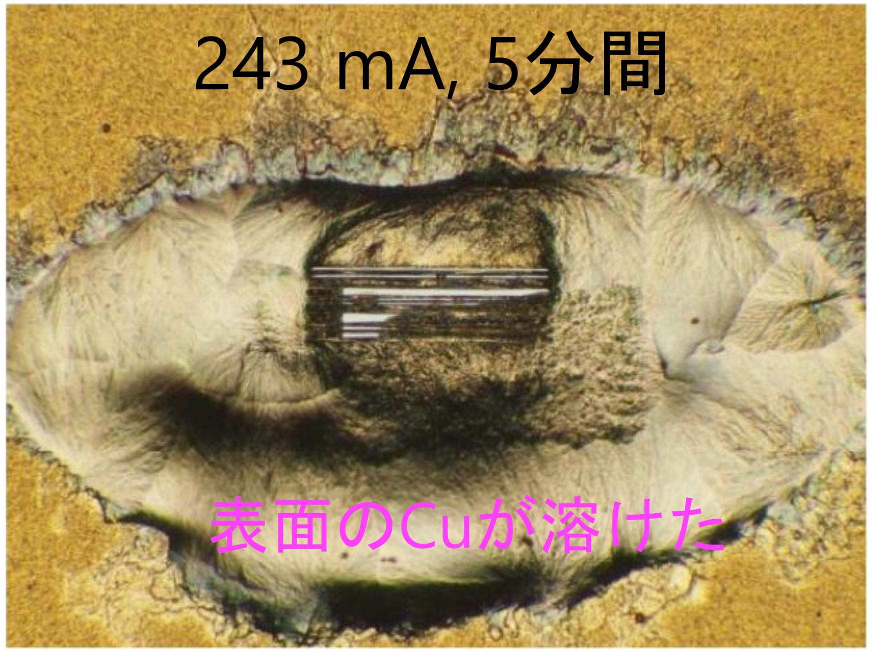
- Beはフィルターに向いていない(吸収が小さい)。
- 厚くすると散乱の寄与が目立つ。
- 将来はCuフィルターも検討。

マスクの材質

CesrTA (5.3 GeV)で試験

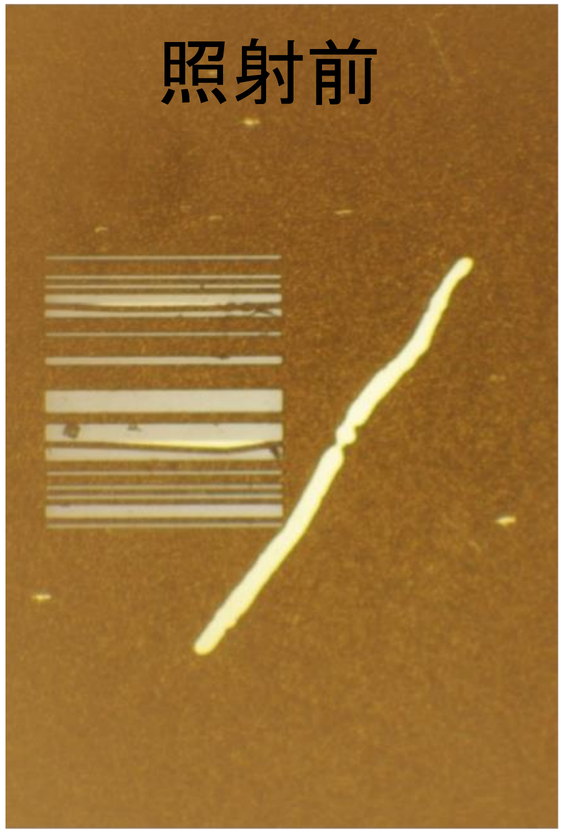
- マスク Si 625 um + Au 19 um
- 200 mA~SuperKEKB e+リング
- 243 mAでX線を直接照射するとマスクに損傷あり

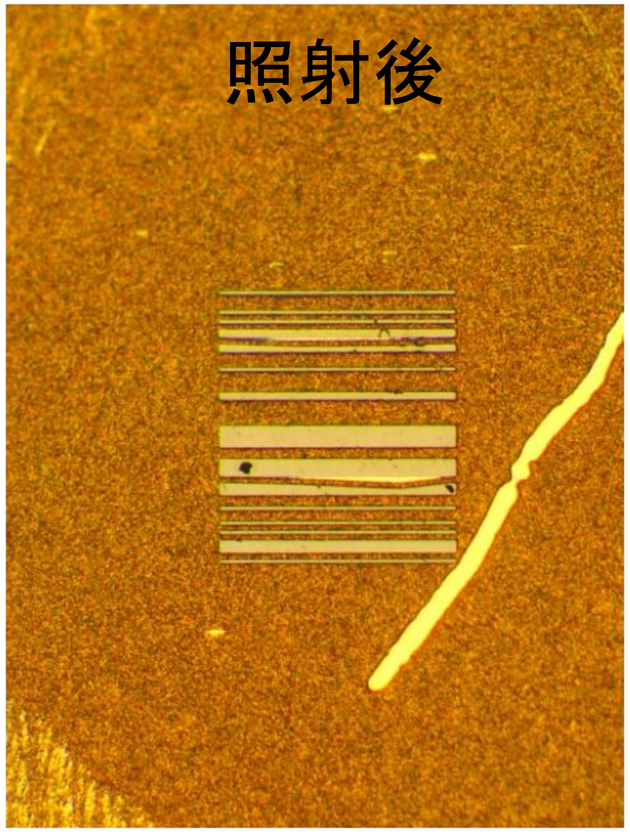




$1064°\mathrm{C} < t < 1414°\mathrm{C}$ と予想

- マスク CVDダイヤ 350 um + Au 8.7 um
- 多結晶ダイヤ熱伝導率>1000 W/m·K
- 243 mAでX線を直接照射してもマスクに損傷無し

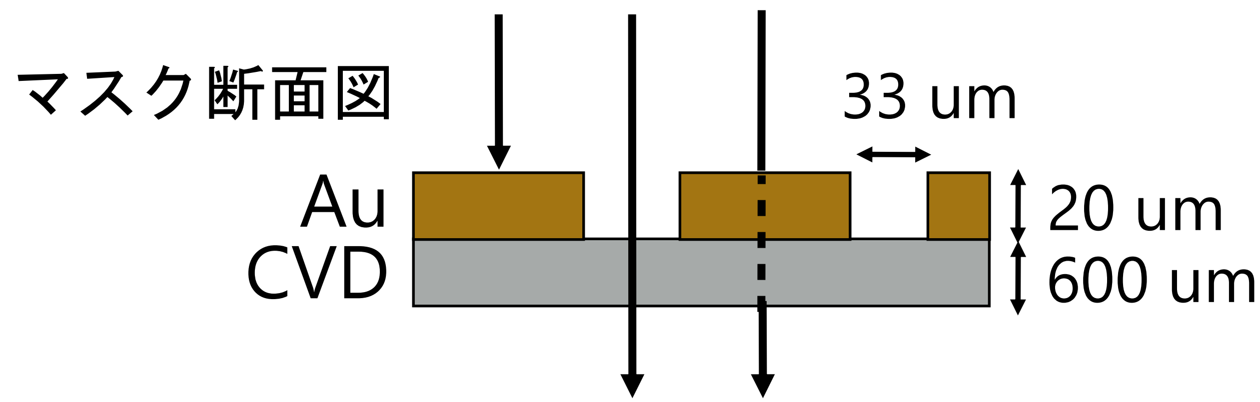




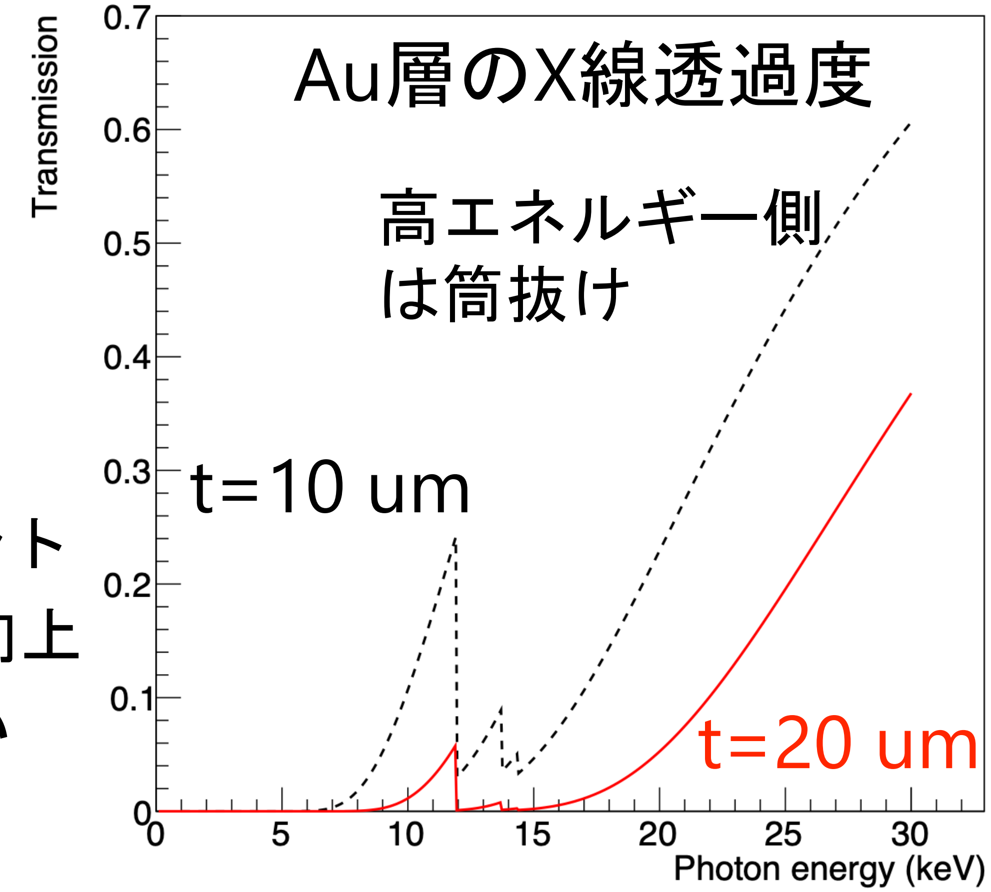
SuperKEKBではCVDダイヤ基板600 umを使用(高価だが)。

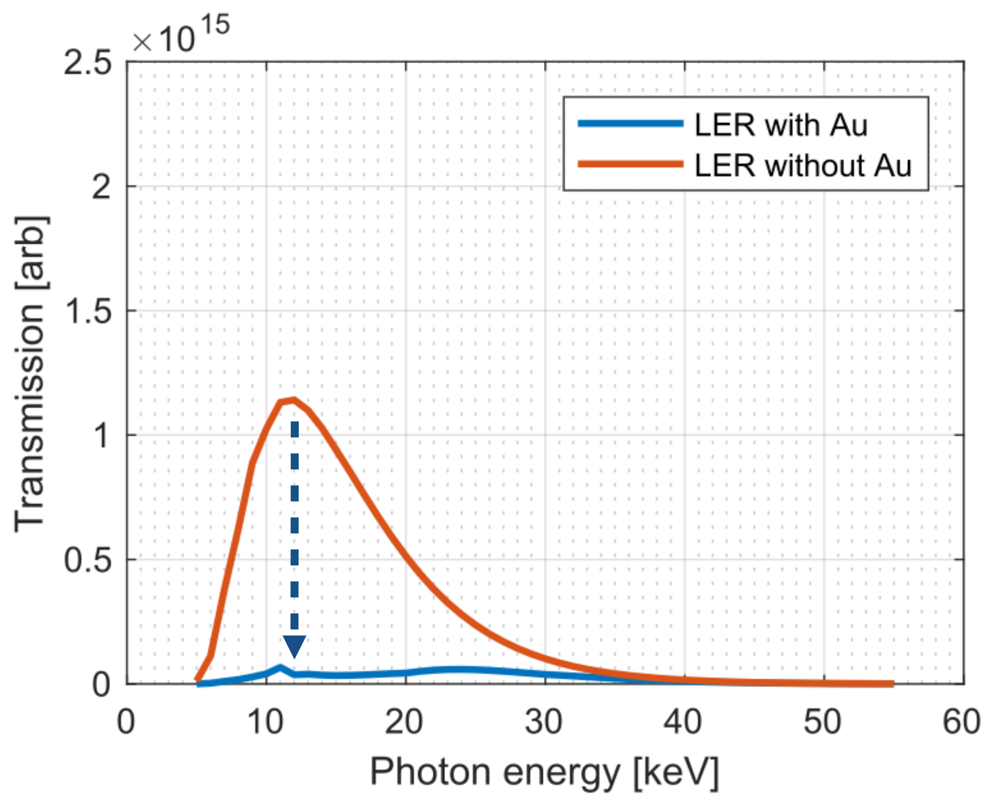
[Flanagan et al, IBIC2013, wepf15]

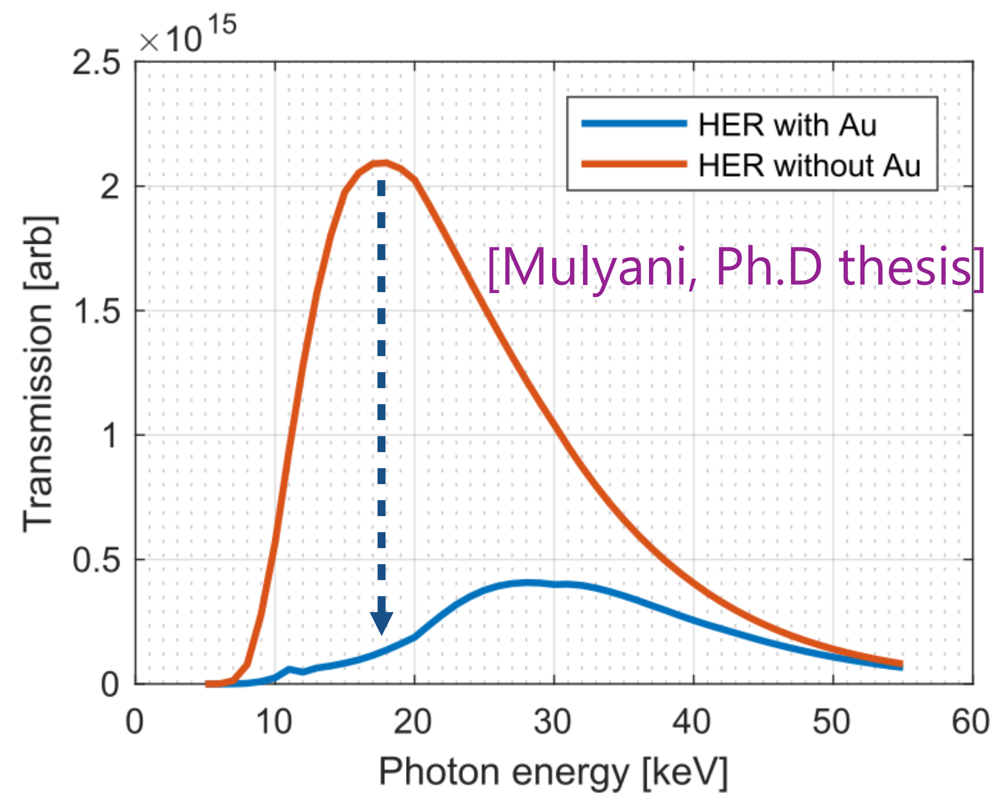
マスクのAu層の厚み



- スリット部だけAuなし
- Au層有無による透過度の差が大きいとコントラストがはっきり → ビームサイズ分解能向上
- スリット幅 33 umよりAu層を厚く出来ない → 厚いと幅の精度が落ちる (製作上の限界)

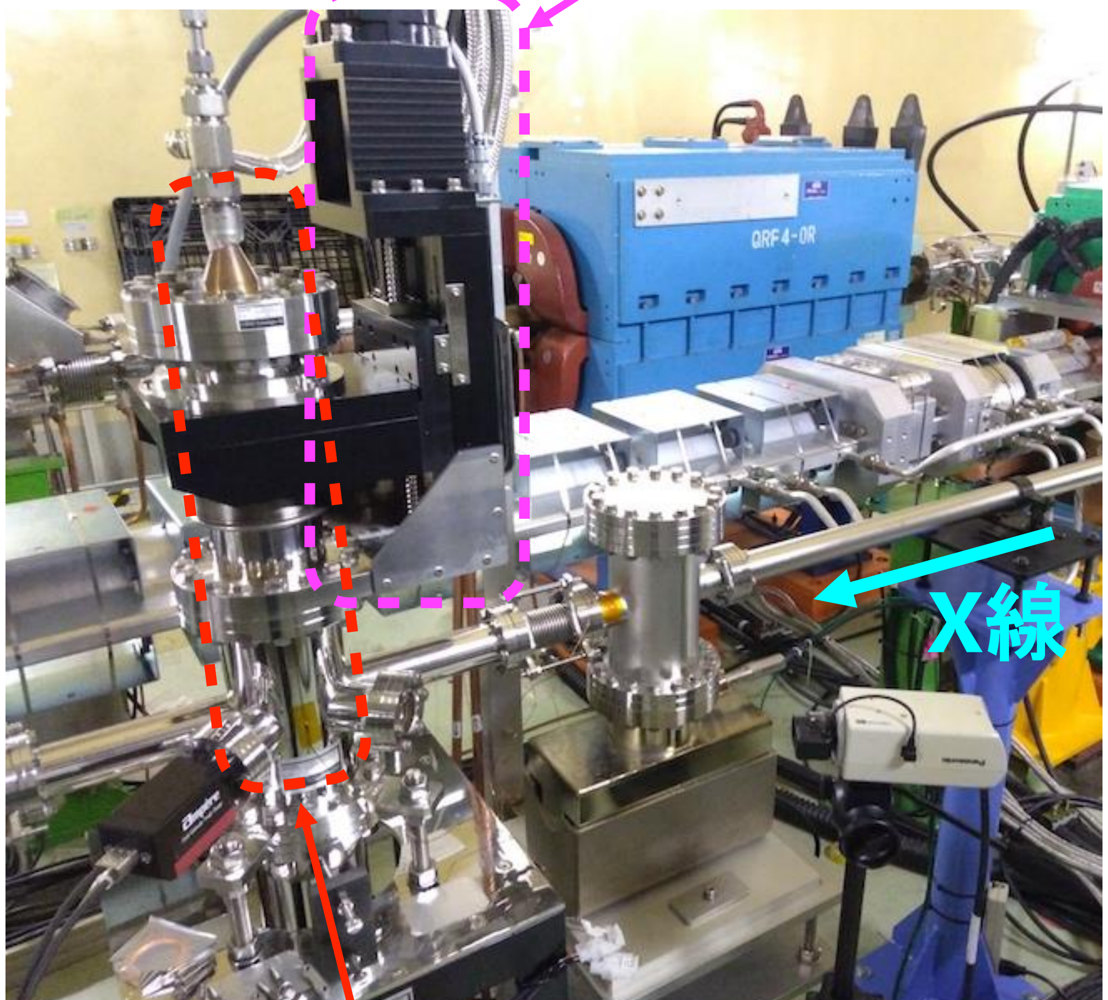




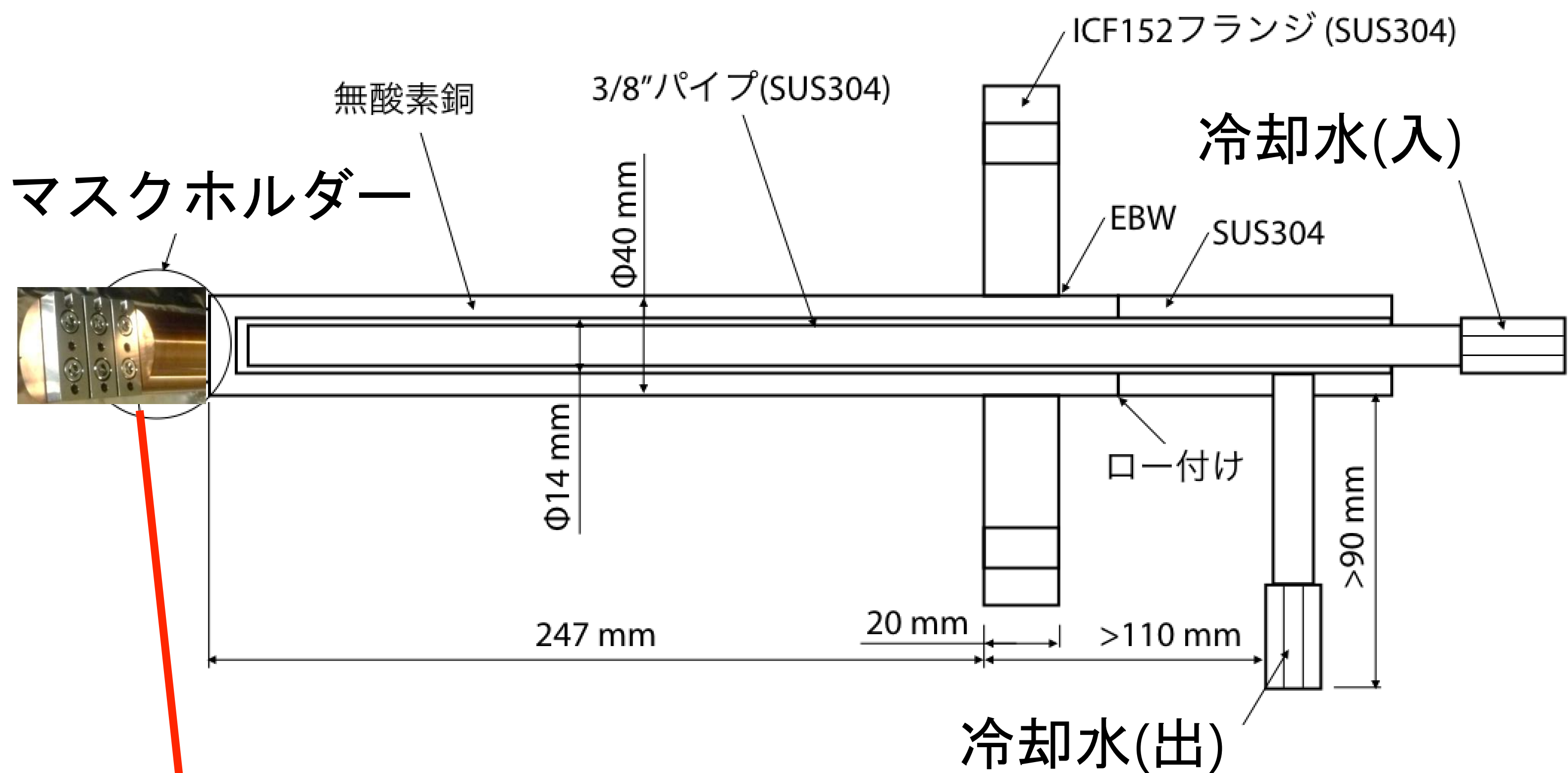


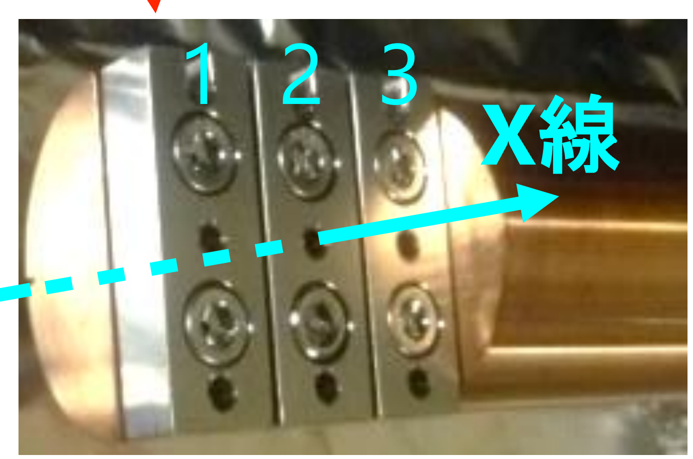
X線マスクチェンバー

上下昇降機構



マスクホルダー用ロッド





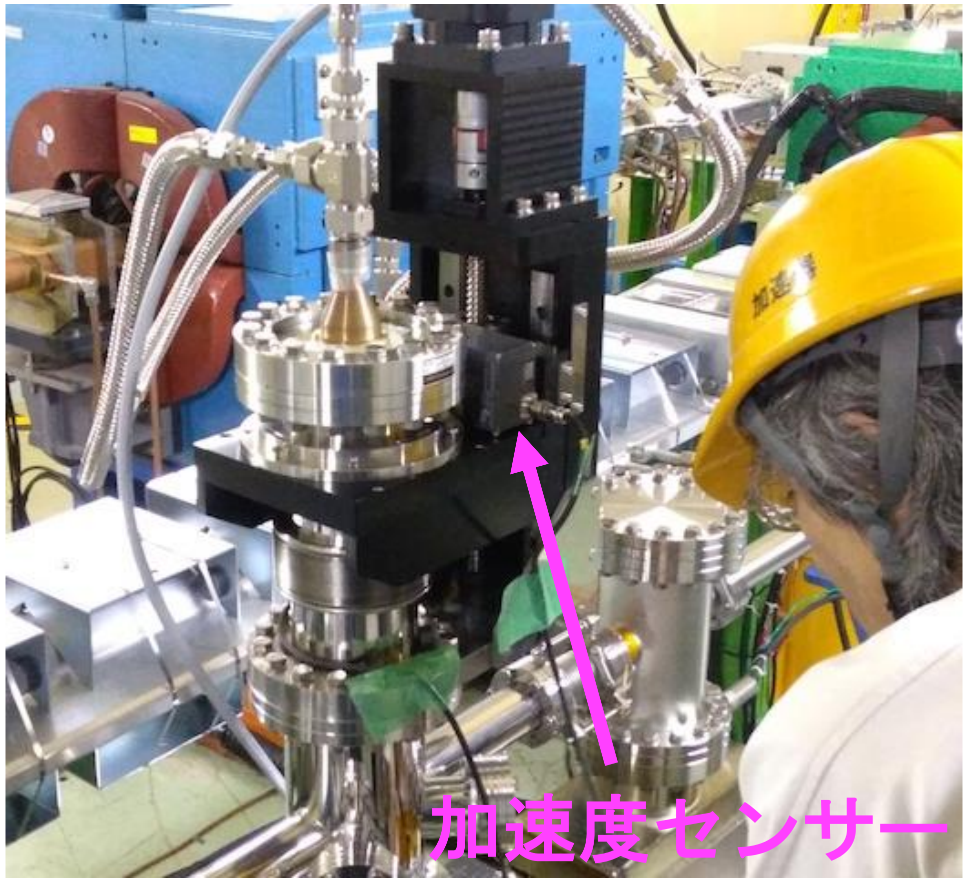
15 mm x 3

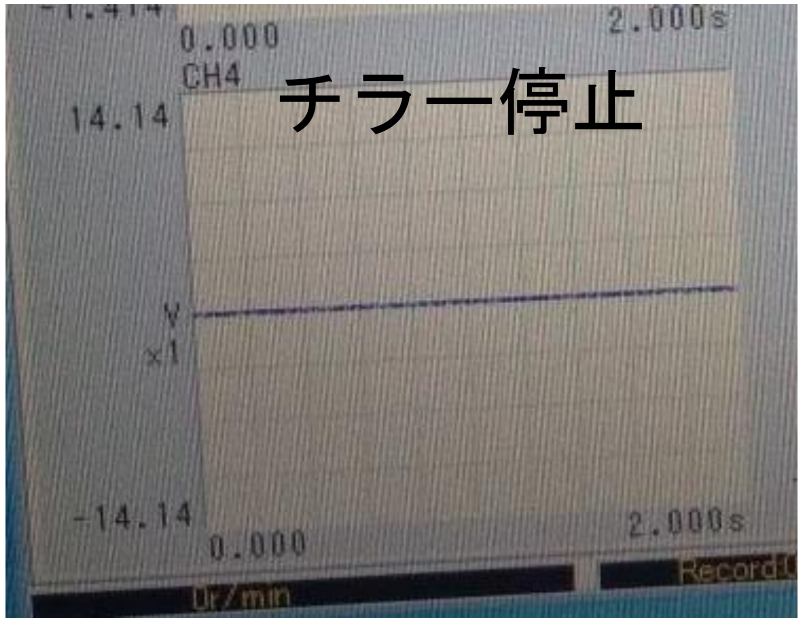
- 一つのホルダーに3個のマスクを同時装着可能。
- 上下昇降機構(50 mm可動)でマスクを選択。

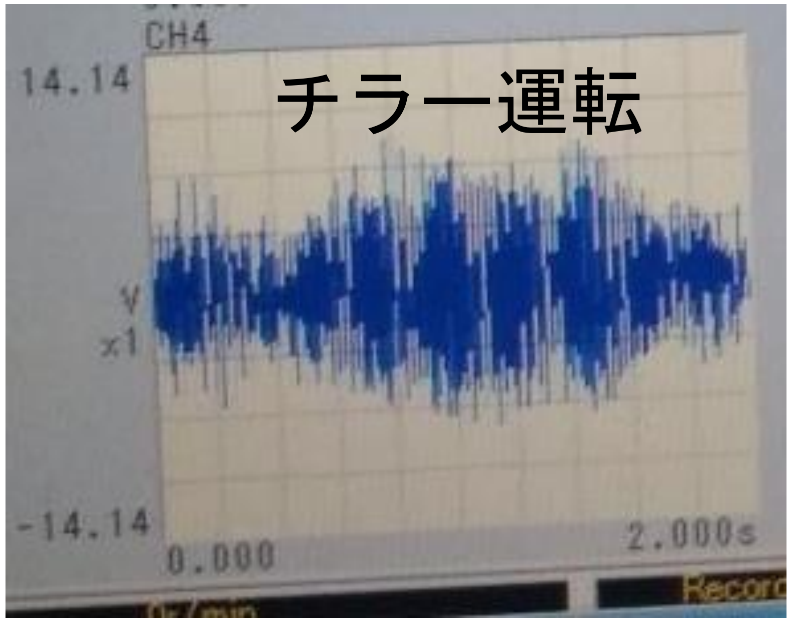
水冷チラー

- X線窓, フィルター, マスクチェンバーを水冷チラーで冷却。
- チラーが止まるとインターロックが動作(焼け落ち防止、たまに誤報あり)。

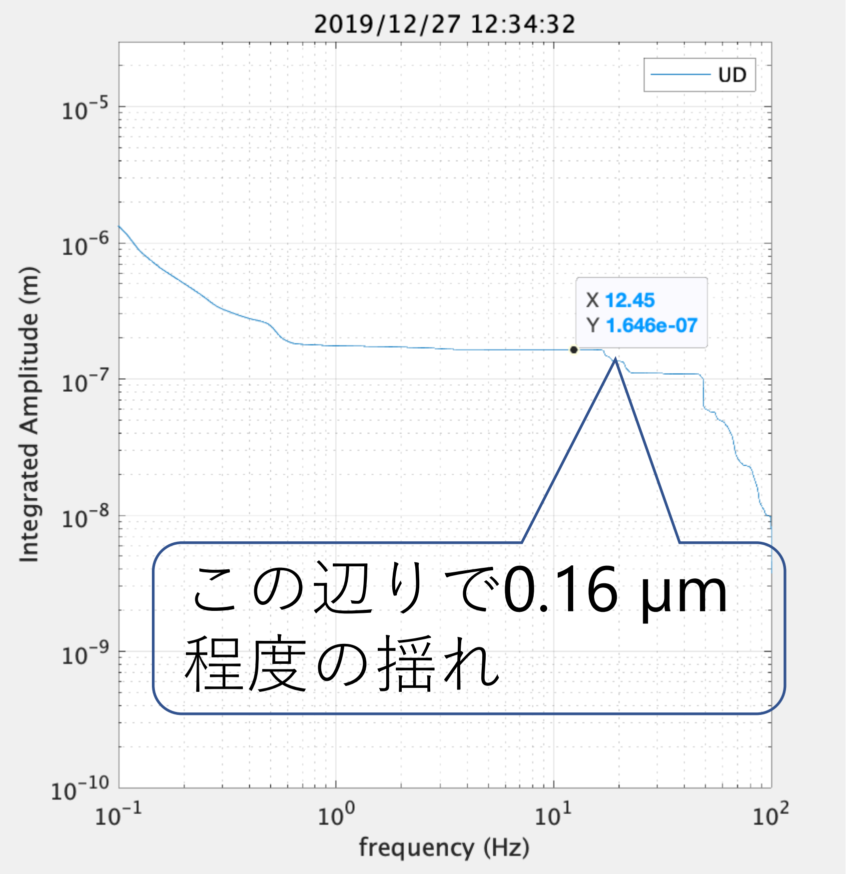
X線マスクチェンバーの振動







- 主な振動源：東大通り、チラー、遠心装置、関東ローム層
- チェンバーの振動はビームサイズ測定に影響大
  見かけの像 ~ √(真の像^2 + チェンバーの振動^2)
- 加速度センサーを用いてXYZ方向の振動を測定
- チラーがかなり大きな振動源だった
- (後に説明する)検出器の露光時間が短ければ影響無し
  → 無いように測定速度を早める



[増澤, 川本, 2019年12月測定]

X線マスクチェンバーの振動の影響

A: チェンバーの振動の振幅

ω: 振動の角周波数 (ω=2πf)

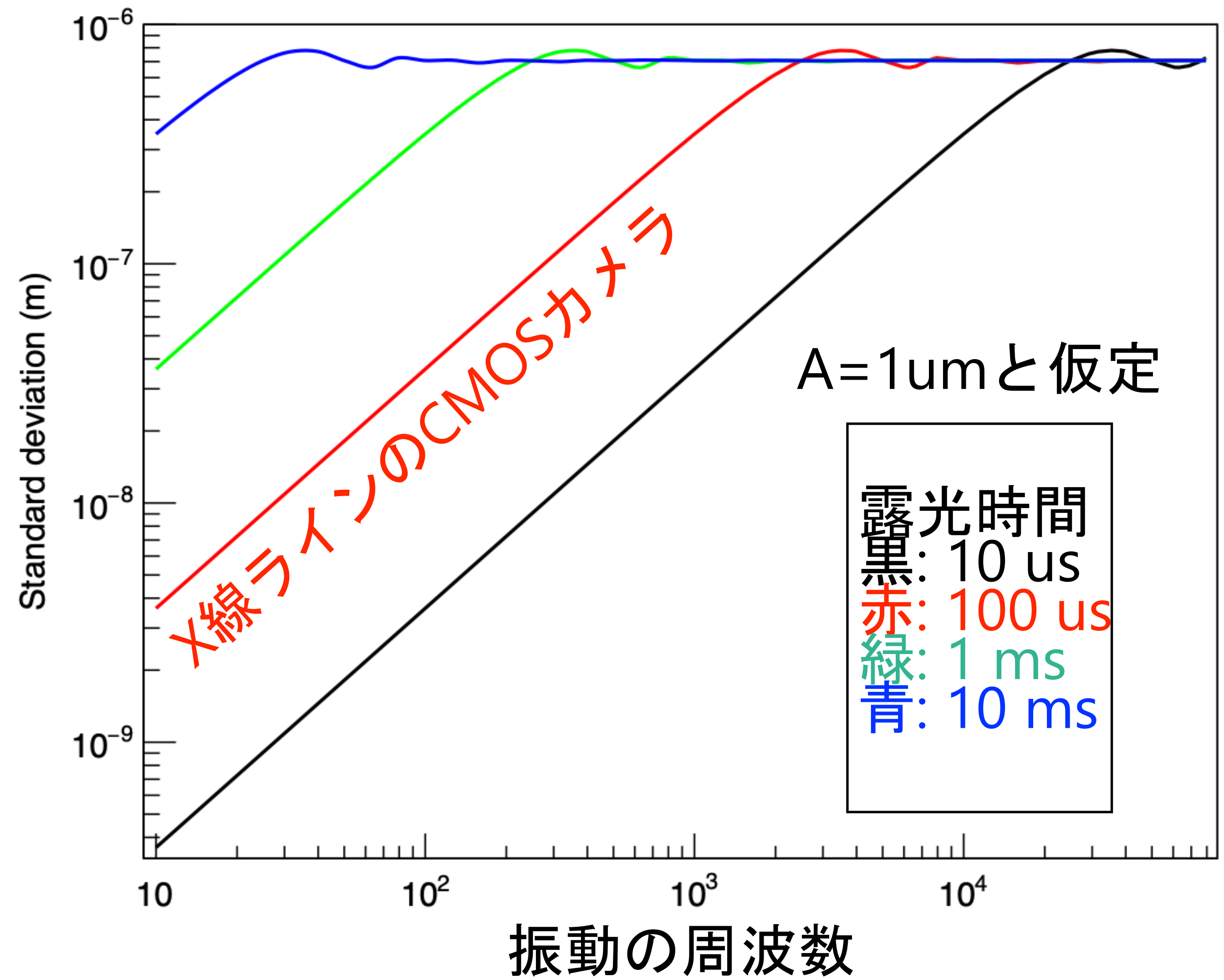
t_2-t_1: 測定時間 (CMOSの露光時間)

と置くと振動の標準偏差は

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}[A\sin(\omega t)]^2 dt}$$

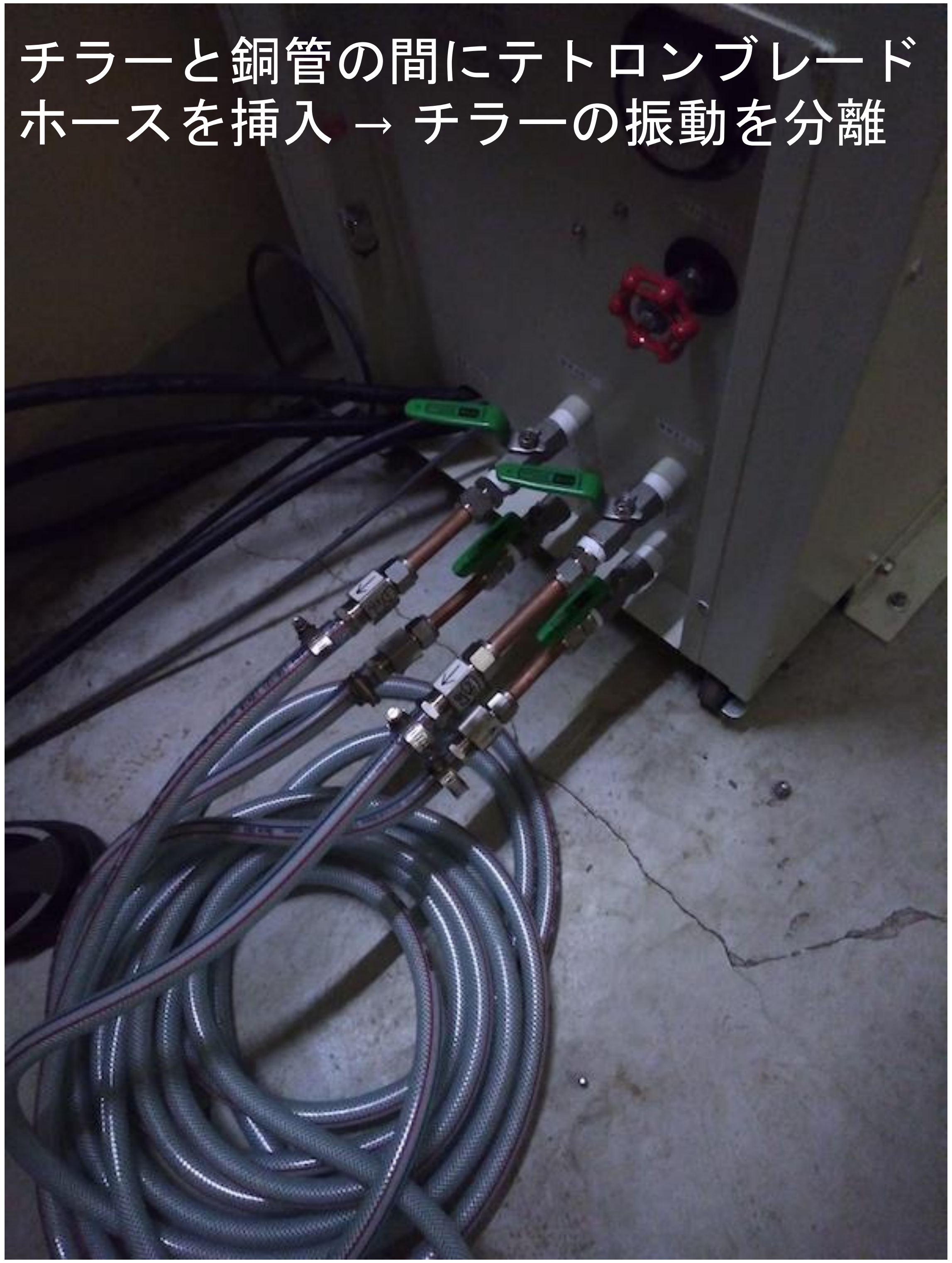
$$= A\sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}\sin^2(\omega t) dt}$$

バンチ間隔(>6ns)があるので数値積分ではなくシミュレーションが必要。



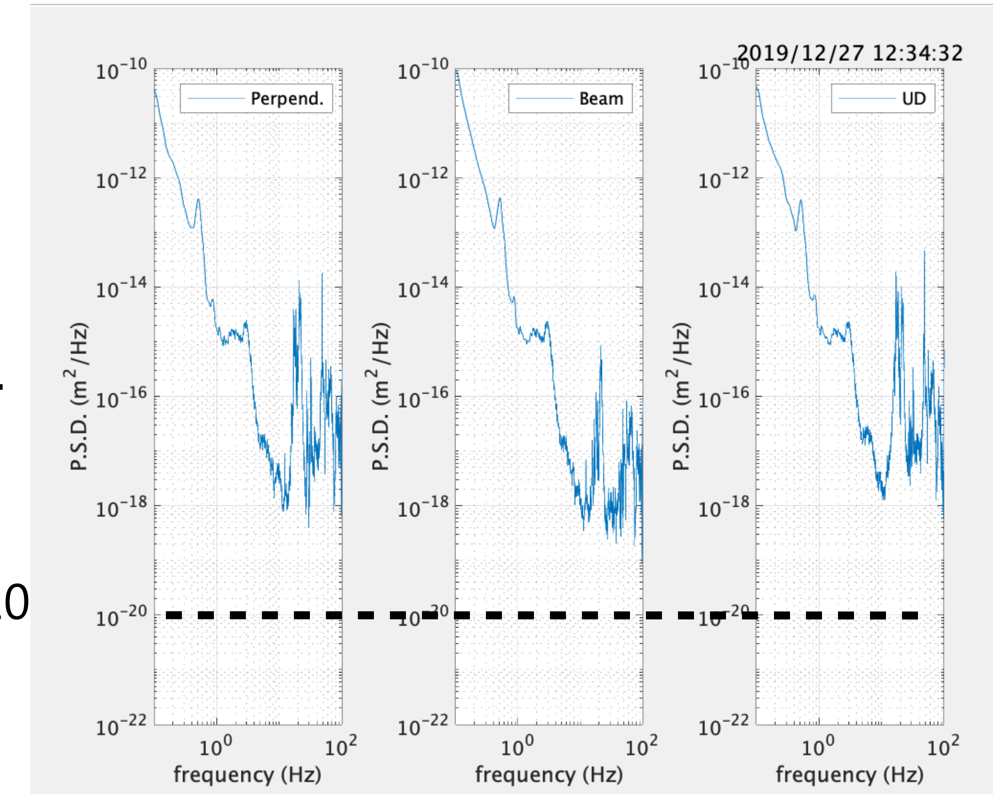
- SuperKEKB X線マスクチェンバーは20 Hzで0.2 um、100 Hzで0.01 um程度の振動なので、上図を1/10または1/100スケールすれば良い。
- CMOSカメラの露光時間 (100 us)では問題にならない。

X線マスクチェンバーの振動の対策



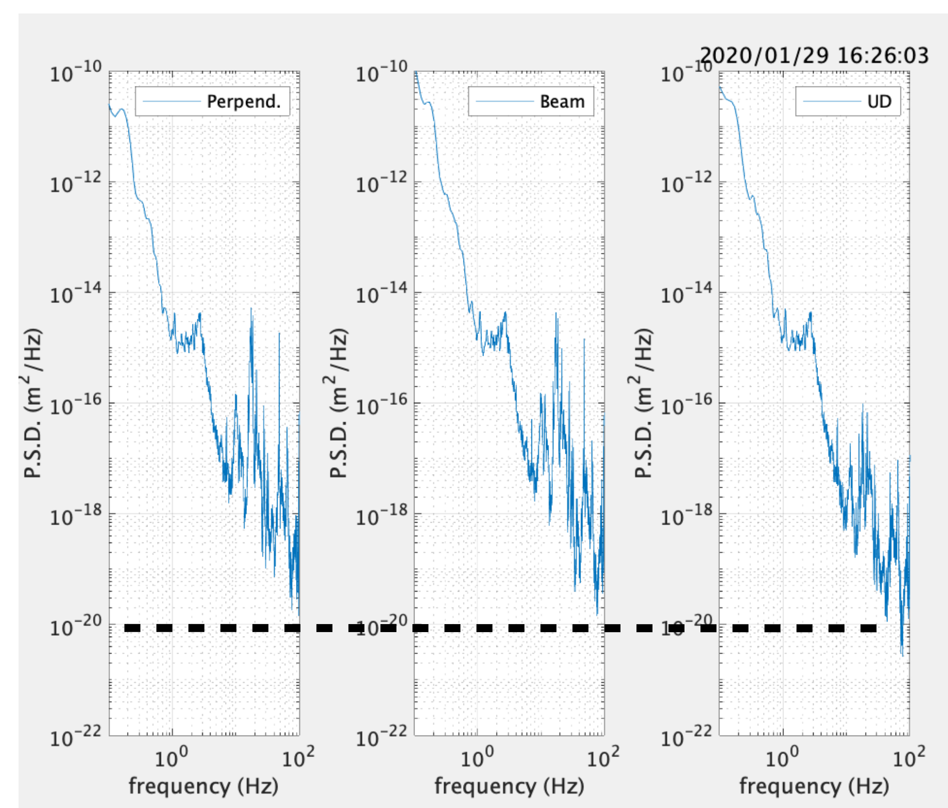
対策前

10^{-20}



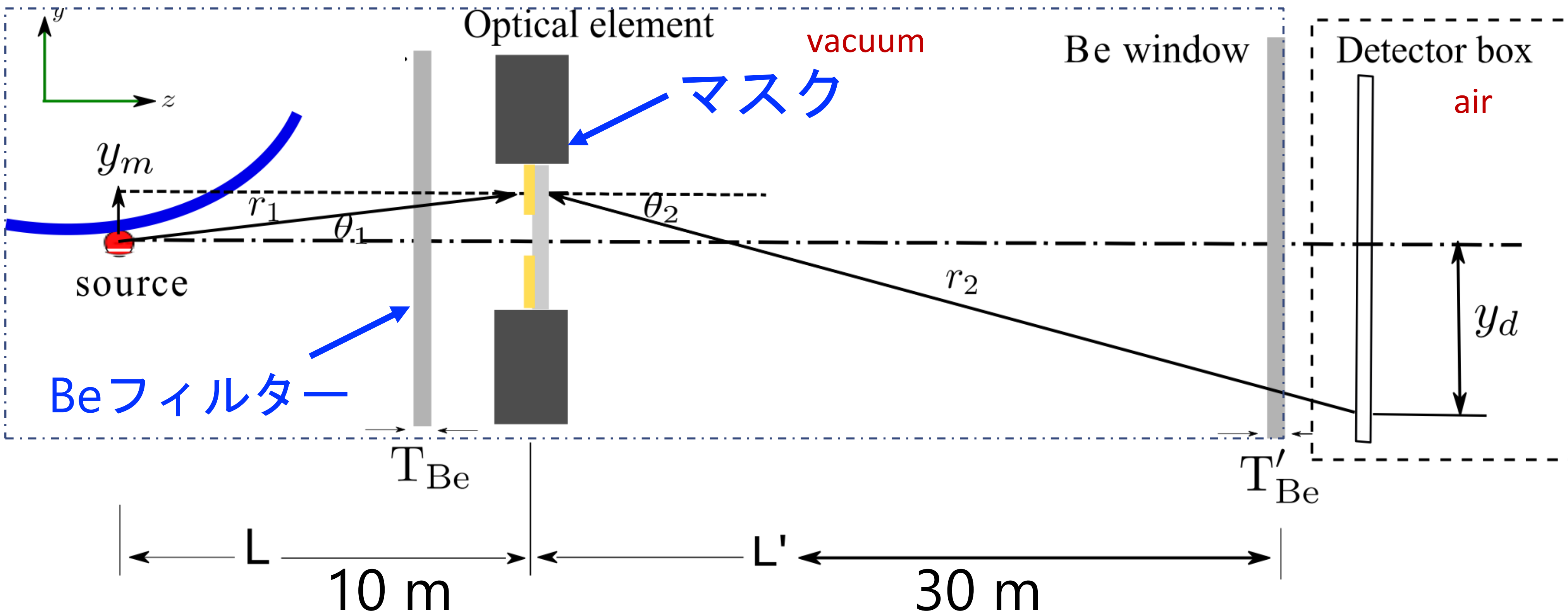
対策後

10^{-20}



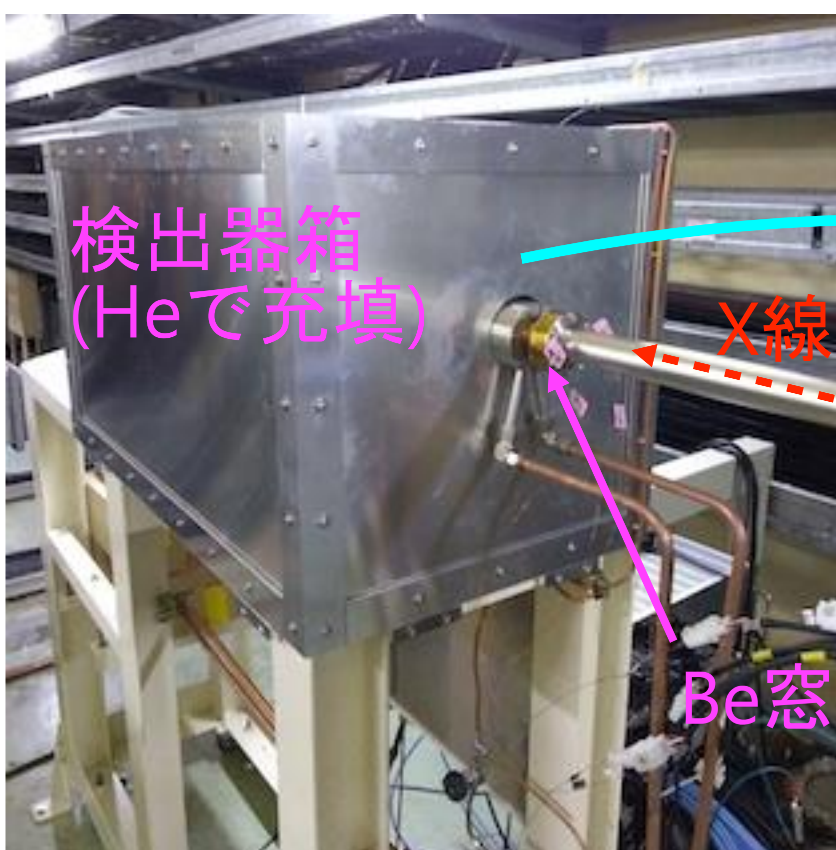
[増澤, 川本, 2020年1月測定]

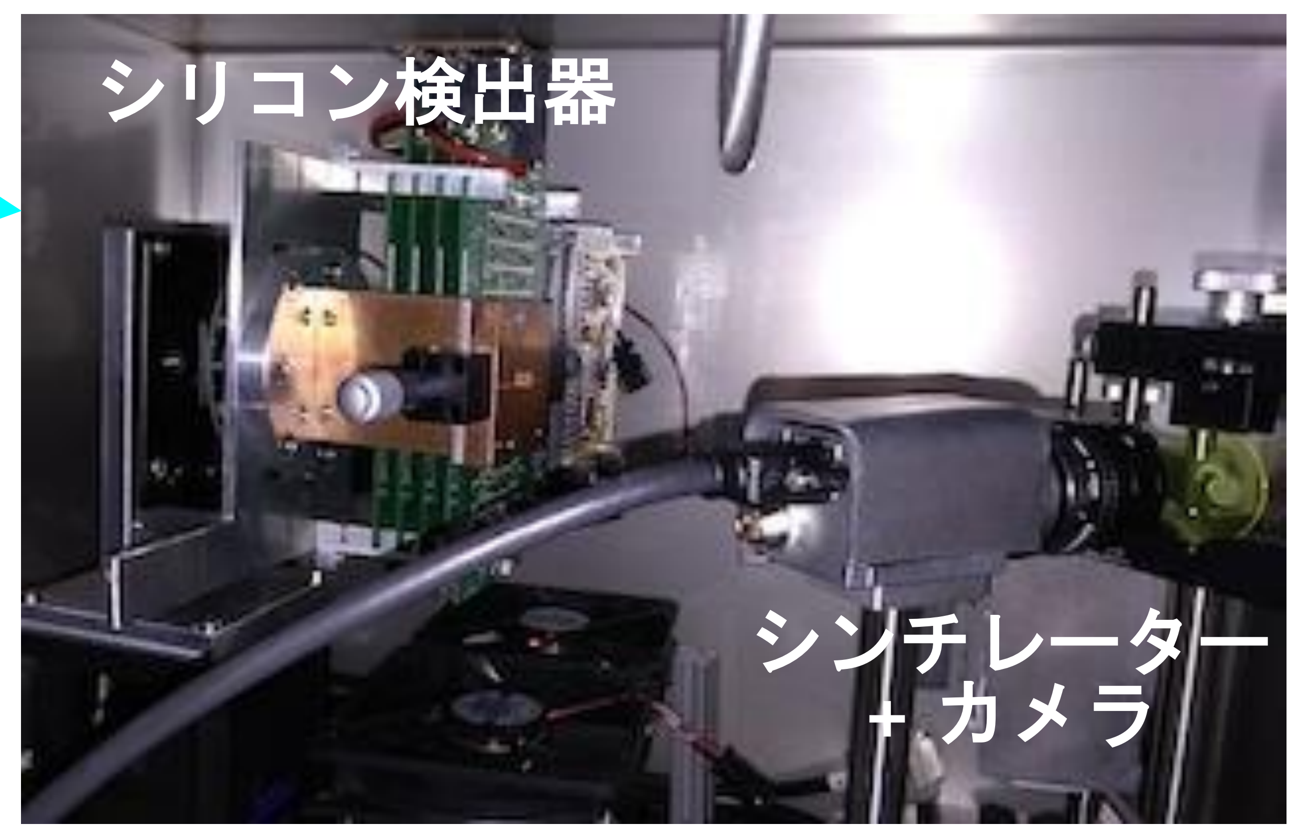
X線検出器



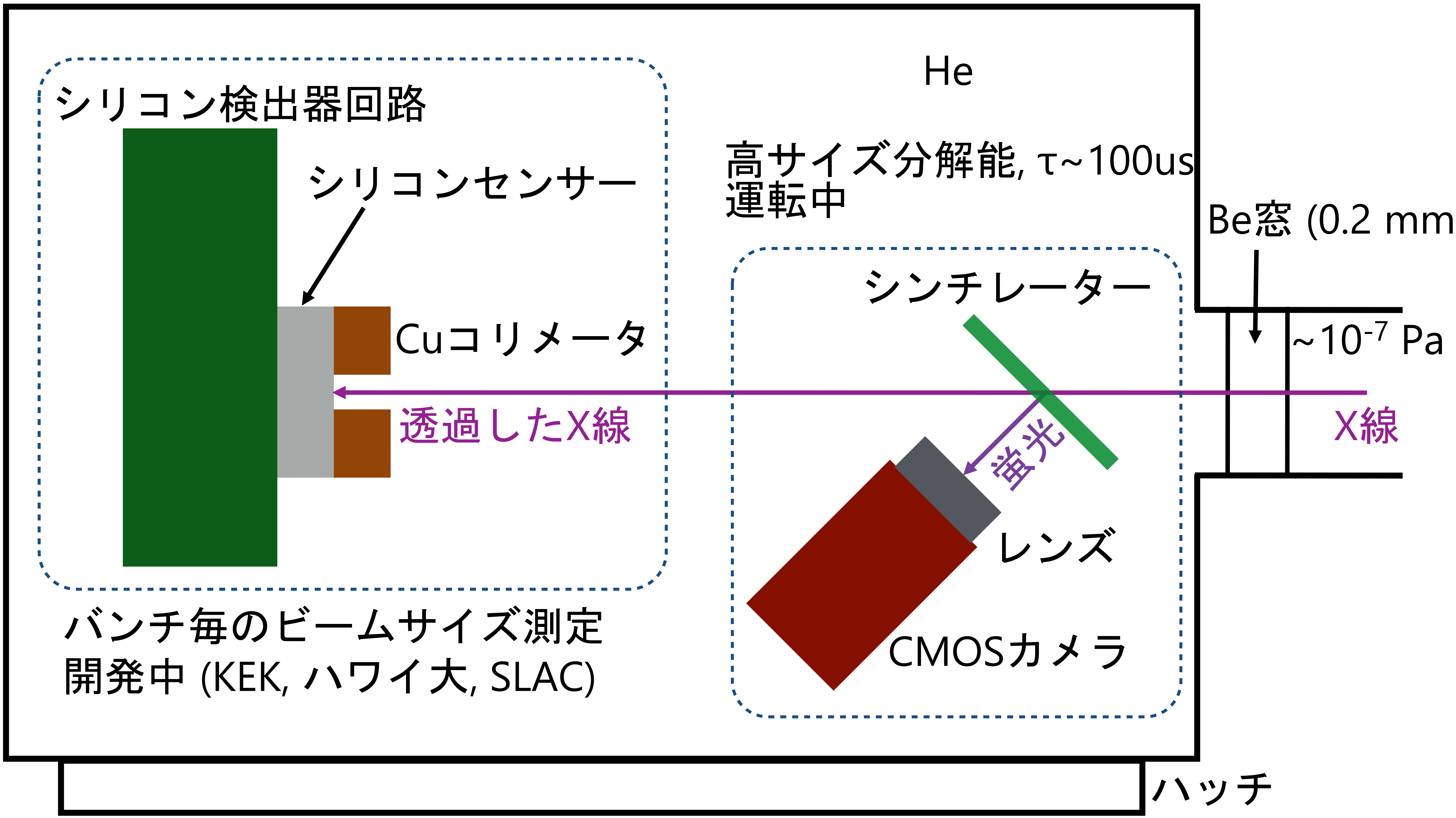
ビームサイズに応じて太った光像を検出器で捉える

- 位置分解能
- 強度分解能
- ダイナミックレンジ
- S/N比
- 高速性



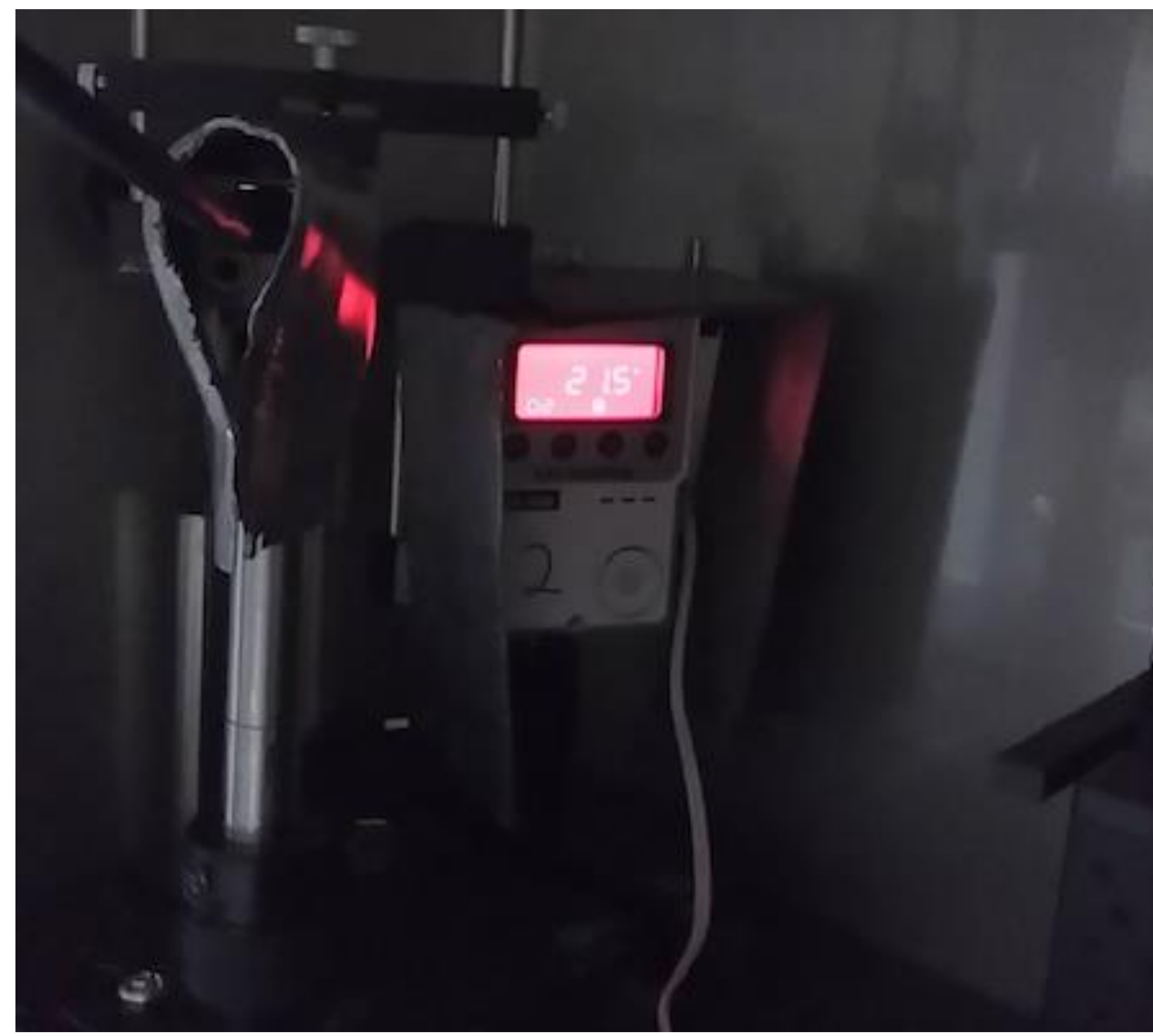


X線検出器箱の内部レイアウト

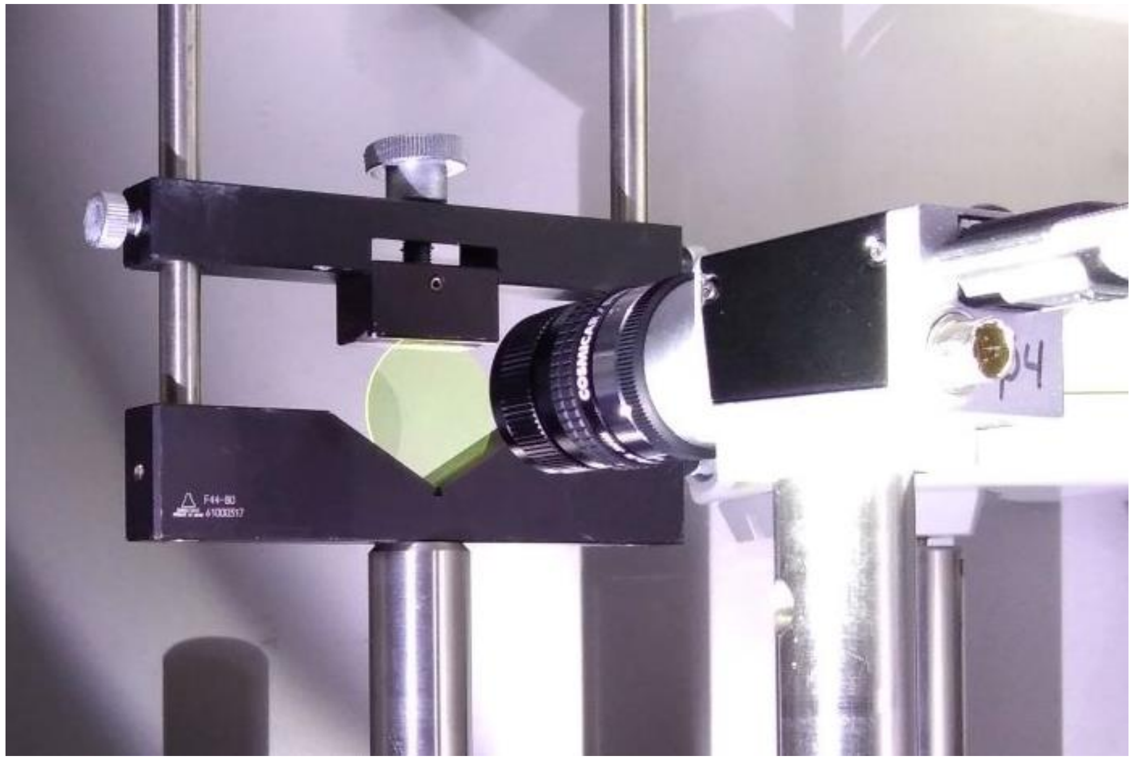


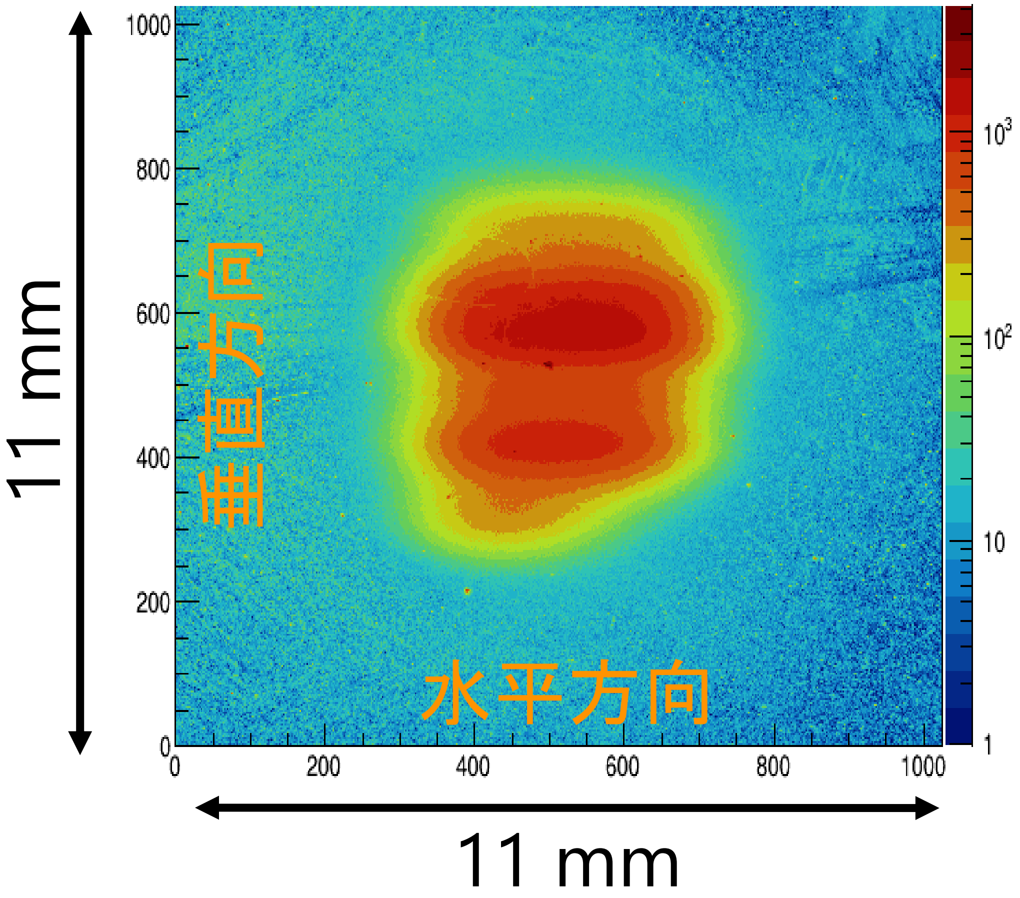
検出器箱内のO^2パージとHe充填

- X線と大気の散乱・吸収を防ぐため検出器箱内をHeで満たす。
- He流量計とO^2濃度計でHe充填を確認。



シンチレーター + カメラの概略





X線がシンチレーターに照射され、その際発光した蛍光を測定

位置分解能	シンチレーター上で11um/pixel x 1000-2000 pixel
強度分解能	12bit ADC (科学計測用では16bitもある)
ダイナミックレンジ	一般的に70-80 dB
S/N比	~50カウント以下@12bit (ほとんど漏れ込んだ光の影響)
高速性	一般的に最短露光時間は30 us (~30 kHz)

CMOS/CCDカメラ

	Basler Ace acA2440-20gm	IO Industry32B216-CX	Allied Vision Manta G-031
センサー	Sony CMOS IMX264	Sony CMOS IMX252	Sony CCD ICX618
ピクセルサイズ	3.45 µm x 3.45 µm	3.45 µm x 3.45 µm	5.6 µm x 5.6 µm
ダークノイズ	2.3 e-		12.9 e^-
ダイナミックレンジ	73.4 dB	73.6 dB	62.4 dB
S/N比	40.2 dB	40.4 db	
フレームレート (/s)	23 (2448 x 2048 pixs)	167 (2064 x 1544 pixs)	125 (656 x 492 pixs)
インターフェース	GigE	CoaxPress (BNC)	GigE

- CCDは~300 Gy、CMOSは~1k Gyでセンサーに異常が出る (出力異常や斑点)。
- センサーが同じならばピクセルサイズやフレームレートは同じ。
- 読み出しはメーカー謹製のSDK(C/C++, 無料が多い)を使うか、LabViewと連携。

シンチレーターの材質

	ρ / g/cm^3	$\hbar\omega$ / eV	λ_{max} / nm	yield / 1/keV	n @ λ_{max}	R_δ / nm
BGO	7.13	49.9	480	8	2.15	3.95
PWO	8.28	53.3	420	0.1	2.16	3.70
LSO:Ce	7.1	51.3	420	32	1.82	3.85
YAG:Ce	4.55	42.1	550	11	1.82	4.69
LuAG:Ce	6.76	47.8	535	14	1.84	4.12
YSO:Ce	4.45	41.3	420	9.2	1.80	4.78

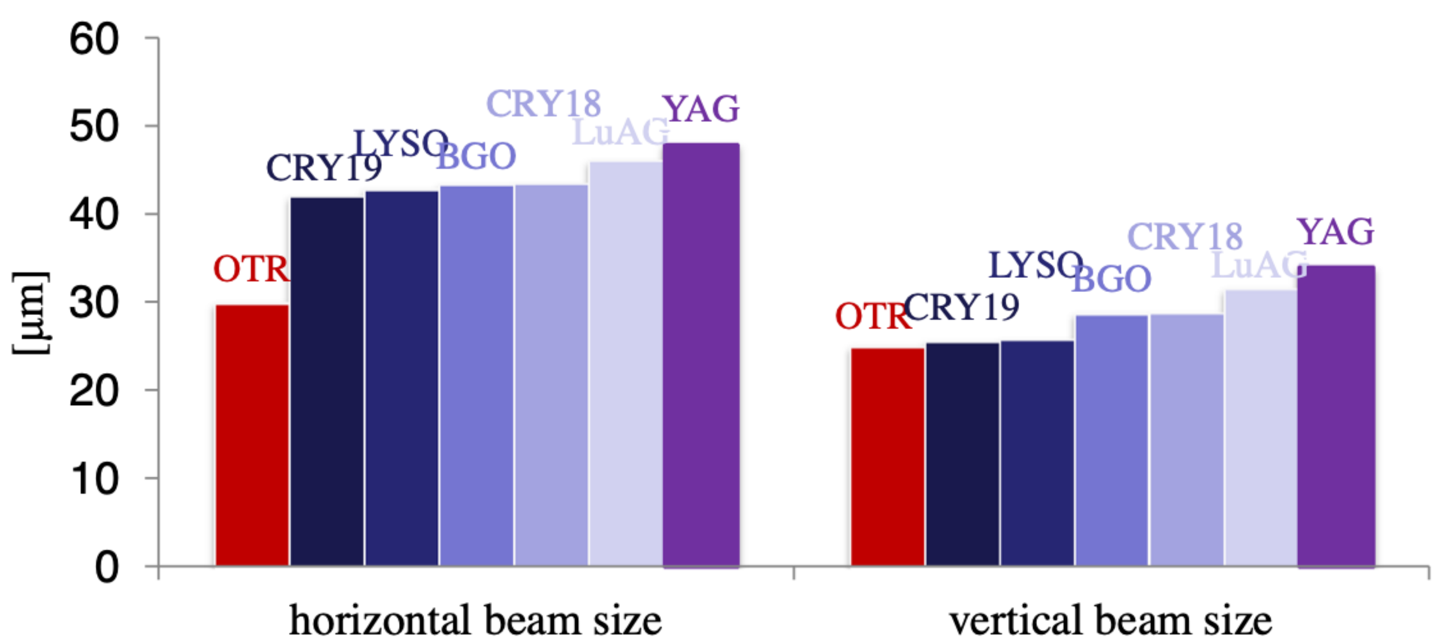
B. Walasek-Höhne, IBIC 2019, TUBO01

"LuAG:Ceの密度はYAG:Ceに比べて大きい。"

"CCDカメラ1pixelあたりの光量はLuAG:CeがYAG:Ceに比べて1.5倍大きい。"

[Tous et al., NIM A 591, 264–267]

SuperKEKBでは主に
LuAG:Ce → HER (電子7 GeV)
YAG:Ce → LER (陽電子4 GeV)
と使い分け。



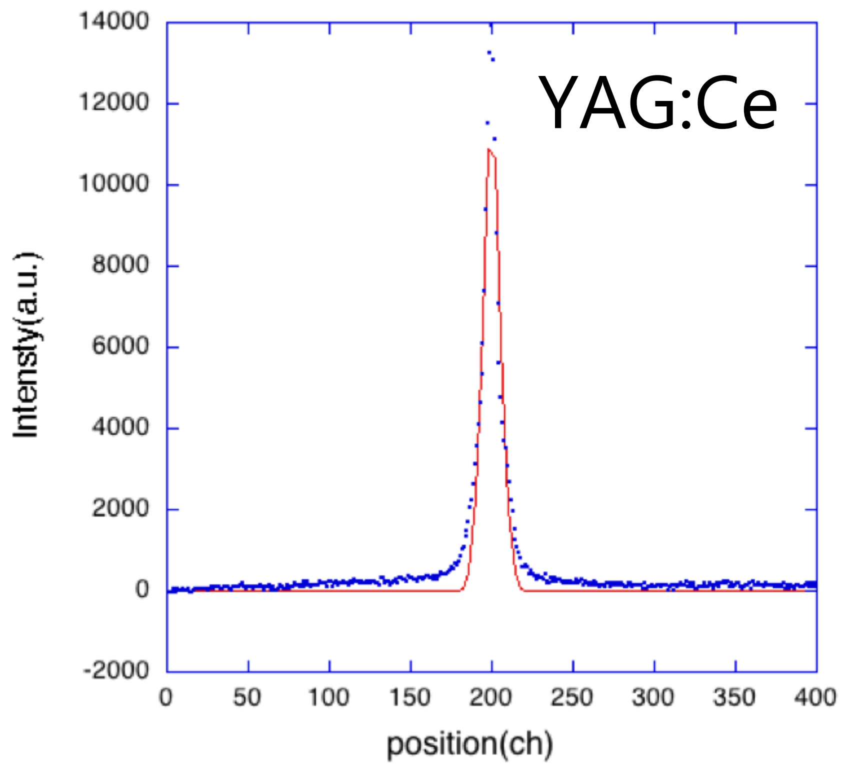
[Kube et al., IPAC 12, weoaa02]

- 密度が大きいLuAG:Ceの方がX線像がシャープになる。
- LERは放射強度が小さいので、シリコン検出器までより多くのX線を透過させるためYAG:Ceを使用。

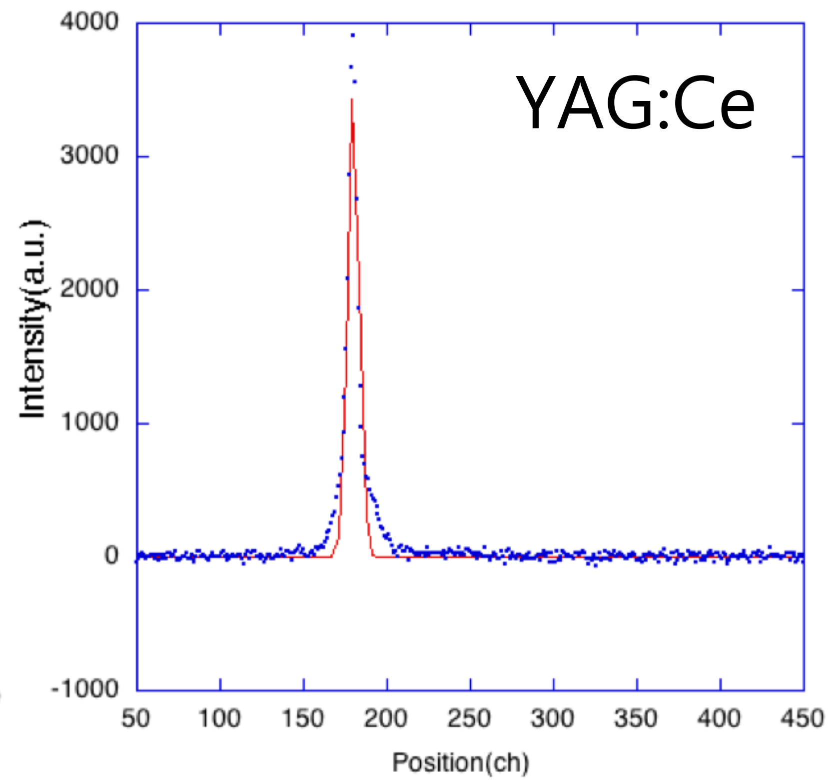
シンチレーターの厚み

厚みを増すと
- 厚みによる光学的なにじみ
- 蛍光のsaturation
- 多重散乱

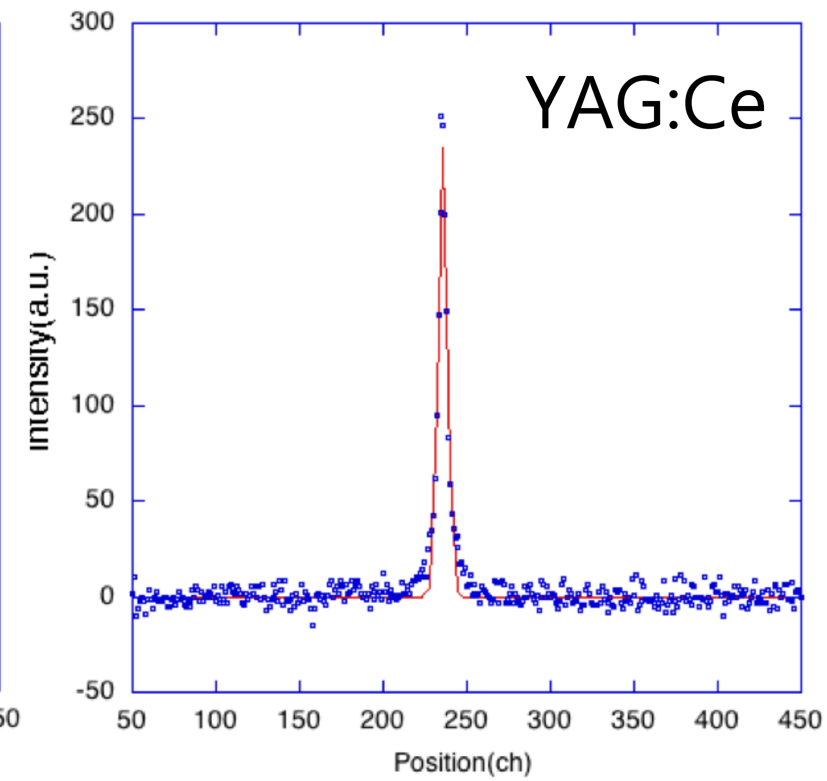
厚みを減らすと
- シャープな像
- 蛍光量低下
- 扱いに注意を要する



100um　セラミック
13.9μm



50um　セラミック
8.6μm



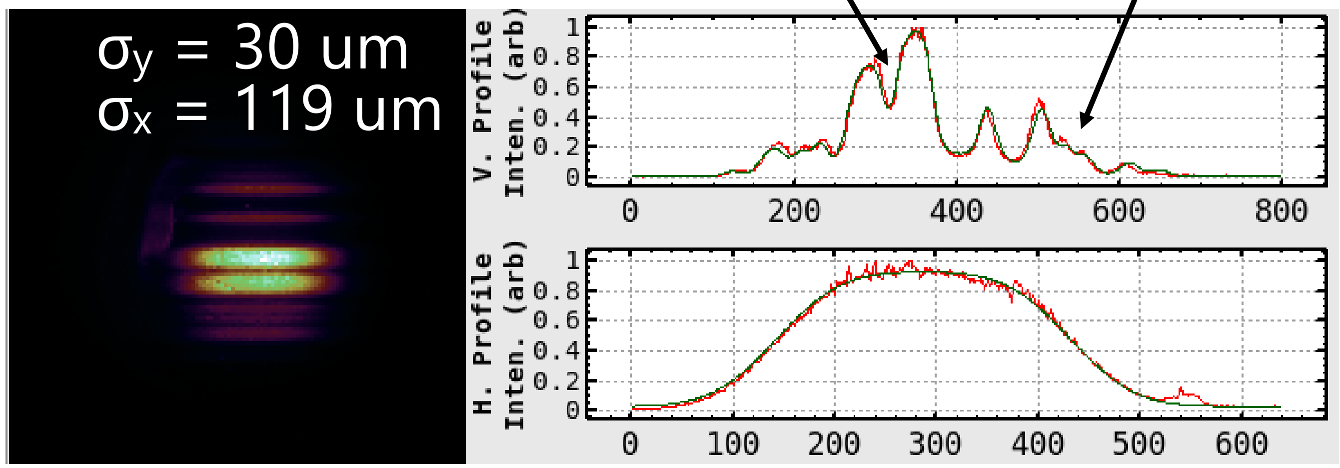
50um　結晶
7.0μm

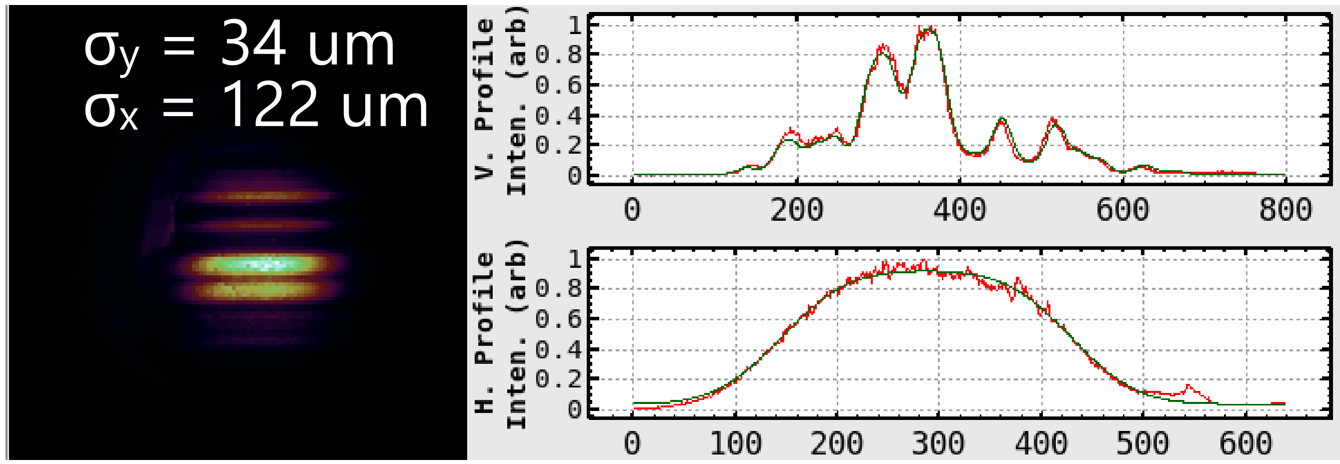
[Naito et al., PASJ14]

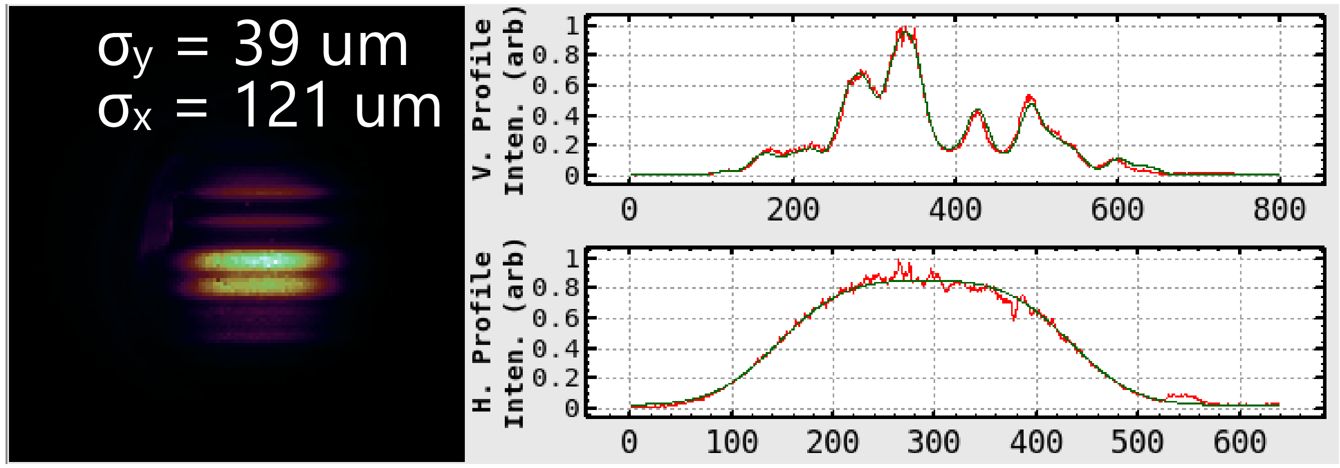
- SuperKEKBではこれまで100um厚を使用。
- ちなみに50um厚も持っているが扱いが大変なので未使用のまま。

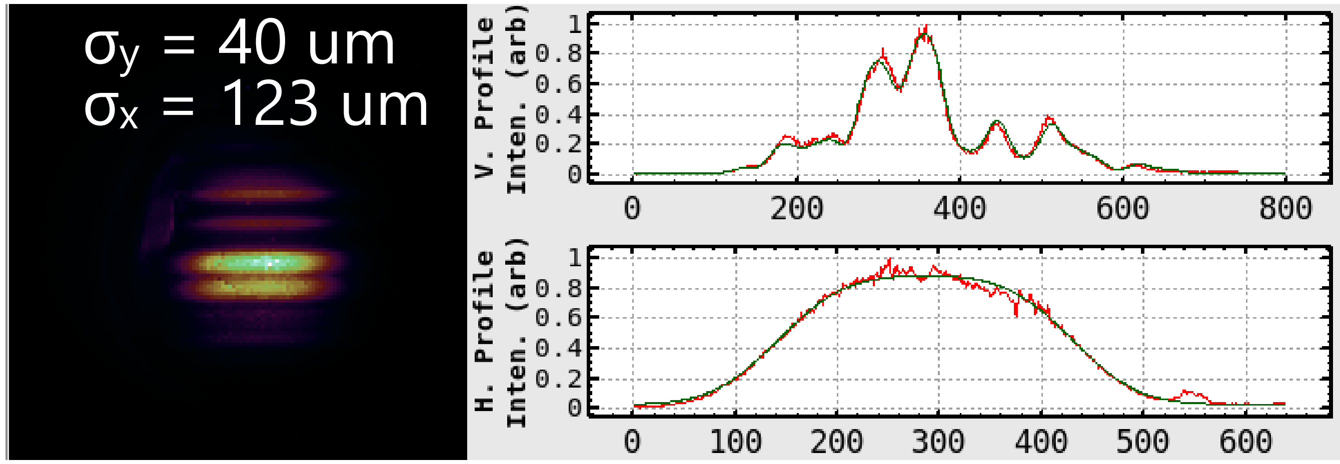
実際のデータ (電子リング 7 GeV)

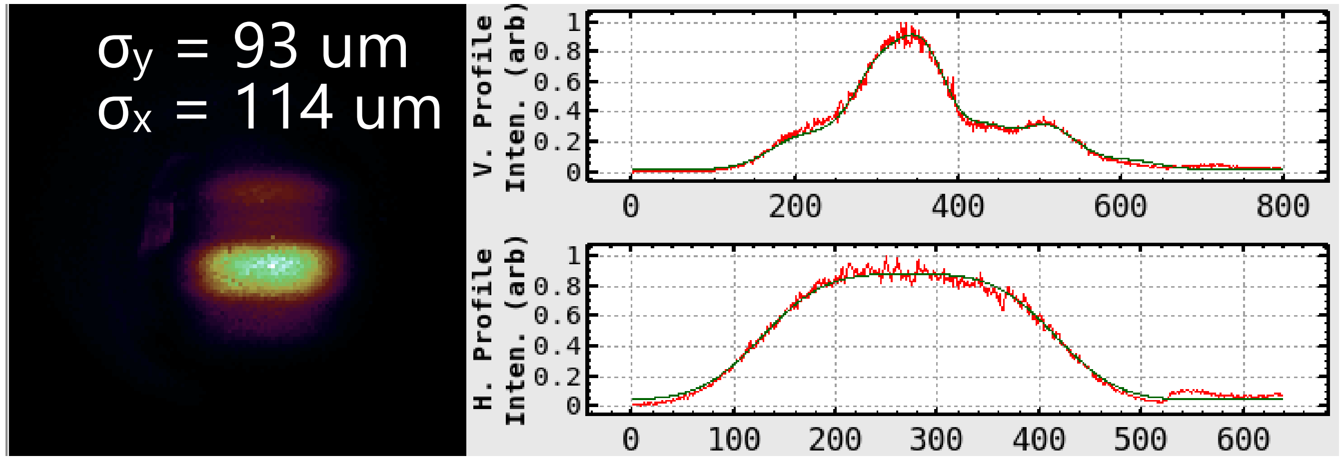
谷の深さと細かい凸凹に着目







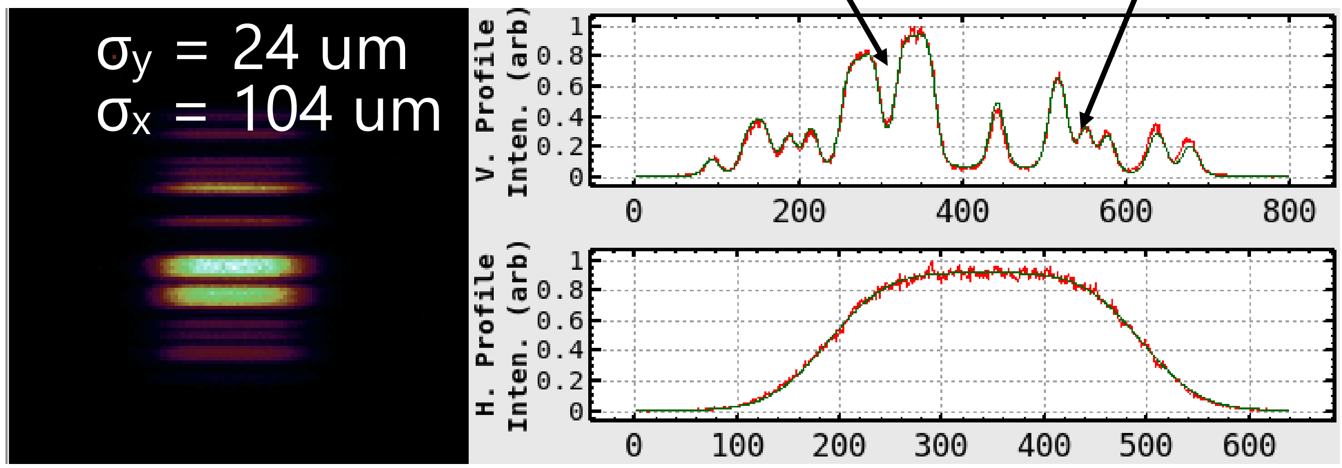


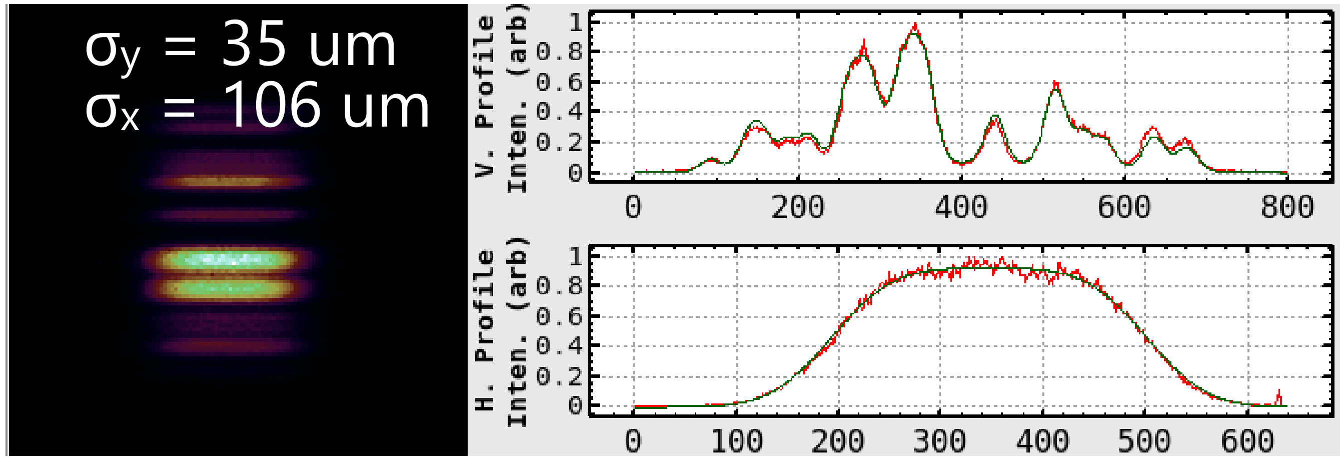


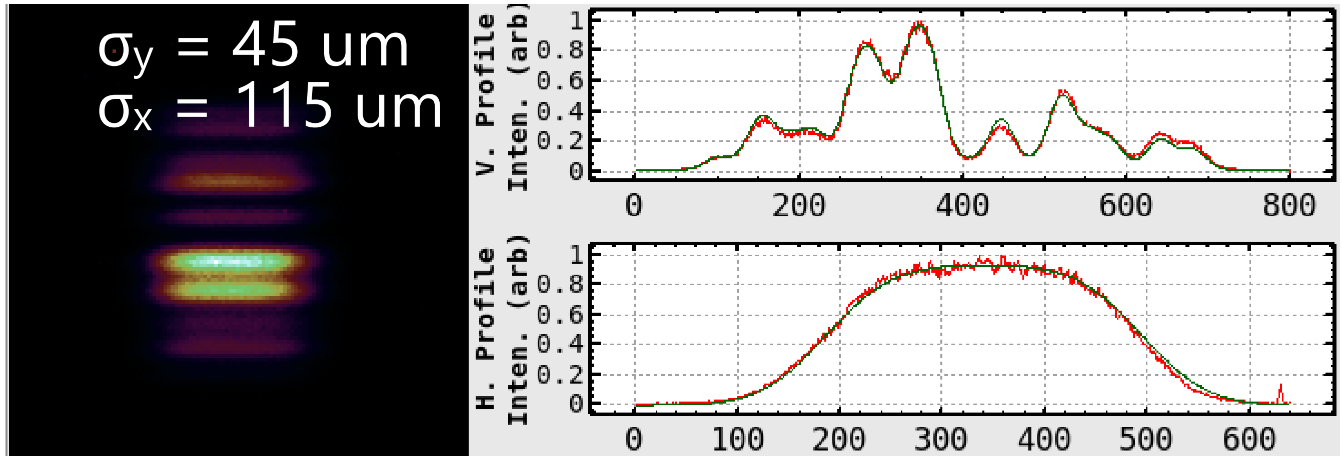
赤：データ
黒：ベストフィット

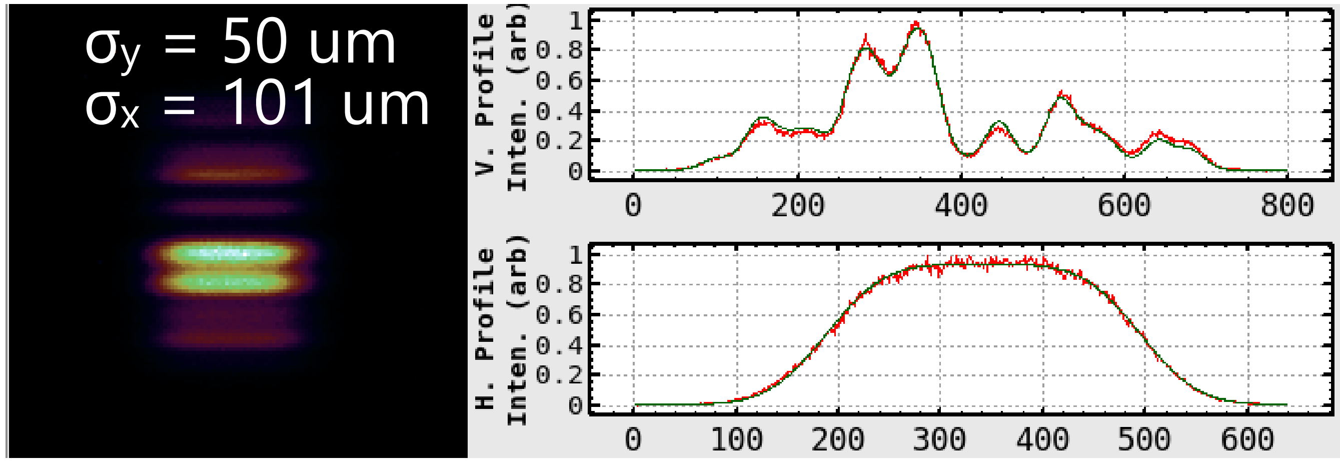
実際のデータ (陽電子リング 4 GeV)

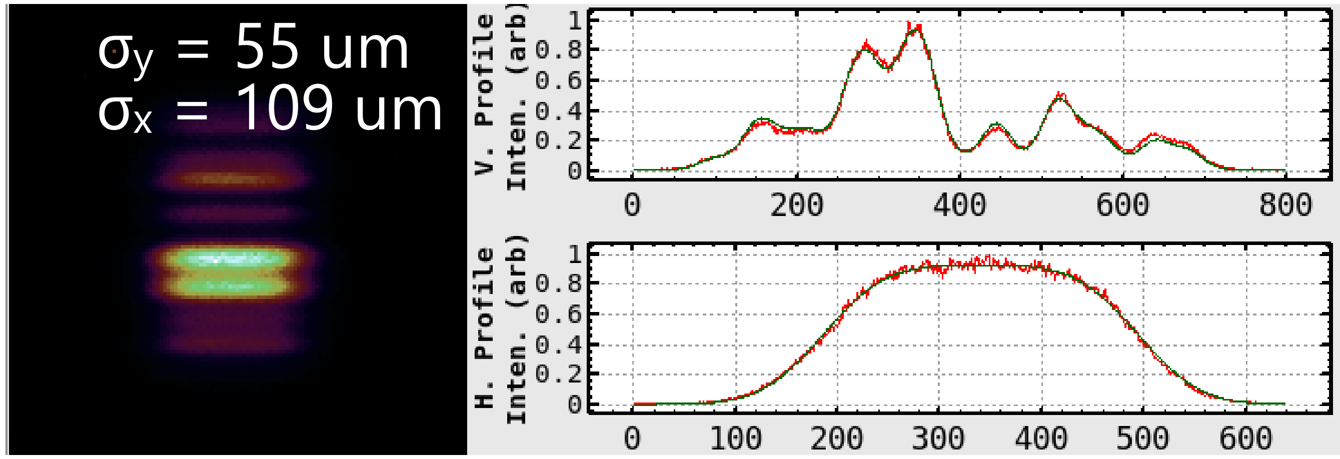
谷の深さと細かい凸凹に着目





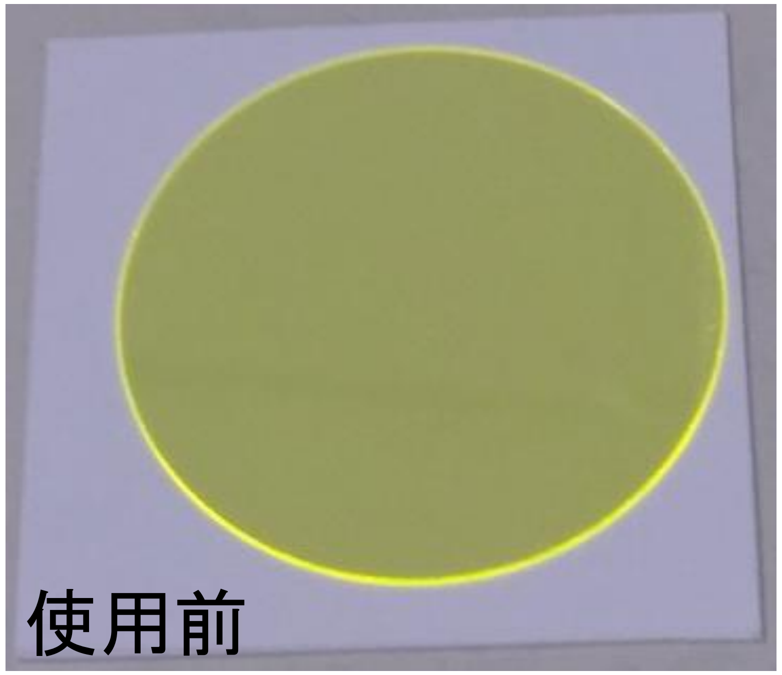


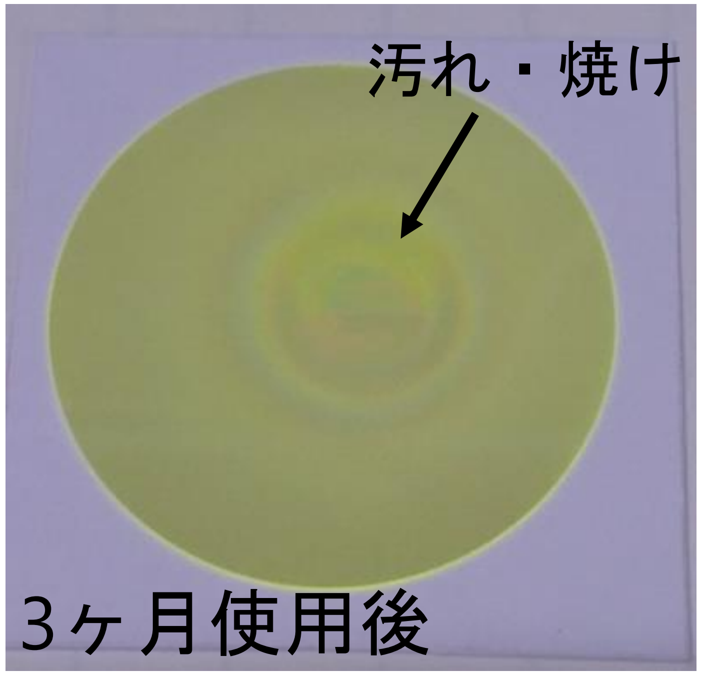


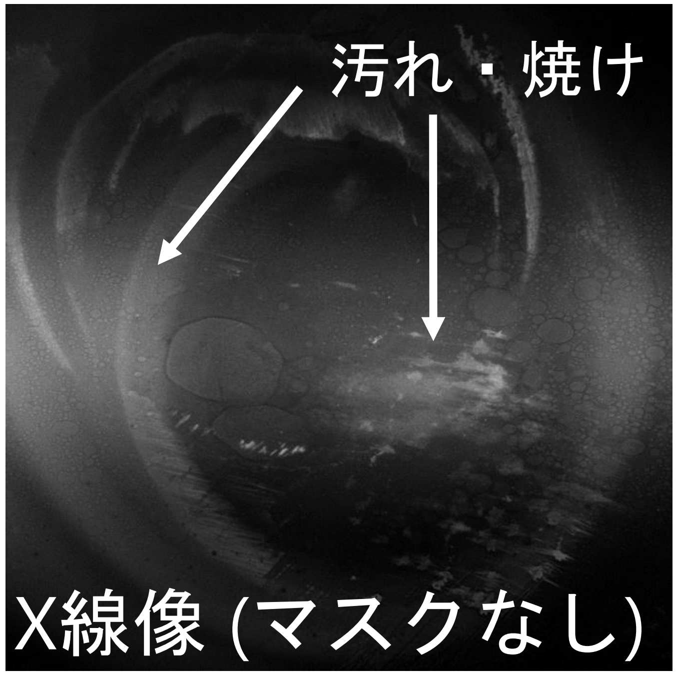


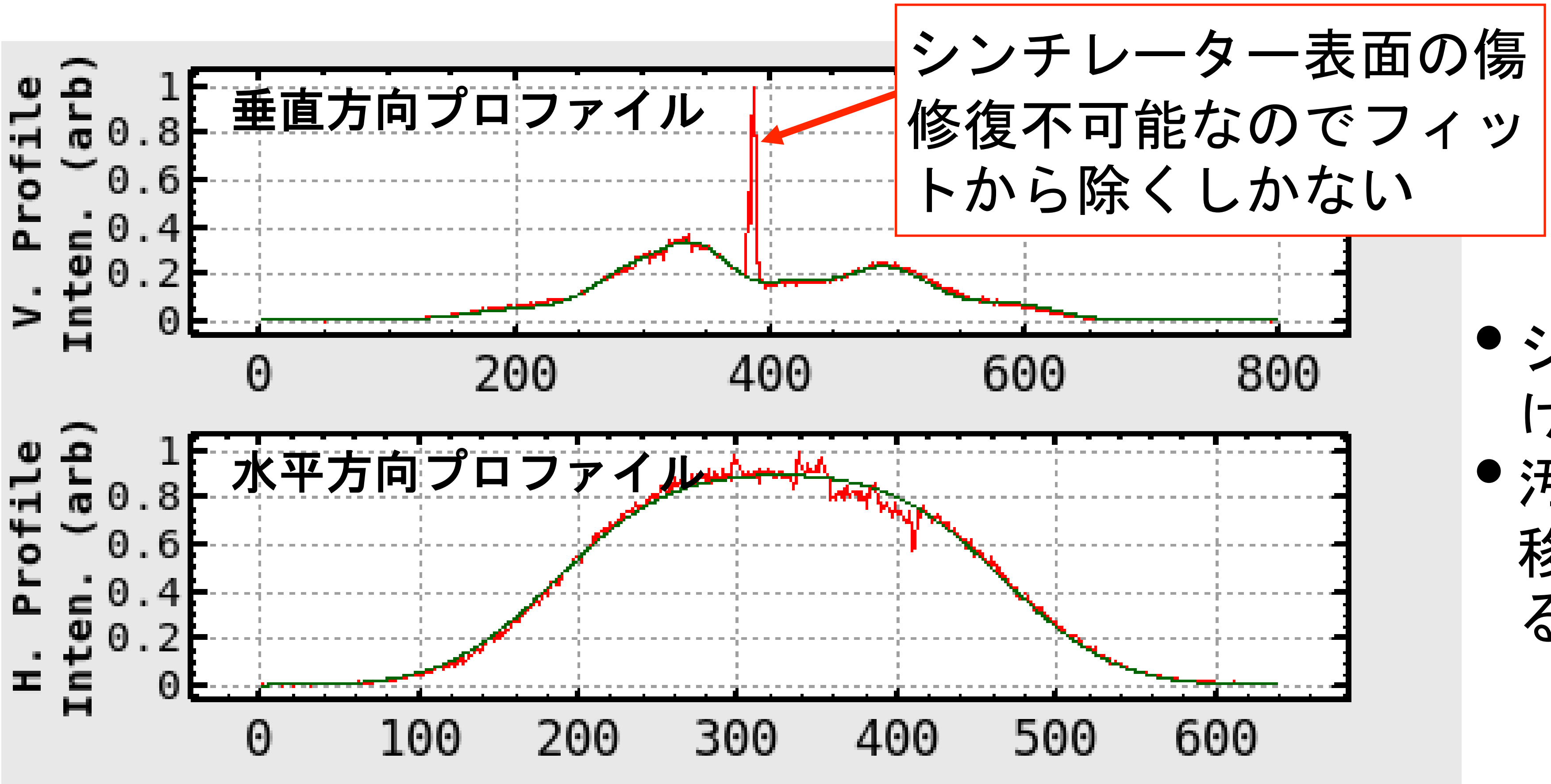
赤：データ
黒：ベストフィット

シンチレーターの汚れの影響



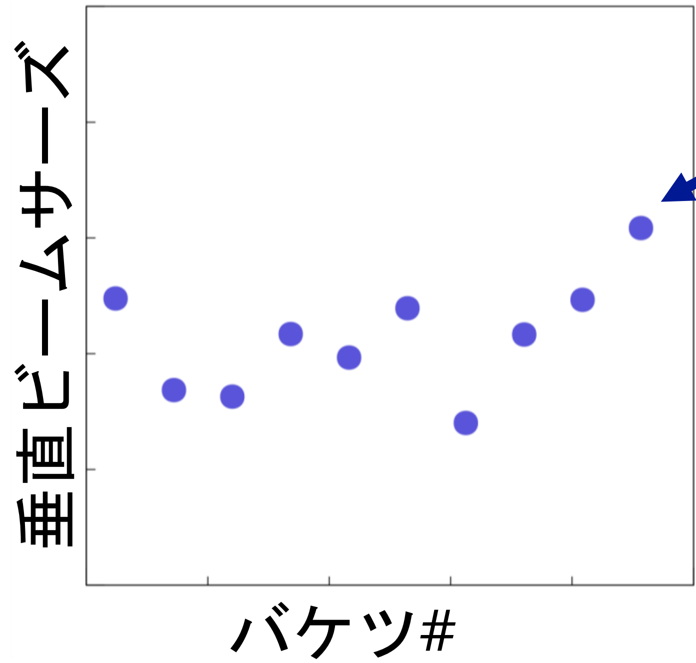






- シンチレーター表面の汚れ・焼け・傷は基本的に治らない。
- 汚くない場所にX線を当てる様移動するか、ソフト的に対応する他ない。

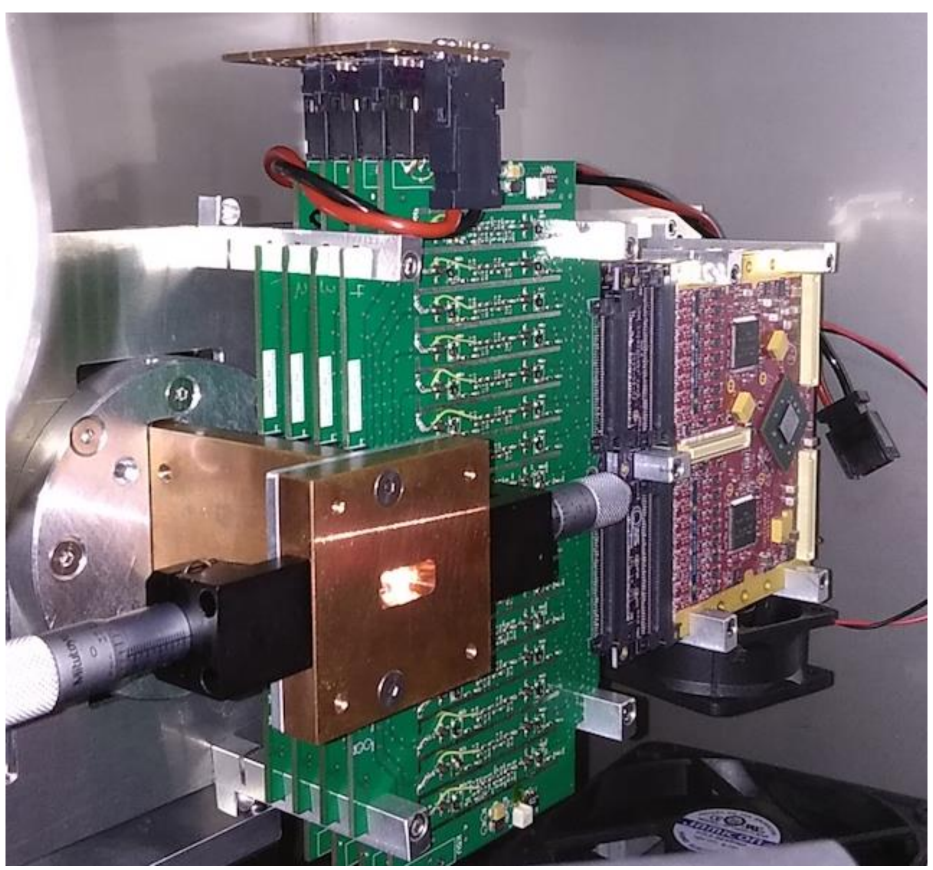
シリコンストリップ検出器 (開発中)



測定したいのはバンチ毎のビームサイズ
(電子雲等によるビーム不安定の研究に有益)

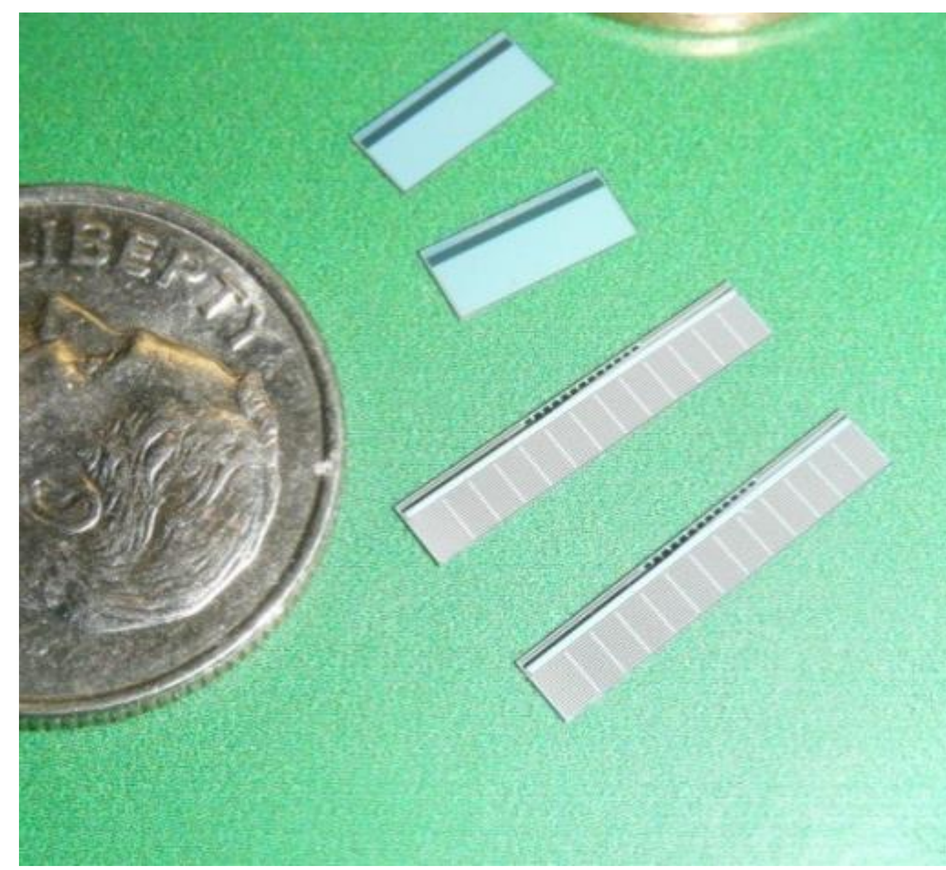
CMOSカメラで測定できるのは
100 usの積分値 (~10^4バンチ)

高速シリコン検出器



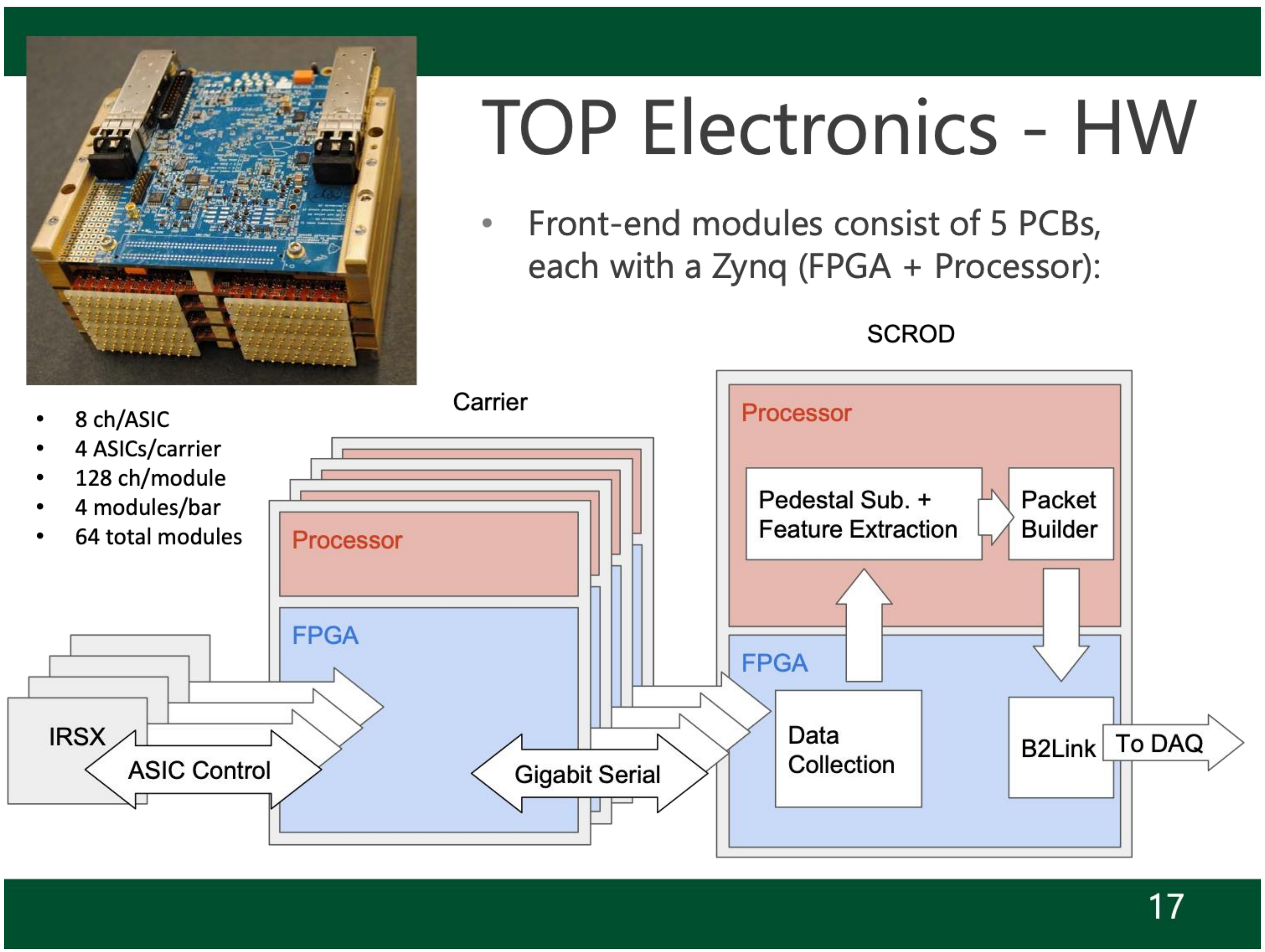
センサーモジュール

シリコンストリップセンサー



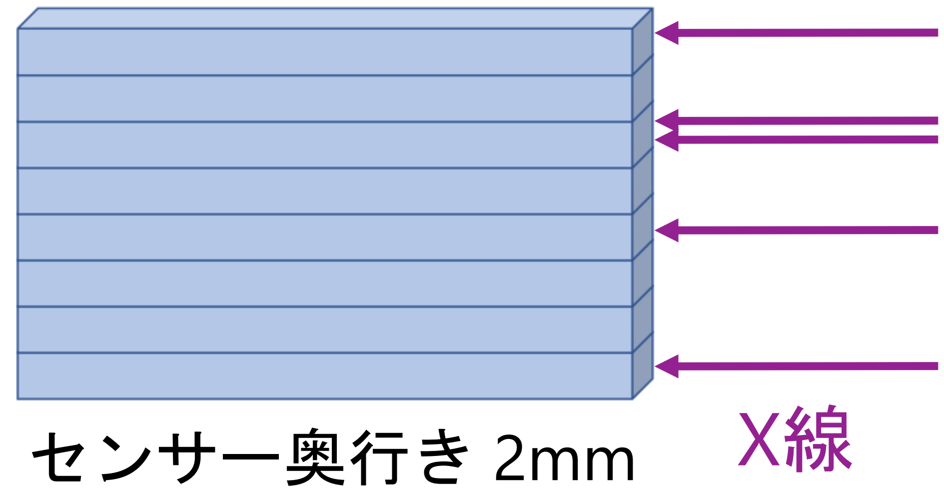
シリコンストリップ検出器 (開発中)

- 高速測定だけなら高速ゲートカメラでも良いが...
- 放射線環境下での長期運転を考えると専用回路が必須。
- 光モニター用回路は基本的にBelle II TOP検出器のコピー。



[Nishimura, BPAC 2018]

シリコンストリップセンサー模式図

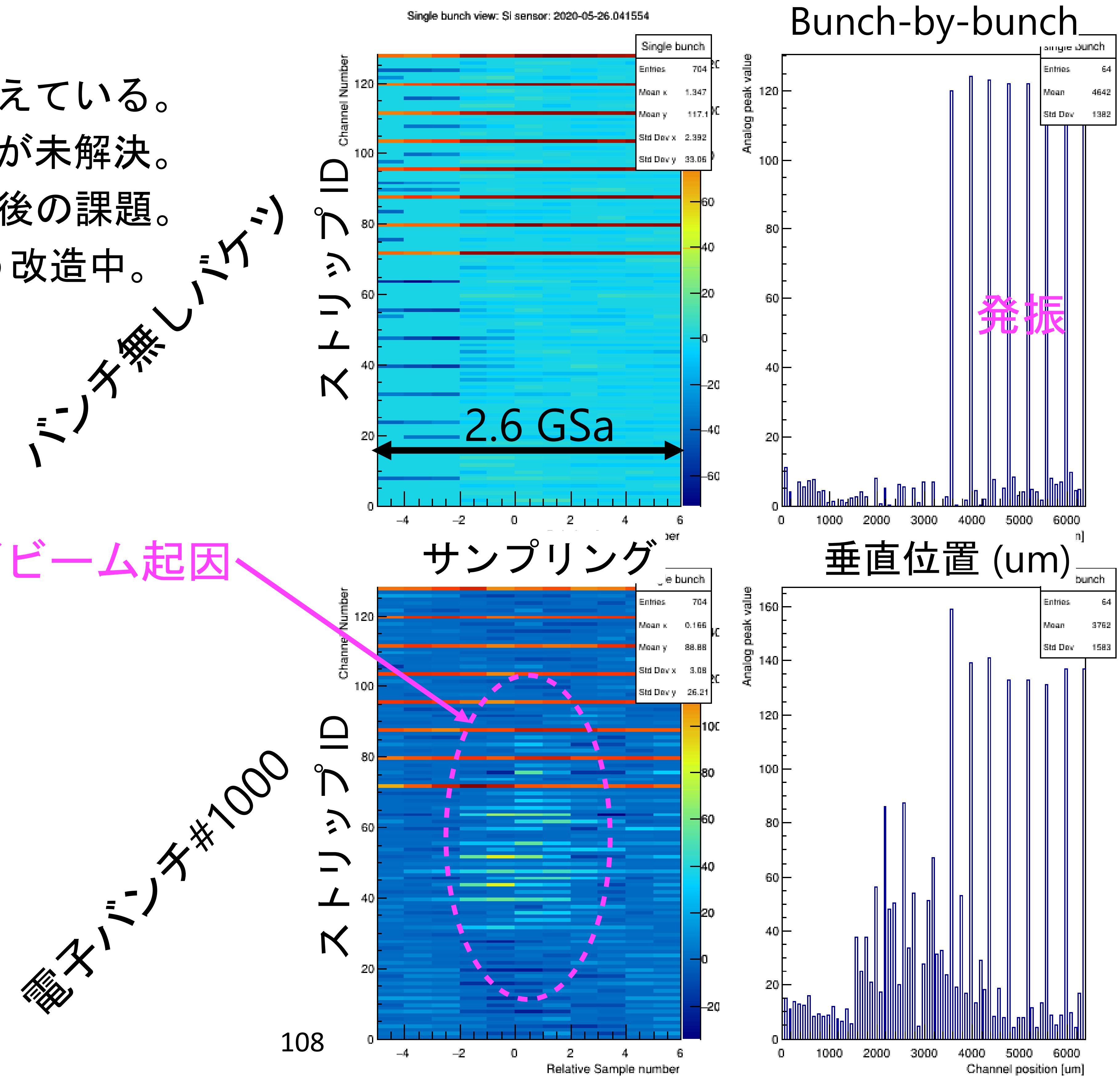


センサー奥行き 2mm
(→ 極力透過させない)
チャンネル幅 50um
全 128チャンネル

- 水平方向には感度がないので水平方向は別検出器で測定する。
- CMOSカメラ(シンチレータ上で10um/pixel x 1000 pixel)と比べると空間分解能は劣る。

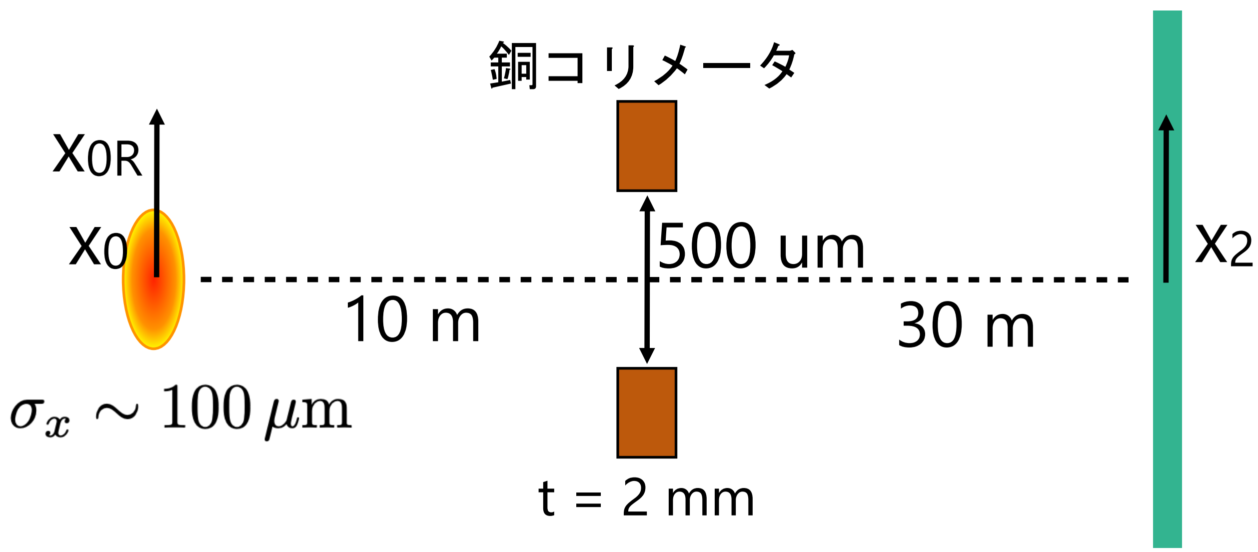
バンチ毎のビームサイズ測定

- ビーム由来の信号を捉えている。
- アナログアンプの発振が未解決。
- ch毎のゲイン校正も今後の課題。
- FPGAで初期解析を行う改造中。



水平方向ビームサイズ測定

水平方向のビームサイズをどうやって測定するか？
(ここでは単純な幾何光学を使って議論)



バンチ内電子の水平方向分布が
ガウス分布$N(x_0, \mu, \sigma)$に従うとすると

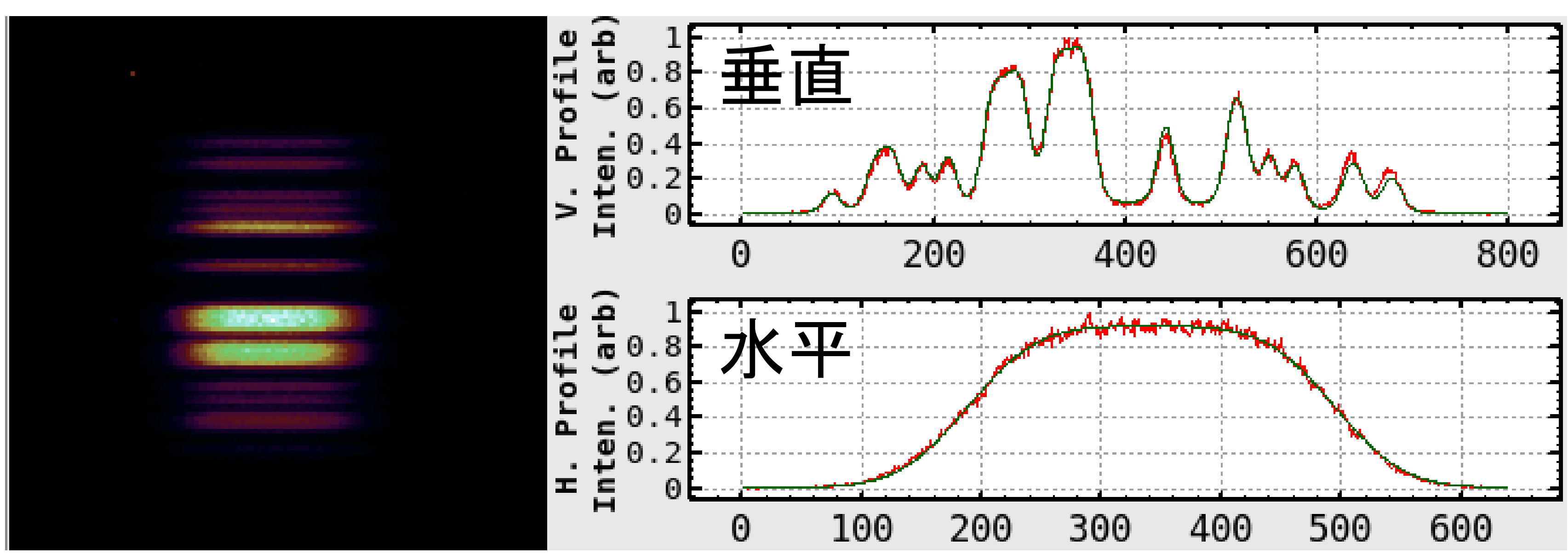
$x_2 \approx 0$ の時

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}(x_0, \mu, \sigma) dx_0 = 1$$

$x_2 \gg 0$ の時

$$I = \int_{-\infty}^{x_{0R}} \mathcal{N}(x_0, \mu, \sigma) dx_0$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 + erf\left(\frac{x_{0R} - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right)$$

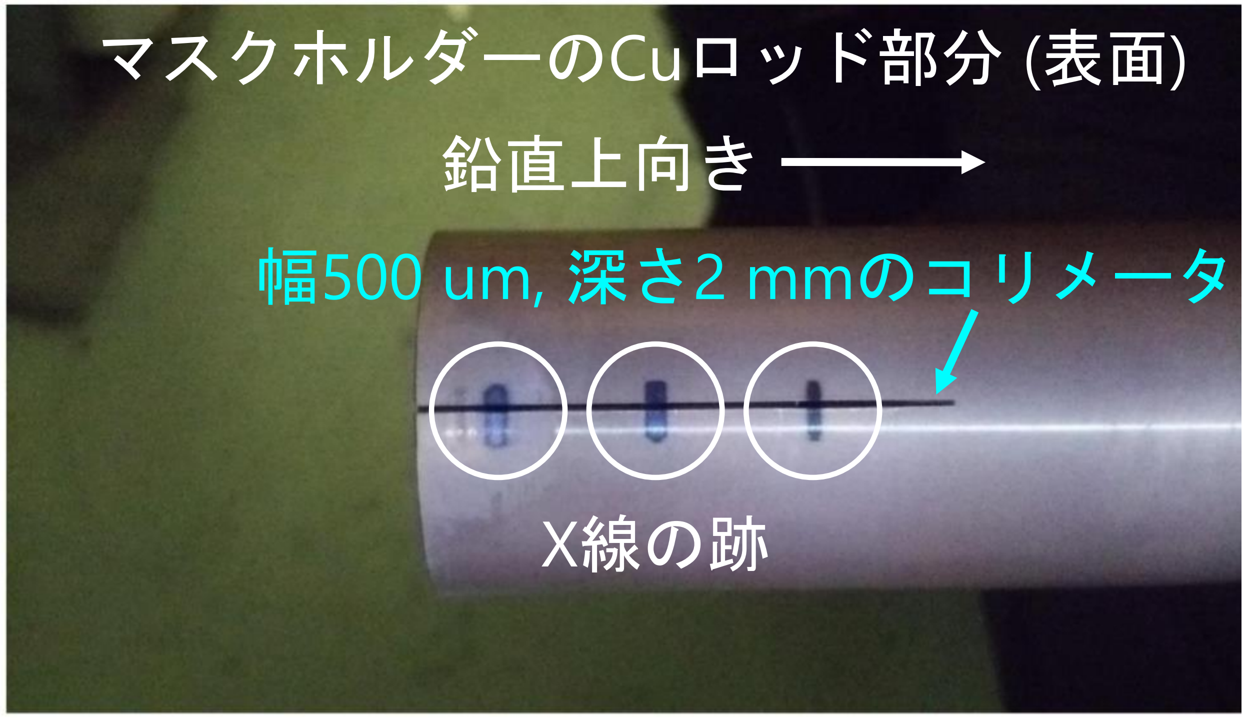
(erf: 誤差関数)



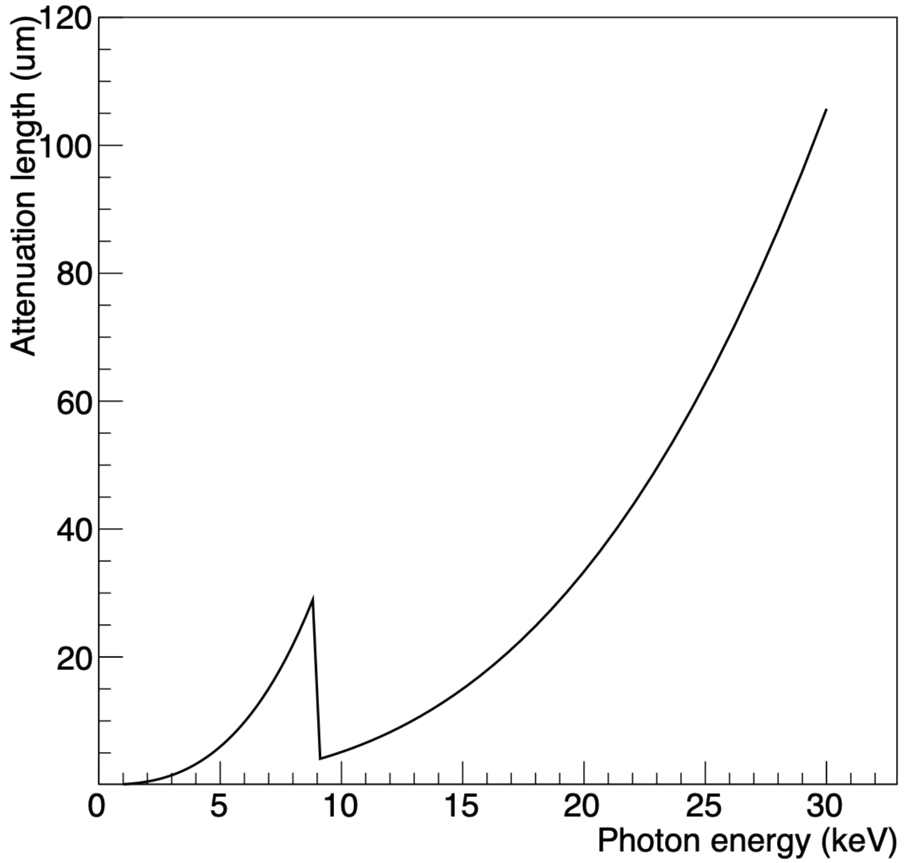
フィット結果からσ_xが求まる
分布がなだらか → σ_x大きい
分布が四角に近い → σ_x小さい

水平方向ビームサイズ測定

SuperKEKB Phase 1 (2016.2 - 2016.6)後のマスクホルダー



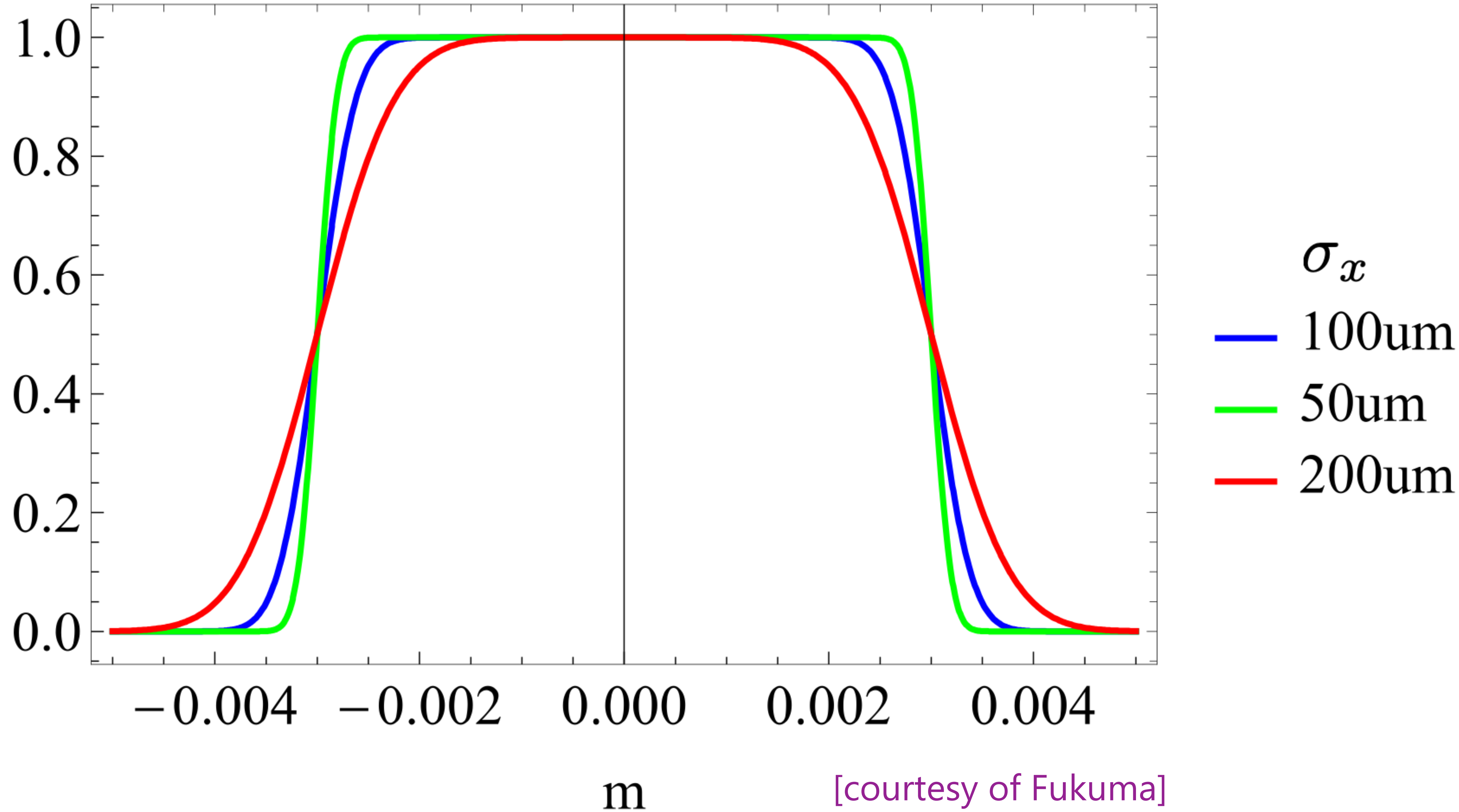
電子は水平方向に偏向されるのでシンクロトロン放射も水平方向に長い分布を持つ



Cuの減衰距離(強度が1/eに落ちる距離)は100 um (ε_{ph} = 30keV)。深さ2 mmのCuならばコリメータに当たったX線はほとんど落とせる。

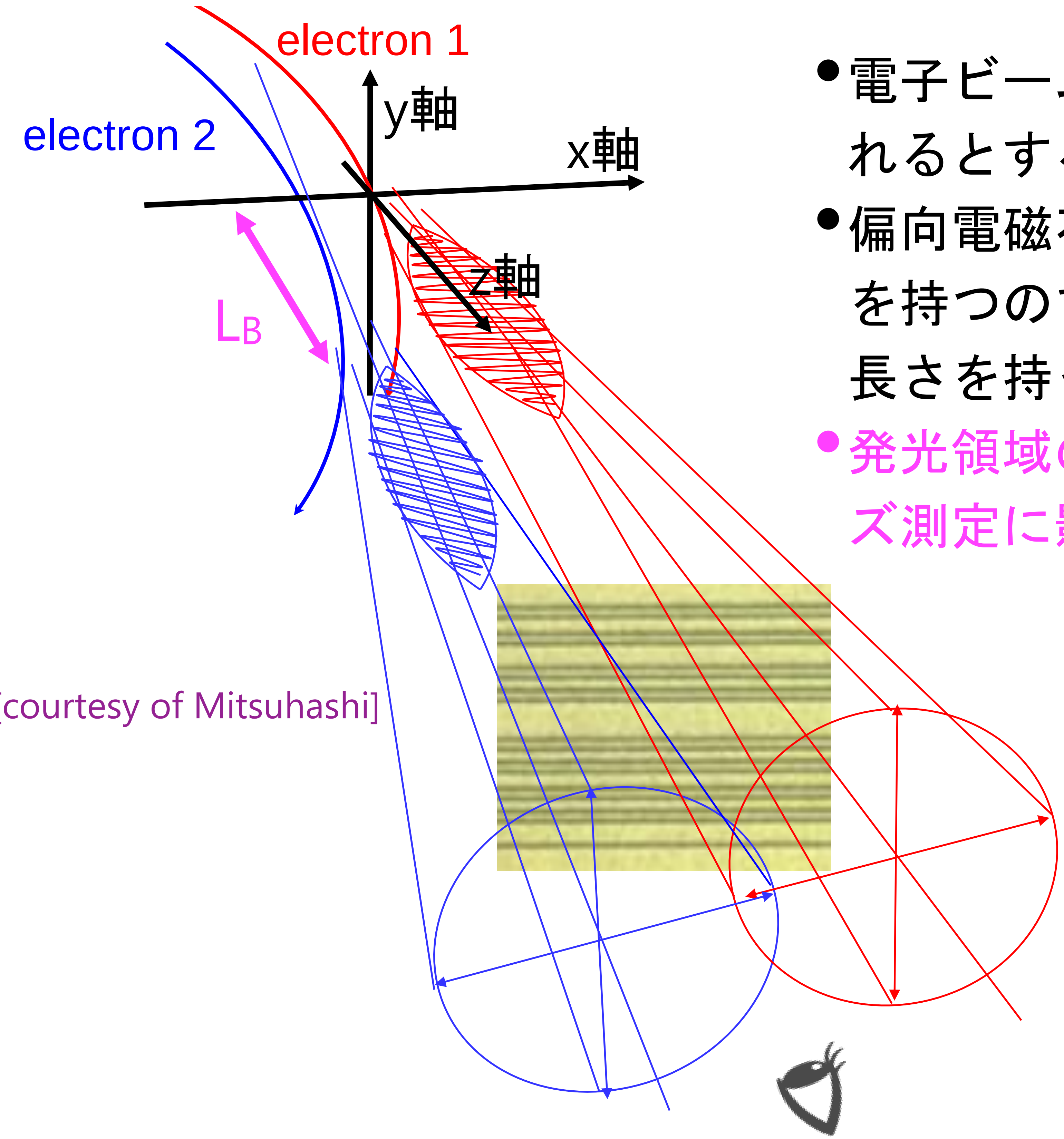
水平方向ビームサイズ測定

3通りのσ_xを想定して計算してみる



[courtesy of Fukuma]

発光地点の奥行きの影響

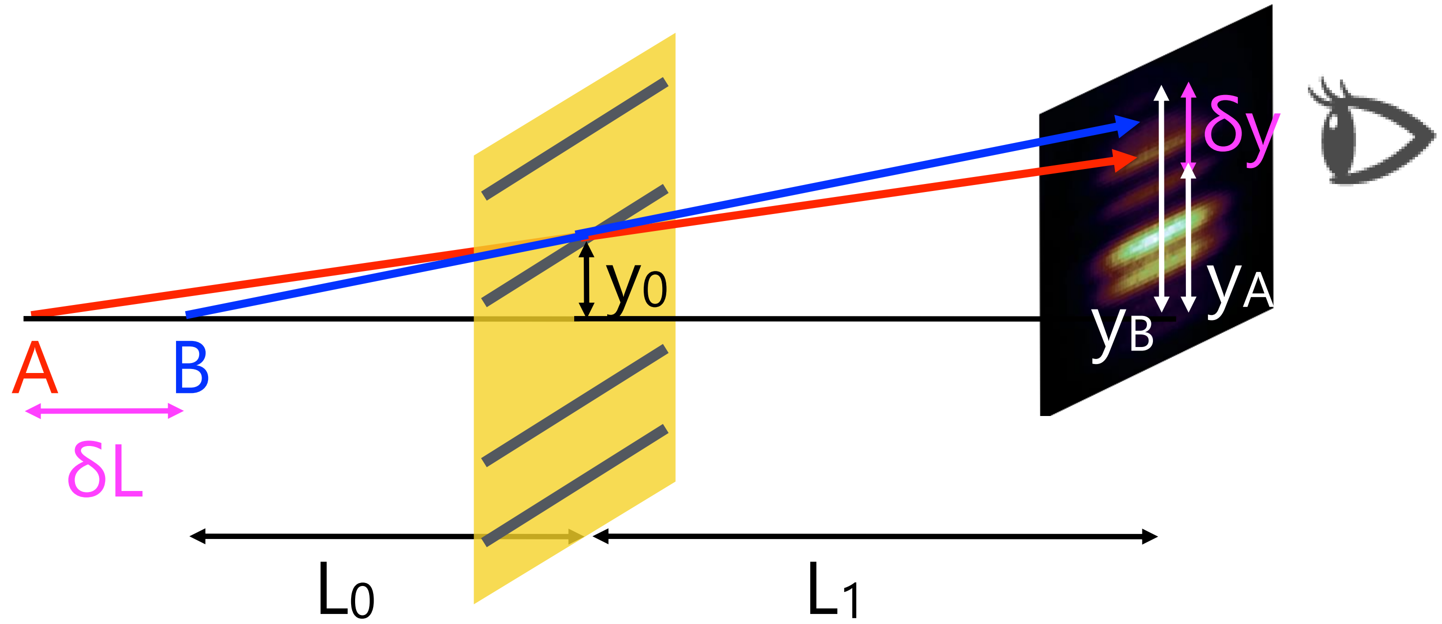


[courtesy of Mitsuhashi]

- 電子ビームの軌道がx-z平面で偏向されるとする。
- 偏向電磁石はz軸方向に有限の長さL_Bを持つので発光点も実際はz軸方向に長さを持った発光領域になる。
- 発光領域の長さδL ($\leqq L_B$)はビームサイズ測定に影響するか？

発光地点の奥行きの影響

まず、右図の状況を想定して
δyとδLの関係を求める。



シンチレーター上では

$$y_A = \frac{y_0}{L_0 + \delta L}(L_0 + \delta L + L_1)$$

$$y_B = \frac{y_0}{L_0}(L_0 + L_1)$$

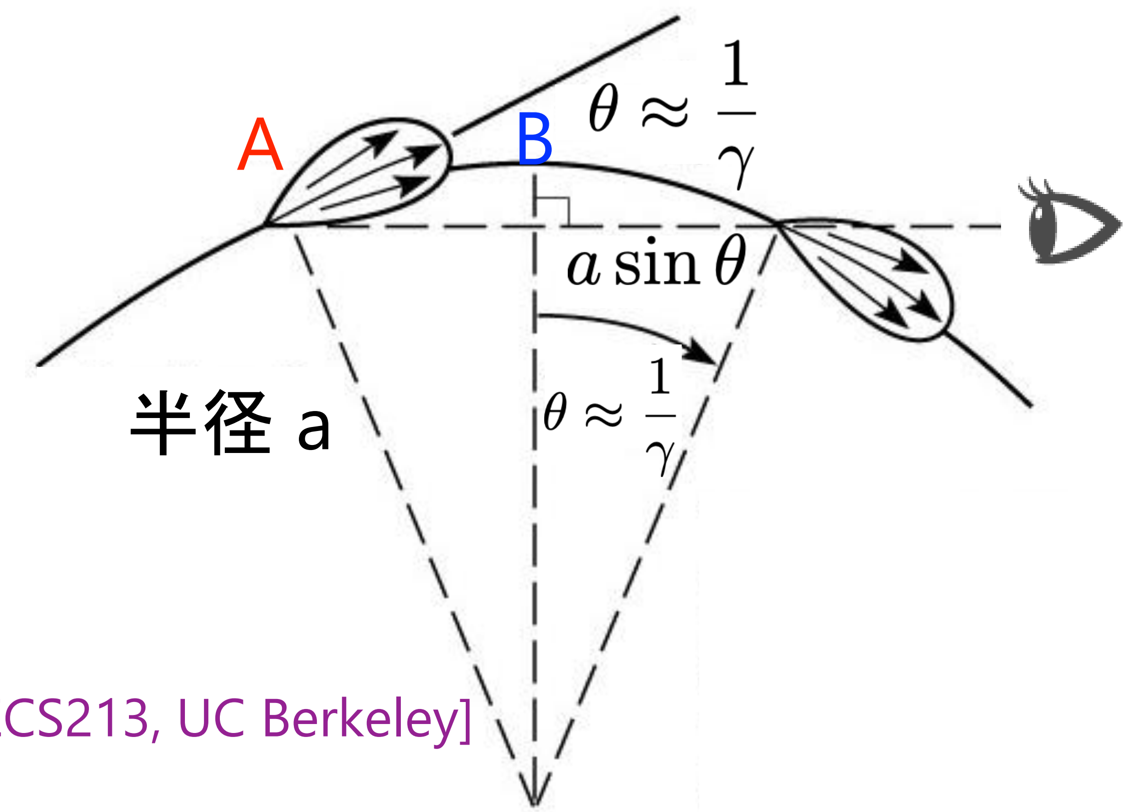
なので

$$\delta y = y_B - y_A$$

$$= y_0\left(1 + \frac{L_1}{L_0}\right) - y_0\left(1 + \frac{L_1}{L_0 + \delta L}\right)$$

$$\boxed{\approx y_0\frac{L_1 \delta L}{L_0^2}}$$

が得られる。右図を思い出して



[Attwood,
AST210/EECS213, UC Berkeley]

$$\delta L = a\sin\theta \approx a/\gamma$$

と置いても良いが、折角なので波長依存性を見てみる。

水平方向広がり角の波長依存性

一般化した計算 (角度に制限なし)

[Mitsuhashi et al., IBIC 2017, WEPCC09]

水平方向の角度：ξ
垂直方向の角度：ψ
また

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega}=\frac{e^2}{3\pi^2 c}\left(\frac{\omega\rho}{c}\right)^2\left(\frac{1}{\gamma^2}+\psi^2+\xi^2\right)^2\left[K_{2/3}^2(\zeta)+\frac{\psi^2}{\frac{1}{\gamma^2}+\psi^2+\xi^2}K_{1/3}^2(\zeta)\right]$$

$$\zeta=\frac{\omega\rho}{3c}\left(\frac{1}{\gamma^2}+\psi^2+\xi^2\right)^{3/2}$$

と置いた

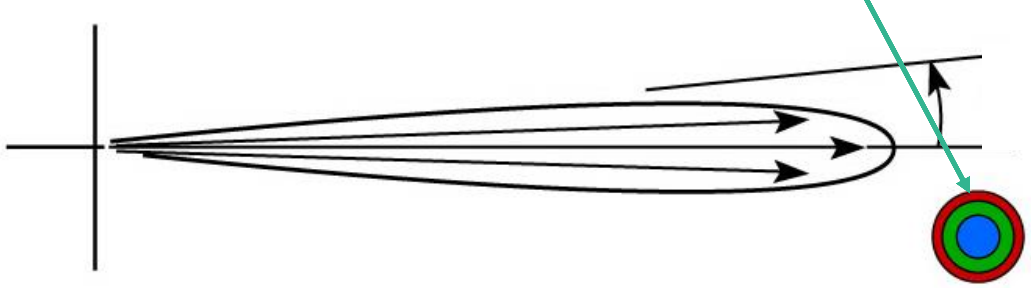
上式を使うと水平方向の角度ξの平均は

$$\langle\gamma^2\xi^2\rangle=\frac{\int_0^\infty \gamma^2\xi^2(d^2I/(d\omega d\Omega))d\psi}{\int_0^\infty (d^2I/(d\omega d\Omega))d\psi}$$

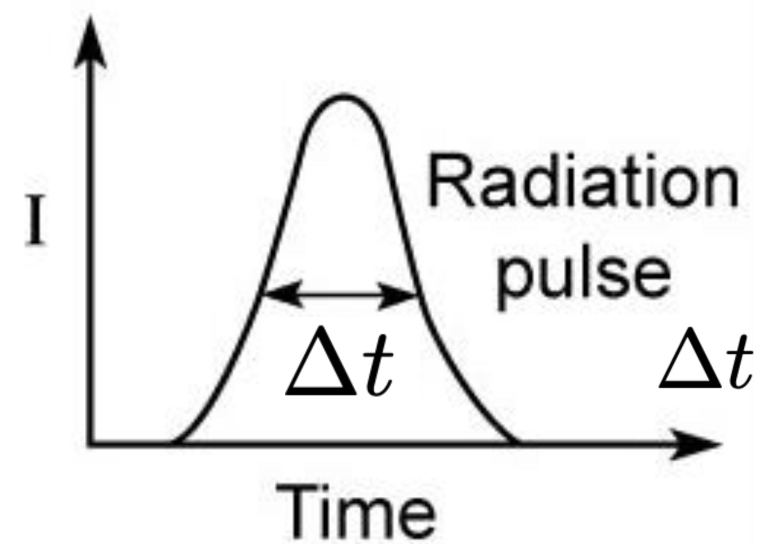
$$\boxed{\langle\xi\rangle\sim 0.41\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1/3}}$$

と得られる。

波長が長いと広がり角が大きい



[Attwood, AST210/EECS213, UC Berkeley]



$$\Delta t\approx\frac{3}{2\omega_0\gamma^3}$$

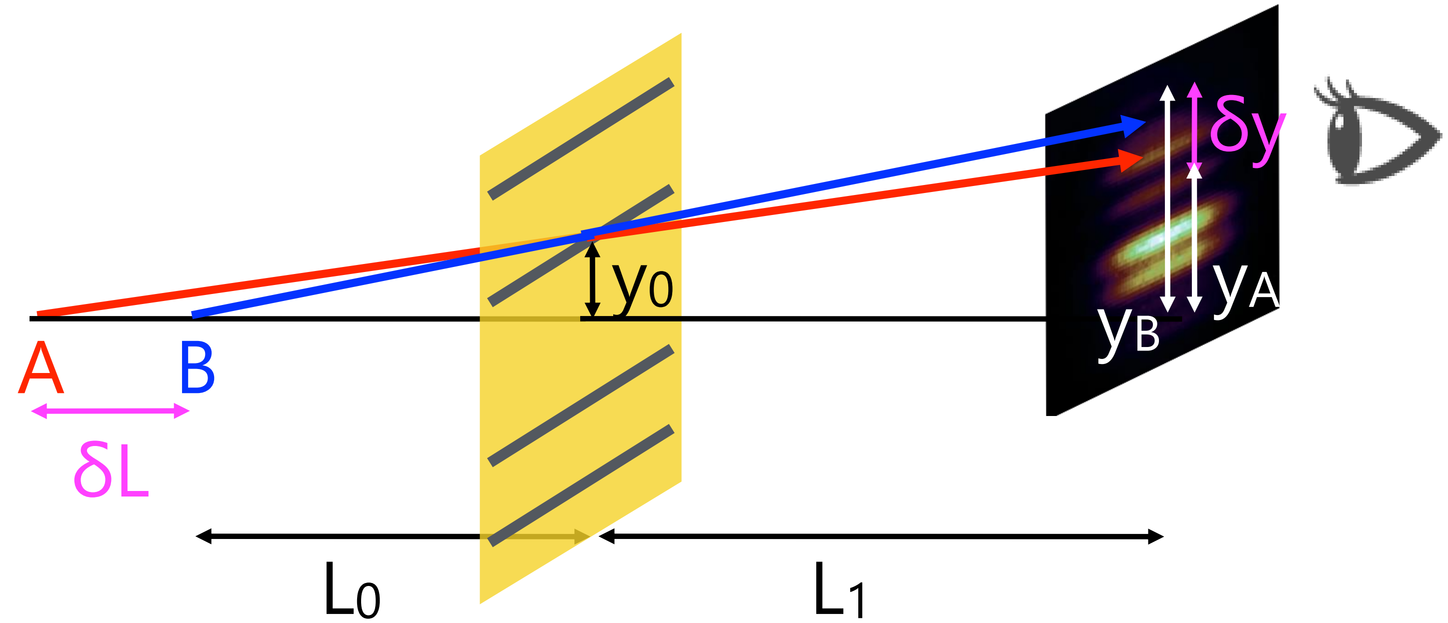
$\lambda\approx c\Delta t$

$a=c/\omega_0$を代入すると確かに

$\langle\xi\rangle\sim 1/\gamma$ という(波長依存を無視した)関係が得られる。

SuperKEKBでの発光地点の奥行きの影響

$$\delta L = a\sin\langle\xi\rangle \sim 0.41a\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1/3}$$



光子エネルギー1 KeVの時は

$$\lambda = 12.4\,\text{Å} = 12.4\times10^{-10}\,\mathrm{m}$$

$$a = 100\,\mathrm{m}$$

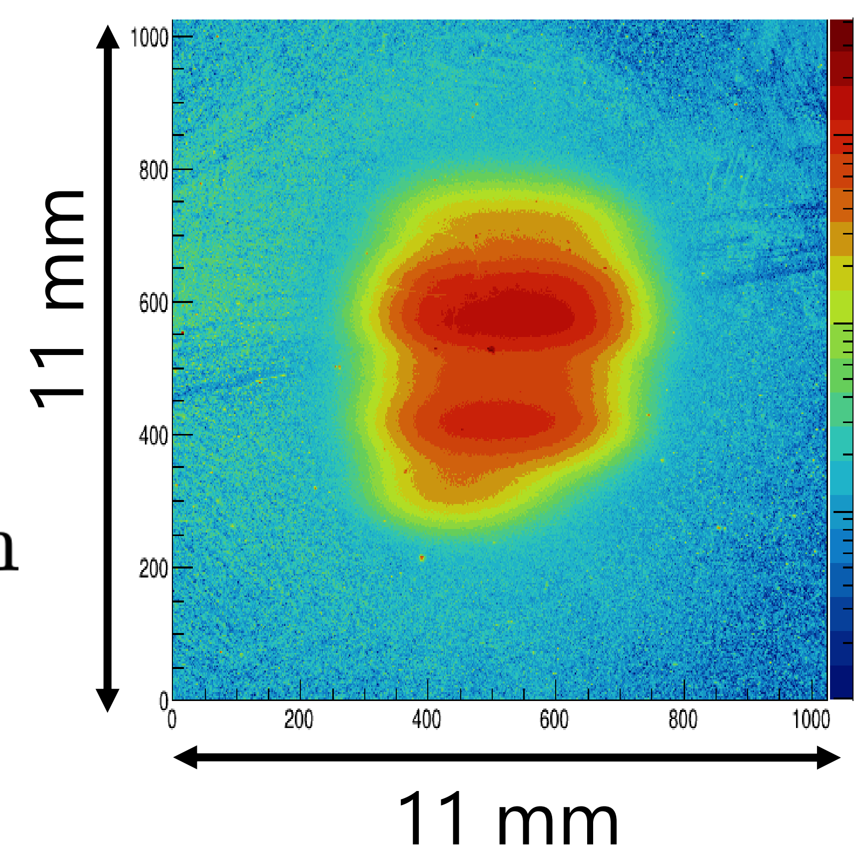
だから

$$\delta L = 9.5\times10^{-3}\,\mathrm{m}$$

$$y_0 \sim 1\,\mathrm{mm}$$

$$L_0 = 10\,\mathrm{m}$$

$L_1 = 30\,\mathrm{m}$ を代入すると $\delta y \approx y_0\dfrac{L_1\delta L}{L_0^2} \sim 3\,\mu\mathrm{m}$

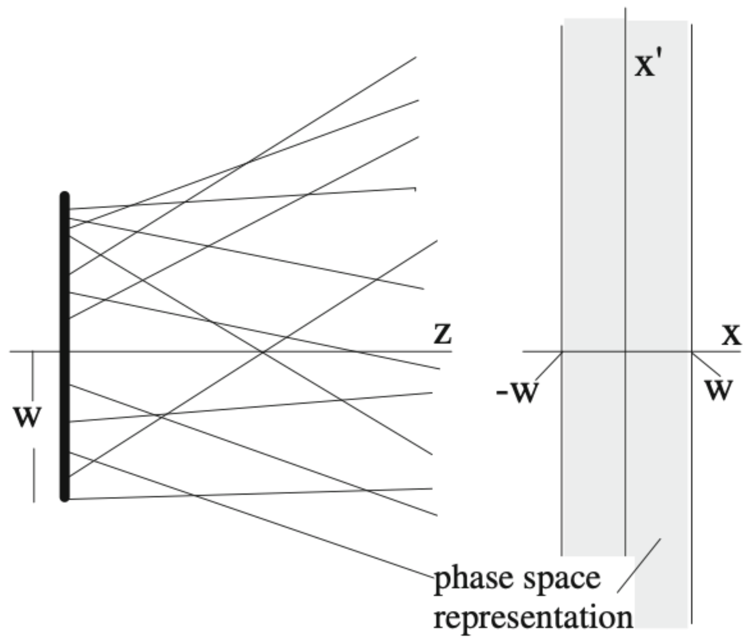


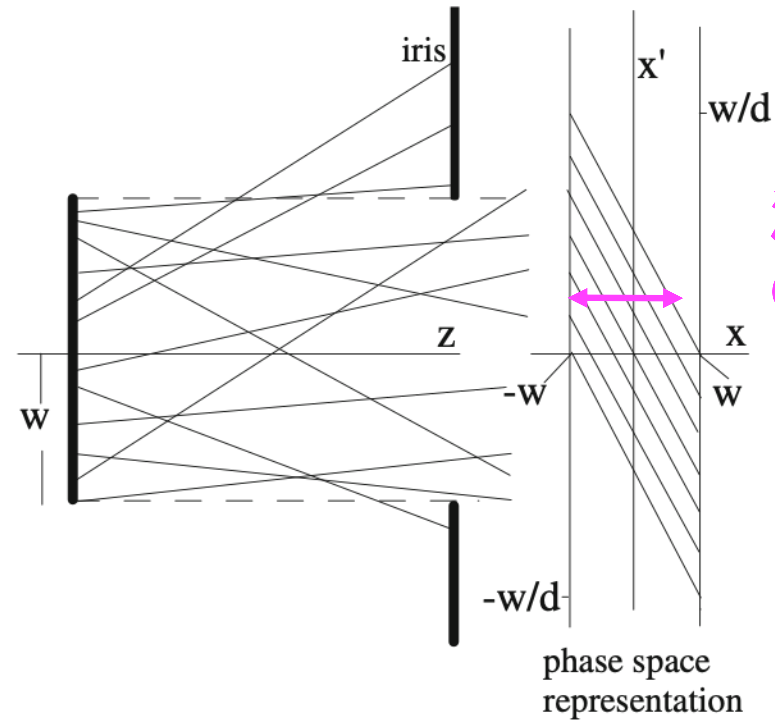
CMOSカメラでシンチレーターを眺めると~10um/pixel

→ 3umの影響は無視できる

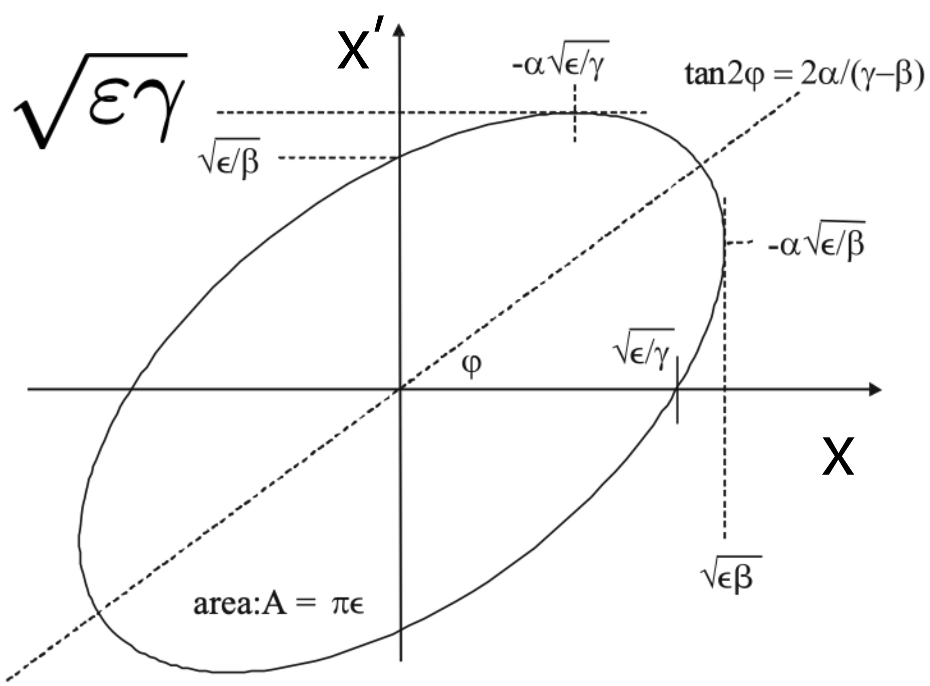
Matching

- これまでの議論ではビームはx-z平面上を運動し、速度のy成分は0と置いてきた。しかし実際はビーム内の荷電粒子は各々有限の角度を持って運動する。
- ビームの空間的な広がりよりもスリットの広がりが大きい必要がある。





測定しているビームサイズが実際の位相空間の一部ではまずい。



ビームの位相空間

x : 粒子分布の空間広がり

x′ : 粒子分布の角度広がり

ε : エミッタンス

α, β, γ : Twissパラメータ

$$\varepsilon = \gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2$$

Matching

SuperKEKBのX線発光点では

$$\alpha = -0.93$$

$$\beta = 28.0\,\mathrm{m}$$

だから

$$\gamma = \frac{1+\alpha^2}{\beta} = 0.036\,/\mathrm{m}$$

エミッタンスはデザイン値(SuperKEKB Phase1)を採用して

$$\varepsilon = 10\,\mathrm{pm}$$

とすれば角度分布の最大値は

$$\sqrt{\varepsilon\gamma} \approx 2 \times 10^{-7}\,\mathrm{rad}$$

これは発光点から40m離れた場所では8 umにしかならない。

SuperKEKB X線モニターはビームの角度広がりもカバーしている。

まとめ

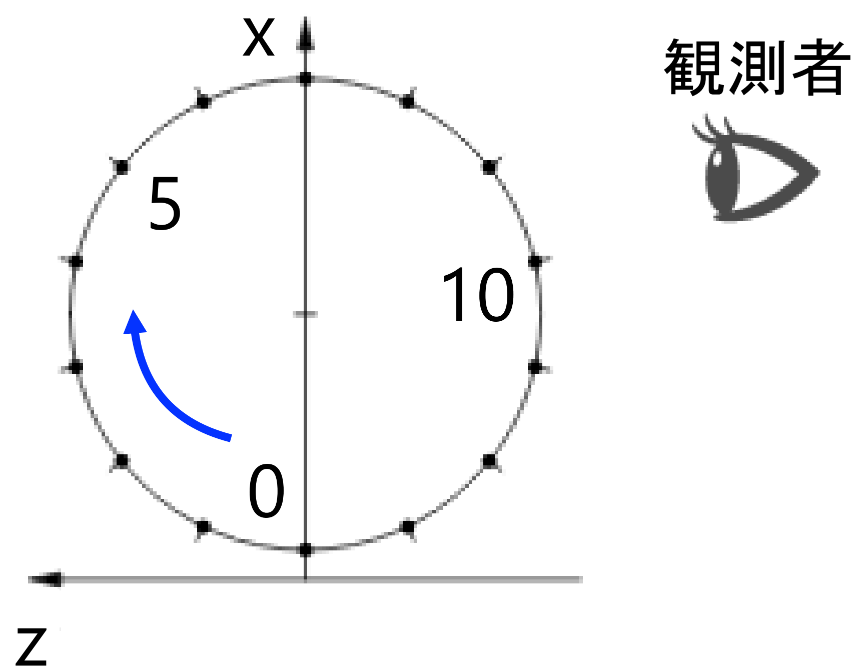
- SuperKEKB X線ビームサイズモニターを題材に光モニターの基礎を学習。
- シンクロトロン放射の放射強度、空間的・時間的な広がりを求めた。
- Kirchhoffの回折公式からFresnel又はFraunhofer回折を導き、光の回折を計算出来るようになった。
- ビームサイズモニターを扱う上での注意点を学んだ。

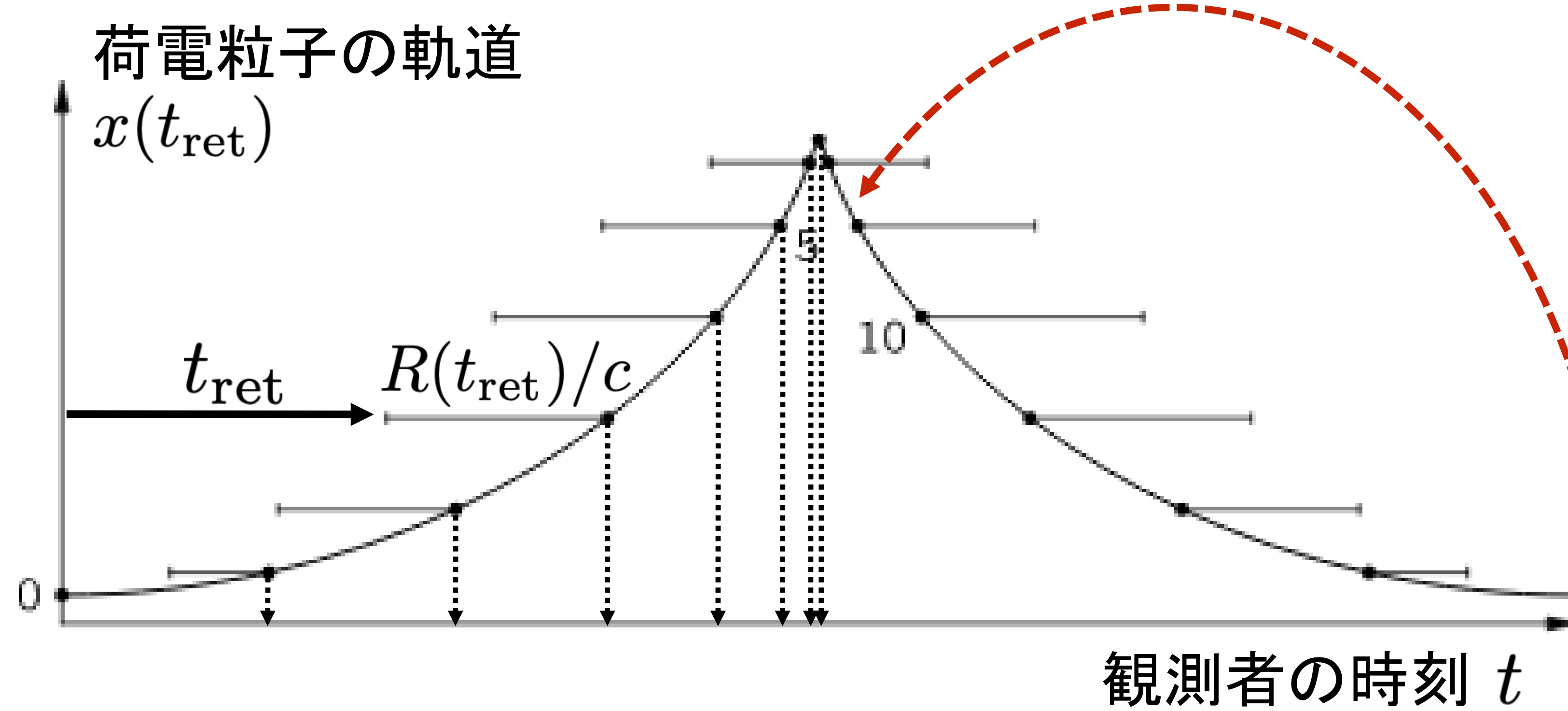
Backup

荷電粒子の軌道と観測者が観測した時刻

$R(t_{\mathrm{ret}}) \approx z(t_{\mathrm{ret}})$の場合の軌道x(tret)と観測された時刻t

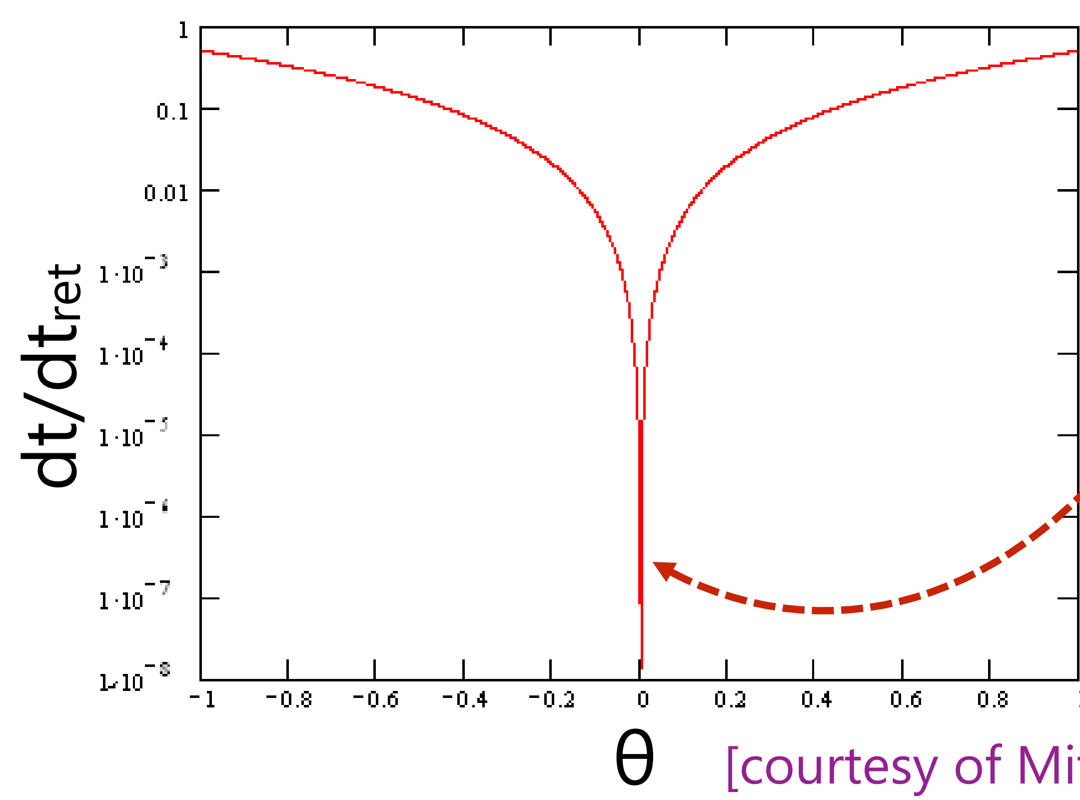
[Feynman, Lectures on Physics (I)]





$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{ret}} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0(t_{\mathrm{ret}})$$
$$t_{\mathrm{ret}} = t - R(t_{\mathrm{ret}})/c$$

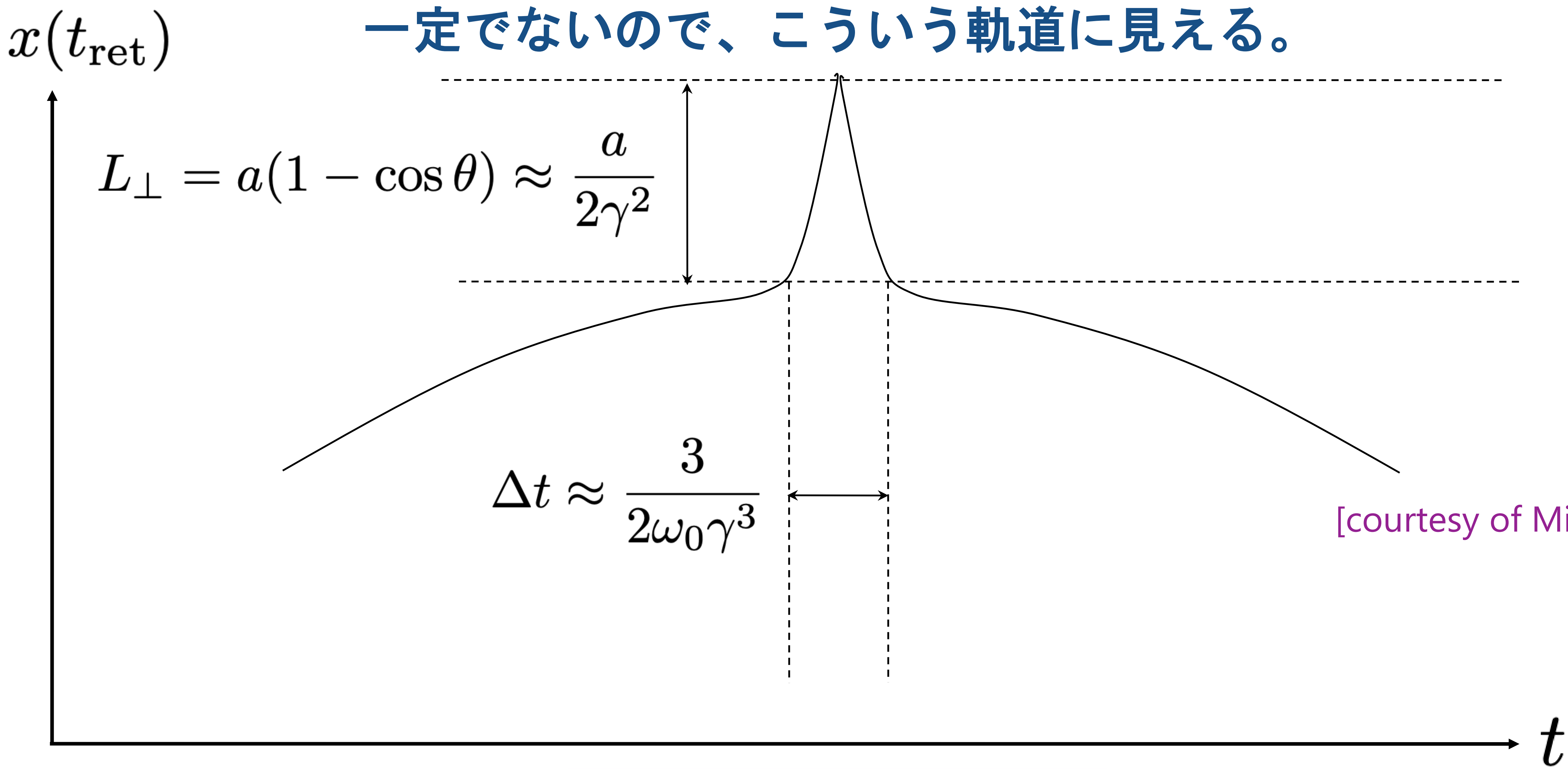
Retarded time (遅延時間、遅れた時間)



[courtesy of Mitsuhashi]

観測者から見た電荷の軌道

観測者に電荷から情報が届くタイミングが一定でないので、こういう軌道に見える。



[courtesy of Mitsuhashi]

$$L_\perp = a(1-\cos\theta) \approx \boxed{\frac{a}{2\gamma^2} = 2.8\times10^{-7}\,\mathrm{m}}$$

注：観測者の方向とx軸は直行するので、ここではDoppler効果は関係ない。