

ビームモニター概論

1 はじめに

1.1 OHO20 全体に関して

本年 2020 年は「ビーム診断の基礎」をテーマとして 14 名の講師に講義をお願いしました。ビーム診断に関する講義はこれまでの OHO にもたびたび出てきたテーマでもあり、詳細なテキストも公開されています。それらの講義には基礎から最先端の技術や研究成果なども含まれていますので、いまさら診断を取り上げる必要性はあるのかとも考えましたが、ここで基本に立ち返ってあくまでも「基礎」として診断に関するトピックスをまとめて取り上げることに意義があることだとの結論に至りました。できるだけ広いテーマをカバーすることを目指しましたが、残念ながら近年のビーム診断・ビーム制御ではとても重要な「デジタル信号処理」について専用の枠をもうけることが出来なかったのは心残りです。いずれこのテーマで集中的に講義をおこなうことを期待しています。

また、実際の講義にあたってはコロナウィルスの影響もあり初のオンライン(リモート)開催となりました。全体としてはとても順調に進行し、大きなトラブルはありませんでした。参加者数も例年より多く、むしろ遠隔地から気軽に参加できるのはメリットとなったようです。一方で受講者にとっては一日中 PC の前で聴き続けることはかなりの負担となったようですし、講師の側からみると受講者の反応が見づらいなどの欠点もありました。色々な御意見は今後の OHO 講義への参考としたいと考えておりますので事務局または講師まで連絡いただければ幸いです。

蛇足ですが、今回の OHO'20 では似たようなトピックスが何度か登場します。これは「重要なことは繰り返し出てくる」と理解して頂きたく存じます。

1.2 本文書のスタイルについて

最初にこの文章のスタイルに関して 1 つコメントします。これまでの OHO テキストと同様に教科書スタイルとして文章として書くやりかたを考えたのですが、せっかく既に講義が終了しているというメリットを活かした方が良いと考えました。そこで、ここでは作成したスラ

イドを参照することを前提として、実際の講義で話したことを文章で書きながらスライドの行間を埋めていくスタイルをとります。結果としてこの文書はスライドの補足資料という位置づけになるかと思います。また、実際の講義で話した内容+追加コメントなども可能なかぎり反映してありますし、講義では時間がなく話さなかった余談も追記しています。該当するスライドページ番号を reference 形式で記載していますので参照してください。テキスト印刷版は白黒ですが、PDF やスライドファイルはカラーになっていますので判別できない場合はそちらを参照してください*1。

筆者の浅学非才により間違い・勘違いなどが含まれている可能性は高いのでそのつもりで読んで頂ければ幸いです。

1.3 本講義の概要～導入

本講義「ビームモニター概論」では今回の OHO レクチャー全体の導入となるような基礎的な内容を講義いたします [Slide p3]*2。特に

- 何のためにビームモニターが必要なのか理解する
- 基礎的なビームモニター (ビーム位置・ビーム強度) を理解する
- 用語に慣れる

ことを主眼としています。古典的な電磁気学の前提は必要ですが、大学の学部生であれば十分理解できるようなものを目指します。また、正確性や詳細よりも全体像を描くことが出来ればと考えて準備したつもりですが、結果としてうまくいったかどうかは分かりません。高度な内容は私の講義ではなく、他の講師による講義や過去の OHO 講義のテキストを参照してください。

1.4 ビーム診断に関連する情報

OHO セミナーでの講義を通して加速器やビーム診断に興味をもった場合に、より詳しい内容や進んだ情報をどのようにして探せばよいのかについてコメントします。最初のキーワードはビーム診断 (Beam Diagnostics) や

*1 本来ならば白黒でも判別できるように図表を準備すべきです。申し訳ございません。

*2 これは L^AT_EX の引用を忘れたのではなく、講義プレゼン資料のページ番号を示しています。以下同様に記述します。

ビーム計測・計装 (Beam Instrumentation ^{*3}) でしょう。代表的な国際学会としては IBIC があります。これは以前に米国で開催されていた BIW と、欧州で 1 年おきに開催されていた DIPAC にアジア地域を加えて毎年開催するようにしたものです。今年 2020 年はブラジルで開催予定でしたが [Slide p4] コロナのためオンライン開催となりました。

1.5 Faraday Cup Award

IBIC には “Faraday Cup Award” とよばれる賞があります [Slide p5]。この賞の名前はもちろん電荷を測定するためのファラデーカップとかけたものです。過去に日本人も受賞されています。もちろん賞のために研究するわけではありませんが、このような企画があることは嬉しい話だと思います。残念ながら 2020 年は「該当なし」となりました。今後に期待したいところです。

1.6 各種の情報源

加速器スクールも多く開催されています [Slide p6]。トピックスは年によって異なっており、診断に関する多くの講義資料が公開されています。とはいえ、情報が多すぎて悩んでしまうかもしれません。1 つ推薦するならば CAS2008 は “Beam Diagnostics” と題して開催されていますので、診断に関するトピックスを多く取り上げています。概観するには適切と思います。
<https://cas.web.cern.ch/schools/dourdan-2008>

以下に代表的な国際加速器スクールとリンク情報を列挙します:

- CERN Accelerator School (CAS)
<http://cas.web.cern.ch/>
- U.S. Particle Accelerator School (USPAS)
<http://uspas.fnal.gov/index.shtml>
- US-CERN-Japan-Russia Joint International Accelerator School
<http://uspas.fnal.gov/programs/JAS/index.shtml>

^{*3}Instrumentation という用語には「楽器法」という意味もあります。歌詞や歌唱の無い、音楽だけの曲のことをインストゥルメンタルと呼んだりするので一般的にはこちらの方がなじみ深いかもしれません。後述する Faraday Cup Award のポスター絵にも楽器が出てくるのはこのあたりをにかけているとの話。加速器用語には Tune, Harmonics など音楽と関係しそうなものもあります。

- Joint Universities Accelerator School (JUAS)
<https://espace.cern.ch/juas/SitePages/Home.aspx>

さらなる詳細についてはこれらスクールの講師に直接コンタクトをとって議論するのが良いかもしれません。

過去の OHO テキストは日本語による質の良い情報源です。毎年 1 つは診断に関連したトピックスが取り上げられていますので参照してください。<http://accwww2.kek.jp/oho/index.html>

近年では、加速器制御とビーム診断・制御は深く関係していますので、制御関係の最新情報を知っておくことはとても有益になるでしょう。該当する大きな学会としては ICALEPCS (International Conference on Accelerator and Large Experimental Physics Control Systems) です。<https://www.icalepcs.org/> また、診断に限らず、加速器全般の話まで考えると、やはり IPAC が参加人数・規模ともに最大の国際学会といえます。一方であまりに幅広い分野の発表があるために、トピックスが広がりすぎてしまい、詳しい情報を得ようとするとなかなかという面もあります。しかし、多くの研究者・技術者や企業のディスカッションが可能という点で重要な学会であることは間違いありません。ICALEPCS、IPAC ともにプロシーディングスは JACoW で検索できます。ここが加速器研究者にとって非常に重要な情報源になっています。<https://jacow.org/>

スライドに記載しておらず、レクチャーの時には話さなかった重要な項目があります。それは学会プロシーディングスで概要を知った次のステップとして、原著論文を読むことです。(もちろん最初に原著論文から読む場合も多いでしょう)。加速器関係の論文が出される場所としては Physical Review Accelerators and Beams (通称 PRAB, <https://journals.aps.org/prab>) が最近ではもっとも有力な Open Access の論文となっています。もちろん、プレプリントの段階で Cornell 大学で運営されている arXiv サイト (<https://arxiv.org/>) は強力な情報源です。また、PRAB 以前から存在している雑誌で重要なものの 1 つとしては Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment (通称 NIM-A) でしょう。基本的には購読している組織からでないダウンロードできませんが、最近では NIM でもオープンアクセスとして出版される場合も増えてきたようです。また、ビーム診断関係の情報にだけに限ら

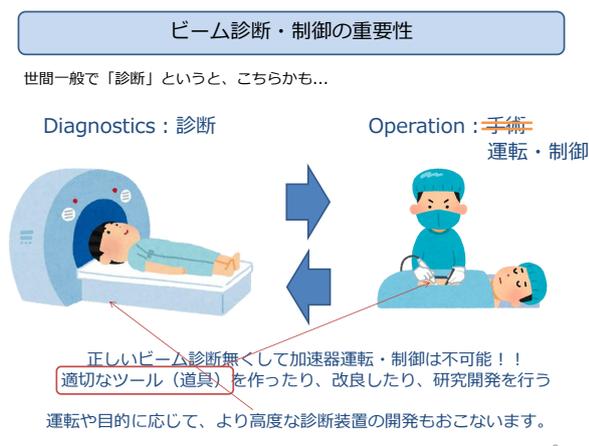
ず、「ビーム物理/Beam Physics」というキーワードで情報を収集すれば、より多くの知見が得られることと思います。

他にも論文誌は多くありますがキリがありませんので、最後に重要な情報源として加速器学会の Twitter アカウント https://twitter.com/pasj_jp を挙げておきます。投稿者の情報補足能力が極めて高いために、加速器関連のプレスリリースはもちろんのこと、主要雑誌への論文投稿もいちやくここに掲載されます。とても有益なのでぜひともこの投稿ペースを維持して欲しいと願っています。

ビーム診断に特化した教科書としては平松成範先生による「加速器のビームモニター」があります [Slide p8][1]。これは 2003 年度の技術職員専門研修のために書かれたものです。ビームスペクトルの話から CT, 位置モニターなど、今回の OHO で取り上げている項目はほぼカバーされているかと思います。詳細を知りたい方はこちらを一読されることをお勧めします（むしろ、これがあれば私の講義ノートを読むよりもためになる、と思います）。

1.7 ビーム診断の目的

ここから具体的な診断の話に入ります。ここで強調したかったのは「なぜ」診断が必要なのか、というところです [Slide p9]。正しい診断をしなければ運転が狂った方向へ行ってしまう可能性があり、危険です。そのために必要なツールを作ったり、改良したり、研究開発を行います。^{*4}



^{*4}と書いてはいますが、実は Operation=手術というネタを入れたかっただけという説もある

ビーム診断・制御の1つの理想としては、「これまでの装置では見えなかったものが見えるようになったり、ビーム制御ができるようになったりして、それがビーム性能の向上につながる」形です。もちろん、斬新なアイデアというものはなかなか出るものではありませんし、時間を要したりするものです。もっと根本的な話として、そもそもビーム性能を向上させて何を狙っているのかという問いがあるかもしれません。

どれくらい意識するかは別として、研究・開発を継続していくには、大きな目標と日々の小さな目標の両方が必要なのだと思います [Slide p10]。目的はいろいろあるでしょう。例えば高エネルギー物理を考えるとより高いエネルギーに到達したい、もっと大電流を蓄積したい、もっと高品質なビームが欲しい、などなどあるでしょうし、逆に低エネルギーのビームでしか測定できない物理現象もありますのでそのときにはまったく異なった加速器が欲しくなります。

また、1つの加速器を考えた時にも、加速器の建設からコミショニング時に求められる診断装置と、そこからビーム品質を上げていく（高度化する）ときに必要な診断装置とは全く性格が異なる場合が多くあります。もちろん、陽子加速器と電子加速器でも異なりますし、医療用加速器と高エネルギー物理用の加速器も異なります。当然ですが、すべてに使える万能な道具はありません。加速器固有に、それぞれの段階・目的に応じて、適切な道具立て（Instrumentation）を考えることが必須となるでしょう。そこが腕の見せ所、と考えて頂いても良いかと思います。既存の装置で見えることと、あらたな装置や技法でないと見えない事の区別は重要です。これから加速器やビーム物理に関わっていく若い人にとって、例えばいまさらオシロスコープを一からつくる必要はないのは明確ですから、原理を理解した上で既存技術を活用し（＝巨人の肩に乗った上で）過去の人が到達できなかった景色を目指して頂きたいと考えています。

1.8 加速器とビーム

図1に示す写真のクルックス管はとても出来が良く、きれいに電子ビームの軌道が見えています。外側にある補正電磁石で少し曲げていることも分かるかと思います。

それでは、実際にこのような加速器を目の前にしたとしてどのようなビームパラメータが知りたくなるのでしょうか？

- ビーム位置 (beam position)
- 電荷量 (粒子数=ビーム強度, charge)
- 横方向分布 = ビームサイズ
- 進行方向分布 = バンチ (電子塊) 長、時間分布
- エネルギー絶対値、エネルギー広がり
- エミッタンス (位相空間での分布)
- その他、知りたいことはたくさんあるでしょう...

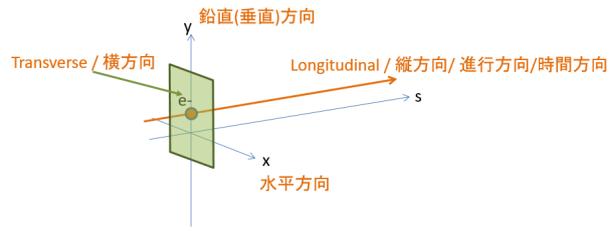


図 2: ビーム座標を示すときによく使われる用語



図 1: クルックス管は立派な電子加速器です

実際に、このクルックス管のビームパラメータをちゃんと測定しようと思うと、それなりに手間はかかりそうです。精度をどこまで出せるか。最初はカメラかなにかで位置を測定して、磁場をかけて曲がる大きさを見るあたりからスタートでしょうか。そのほかにも、装置としてカソードの寿命はちょっと気になるところです。

このクルックス管はガラス管でできていてガスが封入してあるので外から軌道がきれいに見えますが、実際の加速器では真空ダクトはステンレスやアルミ、銅などの金属で出来ていますので外からビームの状態をみることは出来ません。金属壁の内側にある電子ビームの状態をいかにして測定するかが課題となります。また、各種測定器を遠隔から操作する必要があるのも、少し面倒になります。トンネル内は放射線レベルも高いので電子回路もあまり設置したくない。色々な手法を駆使することになります。

最後に、今後の講義で出てくる用語について少し言及しておきます。スライド [Slide p16] 及び図 2 で説明しているように ビーム進行方向のことは Longitudinal 方向と呼び、場合によっては Temporal 方向と呼ぶ場合も多いで

す。ビーム進行方向に対して垂直の面方向を Transverse 方向と呼び、水平 (Horizontal) ・鉛直 (Vertical) の 2 方向を指します。“タテ方向” という用語は (ちょっと危険なことがあるので) 要確認です。それは Longitudinal 方向を指す場合と、鉛直方向を意味する場合があるからです。もちろん会話の文脈から分かる場合は多いですが、混乱を避けるためにはできるかぎり “タテ方向” という表現は避けた方が安全です。また、同様に「垂直方向」も危険なことがあります。つまり鉛直方向を示す場合と、ビーム進行方向に対して垂直な Transverse 方向を示す場合があるからです。

水平・鉛直ともにどちらを+にとるか (右手系なのか左手系なのか) は定義によって変わるのでケースバイケースで判断しましょう。

2 基礎電磁気学

詳しくは各自おすきな教科書を参照してください。例えば [2], [3], [4] などを挙げておきます。この章では必要な知識をざっとおさらいすることを目指します。

2.1 静電場・静磁場とポテンシャル

Coulombの法則

高校生の時に習う書き方：電荷 q_1, q_2 が距離 r 離れているときに及ぼす力は



$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

ベクトルで書くと：
$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 \mathbf{r}}{r^3} \quad \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

これは「力」の大きさと向きで電荷の相互作用を表すやりかた。
歴史的には静電力として実験されてきた

19

高校生のころに習うクーロンの法則は、電荷に働く「力」で定義しました。方向を示すためベクトル表示すると、単位ベクトル $\hat{\mathbf{r}}$ は $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ 。

歴史的には

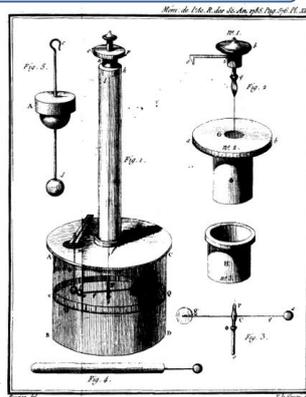
電荷なるもの：箔検電器



[↑ https://en.wikipedia.org/wiki/Electroscope](https://en.wikipedia.org/wiki/Electroscope)

Coulombの実験：ねじり天秤

https://en.wikipedia.org/wiki/Coulomb%27s_law →



歴史的には「琥珀^{*5}」を布でこすると静電気が生じ、これが「電荷」のようなものであるところまでわかっています。箔検電器が開くことで、なにか「力」を及ぼしていることがわかり、Coulomb は電荷量と働く力を関係をねじり天秤で精密に測定して法則を導き出しました。当時はこれが何かは分からないけれど、「力」を定量的に測定することで法則を見つけていった、という歴史です。

現在では電荷は「電場 (Electric Field)」をつくり、その場によって電荷が力を受ける、という考え方をとります。このあたり、ファインマン物理学の教科書にも記載

があります。ここで重要なのは「場」とそこからうける「力」を分けて考えることです。また、場は重ね合わせの原理が成り立ちます。

図は Wikipedia や Wikimedia から拝借しております。本当はこれらの図を書き直すと良いのかもしれませんが、下手に劣化コピーのようなものを書くよりはイメージをつかむことを重視してこれらの外部リソースを有効に活用させていただきます。

電場、という考え方

q_1 は「電場 (Electric Field)」をつくり、

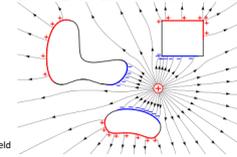
$$\mathbf{E} = \frac{q_1 \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

それによって q_2 が受ける力は

$$\mathbf{F} = q_2 \mathbf{E}$$

となる。(ファインマン物理にも記載があるが)「分けて考える」ことが重要。

電場を視覚的に表すためには電気力線を使うことが大部分(3次元表示は通常は不要)。密度が濃い場所は電場が強く、密度が薄い場所は弱い



https://en.wikipedia.org/wiki/Electric_field

21

電場を視覚的に表すためにはベクトルで表現したり、色を変えたり、3次元的に表現するなど色々なやりかたがありますが、通常は電気力線を使うのが便利です。電場が強い場所では線と線の間隔を狭く(=線の密度を高く)表現し、電場が弱い場所は間隔を狭く(=密度を低く)表現します。線の本数は1クーロンあたり $1/\epsilon$ 本などと定義はできるのですが、実際に図示するときはそもそも電荷量が何クーロンか気にすることはないので適当に見やすいようなスケールになるように調整することが多いように思います。また、図では金属があるときに表面に誘導電荷が発生することや、反対側に逆極性の電荷が発生することなどが表されています。そのほか、金属にとがった部分があると電場が集中することも表示されていることがわかります。

電荷 Q が静止しているとき(あるいは静止系で観測するとき)、電場は3次元自由空間に発生し、分布は球状になります(図3)。電荷を囲む閉曲面で積分すると、内部に含まれる電荷になります。これがいわゆる電場に対するガウスの法則(Gauss's Law)です [Slide p22]。

*5electron の語源は琥珀のギリシャ語読み

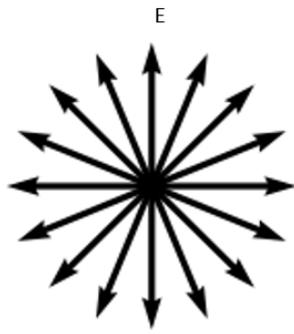


図 3: 電荷 Q のつくる静電場

電場に対するガウスの法則を積分形で表わすと

$$\int \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1)$$

微分形では

$$\text{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (2)$$

となります。

電場 \mathbf{E} に対して、スカラーポテンシャルとして電位 (electric potential) V が定義できます [Slide p23]。

$$\mathbf{E} = -\text{grad}V \quad (3)$$

そして静電場では $\text{rot} \mathbf{E} = 0$ となることも重要です。これは直感的にイメージしやすいでしょう。ここで肝心なのは電場というものはポテンシャルからできている、という考え方です。

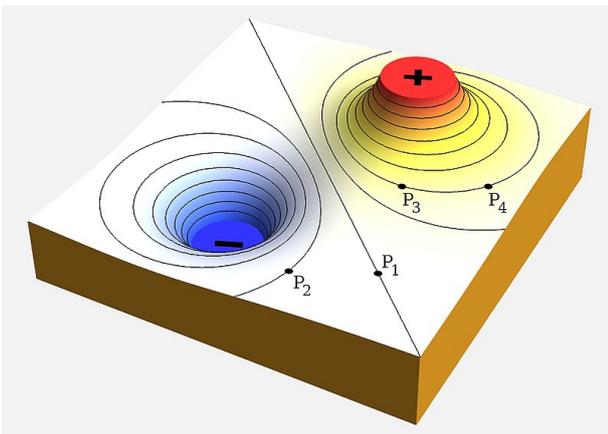


図 4: 電場ポテンシャルの 3次元表示。画像は [wikimedia commons](#) より [5]

同様に、静磁場に対する重要な法則を 2つ [Slide p24]。1つは磁場に対する Gauss の法則で、これはある閉曲

面を考えてなかに磁石をおくと直感的にわかるように、「湧き出し」も「吸い込み」もないこと。すなわち、磁束線は閉曲線となりモノポールは存在しない、となります (図 5)。

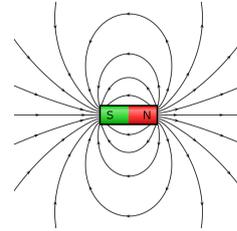


図 5: 磁石のまわりに出来る磁場の例。画像は [wikimedia commons](#) より [6]

磁場に対するガウスの法則を積分形で表すと

$$\int \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0 \quad (4)$$

微分形で表すと

$$\text{div} \mathbf{B} = 0 \quad (5)$$

となります。

磁場に関するもう 1つは、電流の周りに磁場が生じる、Ampere の法則。

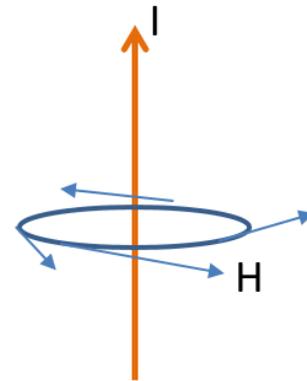


図 6: 電流が流れると回りに磁場が生じるアンペールの法則

このアンペールの法則を積分形で表すと

$$\int \mathbf{H} d\mathbf{l} = I \quad (6)$$

微分形で表すと

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad (7)$$

となります。

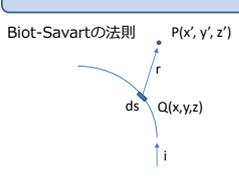
それでは、このような場があるときに「ポテンシャル」は定義できるのでしょうか？電場のような湧き出しのある場ではスカラーポテンシャルを考えてその grad で電場を導くことが出来ましたが、湧き出しが無く回転のある場では $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$ としてポテンシャル \mathbf{A} を定義することができます。これはスライド [Slide p25] に書いたように、発散がゼロのベクトル場 \mathbf{X} があれば、別のベクトル場 \mathbf{Y} から \mathbf{X} を導くことができるという関係があることによります。(これは $\text{div}\mathbf{X} = 0$ であれば、 $\text{div}(\text{rot}\mathbf{Y}) = 0$ という関係式が恒等的になりたつことから理解することができます)。

一方で、たとえば多数の永久磁石を考えるときには、磁子とか、ポテンシャルとして磁位を定義する方が取り扱いが楽になる場合もあります。

さて、ここでいつも初学者を悩ませる(?)問題があります。スカラーポテンシャルはなんとなく理解できるのですが、ベクトルポテンシャルとはいったい何なのか？本当に存在するのか？単なる便利なツールなのか？ということです。これに答える前にまずはベクトルポテンシャルと、それがつくる磁場の関係について簡単な例で考えます。

電流素片 ds がつくる磁場

Biot-Savartの法則

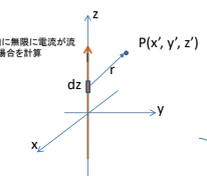


$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ids \times \mathbf{r}}{r^3}$$

ここから、ベクトルポテンシャルAは以下のようにあらわすことができる

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{ids}{r}$$

z方向に無限に電流が流れる場合を計算



$$A_x = A_y = 0$$

$$A_z = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + (z' - z)^2}}$$

このとき、Aはz成分のみで、x,yが遠ざかるにつれて小さくなる。小さくなり方によって回転(rot)してそれが磁場。



26

電磁気の最初の方で習う、ビオ・サバルの法則。一定の電流がつくる磁場は「右ネジの法則」で示されるように電流の回りに渦をまいています。ではその電流を（物理では常套手段ともいえる）微小に分割した「素片」が生成する磁場 $d\mathbf{B}$ を考えるとスライド [Slide p26 上] に示した式で表すことが出来ます。磁場を求めるにはそれを電流の経路に沿って積分すれば良いわけです。これをベクトルポテンシャルを使って表したのがその下の式となります。

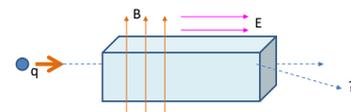
とても単純な場合として z 軸に沿って無限長の電流が流れる場合を考えてみます [Slide p26 下]。電流素片 ds がつくるポテンシャルは $ds \times r$ なのでベクトル積の向きを考えると $A_x = A_y = 0$ となるのは明確。そして A_z 成分は電流からの距離に依存するので上に書いた式の通りになります。 A_z の大きさは電流から離れるにしたがって減衰し、図に示したある場所を考えると、左右でベクトルポテンシャルの大きさが異なります→これによって回転 $\text{rot}\mathbf{Y}$ が生じて、それで磁場ができると思えば、イメージしやすいのではないのでしょうか（ベクトルポテンシャルという川の流れがあり、あるポイントに注目すると左右の流れる量に差があれば水車がまわり、それ磁場であるというイメージ）。

余談になりますが、初めてベクトルポテンシャルを習ったときには、単に「便利だから」「ツールとして」という説明があったようにも記憶しています。古典電磁気ではなく、量子力学まで行くと話が変わってくるので興味がある人は“AB効果”とかで検索（勉強）していくとその先の世界が開けるかもしれません。今回の講義範疇からは外れるのでここまで。

2.2 ローレンツ力

ローレンツ力

電場および磁場がある環境で、電荷qが受ける力は

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$


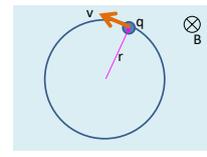
例えば一様磁場中の粒子は等速円運動

$$m \frac{v^2}{r} = qvB$$

このとき1周にかかる時間は

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$$

サイクロトロン周期 (半径rによらない)



また、運動量pとすると $p = qBr$ と書ける = 半径を測れば、運動量がわかる。

さて、ここまでで静電場・静磁場の話をしてきましたが、加速器で肝心なのはこのような場の中を荷電粒子が通過したときに何が起こるか、です。それはローレンツ力の式ですべて表されています [Slide p27]。

一様磁場中を運動する粒子の式は上の通りで、1周にかかる時間は半径によらず一定となります。これをサイクロトロン周期、と呼びます。また、電荷と磁場の大きさが分かっていたら軌跡の半径を測ることで粒子の運動量がわかります。

2.3 時間的に変化する場

静電場・静磁場から時間的に変化する場へ：電磁誘導

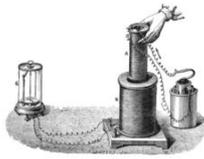
磁束の時間変化に応じて起電力が生じる

$$V = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

よくある説明として「磁束の変化を打ち消す方向に電流が流れる」という表現をする(レンツの法則)

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$



ファラデーの電磁誘導実験 https://en.wikipedia.org/wiki/Electromagnetic_induction

(磁場の中で導線が動くとき、電子がLorentz力 $F = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ で動く、と考えても良い)

28

これまでの章で静的な場について話をしてきました。ここからは時間的に変化する場について、ざっと復習します。最初のステップとしてはファラデーの電磁誘導実験に代表される、「磁束が変化すると起電力が生じる」という現象です [Slide p28]。おそらく中学生か高校生の頃には、最初に「磁束の変化を打ち消す方向に電流が流れる」と説明されたかもしれません。これはこれで現象として正しいのですが、「なぜ打ち消す方向に電流が流れるのか？」という説明には応えることができません。

ここまで読んだ人には既に明確なことです。「磁場の中で導線を動かすと、電子が磁場からローレンツ力を受けて動く」という考え方で全く同じ結果を導くことができます。

Maxwell方程式へむけて

ここまでをまとめると

$$\begin{array}{ll} \text{div}\mathbf{D} = \rho & \text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{div}\mathbf{B} = 0 & \text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{電荷の保存(連続の式)と矛盾する} \\ \text{div}\mathbf{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \end{array}$$

Maxwellは定常(または準定常電磁場)で成り立つアンペールの法則(ビオ・サバールの法則)を拡張し、時間変化をともなう場について変位電流と呼ばれる概念を導入した。

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

真電流 変位電流

29

ここまでの電磁場に関する法則をまとめると、スライド [Slide p29] 左上に記載した4つの式が出てきますが、

実は電荷の保存を考えるとおかしいことが起きてしまいます。例えば、ある領域で電荷密度が時間変化するということは $\partial\rho/\partial t$ となることに相当し、これは電流がそこから出てくると等価です。つまり $\text{div}\mathbf{J} = -\partial\rho/\partial t$ となるはずですが、これに対して、先に出てきたアンペールの法則 $\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J}$ という式は両辺の div をとると左辺は $\text{div}(\text{rot}\mathbf{H}) = 0$ ですから、整合性がとれずおかしいこととなります。そこで、Maxwellはアンペールの法則を拡張して「変位電流」と呼ばれる概念を導入しました。これで4つの基本式が出来上がります。歴史的にはMaxwellは色々なモデルを構築したらしいのですが、最終的な結論としてこの4つで時間変化する電磁場を全て矛盾なく記述することが出来ました。

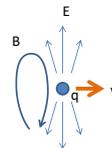
変位電流は、例えばコンデンサーの中を流れる電流として理解するのが簡単です。

2.4 Maxwell方程式と電磁波

Maxwell方程式

電荷が動くとき、電磁場を発生する (EM-field)

$$\begin{array}{l} \text{div}\mathbf{D} = \rho \\ \text{div}\mathbf{B} = 0 \\ \text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \\ \text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \end{array}$$



where

$$\begin{array}{l} \mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \\ \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} \end{array}$$

30

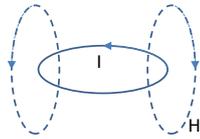
このページは、これまでに出てきた式をまとめたものです。この4つの式をまとめて Maxwell 方程式と呼びます。^{*6}この式をみると、電場の時間変化が磁場をつくり、磁場の時間変化が電場をつくるのが分かります。これらをまとめて電磁場 (Electro-Magnetic Field, EM-Field) と呼びます。

日常生活では電子は金属中に存在しており、たとえば電池に導線をつなぐと電流=電子の流れをつくることができます。これを時間変化させると、Maxwell方程式からの帰結として電磁波が空間を伝搬していくことが分かります。それを模式的に示したのが [Slide p31] です。

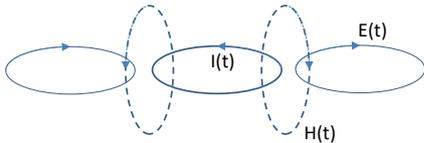
^{*6}この絵だと相対論的效果が入っているかのように見えてしまうので.... あまり良くなかったかもしれない。Maxwell方程式から出てくる電磁波の放射は相対論とは関係無く成立します。

マイクロ波の伝播:定性的な説明

電流ループがあるとすれば、Hが出来る。静磁場であればこれだけ。

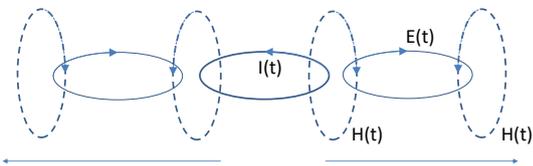


電流ループが時間変化すれば、伝播していく



マイクロ波の伝播

次々と伝播していく



$$\text{真空中のとき} \begin{cases} \text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

ここでは円環状に定常電流 I が流れるときに磁場 H ができることを示します。そして、 I が時間変化すると磁場 H も時間変化します。すると $E = \partial B / \partial t$ なので変化する磁場の周りに電場が生じます。これを繰り返していくことで [Slide p32] に示すように空間に電磁波が飛び出していくことになります。これがアンテナです*7*8。

ここまで媒質中の Maxwell 方程式を記載してきましたが、加速器のモニター機器の場合、真空（あるいは大気）中での伝播を扱うことが多いと思います。その場合は真空中の誘電率と透磁率を使用し、また、その空間では実電流 J が流れずに電磁波だけを取り扱うので、もっと簡略化した関係式 [Slide p32] の最後の式だけで十分

*7 図では便宜的に横方向のみに伝搬していくような絵をかいていますが、本来ならば3次元的に飛んでいき、その方向は「指向性」で示します。例えばダイポールアンテナの8の字指向とか、八木アンテナの指向性など、アンテナの形状を工夫することによってある方向に限定して電磁波を放出したり、逆に受信できるようになります

*8 加速器のように自遊空間を電子が飛んでいくのと異なり、金属中で動くのは伝導帯にいる自由電子だけです。そして電子自体が動く速度は「ものすごく」遅いです。しかし、金属中の電子の数は加速器中の電子とくらべて圧倒的に数が多いため、ほんの少し動くだけで大きな電場を作ることができます。アボガドロ数 (6×10^{23}) は超巨大です。

となります。

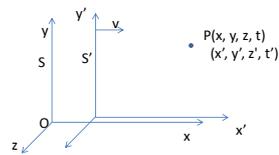
2.5 特殊相対論と電磁場

加速器では電荷が光速に近い速度で運動します。このときに観測される電磁波はどのようなのでしょうか？まずは特殊相対性理論を復習します。

ここでは2つの完成座標系 S および S' を考えます*9。

特殊相対論と電磁場

光速度不変の原理 → 時空の相対性を簡単に説明します。
ここで、2つの慣性座標系 (S, S') を考え、 x 軸に方向に v で進むことを考える



2つの系での座標変換を考えると、 y, z については運動していないので $y' = y, z' = z$ となり、古典的なガリレイ変換 (Galilei Transform) では x, t について $x' = x - vt, t' = t$ となるが、 v が光速に近づくにしたがって従来の考えでは不十分となった。(歴史的には Michelson-Morley 干渉計での実験など)

そして S' 系が x 軸方向に速度 v で進むことを考えたとき、座標変換は y, z についてはそのまま、 x については $x' = x - vt$ となります。これがいわゆる古典的なガリレイ変換 (Galilei Transform) です。そして $t' = t$ となるのはあまりにも自然だったのでここを疑う余地は日常生活の範囲ではあり得ないわけです。ところが、有名な Michelson-Morley による干渉計での実験のころ、このガリレイ変換では説明できない現象が出てしまったのです。たとえば、地球は自転+公転の両方おこないながら太陽のまわりをまわっているのだから、ここで書いたような東西方向には x 方向に動く成分があるのに対して南北方向には移動速度の効果が無いはずですが、しかし、実験結果はこれでは説明できませんでした (測定精度を上げても同時に光が戻ってくる)。

そこで、新たな変換式として、1次変換の形を仮定し

*9 どうでも良い話ですが、 S は System (=系) の頭文字、 P は Point (=点)、原点 O は Origin の略だし、速度 v は velocity。質量 m は mass、加速度 a は acceleration、力 F は Force、と。これらの記号は中高校生の頃から天下り的に使っているのほとんど意識することは無かったのですが、仕事量 W について、英語の Work だと知ったのはずいぶん後..... 仕事関数 (Work Function) という文章を読んでこのことに気づくという情けなき。英語の教科書を読めば、とても素直にこれらの変数名の意味が流れてくるんですけど日本語の中学・高校教科書には「なぜこの記号を使うのか」という説明が無かったですね.... まあ、当たり前すぎてわざわざ書くまでもない、ということなのでしょうか。

てみます。

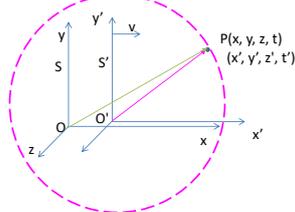
$$\begin{cases} x' = px + qt \\ t' = rx + st \end{cases} \quad (8)$$

これは単に x, t についてお互いになんらかの関係を持つということを表しているだけで、ここから p, q, r, s がそれぞれどのような形になるのかを求めるのが目的です。

特殊相対論と電磁場

そこで、新たな変換式として以下の形を仮定してみる。

$$\begin{aligned} x' &= px + qt \\ t' &= rx + st \end{aligned} \quad *$$



$t=0$ (when $O=O'$) のときに光を発したとする。
光の波面は伝播して点Pに到達する。どちらの系で見てもその波面は球の表面として表現できるので、波面の方程式は以下ようになる：

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= c^2 t^2 \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 &= c^2 t'^2 \end{aligned} \quad \text{光速不変}$$

35

さて、S系とS'系の原点が一致したときを $t=0$ として、その瞬間に光を発したとします。その波面は伝播していき、観測者Pの位置に到達します。どちらの系で見てもPに到達した時点では波面は球状に広がっていきますので、以下のような関係式がなりたちます。ただし「光速はどちらの系でも不変である」という原理をおいています。

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \end{cases}$$

ここで $y' = y, z' = z$ ですので書き直すと、

$$x'^2 - c^2 t'^2 = x^2 - c^2 t^2$$

の関係が得られます。ここに先ほど仮定した x', t' に関する変換式 (8) をいれると

$$(px + qt)^2 - c^2(rx + st)^2 = x^2 - c^2 t^2$$

が得られます。この式が任意の x, t に対して成立するために必要な p, q, r, s を求めると

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \end{cases} \quad (9)$$

ここで $\beta = v/c$ としています。これがローレンツ変換 (Lorentz Transform) です。つまり、 v が非常に速いと

ときには (x, y, z) と t は独立ではなくなり、 (x, y, z, ct) が1つのベクトルの4つの成分として取り扱うことが必要になります。これがいわゆる4元ベクトル (four vector) です。

ここまでだと単なる変換だけの話ですが、アインシュタインの導入した考えは、「S, S' は対等な空間であって、どちらが正しいということはない」というものでした。すなわち、「自然界の法則は2つの系S, S'のいずれからみても同じ形で表される」= 相対性原理 (principle of relativity) が成り立ち、運動方程式やエネルギー保存則など様々な自然法則はこの原理に適合するような形になおしたものが真の自然法則である、という考え方です [Slide p37]。これに従うと、たとえば質量 m は不変のものではなく v によって変わるということになりますし、エネルギーも変わります。この辺を詳細に解説しはじめると時間が足りなくなりますし、よい教科書もほかにありますのでそちらに譲り、ここでは結果として得られる相対論でいくつか重要な式を [Slide p39] に掲載するに留めます (ここであらためてフォローすることは行いません)。

ここから

S, S' は対等な空間であって、どちらが正しいということはない。
「自然界の法則は2つの系S, S'のいずれからみても同じ形で表される」
= 相対性原理 (principle of relativity)

運動方程式やエネルギー保存則など様々な自然法則はこの原理に適合するような形になおしたものが真の自然法則。

↓

たとえば、物体の質量 m は速度 v によって変わり、静止質量を m_0 とすると

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

となることなど、エネルギーは以下のようにあらわすことができる。

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma m_0 c^2$$

相対論でよく出てくる式など (説明はskip)

Energy E , rest mass m_0 , speed of light c , speed of particle v

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma m_0 c^2$$

where

$$\beta = v/c; \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}; \beta = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}$$

now introduce a momentum p

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_0 \beta c}{\sqrt{1-\beta^2}} = \beta \gamma m_0 c$$

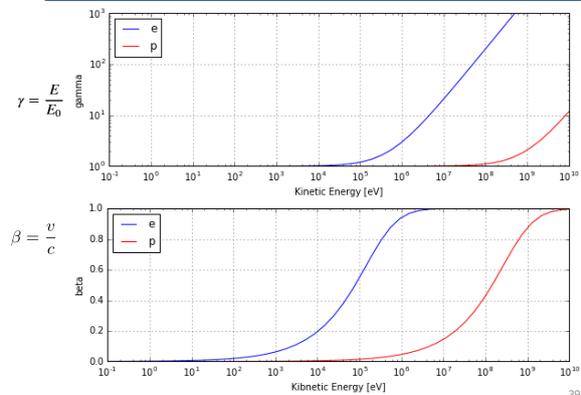
On the other hand, from the relationship $p = \frac{E}{c^2} v, \gamma^2(1-\beta^2) = 1$

you can confirm $E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$
 $E = m_0 c^2 + T$

$$\gamma = \frac{E}{m_0 c^2} = \frac{E}{E_0}$$

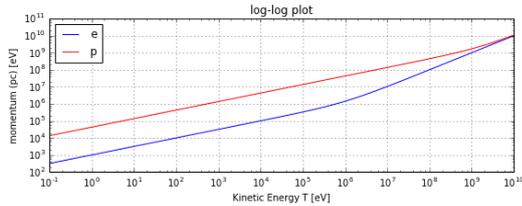
加速器に関する重要な項目として、電子および陽子を加速したときに $\gamma = E/E_0$ および $\beta = v/c$ がどうなるかを図示したものが [Slide p39 - 40] です。

Kinetic Energy and β, γ of e^-, p



39

Kinetic Energy vs momentum



- GeVクラスの電子加速器では相対論効果を気にすることは(意外と)少い
 > $\beta = 1$, $\gamma \gg 1$ で良い (ultrarelativistic limit; 超相対論的極限)
- 陽子(重粒子)のマシンや、電子でも低エネルギーマシン(KEKではcERLなど)では大きな効果があります

その他色々出てくるのですが、とりあえず電磁気の話に戻ります

40

ここで意識すべきことをいくつか記載しておきます:

- 電子は数 kV でかなり速くなる
- 陽子は重く、GeV クラスまで加速しないと光速に近づかない
- 電子も 1 MeV 程度だと微妙に相対論的効果が効く領域 ($\beta = 1$ と考えてはいけない領域)
- 電子で 100 MeV 超えたら超相対論的領域 ($\beta = 1$, $\gamma \gg 1$) として良さそう

相対論のなかでもビーム診断に必要な電磁気の話に戻ります。すなわち、Maxwell 方程式を Lorentz 変換してちゃんと相対論的領域で成り立つ形式に直すということです。ここでも x 軸方向だけに進む系 S' での話を考えると [Slide p41] に記載する結果となります。

Maxwell方程式の相対性

Maxwell方程式をLorentz変換する。(x軸方向に運動する系S'(x'))

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \text{div} \mathbf{D} = \rho$$

より、簡単のため電流密度 $\mathbf{J}=0$ 、電荷密度 $\rho=0$ の場合を考えて

$$\begin{cases} D_{x'} = D_x, & D_{y',z'} = \gamma \left[D - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \right]_{y,z} \\ H_{x'} = H_x, & H_{y',z'} = \gamma [\mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D}]_{y,z} \end{cases}$$

同様に

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{div} \mathbf{B} = 0$$

より、

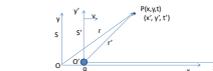
$$\begin{cases} E_{x'} = E_x, & E_{y',z'} = \gamma [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]_{y,z} \\ B_{x'} = B_x, & B_{y',z'} = \gamma \left[\mathbf{B} - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{E}) \right]_{y,z} \end{cases}$$

41

では、電場と磁場がどのような形になるかを具体的に(簡単のため x-y の 2 次元平面で考える) 示したものが [Slide42~45] です。

運動する電荷のつくる電磁場：相対論的

電荷 q が速度 v で動く場合(簡便のため、2次元 x-y 平面で考える)



静止系S(O'x'y')では磁場は無く、電場のみ

$$\begin{aligned} E_{x'} &= \frac{q\mathbf{r}'}{4\pi\epsilon_0 r'^3}, & B_{x'} &= 0, \\ E_{y'} &= \frac{q\mathbf{r}'}{4\pi\epsilon_0 r'^3}, & B_{y'} &= 0, \\ E_{z'} &= 0, & B_{z'} &= 0, \end{aligned}$$

各要素ごとに書き下すと

$$\begin{cases} E_x = E_x, & E_y = \frac{q\mathbf{r}'}{4\pi\epsilon_0 r'^3} = \frac{q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_z = \gamma(\mathbf{E} - \mathbf{v} \times \mathbf{B})_z = \gamma E_z = \frac{q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ B_x = \gamma(\mathbf{E} - \mathbf{v} \times \mathbf{B})_x = 0 \\ B_y = \gamma\left(\mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}\right)_y = -\gamma B_y + \frac{\gamma}{c^2} (v_x E_z - v_z E_x) = 0 \\ B_z = \gamma\left(\mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}\right)_z = -\gamma B_z + \frac{\gamma}{c^2} (v_x E_y - v_y E_x) \\ = -\frac{\gamma}{c^2} E_y v_x + \frac{\gamma}{c^2} E_x v_y = \frac{\gamma}{c^2} \frac{qv}{4\pi r^3} \sin^2 \theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \\ \vec{B} &= \mu_0 \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \vec{E} \end{aligned}$$

電子に乗った系から静止系(S)へ変換 $E, \mathbf{B} \rightarrow E', \mathbf{B}'$

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x, & E_{y,z} &= \gamma(E'_y - \beta \times B'_z) \\ B_x &= B'_x, & B_{y,z} &= \gamma\left(B'_y + \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{E}')\right)_{y,z} \end{aligned}$$

座標 OP も同様に変換される $r \rightarrow r'$

$t=0$ (when $O=O'$)のときに O のベクトルは以下のようになる

$$x' = \gamma x \quad y' = y \quad z' = z = 0 \quad t' = \gamma \left(-\frac{v x}{c^2}\right)$$

また、以下の関係式が成り立つので

$$r'^2 = \beta^2 x^2 + y^2 + z^2 = \gamma^2 \{x^2 + (1-\beta^2)y^2\} = \gamma^2 \{x^2 - \beta^2 \sin^2 \theta\}$$

したがって r' は

$$r' = \frac{r}{\gamma} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2 \sin^2 \theta}}$$

となる

まとめと

実験室系からみて、運動する電荷が相対論的領域に到達すると下の式でいふところの $\sin^2 \theta$ の項がでてきて分布が球対称ではなくなる

$$\begin{aligned} E_x &= E_x, & E_{y,z} &= \gamma(\mathbf{E} - \mathbf{v} \times \mathbf{B})_{y,z} & \text{and} & \quad \begin{aligned} E_y &= \gamma E_y \\ E_z &= \gamma E_z \end{aligned} \\ B_x &= B_x, & B_{y,z} &= \gamma\left(\mathbf{B} + \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{E}')\right)_{y,z} & \text{and} & \quad \begin{aligned} B_y &= \gamma B_y \\ B_z &= \gamma B_z \end{aligned} \end{aligned}$$

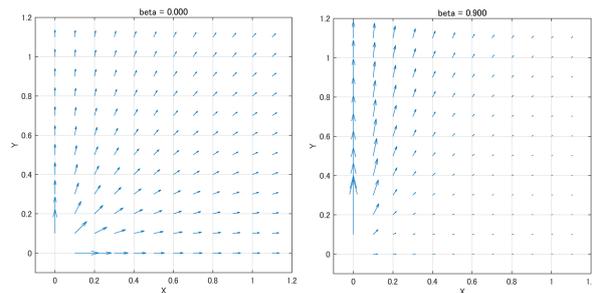
$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \\ \vec{B} &= \mu_0 \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \vec{E} \end{aligned}$$

途中の詳細は各スライドを見て頂くとして、最後の [Slide p45] にも記載した通り最終的には以下のように

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \quad (10)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \quad (11)$$

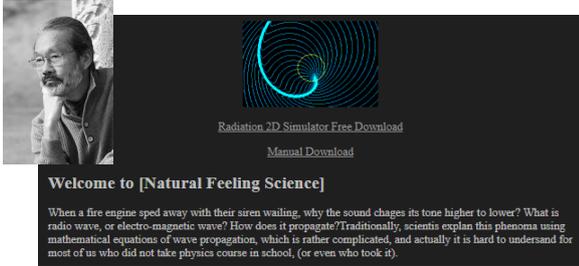
となります。 $\beta \sin^2 \theta$ の項が出てくるため、実験室系で球対象であった電磁場が粒子の速度に応じて角度分布が変わることがわかります。電場を例として、大きさをベクトルの長さで示したものを掲載します(ここには代表例として2つのみ掲載します)。詳細には [Slide p46~48] をみてください。p49 はアニメーションになっています。



最後に、運動する電子がどのような電磁場を発生するのかについて、とても分かりやすいデモとして新竹積氏が作成された “Shitanke Radiation (Radiation 2D Simulator)” を紹介します。

余談：イメージをつかむために

- 新竹さんの作成された、“Radiation 2D Simulator”
- <http://www.shintakelab.com/en/enEducationalSoft.htm>
 - 現在サイト消滅 → 昨日連絡をとり、OHOのサイトへのupload許可頂いた
 - 残っているのはUSPASのサイトの [Physics Demonstration](#) (IEver)



51

残念ながら以前に公開されていたサイトは消滅してしまっています。御本人から OHO の Web サイトに掲載許可を頂きましたので 2008 年バージョン*10 をアップロードしました <http://accwww2.kek.jp/oho/oho20/oholecture2020.htm>。Windows 専用プログラムです。このプログラムについては論文 (EPAC2002 に掲載 [7]) が出ていますのでそちらも参照してください。

この章の最後に、1つ実用的な(?) 話題を取り上げます。それは図7のように「2つの電子が同じ速度で動いたとき、お互いに及ぼす力はどうなるか?」という話です。静止しているときは Coulomb 則ですので、同じ電荷であれば斥力を及ぼし合います。では相対論的な電子では? ということでこれは実際の加速器のなかでも、バンチ内の電荷でおきている現象です。特に低エネルギーの電子や、陽子加速器でよく問題になる「空間電荷効果」と呼ばれるものに通じます。2個の電子であれば簡単に計算できますので試してください。

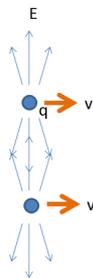


図 7: 2つの電子が並行に動く場合

*10これが最新版とのこと。USPAS のサイトに掲載されているのは少し古いバージョンです。本講義後の質疑時間に「境界条件の入ったモノが欲しい」との話がでしたが、私も同意します。誰か作りませんか?

3 Beam Position Monitor

この章ではビーム診断の基礎となるビーム位置モニタ (Beam Position Monitor, BPM) について取り上げます。具体的なモニタの種類やその設計については他の講義 (高井氏、宮原氏の講義など) を参照してください。

図8のような円筒型のビームダクト中を荷電粒子が移動する場合を考えて x, y のビーム位置をどのようにして検出するかを考えます。

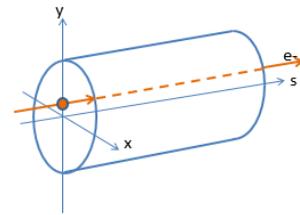
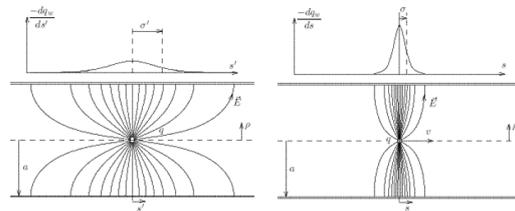


図 8: 円筒チャンバーとビーム軌道のイメージ

前章の議論はすべて自由空間での電磁場について記述してきましたが、実際の加速器は真空を保つため金属製の容器 (真空チャンバー) で囲まれています。したがって、仮に荷電粒子が静止していたとしても電場は球状にはならず図9左のように壁面に対して垂直に電場が立ち、壁面には符号が逆の電荷が誘起されます [8]。そして、電荷が動いているときには相対論的效果によって電場は進行方向に対して垂直の面 (Transverse 方向) に集中するので図9右のようになります。s 軸にそって積分すれば壁面の総電荷は電荷 q と等しく (符号逆) なります [Slide p56]。



Electric field of a static and a moving charge ($\gamma = 4$) in a circular cylindrical chamber

図 9: 円形チェンバーでの電磁場。A. Hofman, “Dynamics of Beam Diagnostics”, CERN-2009-005 figure 4 より引用

高エネルギー加速器の場合 (超相対論的近似が成り立つ場合)、進行方向の電場広がりは無視することができますので壁面で測定する粒子分布はもとの荷電粒子の分布

と等しくなります。ということは、ダクト中でのビーム位置を計測するには粒子の進行方向分布を無視できて、2次元の静電場問題とみなすことができる、ということです。あるいは無限に続く直流(DC)電流成分だけ考える、という言い方もできるでしょう。簡単のため、円筒は無限に長いと仮定(ビームが斜めに動く効果も無いと仮定)すれば、チャンパー内の「鏡像電荷」の分布から、ビーム位置を計算することが可能です。例えば、ビームが真空容器の中心にいれば鏡像電荷は壁面に均一に分布することは明確です(図10左)、右図のように中心からずれた位置にいれば、鏡像電荷が偏りますので、この電荷分布からビームがどの位置にいるかを算出することが出来ます。

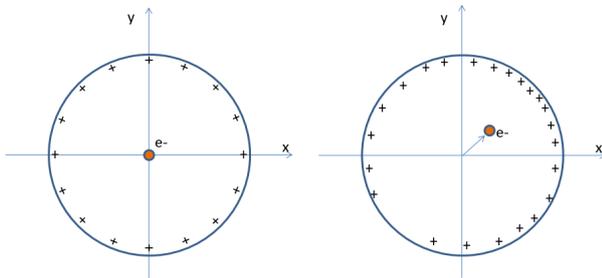


図10: 円筒チャンパー中央にビームがある場合(左)および中央からずれた場合(右)の鏡像電荷分布。図はきちんとスケールして書いたものではなく、イメージです。

ここでは無限に長い線電荷(線電荷密度 λ)を考えます。全ての電場は線電荷に対して垂直方向のみで、進行方向成分は無いため、これにガウスの法則を適用するには図[Slide p58]のようなディスク上の領域を考えれば良い。この体積内に含まれる電荷量はディスクの厚さを d として λd であり、ディスク側面の面積は半径 r とすると $2\pi r d$ ですから、電場に対するガウスの法則(式1)を適用すると図左下の式となります。

もういちど、ガウスの法則

- 無限に長い線電荷(線電荷密度 λ)を考える
- 全ての電場は線電荷に対して垂直方向のみ。進行方向成分は無い

Gauss's Law: $\int E dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$

$$2\pi r d E = \frac{\lambda d}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad \text{then} \quad V = \text{const} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log r$$

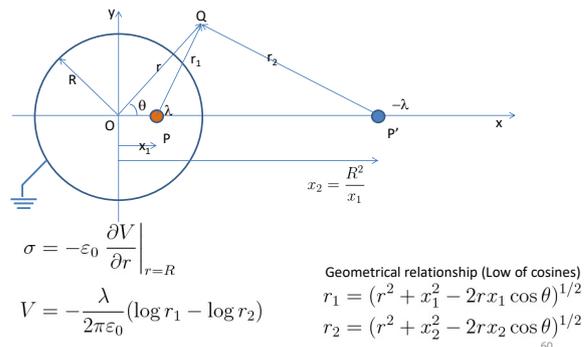
58

ここから電場 E およびスカラーポテンシャル V は容易に求めることができ、 $\log r$ の形となります。

さて、真空壁は電位ゼロの境界となります。ここでは半径 R の円形チャンパー中心から x_1 だけ離れた場所に線電荷 λ があるとして、簡単のため x 軸を図[Slide p60]のようにとります。ここで原点から $x_2 = R^2/x_1$ の位置に逆符号の電荷 $-\lambda$ を配置すると、2つの線電荷のつくる電場は半径 R の電位ゼロ境界を表すことができます。これを電気鏡像法*11と呼ばれる手法でお馴染みでしょう。

電気鏡像法(電気映像法, method of images)

- 2つの線電荷を配置することで、ポテンシャル(V)がゼロのチャンパー壁(=Ground Level)を表現できる



まずは半径 R 上で電位がゼロになることを確認します。2つの線電荷が任意の点 Q につくる電位は図[Slide p60]の左下に書いた形になり、 r_1, r_2 は単純な余弦定理(law of cosines)によって求めることができます。ここ

*11 学部で電磁気学ではじめて習ったときには「うまく考えて便利だけど、こんなものが何の役に立つのか?」と思ったこともありますが... 実際、かなり役立ちます。このほかにも並行平板による鏡像電荷もビーム力学計算で出てくることもあります。

で、 $x_2 = R^2/x_1$ としていますので、置き換えて電位を計算すると [Slide p61] の最後の式となります。これをみると、電位が角度 θ に依存しない、すなわち定数であることが分かります。これで円筒境界上の電位は一定であり、適当な定数をとればそれをゼロにできることがわかります。

ここで、 $x_2=R^2/x_1$ と置くことと円筒境界を満足することを確認する

$$V = const - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} (\log r_1 - \log r_2) = const - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{r_1}{r_2}$$

using $r_1 = (r^2 + x_1^2 - 2rx_1 \cos \theta)^{1/2}$ and $x_2 = \frac{R^2}{x_1}$
 $r_2 = (r^2 + x_2^2 - 2rx_2 \cos \theta)^{1/2}$

$$= const - \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \log \left\{ \frac{r^2 + x_1^2 - 2rx_1 \cos \theta}{r^2 + (R^2/x_1)^2 - 2r(R^2/x_1) \cos \theta} \right\}$$

$r=R$ と置くことで円筒境界の電場を求めることができる:

$$= const - \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \log \frac{1}{R^2} \leftarrow \theta \text{に依存しない=定数}$$

61

電位が分かったので、次に欲しいのは境界面上ではどのような電荷分布になっているか、という情報です。これは図 [Slide p62] に示すように動径方向に微分すれば良く

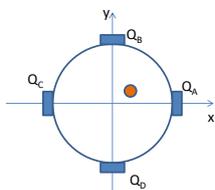
鏡像電荷の分布

チャンバー上の電荷分布はポテンシャルを動径方向に微分して

$$\sigma = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{\lambda}{2\pi R} \frac{R^2 - x_1^2}{R^2 + x_1^2 - 2Rx_1 \cos \theta}$$

となる。簡単のため "normalized position" として $P=x/R$ を使用すると以下のようにも表現できる

$$\sigma = \frac{\lambda}{2\pi R} \frac{P^{-1} - P}{P + P^{-1} - 2 \cos \theta}$$



図のような位置に電極を配置。
各電極に発生する電荷量から x, y 位置を計算する (線形近似)

$$x = k_x \frac{V_A - V_C}{V_A + V_C}$$

$$y = k_y \frac{V_B - V_D}{V_B + V_D}$$

62

となります。当然ですが $x_1 = 0$ とすれば一定分布となりますし、例えば $R = 54 \text{ mm}$ の円形ダクトに対して (後述する PF-AR のダクト) ビームが中心から 5 mm , 10 mm とずれたとき^{*12}にどうなるかを図 11 に示します。角度 $\theta = 0$ がビームが動いていく方向で、近づくにつ

^{*12}蓄積リングでは実際にはこんなにずれることはほとんどない (はず) です。Linac では調整によって大きな変位を出すことは可能です。

れて大きくなり、反対側の電圧が下がります。図 [Slide p62] に示すように、円周上の 4 か所に電極を配置してその表面に誘起される電荷量から位置を計算することが出来ます。ここに記載しているのは通称 Δ/Σ 法と呼ばれるもので、ダクト中心付近でのビーム位置は左右の電圧「差」に比例することを利用して使っています。

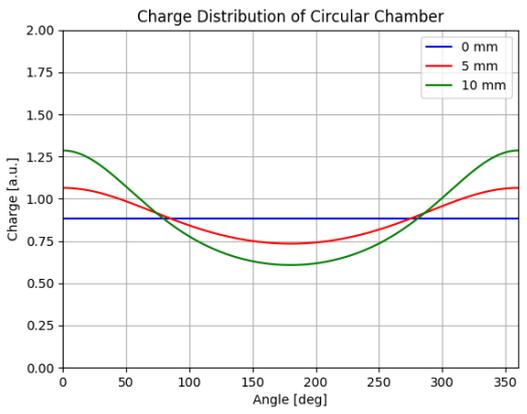


図 11: 円筒チャンバー上に誘起される電荷分布。縦軸は適当にスケールしている。

図 [Slide p63] に実際に使われているボタン電極の例を示します。具体的な設計指針などは参考文献 [9] を参照してください。

電極の例



KEKBのBPM (1/4 cut mode)
N-connector



周波数特性を改善するためガラスフィードスルーを使用したボタン電極の例。SMAコネクタ。
ceramics $\epsilon_r \sim 10$
> glass = $\epsilon_r \sim 4$

M. Tobiyama
Proc. IBIC2012 tuta02 talk

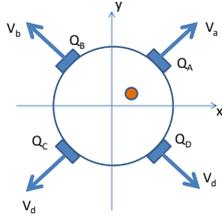
63

電極の配置は上下左右だけには限りません。蓄積リングでは放射光が当たってしまうのを避けるために、45度回転した図 [Slide p64] のような配置を取ることが多くあります。この場合も計算式は大差ありません。式の意味合いは明確と思います。

ピックアップ電極の配置例

円形ダクト+45 deg rotated 配置

- 放射光リングでは、光が当たるのを避けるためこのような回転配置をとる場合が多い。



このときの x,y 位置計算式

$$x = k_x \frac{(V_A + V_D) - (V_B + V_C)}{V_A + V_B + V_C + V_D}$$

$$y = k_y \frac{(V_A + V_B) - (V_C + V_D)}{V_A + V_B + V_C + V_D}$$

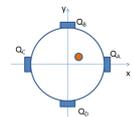
64

ビームがダクト中心付近にあるときにはこのような線形近似で十分です。中心から外れた場所では、高次の多項式近似を使ったり、電圧の Log をとったり、AM/PM 法と呼ばれる方法を使ったりします。それぞれに利点と欠点がありますが本講義では k これらの手法の比較は行わず多項式での例を紹介するのみとします。他の手法に興味のある方は参考文献 [10] に詳しいので参照してください。

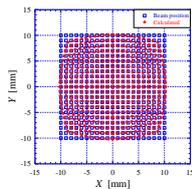
多項式の定義の仕方にも色々な可能性があります。よく使われるのは、図 [Slide p66] のように U, V として電荷量で規格化した位置を定義して、それらの多項式として計算する方法です。もちろん 1 次だけ使うと前のスライドで説明した式と一致します。同じ図にマッピングの例を示します。青色が元のビーム位置で、赤色で示したものが多項式による計算です。これらの計算は円形ダクトであれば先に述べた電荷分布の解析式から導くことができます。

多項式での計算例

• 例えば U, V を定義 $\frac{V_A - V_C}{V_A + V_C} \equiv U$ $\frac{V_B - V_D}{V_B + V_D} \equiv V$



$$x_{pos} = k_0 + k_{11}U + k_{12}V + k_{21}U^2 + k_{22}UV + k_{23}V^2 + k_{31}U^3 + k_{32}U^2V + k_{33}UV^2 + k_{34}V^3 + \dots$$



cERL での BPM 位置計算例 (5 次多項式)
おおよそ $-5\text{mm} < (x, y) < +5\text{mm}$ の範囲では Linear で良い

理想的にはビームをこの範囲内に保って運転することが望ましい。(蓄積リングではだいたい実現可能。しかし、Linac ではどこでも通ることができる)

注: 通常は 4 電極和は電荷量に比例する。
 x, y が大きくなると補正が必要となる

66

一方で、加速器のダクトは必ずしも円形ばかりではあ

りません。単純な形状であれば鏡像電荷の配置を工夫することで解析解を求めることができる場合もありますが、数値計算で行う方が現実的でしょう。そして今では有償・無償含め様々なツールが存在しています。よく使われるソフトとして CST Particle Studio/Microwave Studio, GdfidL, MAFIA, Poisson/Superfish などが挙げられます。これらの計算ツールでは大きく分けて 2 つの手法が使われます

- 有限要素法 (FEM, Finite Element Method)
- 境界要素法 (BEM, Boundary Element Method)

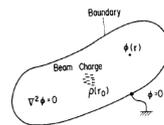
FEM では計算したい空間をメッシュで区切り、各点での電位など各種の物理量を計算します。一方で BEM は注目している境界部分を区間で区切り、その上に電荷を配置してポワソン方程式を解きます。したがって、数値計算の速度や誤差の点で (2 次元メッシュではなく 1 次元の分割だけで済むので) 有利になります。また、単純なので自分でプログラムを書くこともできます。ぜひ挑戦してみてください。

詳しくは新竹氏の執筆された NIM 論文 [11] を参照してください (本講義のスライドやこの文書は、あくまでも概略を紹介することが目的です。元の論文を読むことをお勧めします)。

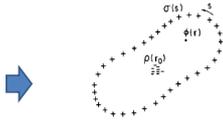
解きたい問題は図 [Slide p68] 左下にあるような、真空容器をポテンシャルゼロの金属境界とした領域の内側にある電荷が境界上につくる電磁場を求めることです。これはラプラス方程式 $\nabla^2 \phi = 0$ を満たし、境界条件として $\phi = 0$ を満たします。そして、この問題は右下の図のような、境界上に分布した電荷と内側の電荷からつくるポテンシャル問題と等価です。

境界要素法

- Boundary Element Method (BEM)
 - FEM uses 2-Dim "mesh"
 - BEM uses 1-Dim "line charge"
- 有限要素法は非常に細かい構造の計算には有利
- 境界要素法は高速かつシンプル。実は高精度。簡単に自分で実装できる。
- Reference : T. Shintake, et al., NIM A254(1987) 146-150



Original problem. The field satisfies the Laplace equation $\nabla^2 \phi = 0$ and $\phi = 0$ on the boundary.



Equivalent problem described by free charges only

68

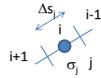
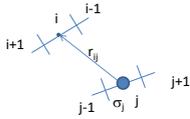
領域内のポテンシャル $\phi(r)$ は表面電荷と実電荷との和となります。ここで詳細な式を再掲することはしませ

んが、流れとしては各電荷からのポテンシャルを計算して、区間を十分小さく区切ることで積分を和に変えるという常套手段です。このようにすると単に逆行列を計算するのみとなります。

1つだけコメントを追加したのが図 [Slide p71,72] です。ソースとターゲットとの距離が離れている場合 G_{ij} の計算は特に問題ありませんが G_{ii} の場合は発散するので少しだけ注意が必要です。

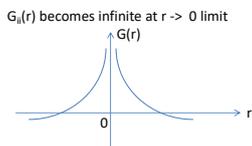
Comment

- How to treat $i=j$ case?



G_{ij} has the form

$$-\ln \left(\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \right) \Delta s_j$$



However, you can integrate from 0 to some length

$$G_{ii} \text{ has the form } -\Delta s \left\{ \ln \left(\frac{\Delta s}{2} \right) - 1 \right\}$$

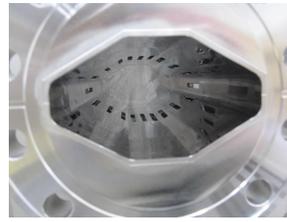
71

図 [Slide p73, 74] は元論文にある図のままです。サンプルとして PF-AR のダクトでの計算が掲載されています。最近の計算機の能力であれば 100 分割よりもっと多く分割して計算することは容易です。ぜひ試してください。円形ダクトの場合は数値計算の結果と解析式との比較が容易ですので、ちょうど良いサンプルとなるでしょう。図 [Slide p75] は論文掲載と同じダクト形状で、BEM による計算をおこなった例です。このようにチェックを行った後で、任意のダクト形状に拡張することをお勧めします。

図 [Side p76] は cERL アーク部のダクト形状の例を示しています。例えば 4 電極を使うとして、どの位置に、どのサイズの電極を配置するのが良いか検討する際に BEM を活用すれば計算時間が早いので便利です。実際の設計にあたってどのように配置すべきかは色々な指針 (流儀) があります。例えば、x, y の係数が偏りすぎないように、とか、非線形項を使わずにどこまで Linear 計算でカバーできるか、などです。ポタン電極であれば、次の章で述べる時間応答まで考慮してサイズを決めるのが良いでしょう。

BEMなら任意の真空容器形状に対応できる

例：cERLのアーク部のダクト形状



※ 例えば4電極を使うとして、どの位置に、どのサイズの電極を配置するのが良いか検討する際に使うことができる。
例：x, y の係数が偏りすぎないように、とか、非線形項を使わずにどこまで Linear 計算でカバーできるか、など検討

76

3.1 時間応答とビーム計測

ここまでの話で、真空チャンバー内の "static な" 電荷分布の計算ができるようになりました。これは時間方向には無限長の電荷が存在していることと等価でした。実際のビーム計測では、加速器内の電荷は時間方向に塊 (バンチ) を形成しています。そこで次の段階としてバンチの時間構造やピックアップ電極の周波数特性などについて簡単に説明していきます。おおまかなイメージを持つことを目的として詳細はそれぞれの参考文献に委ねます。

まずは平松先生の教科書 [1] より引用します。静電型モニターは一般化すると [Slide p78] にあるように、ビーム電流に相当する電流源と、検出部である抵抗成分とキャパシタンス成分から記述することができます。典型的なポタン電極では数 pF 程度、検出用の抵抗は通常 50Ω を使うことが多いです。この等価回路は

$$\frac{dq}{dt} = C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} \quad (12)$$

となり、この解は

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t \frac{dq(t')}{dt'} e^{-(t-t')/CR} dt' + v(t_0) e^{-(t-t_0)/CR} \quad (13)$$

となります。ここで第 1 項がバンチ形状に依存する部分で、第 2 項は時間とともに変化する成分で最終的にはゼロになる成分です。KEKB でのバンチ形状で計算した例は [Slide p80] に記載します。実際に PF-AR で観測した BPM 信号の例を図 12 に示します。測定に使ったのは 500 MHz 帯域のオシロスコープです。

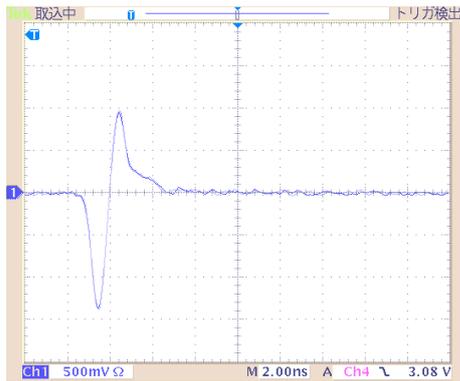


図 12: PF-AR single bunch でのビーム測定例。横軸 2 ns/div。

オシロスコープは入力信号の「時間変化」を表示する測定器で、横軸を時間、縦軸を電圧として表示します。

一方、目的によっては時間領域 (Time Domain) で信号を測定するのではなく、どのような周波数成分をもっているかを測定した方がビームの振る舞いを解析する上で便利なが多くあります。これは周波数領域 (Frequency Domain) での測定と呼ばれ、通常はスペクトラムアナライザと呼ばれる装置で測定します。^{*13}例えば Keysight 社の 'Spectrum Analysis Basics' などに詳細な説明があります [Slide p82][12]。

さきほどのボタン電極の信号を周波数領域でみるとどのように見えるのでしょうか。式 13 の解 (の振動項) は

$$\begin{cases} v = V(\omega)e^{-j\omega t} \\ q = Q(\omega)e^{-j\omega t} \end{cases} \quad (14)$$

の形をしていることは明らかですので、これを代入すると電圧は以下の式で表すことができます。

$$V(\omega) = \frac{Q(\omega)}{C} \frac{j\omega}{j\omega + \frac{1}{CR}} \quad (15)$$

この形から、電圧の周波数成分はもともとの電荷分布 $Q(t)$ を周波数領域で表した $Q(\omega)$ に対して、ピックアップの周波数特性を乗じたものになる、ということです。周波数が低い時、すなわち $\omega \ll CR$ の領域であれば分母第 2 項は無視できるため $V(\omega) \propto CR$ となり、周波数が高い時 $\omega \gg CR$ では逆に周波数依存項が無くなって $V(\omega) = \text{const.}$ となるのが分かります (もちろんこれ

^{*13}もちろん時間領域で取り込んだ後で FFT (Fast Fourier Transform) をかけるやり方もあります。これは低周波領域で良く用いられる手法で、このときには FFT アナライザと呼ばれる装置をつかうか、計算機で取り込んだ後に解析したりします。

に電荷の周波数分布項 $Q(\omega)$ がかかります) これを図示したものが図 13 です。



図 13: ピックアップ電極の周波数特性のイメージ。

実際の測定では、加速器トンネル内から外の測定室まで同軸ケーブルを使用することが大部分です。このとき、周波数特性が高いと減衰量が大きくなります。個別の特性は各社が出しているスペックシートで確認^{*14}するのが確実です。実験室でよく使っているケーブルに RG58 ケーブル^{*15}がありますが、これは 1 GHz で約 0.6 dB/m の減衰量です。シールド性の問題もありますのでおおまかにいって 1 GHz より上の信号では使うべきではありません。本当は 500MHz でも避けたいところです。減衰量だけに注目すれば、一般的に径の大きい (太い) ケーブルを使う方が有利で、高周波特性 (周波数分散特性や位相安定性) を考慮すると中の絶縁体の材質まで含めて検討することが必要となります。特にパルス波形 (矩形波) をちゃんと伝送しようとするればこのあたりに気を付けましょう。逆に同軸ケーブルを高周波数領域の信号を減衰させるための Low Pass Filter として活用する場合もあります。ビーム信号の周波数特性と、これらケーブルの特性まで考えてイメージすると図 14 のような形になることが理解できると思います。

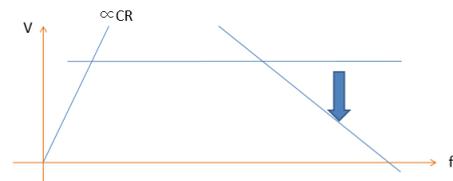


図 14: 同軸ケーブルの損失を考慮するとこうなる。また、一般的にバンチ形状の周波数成分も高周波領域では下がっていく。

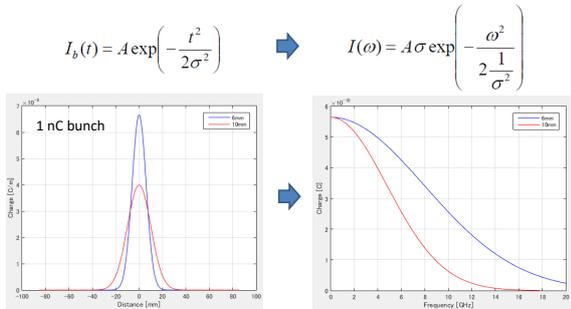
^{*14}昔は「電線便覧」というキーワードだった気もしますが、これは死語になりつつあるのでしょうか

^{*15}RG は Radio Guide の略。58 は米国での型番です。JIS 規格では 3D-2V に相当します。

次にビーム形状に起因する因子 $Q(\omega)$ の項について考えます。加速器中を周回しているバンチは一般に進行方向にガウス分布をしています*16。これを周波数領域に変換するにはお馴染みのフーリエ変換です。詳細は付録 A を参照して頂くとして、ガウス分布をフーリエ変換するとガウス分布になることはすぐに理解できるでしょう。時間領域でバンチ長が長いときと短いときに、周波数領域でどのように見えるかを図 [Slide p89] に示します。この特性を使ってバンチの長さを測定するというも行われています [13]。最近ではより短いバンチの長さを測定するために THz 領域の信号を使ったりもします。

Gaussian Beam

- The single bunch spectrum rolls off in high frequency depending on its bunch shape (Gaussian for electron storage ring).



89

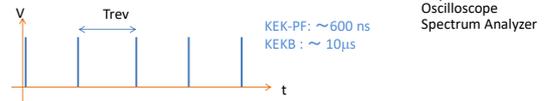
ここで、ひとまずバンチ形状のことを忘れて蓄積リングの1カ所でビームをみるとどのように見えるか、という話をします。簡単のためバンチは非常に短いインパルス形状とすれば、周波数領域では無限に続くインパルス列になります。例えば PF の場合はリング1周を周回するのに約 600 ns を要しますので、周波数領域では約 1.6 MHz おきの線スペクトルが測定できます。KEKB の場合は周長が長く約 3 km ありますので、周回に 10 μs を要し、これは周波数領域では 100 kHz の密な線スペクトルとなります [Slide p90]。

*16線形加速器や陽子リングでは異なる場合もありますが、大きくは変わらないことが多い

Beam signal : single bunch or bunch train

- Monitor a bunch at some location of the ring
- Assume a "Impulse" beam

$$I(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q\delta(t - nT_{rev})$$



In frequency domain : Fourier transform $I(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q\delta(\omega - n\omega_{rev})$



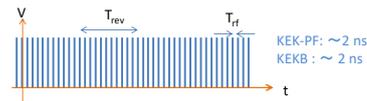
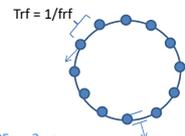
90

さらに複数のバンチをリングに蓄積するとどうなるでしょうか。リング内に n 個のバンチを蓄積したとすれば、各バンチの時間間隔は [Slide p91] に示すように 2 ns となります。このとき周波数ドメインでは周回信号の成分は完全に消えてしまい、RF 周波数おきの信号となります。例えば PF では 1.6 MHz の周回周波数成分は消えてしまい、500 MHz おきの線スペクトルだけ残ることがわかるでしょう。このように時間領域で密になるほど周波数領域では疎になります。

multibunch

Every bucket are filled with bunch

$$I(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q\delta(t - nT_{RF})$$



In frequency domain : Fourier transform

$$I(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q\delta(\omega - n\omega_{RF})$$



91

以上で全ての道具立てがそろったので、実際の信号がどのようなかを見てみましょう。図 15 に AR で単バンチ運転したときの、ボタン電極で測定した周波数領域信号を示します [Slide p101]。縦軸で使われるデシベル表記 (dB, dBm など) に関しては付録 B を参照してください。本当は周回周波数 (AR では 800 kHz) ごとに線状にスペクトルが立っているのですが、この横幅だと一様に塗りつぶされて表示されています。横軸 (周波数軸) を拡大すれば判別できます。次に、前に説明した通り、

ボタン電極は DC 成分が通じませんので、左端に向かっては信号レベルが下がっています。そして、周波数が高くなるに従って信号が減衰していることが分かります。ただし、縦軸が Log 表示であることに注意してください。リニアスケールで見るとかなり印象が異なります。もう1つ注目すべき点はマーカーの位置(約1.8GHz)付近からスペクトルの形状に凸凹が見えることです。これは真空容器を金属の導波管としてみたときにカットオフ周波数より上の信号成分は伝達するというを示しています。目的によりますが、例えば「ビーム位置を測定したい」のであればこれより上の周波数を使うべきではありません。

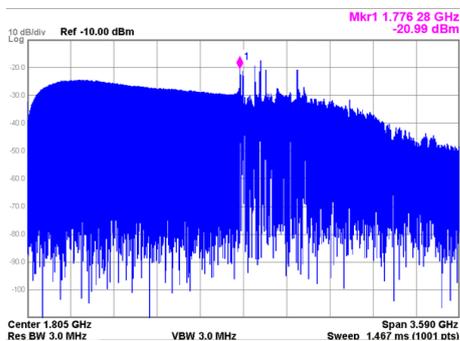


図 15: PF-AR 単バンチ運転時のスペクトル。横軸は周波数で0~3.6 GHz の範囲を表示している。水平 360 MHz/div, 垂直 10dB/div, Reference Level -10 dBm。

次に、PF-Ring で全バケットに蓄積したときの信号を示します。RF 周波数は 500 MHz で、その整数倍にピークが見えており、その間にはほとんど信号が見えない (30 ~ 40 dB 下のレベル) ことがわかります [Slide p102]。

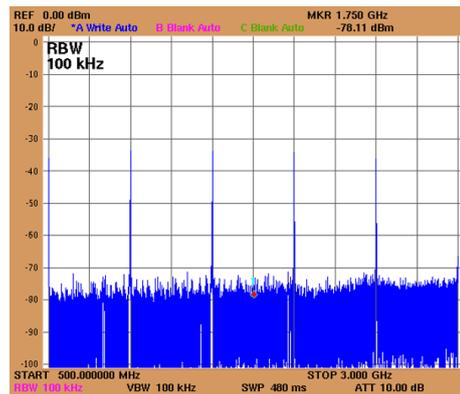


図 16: PF-Ring の全バンチを入射したときの信号。横軸 500 MHz ~ 3 GHz。

それでは、全バケットに蓄積するのではなく、一部にビームが無かった場合はどのように見えるのでしょうか? [Slide p103~105] に掲載したように、大局的には矩形波とみなすことができ、パルス列の幅に応じて sinc 関数 (= $\sin(x)/x$) の形となります。そして信号強度が下がる場所がパルス列の幅に相当します。スライドでは先に周波数スペクトルを出してそこから時系列を推察するという話にしましたが、時系列から周波数の方が理解はしやすいかと思います。ただし、frequency domain と time domain は 1 対 1 の関係なのでどちらからでも変換できることが望ましいです。実際に、ビーム不安定現象への対策のために「この周波数成分を落としたいので、バンチの時間構造を変える」ということも行っています。

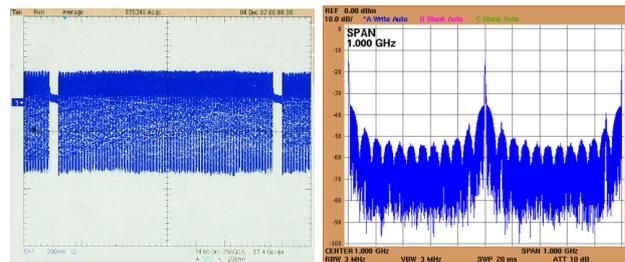


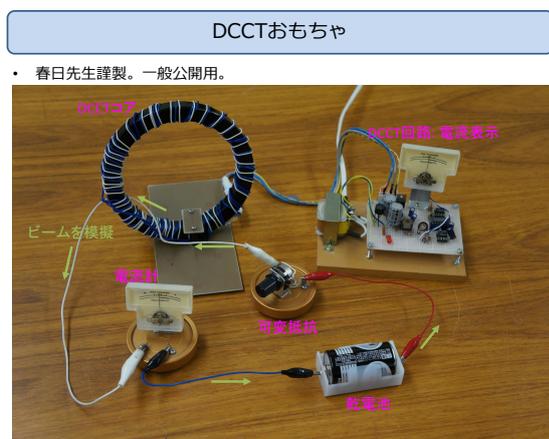
図 17: PF バケットの一部にビームが無い場合の時系列信号 (左, 80 ns/div, 200mV/div) およびその周波数領域での信号 (右, CF 1 GHz, Span 1 GHz)。

4 ビーム強度測定

ここから先のトピックスは講義では時間が無いため省略しました。ただしスライドは残してありますので [Slide

108 - 121] 興味のある方はざっと見て頂くと良いかと思
います。

1つだけコメントすると、DCCTの原理はそんなに
難しいモノではありません。とはいえ、現実的に高精
度なものを作ろうとすると加速器の周りにある外部磁
場や温度変化など様々な外乱が影響します。また、真空
容器のどこかに金属壁を切る部分（通常はセラミックス
で製作する）が必要になり、ビームが誘起する高周波信
号への対策や、発熱対策も必要になるなど色々大変で
す。[Slide p116] は一般公開用に春日俊夫先生がつくっ
たDCCTおもちゃです^{*17}。少し分かりづらいかもしま
せんが、中央付近の白いケーブル（ワニ口クリップ付
き）と、電流計・乾電池・可変抵抗からなるループ部分
がビーム電流を模擬しているところ。回路につながっ
ているのがDCCTとしての検出回路です。真空対応では
ないことを除いては実際に使われるDCCTと同じ原理で
動作します。このようなおもちゃを作ることも原理の理
解に役立ちます。ほかにもストリップラインで電気信号
の伝わる早さを測定するおもちゃなどもありますので、
興味のある人は連絡してください。



・ 春日先生謹製。一般公開用。

5 最後に

ビーム計測の基礎となる電磁気学から位置モニターの
解説、覚えておくと現場で役立つだろうと思われる知識
などを書き散らかしてきました。これをきっかけに、計
測に興味を持つ人がおられたならば存外の喜びです。執
筆にあたってはPF, KEKB, Linac, J-Parcをはじめ多

^{*17}立派な箱に入れるのではなく、できるだけシンプルな構成にして
単純な原理を見せるのは重要。回路図もあります。

くのビームモニター関係者の協力を頂きました。ここに
感謝いたします。

参考文献

- [1] 平松 成範, 「加速器のビームモニター / Beam Instrumentation for Accelerators」, KEK Internal 2004-4
- [2] 金原 寿郎, 「電磁気学 (I) (II)」基礎物理学選書 12A, 裳華房
- [3] The Feynman Lectures on Physics <https://www.feynmanlectures.caltech.edu/>
- [4] 前野 昌弘, 「よくわかる電磁気学」, 東京図書, <http://irobutsu.a.1a9.jp/>
- [5] <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Electric-field-terrain-model-3D-potential-with-point.jpg>
- [6] https://commons.wikimedia.org/wiki/File:VFpt_cylindrical_magnet_thumb_potential
- [7] T. Shintake, “New Mathematical Method for Radiation Field of Moving Charge”, Proc. EPAC02, Paris, France (2002)1667, <https://accelconf.web.cern.ch/e02/PAPERS/WEPRI038.pdf>
- [8] A. Hofman, “Dynamics of Beam Diagnostics”, CERN-2009-005, p67 (Lecture Note of CERN Accelerator School 2008, Dourdan, France) <https://cas.web.cern.ch/previous-schools>
- [9] M. Tobiya, Tutorial Talk at IBIC2012, TUTA02.
- [10] R. E. Shafer, “Beam Position Monitoring”, AIP Conf. Proc. **249**, 601 (1992); <https://doi.org/10.1063/1.41980>
- [11] T. Shintake, et.al., “Sensitivity Calculation of Beam Position Monitor Using Boundary Element Method”, Nucl. Inst. Meth. **A254**(1987) 146-150, [https://doi.org/10.1016/0168-9002\(87\)90496-7](https://doi.org/10.1016/0168-9002(87)90496-7)

- [12] Keysight Application Note 150, “Spectrum Analysis Basics”, <http://literature.cdn.keysight.com/litweb/pdf/5952-0292.pdf>
- [13] T. Ieiri, “A real time bunch-length monitor using the beam spectrum and measurements of bunch lengthening”, Nucl. Inst. Meth. **A329**(1993)371 [https://doi.org/10.1016/0168-9002\(93\)91272-0](https://doi.org/10.1016/0168-9002(93)91272-0)
- [14] R. Bracewell, “The Fourier Transform and its Applications”, McGraw-Hill, (1978)

付録 A フーリエ変換について

私が大学院生のときに指導教員から教えて頂いた参考書として R. Bracewell 著の “The Fourier Transform and its Applications” [14] を挙げておきます [Slide p86～89]。Time Domain/Frequency Domain をイメージでつかむにはこの本が素晴らしいと考えています。残念ながら Amazon では売り切れていたり高騰してたりしますが、研究所や大学の図書館にはあると思います (KEK の図書にはありました)。

この本では関数 $f(x)$ のフーリエ変換を $F(s)$ と定義するとき、下の式のように規格化項を \exp の肩に乗せる流儀で、

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi xs} dx$$

および

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{-i2\pi xs} ds$$

のペアで定義します。 $f(x)$ がガウス分布であれば $F(s)$ はガウス分布になるのは明らか。

このほか、Frequency Shift / Time Shift Theorem とかがグラフィカルに表示されているので初学者にとって直感的な理解を助けると思います。後ろの方では因果律 (causality) とヒルベルト変換の話とかも出てきたりします。

付録 B デシベルについて

オシロスコープは (通常の使い方では) 入力信号の時間変化、すなわち横軸に時間、縦軸に電圧を表示し、電圧はリニアスケールで表示します。どんなに良くてもダイナミックレンジは 2 桁 (100 倍) 無いくらいでしょう。例えばピークで 1 V の正弦波を表示したときに 1 mV の電圧を同じスケールで読み取ることはほぼ不可能で、10 mV の桁であっても苦しい (拡大すれば見えないわけではない) といったところ。もちろん、デジタル値として読み込んで処理すればもう少し良くなりますが、通常は有効ビット数 8bit 程度しかありません。一方で、スペアナは (通常は) 入力信号が非常に微弱なものから大信号まで幅広い入力電圧を表示することが必要です。例えば周波数によって信号強度が 100 倍違うというのは良くある話です。そのため、縦軸は「デシベル」単位で表示することが大部分です [Slide p95-97]

とても微弱な信号から大強度の信号まで、幅広い入力電圧をいちどに表示するにはどうするのが適切でしょうか。一般的に大きい（小さい）数を表す方法といえば、指数表現でしょう。そして指数表現した数字の常用対数をとると、指数部分を整数で表せるので簡単になります。つまり、 $\log_{10}10^{-2} = -2$ です（下の表の右端）。

数値	指数表現	\log_{10}
0.01	= 10^{-2}	→ -2
0.1	= 10^{-1}	→ -1
1	= 10^0	→ 0
10	= 10^1	→ 1
100	= 10^2	→ 2
1000	= 10^3	→ 3

また、log を使うと、掛け算を足し算で、割り算を引き算で表すことができるのもメリットで、後述する多段のアンプなど考えるときに役立ちます。

$$\begin{aligned} \log(ab) &= \log(a) + \log(b) \\ \log(a/b) &= \log(a) - \log(b) \end{aligned}$$

例えば、なにかのシステムで電力を伝えることを考えます。



図のように入力パワーを P_1 、出力を P_2 としたときに

$$B = \log \frac{P_2}{P_1}$$

これが「ベル」単位 B の定義です。ただし、実用上はベル単位が使われることはほぼ無くてこれを 1/10 倍した数値である「デシベル」単位が使われます。これはベル単位は実用単位として大きすぎて、日常生活とかけ離れた数字になることによります。例えばコップに入れる水の量を考えるときにはリットル l では小さな数値になりすぎ、ミリリットル ml だと大きな数字になりすぎるのが原因で「デシリットル」を使うのと同じ理屈です^{*18}。

$$\text{dB} = 10 \times \log \frac{P_2}{P_1}$$

^{*18}最近、デシリットルを見ることがなくなりましたね。一方でなぜかセンチリットル cl は根強くのこっている気がします（特にヨーロッパ界限）。センチデシベルにできなかったかというところ... アメリカだからでしょうか。アメリカの液体にはガロン・オンスがあるし。

また電力は電圧の 2 乗ですから、

$$\text{dB} = 20 \times \log \frac{V_2}{V_1}$$

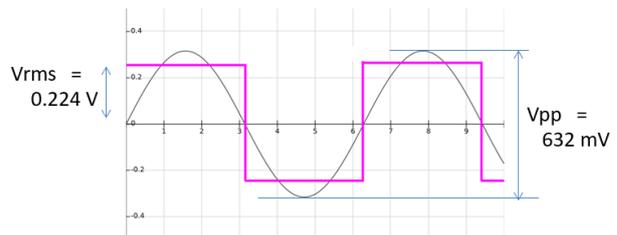
であることはすぐに分かるでしょう。下に覚えておくべき比率を一覧にします^{*19}。

dB	電力比	電圧比	comment
0 dB	1	1	$\log 1 = 0$
3 dB	2	1.4	$\log 2 = 0.31, \sqrt{2} = 1.41$
6 dB	4	2	
10 dB	10	3	$\log 10 = 1, \sqrt{10} = 3.16$
20 dB	100	10	
30 dB	1000	30	
40 dB	10000	100	

dB 単位は電圧の「比」を表すものでした。一方で、少し似ていますが dBm は「1 mW」を基準とした電力を表す単位です [Slide p98]。これも良く使うので覚えておきましょう。例えば 0 dBm は 1 mW のことで、1 W = 30 dBm となります^{*20}。

Q: 0 dBm の信号をオシロスコープの 50Ω 負荷で測定すると、何 V か？

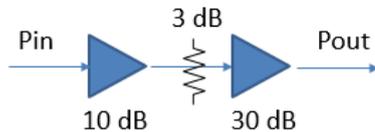
A: $P = V^2/R$ で $R = 50\Omega$ なので、これから計算すると $V = 0.224 \text{ [V]} = 224 \text{ [mV]}$ となる。ただし、これは「実効値」なので、ピーク電圧はこれの $\sqrt{2}$ 倍になり、もしオシロで測定するときの peak-to-peak であればさらに 2 倍となる。0 dBm の信号はオシロで測定するのにちょうどよい程度の電圧信号といえるでしょう。



回路でよく使うアンプや減衰器は dB 表示をすると便利です。例えば 1/3 に信号を減衰するのは $\log(1/3) =$

^{*19}10dB の電圧比は 3.16 倍だが、現場では 3 倍と覚えておくが吉
^{*20}実は dBm は SI 単位系ではなく、実用単位です。将来的には W に統一されて書いてはいけない単位になってしまうのでしょうか？現場レベルではなかなか消えないとは思いますが...

$-\log(3)$ のように引き算で考えることができるので、たとえば以下のように信号をつないだ時でも、信号をアンプしたり減衰したりするたびに \times 倍する Δ 分の1にする、などと掛け算で考えずに単に dB 数の加減算を考えるだけで済みます。



以下は雑談レベルの話です [Slide p100]。加速器でよく使う「dBm」単位は電力を表す単位（W 相当）であって、「dB」と言ったら相対的な量を示す単位であってなにかのゲインや減衰を表します。この2つを混同することはあり得ません。そして、なにかの絶対値を表すときには dBV とか $\text{dB}\mu$ など、dB の後ろに何かが付いた絶対レベル値を使います。一方で、音圧を表す業界はちょっと特殊で、慣例として「dB」といったときに勝手に基準音圧 = $20\mu\text{Pa}$ に対する相対値として表します。よく騒音計で \circ dB は図書館に相当し、工事現場は $\circ\circ$ dB といった表記を見たことがないでしょうか？正直言ってこれを見るたびに「dB といったら相対値だろう！」と、気持ち悪くて仕方がないのですがこれも業界の標準なので、従うしかありません。（場合によっては dB SPL と明示してある場合もあります。Sound Pressure Level の意。）
※ 通常の人間が感知できる最小音圧は $20\mu\text{Pa}$ と言われていますのでそれが基準らしい。