4−1　加速器のビーム調整（下崎）

➡ （前半）ビーム調整のための、ビーム物理の基礎

（後半）電子蓄積リングにおけるビーム調整例

前半の概要:

１　加速器とは

２　なぜ加速器調整が必要か

３　主な加速器の構成機器

４　（ビーム物理に入る前の）予備知識

５　ビーム物理の基礎

- シンクロトロン振動について

- ベータトロン振動について
  - エラーがない場合
  - エラーがある場合

加速器とは

ビームとは：　（ここでは）指向性のある荷電粒子の集団

加速器とは：　ビームを加速する装置

加速器の種類：

静電型加速器：　タンデム型、コッククロフト-ウォルトン型
線形加速器：　RFQ、ドリフトチューブLINAC、
円形加速器：　サイクロトロン、シンクロトロン、蓄積リング、ベータトロン、マイクロトロン　など

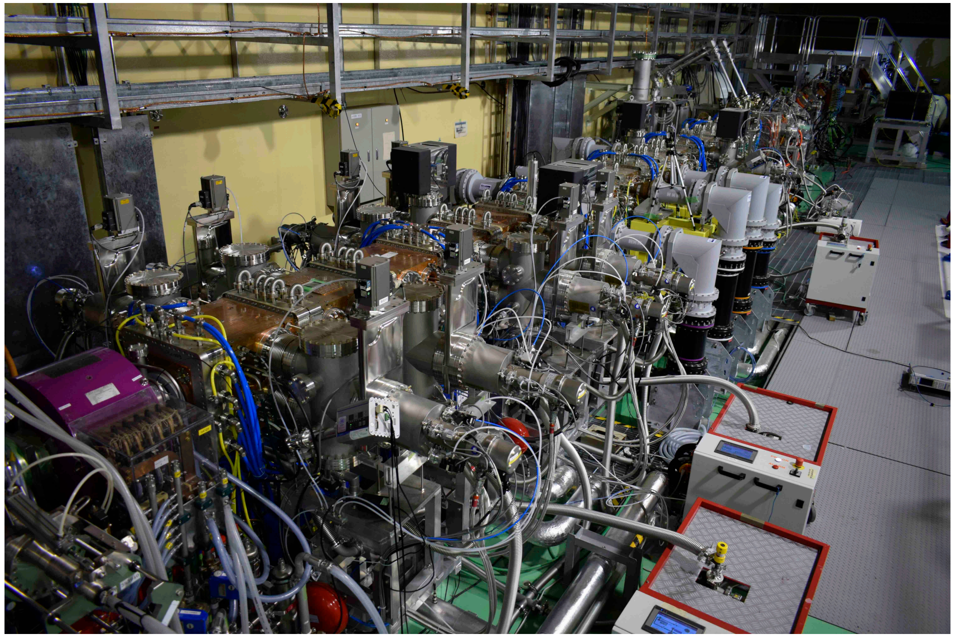
加速器の用途：

・素粒子実験（ニュートリノ振動、ヒッグス）
・原子核実験（ニホニウム）
・癌治療
・2次粒子生成（中性子など）とその利用
・放射光を用いたタンパク質などの構造解析（創薬等）　他

加速器の例

J-PARC

LIPAc @ QST六ヶ所核融合研究所



前半の概要:

1　加速器とは

2　なぜ加速器調整が必要か

3　主な加速器の構成機器

4　（ビーム物理に入る前の）予備知識

5　ビーム物理の基礎

- シンクロトロン振動について

- ベータトロン振動について
  - エラーがない場合
  - エラーがある場合

加速器調整で何をするか

加速器調整で何をするか：

（１）ユーザー実験の条件を変えないために
- ビーム強度の安定化
- ビーム軌道の安定化
- ビーム形状の安定化

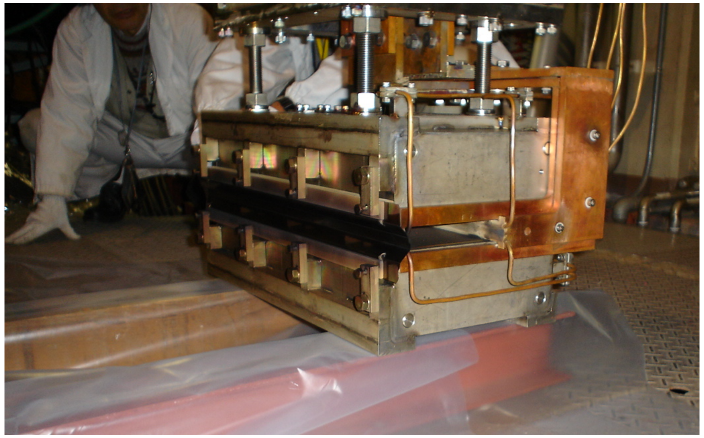
などを行う（ビームの再現性）。

（２）ビームロスは
- 機器の故障
- 機器の放射化

を招くので、
- ビームロスの抑制
- ビームロス発生箇所の局所化

などを行う。

故障した
「放射化した取出セプタム磁石」



（３）加速器の高度化に向けた試験を行う。
- ビームサイズの低減や成形
- ビーム電流の増強
- 運転経費の低減
- 「故障による運転停止時間」の低減　など

ビーム軌道安定化の必要性

M. Takao, T. Shimada, EPAC2000, pp.1572

（例）・気温変化や潮汐による地面の膨張•収縮
・地盤の沈下や隆起

→　加速器の周長が変わる。

→　ビームの軌道やビームのエネルギーが変わる。

→　（ユーザー視点）放射光の出射される位置や放射光のエネルギーが変化するのは、ユーザー実験にとって嬉しくない。

（加速器側視点）ビームや放射光が、装置の予期せぬ所に当たると、装置が壊れるかもしれないので嬉しくない。

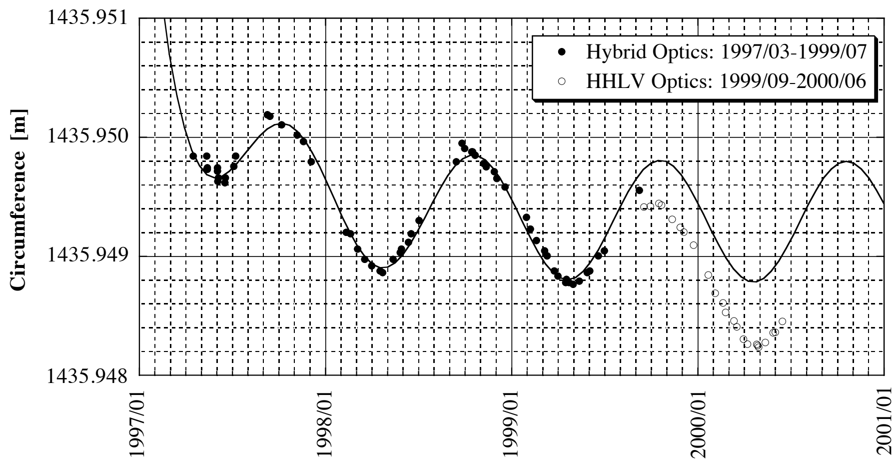


Figure 3: Long term variation of the circumference of the SPring-8 storage ring. The solid line is the expected circumference change from the seasonal temperature variation and the shrinkage of the concrete foundation.

→　定期的にビーム軌道やビームエネルギーの監視、補正を行う 。

前半の概要:

１　加速器とは

２　なぜ加速器調整が必要か

３　主な加速器の構成機器

４　（ビーム物理に入る前の）予備知識

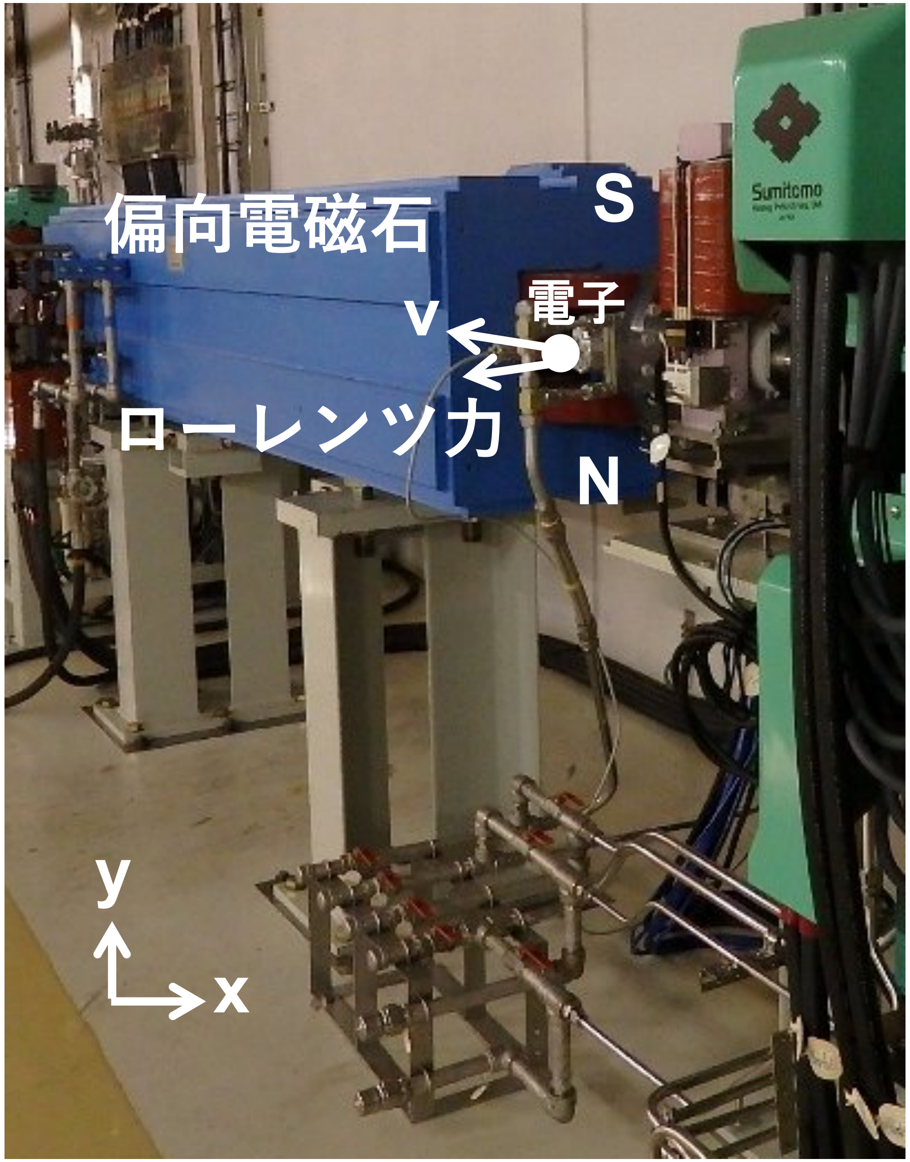
５　ビーム物理の基礎

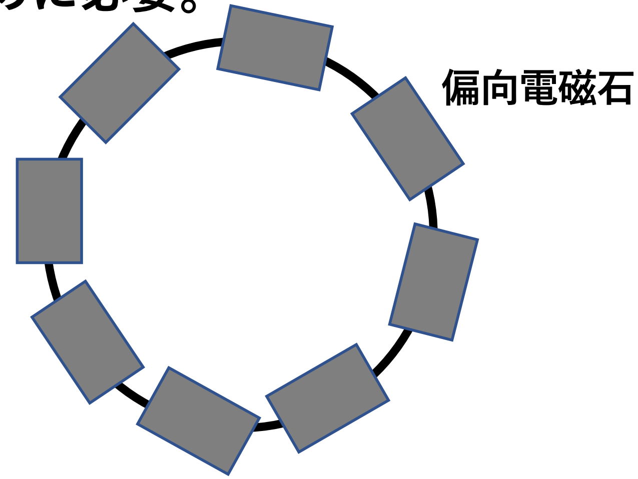
- シンクロトロン振動について

- ベータトロン振動について
  - エラーがない場合
  - エラーがある場合

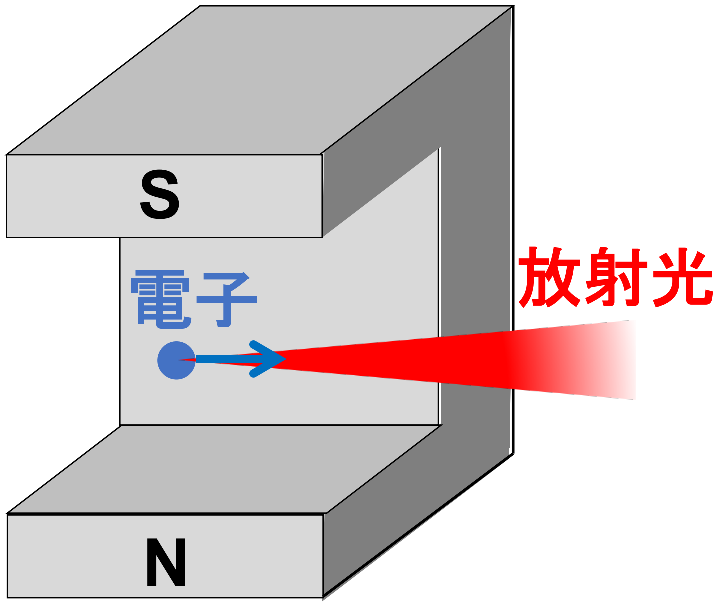
偏向電磁石

・いわゆる双極電磁石。
・円形加速器ではローレンツ力でビームの軌道を曲げるために必要。





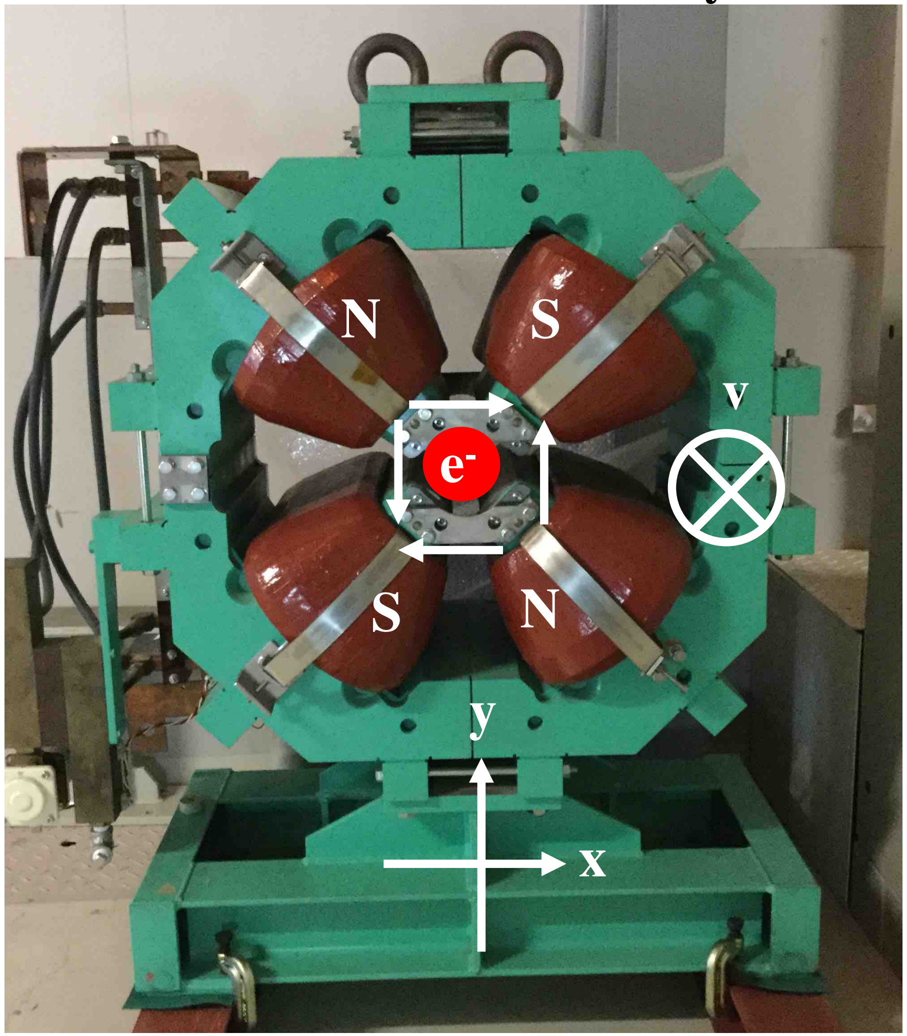
「相対論領域の電子ビーム」を磁場で曲げると、接線方向に放射光が出るので放射光源でもある。



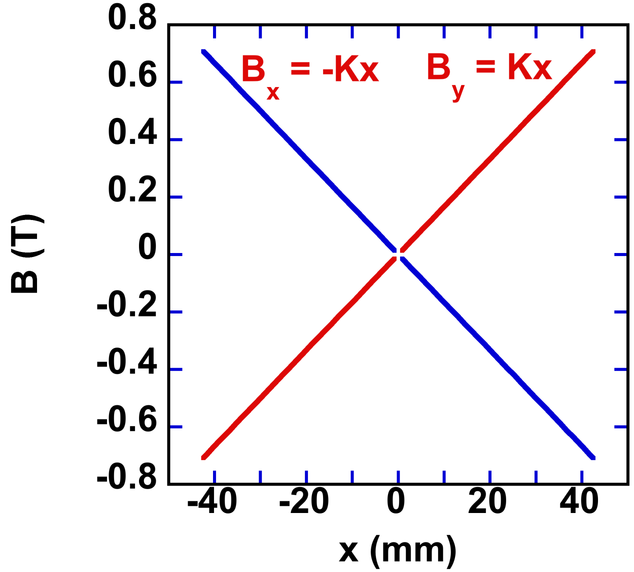
四極電磁石

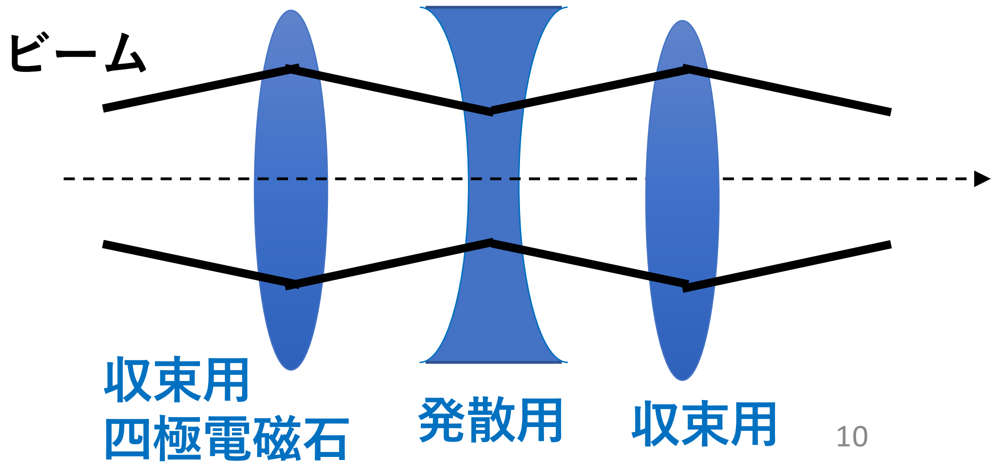
- 四極電磁石は線形磁場を発生させる。
- ローレンツ力でビームを収束（発散）させるレンズの役割。

X方向に収束、y方向に発散用の四極電磁石
（NとSを反転させるとxに発散、yに収束）



四極電磁石の磁場分布例

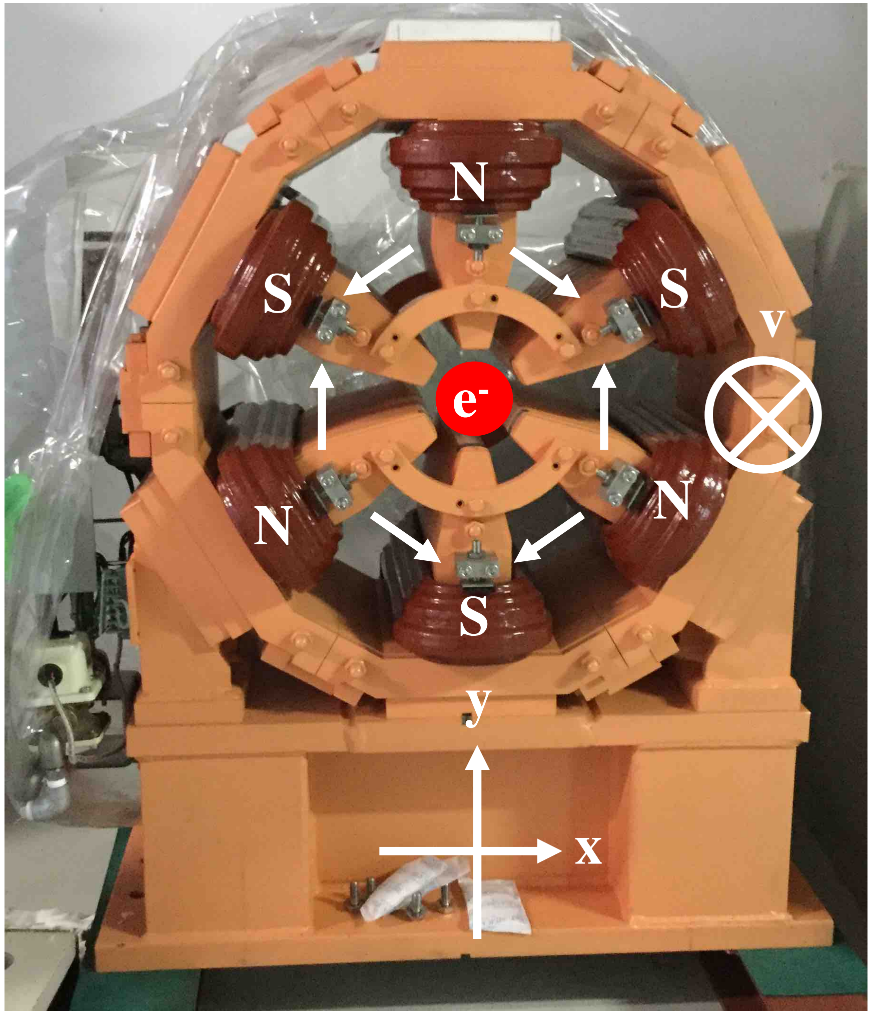


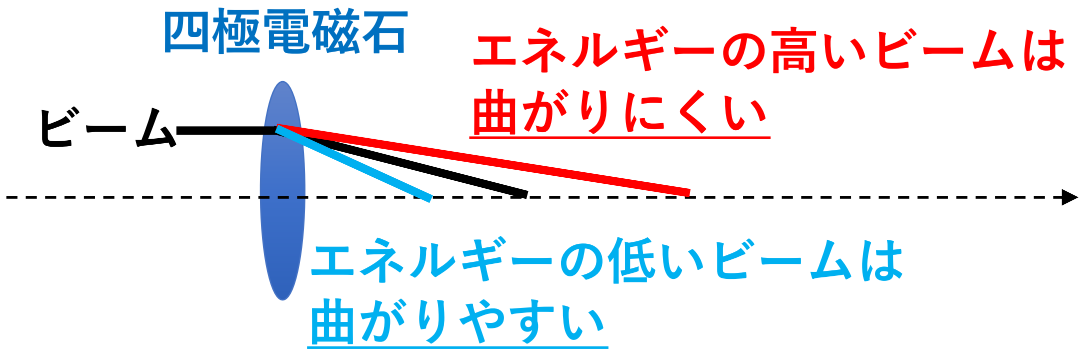


六極電磁石

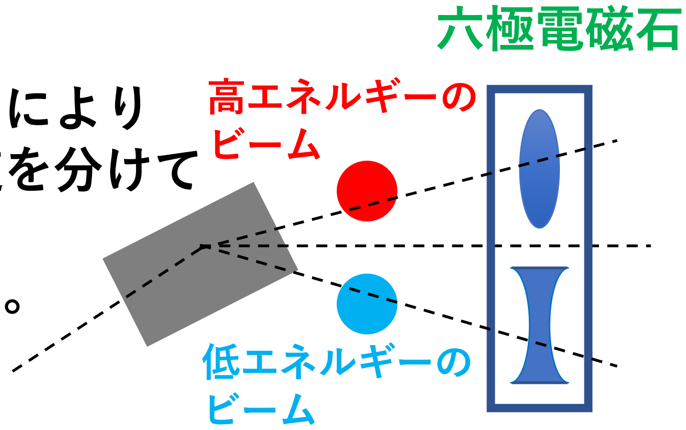
・クロマティシティ（色収差）を補正するために必要。

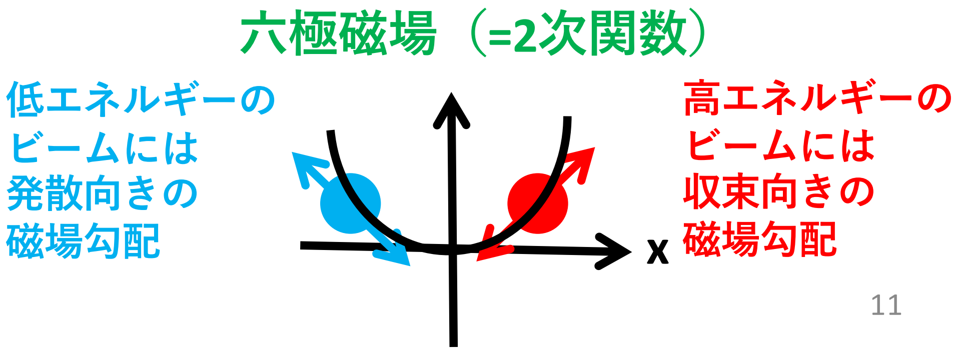
X方向に収束、y方向に発散用の六極電磁石
（NとSを反転させるとxに発散、yに収束）





エネルギーの違いにより
偏向電磁石で軌道を分けて
六極磁場で
色収差を補正する。

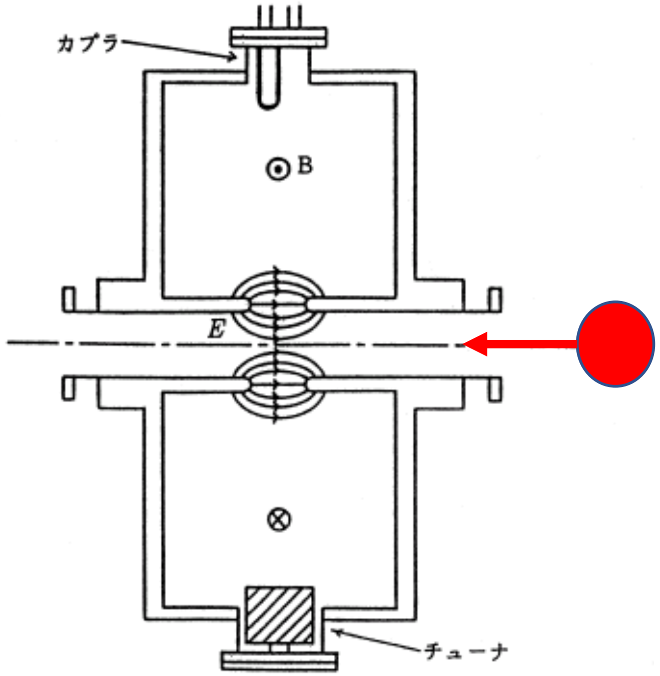




高周波加速空洞

・空洞内で電磁場を反射させて共鳴状態にする
→ 空洞内にエネルギーを蓄える。

・空洞内を通過したビームにエネルギーを与える。



真空ダクト、真空ポンプ、真空計

ビームが残留ガスと衝突すると散乱されてビームは失われる。
→　真空ダクト、真空ポンプで超高真空に保つ。真空計で監視する。

ビームモニター

加速器調整のためには、ビームの量、位置、形状などを調べる必要がある
→　様々なビームモニターが使用される（今年度のOHOのテーマ）。

コレクター

ビームモニターで観測された現象を制御するために
様々なコレクター（ステアリング、補正四極、高周波加速空洞…）が
使用される。

挿入光源

単色で明るい光を作るための装置。

前半の概要：

1　加速器とは

2　なぜ加速器調整が必要か

3　主な加速器の構成機器

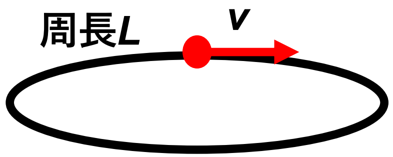
4　（ビーム物理に入る前の）予備知識

5　ビーム物理の基礎

- シンクロトロン振動について

- ベータトロン振動について
    - エラーがない場合
    - エラーがある場合

よく使う関係式について

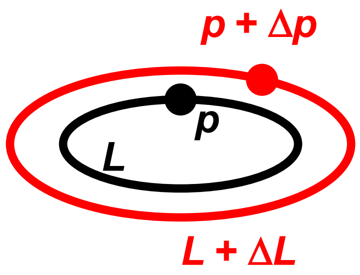


運動量pを持つ理想粒子が距離Lを速度vで進む時間をtとする：$t = \dfrac{L}{v}$

1　微分する：　$dt = \dfrac{dL}{v} - \dfrac{Ldv}{v^2}$

2　元の式で割る：　$\dfrac{\Delta t}{t} = \dfrac{\Delta L}{L} - \dfrac{\Delta v}{v}$

3　$p = \gamma m v$を微分して元の式で割る：　$\dfrac{\Delta v}{v} = \dfrac{1}{\gamma^2}\dfrac{\Delta p}{p}$



4　距離の差と運動量の偏差との関係を次式で与える：$\dfrac{\Delta L}{L} = \alpha \dfrac{\Delta p}{p}$

以上から運動量偏差と移動時間差の関係式

$$\boxed{\frac{\Delta t}{t} = \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2}\right)\frac{\Delta p}{p}}$$

α: 加速器で決まる係数
(momentum compaction factor)

を得る。同様にすると

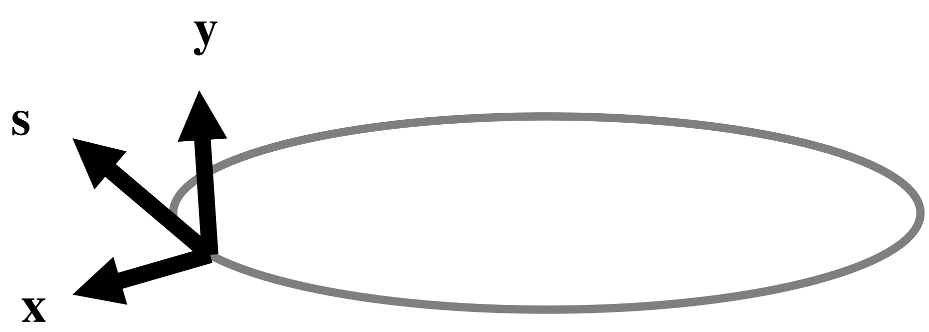
・運動量偏差とエネルギー偏差の関係式：$\boxed{\dfrac{\Delta p}{p} = \dfrac{1}{\beta^2}\dfrac{\Delta E}{E}}$

・周期差と周波数差の関係式：$\boxed{\dfrac{\Delta f}{f} = -\dfrac{\Delta T}{T}}$

を得る。（重要）赤枠3つの式はビーム物理や加速器調整でよく使う式である。

座標系について

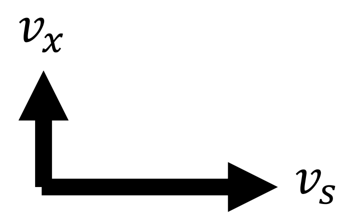
・ここでは、リングの外向きを$x > 0$、上向きを$y > 0$、進行軸で右手系を考慮した方向を$s > 0$とする。



・ベータトロン振動については、時間tのかわりに位置sを独立変数として用いる。

$$x' = \frac{dx}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{dx}{dt} = \frac{dx/dt}{ds/dt} = \frac{v_x}{v_s}$$

単位：rad

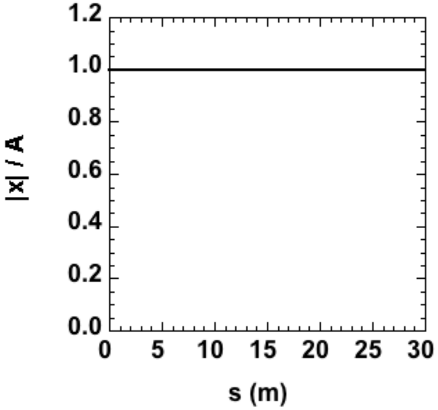


調和振動

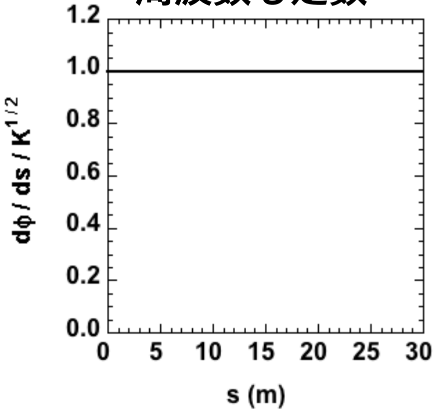
調和振動の微分方程式：$x'' + Kx = 0$

解）
$$x(s) = A\cos\{\phi(s) + \phi_0\}$$
$$\phi(s) = \sqrt{K}s$$

振幅は定数



周波数も定数



調和振動の軌道：

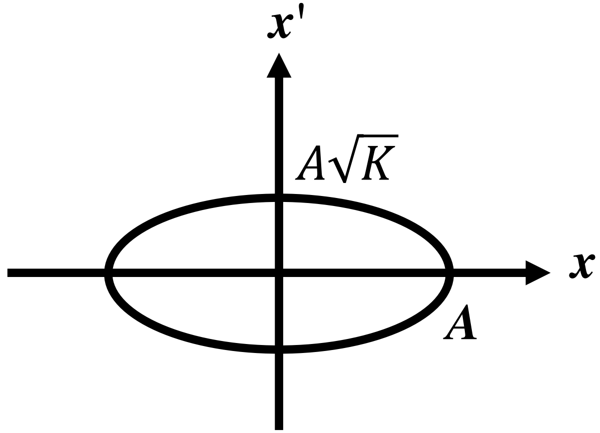
$$x(s) = A\cos\{\phi(s) + \phi_0\}$$
$$x'(s) = -A\sqrt{K}\sin\{\phi(s) + \phi_0\}$$

➡ 位相空間(x, x′)での軌道は

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{x'^2}{A^2K} = 1$$

で与えられる。

位相空間(x, x′)での軌道



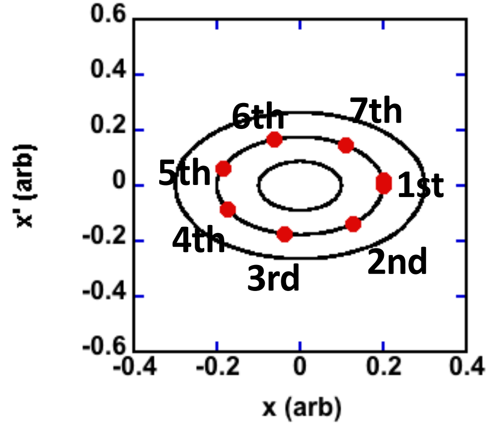
・面積πA^2Kの傾いていない楕円
・楕円の形は変わらない

調和振動における粒子集団の挙動について

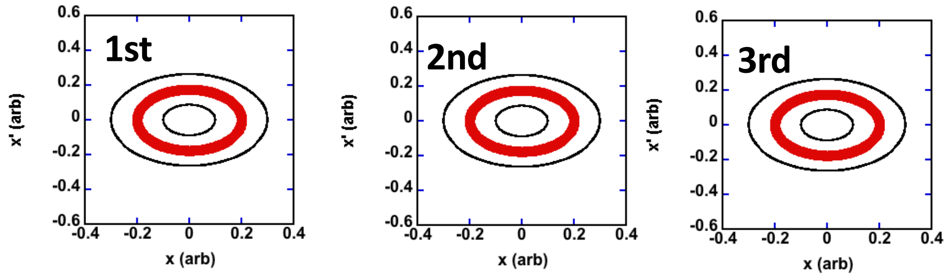
調和振動にまず1粒子を与えた場合、
粒子はターンごとに

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{x'^2}{A^2K} = 1$$

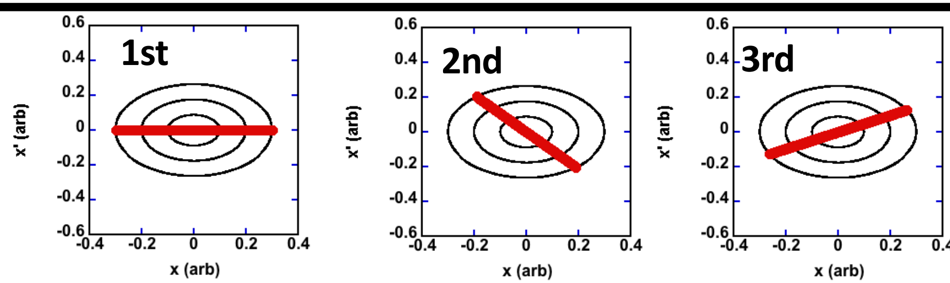
の楕円の上を動く。
では1粒子ではなく粒子集団を与えた場合は？



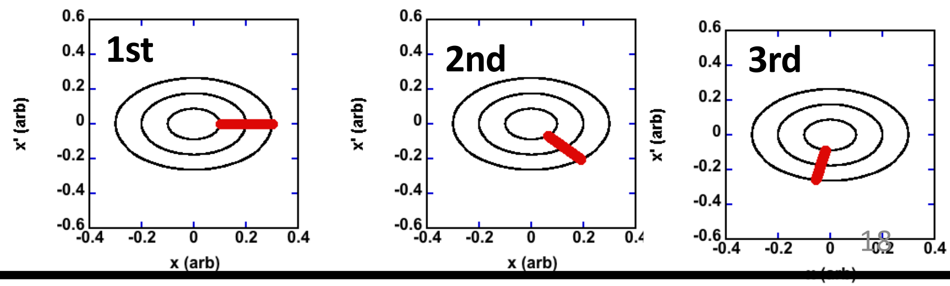
粒子集団を楕円上に一様に与えた場合、
時間が経っても粒子集団は動かないように
見える（個々の粒子は動いている。
マッチング状態）。



粒子分布が楕円と非相似だが重心は一致
している場合、原点(x, x’) = (0, 0)を中心に
粒子分布全体が回転する（四極振動）。



粒子分布の重心が原点(x, x’) = (0, 0)から
ずれた場合、粒子分布の重心が
原点(x, x’) = (0, 0)を中心に回転する
（ダイポール振動）。



前半の概要:

１　加速器とは

２　なぜ加速器調整が必要か

３　主な加速器の構成機器

４　(ビーム物理に入る前の）予備知識

５　ビーム物理の基礎

- シンクロトロン振動について

- ベータトロン振動について
  - エラーがない場合
  - エラーがある場合

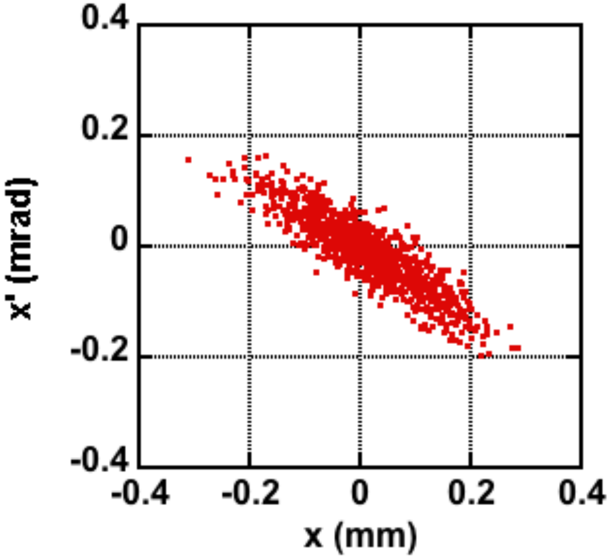
加速器の原理について

一般の粒子は、位相空間（位置、運動量、時間、エネルギー）でばらつきを持つ。
加速器内に閉じ込めて安定に加速できるのはなぜか？

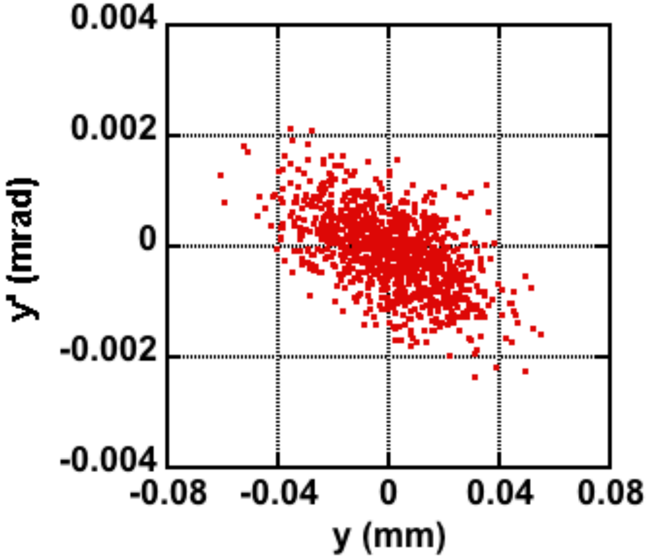
→　<u>シンクロトロン振動</u>と<u>ベータトロン振動</u>があるから

これらの基礎について講義を行う。

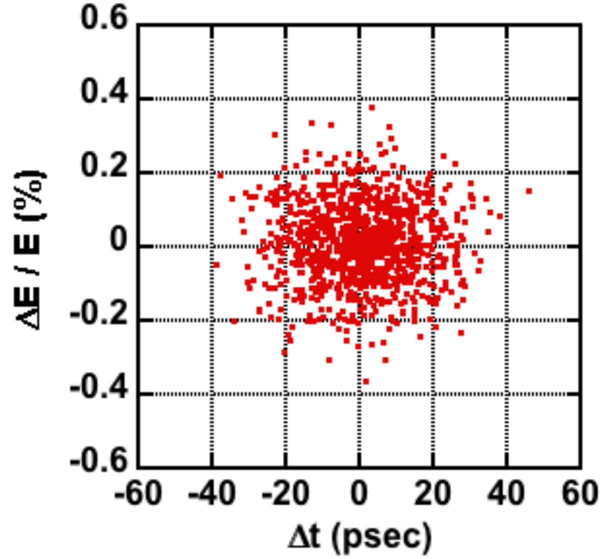
X方向粒子分布



Y方向粒子分布



時間方向粒子分布



前半の概要：

１　加速器とは

２　なぜ加速器調整が必要か

３　主な加速器の構成機器

４　（ビーム物理に入る前の）予備知識

５　ビーム物理の基礎

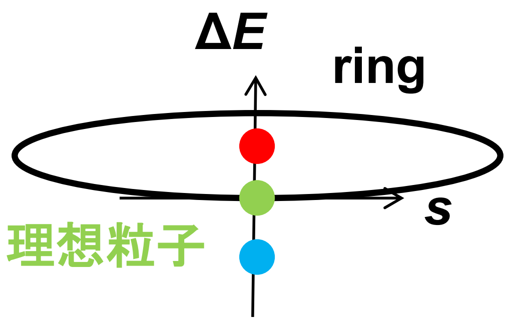
- シンクロトロン振動について

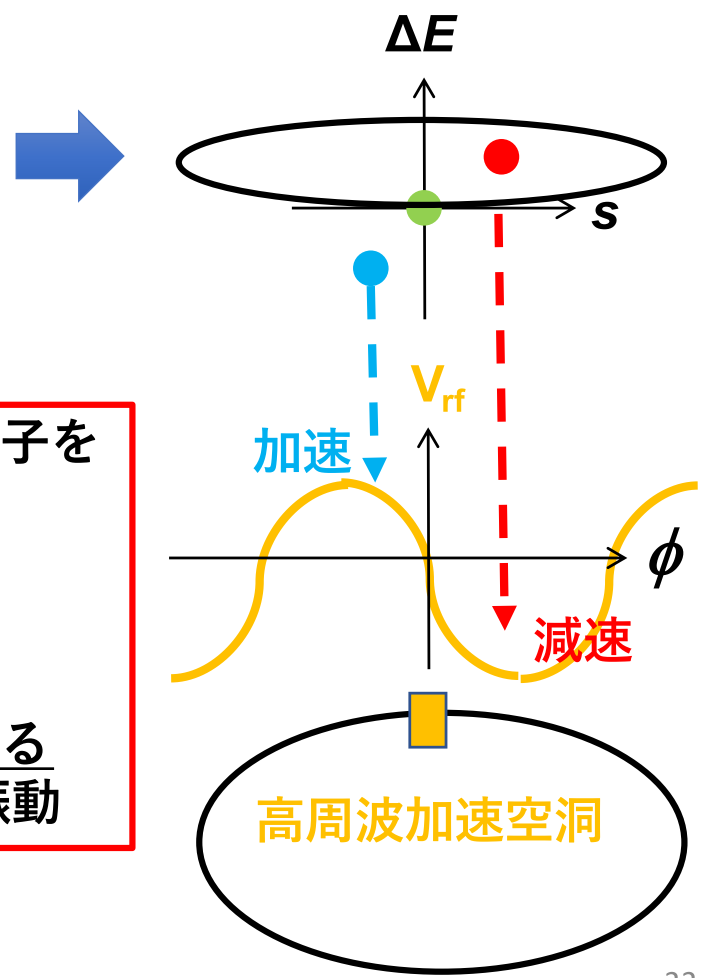
- ベータトロン振動について
  - エラーがない場合
  - エラーがある場合

非相対論領域でのシンクロトロン振動

非相対論領域では、理想粒子よりエネルギーが高い(低い)粒子は
理想粒子より速い(遅い)。
→ 理想粒子が1周するよりも先に(後に)到着する。

ΔE: 理想粒子からの
エネルギーのずれ



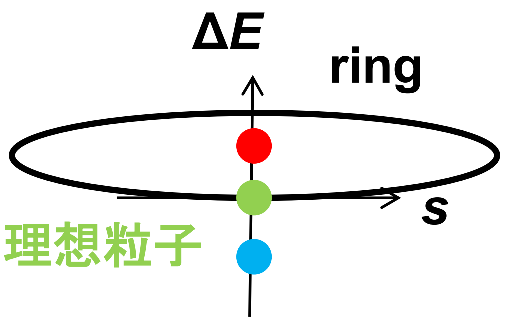


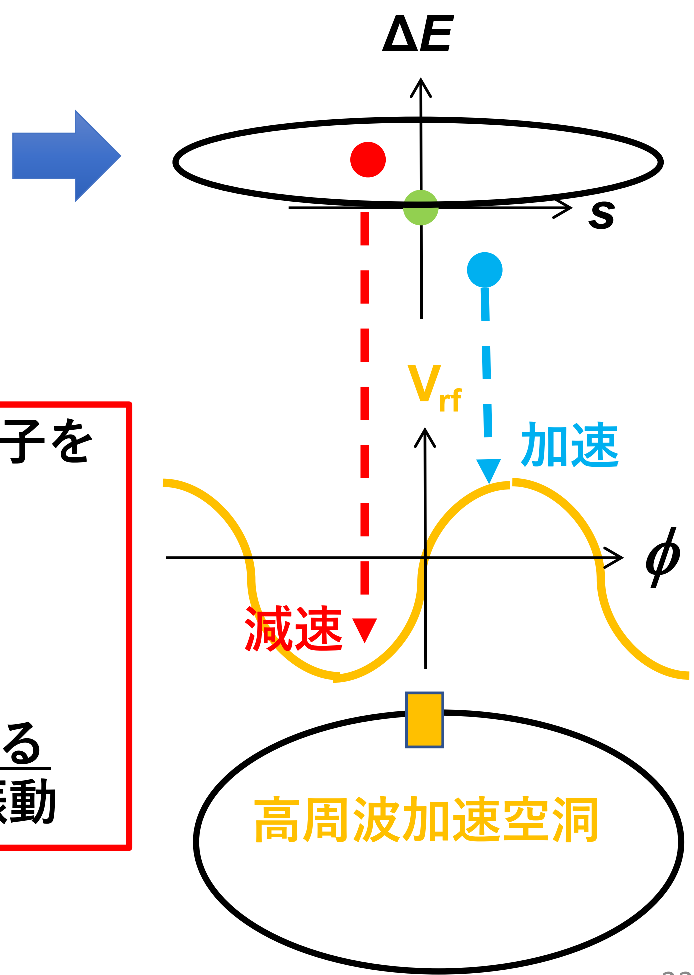
高周波加速空洞の位置でエネルギーが高い（低い）粒子を
減速（加速）するように、
1　粒子の周回周波数(f)と電圧の周波数(f_{rf})で
同期をとって（ $f_{RF} = hf$, h: harmonic number）
2　電圧の位相を調整すれば、
理想粒子の周りでエネルギーの高低が入れ替わり続ける
＝ シンクロトロン振動

相対論領域でのシンクロトロン振動

相対論領域では、理想粒子よりエネルギーが高い(低い)粒子は
理想粒子より重い(軽い)。 光速なので速さは一定。
→ 理想粒子が1周するよりも後に(先に)到着する。

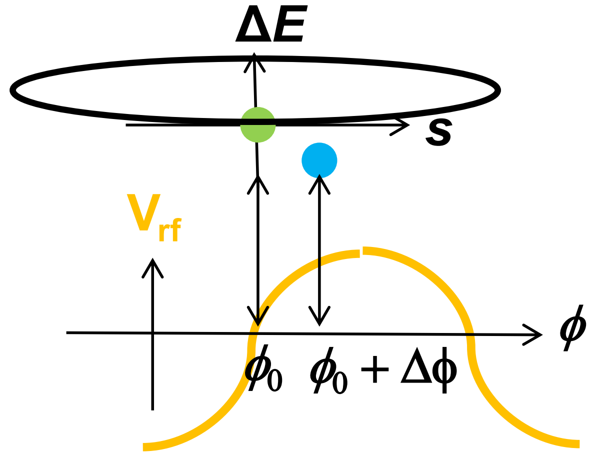
ΔE: 理想粒子からの
エネルギーのずれ





高周波加速空洞の位置でエネルギーが高い（低い）粒子を
減速（加速）するように、
1　粒子の周回周波数(f)と電圧の周波数(f_{rf})で
　　同期をとって（ $f_{RF} = hf$, h: harmonic number）
2　電圧の位相を調整すれば、
理想粒子の周りでエネルギーの高低が入れ替わり続ける
＝ シンクロトロン振動

シンクロトロン振動の式



シンクロトロン振動の微分方程式：

$$\frac{d\Delta E}{dn} = eV\left\{\sin\left(\phi_0 + \Delta\phi\right) - \sin\phi_0\right\}$$

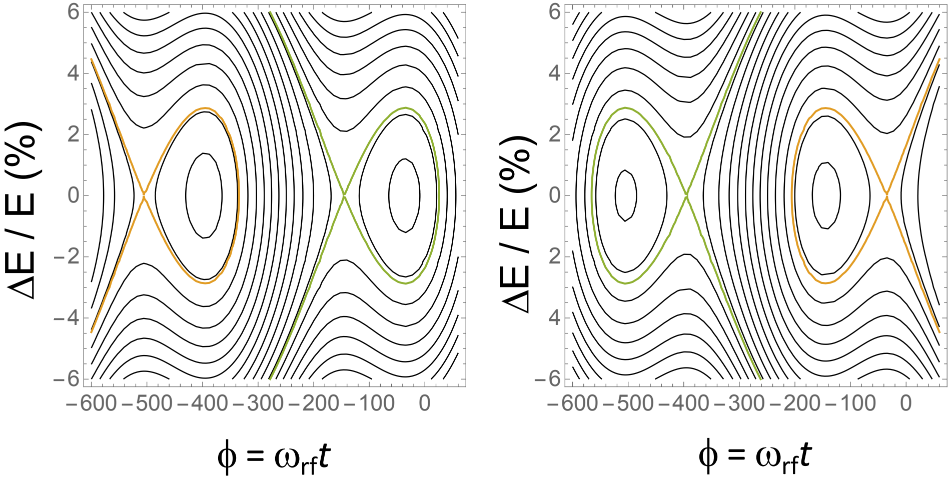
$$\frac{d\Delta\phi}{dn} = 2\pi\left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2}\right) h\frac{\Delta E}{\beta^2 E}$$

n: ターン数
ϕ_0: 同期位相（理想粒子がいる位相）
ΔE: 理想粒子からのエネルギーのずれ
Δφ: 理想粒子からの位相のずれ

初期条件を変えながら微分方程式を解くと軌道が4つのパターンに分かれる。

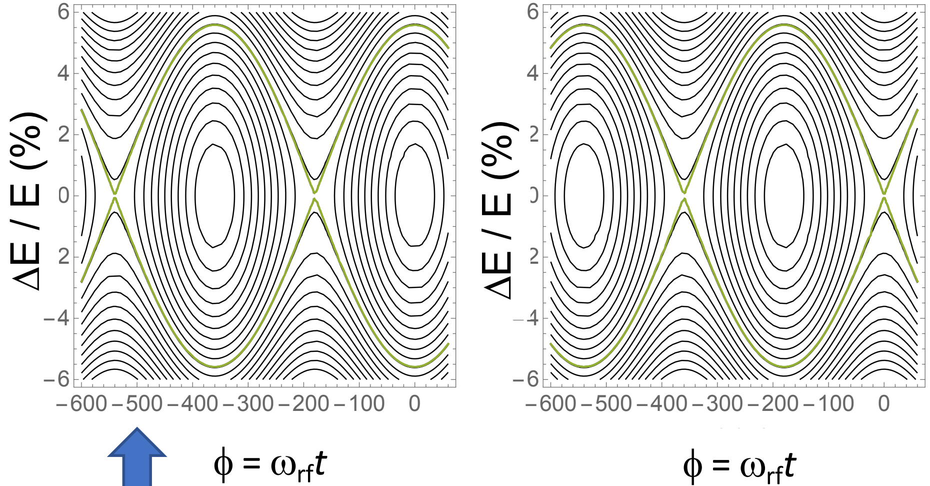
電子の場合　**理想粒子の加速有り (sin $\phi_0 \neq 0$)**

$$\alpha - \frac{1}{\gamma^2} > 0 \qquad \alpha - \frac{1}{\gamma^2} < 0$$



電子の場合　**理想粒子の加速無し (sin $\phi_0 = 0$)**

$$\alpha - \frac{1}{\gamma^2} > 0 \qquad \alpha - \frac{1}{\gamma^2} < 0$$

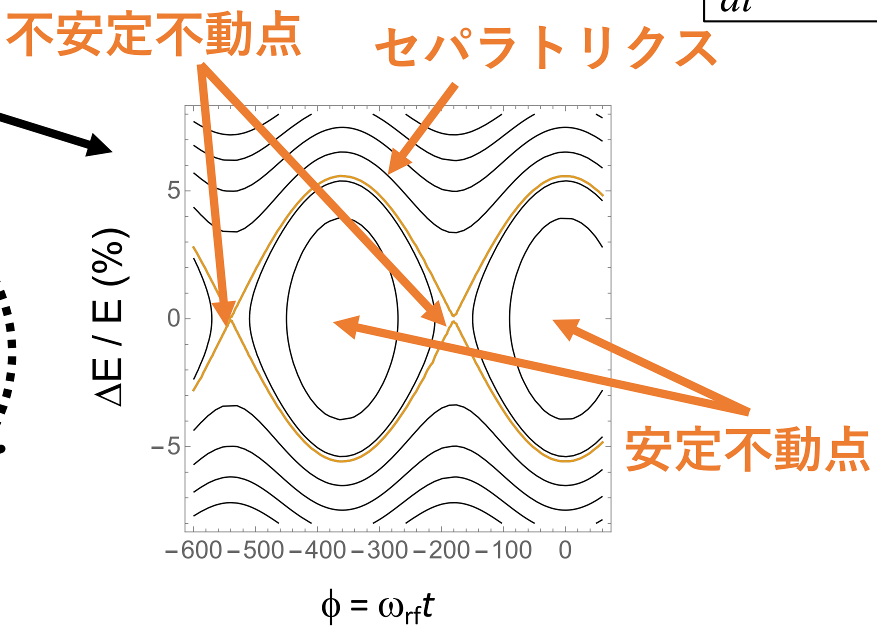


こちらの図を使って
運動の性質を説明する

シンクロトロン振動の性質

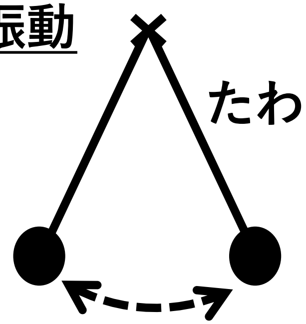
下図のシンクロトロン振動の場合、振り子の運動方程式と式が同じになる。

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0{}^2 \sin x}$$

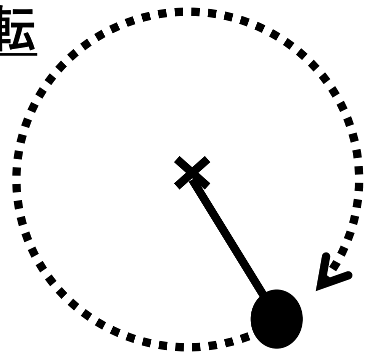


振り子の運動には2種類

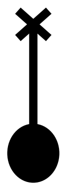
振動

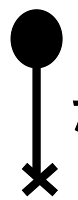


回転



不動点が2種類





- 振動運動の場合、安定不動点の周りで位相が閉じるので「安定な運動」とみなす。
- 回転運動の場合は、不安定不動点から少しでも重りを動かすと位相が無限に移動するので「不安定な運動」とみなす。
- 「安定な運動」と「不安定な運動」の境界をセパラトリクスと呼ぶ。

シンクロトロン振動の性質

下図のシンクロトロン振動の場合、振り子の運動方程式と式が同じになる。

周波数について

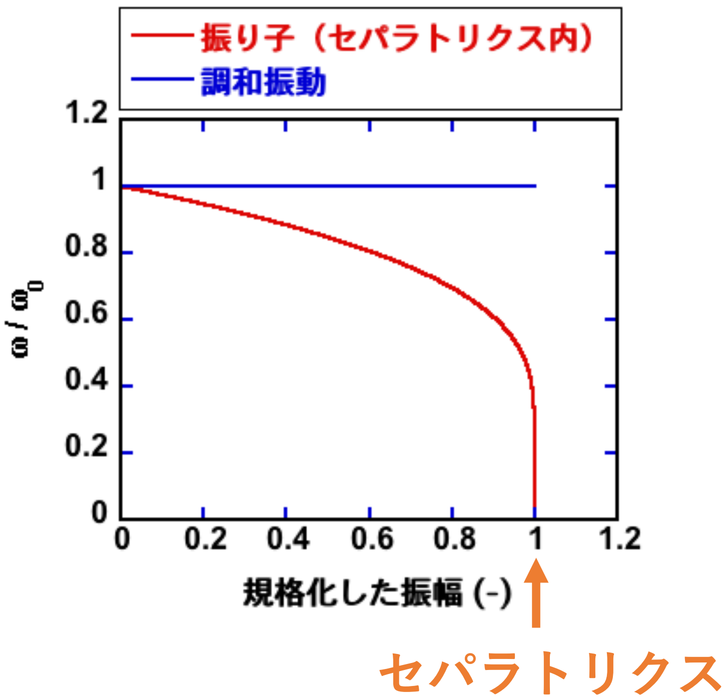
・調和振動の場合、
周波数は振幅によらず一定

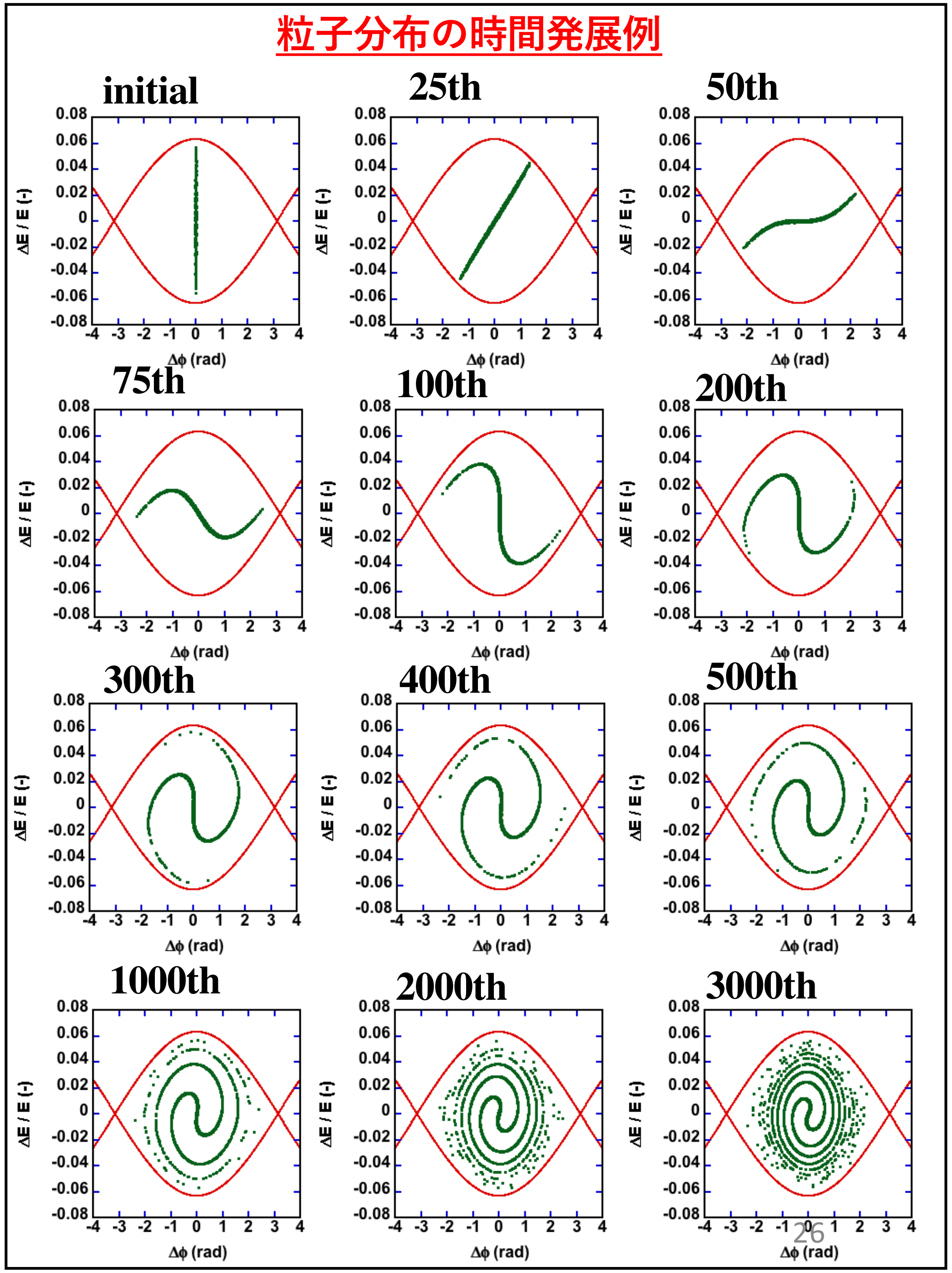
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0{}^2 x$$

・振り子の運動（セパラトリクス内）の場合
周波数は振幅に依存する。

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0{}^2 \sin x$$

周波数 vs. 振幅





シンクロトロン振動の性質

周波数について

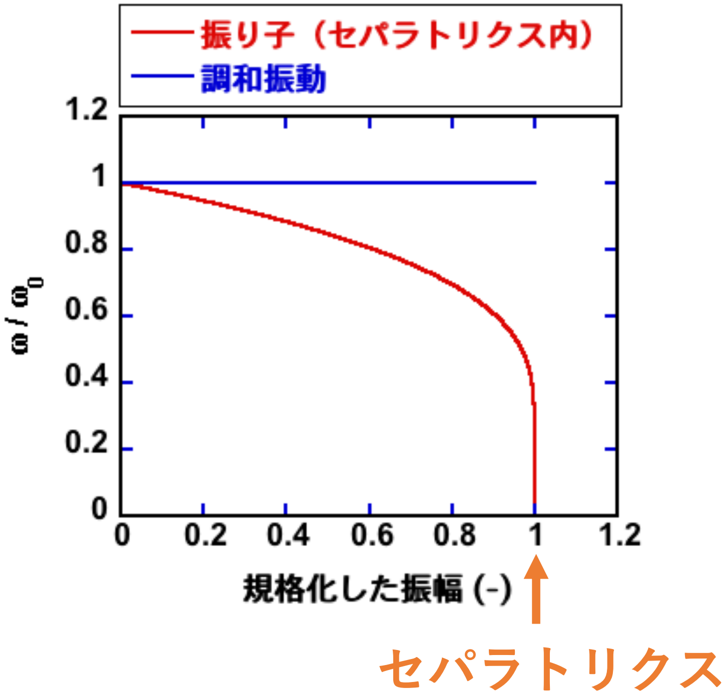
・調和振動の場合、
周波数は振幅によらず一定

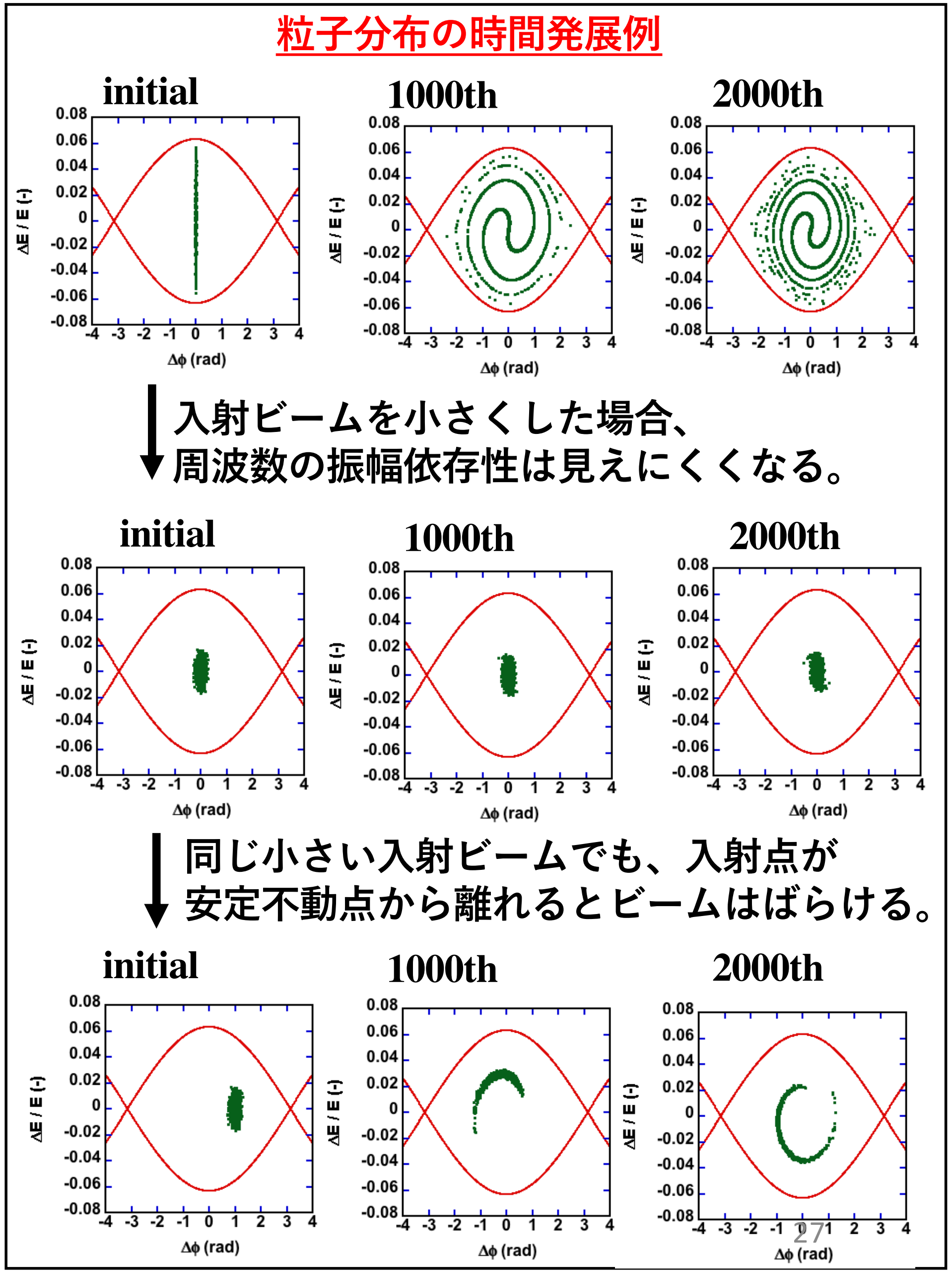
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0{}^2 x$$

・振り子の運動（セパラトリクス内）の場合
周波数は振幅に依存する。

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0{}^2 \sin x$$

周波数 vs. 振幅





前半の概要：

１　加速器とは

２　なぜ加速器調整が必要か

３　主な加速器の構成機器

４　（ビーム物理に入る前の）予備知識

５　ビーム物理の基礎

- シンクロトロン振動について

- ベータトロン振動について
    - エラーがない場合
    - エラーがある場合

ベータトロン振動について

シンクロトロン振動は進行軸方向（時間-エネルギー空間）の運動。

ベータトロン振動は<u>進行軸に対して垂直方向</u>の運動。

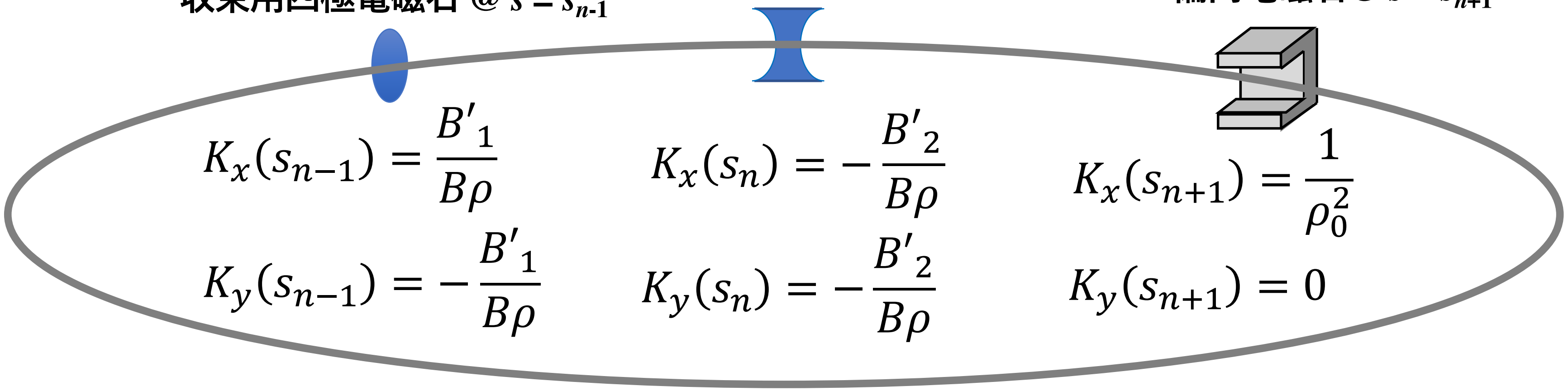
無摂動のベータトロン振動の微分方程式を $x'' + K_x(s)x = 0$ と定義する。

円形加速器の場合、リング1周すると元に戻るので $K_x(s+C) = K_x(s)$ と周期性を持つ。

$$\left.\begin{aligned} x'' + K_x(s)x &= 0 \\ K_x(s+C) &= K_x(s) \end{aligned}\right\}$$

Hill's equationと呼ぶ。
（y方向も同様）

$\boxed{C\text{：周長}}$



$$K_x(s_{n-1}) = \frac{B'_1}{B\rho} \qquad K_y(s_{n-1}) = -\frac{B'_1}{B\rho}$$

$$K_x(s_n) = -\frac{B'_2}{B\rho} \qquad K_y(s_n) = -\frac{B'_2}{B\rho}$$

$$K_x(s_{n+1}) = \frac{1}{\rho_0^2} \qquad K_y(s_{n+1}) = 0$$

$$B' = \frac{dB_y}{dx}$$

$$B\rho = \frac{p}{e}$$

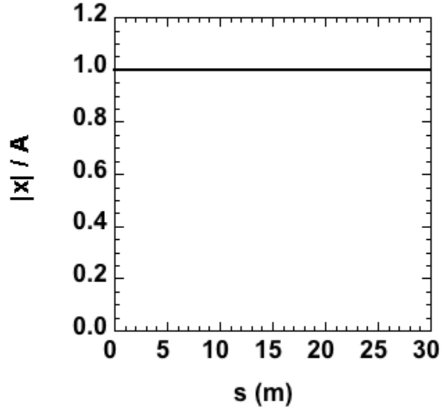
ρ_0: 曲率半径

Hill's equation

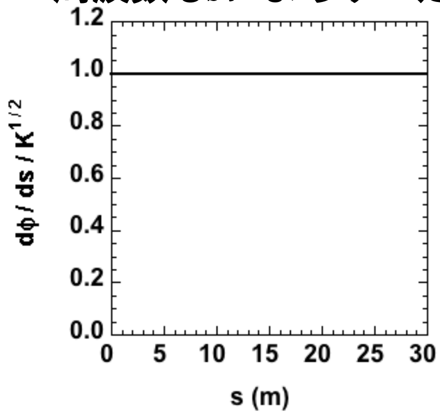
調和振動 $x'' + Kx = 0$ の場合：

解）
$$x(s) = A\cos\{\phi(s) + \phi_0\}$$
$$\phi(s) = \sqrt{K}s$$

振幅はsによらず一定



周波数もsによらず一定



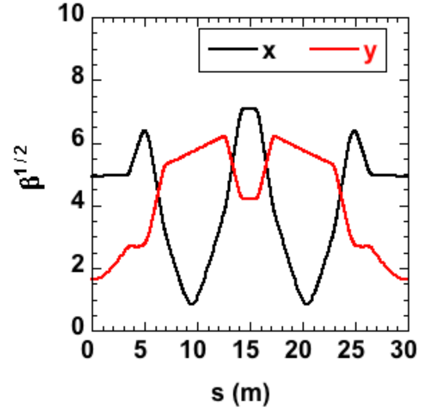
Hill's equation $x'' + K(s) = 0$ の場合：

解）
$$x(s) = \sqrt{\epsilon\beta(s)}\cos\{\phi(s) + \phi_0\}$$
$$\phi(s) = \int_0^s \frac{ds'}{\beta(s')}$$

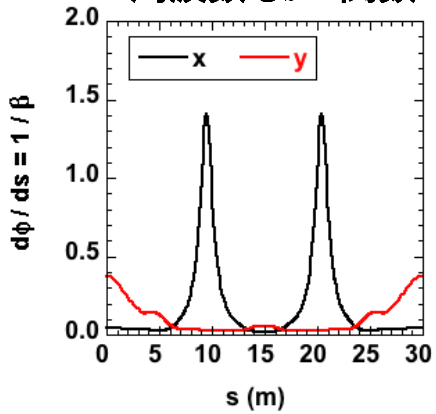
$\beta(s)$: ベータ関数

$\beta(s + C) = \beta(s)$

振幅がsの関数



周波数もsの関数



Hill's equation

調和振動 $x'' + Kx = 0$ の場合の解：

$$x(s) = A\cos\{\phi(s) + \phi_0\}$$

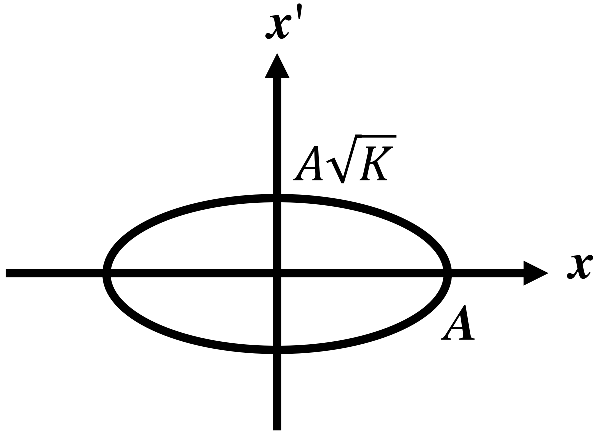
$$x'(s) = -A\sqrt{K}\sin\{\phi(s) + \phi_0\}$$

➡ 位相空間(x, x')での軌道は

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{x'^2}{A^2K} = 1$$

で与えられる。

位相空間(x, x')での軌道



- 面積πA^2Kの傾いていない楕円
- 楕円の形はsに依存しない

Hill's equation $x'' + K(s) = 0$ の場合の解：

$$x(s) = \sqrt{\epsilon\beta(s)}\cos\{\phi(s) + \phi_0\}$$

$$x'(s) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon}{\beta(s)}}\beta'(s)\cos\{\phi(s) + \phi_0\} - \sqrt{\frac{\epsilon}{\beta(s)}}\sin\{\phi(s) + \phi_0\}$$

➡ 位相空間(x, x')での軌道は

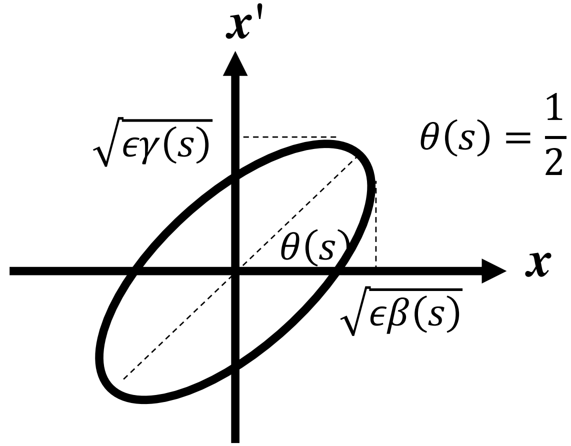
$$\gamma x^2 - 2\alpha x x' + \beta x'^2 = \epsilon$$

で与えられる。

$$\alpha(s) = -\frac{1}{2}\beta'(s)$$

$$\gamma(s) = \frac{1 + \alpha(s)^2}{\beta(s)}$$

位相空間(x, x')での軌道



$$\theta(s) = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2\alpha(s)}{\beta(s) - \gamma(s)}$$

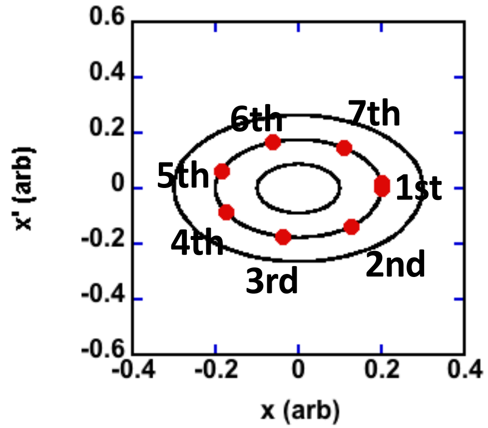
- 面積$\pi\epsilon$の傾いた楕円
- 楕円の形や傾きはsに依存する

ベータトロン振動における粒子の挙動について

調和振動に1粒子を与えた場合、
粒子はターンごとに

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{x'^2}{A^2K} = 1$$

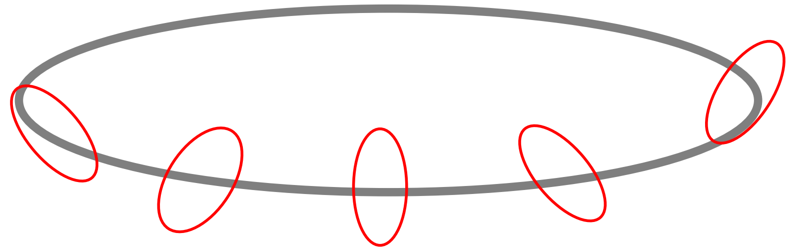
の楕円の上を動く。



ベータトロン振動の

$$\gamma x^2 - 2\alpha x x' + \beta x'^2 = \epsilon$$

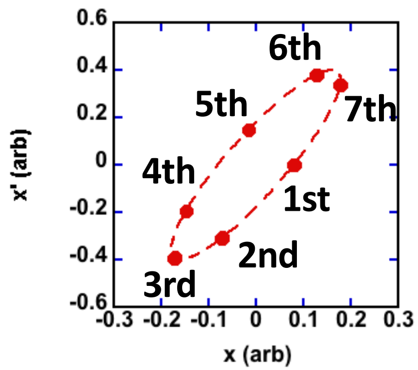
の楕円は、場所ごとに形が変わる。
（ただし楕円の面積は一定）

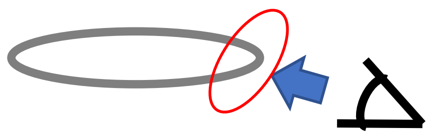


ベータトロン振動に1粒子を与えた場合、
粒子はターンごとに

$$\gamma x^2 - 2\alpha x x' + \beta x'^2 = \epsilon$$

の楕円の上を動く。
（＝楕円の形は場所で変わるが、
「粒子が楕円上を動く」という点は
調和振動と同じ）





リングの1点で
観測した場合、
楕円の形は同じ

チューン

チューン：リング1周あたりのベータトロン振動の振動数。

$$x(s) = \sqrt{\epsilon\beta(s)}\cos\{\phi(s)+\phi_0\}$$

$$\phi(s) = \int_0^s \frac{ds'}{\beta(s')}$$

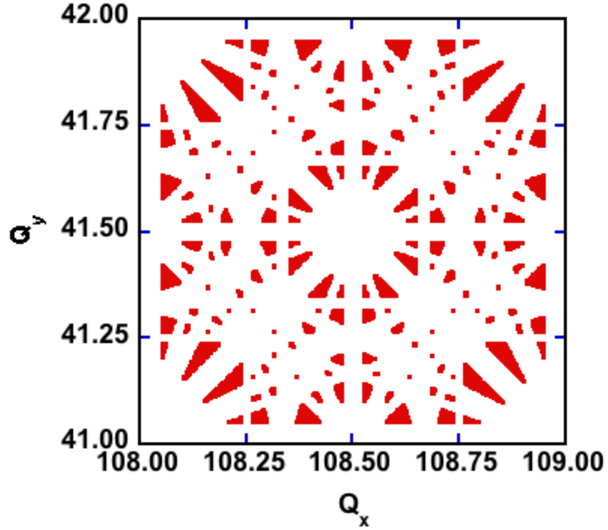
ベータトロン振動のリング1周あたりの位相の進み $\phi = \int_0^C \frac{ds'}{\beta(s')}$ を2πで割れば良い。

x方向のチューン：$Q_x = \frac{1}{2\pi}\int_0^C \frac{ds'}{\beta_x(s')}$

y方向のチューン：$Q_y = \frac{1}{2\pi}\int_0^C \frac{ds'}{\beta_y(s')}$

共鳴条件 $iQ_x \pm jQ_y = k$ は
(i, j, k: 整数)
避けなければならない
（ビームが不安定になるので）。

（例）赤点が、共鳴条件を避けた点
（ビームが安定となる点）



前半の概要:

１　加速器とは

２　なぜ加速器調整が必要か

３　主な加速器の構成機器

４　（ビーム物理に入る前の）予備知識

５　ビーム物理の基礎

- シンクロトロン振動について
- **ベータトロン振動について**
  - エラーがない場合
  - **エラーがある場合**

(本題)摂動がある場合を考える

ビーム調整の目的が「ビームの再現性」、「ビームロスの抑制」と考えると、刻々と変わる摂動（エラー）の影響をいかに抑えるかが、ビーム調整において重要となる。

摂動の種類	起きる現象
双極磁場誤差	COD（Closed Orbit Distortion）
四極磁場誤差	・チューンシフト ・ベータ関数の乱れ ・分散関数の乱れ
運動量誤差	・分散関数 ・クロマティシティ

↑

ビーム調整項目となる

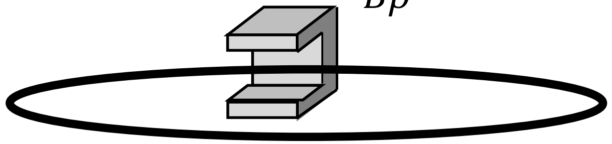
COD

$s = s_0$に有効長Lの双極磁場誤差（ΔB）がある場合のベータトロン振動の式：

$$x'' + K_x(s)x = -\theta_x \delta(s - s_0)$$

$$\theta_x = \frac{\Delta B_y L}{B\rho}$$

$\theta_x = \dfrac{\Delta B_y L}{B\rho}$ **@ $s = s_0$**



1　微分方程式の解は「特殊解」と「一般解（無摂動のベータトロン振動）」で与えられる。今回のような双極磁場誤差が作る特殊解をCODと呼ぶ。

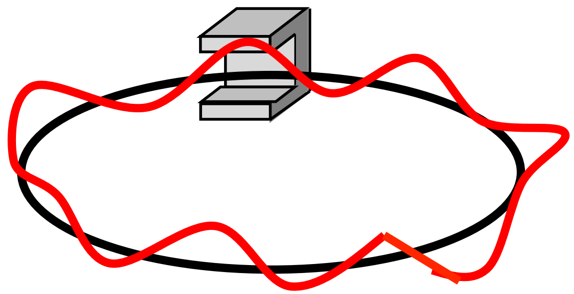
Closed Orbit Distortion：閉軌道の歪み

2　特殊解、すなわちCODの式： $x_{cod}(s) = \dfrac{\theta_x \sqrt{\beta_x(s_0)\beta_x(s)}}{2\sin(\pi Q_x)} \cos\{|\phi(s) - \phi(s_0)| - \pi Q_x\}$

双極磁場誤差が複数個ある場合は、それぞれが作るCODの式を足し算すれば良い。

3　$x_{cod}(s + C) = x_{cod}(s)$**であり、リング1周でCODは閉じる（＝元の値に戻る）。**

$x_{cod}(s + C) = x_{cod}(s)$



4　このとき、粒子はCODの周りでベータトロン振動を行う。

$$x(s) = \sqrt{\epsilon\beta}\cos\{\phi(s) + \phi_0\} + x_{cod}(s)$$

(本題)摂動がある場合を考える

ビーム調整の目的が「ビームの再現性」、「ビームロスの抑制」と考えると、刻々と変わる摂動（エラー）の影響をいかに抑えるかが、ビーム調整において重要となる。

摂動の種類	起きる現象
双極磁場誤差	COD（Closed Orbit Distortion）
四極磁場誤差	・チューンシフト ・ベータ関数の乱れ ・分散関数の乱れ
運動量誤差	・分散関数 ・クロマティシティ

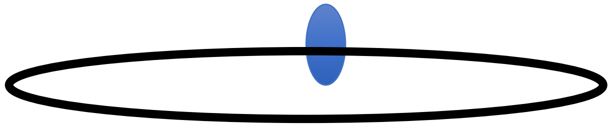
ビーム調整項目となる

チューンシフト

$s = s_0$に有効長Lの四極磁場誤差（$\Delta B'$）がある場合のベータトロン振動の式：

$$x'' + \{K_x(s) + \Delta K_x L \delta(s - s_0)\}x = 0$$

$$\Delta K_x = \frac{\Delta B'}{B\rho} \quad \Delta K_y = -\frac{\Delta B'}{B\rho} \quad @\ s = s_0$$



1　ベータトロン振動の周波数（すなわちチューン）に変化を生じる＝ チューンシフトと呼ぶ。

2　チューンシフトの式：

$$\Delta Q_x = \frac{1}{4\pi}\beta_x(s_0)\,\Delta K_x L$$

$$\Delta Q_y = -\frac{1}{4\pi}\beta_y(s_0)\,\Delta K_x L$$

四極磁場誤差が複数個あるときは、それぞれが作るチューンシフトを足せば良い。

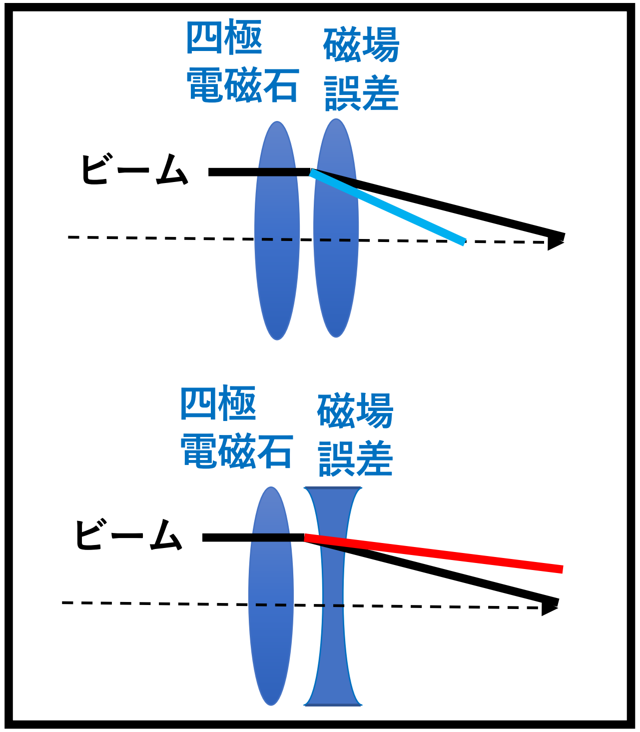
3　一般粒子のチューンは「摂動が無い場合のチューン」を用いて

$$Q_x = Q_{x0} + \Delta Q_x$$

$$Q_y = Q_{y0} + \Delta Q_y$$

Q_{x0}, Q_{y0}: 摂動が無い場合のチューン

と書ける。



（本題）摂動がある場合を考える

ビーム調整の目的が「ビームの再現性」、「ビームロスの抑制」と考えると、刻々と変わる摂動（エラー）の影響をいかに抑えるかが、ビーム調整において重要となる。

摂動の種類	起きる現象
双極磁場誤差	COD（Closed Orbit Distortion）
四極磁場誤差	・チューンシフト ・ベータ関数の乱れ ・分散関数の乱れ
運動量誤差	・分散関数 ・クロマティシティ

Hills' equationの形が変わるのでベータ関数と分散関数の形も変わる。

ビーム調整項目となる

運動量偏差がある場合のベータトロン振動式

これまでは、ベータトロン振動に運動量誤差を考慮していなかった。
運動量偏差Δ***p* / *p***がある粒子に関するベータトロン振動の式：

$$x'' + K_x(s)\underbrace{\left(1 - \frac{\Delta p}{p}\right)}_{}x = \underbrace{\frac{1}{\rho_0(s)}\frac{\Delta p}{p}}_{}$$

ρ_0：偏向電磁石の曲率半径

クロマティシティ
を生じる。

運動量偏差に比例
した閉軌道を生む。

(本題)摂動がある場合を考える

ビーム調整の目的が「ビームの再現性」、「ビームロスの抑制」と考えると、刻々と変わる摂動（エラー）の影響をいかに抑えるかが、ビーム調整において重要となる。

摂動の種類	起きる現象
双極磁場誤差	COD（Closed Orbit Distortion）
四極磁場誤差	・チューンシフト ・ベータ関数の乱れ ・分散関数の乱れ
運動量誤差	・分散関数 ・クロマティシティ

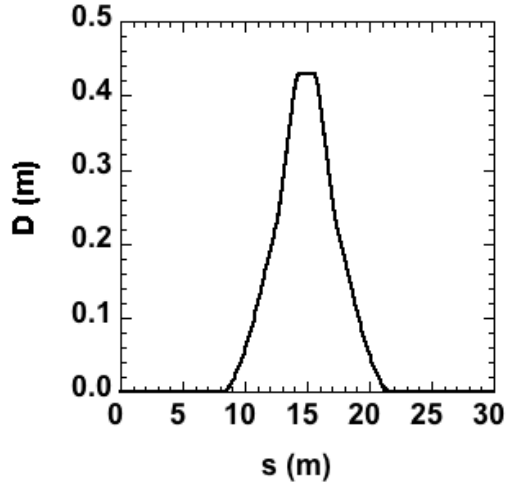
ビーム調整項目となる

分散関数について

クロマティシティは補正するものとして、運動量偏差Δ*p* / *p*がある粒子に関する
ベータトロン振動の式を

$$x'' + K_x(s)x = \frac{1}{\rho_0(s)}\frac{\Delta p}{p}$$

分散関数の例（理論値）



と与える　→ CODの時と式の形が同じ、すなわち考え方は同じ。

特殊解は

$$x_p(s) = D(s)\frac{\Delta p}{p}$$

$$D(s) = \frac{\sqrt{\beta_x(s)}}{2\sin(\pi Q_x)}\int_0^C \frac{\sqrt{\beta_x(s')}}{\rho_0(s')}\cos\{|\phi(s)-\phi(s')|-\pi Q_x\}ds'$$

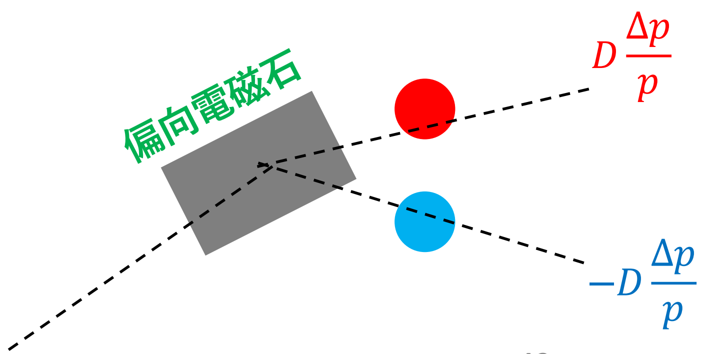
と書けて、**D(s)を分散関数と呼ぶ**。

1　*D*(*s* + *C*) = *D*(*s*)であり、リング1周で閉じる。

2　特殊解x_pの周りでベータトロン振動を行う。すなわち
運動量偏差Δ*p* / *p*を持つ粒子のベータトロン振動は

$$x(s) = \sqrt{\epsilon\beta}\cos\{\phi(s)+\phi_0\} + x_p(s) + x_{cod}(s)$$

で与えられる。



Momentum compaction factorについて

双極磁場誤差が無い（＝CODが無い）場合で、運動量偏差がある場合の
ベータトロン振動式： $x(s) = \sqrt{\epsilon\beta}\cos\{\phi(s) + \phi_0\} + x_p(s)$

x_pが増えた分、明らかに周長が伸びる。

周長変化：$\Delta C = 2\pi\Delta r$

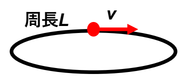
オフセット：Δr

周長変化の式：$\Delta C = \oint x_p d\theta = \dfrac{\Delta p}{p}\oint \dfrac{D(s)}{\rho_0(s)}ds$

$$\rightarrow \quad \frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta p}{p}\frac{1}{C}\oint \frac{D(s)}{\rho_0(s)}ds = \left\langle \frac{D}{\rho_0} \right\rangle \frac{\Delta p}{p} = \alpha\frac{\Delta p}{p}$$

α: momentum compaction factor

よく使う関係式について

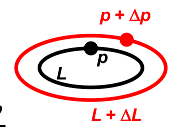


運動量pを持つ理想粒子が距離Lを速度vで進む時間をtとする：$t = \dfrac{L}{v}$

1　微分する：$dt = \dfrac{dL}{v} - \dfrac{Ldv}{v^2}$

2　元の式で割る：$\dfrac{\Delta t}{t} = \dfrac{\Delta L}{L} - \dfrac{\Delta v}{v}$

3　$p = \gamma m v$を微分して元の式で割る：$\dfrac{\Delta v}{v} = \dfrac{1}{\gamma^2}\dfrac{\Delta p}{p}$



4　距離の差と運動量の偏差との関係を次式で与える：$\dfrac{\Delta L}{L} = \alpha\dfrac{\Delta p}{p}$

α: 加速器で決まる係数
(momentum compaction factor)

以上から運動量偏差と移動[illegible]の関係式

$$\boxed{\frac{\Delta t}{t} = (\alpha - \frac{1}{\gamma^2})\frac{\Delta p}{p}}$$

を得る。同様にすると

・運動量偏差とエネルギー偏差の関係式：$\boxed{\dfrac{\Delta p}{p} = \dfrac{1}{\beta^2}\dfrac{\Delta E}{E}}$

・周期差と周波数差の関係式：$\boxed{\dfrac{\Delta f}{f} = -\dfrac{\Delta T}{T}}$

を得る。（重要）赤枠3つの式はビーム物理や加速器調整でよく使う式である。 15

(本題)摂動がある場合を考える

ビーム調整の目的が「ビームの再現性」、「ビームロスの抑制」と考えると、刻々と変わる摂動（エラー）の影響をいかに抑えるかが、ビーム調整において重要となる。

摂動の種類	起きる現象
双極磁場誤差	COD（Closed Orbit Distortion）
四極磁場誤差	・チューンシフト ・ベータ関数の乱れ ・分散関数の乱れ
運動量誤差	・分散関数 ・クロマティシティ

ビーム調整項目となる

ナチュラルクロマティシティについて

まず最初は分散関数を考えないで
（分散関数の効果は後で考える）、
運動量偏差がある場合のベータトロン式を

$$x'' + K_x(s)\left(1 - \frac{\Delta p}{p}\right)x = 0$$

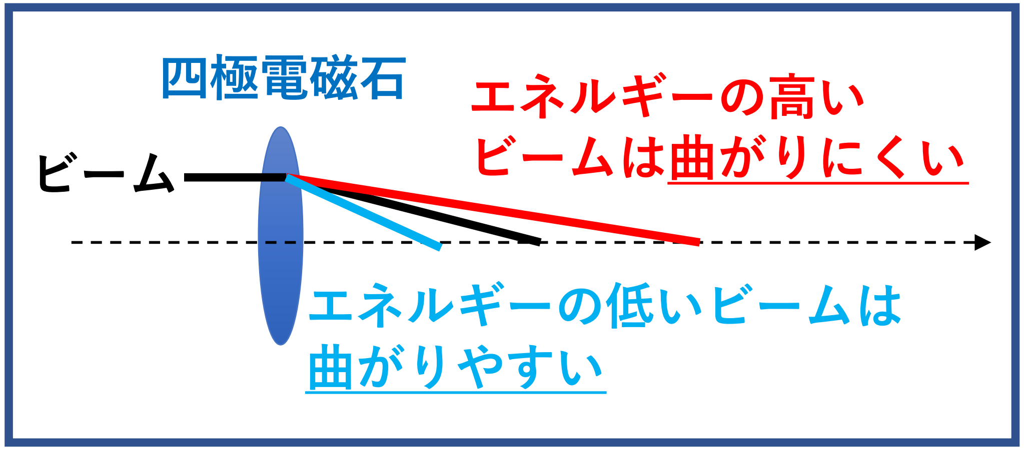
で与える　→ 四極磁場誤差がある場合の
チューンシフトの式と同型
＝　**Δp / p**に比例したチューンシフトを生じる。

$$\Delta Q_x = \xi_{x0}\frac{\Delta p}{p}$$

$$\Delta Q_y = \xi_{y0}\frac{\Delta p}{p}$$

$$\xi_{x0} = -\frac{1}{4\pi}\int_0^C \beta_x(s)K_x(s)ds$$

$$\xi_{y0} = -\frac{1}{4\pi}\int_0^C \beta_y(s)K_y(s)ds$$



ξ_0を**ナチュラルクロマティシティ**と呼ぶ。
（**無補正状態のクロマティシティ**）

ナチュラルクロマティシティ補正の必要性について

理想粒子の運動量p_0の周りで粒子集団が
運動量偏差$\Delta p / p$ (RMS)を持つ場合、粒子集団は

$$(\Delta Q_x, \Delta Q_y) = (\xi_x \Delta p / p, \xi_y \Delta p / p)$$

のチューンシフト（RMS）を持つことになる

→ $(Q_x, Q_y) = (Q_{x0} + \Delta Q_x, Q_{y0} + \Delta Q_y)$が共鳴条件にかかる
$iQ_x \pm jQ_y = k$でi, j, kは整数

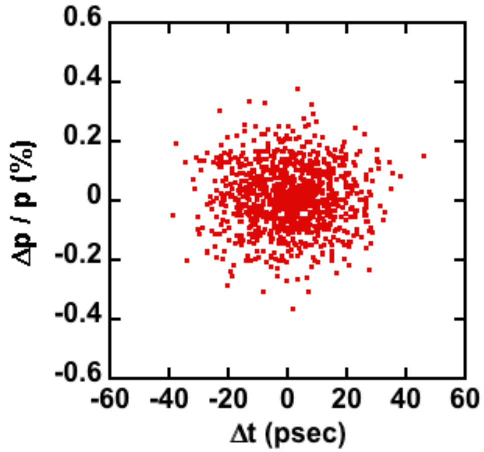
→ ビームが不安定になる

クロマティシティを「共鳴が起きない程度の大きさ」
に抑える必要がある。

ナチュラルクロマティシティによる
チューンシフトの例

	SPring-8 Storage ring
Betatron Tune (Q_{x0}, Q_{y0})	(41.14 , 19.35)
Natural Chromaticity (ξ_x, ξ_y)	(-117 , -47)
$\Delta p / p$ (RMS)	0.1 %
$(\xi_x \Delta p / p, \xi_y \Delta p / p)$ (RMS)	(-0.12, -0.05)

粒子集団が持つ$\Delta p / p$の例



クロマティシティ補正について

六極磁場を考慮した時のベータトロン振動の式を

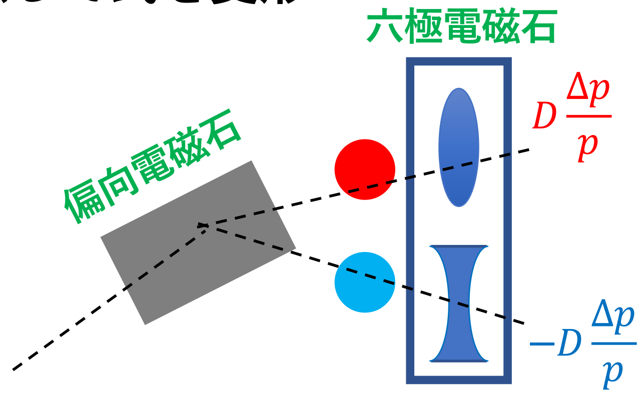
$$x'' + K_x(s)\left(1 - \frac{\Delta p}{p}\right)x = -\frac{B''}{2B\rho}x^2$$

$$y'' + K_y(s)\left(1 - \frac{\Delta p}{p}\right)y = \frac{B''}{B\rho}xy$$

で近似する。更に分散関数による閉軌道 $x = x_0 + D\Delta p / p$ を考慮して式を変形：

$$x_0'' + \left\{K_x(s)\left(1 - \frac{\Delta p}{p}\right) + \frac{B''}{B\rho}D\frac{\Delta p}{p}\right\}x_0 \approx 0$$

$$y'' + \left\{K_y(s)\left(1 - \frac{\Delta p}{p}\right) - \frac{B''}{B\rho}D\frac{\Delta p}{p}\right\}y \approx 0$$



赤字の部分が作るチューンシフトの式

$$(\Delta Q_x, \Delta Q_y) = \left(\xi_{x0}\frac{\Delta p}{p} + \frac{1}{4\pi}\frac{\Delta p}{p}\int_0^C \frac{\beta(s)B''(s)}{B\rho}, \xi_{y0}\frac{\Delta p}{p} - \frac{1}{4\pi}\frac{\Delta p}{p}\int_0^C \frac{\beta(s)B''(s)}{B\rho}\right)$$

から

$$\xi_x = \xi_{x0} + \frac{1}{4\pi}\int_0^C \frac{\beta(s)B''(s)}{B\rho}$$

$$\xi_y = \xi_{y0} - \frac{1}{4\pi}\int_0^C \frac{\beta(s)B''(s)}{B\rho}$$

となるように六極磁場を与えれば良い。

1. ξ_x, ξ_y が補正済みのクロマティシティとなる。
2. ξ_x, ξ_y をゼロにするとビームが不安定になる。通常、左辺はゼロにはしない。

前半のまとめ

ビーム調整に必要となるので、まずビーム物理の基礎について紹介した。

- 講義時間の都合上、式の導出やビーム物理の難しいところは省略した。（テキストに任せる）

ビーム調整の目的が「ビームの再現性」、「ビームロスの抑制」と考えると、
刻々と変わる摂動（エラー）の影響をいかに抑えるかが、ビーム調整では重要。

そのために、

- まず無摂動のビーム物理を学び、
- 次に摂動（エラー）を加えるとどうなるかを学ぶ

のが重要かと思う。

講義の後半は電子蓄積リングについて

- どういうモニターであれば摂動を受けた現象を観測できるか
- 観測した現象に対してどういう対処をするか

の一例を紹介する。